А. А. Марков, Теория алгорифмов, *Тр. МИАН СССР*, 1954, том 42, 3–375

ВВЕДЕНИЕ

1. В математике принято понимать под «алгорифмом» точное предписание, определяющее вычислительный процесс, ведущий от варьируемых исходных данных к искомому результату.

Типичным примером алгорифма является эвклидов алгорифм разыскания общего наибольшего делителя двух натуральных чисел. Роль исходных данных играет здесь произвольная пара натуральных чисел; предписание состоит в последовательном построении убывающего ряда чисел, из которых первое является бо́льшим из двух данных, второе — меньшим, третье получается как остаток от деления первого на второе, четвертое — как остаток от деления второго на третье, и т. д. до тех пор, пока не будет совершено деление без остатка; тогда делитель в последнем делении и будет искомым результатом алгорифма — общим наибольшим делителем двух данных натуральных чисел.

Следующие три черты характерны для алгорифмов и определяют их роль в математике:

а) точность предписания, не оставляющая места произволу, и его общепонятность — определенность алгорифма;

б) возможность исходить из варьируемых в известных пределах исходных данных — массовость алгорифма;

в) направленность алгорифма на получение некоторого искомого результата, в конце концов и получаемого при надлежащих исходных данных, — результативность алгорифма.

2. Сделанное только что описание алгорифмов не претендует на математическую точность. До последнего времени математики, однако, довольствовались тем несколько расплывчатым понятием, которое соответствует такому описанию. Это было допустимо пока термин «алгорифм» встречался в математике лишь в положительных высказываниях следующего типа: «для решения таких-то задач имеется алгорифм, и вот в чем он состоит». Никакие отрицательные результаты, никакие теоремы невозможности алгорифмов не могли быть доказываемы на этой стадии в силу нечеткости понятия алгорифма.

3. В последнее время рядом авторов были разработаны теории, естественно ведущие к уточнению понятия алгорифма. Мы имеем в виду работы Клина по теории рекурсивных функций [21, 23], работы Чёрча по теории λ-конверсии [14, 15, 17], работу Тюринга по теории вычислимых чисел [31] и работу Поста по теории «конечных комбинаторных процессов» [25].

Это дало возможность установить ряд важных отрицательных результатов — теорем невозможности алгорифмов. Сюда относится прежде всего теорема Чёрча [16] о неразрешимости общей «проблемы разреши-

мости» для исчисления предикатов. В качестве более конкретных результатов можно указать доказательства неразрешимости ряда проблем общей теории ассоциативных систем [3, 5, 6, 7, 10, 20, 28] и теории целочисленных матриц [4, 8, 10]. В последнее время П. С. Новиковым опубликован, быть может, наиболее замечательный результат этого рода — неразрешимость проблемы тождества теории групп [12].

4. Все только что упомянутые отрицательные результаты имеют существенное значение для дальнейшего развития математики, поскольку они выявляют в ее проблематике опасные потенциальные тупики, тем самым предотвращая возможность захода в них.

Всё значение для математики уточнения понятия алгорифма выявляется, однако, в связи с проблемой конструктивного обоснования математики. На основе уточненного понятия алгорифма может быть дано определение конструктивной истинности арифметического высказывания; на его же основе может быть построена и конструктивная математическая логика — конструктивное исчисление высказываний и конструктивное исчисление предикатов. Наконец, главным полем приложений уточненного понятия алгорифма несомненно будет являться конструктивный анализ — конструктивная теория вещественных чисел и функций вещественной переменной, находящаяся сейчас в стадии интенсивной разработки.

5. Все упомянутые в пункте 3 теории довольно сложны сами по себе и приводят к уточнению понятия алгорифма косвенным образом.

Теория рекурсивных функций [21, 23, 24] в основном имеет дело с тем частным случаем алгорифма, когда роль исходных данных играют натуральные числа, а результат его применения есть число. Переход к общему случаю требует поэтому арифметизации исходных данных и результатов, что достигается путем той или иной «гёделевской нумерации» [18] — процесса, состоящего в применении некоторого раз навсегда определенного, но довольно сложного алгорифма.

Уточнение теории алгорифмов на основе теории λ-конверсии Чёрча требует, помимо гёделевской нумерации, еще и громоздкого формального аппарата.

Теория «вычислимых чисел» Тюринга, в основном направленная на конструктивный подход к понятию вещественного числа, приводит к интересующему нас уточнению понятия алгорифма также косвенным образом. Изложение этой теории, данное ее автором [31], при этом содержит неточности, указанные Постом [28].

Наконец, теория конечных комбинаторных процессов Поста, весьма родственная теории Тюринга, совсем не была разработана и состоит в сущности из одного определения [25].

Ввиду всего сказанного автор считал целесообразным непосредственно заняться уточнением понятия алгорифма и разработать общую теорию алгорифмов на основе этого уточнения. Такая цель и преследуется в настоящей монографии.*

Автор полагает, что ему удалось удовлетворительно решить поставленную задачу и что излагаемая здесь теория алгорифмов исходит из достаточно простого и вместе с тем удобного определения «нормаль-

* Краткое резюме монографии составляют статьи [9] и [10]. В статье [9] имеются досадные опечатки: на стр. 185, в строке 3 снизу, вместо $\mathfrak{A}$ должно быть $\mathfrak{U}$ и в строке 2 снизу вместо $\mathfrak{A}$ ($\overline{\mathfrak{A}}$ должно быть $\mathfrak{U}$ ($\overline{\mathfrak{A}}$; на стр. 188, в строке 19, вместо точки должна быть запятая.

ного алгорифма». В какой мере это притязание оправдано, предоставляется судить читателю.

Было довольно естественно предполагать, что излагаемая здесь теория «нормальных алгорифмов» эквивалентна теории алгорифмов, основывающейся на понятии рекурсивной функции. В. К. Детловсом было показано, что это действительно так[1].

Настоящая монография посвящена лишь изложению основ теории алгорифмов и ее приложений к доказательству неразрешимости ряда алгорифмических проблем. Другие приложения этой теории, о которых упоминалось в пункте 4, заслуживают специальной книги, которую автор в будущем надеется написать.

6. Книга делится на шесть глав, обозначаемых римскими цифрами; главы делятся на параграфы; параграфы — на пункты. В каждом пункте отдельно нумеруются утверждения (т. е. теоремы, леммы, следствия) и отдельно — формулы.

Номера формул выписываются слева от них и заключаются в круглые скобки. При номере утверждения слева повторяется номер пункта, отделяемый от номера утверждения точкой.

Полная ссылка на утверждение состоит из номера главы, номера параграфа (предшествуемого знаком «§»), номера пункта и номера утверждения. Эти номера отделяются друг от друга точками, а вся ссылка заключается в прямые скобки. Например, [I. § 3. 9. 3] означает ссылку на утверждение 3 пункта 9 параграфа 3 главы I. При ссылке на утверждения той же главы номер главы опускается; при ссылке на утверждение того же параграфа опускается и номер параграфа.

Аналогично делаются ссылки на формулы, с той лишь разницей, что точка перед заключенным в круглые скобки номером формулы не ставится и что при ссылке на формулу того же пункта опускается номер пункта.

Несколько одновременно делаемых ссылок заключаются в общие прямые скобки и отделяются друг от друга запятыми.

7. Содержание книги несколько раз излагалось автором в курсах лекций, читавшихся в Ленинградском университете. В результате обмена мнений со слушателями и накоплявшегося опыта, изложение предмета постепенно совершенствовалось. Автор считает своим приятным долгом поблагодарить всех своих слушателей за многочисленные критические замечания, сыгравшие большую положительную роль. В особенности автор хочет поблагодарить Р. В. Петропавловскую и Н. А. Шанина.

Рукопись книги была тщательно просмотрена В. А. Залгаллером и Н. А. Шаниным, сделавшими ряд ценных замечаний, повлиявших на окончательную редакцию рукописи. Автор приносит им свою глубокую благодарность за этот большой труд.

Автор сердечно благодарит Издательство АН СССР за внимательное, заботливое отношение к книге.

Глава I

БУКВЫ, АЛФАВИТЫ, СЛОВА

Эта глава имеет вводный, вспомогательный характер. В ней рассматривается ряд понятий — «буква», «алфавит», «слово», «вхождение» и др., — играющих в теории алгорифмов существенную роль.

Часть материала этой главы не является необходимой для нашей ближайшей цели — формулировки определения понятия нормального алгорифма [II, § 3], — а будет использоваться значительно позже [III, § 7, IV. § 3, IV. § 4, V, VI]. Сюда относятся §§ 5 и 6, а также леммы § 4.2.2—§ 4.2.6, § 4.5.2—§ 4.5.8. Читателю, желающему поскорее добраться до сути дела — до «нормальных алгорифмов», — мы советуем пропустить вначале весь этот материал, с тем чтобы затем возвращаться к нему по мере надобности.

§ 1. Буквы

1. *Буквами* мы называем знаки, которые в данном их применении рассматриваем только как целые.

При чтении книги нас не интересуют, например, части знаков a, а лишь целые такие знаки. В этом смысле типографские знаки являются буквами.

Необходимо подчеркнуть условность этого понятия, зависимость его объема от принятых соглашений. Например, знак a' можно рассматривать и как букву и как знак, состоящий из двух частей: a и $'$, смотря по принятым на этот счет соглашениям.

2. При рассмотрении каких-нибудь двух букв, мы констатируем, что они одинаковы или различны. Например, первая и седьмая буквы слова «одинаковы» одинаковы, а первая и седьмая буквы слова «различны» различны.

Понятие одинаковости и различия букв также условны. В частности к одинаковости печатных букв обычно предъявляются более жесткие требования, чем к одинаковости букв, написанных от руки: одинаковость первых ближе к геометрическому «равенству», чем одинаковость вторых. Условность одинаковости особенно резко проявляется при установлении одинаковости печатной буквы с буквой, написанной от руки.

Возможность установления одинаковости букв позволяет нам, путем *абстракции отождествления*,* построить понятие абстрактной

---

* Мы называем так то, что обычно принято называть просто «абстракцией», — образование абстрактного понятия путем объединения, отождествления предметов, связанных отношением типа равенства, путем отвлечения (абстрагирования) от

буквы. Применение этой абстракции состоит в данном случае в том, что мы начинаем говорить о двух одинаковых буквах, как об *одной и той же букве*.

Например, вместо того чтобы сказать, что в слово «одинаковы» входят две буквы, одинаковые с «о», мы говорим: „буква «о» дважды входит в слово «одинаковы»“. Мы при этом построили понятие абстрактной буквы «о» и рассматриваем конкретные буквы, одинаковые с «о», как представителей этой *одной* абстрактной буквы. *Абстрактные буквы* — это буквы, рассматриваемые с точностью до одинаковости.

Применение абстракции отождествления оправдано здесь постольку, поскольку соблюдаются условия: всякая рассматриваемая буква одинакова сама с собою (рефлексивность одинаковости); если одна буква одинакова с другой, то последняя одинакова с первой (симметрия одинаковости); две буквы, одинаковые с третьей, одинаковы друг с другом (транзитивность одинаковости). В дальнейшем мы, несколько идеализируя обстоятельства, будем считать эти условия строго выполненными.

Проводя абстракцию отождествления по отношению к буквам, мы рассматриваем конкретные буквы как *представителей* соответствующих абстрактных букв. Две конкретные буквы тогда и только тогда представляют одну и ту же абстрактную букву, когда они одинаковы. Иными словами, тождество абстрактных букв выражается одинаковостью их представителей.

§ 2. Алфавиты

1. При всяком применении букв мы имеем дело с некоторым не очень большим набором абстрактных букв. Очень большими наборами абстрактных букв нельзя пользоваться из-за трудностей, возникающих при установлении одинаковости и различия букв. При естественной ограниченности размеров букв и большом числе их форм обязательно появляются различные, но трудно отличимые буквы — одинаковость и различие букв теряют свою четкость.

Вместе с тем, нельзя указать четкую количественную границу для практически применимых наборов абстрактных букв, т. е. такое число N, что имеются практически применимые наборы N абстрактных букв и невозможны такие наборы большего числа абстрактных букв. Мы подчеркиваем, однако, что при всяком применении букв мы имеем дело с некоторым *конечным* набором абстрактных букв. Этот конечный набор может быть задан в виде списка конкретных букв, представляющих абстрактные буквы набора. Списки такого рода мы будем называть *конкретными алфавитами*.

Без существенного ограничения общности можно наложить на рассматриваемые конкретные алфавиты условие отсутствия повторений, состоящее в том, что любые две буквы, встречающиеся в конкретном алфавите, различны. В дальнейшем мы всегда будем предполагать это условие соблюденным, не оговаривая его.

2. По отношению к конкретным алфавитам также уместно проводить абстракцию отождествления. Мы будем при этом отвлекаться

всех различий таких предметов. Наша терминология представляется нам более совершенной, так как в современной математике применяются и другие типы абстракций, т. е. отвлечений (см., в частности, стр. 15).

не только от конкретности представителей абстрактных букв, но и от порядка этих представителей в конкретных алфавитах. Соответственно этому мы условимся считать конкретный алфавит А *равным* конкретному алфавиту Б, если всякая конкретная буква, встречающаяся в А, одинакова с некоторой конкретной буквой, встречающейся в Б, и наоборот. Иными словами, мы считаем А равным Б, если всякая абстрактная буква, представляемая буквой, встречающейся в А, представляется также и буквой, встречающейся в Б, и наоборот.

Отождествляя равные конкретные алфавиты, говоря о двух равных конкретных алфавитах как об одном и том же алфавите, мы приходим к понятию *абстрактного алфавита*. Всякий конкретный алфавит мы рассматриваем как представителя некоторого абстрактного алфавита. Два конкретных алфавита тогда и только тогда представляют один и тот же абстрактный алфавит, когда они равны.

Абстрактный алфавит — это по существу то же самое, что набор абстрактных букв. В самом деле, всякий абстрактный алфавит А однозначно определяет набор абстрактных букв, а именно набор тех абстрактных букв, представители которых встречаются в каком-нибудь конкретном алфавите, представляющем А. Всякий конечный набор абстрактных букв определяется в этом смысле одним и только одним абстрактным алфавитом.

При рассмотрении абстрактных букв и абстрактных алфавитов мы будем обычно опускать прилагательное «абстрактный», т. е. писать просто «буква» вместо «абстрактная буква» и «алфавит» вместо «абстрактный алфавит». Мы будем также, говоря о представителях, подразумевать представляемое ими. Например, мы будем говорить о букве $*$, подразумевая при этом абстрактную букву, представляемую буквой $*$. Иными словами, мы будем проводить абстракцию отождествления по отношению к буквам и алфавитам, не выражая этого явно, в соответствии с обычной практикой.

В тех же случаях, когда нам придется рассматривать конкретные буквы и конкретные алфавиты, мы будем выражать это явно, сохраняя прилагательное «конкретный».

3. Буквы, представители которых встречаются в представителях алфавита А, мы называем *буквами алфавита* А.

Всякий алфавит можно, согласно предыдущему, рассматривать как набор букв этого алфавита. Соответственно этому мы говорим о буквах алфавита А, что они *принадлежат* А.

4. При рассмотрении произвольных букв и произвольных алфавитов удобно пользоваться буквами же для обозначения таких объектов. Мы уже применяли буквы А и Б для обозначения (конкретных и абстрактных) алфавитов. В дальнейшем мы будем обозначать алфавиты заглавными русскими буквами, буквы — строчными греческими буквами.

Говоря о «букве α», «букве β» и т. д., мы будем подразумевать букву, так обозначенную, а не самую букву α, β и т. д.

Во избежание путаницы мы будем предполагать, что ни строчные греческие буквы, ни заглавные русские буквы не принадлежат рассматриваемым алфавитам — ограничение, разумеется, несущественное.

5. Мы будем применять запись

$$\alpha \in \text{А}$$

для выражения того, что буква α принадлежит алфавиту А; запись

$$\alpha \urcorner \in \text{А}$$

для выражения того, что буква α не принадлежит алфавиту А; запись

$$\text{А} = \text{Б}$$

для выражения равенства алфавитов А и Б.

6. Мы будем предполагать в дальнейшем, что знаки «{», «}» и «, » не являются буквами рассматриваемых алфавитов. Этими знаками мы будем следующим образом пользоваться для записи алфавитов путем построения их представителей. Выписывая друг за другом в том или ином порядке представителей всех букв рассматриваемого алфавита А, мы будем отделять их запятыми и всё заключать в фигурные скобки. Это даст нам один из конкретных алфавитов, представляющих А. Соответственно нашему соглашению, мы будем, говоря об этом конкретном алфавите, подразумевать абстрактный алфавит А и, значит, рассматривать этот конкретный алфавит как запись абстрактного алфавита А.

Например $\{a, b, c\}$ есть конкретный алфавит, представляющий абстрактный алфавит, состоящий из букв a, b и c. Соответственно нашему соглашению, мы будем, однако, понимать под «алфавитом $\{a, b, c\}$» именно этот абстрактный алфавит, рассматривая «$\{a, b, c\}$» как его запись.

Следующие алфавиты играют существенную роль в дальнейшем:

$$\text{А}_0 = \{a, b\};$$

$$\text{А}_1 = \{a, b, c, d\};$$

$$\text{А}_2 = \{a, b, c, d, e\};$$

$$\text{А}_3 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\};$$

$$\text{Ч} = \{|\};$$

$$\text{С} = \{|, *\};$$

$$\text{Ц} = \{|, —\};$$

$$\text{М} = \{|, —, *, \square\};$$

$$\text{Т} = \{|, —, *, \square, \&\}.$$

7. Мы будем говорить об алфавите Б, что он есть *расширение* алфавита А, если всякая буква алфавита А есть буква алфавита Б.

Например, А_1 есть расширение А_0, А_2 — расширение А_1, А_3 — расширение А_2, С и Ц суть расширения Ч, М есть расширение как С, так и Ц, а Т есть расширение М.

Ограничиваясь рассмотрением тех алфавитов, которым буква $\subset$ не принадлежит, мы будем применять запись

$$\text{А} \subset \text{Б}$$

для выражения того, что алфавит Б есть расширение алфавита А.

Вместо того, чтобы писать

$$\text{А} \subset \text{Б},\ \text{Б} \subset \text{В},$$

будем писать короче

$$А \subset Б \subset В.$$

Аналогичным образом будем применять записи

$$А \subset Б \subset В \subset Г,$$

$$А \subset Б \subset В \subset Г \subset Д$$

и т. д.

Имеем в частности

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3,$$

$$Ч \subset С \subset М \subset Т,$$

$$Ч \subset Ц \subset М.$$

Следующие утверждения очевидны.

7.1. *Если* $А \subset Б \subset В$, *то* $А \subset В$.

7.2. *Всякий алфавит есть расширение самого себя.*

Мы говорим о расширении Б алфавита А, что оно есть *собственное расширение алфавита* А, если оно не тождественно А, т. е. если А не есть расширение Б.

8. Выше мы определили конкретный алфавит как список конкретных букв. Согласно общепринятому пониманию слова «список», в списке всегда хоть что-нибудь да написано. В списке фамилий лиц, проживающих в таком-то доме, должна быть хотя бы одна фамилия. Если же дом необитаем, то список его жильцов обычно не составляется. Можно, однако, представить себе и в этом случае список жильцов дома в виде листа бумаги, на котором написан лишь заголовок. «Список жильцов дома № 3 по улице NN», а больше ничего нет. Возможность подобного рода «пустого» списка целесообразно допустить в определении конкретного алфавита, что мы и сделаем. Это позволит нам рассматривать наряду с непустыми алфавитами, имеющими по меньшей мере одну букву, пустой алфавит, вовсе не имеющий букв. В наших обозначениях его запись такова:

$$\{\ \}.$$

Целесообразно считать любой алфавит расширением алфавита $\{\ \}$.

9. Алфавит из всех букв, принадлежащих хотя бы одному из алфавитов А и Б, мы называем *объединением* алфавитов А и Б; алфавит из всех букв, принадлежащих обоим этим алфавитам, — их *пересечением*. Аналогичным образом мы определяем объединение и пересечение трех и большего числа алфавитов.

Алфавит, состоящий из букв алфавита А, не принадлежащих алфавиту Б, мы называем *разностью* алфавитов А и Б.

Рассматривая лишь те алфавиты, которым буквы «$\cup$», «$\cap$», «$\setminus$» не принадлежат, будем применять запись

$$А \cup Б$$

для обозначения объединения алфавитов А и Б; запись

$$А \cap Б$$

для обозначения их пересечения; запись

$$А \setminus Б$$

для обозначения их разности; записи

$$А \cup Б \cup В$$

и

$$А \cap Б \cap В$$

будем соответственно применять для обозначения объединения и пересечения алфавитов А, Б и В.

Имеем, очевидно,

$$С \cup Ц \cup \{\square\} = М,$$
$$С \cap Ц = Ч.$$

§ 3. Слова

1. Ряд написанных друг за другом конкретных букв мы называем *конкретным словом.*

Если буквы, составляющие конкретное слово P, являются представителями букв алфавита А, то мы говорим, что P есть *конкретное слово в* А.

Например,

папагиглемма

есть конкретное слово в русском алфавите.

Очевидно, что всякое конкретное слово в алфавите А является конкретным словом во всяком расширении этого алфавита.

К написанию конкретных слов в данном алфавите мы предъявляем ряд требований отчетливости.

Так как порядок следования конкретных букв, составляющих слово, играет существенную роль, он должен быть ясным в том смысле, что для любых двух таких конкретных букв должно быть ясно видно, которая из них стоит левее (предшествует) и которая правее (следует).

Должны быть отчетливо указаны начало и конец слова. Мы будем с этой целью применять обычным образом кавычки, что, очевидно, допустимо, если кавычки не являются буквами рассматриваемых алфавитов. Кавычки при этом не рассматриваются как составные части слова, а служат только для указания его границы и будут часто опускаться.

Применение кавычек дает также возможность рассматривать пустые слова вида

« »,

совсем не содержащие конкретных букв.

Всякое пустое слово мы рассматриваем как слово во всяком алфавите.

Очень важное дальнейшее требование состоит в единственности разложения слова на представителей букв данного алфавита — требование невозможности «разночтений».

Оно отнюдь не всегда соблюдается. Например, конкретное слово

$a'a$

в алфавите $\{a, a', 'a\}$ можно рассматривать и как ряд двух конкретных букв, представляющих буквы «a» и «$'a$» этого алфавита, и как ряд двух конкретных букв, представляющих его буквы «a'» и «a».

Необходимо полностью исключить возможность таких разночтений слов, что может быть достигнуто наложением надлежащих ограничений на рассматриваемые алфавиты и на способы написания слов в них.

Можно, например, выставить следующие два требования:

а) всякая буква алфавита должна быть связной, т. е. должна быть изобразимой без отрыва карандаша от бумаги;

б) при писании слов следует оставлять промежуток между всякими двумя соседними буквами.

Первое из этих требований налагает ограничение на рассматриваемые алфавиты, а второе — на способ написания слов. Ясно, что при соблюдении этих требований всякое конкретное слово в рассматриваемом алфавите будет разлагаться на конкретные буквы единственным образом.

Возможны и другие системы требований, обеспечивающие эту единственность. Однако требования а) и б) удобны в том отношении, что они допускают неограниченное построение объединений рассматриваемых алфавитов: объединение любых двух алфавитов, удовлетворяющих требованию а), также удовлетворяет этому требованию. Вместе с тем требование а) не налагает никакого существенного ограничения на алфавит, так как всякую несвязную букву алфавита, очевидно, всегда можно заменить связной, отличной от всех остальных.* Впредь мы будем понимать под «алфавитом» алфавит, удовлетворяющий требованию а), под «конкретным словом» — конкретное слово, написанное или напечатанное с соблюдением условия б), под «буквой» — связную букву.

В дальнейшем мы будем обозначать слова (конкретные, а затем абстрактные) заглавными латинскими буквами, предполагая, что эти буквы не суть буквы рассматриваемых алфавитов. Говоря о «слове P» и т. п., мы всегда будем иметь в виду слово, обозначенное буквой P (а не слово, состоящее из одной буквы P).

2. Мы говорим о конкретных словах P и Q, что они *равны*, если они состоят из одинаковых конкретных букв, одинаково расположенных. Два пустых слова мы при этом также считаем равными, а пустое с непустым — неравными.

Конкретное слово, выделенное в отдельную строку на стр. 12, равно конкретному слову «папагиглемма».

Для выяснения равенства конкретных слов можно применять следующий метод.

Пусть даны два конкретных слова P и Q. Если они оба пусты, то они равны. Если одно пусто, а другое нет, то они не равны. Если же ни одно из слов P и Q не пусто, то сравниваем их первые конкретные буквы. Если они не одинаковы, то слова P и Q не равны. Если же эти буквы оказались одинаковыми, то переходим к рассмотрению конкретных слов P_1 и Q_1, получаемых из P и Q в результате отбрасывания первых конкретных букв (т. е. переноса начальных кавычек через

---

* Заметим, однако, что русский печатный алфавит не удовлетворяет условию а) из-за несвязной буквы «ы». Тем не менее разложение слов в этом алфавите на буквы однозначно. Это показывает, что условия а) и б) отнюдь не являются необходимыми для единственности чтения слова.

первые буквы). P и Q равны тогда и только тогда, когда равны P_1 и Q_1. Рассматривая P_1 и Q_1 так же, как мы только что рассматривали P и Q, мы или устанавливаем их равенство — тогда равны P и Q, или устанавливаем их неравенство — тогда не равны P и Q, или, наконец, сводим дело к рассмотрению слов P_2 и Q_2, получаемых из P_1 и Q_1 путем отбрасывания их первых букв. С ними мы поступаем так же, как поступали с P_1 и Q_1, и т. д. Этот процесс последовательного отбрасывания одинаковых первых конкретных букв должен в конце концов оборваться, так как P_1 содержит одной конкретной буквой меньше, чем P, P_2 — одной конкретной буквой меньше, чем P_1, и т. д. Он оборвется на некоторых конкретных словах P_n и Q_n, для которых будет ясно, равны они или нет. В зависимости от этого будут равны или нет исходные слова P и Q.

Описанный только что метод выяснения равенства конкретных слов, очевидно, обладает тремя признаками, отмеченными нами в качестве характерных черт алгорифмов [**Введение 1**]: он облечен в форму общепонятного предписания, не оставляющего места произволу; его можно применять к различным исходным данным — к любой паре конкретных слов в данном алфавите; он направлен на получение некоторого результата, в конце концов и получаемого — правильного ответа «да» или «нет» на поставленный вопрос о равенстве слов. Сохраняя пока неуточненное понятие алгорифма, мы вправе называть этот метод *алгорифмом равенства слов*.

Нетрудно видеть, что равенство конкретных слов подчиняется законам рефлексивности, симметрии и транзитивности: всякое конкретное слово равно самому себе: если конкретные слова P и Q равны, то равны и конкретные слова Q и P; два конкретных слова, равные третьему, равны друг другу.

2.1. *Всякое конкретное слово, равное конкретному слову в алфавите* А, *есть слово в* А.

Это непосредственно следует из определений конкретного слова в данном алфавите и равенства конкретных слов.

3. Мы можем теперь, применяя абстракцию отождествления, построить понятие *абстрактного слова*. Применение этой абстракции будет состоять в данном случае в том, что мы будем говорить о равных конкретных словах, как об *одном и том же слове*.

Например, мы скажем, что одно и то же слово выделено в отдельную строку на стр. 12 и заключено в кавычки в 14-й строке снизу на стр. 13. Это означает, что мы построили понятие абстрактного слова «папагиглемма» и рассматриваем только что упомянутые конкретные слова как представителей этого одного абстрактного слова.

Применение абстракции отождествления по отношению к словам оправдано упомянутыми выше законами рефлексивности, симметрии и транзитивности равенства слов. Оно связано с рассмотрением конкретных слов как *представителей абстрактных слов*. Два конкретных слова при этом тогда и только тогда представляют одно и то же абстрактное слово, когда они равны.

Для выражения равенства конкретных слов, т. е. тождества представляемых ими абстрактных слов, мы будем применять обычный знак равенства.

4. Два представителя одного и того же абстрактного слова P состоят из одинаковых конкретных букв, одинаково расположенных.

Абстрактные буквы, представляемые этими конкретными буквами, одни и те же для обоих представителей и определяются, таким образом, абстрактным словом P. Эти абстрактные буквы мы называем *буквами слова* P.

Так как мы считаем равными любые два пустых конкретных слова, мы должны рассматривать пустые конкретные слова как представителей одного абстрактного слова — *пустого абстрактного слова.*

Пустое абстрактное слово не имеет букв.

Считая, что знак «Λ» не является буквой рассматриваемых алфавитов, будем обозначать этим знаком пустое абстрактное слово.

Мы говорим об абстрактном слове P, что оно есть *абстрактное слово в алфавите* A, если все буквы слова P суть буквы алфавита A. Иначе говоря, абстрактное слово P считается абстрактным словом в алфавите A, если какой-нибудь (и тогда всякий) представитель слова P есть конкретное слово в A.

Пустое абстрактное слово мы рассматриваем как абстрактное слово во всяком алфавите (даже в пустом),

5. В дальнейшем при рассмотрении алфавитов, слов и алгорифмов будет играть важную роль *абстракция потенциальной осуществимости.*

Она состоит в отвлечении от реальных границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью нашей жизни в пространстве и во времени. В применении к алфавитам эта абстракция позволяет нам рассуждать о сколь угодно обширных алфавитах и, в частности, считать, что ко всякому алфавиту может быть присоединена новая буква. В применении к словам мы получаем таким образом возможность рассуждать о сколь угодно длинных словах как об осуществимых. Их осуществимость потенциальная: их представители были бы практически осуществимы, если бы наша жизнь длилась достаточно долго и мы имели бы достаточно места и материалов для практического осуществления этих представителей. Принимая эту абстракцию, мы будем в дальнейшем понимать просто под «словом» абстрактное потенциально осуществимое слово.

Мы считаем возможным рассуждать о словах (в этом смысле) совершенно так же, как рассуждали о практически осуществимых словах, в чем и состоит суть абстракции потенциальной осуществимости в данном ее применении. В частности, можно говорить о буквах слова, о его представителях, о том, что оно есть слово в данном алфавите и т. п.

Абстракция потенциальной осуществимости, как и абстракция отождествления, совершенно необходима для математики. На этих двух абстракциях основано, в частности, понятие натурального числа.

6. Приписывая справа какого-нибудь представителя слова Q к какому-нибудь представителю слова P, мы получаем представителя некоторого нового слова. Последнее, очевидно, не зависит от сделанного выбора представителей слов P и Q, т. е. определяется вполне этими словами. Слово, получаемое таким образом, исходя из слов P и Q, мы будем называть *соединением* слов P и Q.

Например, слово «выбор» есть соединение слов «вы» и «бор».

Абстракция потенциальной осуществимости дает возможность рассматривать соединение любых двух слов.

6.1. *Может быть построено соединение любых двух слов.*

Следующее утверждение очевидно.

6.2. *Соединение двух слов в алфавите* A *есть слово в* A.

Условимся пока обозначать символом $\overline{PQ}$ соединение слов P и Q. Очевиден сочетательный закон соединения

$$\overline{\overline{PQ}R} = \overline{P\overline{QR}}, \tag{1}$$

где P, Q, R — любые слова.

Это дает возможность при оперировании с соединениями отбрасывать верхнюю черту, что мы впредь и будем делать. Обе части равенства (1) запишутся тогда одинаково, в виде PQR. Очевидно, что PQR есть слово, представитель которого получается в результате написания подряд сначала некоторого представителя слова P, затем некоторого представителя слова Q и, наконец, некоторого представителя слова R.

Слово PQR мы называем *соединением слов* P, Q, R; слово $PQRS$ — соединением слов P, Q, R, S и т. д.

Ясно, что

$$P\Lambda = P, \quad \Lambda P = P \tag{2}$$

для всякого слова P.

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с рядами слов, обозначенных буквами с численными индексами. Соединения таких слов в порядке возрастания индексов будут обозначаться следующим образом.

При $i > j$ символ

$$P_i \ldots P_j \tag{3}$$

будет всегда обозначать пустое слово, независимо от того, определены ли слова P_i и P_j. При $i = j$ этот символ будет означать слово P_i, если это слово определено. При $i < j$ символ (3) будет означать соединение слов P_i, P_{i+1} и т. д. до P_j включительно, если все эти слова определены.

Имеем, таким образом,

$$P_i \ldots P_{i-1} = \Lambda, \tag{4}$$

$$P_i \ldots P_j = P_i \ldots P_{j-1} P_j \tag{5}$$

$$= P_i P_{i+1} \ldots P_j, \tag{6}$$

причем равенства (5) и (6) имеют место при условии, что $i \leqslant j$ и что определены все слова P_k, где $i \leqslant k \leqslant j$.

Аналогично будут обозначаться соединения нескольких слов, обозначенных буквой с индексами, в порядке убывания индексов.

При $i < j$ символ

$$P_i \cdots P_j$$

будет означать Λ; при $i = j$ он будет означать P_i, если P_i определено; при $i > j$ он будет означать соединение слов P_i, P_{i-1} и т. д. до P_j включительно, если все эти слова определены.

Имеем таким образом

$$P_i \cdots P_{i+1} = \Lambda,$$

$$P_i \cdots P_j = P_i P_{i-1} \cdots P_j$$

$$= P_i \cdots P_{j+1} P_j$$

последнее при условии, что $i \geqslant j$ и что определены все слова P_k, где $i \geqslant k \geqslant j$.

7. Конкретное слово, т. е. ряд конкретных букв, может, в частности, быть одной конкретной буквой. Представляемое им абстрактное слово является тогда абстрактной буквой. Таким образом, всякая буква является словом и, в частности, всякая буква алфавита А — словом в А.

Всякое непустое слово в алфавите А является, очевидно, либо буквой этого алфавита, либо соединением нескольких его букв, т. е. имеет место следующее утверждение.

7.1. *Всякое непустое слово в алфавите* А *представляется в виде*

$$\xi_1 \ldots \xi_k, \tag{1}$$

где $k > 0$ *и* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *суть буквы алфавита* А.

Ввиду требований 1а) и 1б), обеспечивающих невозможность «разночтений», представление слова в алфавите А в виде (1), где $\xi_1, \ldots, \xi_k \in$ А, единственно, что выражается следующим утверждением.

7.2. *Если* $\xi_1 \ldots \xi_k = \eta_1 \ldots \eta_l$, *где* $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$ *и* $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_l \in$ А, *то* $k = l$ *и* $\xi_i = \eta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$.

8. Число k, фигурирующее в представлении (1) слова P, определяемое согласно 7.2 однозначно этим словом, будем называть *длиной* слова P и обозначать символом

$$\lceil P^\partial.$$

Пустому слову будем приписывать длину нуль:

$$\lceil \Lambda^\partial = 0. \tag{1}$$

Очевидно, что всякая буква имеет длину 1:

$$\lceil \xi^\partial = 1 \quad (\xi \in \text{А}). \tag{2}$$

Ясно также из определения длины слова, что для всяких непустых слов P и Q имеет место равенство

$$\lceil PQ^\partial = \lceil P^\partial + \lceil Q^\partial. \tag{3}$$

В силу 6(2) и (1) оно справедливо и в случае, когда хотя бы одно из этих слов пусто.

8.1. *Равенство* (3) *имеет место для любых слов* P *и* Q.

В силу 7.1, (2) и (3) имеют место следующие леммы.

8.2. *Всякое непустое слово* P *в алфавите* А *может быть представлено в виде* ξQ, *где* $\xi \in$ А, *а* Q *есть слово в* А *такое, что*

$$\lceil Q^\partial = \lceil P^\partial - 1. \tag{4}$$

8.3. *Всякое непустое слово* P *в алфавите* А *может быть представлено в виде* $Q\xi$, *где* $\xi \in$ А, *а* Q *есть слово в* А *такое, что имеет место* (4).

На лемме 8.2 может быть основан следующий метод доказательства общих утверждений о словах в данном алфавите A.

Пусть мы хотим доказать, что все слова в A обладают некоторым свойством $\mathfrak{P}$. Мы доказываем для этого следующие два утверждения:

1) пустое слово обладает свойством $\mathfrak{P}$;

2) если какое-нибудь слово Q в A обладает свойством $\mathfrak{P}$, то, какова бы ни была буква ξ алфавита A, слово ξQ также обладает свойством $\mathfrak{P}$.

Тогда мы можем утверждать, что всякое слово в A обладает свойством $\mathfrak{P}$.

В самом деле, в силу 1) мы можем утверждать, что свойством $\mathfrak{P}$ обладает всякое слово длины 0 в A, так как Λ есть единственное такое слово. Допустим, мы уже доказали, что свойством $\mathfrak{P}$ обладает всякое слово длины $k-1$, где $k>0$. Рассмотрим тогда какое-нибудь слово P в A длины k. Оно не пусто, и потому

$$P=\xi Q \tag{5}$$

для некоторой буквы ξ алфавита A и некоторого слова Q в A, удовлетворяющего условию (4) [8.2]. Так как $[P^\partial=k$, имеем

$$[Q^\partial=k-1 \qquad [(4)]$$

и, значит, по предположению, Q обладает свойством $\mathfrak{P}$. Следовательно, и P обладает им [(5), 2)]. Этим мы доказали, что все слова длины k в A обладают свойством $\mathfrak{P}$, коль скоро им обладают все слова длины $k-1$ в A. Это позволяет, идя шаг за шагом, установить последовательно, что свойством $\mathfrak{P}$ обладают все слова длины 1 в A, что им обладают все слова длины 2 в A и т. д. до слов произвольной заданной длины n включительно. Следовательно, свойством $\mathfrak{P}$ обладает всякое слово в A, что и требовалось доказать.

Обоснованный только что метод доказательства общих утверждений о словах в данном алфавите является вариантом метода математической индукции.* Мы будем называть его *методом левой индукции в* A. Совершенно аналогичный *метод правой индукции в* A, получаемый заменой ξQ в утверждении 2) на $Q\xi$, обосновывается подобным же образом с помощью леммы 8.3.

9. Следующее утверждение вытекает из 7.1.

9.1. *Каковы бы не были слово P в алфавите* A *и число q, такое, что*

$$q\leqslant [P^\partial,$$

могут быть указаны такие слова Q и R в A, *что*

$$P=QR,$$

$$[Q^\partial=q;$$

* Заметим в связи с этим, что распространенное мнение о том, будто обоснование метода математической индукции обязательно требует особой «аксиомы математической индукции», является, по нашему мнению, глубоко ошибочным.

при тех же условиях могут быть указаны такие слова S *и* T *в* A, *что*

$$P = ST,$$

$$[T^{\partial} = q.$$

Из 7.2 легко выводится следующая лемма.

9.2. *Если для слов* Q, R, S, T *в алфавите* A *имеют место равенства*

(1) $$QR = ST$$

и

(2) $$[Q^{\partial} = [S^{\partial},$$

то

$$Q = S,$$

$$R = T;$$

то же имеет место, если соблюдается равенство (1) *и равенство*

$$[R^{\partial} = [T^{\partial}.$$

Как следствие отсюда, получаем следующие утверждения.

9.3. *Если для слов* Q, R, T *в* A *имеет место равенство*

$$QR = QT,$$

то

$$R = T.$$

9.4. *Если для слов* Q, R, S *в* A *имеет место равенство*

$$QR = SR,$$

то

$$Q = S.$$

Таким образом, в формулах, выражающих равенства соединений слов, можно производить сокращения одинаковых левых «множителей» и одинаковых правых «множителей».*

10. Мы говорим о слове P, что оно *начинается* словом Q, если имеется такое слово R, что

(1) $$P = QR.$$

Мы говорим, что P *оканчивается* словом Q, если имеется такое слово R, что

(2) $$P = RQ.$$

Например, слово «папагиглемма» начинается словом «папа» и оканчивается словом «лемма».

---

* Алгебраист кратко выразит содержание утверждений 7.1, 7.2, 9.3, 9.4, сказав, что слова в A образуют свободную полугруппу со свободным базисом A.

В силу **6(2)** всякое слово начинается пустым словом и оканчивается им; всякое слово начинается и оканчивается самим собою. Пустое слово начинается (оканчивается) только самим собою.

Может быть указан алгорифм, выясняющий для любых слов P и Q в алфавите А, начинается ли P словом Q. Он состоит в одновременном просмотре каких-нибудь представителей этих слов, причем сопоставляются и сравниваются сначала первые конкретные буквы этих представителей, потом вторые и т. д. до тех пор, пока один по крайней мере из этих представителей не будет просмотрен весь или какие-нибудь две сопоставляемые конкретные буквы не окажутся неодинаковыми. P тогда и только тогда начинается словом Q, когда представитель Q будет просмотрен при этом целиком и всякая его конкретная буква окажется одинаковой с сопоставленной ей конкретной буквой представителя слова P. Непросмотренные конкретные буквы представителя слова P образуют тогда представителя слова R, удовлетворяющего (1). Такое слово единственно в силу 9.3. Мы говорим о нем, что оно *получается отбрасыванием Q от P слева.*

Может быть указан аналогичный алгорифм, выясняющий для любых слов P и Q в А оканчивается ли P словом Q, и в случае, если оканчивается, дающий единственное слово R, удовлетворяющее (2). Об этом слове мы говорим, что оно *получается отбрасыванием Q от P справа.*

Мы говорим о слове Q, что оно есть *начало (конец)* слова P, если P начинается (оканчивается) словом Q.

Всякое слово есть начало и конец самого себя.

Мы говорим о слове Q, что оно есть *собственное начало (собственный конец)* слова P, если оно есть начало (конец) P, отличное (отличный) от P.

Следующие утверждения очевидны.

10.1. *Если P есть начало (конец) Q, а Q — начало (конец) P, то $P=Q$.*

10.2. *Если P есть начало (конец) Q, а Q — начало (конец) R, то P есть начало (конец) R.*

Докажем следующую важную лемму.

10.3. *Если Q и S суть начала одного и того же слова, то либо Q есть собственное начало S, либо S есть собственное начало Q, либо $Q=S$.*

В самом деле, пусть Q и S суть начала слова P. Тогда имеются такие слова R и T, что соблюдаются равенства

(1) $$P=QR,$$

(2) $$P=ST.$$

Сравним длины слов Q и S.

Пусть оказалось, что

(3) $$\lceil Q^{\partial} < \lceil S^{\partial}.$$

Тогда, согласно **9.1**, могут быть указаны такие слова U и V, что

(4) $$S=UV$$

(5) $$\lceil U^{\partial} = \lceil Q^{\partial}.$$

Имеем

(6) $QR = UVT$ [(1), (2), (4)],

(7) $Q = U$ [(5), (6), 9.2],

$S = QV$ [(4), (7)].

Таким образом, в этом случае Q есть начало S и, так как при этом $Q \neq S$[(3)], Q есть собственное начало S.

Аналогичным образом усматривается, что S есть собственное начало Q, если

(8) $\lceil S^{\partial} < \lceil Q^{\partial}$.

Наконец, если

(9) $\lceil Q^{\partial} = \lceil S^{\partial}$,

то $Q = S$ [(1), (2), 9.2.].

Этим лемма доказана, так как одно из соотношений (3), (8), (9) всегда имеет место.

Подобным же образом доказывается следующая лемма.

10.4. *Если Q и S суть концы одного и того же слова, то либо Q есть собственный конец S, либо S есть собственный конец Q, либо $Q = S$.*

Докажем еще некоторые леммы, применяемые в дальнейшем.

10.5. *Первая буква всякого непустого начала слова P совпадает с первой буквой слова P.*

В самом деле, первую букву слова, очевидно, можно охарактеризовать как начало этого слова, являющееся буквой. Справедливость утверждения 10.5 вытекает ввиду этого из 10.2.

10.6. *Последняя буква всякого непустого конца слова P совпадает с последней буквой слова P.*

В этом мы убедимся аналогичным образом.

10.7. *Если α есть буква, а P — слово, то всякое собственное начало слова $P\alpha$ есть начало слова P.*

В самом деле, пусть Q есть собственное начало слова $P\alpha$. Тогда

(10) $P\alpha = QR$

для некоторого слова R. $R \neq \Lambda$, так как Q — собственное начало $P\alpha$ [(10), 6 (2)]. R есть, таким образом, непустой конец слова $P\alpha$ [(10)]. Поэтому, последняя буква слова R совпадает с последней буквой слова $P\alpha$ [10.6], т. е. с α. Имеем, следовательно,

(11) $R = S\alpha$

для некоторого слова S. В силу (10) и (11)

(12) $P\alpha = QS\alpha$,

$P = QS$ [(12), 9.4].

Следовательно, Q есть начало P, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом доказывается следующая лемма.

10.8. *Если α есть буква, а P — слово, то всякий собственный конец слова αP есть конец слова P.*

10.9. *Если α есть буква, а слова P и Q таковы, что $P\alpha$ и Q суть начала одного и того же слова, то либо $P\alpha$ есть начало Q, либо Q есть начало P.*

В самом деле, пусть $P\alpha$ и Q суть начала одного и того же слова. Тогда имеет место одно из трех: либо $P\alpha$ есть собственное начало Q, либо Q — собственное начало $P\alpha$, либо $P\alpha = Q$ [10.3]. В первом и третьем случаях $P\alpha$ есть начало Q, а во втором Q есть начало P [10.7]. Таким образом, $P\alpha$ есть начало Q, либо Q есть начало P, что и требовалось доказать.

10.10. *Если α есть буква, а слова P и Q таковы, что αP и Q суть концы одного и того же слова, то либо αP есть конец Q, либо Q есть конец P.*

Это доказывается аналогично лемме **10.9**.

10.11. *Слово RP тогда и только тогда есть начало слова RQ, когда P есть начало Q.*

В самом деле, если P есть начало Q, то

$$Q = PS \tag{13}$$

для некоторого слова S. Поэтому

$$RQ = RPS \tag{14}$$

и, следовательно, RP есть начало RQ.

Обратно, если RP есть начало RQ, то равенство **(14)** имеет место для некоторого слова S. Из **(14)** следует, однако, равенство **(13)** [9, 3], показывающее, что P есть начало Q.

10.12. *Слово PR тогда и только тогда есть конец слова QR, когда P есть конец слова Q.*

Это доказывается аналогично предыдущей лемме.

По данному слову P в A легко может быть составлен полный перечень его концов. Этот перечень мы начинаем самим словом P. Если оно не пусто, отбрасываем от него его первую букву, что дает слово P_1. P_1 также является концом P. Если $P_1 \neq \Lambda$, отбрасываем от P_1 его первую букву, что дает слово P_2, также являющееся концом P. Этот процесс последовательного отбрасывания первых букв мы продолжаем, пока он не оборвется на пустом слове, что в конце концов случится. Получаемые в ходе этого процесса слова P, P_1, P_2, ... , Λ и образуют полный перечень концов слова P.

Аналогичным образом может быть составлен полный перечень начал слова P.

11. Мы говорим о слове R, что оно есть *общее начало (общий конец)* слов P и Q, если оно есть начало (конец) обоих этих слов.

Всякие два слова имеют по крайней мере одно общее начало. Таковым является, например, пустое слово.

Если слова P и Q не имеют непустых общих начал (концов), то мы говорим, что они *взаимно просты слева (справа)*

11.1. *Два слова тогда и только тогда не взаимно просты слева (справа), когда они начинаются (оканчиваются) одной и той же буквой.*

В самом деле, если слова P и Q не взаимно просты слева, то они имеют непустое общее начало, и его первая буква является первой буквой как P, так и Q [10.5]. Обратно, если P и Q начи-

наются одной и той же буквой, то она является непустым общим началом P и Q, которые, значит, не взаимно просты слева.

Аналогично доказывается утверждение 11.1 для взаимной простоты справа.

Из леммы 11.1 вытекает следующее условие взаимной простоты слов слева (справа).

11.2. *Два слова тогда и только тогда взаимно просты слева (справа), когда имеет место одно из двух: либо одно по крайней мере из этих слов пусто, либо оба они не пусты и начинаются (оканчиваются) разными буквами.*

Мы говорим о слове R, что оно есть *наибольшее общее начало (наибольший общий конец)* слов P и Q, если R есть общее начало (общий конец) этих слов и всякое их общее начало (всякий их общий конец) есть начало (конец) слова R.

11.3. *Любые два слова имеют одно и только одно наибольшее общее начало и один и только один наибольший общий конец.*

Рассмотрим в самом деле какие-нибудь два слова P и Q. Составим для них полные перечни начал, как указано выше. Сопоставляя эти перечни, мы сможем составить и перечень общих начал слов P и Q. В этом перечне найдется самое длинное слово — общее начало слов P и Q наибольшей длины. Обозначим его через R и покажем, что оно является искомым наибольшим общим началом слов P и Q.

Прежде всего, R есть общее начало слов P и Q согласно построению.

Рассмотрим какое-нибудь общее начало U слов P и Q; покажем, что оно есть начало R. Действительно, U и R суть начала одного и того же слова P. Поэтому U есть собственное начало R или R есть собственное начало U или, наконец, $U=R$ [10.3]. Вместе с тем

$$[U^\partial \leqslant [R^\partial,$$

так как U есть одно из общих начал слов P и Q, а R — их общее начало наибольшей длины. Поэтому R не может быть собственным началом U. Значит, U есть собственное начало R или $U=R$, т. е. U есть начало R.

Этим показано, что R есть наибольшее общее начало слов P и Q.

Единственность наибольшего общего начала непосредственно следует из его определения в силу 10.1.

Аналогично устанавливается существование и единственность наибольшего общего конца двух слов.

11.4. *Слово R тогда и только тогда есть наибольшее общее начало слов P и Q, когда существуют такие взаимно простые слева слова S и T, что*

$$P=RS, \tag{1}$$

$$Q=RT. \tag{2}$$

Аналогичным образом характеризуется наибольший общий конец двух слов.

В самом деле, если R есть наибольшее общее начало слов P и Q, то, по определению начала слова, имеются такие слова S и T, что равенства (1) и (2) соблюдаются. Рассмотрим какое-нибудь общее

начало V слов S и T. Слово RV является общим началом слов RS и RT [10.11], т. е. слов P и Q [(1), (2)]. А так как R — наибольшее общее начало слов P и Q, RV есть начало R, что возможно, очевидно, лишь при $V=\Lambda$. Таким образом, слова S и T не имеют непустых общих начал, т. е. взаимно просты слева.

Обратно, пусть имеются взаимно простые слева слова S и T, для которых соблюдаются равенства (1) и (2). Покажем, что тогда R есть наибольшее общее начало слов P и Q.

R есть их общее начало в силу (1) и (2). Рассмотрим какое-нибудь их общее начало U. Тогда, рассуждая, как в доказательстве предыдущей леммы, убеждаемся, что U есть собственное начало R или R есть собственное начало U, или $U=R$. Если бы R было собственным началом U, то мы имели бы

$$U=RV',$$

где $V\neq\Lambda$. RV, т. е. U, было бы тогда общим началом слов P и Q, т. е. hS и RT [(1), (2)]. Поэтому V было бы общим началом слов S и T [10.11]. Это невозможно, так как $V\neq\Lambda$, а слова S и T взаимно просты слева. Таким образом, R не может быть собственным началом U и, значит, U есть собственное начало R или $U=R$, т. е. U есть начало R. Следовательно, всякое общее начало слов P и Q есть начало R, т. е. R есть наибольшее общее начало P и Q, что и требовалось доказать.

11.5. *Слова P и Q тогда и только тогда взаимно просты слева (справа), когда их наибольшее общее начало пусто (наибольший общий конец пуст).*

Это следует из леммы **11.4.**

12. Будем говорить о слове Q, что оно есть *обращение* слова P, если оно состоит из тех же букв, что P, расположенных в обратном порядке.

Например, слово «носорог» есть обращение слова «горосон».

Всякое слово имеет одно и только одно обращение, и это обращение может быть построено, если слово дано.

Обращение слова P мы будем обозначать символом $[P^{\smile}$.

Имеем очевидно

(1) $$[\Lambda^{\smile}=\Lambda;$$

(2) $$[\xi^{\smile}=\xi$$

для любой буквы ξ:

(3) $$[\xi_1\ldots\xi_n^{\smile}=\xi_n\ldots\xi_1$$

для любых букв $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$;

(4) $$[PQ^{\smile}=[Q^{\smile}[P^{\smile}$$

для любых слов P и Q;

$$[[P^{\smile\smile}=P,$$

$$[[P^{\smile\partial}=[P^{\partial}$$

для любого слова P.

13. Мы будем рассматривать натуральные числа как слова в алфавите Ч [§ 2.6], т. е. как ряды вертикальных черточек.* В частности число нуль будем отождествлять с пустым словом, число единица — со словом |, число два — со словом ||, и т. д.**

Длину произвольного слова P можно тогда охарактеризовать как результат замены всех букв этого слова вертикальными черточками. Для всякого натурального числа N имеем

$$[N^{\partial} = N.$$

14. Слово длины N в алфавите $\{\alpha\}$ мы будем обозначать символом

$$\alpha^N. \tag{1}$$

Это слово, очевидно, может быть охарактеризовано как слово, получаемое из числа N в результате замены каждой черточки буквой α [13]. Символ (1) имеет, таким образом, однозначный смысл для любой буквы α и любого натурального числа N. В частности $\alpha^{\Lambda} = \Lambda$, $\alpha^{|} = \alpha$, $\alpha^{||} = \alpha\alpha$, или, что то же самое, $\alpha^0 = \Lambda$, $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha\alpha$.

§ 4. Вхождения

1. Мы говорим о слове Q, что оно *входит* в слово P, если существуют такие слова R и S, что

$$P = RQS. \tag{1}$$

Например, слово «ход» входит в слово «входит».

1.1. *Слово Q тогда и только тогда входит в слово P, когда Q есть начало некоторого конца (конец некоторого начала) слова P.*

В самом деле, если Q входит в P, то равенство (1) имеет место для некоторых слов R и S. Это равенство показывает, что Q есть начало конца QS слова P (конец начала RQ слова P).

Обратно, если Q есть начало некоторого конца T слова P, то имеются такие слова R и S, что

$$T = QS, \tag{2}$$

$$P = RT. \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) следует, однако, равенство (1), показывающее, что Q входит в P. Аналогичным образом усматривается, что Q входит в P, если Q есть конец некоторого начала слова P.

Справедливость следующих утверждений легко устанавливается.

1.2. *Всякое начало и всякий конец слова P входят в P. В частности, во всякое слово входят оно само и пустое слово.*

1.3. *Если Q входит в P и P входит в Q, то $P = Q$.*

1.4. *Если Q входит в P и R входит в Q, то R входит в P.*

Чтобы узнать, входит ли слово Q в слово P, можно, составив полный перечень концов слова P, как указано выше [§ 3.10], выяснить

---

* Ср. [19]. Следует отметить, что такое рассмотрение натуральных чисел пошло от первобытного человека.

** Вместе с тем для обозначения отдельных чисел мы будем пользоваться и обычными арабскими цифрами в десятичной системе счисления.

затем для каждого из них с помощью описанного выше алгорифма [§ 3.10], не является ли Q началом данного конца. Мы имеем таким образом алгорифм, выясняющий для любых слов P и Q в A, входит ли Q в P.

2. Если слово Q входит в слово P, то может случиться, что P допускает несколько существенно различных представлений вида 1 (1) (с различными R и S). Например, если мы возьмем в качестве P слово «папагиглемма», а в качестве Q входящее в него слово «па», то увидим, что в качестве R и S можно взять как пустое слово и слово «пагиглемма», так и слова «па» и «гиглемма».

В таких случаях уместно говорить о нескольких «вхождениях» слова Q в слово P и различать эти «вхождения» друг от друга. Как же следует определить «вхождения» Q в P?

Здесь возможны различные варианты. Мы остановимся на следующем.

Будем рассматривать алфавит A, не содержащий звездочку «*», в качестве буквы. *Вхождениями в алфавите* A будем называть слова вида

$$R*Q*S, \tag{1}$$

где R, Q и S — слова в A. Иначе говоря, вхождениями в алфавите A мы называем слова в алфавите $A \cup \{*\}$, получаемые из слов в A путем вставок двух звездочек.

Упоминание алфавита в связи со вхождениями мы будем опускать в тех случаях, когда это не повлечет недоразумений.

Слово R мы будем называть *левым крылом* вхождения (1), слово S — *правым крылом* вхождения (1), слово Q — *основой* этого вхождения.

Вхождения с основой Q мы будем называть *вхождениями слова* Q. Иначе говоря, вхождениями слова Q мы называем те вхождения, в которых Q выделено звездочками, т. е. заключено между ними.

Вхождения (1), для которых

$$RQS = P,$$

мы будем называть *вхождениями в слово* P. Иначе говоря, вхождениями в слово P мы называем слова, получаемые из P путем вставок двух звездочек.

Вхождения слова Q, являющиеся вместе с тем вхождениями в слово P, мы будем называть *вхождениями слова* Q *в слово* P. Иначе говоря, вхождениями слова Q в слово P мы называем слова, получаемые из P путем вставок двух звездочек, выделяющих Q.

Например, имеются два вхождения слова «па» в слово «папагиглемма», а именно «*па*пагиглемма» и «па*па*гиглемма».

2.1. *Слово* Q *тогда и только тогда входит в слово* P, *когда существует хотя бы одно вхождение слова* Q *в слово* P.

Это очевидно из определений.

Из определения вхождения ясно также, что между вхождениями слова Q в слово P и представлениями слова P в виде XQY имеется естественное взаимно-однозначное соответствие — то соответствие, при котором вхождению $X*Q*Y$ сопоставляется представление P в виде XQY.

Докажем некоторые леммы о вхождениях, применяемые позже.

2.2. *Если буква* α *не входит в слово* X, *то всякое вхождение этого слова в слово* $P\alpha Q$ *имеет один из видов:*

(2) $K\alpha Q$ (K — *вхождение слова* X *в* P),

(3) $P\alpha K$ (K — *вхождение слова* X *в* Q).

В самом деле, пусть буква α не входит в слово X и пусть $V*X*W$ есть вхождение слова X в $P\alpha Q$. Тогда

(4) $$VXW = P\alpha Q,$$

откуда следует, что V и $P\alpha$ суть начала одного и того же слова. Поэтому V есть начало P или $P\alpha$ есть начало V [§ 3. 10.9].

В первом случае

(5) $$P = VR$$

для некоторого слова R. Отсюда

(6) $$VXW = VR\alpha Q \qquad [(4), (5)],$$

(7) $$XW = R\alpha Q \qquad [(6), \S\ 3.9.3].$$

Слова X и $R\alpha$ являются, следовательно, началами одного и того же слова. При этом $R\alpha$ не есть начало X, так как α не входит в X. Поэтому X есть начало R [§ 3.10.9], т. е.

(8) $$R = XU$$

для некоторого слова U. Отсюда

(9) $$XW = XU\alpha Q \qquad [(7), (8)],$$

(10) $$W = U\alpha Q \qquad [(9), \S\ 3.9.3],$$

$$V*X*W = V*X*U\alpha Q \qquad [(10)]$$
$$= K\alpha Q,$$

где

(11) $$K = V*X*U.$$

При этом

$$VXU = VR \qquad [(8)]$$
$$= P \qquad [(5)],$$

откуда следует, что K есть вхождение X в P [(11)]. Таким образом, в первом случае рассматриваемое вхождение X в $P\alpha Q$ имеет вид (2).

Во втором случае

(12) $$V = P\alpha R$$

для некоторого слова R. Отсюда

$$V*X*W = P\alpha R*X*W \qquad [(12)]$$
$$= P\alpha K,$$

где

(13) $$K = R * X * W.$$

При этом

(14) $$P\alpha RXW = P\alpha Q \qquad [(4), (12)],$$

$$RXW = Q \qquad [(14), \S\ 3.9.3],$$

откуда следует, что K есть вхождение X в Q [(13)]. Таким образом, во втором случае рассматриваемое вхождение имеет вид (3), что и оставалось доказать.

2.3. *Если ни буква* α, *ни буква* β *не входят в слово* X, *то всякое вхождение этого слова в слово* $P\alpha Q\beta R$ *имеет один из видов:*

(15) $K\alpha Q\beta R$ (K — *вхождение слова* X *в* P),

(16) $P\alpha K\beta R$ (K — *вхождение слова* X *в* Q),

(17) $P\alpha Q\beta K$ (K — *вхождение слова* X *в* R).

В самом деле, пусть ни буква α, ни буква β не входят в X и пусть L есть вхождение слова X в слово $P\alpha Q\beta R$. Согласно 2.2, L имеет вид (15) или вид $P\alpha M$, где M есть вхождение X в $Q\beta R$. Но если

(18) $$L = P\alpha M,$$

где M — вхождение X в $Q\beta R$, то, согласно 2.2, M имеет один из видов:

$K\beta R$ (K — вхождение слова X в Q),

$Q\beta K$ (K — вхождение слова X в R).

В силу (18), L имеет вид (16) в первом случае и вид (17) во втором. Таким образом, L имеет один из видов (15) — (17), что и требовалось доказать.

2.4. *Если буквы* α *и* β *различны и ни одна из них не входит ни в слово* X *ни в слово* Q, *то всякое вхождение слова* $\alpha X\beta$ *в слово* $P\alpha Q\beta R$ *имеет один из видов:*

(19) $K\alpha Q\beta R$ (K — *вхождение* $\alpha X\beta$ *в* P),

(20) $P * \alpha Q\beta * R$,

(21) $P\alpha Q\beta K$ (K — *вхождение* $\alpha X\beta$ *в* R).

Вид (20) *возможен при этом лишь, когда* $X = Q$.

В самом деле, пусть соблюдены условия этой леммы и пусть $V * \alpha X\beta * W$ — вхождение слова $\alpha X\beta$ в слово $P\alpha Q\beta R$. Тогда

$$V\alpha X\beta W = P\alpha Q\beta R,$$

откуда следует, что $V\alpha * X * \beta W$ есть вхождение слова X в слово $P\alpha Q\beta R$

Так как ни α, ни β не входят в X, имеем, по предыдущей лемме, одно из трех равенств

(22) $$V\alpha * X * \beta W = L\alpha Q\beta R,$$

(23) $$V\alpha * X * \beta W = P\alpha L\beta R,$$

$$V\alpha * X * \beta W = P\alpha Q\beta L,$$

причем L есть вхождение слова X в слово P в первом случае, в слово Q — во втором и в слово R — в третьем. Пусть

(24) $$L = S * X * T.$$

Тогда

(25) $$SXT = \begin{cases} P \text{ в первом случае} \\ Q \text{ во втором случае} \\ R \text{ в третьем случае.} \end{cases}$$

В первом случае

$$V\alpha * X * \beta W = S * X * T\alpha Q\beta R \qquad [(22), (24)],$$

откуда

(26) $$V\alpha = S,$$

(27) $$\beta W = T\alpha Q\beta R.$$

Принимая во внимание, что $\alpha \neq \beta$, заключаем из равенства (27), что $T \neq \Lambda$ и что T начинается буквой β:

(28) $$T = \beta U$$

для некоторого слова U. Имеем далее

(29) $$\beta W = \beta U\alpha Q\beta R \qquad [(27), (28)],$$

(30) $$W = U\alpha Q\beta R \qquad [(29), \S\ 3.9.3],$$

$$V * \alpha X\beta * W = V * \alpha X\beta * U\alpha Q\beta R \qquad [(30)]$$

$$= K\alpha Q\beta R,$$

где

(31) $$K = V * \alpha X\beta * U.$$

При этом

$$V\alpha X\beta U = SXT \qquad [(26), (28)]$$

$$= P \qquad [(25)],$$

откуда следует, что K есть вхождение $\alpha X\beta$ в P [(31)]. Таким образом, в первом случае рассматриваемое вхождение слова $\alpha X\beta$ в $P\alpha Q\beta R$ имеет вид (19).

Совершенно аналогично усматриваем, что в третьем случае это вхождение имеет вид (21).

Рассмотрим второй случай. Имеем тогда

$$V\alpha * X * \beta W = P\alpha S * X * T\beta R \qquad [(23), (24)],$$

откуда

(32) $$V\alpha = P\alpha S,$$

(33) $$\beta W = T\beta R.$$

Но S не может оканчиваться буквой α, а T не может начинаться буквой β, так как эти буквы, по предположению, не входят в Q, а S и T входят в Q [(25)].

Имеем поэтому

(34) $S = \Lambda$ [(32)],

(35) $T = \Lambda$ [(33)],

(36) $V\alpha = P\alpha$ [(32), (34)],

(37) $\beta W = \beta R$ [(33), (35)].

(38) $V = P$ [(36), § 3.9.4],

(39) $W = R$ [(37), § 3.9.3],

(40) $X = Q$ [(25), (34), (35)],

(41) $V * \alpha X \beta * W = P * \alpha Q \beta * R$ [(38), (40), (39)].

Таким образом, во втором случае рассматриваемое вхождение слова $\alpha X\beta$ в слово $P\alpha Q\beta R$ имеет вид (20).

Очевидно, наконец, что вхождение слова $\alpha X\beta$ в слово $P\alpha Q\beta R$ может иметь вид (20) лишь при $X = Q$, так как последнее равенство следует из равенства (41).

2.5. *Если буква α не входит в слово X, а это слово не входит в слово P, то всякое вхождение слова X в слово $P\alpha Q$ имеет вид* (3).

Это непосредственно следует из 2.2 и 2.1. Аналогичным образом доказывается следующая лемма.

2.6. *Если буква α не входит в слово X, а это слово не входит в слово Q, то всякое вхождение слова X в слово $P\alpha Q$ имеет вид* (2).

3. Будем рассматривать вхождения K и L слов одинаковой длины в слово P. Будем говорить, что K *предшествует* L, если левое крыло K есть собственное начало левого крыла L.

3.1. *Если K и L суть вхождения слов одинаковой длины в одно и то же слово, то имеет место одно из трех: либо K предшествует L, либо L предшествует K, либо $K = L$.*

В самом деле, пусть

(1) $$K = R * Q * S,$$

(2) $$L = U * T * V,$$

и пусть K и L суть вхождения в слово P. Тогда

(3) $$RQS = P,$$

(4) $$UTV = P,$$

откуда следует, что R и U суть начала одного и того же слова P. Поэтому имеет место одно из трех: либо R есть собственное начало U, либо U есть собственное начало R, либо $R=U$. R и U суть соответственно левые крылья K и L [(1), (2)], и потому K предшествует L в первом случае и L предшествует K во втором. Рассмотрим третий случай, когда

(5) $$R=U;$$

покажем, что в этом случае $K=L$. Имеем

(6) $$RQS=RTV \qquad [(3), (4), (5)],$$

(7) $$QS=TV \qquad [(6), \S\ 3.9.3].$$

Но K и L суть вхождения слов одинаковой длины, т. е.

(8) $$[Q^{\partial}=[T^{\partial}.$$

Поэтому

(9) $$Q=T \qquad [(7), (8), \S\ 3.9.2],$$

(10) $$S=V \qquad [(7), (8), \S\ 3.9.2],$$

$$K=L \qquad [(1), (2), (5), (9), (10)],$$

что и требовалось доказать.

3.2 *Никакие две из трех возможностей, указанных в лемме* **3.1**, *не совместимы.*

Это следует из определения предшествования, определения собственного начала и леммы § 3.10.1.

3.3. *Если K и L суть вхождения слов одинаковой длины в одно и то же слово, то K тогда и только тогда предшествует L, когда длина левого крыла K меньше длины левого крыла L.*

Это легко выводится из леммы **3.1**, если учесть, что длина всякого собственного начала какого-нибудь слова меньше длины этого слова.

3.4. *Два вхождения слов одинаковой длины в одно и то же слово тогда и только тогда совпадают, когда их левые крылья имеют одинаковую длину.*

Это также следует из **3.1**.

Пусть $K_1, \ldots, K_n (n>0)$ — различные вхождения слов одинаковой длины в слово P. *Первым среди вхождений* $K_1, \ldots, K_n$ будем называть вхождение K_j, предшествующее всем вхождениям $K_i (i \neq j)$.

3.5. *Если $K_1, \ldots, K_n (n>0)$ суть различные вхождения слов одинаковой длины в одно и то же слово, то среди них имеется одно и только одно первое вхождение.*

В самом деле, пусть l_i означает длину левого крыла K_i. Тогда числа l_j попарно различны [3.4] и среди них имеется наименьшее. Пусть это будет l_j. Имеем тогда $l_j < l_i (i \neq j)$, откуда следует, что K_j предшествует всякому вхождению $K_i (i \neq l)$ [3.3], т. е. что K_j является первым из вхождений $K_1, \ldots, K_n$. Единственность первого вхождения следует из **3.2**.

Первое среди вхождений слова Q в слово P мы будем называть *первым вхождением слова Q в слово P.*

Указанный выше [1] алгорифм, выясняющий для любых слов P и Q в алфавите А, входит ли Q в P, дает и полный список представлений слова P в виде RQS [см. доказательство леммы 1.1], а значит и полный список вхождений слова Q в слово P [2]. К этому списку применима лемма 3.5, и потому имеем следующее утверждение.

3.6. *Если слово Q входит в слово P, то имеется одно и только одно первое вхождение слова Q в слово P.*

Доказательство этой леммы дает, очевидно, и алгорифм для нахождения первого вхождения слова в другое слово.

3.7. *Если слово P начинается словом Q, то первое вхождение Q в P имеет пустое левое крыло.*

В самом деле, тогда $P = QR$ для некоторого слова R, откуда следует, что слово $*Q*R$ (т. е. $\Lambda*Q*R$) является вхождением Q в P. Это вхождение с пустым левым крылом является первым вхождением Q в P, так как пустое слово является собственным началом всякого непустого слова, а всякое другое вхождение Q в P имеет непустое левое крыло [3.4].

Например, первым вхождением слова «па» в слово «папагиглемма» является вхождение «*па* пагиглемма» с пустым левым крылом.

3.8 *Первым вхождением пустого слова в слово P является вхождение*

$$**P.$$

Это следует из леммы 3.7.

Как нетрудно видеть, число вхождений пустого слова в слово P равно $[P^\partial + 1$.

4. Практически удобный способ нахождения первого вхождения Q в P состоит в осуществлении представителя слова Q на полоске бумаги, которую надо двигать слева направо вдоль неподвижно закрепленного представителя слова P, сличая представителя Q с последовательно приходящимися против него участками представителя P и продолжая это до тех пор, пока сличаемые конкретные слова не окажутся равными.

5. Пусть $R*Q*S$ — вхождение, U — слово. Слово RUS будем называть *результатом подстановки слова U вместо вхождения $R*Q*S$.*

Например, слово «прислониться» есть результат подстановки слова «слон» вместо единственного вхождения слова «креп» в слово «прикрепиться». Слово AP есть результат подстановки слова A вместо первого вхождения пустого слова в слово P [3.8].

Результат подстановки слова в алфавите А вместо вхождения в этом алфавите есть слово в этом алфавите.

5.1. *Слово Q тогда и только тогда есть результат подстановки слова B вместо вхождения слова A в слово P, когда могут быть указаны такие слова R и S, что*

$$P = RAS,$$

$$Q = RBS.$$

Это непосредственно следует из определений вхождения и результата подстановки.

Докажем некоторые леммы, применяемые в дальнейшем.

5.2. *Пусть P и R суть слова в алфавите A, K — вхождение в этом алфавите, Q — результат подстановки слова U вместо K. Тогда PQR есть результат подстановки слова U вместо PKR.*

В самом деле, пусть

$$K = S * V * T. \tag{1}$$

Тогда

$$PKR = PS * V * TR \qquad [(1)], \tag{2}$$

$$Q = SUT \qquad [(1)], \tag{3}$$

$$PQR = PSUTR \qquad [(3)]. \tag{4}$$

Равенства (2) и (4) показывают, что PQR есть результат подстановки U вместо PKR.

5.3. *Если буква α не входит в слово X, то всякий результат подстановки слова Y вместо какого-нибудь вхождения слова X в слово $P\alpha Q$ имеет один из видов:*

(5) *$S\alpha Q$ (S — результат подстановки Y вместо вхождения слова X в P),*

(6) *$P\alpha S$ (S — результат подстановки Y вместо вхождения слова X в Q).*

В самом деле, пусть α не входит в X и пусть R есть результат подстановки слова Y вместо некоторого вхождения L слова X в $P\alpha Q$. Согласно 2.2, L имеет тогда один из видов 2(2), 2(3).

Если L имеет вид 2(2), т. е. если

$$L = K\alpha Q, \tag{7}$$

где K — вхождение X в P, то обозначим через S результат подстановки Y вместо K. Согласно **5.2**, $\Lambda S\alpha Q$, т. е. $S\alpha Q$ [§ 3.6(2)] есть результат подстановки Y вместо $\Lambda K\alpha Q$, т. е. вместо L [(7), § 3.6(2)]. Таким образом, в этом случае

$$R = S\alpha Q,$$

где S есть результат подстановки Y вместо вхождения слова X в P; иначе говоря, R имеет вид (5).

Аналогичным образом усматриваем, что R имеет вид (6), если L имеет вид 2(3).

Тем самым лемма доказана.

Подобным же образом с помощью 2.3 доказывается следующая лемма.

5.4. *Если ни буква α, ни буква β не входят в слово X, то всякий результат подстановки слова Y вместо какого-нибудь вхождения слова X в слово $P\alpha Q\beta R$ имеет один из видов:*

$S\alpha Q\beta R$ (S — результат подстановки Y вместо вхождения слова X в P),

$P\alpha S\beta R$ (S — результат подстановки Y вместо вхождения слова X в Q),

$P\alpha Q\beta S$ (S — результат подстановки Y вместо вхождения слова X в R).

Следующая лемма доказывается аналогично с помощью 2.4.

5.5. *Если буквы α и β различны и ни одна из них не входит ни в слово X, ни в слово Q, то всякий результат подстановки слова Y вместо вхождения слова $\alpha X\beta$ в слово $P\alpha Q\beta R$ имеет один из видов:*

(8) $S\alpha Q\beta R$ (S — *результат подстановки* Y *вместо вхождения слова* $\alpha X\beta$ *в* P),

$$PYR,$$

(9) $P\alpha Q\beta S$ (S — *результат подстановки* Y *вместо вхождения слова* $\alpha X\beta$ *в* R).

Если при этом $X \neq Q$, *то всякий результат подстановки слова* Y *вместо вхождения слова* $\alpha X\beta$ *в слово* $P\alpha Q\beta R$ *имеет вид* (8) *или вид* (9).

По образцу доказательства леммы 5.4 легко может быть доказана следующая лемма.

5.6. *Если ни одна из букв* α, β, γ *не входит в слово* X, *то всякий результат подстановки слова* Y *вместо какого-нибудь вхождения слова* X *в слово* $P\alpha Q\beta R\gamma S$ *имеет один из видов*

$T\alpha Q\beta R\gamma S$ (T — *результат подстановки* Y *вместо вхождения слова* X *в* P),
$P\alpha T\beta R\gamma S$ (T — *результат подстановки* Y *вместо вхождения слова* X *в* Q),
$P\alpha Q\beta T\gamma S$ (T — *результат подстановки* Y *вместо вхождения слова* X *в* R),
$P\alpha Q\beta R\gamma T$ (T — *результат подстановки* Y *вместо вхождения слова* X *в* S).

Наконец, с помощью лемм 2.5 и 2.6 доказываются следующие две леммы.

5.7. *Если буква* α *не входит в слово* X, *а это слово не входит в слово* P, *то всякий результат подстановки слова* Y *вместо какого-нибудь вхождения слова* X *в слово* $P\alpha Q$ *имеет вид* (6).

5.8. *Если буква* α *не входит в слово* X, *а это слово не входит в слово* Q, *то всякий результат подстановки слова* Y *вместо какого-нибудь вхождения слова* X *в слово* $P\alpha Q$ *имеет вид* (5).

6. В дальнейшем нас часто будет интересовать результат подстановки слова U вместо первого вхождения слова Q в слово P. Этот результат подстановки мы будем обозначать символом

$$\Sigma(P, Q, U).$$

Символ этот, по определению, имеет смысл тогда и только тогда, когда Q входит в P.

§ 5. Звенья и цепи

1. Пусть α и β — различные буквы. Будем называть (α, β)-*звеном* всякое слово вида $\alpha B\alpha$, где B — непустое слово в алфавите $\{\beta\}$.

(α, β)-звенья суть, следовательно, слова вида $\alpha\beta^N\alpha$, где N положительное число, т. е. слова

$$\alpha\beta\alpha,\ \alpha\beta\beta\alpha,\ \alpha\beta\beta\beta\alpha,\ \ldots$$

В дальнейшем, при рассмотрении (α, β)-звеньев с определенными α и β, мы будем часто опускать упоминание об α и β и называть (α, β)-звенья просто «звеньями».

1.1. (α, β)-*звено не входит ни в какое отличное от него* (α, β)-*звено.*

Это непосредственно следует из определения (α, β)-звеньев. В частности, имеем следующее утверждение.

1.2. *(α, β)-звено не начинается (не оканчивается) отличным от него (α, β)-звеном.*

2. Пусть α и β — различные буквы алфавита A. Мы будем говорить о слове P, что оно есть (α,β)-*цепь в* A, если оно либо пусто, либо может быть представлено в виде

$$P_1 \dots P_n, \tag{1}$$

где $n > 0$ и где каждое P_i есть либо (α, β)-звено, либо буква алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$.

Представление P в виде (1), где каждое P_i есть либо (α, β)-звено, либо буква алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$, мы будем называть *каноническим* (α, β)-*представлением* слова P. В дальнейшем мы будем обычно говорить просто «цепь» и «каноническое представление» вместо «(α, β)-цепь» и «каноническое (α, β)-представление».

Непустые цепи суть, по определению, слова, допускающие каноническое представление.

2.1. *Всякая непустая цепь допускает лишь одно каноническое представление.*

В самом деле, пусть (1) и

$$Q_1 \dots Q_m \tag{2}$$

суть канонические представления одной и той же непустой цепи. Покажем, что тогда

$$n = m,$$

$$P_i = Q_i \ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

P_1 и Q_1 суть начала одного и того же слова. Поэтому P_1 есть начало Q_1 или Q_1 есть начало P_1 [§ 3.10.3]. Но каждое из этих слов есть буква алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$ или звено.

Если P_1 и Q_1 суть буквы алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$, то $P_1 = Q_1$, так как буква алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$ не может начинаться никакой другой буквой этого алфавита.

Невозможно, чтобы P_1 было буквой алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$, а Q_1 — звеном, так как ни такая буква не может начинаться звеном, ни звено — такой буквой. По той же причине невозможно, чтобы P_1 было звеном, а Q_1 — буквой алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$.

Наконец, если и P_1 и Q_1 суть звенья, то $P_1 = Q_1$ в силу 1.2.

Следовательно,

$$P_1 = Q_1. \tag{3}$$

Но, по предположению,

$$P_1 \dots P_n = Q_1 \dots Q_m. \tag{4}$$

При $n = 1$ имеем поэтому

$$Q_1 = Q_1 \dots Q_m \qquad [(3), (4)],$$

откуда, ввиду того, что Q_i — непустые слова, усматриваем, что $m=1$. Аналогично усматриваем, что $n=1$, если $m=1$.

Допустим теперь, что $n>1$ и $m>1$. Тогда

$$P_2 \ldots P_n = Q_2 \ldots Q_m \qquad [(3), (4), \S\ 3.9.3].$$

Рассуждая, как выше, заключаем, что

$$P_2 = Q_2.$$

Рассуждая далее аналогично предыдущему, усматриваем, что $n=2$ тогда и только тогда, когда $m=2$. Если $n>2$ и $m>2$, получаем равенства

$$P_3 \ldots P_n = Q_3 \ldots Q_m,$$

$$P_3 = Q_3$$

и т. д.

Делая l таких шагов, где l означает наименьшее из чисел m и n, убеждаемся, что

$$P_i = Q_i (1 \leqslant i \leqslant l)$$

и что ни n, ни m не может быть больше l. Следовательно, $m=l=n$ и

$$P_i = Q_i (1 \leqslant i \leqslant l),$$

что и требовалось доказать.

Из доказательства теоремы 2.1 легко усмотреть, что слово P_1 в каноническом представлении (1) цепи P может быть охарактеризовано как единственное начало слова P, являющееся звеном или буквой алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$. Это дает следующий способ разыскания канонического представления данной цепи.

Пусть относительно данного непустого слова P известно, что оно есть цепь. Требуется найти его каноническое представление. Находим P_1 как единственное начало P, являющееся звеном или буквой алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$. Это мы сможем сделать, например, составив полный перечень начал слова P и разыскав в этом перечне звено или букву алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$. Найдя слово P_1, отбросим его от P слева, что дает конец R_1 слова P. Если $R_1 = \Lambda$, то каноническое представление слова P состоит из одного слова P_1. Если же $R_1 \neq \Lambda$, то поступаем с R_1 так, как мы только что поступали с P, т. е. ищем начало P_2 слова R_1, являющееся звеном или буквой алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$. Отбрасывая P_2 от R_1 слева, получаем общий конец R_2 слов R_1 и P. Если $R_2 = \Lambda$, имеем, очевидно, $P = P_1 P_2$, что и дает искомое каноническое представление слова P. Если же $R_2 \neq 1$, продолжаем процесс подобным же образом дальше. В конце концов мы получим таким образом искомое каноническое представление слова P.

Следующие утверждения вытекают из определения цепи.

2.2. *Пустое слово есть цепь.*

2.3. *Всякая буква алфавита* $A \setminus \{\alpha, \beta\}$ *есть непустая цепь.*

2.4. *Всякое звено есть непустая цепь.*

2.5. *Соединение двух цепей есть цепь.*

2.6. *Всякая непустая цепь начинается (оканчивается) звеном или буквой алфавита* $A \setminus \{\alpha, \beta\}$:

Докажем следующую теорему.

2.7. *Если Q — непустая цепь, P и R — такие слова, что PQR есть цепь, то P и R суть цепи.*

В самом деле, пусть Q — непустая цепь и пусть слова P и R таковы, что PQR есть цепь. Покажем, что тогда P есть цепь.

$PQR \neq \Lambda$, так как $Q \neq \Lambda$. Непустая цепь PQR имеет каноническое представление, т. е.

$$PQR = P_1 \ldots P_n, \tag{5}$$

где $n > 0$ и каждое из слов P_i есть звено или буква алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$.

Положим

$$l_k = [P_1 \ldots P_k^\partial. \tag{6}$$

Тогда

$$l_0 = 0 \qquad [(6),\ \S\ 3.6\ (4),\ \S\ 3.8\ (1)], \tag{7}$$

$$l_n = [PQR^\partial \qquad [(6),\ (5)],$$

$$= [P^\partial + [QR^\partial \qquad [\S\ 3.8.1] \tag{8}$$

и, так как $QR \neq \Lambda$, имеем

$$l_0 \leqslant [P^\partial < l_n \qquad [(7),\ (8)]. \tag{9}$$

Среди чисел $0, 1, \ldots, n$ имеются, следовательно, такие числа i, что

$$[P^\partial < l_i.$$

Пусть j означает наименьшее из них. В силу (9) $j > 0$ и, по определению j, имеем

$$l_{j-1} \leqslant [P^\partial < l_j. \tag{10}$$

Сравним теперь слово P с каждым из слов $P_1 \ldots P_{j-1}$ и $P_1 \ldots P_j$. В силу (5) эти три слова суть начала одного и того же слова PQR. К паре слов P, $P_1 \ldots P_{j-1}$, равно как и к паре слов P, $P_1 \ldots P_j$, применима поэтому лемма § 3.10.3. Замечая, что, в силу (10) и (6), P не может быть собственным началом $P_1 \ldots P_{j-1}$, а $P_1 \ldots P_j$ не может быть началом P, заключаем, что $P_1 \ldots P_{j-1}$ есть начало P, а P есть собственное начало $P_1 \ldots P_j$. Таким образом,

$$P = P_1 \ldots P_{j-1} S, \tag{11}$$

$$P_1 \ldots P_j = PT \tag{12}$$

для некоторого слова S и некоторого непустого слова T. Отсюда

$$P_1 \ldots P_{j-1} P_j = P_1 \ldots P_{j-1} ST \quad [\S\ 3.6\,(5),\ (12),\ (11)], \tag{13}$$

$$P_j = ST \qquad [(13),\ \S\ 3.9.3]. \tag{14}$$

Покажем теперь, что $S=\lambda$. Это очевидно, если P_j есть буква алфавита $A\setminus\{\alpha, \beta\}$, так как $T\neq\Lambda$ [(14)]. Допустим, что P_j есть звено. Тогда T, как непустой конец звена P_j [(14)], начинается буквой α или буквой β. Имеем далее

$$PTP_{j+1}\dots P_n=P_1\dots P_jP_{j+1}\dots P_n \qquad [(12)]$$

$$(15)\qquad =PQR \qquad [(5)],$$

$$(16)\qquad TP_{j+1}\dots P_n=QR \qquad [(15),\ \S\ 3.9.3].$$

Здесь Q есть, согласно предположению, непустая цепь, и потому Q начинается звеном или буквой алфавита $A\setminus\{\alpha, \beta\}$, т. е.

$$(17)\qquad Q=UV,$$

где U есть звено или буква алфавита $A\setminus\{\alpha, \beta\}$, V — некоторое слово. Имеем, следовательно,

$$(18)\qquad TP_{j+1}\dots P_n=UVR \qquad [(16),\ (17)].$$

Отсюда следует, что непустое слово U начинается первой буквой слова T и, значит, буквой α или β. U есть поэтому не буква алфавита $A\setminus\{\alpha, \beta\}$, а звено и, следовательно, начинается буквой α. Той же буквой начинается и слово T.

T не может, однако, состоять из одной буквы α, так как в этом случае мы имели бы

$$(19)\qquad U=\alpha\beta^N\alpha,$$

где $N>0$;

$$(20)\qquad \alpha P_{j+1}\dots P_n=\alpha\beta^N\alpha VR \qquad [(18),\ (19)],$$

$$P_{j+1}\dots P_n=\beta^N\alpha VR \qquad [(20),\ \S\ 3.9.3].$$

Отсюда следовало бы, однако, что $j<n$ [§ 3.6 (4)] и что непустое слово P_{j+1} начинается буквой β. Вместе с тем P_{j+1} было бы звеном или буквой алфавита $A\setminus\{\alpha, \beta\}$ и, значит, не начиналось бы буквой β. Таким образом, T не состоит из одной буквы α.

Но T есть непустой конец звена P_j, начинающийся буквой α. Единственным же непустым концом звена P_j, отличным от α, но начинающимся буквой α, является, очевидно, само звено P_j. Следовательно,

$$(21)\qquad T=P_j,$$

$$(22)\qquad S=\Lambda \qquad [(14),\ (21)],$$

$$P=P_1\dots P_{j-1} \qquad [(11),\ (22)].$$

При $j=1$ отсюда следует, что $P=\Lambda$ [§ 3.6 (4)]; при $j>1$ — что P есть непустая цепь. В обоих случаях P есть цепь.

Аналогичным образом доказывается, что R есть цепь, чем и завершается доказательство теоремы.

2.8. *Если Q и PQ суть цепи, то P есть цепь.*

При $Q=\Lambda$ это очевидно, а при $Q\neq\Lambda$ это следует из 2.7.

Аналогично доказывается следующая лемма.

2.9. *Если Q и QR суть цепи, то R есть цепь.*

3. В дальнейшем нам также понадобится следующее обобщение понятия цепи.

Пусть, попрежнему, α и β — различные буквы алфавита A. Будем говорить о слове P, что оно есть *обобщенная* (α, β)-*цепь*, если оно либо пусто, либо может быть представлено в виде 2(1), где каждое P_i есть либо звено, либо буква алфавита $A\setminus\{\beta\}$.

Представление слова P в виде 2(1), где каждое P_i есть либо (α, β)-звено, либо буква алфавита $A\setminus\{\beta\}$, мы будем называть *квазиканоническим* (α, β)-*представлением слова* P. Вместо «квазиканоническое (α, β)-представление» мы будем обычно говорить короче: «квазиканоническое представление».

Непустые обобщенные цепи суть, по определению, слова, допускающие квазиканоническое представление.

3.1. *Всякая непустая обобщенная цепь допускает лишь одно квазиканоническое представление.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1. Мы ограничимся поэтому указанием различий этих двух доказательств.

Каждое из слов P_1 и Q_1 является теперь буквой алфавита $A\setminus\{\beta\}$ или звеном. Различие с доказательством теоремы 2.1 имеется лишь в трактовке тех предполагаемых случаев, когда одно из этих слов есть буква, а другое — звено. Эти случаи не исключаются с самого начала, так как всякое звено начинается буквой алфавита $A\setminus\{\beta\}$, а именно буквой α.

Если, однако, $P_1=\alpha$ и Q_1 есть звено $\alpha\beta^N\alpha$, то из равенства 2(4) следует, что $n>1$ и что

$$P_2\ldots P_n=\beta^N\alpha\,Q_2\ldots Q_m \qquad [\S\ 3.9.3],$$

а это невозможно, так как P_2 есть буква, отличная от β, или звено, начинающееся буквой α. Таким образом, все же невозможно, чтобы P_1 было буквой алфавита $A\setminus\{\beta\}$, а Q_1 — звеном. Аналогичным образом усматривается невозможность того, чтобы Q_1 было буквой алфавита $A\setminus\{\beta\}$, а P_1 — звеном.

В остальном доказательство совпадает с доказательством теоремы 2.1.

Следующие утверждения вытекают из определений.

3.2. *Всякая цепь есть обобщенная цепь.*

3.3. *α есть обобщенная цепь, но не есть цепь.*

3.4. *Соединение двух обобщенных цепей есть обобщенная цепь.*

3.5. *Всякая непустая обобщенная цепь начинается (оканчивается) звеном или буквой алфавита $A\setminus\{\beta\}$.*

Следующая теорема аналогична теореме 2.7.

3.6. *Если Q есть непустая цепь, а слова P и R таковы, что PQR есть обобщенная цепь, то P и R суть обобщенные цепи.*

Доказательство мы опускаем, так как оно было бы почти дословным повторением доказательства теоремы 2.7. Отметим, однако, что

в теореме 3.6 нельзя заменить посылку «Q есть непустая цепь» более слабой посылкой «Q есть непустая обобщенная цепь». Это видно из следующего примера.

Пусть $P=\alpha\beta$, $Q=\alpha$, $R=\Lambda$. Тогда $PQR=\alpha\beta\alpha$. Таким образом, Q есть непустая обобщенная цепь и PQR есть обобщенная цепь (и даже цепь), тогда как P не есть обобщенная цепь.

3.7. *Если PQ есть обобщенная цепь, а Q есть цепь, то P есть обобщенная цепь.*

При $Q=\Lambda$ это очевидно, а при $Q\neq\Lambda$ это следует из 3.6.

Аналогично доказывается следующая лемма.

3.8. *Если QR есть обобщенная цепь, а Q есть цепь, то R есть обобщенная цепь.*

§ 6. Переводы

1. Будем рассматривать какой-нибудь алфавит В. Допустим, что буквы α, β, $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ не входят в этот алфавит, причем $\alpha\neq\beta$ и буквы $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ все различны. Построим алфавиты

$$\text{А}=\text{В}\cup\{\alpha,\ \beta\}, \tag{1}$$

$$\text{Б}=\text{В}\cup\{\gamma_1,\ldots,\gamma_k\}. \tag{2}$$

Определим «переводы» букв алфавита Б следующим образом.

Переводом всякой буквы алфавита В будем считать эту самую букву; переводом буквы $\gamma_i\ (1\leqslant i\leqslant k)$ будем считать $(\alpha,\ \beta)$-звено $\alpha\beta^i\alpha$.

Условимся обозначать перевод произвольной буквы ξ алфавита Б символом

$$[\xi^{\tau}.$$

Имеем, по определению,

$$[\xi^{\tau}=\xi\quad(\xi\in\text{В}), \tag{3}$$

$$[\gamma_i^{\tau}=\alpha\beta^i\alpha\quad(1\leqslant i\leqslant k). \tag{4}$$

Справедливость следующего утверждения очевидна.

1.1. *Перевод всякой буквы алфавита* Б *есть звено или буква алфавита* $\text{А}\setminus\{\alpha,\ \beta\}$.

2. Определим теперь «перевод» произвольного слова P в алфавите Б следующим образом.

Пусть

$$P=\xi_1\ldots\xi_n,$$

где $n>0$ и $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — буквы алфавита Б; *переводом* слова P будем тогда называть слово

$$[\xi_1^{\tau}\ldots\ [\xi_n^{\tau},$$

т. е. слово, получаемое из P заменой каждой буквы ее переводом; *переводом* пустого слова условимся считать пустое слово.

Условимся обозначать перевод слова P символом

$$[P^{\tau}.$$

Имеем, по определению

(1) $$[\Lambda^{\tau} = \Lambda,$$

(2) $$[\xi_1 \ldots \xi_n^{\tau} = [\xi_1^{\tau} \ldots [\xi_n^{\tau}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — буквы алфавита Б.

Очевидно, что ранее определенный перевод буквы алфавита Б можно рассматривать как частный случай перевода слова в этом алфавите.

2.1. *Перевод всякого слова в алфавите* Б *есть* (α, β)*-цепь в алфавите* А.

Это следует из (1) и (2) в силу **1.1** и определения (α, β)-цепи в А [§ 5.2].

2.2. *Для всякого слова* P *в* В *имеем* $[P^{\tau} = P$.

Это следует из **1** (3), (1) и (2).

2.3. *Для всякого слова* P *в* Б *имеем* $[[P^{\tau\partial} \geqslant [P^{\partial}$.

Это непосредственно следует из **1** (3), **1** (4), (1) и (2).

2.4. *Различные буквы алфавита* Б *имеют различные переводы. Иначе говоря, если* $[\xi^{\tau} = [\eta^{\tau}$ *для букв* ξ *и* η *алфавита* Б, *то* $\xi = \eta$.

Это непосредственно следует из определения перевода буквы алфавита Б. Это определение дает, очевидно, способ однозначно находить букву алфавита Б по данному ее переводу. В самом деле, если перевод $[\xi^{\tau}$ буквы ξ есть буква алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$, то ξ совпадает с этой буквой; если же $[\xi^{\tau}$ есть звено, то ξ есть буква γ_i, где i — число вхождений β в $[\xi^{\tau}$.

Мы можем теперь указать и способ однозначного нахождения слова в алфавите Б по данному переводу этого слова.

В самом деле, пусть известно слово $[P^{\tau}$, где P — искомое слово в Б. Если $[P^{\tau} = \Lambda$, то, согласно (2), $P = \Lambda$. Если же $[P^{\tau} \neq \Lambda$, то, согласно (1), $P \neq \Lambda$. Пусть тогда

$$P = \xi_1 \ldots \xi_n,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — пока неизвестные буквы алфавита Б. Согласно (2),

$$[P^{\tau} = [\xi_1^{\tau} \ldots [\xi_n^{\tau}.$$

Это равенство, согласно **1.1**, дает каноническое представление слова $[P^{\tau}$. Такое представление, однако, единственно [§ 5.2.1], причем для его разыскания указан способ [§ 5.2]. Это значит, что имеется способ однозначного разыскания числа n и слов $[\xi_1^{\tau}, \ldots, [\xi_n^{\tau}$ по данному слову P. Найдя $[\xi_1^{\tau}, \ldots, [\xi_n^{\tau}$, мы согласно вышесказанному найдем и буквы $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Тем самым будет найдено искомое слово P.

2.5. *Различные слова в алфавите* Б *имеют различные переводы. Иначе говоря, если* $[P^{\tau} = [Q^{\tau}$ *для некоторых слов* P *и* Q *в* Б, *то* $P = Q$.

Это следует из существования только что описанного способа восстановления слова по данному переводу.

Не всякая (α, β)-цепь является переводом слова в алфавите Б. Нам понадобится даваемая ниже характеристика тех цепей, которые являются такими переводами. Для установления этой характеристики докажем следующую лемму.

2.6. *Всякое звено, входящее в перевод слова* P, *есть перевод одной из букв этого слова.*

В самом деле, пусть в $[P^\tau$ входит звено Q. Имеем тогда

(3) $$[P^\tau = RQS$$

для некоторых слов R и S. Так как Q, будучи звеном, есть непустая цепь [§ 5.2.4], а $[P^\tau$ также есть цепь [2.1], слова R и S суть цепи [§ 5.2.7].

Если цепи R и S не пусты, то они имеют канонические представления. Пусть тогда

(4) $$R = R_1 \ldots R_j,$$

(5) $$S = S_1 \ldots S_h$$

будут каноническими представлениями этих цепей. Имеем

(6) $$[P^\tau = R_1 \ldots R_j Q S_1 \ldots S_h \qquad [(3), (4), (5)]$$

Здесь каждое из слов $R_1, \ldots, R_j, S_1, \ldots, S_h$, фигурирующих в канонических представлениях (4) и (5), есть звено или буква алфавита $A \setminus \{\alpha, \beta\}$, а Q есть звено. Следовательно, (6) дает каноническое представление цепи $[P^\tau$. Эта цепь непуста [(6)], а потому непусто P. Пусть

(7) $$P = \xi_1 \ldots \xi_n,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — буквы алфавита Б. Имеем

(8) $$[P^\tau = [\xi_1^\tau \ldots [\xi_n^\tau \qquad [(7), (2)],$$

что также дает каноническое представление цепи $[P^\tau$ [1.1]. Канонические представления (6) и (8) цепи $[P^\tau$ совпадают [§ 5.2.1], откуда следует, что $n = j + 1 + h$ и что

$$Q = [\xi_{j+1}^\tau.$$

Таким образом, Q есть в этом случае перевод одной из букв слова P. Случаи, когда хотя бы одна из цепей R и S пуста, трактуются совершенно аналогичным образом. В этих случаях отпадают соответствующие равенства (4) или (5), а в равенстве (6) отпадают $R_1, \ldots, R_j$ или $S_1, \ldots, S_h$, или и те и другие. Во всех этих случаях мы убеждаемся, что Q есть перевод одной из букв слова P, что и требовалось доказать.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из определения переводов букв алфавита Б.

2.7. *Звено тогда и только тогда является переводом буквы алфавита* Б, *когда длина этого звена меньше* $k+3$.

Мы можем теперь следующим образом охарактеризовать цепи, являющиеся переводами слов в алфавите Б.

2.8. *Для того, чтобы цепь* S *была переводом некоторого слова в алфавите* Б, *необходимо и достаточно, чтобы все звенья, входящие в* S, *имели длины, меньшие* $k+3$.

Допустим сначала, что цепь S является переводом слова P в Б:

$$S = [P^\tau.$$

Покажем, что длины всех звеньев, входящих в S, меньше $k+3$.

Действительно, каждое из этих звеньев является переводом некоторой буквы слова P [2.6], т. е. некоторой буквы алфавита Б, а потому имеет длину, меньшую $k+3$ [2.7].

Допустим теперь, что длины всех звеньев, входящих в S, меньше $k+3$, и покажем, что тогда эта цепь есть перевод некоторого слова в алфавите Б.

Это очевидно, если $S=\Lambda$, так как тогда S есть перевод Λ [(1)]. Если же $S\neq\Lambda$, то S имеет каноническое представление [§ 5.2]. Пусть оно определяется равенством (5), где каждое из слов $S_1,\ldots,S_h$ есть звено или буква алфавита $A\setminus\{\alpha,\beta\}$. Рассмотрим слово S_i. Оно входит в S [(5)] и, если является звеном, то, по предположению, имеет длину, меньшую $k+3$. В этом случае S_i есть перевод некоторой буквы алфавита Б [2.7]. Если же S_i — буква алфавита $A\setminus\{\alpha,\beta\}$, то S_i является вместе с тем и переводом этой буквы [1 (3)]. Следовательно, во всех случаях

$$S_i=[\xi_i^{\tau} \tag{9}$$

для некоторой буквы ξ_i алфавита Б. Имеем теперь

$$S=[\xi_1^{\tau}\ldots\ [\xi_h^{\tau} \qquad [(5),\ (9)]$$

$$=[\xi_1\ldots\ \xi_h^{\tau} \qquad [(2)].$$

Таким образом, S есть перевод некоторого слова в алфавите Б, что и требовалось доказать.

Следующие утверждения непосредственно вытекают из определения перевода.

2.9. *Каковы бы ни были слова P и Q в* Б,

$$[PQ^{\tau}=[P^{\tau}[Q^{\tau}.$$

2.10. *Каковы бы ни были слова P, Q и R в* Б,

$$[PQR^{\tau}=[P^{\tau}[Q^{\tau}[R^{\tau}.$$

3. Предполагая теперь, что звездочка не является буквой алфавита $A\cup$ Б, будем пользоваться ею для построения вхождений в алфавитах А и Б [§ 4.2].

На основе утверждения **2.10** легко доказывается следующая теорема.

3.1. *Если P, Q, R и S — такие слова в* Б, *что $P*Q*R$ есть вхождение Q в S, то*

$$[P^{\tau}*[Q^{\tau}*[R^{\tau} \tag{1}$$

есть вхождение $[Q^{\tau}$ в $[S^{\tau}$.

В самом деле, при соблюдении условий этой теоремы

$$PQR=S \qquad [\S\ 4.2],$$

$$[P^{\tau}[Q^{\tau}[R^{\tau}=[S^{\tau} \qquad [(2),\ 2.10],$$

откуда следует, что $[P^{\tau}*[Q^{\tau}*[R^{\tau}$ есть вхождение $[Q^{\tau}$ в $[S^{\tau}$.

Вхождение (1), где P, Q, R — слова в Б, мы будем называть *переводом вхождения $P*Q*R$*.

Перевод вхождения K будем обозначать символом

$$[K^{\tau}.$$

Имеем, таким образом,

$$[P*Q*R^{\tau}=[P^{\tau}*[Q^{\tau}*[R^{\tau}. \tag{3}$$

Только что доказанную теорему **3.1** мы можем формулировать следующим образом.

3.2. *Если Q и S — слова в* Б, *то перевод всякого вхождения Q в S есть вхождение перевода Q в перевод S.*

Эта теорема допускает следующее обращение.

3.3. *Если Q и S — слова в* Б *и $Q\neq\Lambda$, то всякое вхождение перевода Q в перевод S есть перевод некоторого вхождения Q в S.*

Допустим, что условия теоремы выполнены, и рассмотрим какое-нибудь вхождение L перевода Q в перевод S. Пусть

$$L=T*[Q^{\tau}*U. \tag{4}$$

Имеем

$$[S^{\tau}=T\,[Q^{\tau}\,U \qquad [(4),\ \S\ 4.2]. \tag{5}$$

Здесь $[S^{\tau}$ и $[Q^{\tau}$ суть цепи [2.1], причем $[Q^{\tau}\neq\Lambda$, так как $Q\neq\Lambda$ [2(2)]. Следовательно, T и U суть цепи [§ 5.2.7].

Рассмотрим какое-нибудь звено V, входящее в T. Оно входит в $[S^{\tau}$, так как T входит в $[S^{\tau}$ [(5), § 4.1.4]. Поэтому $[V^{\partial}<k+3$ [2.8].

Таким образом, длины всех звеньев, входящих в цепь T, меньше $k+3$. Следовательно, T есть перевод некоторого слова P в алфавите Б [2.8]:

$$T=[P^{\tau}. \tag{6}$$

Аналогичным образом доказывается, что U есть перевод некоторого слова R в алфавите Б:

$$U=[R^{\tau}. \tag{7}$$

Имеем теперь

$$[S^{\tau}=[P^{\tau}\ [Q^{\tau}\ [R^{\tau} \qquad [(5),\ (6),\ (7)]$$

$$=[PQR^{\tau} \qquad [2.10], \tag{8}$$

$$S=PQR \qquad [2.5,\ (8)]. \tag{9}$$

Таким образом, $P*Q*R$ есть вхождение слова Q в слово S [(9), § 4.2], а L есть перевод этого вхождения [(4), (6), (7), (3)], что и требовалось доказать.

Как следствие из теоремы **3.3** получаем следующую теорему.

3.4. *Если Q и S — слова в* Б, *то перевод Q тогда и только тогда входит в перевод S, когда Q входит в S.*

Заметим прежде всего, что при $Q=\Lambda$ теорема тривиальна, так как тогда $[Q^{\tau}=\Lambda$ [2(1)] и Q входит в S, а $[Q^{\tau}$ — в $[S^{\tau}$.

Пусть теперь $Q\neq\Lambda$.

Если Q входит в S, то имеется вхождение K слова Q в S [§ 4.2.1]. $[K^\tau$ есть вхождение $[Q^\tau$ в $[S^\tau$ [3.2]. Следовательно, $[Q^\tau$ входит тогда в $[S^\tau$ [§ 4.2.1].

Обратно, если $[Q^\tau$ входит в $[S^\tau$, то имеется вхождение L слова $[Q^\tau$ в $[S^\tau$ [§ 4.2.1]. L является переводом некоторого вхождения слова Q в S, так как $Q \neq \Lambda$ [3.3]. Следовательно, Q входит тогда в S [§ 4.2.1].

Теорема, таким образом, доказана.

Другим следствием из теоремы 3.3 является

3.5. *Если Q и S — слова в* Б, *то перевод S тогда и только тогда начинается переводом Q, когда S начинается словом Q.*

Это утверждение также тривиально при $Q = \Lambda$, так как тогда $[Q^\tau = \Lambda$ и S начинается словом Q, а $[S^\tau$ — словом $[Q^\tau$.

Пусть теперь $Q \neq \Lambda$.

Если S начинается словом Q, то

$$S = QR \tag{10}$$

для некоторого слова R в Б. Отсюда

$$[S^\tau = [Q^\tau\ [R^\tau \qquad [2.9].$$

Следовательно, $[S^\tau$ начинается словом $[Q^\tau$.

Обратно, допустим, что $[S^\tau$ начинается словом $[Q^\tau$. Тогда

$$[S^\tau = [Q^\tau T$$

для некоторого слова T в А. Поэтому

$$*[Q^\tau * T$$

есть вхождение слова $[Q^\tau$ в слово $[S^\tau$ [§ 4.2]. Так как $Q \neq \Lambda$, это вхождение является переводом некоторого вхождения K слова Q в слово S [3.3]. Переводом левого крыла K является тогда левое крыло вхождения $*[Q^\tau * T$, т. е. Λ [(3)]. Отсюда следует, что само левое крыло K пусто [2(2)]. Таким образом, K имеет вид

$$*Q*R$$

и, так как K — вхождение Q в S, имеет место равенство (10). Следовательно, S начинается словом Q, что и требовалось доказать.

Предполагая теперь слово Q непустым, рассмотрим всевозможные вхождения этого слова в слово S в алфавите Б. Каждому из них соотнесем его перевод. Согласно теоремам 3.2 и 3.3 это дает нам соответствие между вхождениями Q в S, с одной стороны, и вхождениями $[Q^\tau$ в $[S^\tau$ — с другой, соответствие, при котором каждому вхождению Q в S будет соответствовать ровно одно вхождение $[Q^\tau$ в $[S^\tau$ и каждому вхождению $[Q^\tau$ в $[S^\tau$ по меньшей мере одно вхождение Q в S. Мы покажем сейчас, что это соответствие взаимно-однозначно и сохраняет порядок.

Докажем для этого следующую теорему (в которой мы не предполагаем, что $Q \neq \Lambda$).

3.6. *Пусть Q и S — слова в* Б, *а K и L — вхождения Q в S. Если K предшествует L, то $[K^\tau$ предшествует $[L^\tau$.*

В самом деле, пусть выполнены условия теоремы и пусть

(11) $$K = P * Q * R,$$

(12) $$L = T * Q * U.$$

P есть собственное начало T, так как K предшествует L [§ 4.3]. Следовательно,

(13) $$T = PV$$

для некоторого непустого слова V. Отсюда

$$[T^\tau = [P^\tau\ [V^\tau \qquad [(13),\ 2.9].$$

Здесь $[V^\tau \neq \Lambda$, так как $V \neq \Lambda$ [2(2)]. Следовательно, $[P^\tau$ есть собственное начало слова $[T^\tau$.

Имеем, с другой стороны,

$$[K^\tau = [P^\tau * [Q^\tau * [R^\tau \qquad [(11),\ (3)],$$

$$[L^\tau = [T^\tau * [Q^\tau * [U^\tau \qquad [(12),\ (3)].$$

Следовательно, $[K^\tau$ предшествует $[L^\tau$, что и требовалось доказать.

Отсюда легко получается следующая теорема.

3.7. *Если Q и S — слова в* Б, *то разные вхождения Q в S имеют разные переводы.*

Пусть, в самом деле, K и L — разные вхождения Q в S. Тогда K предшествует L или L предшествует K [§ 4.3.1]. В первом случае $[K^\tau$ предшествует $[L^\tau$, а во втором — наоборот [3.6]. В обоих случаях $[K^\tau \neq [L^\tau$.

Следующая теорема также легко выводится из 3.6.

3.8. *Если Q и S — слова в* Б, *K и L — вхождения Q в S, то $[K^\tau$ тогда и только тогда предшествует $[L^\tau$, когда K предшествует L.*

В самом деле, если K предшествует L, то $[K^\tau$ предшествует $[L^\tau$ [3.6].

Обратно, пусть $[K^\tau$ предшествует $[L^\tau$. Тогда $[K^\tau \neq [L^\tau$ [§ 4.3.2]. Поэтому $K \neq L$. Следовательно, K предшествует L или L предшествует K [§ 4.3.1]. Однако вторая возможность отпадает, так как тогда $[L^\tau$ предшествовало бы $[K^\tau$ [3.6], вопреки предположению о том, что $[K^\tau$ предшествует $[L^\tau$ [§ 4.3.2]. Следовательно, K предшествует L, что и требовалось доказать.

Теоремы 3.7 и 3.8 показывают, что в случае, когда $Q \neq \lambda$, указанное выше соответствие между вхождениями Q в S и вхождениями $[Q^\tau$ в $[S^\tau$ взаимно однозначно и сохраняет порядок.

3.9. *Если S — слово в* Б *и Q входит в S, то первое вхождение перевода Q в перевод S есть перевод первого вхождения Q в S.*

В самом деле, пусть выполнены условия теоремы. Тогда имеются вхождения Q в S [§ 4.2.1], и среди них имеется первое [§ 4.3.6]. Пусть K означает это вхождение. Покажем, что $[K^\tau$ является первым вхождением $[Q^\tau$ в $[S^\tau$.

$[K^\tau$ есть вхождение $[Q^\tau$ в $[S^\tau$ [3.2].

Если $Q = \Lambda$, то $[Q^\tau = \Lambda$ [2(1)],

(14) $$K = **S \qquad [\S\ 4.3.8],$$

(15) $$[K^\tau = ** [S^\tau \qquad [(14),\ (3),\ 2(1)].$$

Следовательно, $[K^\tau$ есть первое вхождение $[Q^\tau$ в $[S^\tau$ [(15), § 4.3.8].

Пусть теперь $Q \neq \Lambda$. Рассмотрим какое-нибудь отличное от $[K^\tau$ вхождение L слова $[Q^\tau$ в $[S^\tau$. Оно является переводом некоторого вхождения M слова Q в слово S [3.3]. $M \neq K$, так как $L \neq [K^\tau$. Поэтому K предшествует M, а $[K^\tau$ предшествует $[M^\tau$, т. е. L [3.6]. Таким образом, $[K^\tau$ предшествует всякому отличному от него вхождению слова $[Q^\tau$ в слово $[S^\tau$, т. е. является первым вхождением $[Q^\tau$ в $[S^\tau$, что и требовалось доказать.

3.10. *Пусть S, Q, U — слова в алфавите* Б. *Если Q входит в S, то перевод результата подстановки U вместо первого вхождения Q в S есть результат подстановки перевода U вместо первого вхождения перевода Q в перевод S, т. е.*

$$[\Sigma(S, Q, U)^\tau = \Sigma([S^\tau, [Q^\tau, [U^\tau). \tag{16}$$

В самом деле, пусть Q входит в S. Пусть K — первое вхождение Q в S. $[K^\tau$ есть тогда первое вхождение $[Q^\tau$ в $[S^\tau$ [3.9].

Пусть

$$K = P * Q * R. \tag{17}$$

Тогда

$$[K^\tau = [P^\tau * [Q^\tau * [R^\tau \qquad [(17), (3)], \tag{18}$$

$$\Sigma(S, Q, U) = PUR \qquad [(17), \S\ 4.6, \S\ 4.5], \tag{19}$$

$$[\Sigma(S, Q, U)^\tau = [P^\tau [U^\tau [R^\tau \qquad [(19), 2.10]$$

$$= \Sigma([S^\tau, [Q^\tau, [S^\tau) \qquad [(18), \S\ 4.6, \S\ 4.5],$$

так как $[K^\tau$ — первое вхождение $[Q^\tau$ в $[S^\tau$. Равенство (16), таким образом, доказано.

4. Аналогично использованию свойств цепей для построения «переводов» слов, для подобных же целей могут быть использованы свойства обобщенных цепей. Это связано с некоторым видоизменением построения переводов, применяемым в дальнейшем [VI, § 4.8].

Выше [1] мы рассматривали алфавит В и не принадлежащие ему буквы α, β, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Теперь мы будем предполагать, что α принадлежит В, тогда как буквы β, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ не принадлежат В. Буквы $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ будем попрежнему предполагать различными.

Как выше, определим алфавиты А и Б равенствами 1(1) и 1(2). (Так как теперь $\alpha \in$ В, вместо 1(1) можно написать проще: $A = B \cup \{\beta\}$).

Определим теперь переводы букв алфавита Б и переводы слов в этом алфавите дословно, как выше [1, 2], и будем пользоваться прежним обозначением переводов. Существенно новым обстоятельством является то, что переводом буквы α, принадлежащей алфавиту В, является сама эта буква:

$$[\alpha^\tau = \alpha. \tag{1}$$

Предложение 1.1 поэтому уже не будет иметь места. Вместо него имеем

4.1. *Перевод всякой буквы алфавита* Б *есть звено или буква алфавита* $A \setminus \{\beta\}$.

Равенства 2(1) и 2(2), очевидно, сохраняют силу, а вместо 2.1 имеем

4.2. *Перевод всякого слова в алфавите* Б *есть обобщенная* (α, β)-*цепь в* А.

Это следует из 2(1) и 2(2) в силу 4.1 и определения обобщенной цепи [§ 5.3].

Утверждения 2.2—2.5 и 2.7, как нетрудно видеть, остаются в силе. Как и в прежних условиях, имеется способ однозначного восстановления слова по его переводу. Лемма 2.6 также остается в силе, а ее доказательство претерпевает соответствующие изменения: вместо ссылок на 2.1, § 5.2.7, 1.1 и § 5.2.1, надо теперь ссылаться соответственно на 4.2, § 5.3.6, 4.1 и § 5.3.1. Вместо 2.8 имеем теперь

4.3. *Для того, чтобы обобщенная цепь* S *была переводом некоторого слова в алфавите* Б, *необходимо и достаточно, чтобы все звенья входящие в* S, *имели длины, меньшие* $k+3$.

Доказательство леммы 4.3 может быть получено из доказательства леммы 2.8 путем надлежащих замен.

Утверждения 2.9 и 2.10, очевидно, остаются в силе.

4.4. *Перевод всякого слова в* Б, *не содержащего* α, *есть цепь.*

В самом деле, переводы отличных от α букв алфавита Б суть или буквы алфавита А, отличные от α и β, или звенья. Поэтому перевод всякого не содержащего α слова в Б есть или пустое слово, или слово вида $P_1 \ldots P_n$, где каждое P_i есть звено или буква алфавита $\text{А} \setminus \{\alpha, \beta\}$. Отсюда следует, что всякий такой перевод есть цепь [§ 5.2].

Глава II

ПОНЯТИЕ АЛГОРИФМА

Эта глава посвящена уточнению понятия алгорифма. Результатом уточнения является понятие «нормального алгорифма», определяемое в § 3. В § 4 мы приводим ряд примеров нормальных алгорифмов. Многие из этих примеров не только служат иллюстративным материалом, но и используются в дальнейшем. В § 5 формулируется «принцип нормализации», равносильный, как выяснилось, тезису Чёрча [15] о рекурсивности эффективно вычислимых арифметических функций. Принцип нормализации утверждает пригодность предлагаемого здесь уточнения понятия нормального алгорифма.

§ 1. Алгорифмы в алфавитах

1. Объекты, с которыми имеют дело применяемые в математике алгорифмы, весьма разнообразны. Например, это могут быть натуральные числа, дроби, многочлены, рациональные функции, матрицы, системы натуральных чисел, системы многочленов и т. д. Эти объекты не всегда обозначаются конкретными словами, т. е. линейно расположенными рядами конкретных букв. Уже в случае записи дробей и степеней нарушается линейное расположение конкретных букв. Другим его нарушением является обычная запись матриц в виде таблиц.

Нетрудно, однако, видеть, что все нарушения линейного расположения легко устранить без всякого изменения существа дела. В случае дробей можно, например, применять запись «(P/Q)» вместо «$\frac{P}{Q}$». Составленную из выражений P, Q, R, S, T, U таблицу

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

можно условиться записывать в виде $P\alpha Q\beta R\alpha S\beta T\alpha U$, где α и β — какие-нибудь различные буквы, не входящие в ранее применяемый алфавит. Такое присоединение «новых» букв к алфавиту вообще дает возможность записывать в строку системы объектов, уже записываемых словами в этом алфавите. Применяя, например, ту или иную систему счисления, мы пользуемся некоторым алфавитом для записи чисел словами в нем. Присоединяя к тому же алфавиту новую букву α, мы получаем возможность записывать системы чисел словами в полученном расширении нашего алфавита. Для этого мы условливаемся изо-

бражать систему этих чисел словом $N_1 \alpha N_2 \alpha \ldots N_{k-1} \alpha N_k$, где N_i—записи чисел в принятой системе счисления.

Приемы этого рода дают возможность переходить к изображению рассматриваемых объектов конкретными словами. Мы не сделаем поэтому существенного ограничения общности, если будем рассматривать только алгорифмы, имеющие дело с конкретными словами.

2. Всякий способ изображения математических объектов конкретными словами согласуется с абстракцией отождествления в том смысле, что равные конкретные слова изображают один и тот же объект. Поэтому мы можем считать, что рассматриваемые объекты изображаются *абстрактными* словами. Соответственно этому с абстрактными словами будут иметь дело и наши алгорифмы.

Это надлежит понимать следующим образом.

Точное предписание, составляющее алгорифм, имеет своим предметом конкретные слова. Оно дает правила, согласно которым мы, исходя из какого-нибудь данного конкретного слова, будем последовательно получать новые конкретные слова. Результаты применения этих правил являются, однако, определенными лишь с точностью до равенства конкретных слов. Поэтому и весь процесс применения алгорифма является определенным лишь с той же точностью. Иначе говоря, результат, получаемый на всяком этапе процесса, может быть всегда охарактеризован лишь, как «слово, равное вот этому конкретному слову: ...», а не как «вот это конкретное слово: ...».

Таким образом, определенность алгорифма есть определенность с точностью до равенства получаемых конкретных слов, или, что то же самое, это есть точная его определенность, если, однако, рассматривать алгорифм как предписание, касающееся абстрактных слов.

3. Массовость алгорифма должна состоять в том, что исходные данные, выражаемые словом в рассматриваемом алфавите,* могут в известных пределах изменяться. Иначе говоря, может в известных пределах изменяться исходное слово.

Результативность алгорифма должна состоять в том, что при надлежащих исходных данных, т. е. при надлежащем исходном слове, определяемый алгорифмом процесс заканчивается и дает некоторый результат, т. е. некоторое результирующее слово. В других же случаях процесс может и не иметь конца или оборваться, натолкнувшись на препятствие (на некотором этапе или уже с самого начала). Эту возможность безрезультатного обрыва процесса можно, однако, исключить, не ограничивая по существу общности понятия алгорифма.

В самом деле, предписание «получив такое-то слово, оборвать процесс, как безрезультатный» можно заменить предписанием «получив такое слово, повторить это слово». Вместо обрывающегося безрезультатного процесса мы будем иметь также безрезультатный, но бесконечный процесс повторения одного и того же слова. Интересуясь алгорифмами лишь с точки зрения их результативности, мы можем пренебречь различием между этими двумя предписаниями.

Тогда допустимо считать, что *любое слово* в рассматриваемом алфавите может быть взято в качестве исходного при применении алгорифма. Однако процесс его применения вообще не всегда заканчивается.

---

* Применяя указанный выше [1] способ, мы выражаем систему *нескольких* исходных данных *одним* словом.

Если он заканчивается, то слово, получаемое в конце концов, есть *результат применения алгорифма к исходному слову*.

4. Заканчивающийся процесс применения алгорифма может быть сколь угодно длинным, и слова, получаемые в ходе этого процесса, тоже могут быть сколь угодно длинными. Это вообще — лишь потенциально осуществимый процесс.

Мы приходим таким образом к следующему определению «алгорифма в данном алфавите».

Алгорифмом в алфавите A называется точное общепонятное предписание, определяющее потенциально осуществимый процесс последовательного преобразования абстрактных слов в A, процесс, допускающий любое слово в A в качестве исходного.

Это определение отнюдь не претендует на математическую точность, поскольку с точки зрения математика недостаточно точными являются встречающиеся в нем термины «общепонятное предписание» и «процесс». Мы, однако, временно примем его, отложив уточнение до § 3 этой главы.

5. Будем говорить об алгорифме $\mathfrak{A}$, что он *применим* к слову P, если при исходном слове P процесс применения $\mathfrak{A}$ в конце концов заканчивается на некотором слове Q. Будем говорить тогда, что $\mathfrak{A}$ *перерабатывает* P в Q.

Если алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P, то он перерабатывает P во вполне определенное слово. Это слово мы обозначаем через $\mathfrak{A}(P)$.

Равенство $\mathfrak{A}(P) = Q$ выражает, таким образом, что $\mathfrak{A}$ перерабатывает P в Q.

6. Условимся понимать под *алгорифмом над алфавитом* A алгорифм в любом расширении алфавита A.

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгорифмы над A, то будем говорить, что они *эквивалентны относительно* A, если соблюдены следующие условия.

Э. 1. Всякий раз, когда $\mathfrak{A}$ перерабатывает какое-нибудь слово P в A в другое слово Q также в A, $\mathfrak{B}$ перерабатывает P также в Q.

Э. 2. То же с переменой ролей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ *вполне эквивалентны относительно* A, если соблюдены следующие условия.

В. 1. Всякий раз, когда $\mathfrak{A}$ перерабатывает какое-нибудь слово P в A в другое слово Q, $\mathfrak{B}$ перерабатывает P также в Q.

В. 2. То же с переменой ролей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Ясно из определений, что как эквивалентность относительно A, так и полная эквивалентность относительно A рефлексивна, симметрична и транзитивна, т. е. всякий алгорифм над A эквивалентен (вполне эквивалентен) самому себе относительно A; если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ эквивалентны (вполне эквиваленты) относительно A, то $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ эквивалентны (вполне эквивалентны) относительно A; если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ эквивалентны (вполне эквивалентны) относительно A, а также $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ эквивалентны (вполне эквивалентны) относительно A, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ эквивалентны (вполне эквивалентны) относительно A. Ясно также из сравнения определений, что полная эквивалентность относительно A влечет эквивалентность относительно A, т. е. что всякие два алгорифма над A, вполне эквивалентные относительно A, эквивалентны относительно A.

7. В дальнейшем мы часто будем пользоваться знаком условного равенства «$\simeq$». Ставя такой знак между двумя выражениями, мы тем самым будем утверждать, что выражения эти означают одно и то же слово, коль скоро хотя бы одно из них имеет смысл. Обычно в скоб-

ках будут при этом писаться те или иные дополнительные условия, налагаемые на составные части рассматриваемых выражений.

В этих обозначениях полная эквивалентность алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ относительно алфавита A выражается так:

$$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{B}(P) \quad (P \text{ — слово в } A).$$

Условное равенство, очевидно, рефлексивно, симметрично и транзитивно.

§ 2. Примеры алгорифмов

1. Будем пользоваться алфавитом Ч для изображения натуральных чисел [I. §3.13].

Алгорифм перехода от произвольного натурального числа к числу, на единицу большему, перерабатывающий число N в число $N+1$, может быть тогда оформлен в виде предписания: «приписать к исходному числу слева вертикальную черточку и на этом остановиться». Это есть, таким образом, алгорифм в алфавите Ч.

2. Добавляя к алфавиту Ч звездочку в качестве новой буквы, мы получаем алфавит С [I. § 2.6], пригодный для изображения систем натуральных чисел [§ 1.1]. Если $N_1, \ldots, N_M$ изображают в алфавите Ч некоторые числа, то

$$N_1 * N_2 * \ldots * N_M \tag{1}$$

пусть изображает в алфавите С систему этих чисел.

Предписание «убрать все звездочки и на этом остановиться» будет тогда не чем иным, как алгорифмом сложения системы чисел, перерабатывающим систему (1) в сумму этой системы, т. е. в число

$$N_1 + N_2 + \ldots + N_M.*$$

3. Несколько сложнее строится алгорифм умножения. Мы ограничимся здесь случаем двух сомножителей.

Алгорифм будет удобно строить, как алгорифм в расширении $C \cup \{+\}$ алфавита С.

Условимся прежде всего называть *шагом* переход от слова в алфавите $C \cup \{+\}$ к другому слову в этом алфавите согласно следующим правилам.

У. 1. Если слово содержит более одного вхождения звездочки, то оно воспроизводится без изменений.

У. 2. Если слово содержит ровно одно вхождение звездочки и этому вхождению предшествует хотя бы одно вхождение черточки, то вместо первого вхождения черточки подставляется $+$.

У. 3. Если слово содержит ровно одно вхождение звездочки и не содержит предшествующих ему вхождений черточек, однако содержит вхождения черточки, следующие за вхождением звездочки, то вместо

---

* Сумму чисел $N_1, \ldots, N_M$ мы, собственно, должны были бы записать в виде $N_1 \ldots N_M$, как обычно пишут произведение этих чисел. Мы будем, однако, часто пользоваться обычной арифметической символикой для обозначения сумм, произведений, разностей и т. д.

первого вхождения черточки подставляется левое крыло вхождения звездочки.

У. 4. Если слово содержит ровно одно вхождение звездочки и не содержит вхождений черточки, то первая его буква отбрасывается.

У. 5. Если слово не содержит вхождений звездочки, но содержит вхождения плюсов, то вместо первого вхождения плюса подставляется черточка.

У. 6. Если слово не содержит ни вхождений звездочки, ни вхождений плюсов, то шаг невозможен.

Нетрудно видеть, что ко всякому слову в алфавите $C \cup \{+\}$ может быть применено одно и только одно из этих правил, в силу чего от него либо возможен один и только один шаг, либо никакой шаг вообще невозможен. Первое имеет место, если слово содержит звездочку или плюс, второе — если оно не содержит ни звездочек, ни плюсов, т. е. изображает число. В случае возможности шага этот шаг вполне определяется соответствующим правилом.

Теперь мы формулируем предписание «исходя из данного слова, делать шаги до тех пор, пока это будет возможно». Это предписание, в силу только что сказанного, определяет некоторый процесс. Оно и составляет алгорифм умножения.

Иллюстрируем работу алгорифма на примере умножения чисел 4 и 3. Система этих чисел изобразится словом |||*||| в алфавите $C \cup \{+\}$. Исходя из этого слова и применяя алгорифм, мы последовательно получим слова

||| |*| |	[У, 2]
+|| |*| |	[У, 2]
++| |*| |	[У, 2]
+++ |*| |	[У, 2]
++++*| |	[У, 3]
++++*++++| |	[У, 3]
++++*++++++++ |	[У, 3]
++++*++++++++++	[У, 4]
+++*++++++++++	[У, 4]
++*++++++++++	[У, 4]
+*++++++++++	[У, 4]
*++++++++++	[У, 4]
++++++++++	[У, 5]
|++++++++++	[У, 5]
||++++++++++	[У, 5]
. . . . .	. . .
|||||||||||	[У, 6]

На последнем из этих слов, выражающем число двенадцать, процесс заканчивается, согласно У. 6. В это слово алгорифм перерабатывает слово, изображающее пару чисел 4, 3.

Справа в прямоугольных скобках мы здесь указали применяемое правило. Нетрудно видеть, что шаги, совершаемые согласно правилу У. 3, составляют самую суть процесса умножения — замену каждой единицы множителя множимым. Все остальное — подготовка к этой главной части процесса (применение правила У. 2) и извлечение окончательного результата (применение правил У. 4 и У. 5). Правило У. 1 нам не пришлось здесь применять. Оно касается слов, содержащих более одного вхождения звездочки и обусловливает неприменимость алгорифма к таким словам: процесс применения алгорифма к исходному слову такого рода будет состоять в бесконечном повторении этого слова и не даст никакого результата. В частности, алгорифм не применим к системам более чем двух чисел.

В отличие от ранее рассмотренных алгорифмов, применяемых в один прием, этот алгорифм требует при своем применении многих шагов, причем число их зависит от исходного слова.

§ 3. Нормальные алгорифмы

1. Введенное только что понятие алгорифма в данном алфавите не является достаточно четким, чтобы дать возможность рассматривать алгорифмы как объекты математической теории. Оно для этого подлежит уточнению, к которому мы сейчас и перейдем.

Прежде всего «общепонятность» предписания нельзя рассматривать как вполне четкую характеристику. Постепенный переход от понятного предписания к совсем непонятному путем все большего и большего усложнения, очевидно, вполне возможен. Естественна поэтому мысль о той или иной регламентации предписания путем его расчленения на правила определенного стандартного типа, общепонятность которых не вызывала бы никаких сомнений. Процесс применения алгорифма будет тогда состоять из отдельных элементарных шагов, каждый из которых будет выполняться согласно одному из этих правил.

Естественно добиваться возможно большей простоты этих шагов и правил.

2. Сложность шагов может быть обусловлена их *интегральным характером*, т. е. тем, что они так или иначе меняют слово в целом, вызывают изменения, которые могут быть сколь угодно велики в зависимости от изменяемого слова. Примером этого рода шагов является применение правила У. 3 в выше рассмотренном алгорифме умножения.

Значительно более простыми являются шаги *локального характера*, вызывающие местные, заранее ограниченные изменения слова, и состоящие просто в подстановке некоторого заранее указанного слова вместо вхождения другого тоже заранее указанного слова. В выше рассмотренном алгорифме умножения к этому типу относятся шаги, связанные с правилами У. 1, У. 2, У. 4, У. 5.*

Естественно стремиться полностью исключить шаги интегрального характера путем сведения всякого такого шага к нескольким шагам локального характера. Допустим, что это удалось осуществить. Тогда для данного алгорифма мы будем иметь конечный список возможных типов элементарных шагов, причем каждому типу будет соответство-

* Шаги, совершаемые согласно правилу У. 4, разбиваются при этом на два типа в зависимости от отбрасываемой буквы.

вать пара слов в алфавите алгорифма: то слово, вместо вхождения которого совершается подстановка, и то слово, которое подставляется. Считая, что стрелка не есть буква нашего алфавита, условимся изображать формулой вида

$$A \to B \tag{1}$$

подстановку слова B вместо вхождения слова A. Существенная составная часть алгорифма будет тогда выражаться некоторым списком таких *формул подстановок*.

3. Формул подстановок может быть много. Правила должны давать указания относительно того, какую из них следует в каждом случае применять.

Кроме того, даже если известно, что в данном случае следует применить подстановку, выражаемую данной формулой 2(1), то ведь ее левая часть A может несколько раз входить в слово. Значит, должно быть указано, вместо которого ее вхождения следует подставлять правую часть формулы. Возможны различные варианты таких указаний. Мы остановимся на следующем, как на простейшем.

Условимся, во-первых, что расположение формул подстановок в их списке в том смысле определяет их очередность, что каждый раз следует из числа формул списка, выражающих подстановки, применимые к данному слову (т. е. из числа тех, чьи левые части входят в слово) брать *первую*. Во-вторых, будем применять соответствующую подстановку к *первому вхождению* левой части формулы в рассматриваемое слово.

Процесс последовательных подстановок, выполняемый на основании этого предписания, выглядит так. Будем исходить из какого-нибудь слова P. В данном списке формул подстановок ищется первая из тех, чьи левые части входят в P. Ищется первое вхождение левой части этой формулы в P [I. § 4.3.6] и вместо этого вхождения подставляется правая часть формулы, что дает новое слово P_1. С ним делается то же, что с P, и т. д.

4. Когда же следует заканчивать только что описанный процесс? На этот счет предписание, разумеется, тоже должно давать определенные указания.

Здесь прежде всего следует иметь в виду, что процесс может оборваться сам собою на некотором слове, к которому ни одна из формул подстановок не применима, т. е. на слове, в которое не входит ни одна из левых частей этих формул. Нельзя, однако, ограничиться алгорифмами, допускающими лишь такой *естественный обрыв* процесса.

В самом деле, допустим, что алгорифм $\mathfrak{A}$ в алфавите A именно таков. Допустим, что этот алгорифм применим к слову P. Тогда процесс применения $\mathfrak{A}$ к P естественно оборвется на слове $\mathfrak{A}(P)$ в A. К слову $\mathfrak{A}(P)$ ни одна из формул подстановок алгорифма $\mathfrak{A}$ не будет применима. Поэтому, если мы начнем применять $\mathfrak{A}$ к слову $\mathfrak{A}(P)$, то процесс оборвется уже на исходном слове $\mathfrak{A}(P)$. Алгорифм $\mathfrak{A}$ перерабатывает, таким образом, это слово в самого себя. Мы доказали, следовательно, что для $\mathfrak{A}$ имеет место условное равенство

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}(P)) \simeq \mathfrak{A}(P).$$

Далеко не всякий алгорифм удовлетворяет, однако, этому равенству. Ему не удовлетворяет, например, алгорифм приписывания черточки [§ 2.1]. Это показывает, что необходимо ввести и какой-то другой тип окончания процесса. Здесь опять возможны различные варианты. Мы остановимся на следующем.

Некоторые из формул подстановок мы объявим *заключительными*; остальные будем называть *простыми*. Потребуем, чтобы процесс обрывался не только всякий раз, когда его продолжение невозможно, но и всякий раз, когда окажется примененной одна из заключительных формул. Во всех остальных случаях процесс должен продолжаться.

Чтобы отличить заключительные формулы от простых, будем в заключительных формулах добавлять точку, которую будем ставить рядом со стрелкой и справа от нее. Заключительные формулы будут, следовательно, иметь вид

$$A \to \cdot B, \tag{1}$$

где A и B — слова в алфавите алгорифма.

5. Алгорифмы описанного типа мы будем называть *нормальными*. Нормальные алгорифмы в алфавите А суть, таким образом, алгорифмы, которые строятся следующим образом.

Составляется список слов вида **2(1)** и **4(1)**, где A и B суть слова в А. (Предполагается, что стрелка и точка не суть буквы этого алфавита). Слова этого списка, называемые *формулами подстановок в алфавите* А, расположены в этом списке в определенном порядке. (При этом чередование заключительных и простых формул может быть любым).

Алгорифм предписывает последовательно преобразовывать слово согласно следующим правилам.

Пусть на некоторой стадии получено слово P. Если среди левых частей формул подстановок (т. е. левых крыльев вхождений стрелки в эти формулы) нет слов, входящих в P, то процесс обрывается на этом слове. Если же среди них есть слова, входящие в P, то берется первая из соответствующих формул подстановок и вместо первого вхождения ее левой части в P подставляется правая часть формулы (т. е. правое крыло вхождения стрелки, если формула простая, и правое крыло вхождения точки, если формула заключительная). На полученном так новом слове процесс обрывается, если использованная формула была заключительной. Если же она была простой, то с новым словом поступают так же, как до этого поступали с P.

Исходя из произвольного слова в алфавите А, применяют этот процесс последовательного преобразования до его обрыва. Если процесс заканчивается, то полученное при его обрыве слово есть результат преобразования исходного слова — слово, в которое алгорифм перерабатывает исходное слово.

Введенное так понятие нормального алгорифма является, как мы увидим, достаточно четким для того, чтобы можно было рассматривать нормальные алгорифмы как объекты математической теории.

6. В следующем параграфе мы рассмотрим ряд примеров нормальных алгорифмов. Сейчас же мы введем некоторые понятия и обозначения, связанные с этими алгорифмами и полезные в дальнейшем.

Список формул подстановок нормального алгорифма мы будем называть *схемой* этого алгорифма.

Всякий нормальный алгорифм, очевидно, вполне определяется указанием алфавита, в котором он действует, и схемы.

Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите A. Будем говорить о слове P в A, что оно *поддается* алгорифму $\mathfrak{A}$, если хотя бы одна из формул подстановок этого алгорифма применима к P, т. е. хотя бы одна из левых частей этих формул входит в P. В противном случае будем говорить, что P *не поддается* алгорифму $\mathfrak{A}$.

Пусть P и Q — слова в A. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *просто переводит* P *в* Q, если Q получается из P в результате первого шага применения $\mathfrak{A}$, причем используемая формула подстановки простая. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *заключительно переводит* P *в* Q, если Q получается из P в результате первого шага применения $\mathfrak{A}$, причем используемая формула подстановки заключительная.

В дальнейшем

«$\mathfrak{A} : P \urcorner$» означает, что P не поддается $\mathfrak{A}$;

«$\mathfrak{A} : P \vdash Q$» означает, что $\mathfrak{A}$ просто переводит P в Q;

«$\mathfrak{A} : P \vdash\cdot Q$» означает, что $\mathfrak{A}$ заключительно переводит P в Q.

Мы предполагаем при этом, что введенные знаки «$\urcorner$» и «$\vdash$» не суть буквы алфавита алгорифма $\mathfrak{A}$.

Следующая лемма очевидна.

6.1. *Если* $\mathfrak{A}$ *— нормальный алгорифм в алфавите* A, *то для всякого слова* P *в* A *имеет место одно и только одно из трех: либо* $\mathfrak{A} : P \urcorner$, *либо существует слово* Q, *такое, что* $\mathfrak{A} : P \vdash Q$, *либо существует слово* Q, *такое, что* $\mathfrak{A} : P \vdash\cdot Q$. *Во втором и третьем случаях слово* Q *с указанным свойством единственно.*

В дальнейшем вместо

$$\mathfrak{A} : P_0 \vdash P_1,\ \mathfrak{A} : P_1 \vdash P_2,\ \ldots,\ \mathfrak{A} : P_{n-1} \vdash P_n$$

мы обычно будем писать короче:

$$\mathfrak{A} : P_0 \vdash P_1 \vdash P_2 \vdash \ldots \vdash P_{n-1} \vdash P_n.$$

Аналогичным образом будем применять записи

$$\mathfrak{A} : P_0 \vdash P_1 \vdash P_2 \vdash \ldots \vdash P_{n-1} \vdash\cdot P_n$$

и

$$\mathfrak{A} : P_0 \vdash P_1 \vdash P_2 \vdash \ldots \vdash P_{n-1} \vdash P_n \urcorner,$$

смысл которых ясен.

Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *естественно преобразует* P в Q, если процесс применения $\mathfrak{A}$ к P естественно обрывается на слове Q, т. е. если существует ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n (n \geq 0)$, такой что

$$\mathfrak{A} : P_0 \vdash P_1 \vdash \ldots \vdash P_n \urcorner, \tag{1}$$

$$P_0 = P,\ P_n = Q. \tag{2}$$

Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *заключительно преобразует* P *в* Q, если процесс применения $\mathfrak{A}$ к P приводит к Q, причем последняя примененная формула подстановки является заключительной. Иначе говоря, $\mathfrak{A}$ заключительно преобразует P в Q, если существует ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n (n > 0)$ такой, что

$$\mathfrak{A} : P_0 \vdash P_1 \vdash \ldots \vdash P_{n-1} \vdash\cdot P_n \tag{3}$$

и что имеют место равенства (2).

Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *просто преобразует* P *в* Q, если процесс применения $\mathfrak{A}$ к P дает на некоторой стадии Q, причем в случае, когда эта стадия не исходная, формула подстановки, использованная при получении Q, простая. Иначе говоря, $\mathfrak{A}$ просто преобразует P в Q, если существует ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n (n \geq 0)$ такой, что

$$\mathfrak{A} : P_0 \vdash \ldots \vdash P_n \tag{4}$$

и что имеют место равенства (2).

Подчеркиваем, что в определениях естественного преобразования и простого преобразования допускаются случаи фактического отсутствия процесса ($n = 0$), тогда как в определении заключительного преобразования такой случай исключается.

В дальнейшем

«$\mathfrak{A} : P \models Q\urcorner$» означает, что $\mathfrak{A}$ естественно преобразует P в Q;

«$\mathfrak{A} : P \models \cdot Q$» означает, что $\mathfrak{A}$ заключительно преобразует P в Q;

«$\mathfrak{A} : P \models Q$» означает, что $\mathfrak{A}$ просто преобразует P в Q.

Сокращенные записи, аналогичные (1), (3) и (4), будут применяться и со знаками «$\vdash$» и «$\vdash \cdot$».

В следующих очевидных леммах предполагается, что $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите A.

6.2. $\mathfrak{A} : P \models \cdot Q$ *тогда и только тогда, когда существует такое слово* R, *что*

$$\mathfrak{A} : P \models R \vdash \cdot Q.$$

6.3. $\mathfrak{A}(P) = Q$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A} : P \models Q\urcorner$ *или* $\mathfrak{A} : P \models \cdot Q$.

6.4. *Для всякого слова* P *в* A *имеем* $\mathfrak{A} : P \models P$.

6.5. *Если* $\mathfrak{A} : P \models Q \models R$, *то* $\mathfrak{A} : P \models R$.

6.6. *Если* $\mathfrak{A} : P \models Q \models \cdot R$, *то* $\mathfrak{A} : P \models \cdot R$.

6.7. *Если* $\mathfrak{A} : P \models Q \models R\urcorner$, *то* $\mathfrak{A} : P \models R\urcorner$.

6.8. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash Q$, *то* $\mathfrak{A} : P \models Q$.

6.9. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash \cdot Q$, *то* $\mathfrak{A} : P \models \cdot Q$.

6.10. *Если* $\mathfrak{A} : P\urcorner$, *то* $\mathfrak{A} : P \models P\urcorner$.

7. Иногда нам будет нужно интересоваться числом шагов при преобразовании P в Q (простом или заключительном).

Мы говорим, что $\mathfrak{A}$ *просто (заключительно) преобразует* P *в* Q *в* n *шагов*, если существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$, удовлетворяющий условиям 6(2) и 6(4) (6(2) и 6(3)).

Так как естественное преобразование есть частный случай простого, это определение распространяется и на него: можно говорить об «естественном преобразовании P в Q в n шагов», подразумевая под этим простое преобразование P в Q в n шагов, являющееся естественным преобразованием.

Мы будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *собственно преобразует* P *в* Q, если $\mathfrak{A}$ просто преобразует P в Q в положительное число шагов.

В дальнейшем

«$\mathfrak{A} : P \models_n Q\urcorner$» означает, что $\mathfrak{A}$ естественно преобразует P в Q в n шагов;

«$\mathfrak{A} : P \models_n \cdot Q$» означает, что $\mathfrak{A}$ заключительно преобразует P в Q в n шагов;

«$\mathfrak{A} : P \models_n Q$» означает, что $\mathfrak{A}$ просто преобразует P в Q в n шагов;

«$\mathfrak{A} : P \models_{} Q$» означает, что $\mathfrak{A}$ собственно преобразует P в Q.

Докажем некоторые леммы.

7.1. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash Q$ *и* $\mathfrak{A} : P \models_n R\urcorner$, *то* $n > 0$ *и* $\mathfrak{A} : Q \models_{n-1} R\urcorner$.

Пусть, в самом деле,

(1) $$\mathfrak{A} : P \vdash Q$$

и

(2) $$\mathfrak{A} : P \models_n R\urcorner .$$

Тогда существует ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n (n \geq 0)$, удовлетворяющий условию 6 (1) и такой, что

(3) $$P_0 = P,$$

(4) $$P_n = R.$$

$n > 0$, так как $\mathfrak{A} : P_0 \vdash Q$ [(1), (3)], тогда как $\mathfrak{A} : P_n\urcorner$ [(2), (4)]. Имеем

(5) $$P_1 = Q,$$

так как $\mathfrak{A} : P_0 \vdash Q$ и $\mathfrak{A} : P_0 \vdash P_1$ [6.1]. Таким образом, ряд слов $P_1, \ldots, P_n$ удовлетворяет условиям (4), (5) и

$$P_1 \vdash \ldots \vdash P_n\urcorner ,$$

откуда следует, что $\mathfrak{A} : Q \models_{n-1} \cdot R$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается лемма

7.2. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash Q$ *и* $\mathfrak{A} : P \models_n \cdot R$, *то* $n > 1$ *и* $\mathfrak{A} : Q \models_{n-1} \cdot R$.

Лемма 7.1 обобщается следующим образом.

7.3. *Если* $\mathfrak{A} : P \models_m Q$ *и* $\mathfrak{A} : P \models_n R\urcorner$, *то* $n \geq m$ *и* $\mathfrak{A} : Q \models_{n-m} R\urcorner$.

Эту лемму мы докажем индукцией по m. Если $m = 0$, то $P = Q$ и лемма очевидна. Допустим, что лемма доказана в предположении, что $m = k$, где k — натуральное число. Докажем ее в предположении, что $m = k + 1$.

Пусть $\mathfrak{A} : P \models_{k+1} Q$ и $\mathfrak{A} : P \models_n R\urcorner$. Тогда существует ряд слов $P_0, \ldots, P_{k+1}$, удовлетворяющий условиям

$$\mathfrak{A} : P_0 \vdash P_1 \vdash \ldots \vdash P_k \vdash P_{k+1},$$

$$P_0 = P,$$

$$P_{k+1} = Q.$$

Имеем поэтому $\mathfrak{A} : P \models_k P_k$. Так как $\mathfrak{A} : P \models_n R\urcorner$, имеем, согласно индуктивному допущению, $n \geq k$ и $\mathfrak{A} : P_k \models_{n-k} R\urcorner$, и, так как $\mathfrak{A} : P_k \vdash P_{k+1}$, имеем $n - k > 0$ и $\mathfrak{A} : P_{k+1} \models_{n-k-1} R\urcorner$ [7.1], т. е. $n \geq k + 1$ и $\mathfrak{A} : Q \models_{n-(k+1)} R\urcorner$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается

7.4. *Если* $\mathfrak{A} : P \models_m Q$ *и* $\mathfrak{A} : P \models_n \cdot R$, *то* $n > m$ *и* $\mathfrak{A} : Q \models_{n-m} \cdot R$.

Из лемм 7.3, 7.4 и 6.3 вытекает лемма

7.5. *Если* $\mathfrak{A} : P \models Q$ *и* $\mathfrak{A}(P) = R$, *то* $\mathfrak{A}(Q) = R$.

Из лемм 6.6, 6.7 и 6.3 вытекает лемма

7.6. *Если* $\mathfrak{A} : P \models Q$ *и* $\mathfrak{A}(Q) = R$, *то* $\mathfrak{A}(P) = R$.

Из лемм 7.5 и 7.6 вытекает лемма

7.7. *Если* $\mathfrak{A} : P \models Q$, *то* $\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{A}(Q)$.

Из леммы 7.7 вытекает лемма

7.8. *Если* $\mathfrak{A} : P \models Q$, *то алгорифм* $\mathfrak{A}$ *тогда и только тогда применим к* P, *когда он применим к* Q.

Формулируем еще следующие леммы, вытекающие из 7.3 и 7.4 согласно определению собственного преобразования.

7.9. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash Q$ *и* $\mathfrak{A} : P \models_n R \urcorner$, *то имеется такое число* k, *что* $0 \leq k < n$ *и* $\mathfrak{A} : Q \models_k R \urcorner$.

7.10. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash Q$ *и* $\mathfrak{A} : P \models_n \cdot R$, *то имеется такое число* k, *что* $0 < k < n$ *и* $\mathfrak{A} : Q \models_k \cdot R$.

§ 4. Примеры нормальных алгорифмов

1. Рассмотрим теперь ряд примеров нормальных алгорифмов. Условимся при записи схем нормальных алгорифмов писать формулы подстановок друг под другом в столбик и объединять их слева фигурной скобкой. (Эту запись будем для единообразия применять даже тогда, когда формула подстановки будет всего одна).

2. Пусть A — определенное слово в алфавите А. Рассмотрим нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_{A,A}$ в А со схемой

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \cdot A. \end{array} \right. \tag{1}$$

Схема (1) имеет одну формулу подстановки. Формула эта заключительная, и левая часть ее пуста. Так как пустое слово входит во всякое слово, подстановка, выражаемая этой формулой, всегда возможна. Применение алгорифма к исходному слову P будет состоять в подстановке слова A вместо первого вхождения пустого слова в P, причем тем дело и ограничится, так как формула заключительная. В результате подстановки получится слово AP [I. § 4.5]. Следовательно,

$$\mathfrak{A}_{A,A} : P \vdash \cdot AP, \tag{2}$$

$$\mathfrak{A}_{A,A}(P) = AP \quad [(2), \text{ § } 3.6.9, \text{ § } 3.6.3]. \tag{3}$$

Таким образом, нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_{A,A}$ применим ко всякому слову в алфавите А, причем он присоединяет слева слово A ко всякому такому слову. Это — *нормальный алгорифм левого присоединения слова* A.

В частности, в качестве A может быть взято пустое слово. Мы получаем тогда *тождественный нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}_{A,\Lambda}$ *в алфавите* А, применимый ко всякому слову в А и перерабатывающий всякое слово в А в то же самое слово. Схема этого нормального алгорифма имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \cdot \end{array} \right.$$

Другим важным частным случаем алгорифма $\mathfrak{A}_{A,A}$ является рассмотренный в § 2.1 алгорифм приписывания слева вертикальной черточки. Этот алгорифм может быть построен как нормальный алгорифм в алфавите Ч со схемой

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \cdot | . \end{array} \right.$$

3. Что произойдет, если мы опустим точку в схеме (1) и перейдем к нормальному алгорифму в А со схемой

$$\{\to A?$$

Нетрудно видеть, что получится алгорифм, просто переводящий произвольное слово P в алфавите А в слово AP, это слово в свою очередь — в AAP и т. д. Процесс работы алгорифма никогда не закончится, каково бы ни было исходное слово P в А. Таким образом, мы получаем *пустой алгорифм в* А, не применимый ни к какому слову в этом алфавите. Таков, в частности, алгорифм в А со схемой

$$\{\to .$$

4. Несколько сложнее строится нормальный алгорифм присоединения слова A справа. Здесь приходится прибегать к расширению рассматриваемого алфавита.

Пусть опять A — определенное слово в алфавите А, равном $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Присоединим к А новую букву, которую обозначим через α. Это даст алфавит

$$\text{Б} = \text{А} \cup \{\alpha\}.$$

Построим в Б нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_{\text{А}, A}$ со схемой

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha\alpha_1 \to \alpha_1\alpha \\ \quad \ldots \\ \alpha\alpha_n \to \alpha_n\alpha \\ \alpha \to \cdot A \\ \to \alpha. \end{cases}$$

Будем здесь для краткости обозначать этот алгорифм просто через $\mathfrak{B}$.

Прослеживая применение алгорифма $\mathfrak{B}$ к произвольному слову P в А, докажем следующее.

4.1. $\mathfrak{B} : P \vdash \alpha P$.

В самом деле, первые $n+1$ формул подстановок алгорифма $\mathfrak{B}$ имеют α в левых частях и потому не применимы к слову P, не содержащему этой буквы. Последняя формула зато применима, так как ее левая часть пуста. Ее применение дает слово αP [I. § 4.5]. Так как применяемая формула простая, имеем $\mathfrak{B} : P \vdash \alpha P$.

4.2. $\mathfrak{B} : \alpha P \models P\alpha$.

При $P = \Lambda$ это следует из § 3.6.4.

Если $P \neq \Lambda$, то пусть $P = \xi_1 \ldots \xi_k$, где ξ_i — буквы алфавита А. Положим

$$(2) \qquad Q_i = \xi_1 \ldots \xi_i \alpha \xi_{i+1} \ldots \xi_k \quad (0 \leqslant i \leqslant k).$$

Пусть i — одно из чисел $1, \ldots, k$. ξ_i, как буква алфавита А, совпадает с одной из букв $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Пусть $\xi_i = \alpha_j$. Так как

$$Q_{i-1} = \xi_1 \ldots \xi_{i-1} \alpha \xi_i \ldots \xi_k \qquad [(2)],$$

левые части первых $j-1$ формул подстановок алгорифма $\mathfrak{B}$ не входят в Q_{i-1}, тогда как

$$\xi_1 \ldots \xi_{i-1} * \alpha_j * \xi_{i+1} \ldots \xi_k$$

есть единственное вхождение левой части j-й формулы подстановки в Q_{i-1}. Поэтому алгорифм просто переводит слово Q_{i-1} в результат подстановки правой части α_j j-й формулы вместо этого вхождения. Так как $\alpha_j = \xi_j$, этим результатом является слово Q_i. Таким образом, $\mathfrak{B} : Q_{i-1} \vdash Q_i$ $(0 < i \leqslant k)$, откуда $\mathfrak{B} : Q_0 \models Q_k$. Но $Q_0 = \alpha P$, $Q_k = P\alpha$ [(2)]. Следовательно, $\mathfrak{B} : \alpha P \models P\alpha$, что и требовалось доказать.

4.3. $\mathfrak{B} : P\alpha \vdash \cdot PA$.

В самом деле, левые части первых n формул подстановок алгорифма $\mathfrak{B}$ не входят в $P\alpha$, так как α не входит в P. Левая же часть $(n+1)$-й формулы входит в $P\alpha$, и ее единственным вхождением в $P\alpha$ является $P*\alpha*$. Вместо этого вхождения алгорифм предписывает подставить A, в результате чего получается слово PA. Так как применяемая формула заключительная, имеем $\mathfrak{B} : P\alpha \vdash \cdot PA$.

4.4. $\mathfrak{B} : P \models \cdot PA$ [4.1, 4.2, 4.3, § 3.6.8, § 3.6.5, § 3.6.2].

4.5. $\mathfrak{B}(P) = PA$ [4.4, § 3.6.3].

Иначе говоря, нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над алфавитом A применим ко всякому слову в этом алфавите, причем он ко всякому такому слову присоединяет справа слово A. Это есть *алгорифм правого присоединения слова A*.

Работу алгорифма $\mathfrak{B}$ в применении к слову P в алфавите A можно, согласно предыдущему, коротко описать следующим образом. Прежде всего, к P слева присоединяется буква α, которая затем «бежит» вправо, последовательно «перескакивая» через буквы слова P. Добежав до конца слова P, она «превращается» в слово A, и на этом процесс заканчивается.

5. Схему 4(1) алгорифма $\mathfrak{B}$ удобно записать сокращенно в виде

$$\begin{cases} \alpha\xi \to \xi\alpha \ (\xi \in A) \\ \alpha \to \cdot A \\ \quad \to \alpha \end{cases}$$

Здесь в первой строке фигурирует произвольная буква ξ алфавита A [I. § 2.4]. Эта буква «пробегает» весь алфавит A, на что указывает стоящее справа от формулы условие. Каждой букве алфавита A соответствует, таким образом, своя формула подстановки, получаемая из первой строки схемы (1) путем замены этой буквой буквы ξ. Всего первой строке сокращенно записанной схемы соответствует столько формул подстановок, сколько букв имеется в алфавите.

Сокращенная запись не вполне однозначно характеризует схему, так как ничего не говорит о порядке расположения формул, соответствующих первой строке. Как видно, однако, из предыдущего, этот порядок оказывается в данном случае несущественным: различные нормальные алгорифмы, соответствующие различным способам расположения первых n формул подстановок, одинаковым образом перерабатывают слова в алфавите A. Все эти алгорифмы вполне эквивалентны относительно A, что и оправдывает примененную запись.

Такую сокращенную запись мы часто будем применять в дальнейшем. При этом вводятся одна или несколько произвольных букв, про-

бегающих те или иные алфавиты и, быть может, подчиненных тем или иным условиям. Эти алфавиты и условия будут обычно указываться в скобках справа от соответствующих строк сокращенно записанной схемы. Для восстановления подробной схемы нужно подставить вместо каждой греческой буквы букву соответствующего алфавита, заботясь о соблюдении условий, что даст некоторую формулу подстановки. Проделав это для всех возможных замен греческих букв данной строки, получим набор формул подстановок, соответствующих данной строке. Их взаимное расположение сокращенная запись не отразит, и при толковании записи оно может быть выбрано по произволу. Записями этого рода мы будем пользоваться лишь тогда, когда произвол в их толковании не будет играть существенной роли в рассматриваемых вопросах.

6. При построении нормального алгорифма правого присоединения данного слова мы воспользовались формулами транспозиции

$$\alpha\xi \to \xi\alpha$$

для «протаскивания» буквы α сквозь слово P [см. доказательство 4.2]. Этот прием мы будем иногда применять в дальнейшем, и потому полезно оформить его в виде соответствующей леммы.

Условимся для краткости говорить о формуле подстановки F нормального алгорифма $\mathfrak{A}$, что она *стоит выше строки* $\mathfrak{S}$ сокращенной записи $\mathfrak{Z}$ схемы алгорифма $\mathfrak{A}$, если F есть одна из формул, представленных в $\mathfrak{Z}$ какой-нибудь из строк, стоящих выше $\mathfrak{S}$.

6.1. *Пусть* Б — *расширение алфавита* А, $\alpha \in$ Б$\setminus$А, Q — *слово в* А, $\mathfrak{A}$ — *нормальный алгорифм в* Б. *Пусть сокращенная запись схемы алгорифма* $\mathfrak{A}$ *содержит строку*

$$\alpha\xi \to \xi\alpha \ (\xi \in \text{А}). \tag{1}$$

Если тогда слова P *и* R *в* Б$\setminus\{\alpha\}$ *таковы, что все левые части формул подстановок, стоящих выше* (1), *содержат буквы, не входящие в* $P\alpha QR$ *(при отсутствии таких формул это условие сводится к условию:* P *и* R *слова в* Б$\setminus\{\alpha\}$), *то*

$$\mathfrak{A} : P\alpha QR \models PQ\alpha R. \tag{2}$$

Докажем эту лемму методом правой индукции в А [I. § 3.8]. Если $Q = \Lambda$, то утверждение леммы верно в силу § 3.6.4.

Допустим, что лемма доказана для некоторого определенного слова Q в А, т. е. что для этого Q установлено следующее: (2) имеет место, каковы бы ни были слова P и R в Б$\setminus\{\alpha\}$, такие, что все левые части формул подстановок, стоящих выше (1), содержат буквы, не входящие в $P\alpha QR$. Докажем тогда то же с заменой Q на $Q\eta$, где $\eta \in$ А.

Пусть в самом деле P и R такие слова в Б$\setminus\{\alpha\}$, что все левые части формул подстановок, стоящих выше (1), содержат буквы, не входящие в $P\alpha Q\eta R$. Тогда ηR есть, как и R, слово в алфавите Б$\setminus\{\alpha\}$, так как η, будучи буквой алфавита А, отлична от α. Поэтому, согласно предположению,

$$\mathfrak{A} : P\alpha Q\eta R \models PQ\alpha\eta R. \tag{3}$$

Но слово $PQ\alpha\eta R$ содержит те же буквы, что и $P\alpha Q\eta R$. Поэтому, если имеются формулы, стоящие выше строки (1), то все их левые части содержат буквы, не входящие в $PQ\alpha\eta R$. Подстановки, выражаемые этими формулами, не применимы поэтому к слову $PQ\alpha\eta R$.

Что касается формул, представленных строкой (1), то среди них имеется формула

(4) $$\alpha\eta \to \eta\alpha,$$

очевидно, применимая к $PQ\alpha\eta R$. Рассмотрим какую-нибудь из этих формул, скажем

$$\alpha\zeta \to \zeta\alpha,$$

отличную от (4). Ее левая часть не входит в слово $PQ\alpha\eta R$, так как α не входит в $PQ\eta R$, а $\zeta \neq \eta$. Таким образом, в схеме алгорифма $\mathfrak{A}$ формула (4) есть первая из формул, левые части которых входят в $PQ\alpha\eta R$. Так как α не входит в $PQ\eta R$, единственным вхождением $\alpha\eta$ в слово $PQ\alpha\eta R$ является вхождение $PQ*\alpha\eta*R$.

Алгорифм $\mathfrak{A}$ в применении к этому слову предписывает подставить $\eta\alpha$ вместо этого вхождения, что дает слово $PQ\eta\alpha R$. Так как (4) — простая формула, имеем, следовательно,

(5) $$\mathfrak{A} : PQ\alpha\eta R \vdash PQ\eta\alpha R,$$

$$\mathfrak{A} : P\alpha Q\eta R \models PQ\eta\alpha R \quad [(3), (5), \S\ 3.6.8, \S\ 3.6.5],$$

что и требовалось доказать.

Доказанная ранее лемма 4.2 является, очевидно, частным случаем 6.1.

В лемме 6.1 буква α «протаскивалась» сквозь слово Q вправо. Аналогичным образом осуществляется протаскивание влево.

Соответствующая лемма, доказываемая аналогично лемме 6.1, формулируется так.

6.2 *Пусть* Б — *расширение алфавита* А, $\alpha \in$ Б$\setminus$А, Q — *слово в* А, $\mathfrak{A}$ — *нормальный алгорифм в* Б. *Пусть сокращенная запись схемы алгорифма* $\mathfrak{A}$ *содержит строку*

(6) $$\xi\alpha \to \alpha\xi \ (\xi \in \text{А}).$$

Если тогда слова P *и* R *в* Б$\setminus\{\alpha\}$ *таковы, что все левые части формул подстановок, стоящих выше* (6), *содержат буквы, не входящие в* $PQ\alpha R$ *(при отсутствии таких формул это условие сводится к условию:* P *и* R *— слова в* Б$\setminus\{\alpha\}$), *то*

$$\mathfrak{A} : PQ\alpha R = P\alpha QR.$$

7. Пусть α — буква алфавита А. Нормальный алгорифм $\mathfrak{C}_{\text{А},\alpha}$ в А со схемой

$$\{\alpha \to,$$

очевидно, применим ко всякому слову в А и перерабатывает всякое такое слово P в слово, получаемое из P выбрасыванием всех α. В частности, алгорифм суммирования системы чисел [§ 2.2] может быть построен как нормальный алгорифм в алфавите С со схемой

$$\{* \to.$$

Нормальный алгорифм $\mathfrak{E}_A$ в А с сокращенно записанной схемой

$$\{\xi \to (\xi \in A),$$

очевидно, перерабатывает всякое слово в А в пустое слово. Мы будем называть $\mathfrak{E}_A$ *аннулирующим алгорифмом в* А.

Легко также построить нормальный алгорифм в А, перерабатывающий всякое слово в А, в некоторое данное постоянное слово A в А. Такой алгорифм может быть задан сокращенно записанной схемой

$$\begin{cases} \xi \to (\xi \in A) \\ \to \cdot A \end{cases}.$$

Этот алгорифм мы будем обозначать символом $\mathfrak{E}_A^A$.

8. Нормальные алгорифмы $\mathfrak{E}_{A,\alpha}$ и $\mathfrak{E}_A$ суть примеры «сокращающих» алгорифмов. Этот класс алгорифмов может быть определен так.

Условимся говорить о простой формуле подстановки $A \to B$, что она *сокращающая*, если $[A^\partial > [B^\partial$. Будем говорить о нормальном алгорифме, что он *сокращающий*, если все его формулы подстановок сокращающие.

Легко доказывается следующая теорема.

8.1 *Всякий сокращающий алгорифм в алфавите* А *применим ко всякому слову в этом алфавите.*

В самом деле, при применении сокращающего алгорифма к какому-нибудь слову в А на каждом шаге получается слово длины меньшей, чем длина слова, полученного перед тем. Поэтому процесс применения алгорифма должен естественно оборваться после некоторого числа шагов, не большего длины исходного слова.

Нетрудно также видеть, что эта теорема может быть несколько обобщена, а именно, если наряду с сокращающими простыми формулами в схеме алгорифма присутствуют любые заключительные формулы, то и тогда алгорифм применим ко всякому слову в своем алфавите. (Нецелесообразно было бы, однако, называть такие алгорифмы сокращающими, так как они могут перерабатывать слова и в более длинные слова).

9. Пусть А — произвольный алфавит. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{D}_A$ в алфавите $A \cup \{|\}$ с сокращенно записанной схемой

$$\{\xi \to | \ (\xi \in A \setminus \{|\}).$$

Рассматривая слова в алфавите Ч как натуральные числа [I. § 3.13], будем иметь, как нетрудно видеть,

$$\mathfrak{D}_A(P) = [P^\partial$$

для любого слова P в $A \cup \{|\}$. Иначе говоря, алгорифм $\mathfrak{D}_A$ перерабатывает всякое слово в алфавите $A \cup \{|\}$ в длину этого слова.

10. Пусть $\alpha \urcorner \in A$. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{E}_A$ в алфавите $A \cup \{\alpha\}$ с сокращенно записанной схемой

$$\begin{cases} \alpha\xi \to \cdot \ (\xi \in A) \\ \alpha \to \cdot \\ \to \alpha \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathfrak{E}_A(\xi P) = P \quad (P \text{ — слово в } A,\ \xi \in A),$$

$$\mathfrak{E}_A(\Lambda) = \Lambda.$$

Иначе говоря, $\mathfrak{E}_A$ отбрасывает первую букву от всякого непустого слова в A и перерабатывает пустое слово само в себя.

Построим далее нормальный алгорифм $\mathfrak{I}_{A,\alpha}$ в $A \cup \{\alpha\}$ со схемой

$$\begin{cases} \alpha\xi \to \alpha \ (\xi \in A) \\ \alpha \to \end{cases} \tag{1}$$

и нормальный алгорифм $\mathfrak{G}_{A,\alpha}$ в $A \cup \{\alpha\}$ со схемой

$$\begin{cases} \xi\alpha \to \alpha \ (\xi \in A) \\ \alpha \to \end{cases}.$$

10.1 *Если P — слово в A, Q — непустое слово в $A \cup \{\alpha\}$, то имеется такое слово R в $A \cup \{\alpha\}$, что*

$$\mathfrak{I}_{A,\alpha} : P\alpha Q \vdash P\alpha R, \tag{2}$$

$$[R^\partial < [Q^\partial. \tag{3}$$

Допустим сначала, что в $P\alpha Q$ входит одно из слов $\alpha\xi$ ($\xi \in A$), т. е. что к $P\alpha Q$ применима одна из формул подстановок

$$\alpha\xi \to \alpha \ (\xi \in A)$$

алгорифма A. Пусть тогда

$$\alpha\eta \to \alpha \tag{4}$$

является первой из таких формул и пусть

$$S * \alpha\eta * T \tag{5}$$

есть первое вхождение слова $\alpha\eta$ в $P\alpha Q$. Тогда

$$P\alpha Q = S\alpha\eta T \qquad [\text{I. § 4.2}], \tag{6}$$

а алгорифм $\mathfrak{I}_{A,\alpha}$ в применении к $P\alpha Q$ предписывает подставить α вместо вхождения (5), что дает слово $S\alpha T$. Так как формула (4) простая,

$$\mathfrak{I}_{A,\alpha} : P\alpha Q \vdash S\alpha T. \tag{7}$$

$S\alpha$ и P суть начала одного и того же слова [(6)]. Поэтому P начинается словом $S\alpha$ или S начинается словом P [I. § 3.10.9]. Первое, однако, отпадает, так как P, будучи словом в A, не содержит α. Следовательно,

$$S = PU \tag{8}$$

для некоторого слова U. Имеем

(9) $$\alpha Q = U\alpha\eta T \qquad [(6), (8), \text{I. § 3.9.3}],$$

откуда следует, что непустое слово $U\alpha$ начинается буквой α, т. е. что

(10) $$U\alpha = \alpha V$$

для некоторого слова V. Имеем далее

(11) $$Q = V\eta T \qquad [(9), (10), \text{I. § 3.9.3}],$$

$$S\alpha T = PU\alpha T \qquad [(8)]$$

$$= P\alpha VT \qquad [(10)]$$

(12) $$= P\alpha R,$$

где

(13) $$R = VT.$$

В силу (7) и (12) имеем (2); в силу (11) и (13) имеем (3). В силу (2) R есть слово в $\mathrm{A} \cup \{\alpha\}$.

Допустим теперь, что никакое слово $\alpha\xi (\xi \in \mathrm{A})$ не входит в $P\alpha Q$. Тогда Q не начинается буквой алфавита A и, так как Q — непустое слово в $\mathrm{A} \cup \{\alpha\}$, Q начинается буквой α, т. е.

(14) $$Q = \alpha R$$

для некоторого слова R в $\mathrm{A} \cup \{\alpha\}$. Это слово удовлетворяет условию (3) в силу (14). Так как α не входит в P, $P*\alpha*Q$ есть первое вхождение α в $P\alpha Q$. Алгорифм $\mathfrak{I}_{\mathrm{A},\alpha}$ в применении к $P\alpha Q$ предписывает подставить Λ вместо этого вхождения, что дает слово PQ. Но

$$PQ = P\alpha R \qquad [(14)]$$

Так как формула

(15) $$\alpha \rightarrow$$

простая, имеем, таким образом, (2).

Лемма **10.1** этим доказана.

10.2. *Если* P *— слово в* A, Q *— слово в* $\mathrm{A} \cup \{\alpha\}$, *то*

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{A},\alpha} : P\alpha Q \mid\!= P\alpha.$$

Это следует из леммы **10.1**.

10.3. *Если* P *— слово в* A, *то*

1 6) $$\mathfrak{I}_{\mathrm{A},\alpha} : P\alpha \mid\!- P.$$

В самом деле, слова вида $\alpha\xi (\xi \in \mathrm{A})$ не входят в $P\alpha$, а единственным вхождением α в $P\alpha$ является $P*\alpha*$. Алгорифм предписывает подставить Λ вместо этого вхождения, что дает слово P. Так как применяемая при этом формула подстановки (15) простая, имеем (16), что и требовалось доказать.

10.4. *Никакое слово в алфавите* A *не поддается алгорифму* $\mathfrak{Z}_{A,\alpha}$. Это непосредственно усматривается из схемы (1) алгорифма $\mathfrak{Z}_{A,\alpha}$.

10.5. *Если* P *— слово в* A, Q *— слово в* $A \cup \{\alpha\}$, *то*

$$\mathfrak{Z}_{A,\alpha}(P\alpha Q) = P. \tag{17}$$

В самом деле, при соблюдении этих условий имеем

$$\mathfrak{Z}_{A,\alpha} : P\alpha Q \models P\urcorner \qquad [10.2, 10.3, 10.4],$$

откуда следует (17) [§ 3.6.3].

Совершенно аналогичным образом устанавливается следующая теорема о работе алгорифма $\mathfrak{G}_{A,\alpha}$.

10.6. *Если* P *— слово в* $A \cup \{\alpha\}$, Q *— слово в* A, *то*

$$\mathfrak{G}_{A,\alpha}(P\alpha Q) = Q.$$

Слова вида $P\alpha Q$, где P и Q — слова в A, можно рассматривать как пары слов в алфавите A [§ 1.1]. Теоремы 10.5 и 10.6 утверждают, что алгорифм $\mathfrak{Z}_{A,\alpha}$ перерабатывает всякую такую пару в ее первый элемент, а алгорифм $\mathfrak{G}_{A,\alpha}$ — во второй.

Пусть теперь $\beta\urcorner \in A \cup \{\alpha\}$. Построим алгорифм $\mathfrak{K}_{A,\alpha,\beta}$ в алфавите $A \cup \{\alpha, \beta\}$ со схемой

$$\begin{cases} \xi\alpha \to \alpha \ (\xi \in A) \\ \beta\xi \to \beta \ (\xi \in A) \\ \alpha \to \\ \beta \to \end{cases}.$$

Аналогично теоремам 10.5 и 10.6 может быть доказана следующая теорема.

10.7. *Если* P *— слово в* $A \cup \{\alpha\}$, Q *— слово в* A, R *— слово в* $A \cup \{\beta\}$, *то*

$$\mathfrak{K}_{A,\alpha,\beta}(P\alpha Q\beta R) = Q.$$

Алгорифмы $\mathfrak{Z}_{A,\alpha}$ и $\mathfrak{G}_{A,\alpha}$ естественно называть *отсекающими алгорифмами*, алгорифм $\mathfrak{K}_{A,\alpha,\beta}$ — *высекающим алгорифмом*.

11. Пусть $\alpha\urcorner \in A$; A, B и C — слова в алфавите A. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_{A,A,B,C}$ в алфавите $A \cup \{\alpha\}$ с сокращенно записанной схемой

$$\begin{cases} \xi\alpha \to \alpha\xi \ (\xi \in A) \\ \alpha\xi \to \alpha \ (\xi \in A) \\ \alpha \to \cdot C \\ A\xi \to \alpha \ (\xi \in A) \\ \xi A \to \alpha \ (\xi \in A) \\ A \to \cdot B \\ \to \alpha \end{cases}. \tag{1}$$

Покажем, что он применим ко всякому слову в алфавите A, причем

$$\mathfrak{A}_{A,A,B,C}(A) = B, \tag{2}$$

$$\mathfrak{A}_{A,A,B,C}(P) = C \tag{3}$$

для всякого слова P в А, отличного от A.

Для установления равенства (2) заметим, что левые части формул подстановок алгорифма $\mathfrak{A}_{A,A,B,C}$, соответствующие первым пяти строкам схемы (1), не входят в A, так как эти левые части либо содержат букву α, либо имеют длину, на единицу бóльшую длины A. Левая же часть следующей формулы подстановки $A \to \cdot B$ входит в A, причем единственным вхождением является здесь несобственное вхождение $*A*$. Алгорифм предписывает подставить вместо этого вхождения слово B, что дает B. Так как применяемая формула заключительная,

$$\mathfrak{A}_{A,A,B,C} : A \vdash \cdot B,$$

откуда непосредственно следует (2).

Для установления равенства (3) докажем некоторые леммы. Для сокращения письма мы пишем в них просто $\mathfrak{A}$ вместо $\mathfrak{A}_{A,A,B,C}$.

11.1. $\mathfrak{A} : Q\alpha R \models \alpha QR$ (Q, R — *слова в* А).

Это следует из леммы 6.2, которая применяется здесь следующим образом: роль А, Q и R играют наши теперешние А, Q и R; роль Б играет алфавит А $\cup$ $\{\alpha\}$; роль P — пустое слово. Ввиду наличия в сокращенно записанной схеме (1) алгорифма $\mathfrak{A}$ строки

$$\xi\alpha \to \alpha\xi \quad (\xi \in \text{А})$$

и отсутствия формул, стоящих выше нее, лемма 6.2 применима и дает лемму 11.1.

11.2. *Если* P — *непустое слово в* А, *то имеется такое слово* Q *в* А, *что*

$$\mathfrak{A} : \alpha P \vdash \alpha Q, \tag{4}$$

$$[Q^\partial < [P^\partial. \tag{5}$$

В самом деле, непустое слово P может быть представлено в виде ηQ, где $\eta \in$ А, Q — слово в А, удовлетворяющее условию (5) [I. § 3.8.2]. Имеем тогда

$$\alpha P = \alpha\eta Q,$$

откуда следует, что никакое слово вида $\xi\alpha$ не входит в αP, а $*\alpha\eta*Q$ есть единственное вхождение слова вида $\alpha\xi$ ($\xi \in$ А) в αP. Ввиду этого мы усматриваем из схемы (1), что $\mathfrak{A}$ в применении к αP предписывает подставить α вместо этого вхождения, что дает αQ. Так как применяемая при этом формула подстановки

$$\alpha\eta \to \alpha$$

простая, имеем (4), что и требовалось доказать.

11.3. $\mathfrak{A} : \alpha P \models \alpha$ (P — *слово в* А).

Это следует из 11.2.

11.4. $\mathfrak{A} : \alpha \vdash \cdot C$.

В самом деле, формулы, представленные первыми двумя строками схемы (1), очевидно, не применимы к α. Формула же, составляющая третью строку, применима к α. Алгорифм предписывает применить эту заключительную формулу к несобственному вхождению $*\alpha*$, что дает слово C. Следовательно, $\mathfrak{A} : \alpha \vdash \cdot C$.

11.5. *Если A входит в P и $A \neq P$, где P — слово в* А, *то имеются такие слова Q и R в* А, *что* $\mathfrak{A} : P \vdash Q\alpha R$.

В самом деле, пусть P — слово в А, отличное от A, и пусть A входит в P. Тогда в P входит либо одно из слов вида $A\xi$ ($\xi \in$ А), либо одно из слов вида ξA ($\xi \in$ А). Иначе говоря, в P входит левая часть хотя бы одной из формул, представленных четвертой и пятой строками схемы **(1)**. Левые же части выше стоящих формул, содержащие α, не входят в P. Поэтому алгорифм $\mathfrak{A}$ предписывает применить к P одну из формул, представленных четвертой или пятой строками схемы **(1)**. Эта формула имеет вид $S \to \alpha$, и требуется применить ее к первому вхождению слова S (равного $A\xi$ или ξA) в P. Пусть $Q * S * R$ будет этим вхождением. Тогда Q и R суть, как и P, слова в А, а результат подстановки правой части формулы есть слово $Q\alpha R$. Так как примененная формула простая, $\mathfrak{A} : P \vdash Q\alpha R$, что и требовалось доказать.

11.6. *Если A не входит в слово P в алфавите* А, *то* $\mathfrak{A} : P \vdash \alpha P$.

В самом деле, в этом случае из левых частей формул подстановок алгорифма $\mathfrak{A}$ левая часть последней формулы — пустое слово — входит в P, все же остальные не входят в P, так как в них входит либо α, либо A. Алгорифм $\mathfrak{A}$ в применении к слову P предписывает, следовательно, подставить правую часть последней формулы, т. е. α, вместо первого вхождения пустого слова в P, что дает αP. Так как примененная формула простая, $\mathfrak{A} : P \vdash \alpha P$, что и требовалось доказать.

11.7. *Если P — слово в алфавите* А, *отличное от A, то могут быть указаны такие слова Q и R в* А, *что* $\mathfrak{A} : P \vdash Q\alpha R$.

В самом деле, если A входит в P, то такие Q и R могут быть указаны, согласно **11.5**. Если же A не входит в P, то, согласно **11.6**, в качестве Q можно взять Λ, а в качестве R слово P.

Мы можем теперь доказать равенство **(3)**. В самом деле, пусть P — слово в А, отличное от А. Возьмем слова Q и R в А согласно **11.7** таким образом, что $\mathfrak{A} : P \vdash Q\alpha R$. Имеем тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} : P &\vdash Q\alpha R \\ &\models \alpha QR && [11.1] \\ &\models \alpha && [11.3] \\ &\vdash \cdot C && [11.4], \end{aligned}$$

откуда $\mathfrak{A} : P \models \cdot C$, и потому $\mathfrak{A}(P) = C$ [§ 3.6.3], что и требовалось доказать.

12. Пусть α, β и γ означают различные буквы, не принадлежащие алфавиту А. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{F}_A$ в алфавите $Б = A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ с сокращенно записанной схемой

(1)

$$\begin{cases} \xi\eta\beta \to \eta\beta\xi & (\xi, \eta \in A) \\ \alpha\xi \to \xi\beta\xi\alpha & (\xi \in A) \\ \beta \to \gamma \\ \gamma \to \\ \alpha \to \cdot \\ \quad \to \alpha \end{cases}.$$

Покажем, что

(2) $$\mathfrak{A}_A(P) = PP$$

для всякого слова P в А.

Равенство (2) имеет место при $P = \Lambda$, так как нетрудно видеть, что

$$\mathfrak{A}_A : \Lambda \vdash \alpha \vdash\cdot \Lambda = \Lambda\Lambda.$$

Пусть P — непустое слово в А. Пусть тогда

(3) $$P = \xi_1 \ldots \xi_k,$$

где ξ_i — буквы алфавита А.

Положим

(4) $$P_i = \xi_i\beta \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

(5) $$P_{i,j} = P_1 \ldots P_{j-1}\xi_1 \ldots \xi_i P_j \xi_{i+1} \ldots \xi_j\alpha\xi_{j+1} \ldots \xi_k \quad (0 \leqslant i < j \leqslant k),$$

(6) $$Q_i = \xi_i\gamma \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

(7) $$R_i = Q_1 \ldots Q_i P_{i+1} \ldots P_k P\alpha \quad (0 \leqslant i \leqslant k),$$

(8) $$S_i = \xi_1 \ldots \xi_i Q_{i+1} \ldots Q_k P\alpha \quad (0 \leqslant i \leqslant k).$$

Докажем некоторые леммы.

12.1. $\mathfrak{A}_A : P_{i,j} \vdash P_{i-1,j}$ $(0 < i < j \leqslant k)$.

В самом деле,

$$P_{i,j} = P_1 \ldots P_{j-1}\xi_1 \ldots \xi_{i-1}\xi_i\xi_j\beta\xi_{i+1} \ldots \xi_j\alpha\xi_{j+1} \ldots \xi_k \quad [(5),\ (4),\ \text{I. § 3. 6 (5)}],$$

откуда видно, что

(9) $$P_1 \ldots P_{j-1}\xi_1 \ldots \xi_{i-1} * \xi_i\xi_j\beta * \xi_{i+1} \ldots \xi_j\alpha\xi_{j+1} \ldots \xi_k$$

есть вхождение слова вида $\xi\eta\beta$ $(\xi, \eta \in A)$ в $P_{i,j}$. Это — единственное вхождение слова такого вида в $P_{i,j}$, так как ни в $P_1 \ldots P_{j-1}\xi_1 \ldots \xi_{i-1}\xi_i\xi_j$, ни в $\xi_j\beta\xi_{i+1} \ldots \xi_j\alpha\xi_{j+1} \ldots \xi_k$ такие слова, очевидно, не входят. Так как слова вида $\xi\eta\beta$ $(\xi, \eta \in A)$ суть левые части формул подстановок алгорифма $\mathfrak{A}_A$, представленных первой строкой схемы (1), этот алгорифм в применении к $P_{i,j}$ предписывает подставить вместо вхождения (9) правую часть формулы

(10) $$\xi_i\xi_j\beta \to \xi_j\beta\xi_i,$$

что дает слово

$$P_1 \ldots P_{j-1}\xi_1 \ldots \xi_{i-1}\xi_j\beta\xi_i\xi_{i+1} \ldots \xi_j\alpha\xi_{j+1} \ldots \xi_k =$$

$$= P_1 \ldots P_{j-1}\xi_1 \ldots \xi_{i-1}P_j\xi_i \ldots \xi_j\alpha\xi_{j+1} \ldots \xi_k \quad [(4),\ \text{I. § 3. 6 (6)}]$$

$$= P_{i-1,j} \quad [(5)].$$

Так как формула (10) простая, лемма доказана.

12.2. $\mathfrak{A}_A : P_{j-1,j} \models P_{0,j}$ $(0 < j \leqslant k)$ [12.1].

12.3. $\mathfrak{A}_A : P_{0,j-1} \vdash P_{j-1,j}$ $(1 < j \leqslant k)$.

В самом деле, рассмотрим слово

(11) $P_{0,j-1} = P_1 \ldots P_{j-2} P_{j-1} \xi_1 \ldots \xi_{j-1} \alpha \xi_j \ldots \xi_k$ [(5), I. § 3.6(4)].

Слова вида $\xi\eta\beta$ ($\xi, \eta \in$ A) не входят в него [(4)]. Что касается слов вида $\alpha\xi$ ($\xi \in$ A), то имеется единственное вхождение такого слова в $P_{0,j-1}$, а именно

$P_1 \ldots P_{j-1} \xi_1 \ldots \xi_{j-1} * \alpha\xi_j * \xi_{j+1} \ldots \xi_k$ [(11), I. § 3.6(5), I. § 3.6(6)].

В применении к $P_{0,j-1}$ алгорифм $\mathfrak{S}_A$ предписывает поэтому подставить правую часть формулы

(12) $\alpha\xi_j \to \xi_j\beta\xi_j\alpha$

вместо этого вхождения, что дает слово

$$P_1 \ldots P_{j-1} \xi_1 \ldots \xi_{j-1} \xi_j \beta \xi_j \alpha \xi_{j+1} \ldots \xi_k =$$
$$= P_1 \ldots P_{j-1} \xi_1 \ldots \xi_{j-1} P_j \xi_j \alpha \xi_{j+1} \ldots \xi_k \quad [(4)]$$
$$= P_{j-1,j} \quad [(5)].$$

Так как формула (12) простая, лемма доказана.

12.4. $\mathfrak{S}_A : P_{0,1} \models P_{0,k}$ [12.2, 12.3].

12.5. $\mathfrak{S}_A : \alpha P \vdash P_{0,1}$.

В самом деле,

$$\alpha P = \alpha\xi_1 \ldots \xi_k \quad [(3)],$$

откуда видно, что слова вида $\xi\eta\beta$ ($\xi, \eta \in$ A) не входят в αP, тогда как имеется единственное вхождение слова вида $\alpha\xi$ ($\xi \in$ A) в αP, а именно

$$* \alpha\xi_1 * \xi_2 \ldots \xi_k.$$

В применении к αP алгорифм $\mathfrak{S}_A$ предписывает подставить вместо этого вхождения правую часть формулы

(13) $\alpha\xi_1 \to \xi_1\beta\xi_1\alpha,$

что дает слово

$$\xi_1\beta\xi_1\alpha\xi_2 \ldots \xi_k = P_1\xi_1\alpha\xi_2 \ldots \xi_k \quad [(4)]$$
$$= P_{0,1} \quad [(5), \text{I. § 3.6(4)}].$$

Так как формула (13) простая, лемма доказана.

12.6. $P_{0,k} = R_0$.

В самом деле,

$$P_{0,k} = P_1 \ldots P_{k-1} P_k \xi_1 \ldots \xi_k \alpha \quad [(5), \text{I. § 3.6(4)}]$$
$$= P_1 \ldots P_k P \alpha \quad [\text{I. § 3.6(5), (3)}]$$
$$= R_0 \quad [(7), \text{I. § 3.6(4)}].$$

12.7. $\mathfrak{S}_A : R_{i-1} \vdash R_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

В самом деле, в R_{i-1} не входят ни слова вида $\xi\eta\beta$ ($\xi, \eta \in A$), ни слова вида $\alpha\xi$ ($\xi \in A$) [(7), (4), (6), (3)]. Таким образом, к R_{i-1} не применимы формулы подстановок, представленные первыми двумя строками схемы (1). Применима, однако, формула $\beta \to \gamma$, составляющая третью строку этой схемы, так как

$$R_{i-1} = Q_1 \ldots Q_{i-1} P_i P_{i+1} \ldots P_k P\alpha \qquad [(7), \text{I. § 3.6 (6)}]$$

$$= Q_1 \ldots Q_{i-1} \xi_i \beta P_{i+1} \ldots P_k P\alpha \qquad [(4)]. \tag{14}$$

В силу (14) и (6) первым вхождением β в R_{i-1} является вхождение

$$Q_1 \ldots Q_{i-1} \xi_i * \beta * P_{i+1} \ldots P_k P\alpha.$$

Алгорифм $\mathfrak{A}_A$ предписывает подставить вместо него γ, что дает слово

$$Q_1 \ldots Q_{i-1} \xi_i \gamma P_{i+1} \ldots P_k P\alpha = Q_1 \ldots Q_i P_{i+1} \ldots P_k P\alpha \qquad [(6), \text{I. § 3.6 (5)}]$$

$$= R_i \qquad [(7)].$$

Так как формула $\beta \to \gamma$ простая, лемма доказана.

12.8. $\mathfrak{A}_A : R_0 \models R_k$ [12.7].

12.9. $R_k = S_0$ [(7), (8), I. § 3.6 (4)].

12.10. $\mathfrak{A}_A : S_{i-1} \vdash S_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

В самом деле, β не входит в S_{i-1}, а α имеет лишь одно вхождение в S_{i-1} в конце слова [(8), (6)]. Поэтому в S_{i-1} не входят левые части формул подстановок, представленных первыми тремя строками схемы (1). С другой стороны, левая часть следующей формулы $\gamma \to$ входит в S_{i-1}, так как γ входит в слово Q_i, входящее в S_{i-1}. Алгорифм $\mathfrak{A}_A$ предписывает подставить пустое слово вместо первого вхождения

$$\xi_1 \ldots \xi_i * \gamma * Q_{i+1} \ldots Q_k P\alpha$$

буквы γ в S_{i-1}, что дает слово

$$\xi_1 \ldots \xi_i Q_{i+1} \ldots Q_k P\alpha = S_i \qquad [(8)]$$

Так как примененная формула $\gamma \to$ простая, лемма доказана.

12.11. $\mathfrak{A}_A : S_0 \models S_k$ [12.10].

12.12. $S_k = PP\alpha$ [(8), (3), I. § 3.6 (4)].

12.13. $\mathfrak{A}_A : PP\alpha \vdash \cdot\, PP$.

В самом деле, в слово $PP\alpha$ не входят левые части формул подстановок, представленных первыми четырьмя строками схемы (1), так как P — слово в A. Единственным вхождением в $PP\alpha$ левой части следующей формулы $\alpha \to \cdot$ является вхождение

$$PP * \alpha *.$$

В применении к $PP\alpha$ алгорифм $\mathfrak{A}_A$ предписывает поэтому подставить пустое слово вместо этого вхождения, что дает слово PP. Так как примененная формула заключительная, $\mathfrak{A}_A : PP\alpha \vdash \cdot\, PP$, что и требовалось доказать.

12.14. $\mathfrak{Y}_A : P \vdash \alpha P$.

В самом деле, левые части формул подстановок, представленных первыми пятью строками схемы (1), содержат буквы, не принадлежащие алфавиту A, и потому не входят в P. Левая же часть последней формулы $\to\alpha$ схемы алгорифма $\mathfrak{Y}_A$ — пустое слово — входит в P. Алгорифм $\mathfrak{Y}_A$ в применении к P предписывает поэтому подставить α вместо первого вхождения пустого слова в P, что дает слово αP. Так как примененная здесь формула $\to\alpha$ простая, лемма доказана.

Мы можем теперь доказать равенство (2) для рассматриваемого слова P. В самом деле,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_A : P &\vdash \alpha P && [12.14]\\
&\vdash P_{0,1} && [12.5]\\
&\models R_0 && [12.4,\ 12.6]\\
&\models S_0 && [12.8,\ 12.9]\\
&\models PP\alpha && [12.11,\ 12.12]\\
&\models \cdot PP && [12.13],
\end{aligned}$$

откуда $\mathfrak{Y}_A : P \models \cdot PP$, и потому $\mathfrak{Y}_A(P) = PP$ [§ 3.6.3], что и требовалось доказать.

Таким образом, нормальный алгорифм $\mathfrak{Y}_A$ может быть охарактеризован, как *удваивающий алгорифм над алфавитом* A.

Заметим, что более простой нормальный алгорифм $\mathfrak{G}_A$ в алфавите $A \cup \{\alpha, \beta\}$ с сокращенно записанной схемой

$$\begin{cases}
\xi\eta\beta \to \eta\beta\xi \ (\xi, \eta \in A)\\
\alpha\xi \to \xi\beta\xi\alpha \ (\xi \in A)\\
\beta \to\\
\alpha \to \cdot\\
\quad \to \alpha
\end{cases}$$

не эквивалентен $\mathfrak{Y}_A$ относительно A и потому не может заменить $\mathfrak{Y}_A$. Пусть, в самом деле, ζ и χ — разные буквы алфавита A. Тогда, как нетрудно видеть, в применении к слову $\zeta\chi$ алгорифм $\mathfrak{G}_A$ работает следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_A : \zeta\chi &\vdash \alpha\zeta\chi\\
&\vdash \zeta\beta\zeta\alpha\chi\\
&\vdash \zeta\beta\zeta\chi\beta\chi\alpha\\
&\vdash \zeta\beta\chi\beta\zeta\chi\alpha\\
&\vdash \zeta\chi\beta\zeta\chi\alpha\\
&\vdash \chi\beta\zeta\zeta\chi\alpha\\
&\vdash \chi\zeta\zeta\chi\alpha\\
&\vdash \cdot\chi\zeta\zeta\chi \quad .
\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathfrak{G}_A(\zeta\chi) = \chi\zeta\zeta\chi \neq \zeta\chi\zeta\chi = \mathfrak{F}_A(\zeta\chi)$. По сравнению с работой алгорифма $\mathfrak{F}_A$ здесь лишний раз пришлось применить формулу $\zeta\chi\beta \to \chi\beta\zeta$, отчего в окончательном результате произошла транспозиция первых двух букв. В алгорифме $\mathfrak{F}_A$ таким лишним перестановкам препятствует введение промежуточного этапа при устранении вхождений β: сначала вместо этих вхождений подставляются γ [12.7, 12.8], а затем вхождения γ опускаются [12.10 и 12.11].

Удваивающий нормальный алгорифм дает типичный пример сведения перехода интегрального характера — удвоения слова — к нескольким переходам локального характера — подстановкам согласно схеме алгорифма. Число последних зависит при этом от удваиваемого слова. Нетрудно подсчитать, что оно равно

$$\frac{(k+1)(k+4)}{2},$$

где k — длина удваиваемого слова.

13. Построим нормальный алгорифм над алфавитом A, перерабатывающий всякое слово в алфавите A в обращение этого слова. Пусть α и β означают две разные буквы, не принадлежащие A. Зададим нормальный алгорифм $\mathfrak{H}_A$ в алфавите $A \cup \{\alpha, \beta\}$ сокращенно записанной схемой

(1)
$$\begin{cases} \alpha\alpha \to \beta \\ \beta\alpha \to \beta \\ \beta\xi \to \xi\beta \ (\xi \in A) \\ \beta \to \cdot \\ \alpha\xi\eta \to \eta\alpha\xi \ (\xi, \eta \in A) \\ \to \alpha \end{cases}.$$

Этот алгорифм и является искомым обращающим алгорифмом над алфавитом A, т. е.

(2) $$\mathfrak{H}_A(P) = [P^\smile$$

для всякого слова P в A.

Равенство (2) легко может быть доказано по образцу доказательства равенства 12(2). Мы поэтому лишь наметим здесь доказательство равенства (2), предоставляя подробности читателю.

Нетрудно видеть, что

$$\mathfrak{H}_A : \Lambda \vdash \alpha \vdash \alpha\alpha \vdash \beta \vdash \cdot\, \Lambda,$$

откуда следует справедливость равенства (2) при $P = \Lambda$ [I. § 3.12(1)].

Пусть P — непустое слово в A. Пусть тогда имеем равенство 12(3), где $\xi_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Положим

(3) $$P_i = \alpha\xi_i \ (1 \leqslant i \leqslant k),$$

(4) $$P_{i,j} = \xi_{i+1} \ldots \xi_j P_i \xi_{j+1} \ldots \xi_k P_{i-1} \cdots P_1 \ (1 \leqslant i < j \leqslant k),$$

$$Q_i = \xi_k \cdots \xi_i \beta P_{i-1} \cdots P_1 \ (1 \leqslant i \leqslant k),$$

$$R_i = \xi_k \cdots \xi_{i+1} \beta \xi_i P_{i-1} \cdots P_1 \ (1 \leqslant i \leqslant k).$$

Тогда могут быть последовательно доказаны следующие леммы.

13.1. $\mathfrak{H}_A : \alpha P_{k,k} \vdash R_k$.

13.2. $\mathfrak{H}_A : Q_{i+1} \vdash R_i \ (1 \leqslant i < k)$.

13.3. $\mathfrak{H}_A : R_i \vdash Q_i \ (1 \leqslant i \leqslant k)$.

13.4. $\mathfrak{H}_A : \alpha P_{k,k} \models Q_1$.

13.5. $\mathfrak{H}_A : Q_1 \vdash \cdot [P^\smile$.

13.6. $\mathfrak{H}_A : P_{i,j-1} \vdash P_{i,j} \ (1 \leqslant i < j \leqslant k)$.

13.7. $\mathfrak{H}_A : P_{i,i} \models P_{i,k} \ (1 \leqslant i \leqslant k)$.

13.8. $\mathfrak{H}_A : P_{i-1,k} \vdash P_{i,i} \ (1 < i \leqslant k)$.

13.9. $\mathfrak{H}_A : P_{i-1,i-1} \models P_{i,i} \ (1 < i \leqslant k)$.

13.10. $\mathfrak{H}_A : P_{1,1} \models P_{k,k}$.

13.11. $\mathfrak{H}_A : P \vdash P_{1,1}$.

13.12. $\mathfrak{H}_A : P_{k,k} \vdash \alpha P_{k,k}$.

13.13. $\mathfrak{H}_A : P \models \cdot [P^\smile$.

Из последней леммы равенство (2) непосредственно следует.

Легко усмотреть, что работу алгорифма $\mathfrak{H}_A$ в применении к исходному слову в А можно описать следующим образом.

В первой половине процесса применяются формулы, представленные двумя последними строками схемы (1). При этом получается слово $\alpha P_{k,k}$, равное $\alpha P_k \cdots P_1$ [(4)]. Это — не что иное, как обращение исходного слова, «засоренное» вспомогательными буквами α [(3)]. Эти буквы вклинились между буквами алфавита А, и две такие буквы приставлены в начале. Во второй половине процесса слово «чистится» от этих букв, что совершается, так сказать, при помощи буквы β, возникающей из пары стоящих в начале букв α, прыгающей вправо через буквы алфавита А, поглощающей α и в конце концов исчезающей.

14. Сопоставим каждой букве ξ алфавита Б определенное слово A_ξ в алфавите А. Заменяя в произвольном слове P в Б каждую букву ξ сопоставленным ей словом A_ξ, получим слово в алфавите А — *результат замены букв* ξ *словами* A_ξ $(\xi \in$ Б$)$ *в слове* P.

Если Б $= \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, то результат замены букв ξ словами A_ξ $(\xi \in$ Б$)$ будем обозначать символом

$$S^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{B_1, \ldots, B_n} P|,$$

где $B_i = A_{\alpha_i}$.

Пусть, например, А $=$ Б $= \{a, b\}$, тогда

$$S^{a,\ b}_{aa,\ aba} abb| = aaabaaba.$$

Нетрудно видеть, что операция над словами в алфавите Б, выражаемая символом

$$S^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{B_1, \ldots, B_n}$$

— *операция замены букв* ξ *словами* A_ξ — обладает следующими свойствами:

$$S\Lambda| = \Lambda,$$

$$S\xi| = A_\xi \ (\xi \in Б),$$

(1) $$SPQ| = SP|SQ| \ (P, Q — \text{слова в Б}),$$

(2) $$S\xi_1 \ldots \xi_k| = A_{\xi_1} \ldots A_{\xi_k} \ (\xi_1, \ldots, \xi_k \in Б),$$

где для сокращения письма опущены индексы у буквы S.

Легко построить нормальный алгорифм над алфавитом $А \cup Б$, выполняющий замену букв ξ словами A_ξ, т. е. перерабатывающий всякое слово P в Б в слово $SP|$.

В самом деле, пусть $\alpha\gamma \in А \cup Б$ и пусть опять $B_i = A_{\alpha_i}$. Зададим нормальный алгорифм $\mathfrak{R}^{Б, \alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{А, B_1, \ldots, B_n}$ в $А \cup Б \cup \{\alpha\}$ сокращенно записанной схемой

$$\begin{cases} \alpha\xi \to A_\xi\alpha \ (\xi \in Б) \\ \alpha \to \cdot \\ \quad \to \alpha \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что

(3) $$\mathfrak{R}(P) = SP|$$

для всякого слова P в Б.*

Для пустого слова это равенство имеет место, так как ясно, что

$$\mathfrak{R} : \Lambda |— \alpha |— \cdot \Lambda.$$

Пусть P — непустое слово в Б. Пусть тогда

(4) $$P = \xi_1 \ldots \xi_k \ (\xi_1, \ldots, \xi_k \in Б).$$

Положим

(5) $$P_i = A_{\xi_1} \ldots A_{\xi_i}\alpha\xi_{i+1} \ldots \xi_k \ (0 \leqslant i \leqslant k).$$

Принимая во внимание, что α не входит в слова A_ξ $(\xi \in Б)$, видим, что при $0 < i \leqslant k$

$$A_{\xi_1} \ldots A_{\xi_{i-1}} * \alpha\xi_i * \xi_{i+1} \ldots \xi_k$$

есть единственное вхождение слова вида $\alpha\xi$ в P_{i-1}. Поэтому

(6) $$\mathfrak{R} : P_{i-1} |— P_i \ (0 < i \leqslant k).$$

Так как слова вида $\alpha\xi$ не входят в слово P_k, равное, согласно (5), слову

$$A_{\xi_1} \ldots A_{\xi_k}\alpha,$$

т. е. слову $SP|\alpha$ [(2), (4)], имеем

(7) $$\mathfrak{R} : P_k |— \cdot SP|.$$

* Здесь и в дальнейшем мы опускаем индексы у $\mathfrak{R}$.

Наконец, так как α не входит в P,

(8) $$\mathfrak{R} : P \vdash \alpha P,$$

(9) $$\mathfrak{R} : P \vdash P_0 \qquad [(8), (5), (4)].$$

В силу (9), (6) и (7)

$$\mathfrak{R} : P \models \cdot SP |,$$

откуда (3) следует согласно § 3.6.3.

Таким образом, $\mathfrak{R}$ может быть охарактеризован как *алгорифм замены букв* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ словами $B_1, \ldots, B_n$.

Важным частным случаем замены букв словами является выбрасывание некоторых букв, уже отчасти рассмотренное выше [7], — операция, выполняемая с помощью более простых нормальных алгорифмов. Это — тот частный случай, когда $A = Б$, $A_\xi = \Lambda$ для некоторых букв ξ и $A_\xi = \xi$ для остальных ξ.

В связи с этой операцией в дальнейшем будет применяться следующая терминология.

Пусть A — расширение алфавита B. Результат выбрасывания букв алфавита $A \setminus B$ из слова P в A будем называть *проекцией слова* P *на алфавит* B и обозначать через

$$\lfloor P^B.$$

Построение проекций слов в A на B мы будем называть *операцией проектирования из* A *на* B.

Если $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, где все α_i различны, и $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, где $k \leqslant n$, то имеем, очевидно,

$$\lfloor P^B = S^{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \Lambda, \ldots, \Lambda} P |.$$

Частным случаем равенства (1) является равенство

(10) $$\lfloor PQ^B = \lfloor P^B \lfloor Q^B,$$

справедливое для любых слов P и Q в A.

Соответствующим частным случаем алгорифма $\mathfrak{R}$ является нормальный алгорифм в $A \cup \{\alpha\}$ с сокращенно записанной схемой

$$\begin{cases} \alpha\xi \to \xi\alpha & (\xi \in B) \\ \alpha\xi \to \alpha & (\xi \in A \setminus B) \\ \alpha \to \cdot \\ \quad \to \alpha \end{cases}.$$

Однако более простой нормальный алгорифм в A с сокращенно записанной схемой

$$\{\xi \to (\xi \in A \setminus B),$$

очевидно, достигает той же цели — он перерабатывает всякое слово в алфавите A в проекцию этого слова на алфавит B и, следовательно, вполне эквивалентен $\mathfrak{R}$ относительно A.

Длина проекции слова P на алфавит В есть, очевидно, не что иное, как число вхождений в слово P букв этого алфавита.

Другим важным частным случаем замены букв словами является рассмотренное в **I. § 6** построение перевода слова. При этом каждая буква слова заменяется своим переводом. Поэтому в обозначениях **I. § 6** алгорифм, перерабатывающий каждое слово в Б в перевод этого слова, может быть построен как нормальный алгорифм в алфавите $А \cup Б \cup \{\delta\}$, со схемой

$$\begin{cases} \delta\xi \to [\xi^{\cdot}\delta \quad (\xi \in Б) \\ \delta \to \cdot \\ \quad \to \delta \end{cases},$$

где δ — буква, не принадлежащая алфавиту $А \cup Б$.

Обозначая этот алгорифм буквой $\mathfrak{T}$, будем иметь

$$\mathfrak{T}(P) = [P^{\cdot} \tag{11}$$

для любого слова P в Б.

Это построение алгорифма перевода, очевидно, применимо как в случае, рассмотренном в **I. § 6.1** (α не принадлежит В), так и в случае, рассмотренном в **I. § 6.4** (α принадлежит В).

15. Легко может быть построен нормальный алгорифм, в известном смысле обратный алгорифму $\mathfrak{T}$, перерабатывающий перевод всякого слова P в Б в это самое слово. Ограничиваясь случаем, когда α не принадлежит В, построим нормальный алгорифм $\mathfrak{T}_1$ в $А \cup Б \cup \{\delta\}$ со схемой

$$\begin{cases} \delta[\xi^{\cdot} \to \xi\delta \quad (\xi \in Б) \\ \delta \to \cdot \\ \quad \to \delta \end{cases},$$

где опять δ — буква, не принадлежащая $А \cup Б$.

Покажем, что

$$\mathfrak{T}_1([P^{\cdot}) = P \tag{1}$$

для всякого слова P в Б.

Очевидно прежде всего, что

$$\mathfrak{T}_1 : [P^{\cdot} \vdash \delta[P^{\cdot} \quad (P \text{ — слово в Б}), \tag{2}$$

$$\mathfrak{T}_1 : P\delta \vdash \cdot P \quad (P \text{ — слово в Б}). \tag{3}$$

При $P = \Lambda$ это дает

$$\mathfrak{T}_1 : [\Lambda^{\cdot} \vdash \delta \vdash \cdot \Lambda \qquad [(2), \text{I. § 6.2(1)}, (3)], \tag{4}$$

$$\mathfrak{T}_1([\Lambda^{\cdot}) = \Lambda \qquad [(4)].$$

Таким образом, равенство **(1)** имеет место при $P = \Lambda$.

Пусть теперь $P \neq \Lambda$. Пусть

$$P = \xi_1 \ldots \xi_m, \tag{5}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — буквы алфавита Б. Положим

(6) $$P_i = \xi_1 \ldots \xi_i \delta [\xi_{i+1}^{\tau} \ldots [\xi_n^{\tau} \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Имеем

(7) $$P_0 = \delta [P^{\tau} \qquad [(6), (5), \text{I. § 6.2(2)}],$$

(8) $$P_n = P\delta \qquad [(6), (5)].$$

Так как буква δ, не принадлежащая алфавиту А $\cup$ Б, не входит в слова $\xi_1 \ldots \xi_{i-1}$, $[\xi_i^{\tau} \ldots [\xi_n^{\tau}$ в этом алфавите,

(9) $$\xi_1 \ldots \xi_{i-1} * \delta * [\xi_i^{\tau} \ldots [\xi^{\tau}$$

есть единственное вхождение этой буквы в слово P_{i-1} [(6)]. Рассмотрим правое крыло $[\xi_i^{\tau} \ldots [\xi_n^{\tau}$ этого вхождения. Оно является переводом слова $\xi_i \ldots \xi_n$. Если ξ — такая буква алфавита Б, что $[\xi_i^{\tau} \ldots [\xi_n^{\tau}$ начинается словом $[\xi^{\tau}$, то $\xi_i \ldots \xi_n$ начинается буквой ξ [I. § 6.3.5], т. е. $\xi = \xi_i$. Таким образом, ξ_i есть единственная буква алфавита Б, такая, что $[\xi_i^{\tau} \ldots [\xi_n^{\tau}$ начинается переводом этой буквы. Принимая во внимание, что (9) есть единственное вхождение δ в P_{i-1}, заключаем, что

$$\xi_1 \ldots \xi_{i-1} * \delta [\xi_i^{\tau} * [\xi_{i+1}^{\tau} \ldots [\xi_n^{\tau}$$

есть единственное вхождение слова вида $\delta [\xi^{\tau} (\xi \in \text{Б})$ в P_{i-1}.

Алгорифм $\mathfrak{T}_1$ в применении к слову P_{i-1} предписывает поэтому подставить $\xi_i \delta$ вместо этого вхождения, что дает слово

$$\xi_1 \ldots \xi_{i-1} \xi_i \delta [\xi_{i+1}^{\tau} \ldots [\xi_n^{\tau},$$

т. е. P_i [I. § 3.6(5), (6)]. Таким образом,

$$\mathfrak{T}_1 : P_{i-1} \vdash P_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

и, следовательно,

(10) $$\mathfrak{T}_1 : P_0 \models P_n,$$

т. е.

(11) $$\mathfrak{T}_1 : \delta [P^{\tau} \models P\delta \qquad [(10), (7), (8)].$$

В силу (2), (11) и (3)

$$\mathfrak{T}_1 : [P^{\tau} \models \cdot P,$$

откуда равенство (1) следует согласно § 3.6.3.

Таким образом, это равенство действительно имеет место для всякого слова P в алфавите Б, что и требовалось доказать.

16. Пусть А и Б — алфавиты без общих букв. Для всякого слова P в объединении этих алфавитов возможно построить как проекцию $[P^{\text{А}}$ на алфавит А, так и проекцию $[P^{\text{Б}}$ на алфавит Б. Покажем, что нормальный алгорифм $\mathfrak{L}_{\text{А, Б}}$ в алфавите А $\cup$ Б с сокращенно записанной схемой

$$\{ \eta\xi \to \xi\eta \quad (\xi \in \text{А}, \ \eta \in \text{Б})$$

перерабатывает всякое слово P в алфавите А $\cup$ Б в слово $[P^{\text{А}} [P^{\text{Б}}$.

Для этого условимся прежде всего называть *высотой слова* P число вхождений в P слов вида $\eta Q \xi$, где $\xi \in$ А, $\eta \in$ Б. Высоту слова P будем обозначать символом $[P^{\text{В}}$.

Докажем некоторые леммы.

16.1. *Если* R *— слово в* А $\cup$ Б, $\zeta \in$ Б, *то*

$$[R\zeta^{\text{В}} = [R^{\text{В}}. \tag{1}$$

В самом деле, соотнесем всякому вхождению

$$S * \eta Q \xi * T \tag{2}$$

слова вида $\eta Q \xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б) в R вхождение

$$S * \eta Q \xi * T\zeta \tag{3}$$

того же слова в $R\zeta$. Вхождение (3) будем называть *образом* вхождения (2). Очевидно, что разные вхождения слов вида $\eta Q \xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б) в R имеют разные образы.

Рассмотрим, с другой стороны, какое-нибудь вхождение

$$U * \eta Q \xi * V \tag{4}$$

слова вида $\eta Q \xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б) в $R\zeta$. Имеем

$$U\eta Q \xi V = R\zeta \qquad \text{[I. § 4.2]}. \tag{5}$$

Здесь $\xi \neq \zeta$, так как $\xi \in$ А, $\zeta \in$ Б. Поэтому $V \neq \Lambda$ и V оканчивается буквой ζ, т. е.

$$V = W\zeta. \tag{6}$$

Имеем

$$U\eta Q \xi W = R \qquad \text{[(5), (6), I. § 3.9.4]},$$

откуда следует, что

$$U * \eta Q \xi * W \tag{7}$$

есть вхождение $\eta Q \xi$ в R. В силу (6) вхождение (4) есть образ вхождения (7). Таким образом, всякое вхождение слова вида $\eta Q \xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б) в $R\zeta$ есть образ некоторого вхождения того же слова в R.

Следовательно, соотнося каждому вхождению слова вида $\eta Q \xi$ ($\eta \in$ А, $\eta \in$ Б) в R его образ, мы тем самым установили взаимно однозначное соответствие между вхождениями таких слов в R, с одной стороны, и их вхождениями в $R\zeta$ — с другой. Поэтому имеет место равенство (1), что и требовалось доказать.

16.2. *Если* R *— слово в* А $\cup$ Б, $\zeta \in$ А, *то*

$$[R\zeta^{\text{В}} = [R^{\text{В}} + [[R^{\text{Бд}}. \tag{8}$$

В самом деле, определим образ вхождения слова вида $\eta Q \xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б) в R, как в доказательстве предыдущей леммы. Вхождения слов этого вида в $R\zeta$, являющиеся образами вхождений таких слов в R, будем называть вхождениями 1-го рода. Они находятся во взаимно-

однозначном соответствии со вхождениями слов вида $\eta Q \xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б) в R, и число их поэтому равно $[R^{\text{В}}$.

Соотнесем далее каждому вхождению

(9) $$S * \chi * T$$

какой-нибудь буквы χ алфавита Б в слово R вхождение

(10) $$S * \chi T \zeta *$$

слова $\chi T \zeta$ в $R\zeta$. Вхождение (10) также будем называть *образом* вхождения (9). Так как $\zeta \in$ А, образ всякого вхождения буквы алфавита Б в R есть вхождение слова вида $\eta Q \xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б) в $R\zeta$. Разные вхождения букв алфавита Б в R, очевидно, имеют разные образы, т. е. соответствие между этими вхождениями и их образами взаимно однозначно. Будем называть вхождениями 2-го рода образы вхождений букв алфавита Б в слово R. Число вхождений 2-го рода равно числу вхождений букв алфавита Б в R, т. е. оно равно $[[R^{\text{Б}\partial}$.

Ни одно вхождение 1-го рода не может быть вхождением 2-го рода, так как вхождения 1-го рода имеют непустое правое крыло, а вхождения 2-го рода — пустое правое крыло.

Всякое вхождение слова вида $\eta Q \xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б) в $R\zeta$ является вхождением 1-го или 2-го рода. Действительно, рассмотрим какое-нибудь вхождение (4) слова этого вида в $R\zeta$. Если $V \neq \Lambda$, то, рассуждая, как в доказательстве предыдущей леммы, убеждаемся, что (4) есть образ некоторого вхождения того же слова в R, т. е. вхождение 1-го рода. Если же $V = \Lambda$, то (4) является, очевидно, образом вхождения

$$U * \eta * Q$$

буквы η алфавита Б в R, т. е. вхождением 2-го рода.

Таким образом, вхождения слов вида $\eta Q \xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б) делятся на два класса без общих элементов — на вхождения 1-го рода и вхождения 2-го рода. При этом вхождений 1-го рода имеется $[R^{\text{В}}$, а вхождений 2-го рода — $[[R^{\text{Б}\partial}$. Поэтому число вхождений слов этого вида в $R\zeta$ равно сумме этих двух чисел, что и выражается равенством (8).

16.3. *Если R — слово в* А $\cup$ Б, $\zeta \in$ А $\cup$ Б, *то*

$$[R\zeta^{\text{В}} = [R^{\text{В}} + ([[R^{\text{Б}\partial} \times [[\zeta^{\text{А}\partial}). \ *$$

В самом деле, $[[\zeta^{\text{А}\partial}$ есть число вхождений букв алфавита А в слово ζ, т. е.

$$[[\zeta^{\text{А}\partial} = \begin{cases} 1 \text{ если } \zeta \in \text{А} \\ 0 \text{ если } \zeta \in \text{Б}. \end{cases}$$

В силу этого, лемма **16.3** следует из **16.1** и **16.2**.

16.4. *Если P и R — слова в* А $\cup$ Б, *то*

(11) $$[PR^{\text{В}} = [P^{\text{В}} + [R^{\text{В}} + ([[P^{\text{Б}\partial} \times [[R^{\text{А}\partial}).$$

* Здесь и в дальнейшем косой крест есть знак умножения.

Фиксируем P и докажем методом правой индукции в алфавите А $\cup$ Б [I. § 3. 8], что всякое слово R в А $\cup$ Б удовлетворяет равенству (11).

Пустое слово удовлетворяет ему, так как, очевидно,

$$[\Lambda^{\text{в}} = 0,$$

$$[[\Lambda^{\text{Ад}} = 0.$$

Чтобы доказать лемму, нам, поэтому, надо лишь доказать, что соблюдение равенства (11) для какого-нибудь слова R в А $\cup$ Б влечет соблюдение равенства

$$[PR\zeta^{\text{в}} = [P^{\text{в}} + [R\zeta^{\text{в}} + ([[P^{\text{Бд}} \times [[R\zeta^{\text{Ад}})$$

для любой буквы ζ алфавита А $\cup$ Б.

Итак, допустим, что равенство (11) соблюдается, причем R есть слово в А $\cup$ Б. Пусть также $\zeta \in$ А $\cup$ Б. Имеем

$$[[R\zeta^{\text{Ад}} = [[R^{\text{А}}[\zeta^{\text{Ад}} \qquad \textbf{[14 (10)]}$$

(12) $$= [[R^{\text{Ад}} + [[\zeta^{\text{Ад}} \qquad \textbf{[I. § 3. 8(3)]},$$

$$[[PR^{\text{Бд}} = [[P^{\text{Б}}[R^{\text{Бд}} \qquad \textbf{[14 (10)]}$$

(13) $$= [[P^{\text{Бд}} + [[R^{\text{Бд}} \qquad \textbf{[I. § 3. 8 (3)]},$$

$$[PR\zeta^{\text{в}} = [PR^{\text{в}} + ([[PR^{\text{Бд}} \times [[\zeta^{\text{Ад}}) \qquad \textbf{[16.3]}$$

$$= [P^{\text{в}} + [R^{\text{в}} + ([[P^{\text{Бд}} \times [[R^{\text{Ад}}) + (([[P^{\text{Бд}} + [[R^{\text{Бд}}) \times [[\zeta^{\text{Ад}}) \qquad \textbf{[(11), (13)]}$$

$$= [P^{\text{в}} + [R^{\text{в}} + ([[R^{\text{Бд}} \times [[\zeta^{\text{Ад}}) + ([[P^{\text{Бд}} \times ([[R^{\text{Ад}} + [[\zeta^{\text{Ад}}))$$

$$= [P^{\text{в}} + [R\zeta^{\text{в}} + ([[P^{\text{Бд}} \times [[R\zeta^{\text{Ад}}) \qquad \textbf{[16. 3, (12)]},$$

что и требовалось доказать.

16. 5. $$[PQR^{\text{в}} = [P^{\text{в}} + [Q^{\text{в}} + [R^{\text{в}} + ([[P^{\text{Бд}} \times [[Q^{\text{Ад}}) + ([[P^{\text{Бд}} \times [[R^{\text{Ад}}) + ([[Q^{\text{Бд}} \times [[R^{\text{Ад}})$$

для любых слов P, Q *и* R *в* А $\cup$ Б.

В самом деле, имеем

$$[PQR^{\text{в}} = [PQ^{\text{в}} + [R^{\text{в}} + ([[PQ^{\text{Бд}} \times [[R^{\text{Ад}}) \qquad \textbf{[16. 4]}$$

$$= [P^{\text{в}} + [Q^{\text{в}} + ([[P^{\text{Бд}} \times [[Q^{\text{Ад}}) + [R^{\text{в}} + {}$$
$$+ ([[P^{\text{Б}}[Q^{\text{Бд}} \times [[R^{\text{Ад}}) \qquad \textbf{[16. 4, 14 (10)]}$$

$$= [P^{\text{в}} + [Q^{\text{в}} + [R^{\text{в}} + ([[P^{\text{Бд}} \times [[Q^{\text{Ад}}) + {}$$
$$+ (([[P^{\text{Бд}} + [[Q^{\text{Бд}}) \times [[R^{\text{Ад}}) \qquad \textbf{[I. § 3. 8 (3)]}$$

$$= [P^{\text{в}} + [Q^{\text{в}} + [R^{\text{в}} + ([[P^{\text{Бд}} \times [[Q^{\text{Ад}}) + ([[P^{\text{Бд}} \times [[R^{\text{Ад}})$$
$$+ ([[Q^{\text{Бд}} \times [[R^{\text{Ад}}).$$

16.6. *Если* $[P^{\text{В}} = 0$, *то существуют такие слова* Q *и* R *в алфавитах* А *и* Б *соответственно, что* $P = QR$.

Пусть, в самом деле, $[P^{\text{В}} = 0$ для некоторого слова P в алфавите А $\cup$ Б. Если в это слово не входят буквы алфавита Б, то P есть слово в А и можно положить $Q = P$, $R = \Lambda$. Допустим, что в P входят буквы алфавита Б.

Пусть тогда $Q * \eta * S$ — первое вхождение буквы алфавита Б в P. Q есть тогда слово в А, $\eta \in$ Б. Если бы $T * \xi * U$ было вхождением буквы ξ алфавита А в S, то мы имели бы

$$P = Q\eta S \qquad \text{[I. § 4.2]}$$

$$= Q\eta T\xi U \qquad \text{[I. § 4.2]}$$

и слово $\eta T\xi$, где $\xi \in$ А, $\eta \in$ Б входило бы в P вопреки тому, что $[P^{\text{В}} = 0$. Следовательно, никакая буква алфавита А не входит в S и S есть слово в Б. Остается положить $R = \eta S$, чтобы иметь $P = QR$, где Q — слово в А, R — слово в Б.

16.7. *Если* Q — *слово в* А, R — *слово в* Б, *то*

$$[QR^{\text{А}} = Q,$$

$$[QR^{\text{Б}} = R.$$

Это очевидно из определения проекций.

16.8. *Если* $[P^{\text{В}} = 0$, *то* $P = [P^{\text{А}}[P^{\text{Б}}$.

Это следует из двух предыдущих лемм.

16.9. *Если* $[P^{\text{В}} = 0$, *то* $\mathfrak{L} : P\urcorner$.*

В самом деле, если $[P^{\text{В}} = 0$, то никакие слова вида $\eta\xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б), т. е. никакие левые части формул подстановок алгорифма $\mathfrak{L}$ не входят в P. Это слово тогда не поддается $\mathfrak{L}$.

16.10. *Если* $[P^{\text{В}} \neq 0$, *то существует такое слово* Q, *что* $\mathfrak{L} : P \vdash Q$.

Пусть, в самом деле, P — слово в А $\cup$ Б и $[P^{\text{В}} \neq 0$. Тогда в P входит слово вида $\eta R\xi$, где $\xi \in$ А, $\eta \in$ Б. Пусть $S * \eta R\xi * T$ будет вхождением такого слова в P. В слово $\eta R\xi$ входит буква алфавита А. Пусть $U * \zeta * V$ — первое вхождение буквы алфавита А в $\eta R\xi$. Тогда $U \neq \Lambda$, так как $\zeta \neq \eta$. U есть слово в алфавите Б. Следовательно, U имеет вид $W\chi$, где $\chi \in$ Б. Имеем поэтому

$$P = S\eta R\xi T \qquad \text{[I. § 4.2]}$$

$$= SU\zeta VT \qquad \text{[I. § 4.2]}$$

$$= SW\chi\zeta VT.$$

Таким образом, в P входит слово $\chi\zeta$, где $\zeta \in$ А, $\chi \in$ Б, т. е. в P входит левая часть одной из формул подстановок алгорифма $\mathfrak{L}$. Так как все формулы подстановок этого алгорифма простые, алгорифм просто переводит P в некоторое слово Q, что и требовалось доказать.

---

* Здесь и в дальнейшем опущены индексы А, Б у $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{L}$ означает нормальный алгорифм, введенный в начале этого пункта.

16.11. *Если* $\mathfrak{L}: P \vdash Q$, *то* $[Q^{\text{В}} = [P^{\text{В}} - 1$, $[Q^{\text{А}} = [P^{\text{А}}$, $[Q^{\text{Б}} = [P^{\text{Б}}$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{L}: P \vdash Q$. Тогда первый шаг применения алгорифма $\mathfrak{L}$ к слову P состоит в подстановке правой части $\xi\eta$ одной из формул подстановок алгорифма вместо первого вхождения ее левой части $\eta\xi$ ($\xi \in$ А, $\eta \in$ Б). Пусть $R * \eta\xi * S$ — первое вхождение $\eta\xi$ в P. Тогда

$$P = R\eta\xi S,$$
$$Q = R\xi\eta S.$$

Принимая во внимание, что по определению высоты

$$[\eta\xi^{\text{В}} = 1,$$
$$[\xi\eta^{\text{В}} = 0$$

и что

$$[[\xi\eta^{\text{А}\partial} = [[\xi\eta^{\text{Б}\partial} = [[\eta\xi^{\text{А}\partial} = [[\eta\xi^{\text{Б}\partial} = 1,$$

получаем, согласно **16.5**,

$$[P^{\text{В}} = [R^{\text{В}} + 1 + [S^{\text{В}} + [[R^{\text{Б}\partial} + ([[R^{\text{Б}\partial} \times [[S^{\text{А}\partial}) + [[S^{\text{А}\partial},$$

$$[Q^{\text{В}} = [R^{\text{В}} + [S^{\text{В}} + [[R^{\text{Б}\partial} + ([[R^{\text{Б}\partial} \times [[S^{\text{А}\partial}) + [[S^{\text{А}\partial},$$

откуда $[Q^{\text{В}} = [P^{\text{В}} - 1$.

Принимая далее во внимание, что

$$[\xi\eta^{\text{А}} = [\eta\xi^{\text{А}} = \xi,$$

получаем, согласно **14 (10)**,

$$[P^{\text{А}} = [R^{\text{А}}\xi\,[S^{\text{А}} = [Q^{\text{А}}.$$

Аналогичным образом убеждаемся, что $[P^{\text{Б}} = [Q^{\text{Б}}$.

Покажем теперь, что

(14) $$\mathfrak{L}(P) = [P^{\text{А}}\,[P^{\text{Б}}$$

для всякого слова P в А $\cup$ Б.

Пусть, в самом деле, P — слово в А $\cup$ Б. Процесс применения $\mathfrak{L}$ к P дает на каждом шаге слово меньшей высоты [**16.11**]. Процесс должен поэтому оборваться, а оборваться он может только на слове высоты нуль [**16.10**]. На таком слове процесс, действительно, естественно оборвется [**16.9**]. Таким образом, существует такое слово Q высоты нуль, что

(15) $$\mathfrak{L}: P \models Q_{\top}.$$

Так как каждый шаг процесса не изменяет проекций слова на алфавиты А и Б [**16.11**], имеем

(16) $$[P^{\text{А}} = [Q^{\text{А}},$$

(17) $$[P^{\text{Б}} = [Q^{\text{Б}}.$$

Так как $[Q^{\text{в}} = 0$, имеем

(18) $$Q = [Q^{\text{А}}\,[Q^{\text{Б}} \qquad [16.8].$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L}(P) = Q \qquad [(15),\ \S\ 3.6.3]$$
$$= [Q^{\text{А}}\,[Q^{\text{Б}} \qquad [(18)]$$
$$= [P^{\text{А}}\,[P^{\text{Б}} \qquad [(16),\ (17)].$$

Следовательно, $\mathfrak{L}(P) = [P^{\text{А}}\,[P^{\text{Б}}$, что и требовалось доказать.

Формулируем здесь одно следствие из доказанного, применяемое в дальнейшем.

16.12. *Если Q — слово в* А, *R — слово в* Б, *то*

(19) $$\mathfrak{L}(RQ) = QR.$$

В самом деле, при этих условиях

$$[RQ^{\text{А}} = Q,$$

$$[RQ^{\text{Б}} = R$$

и потому (19) следует из (14).

17. Построим теперь некоторые нормальные алгорифмы в алфавите С, применимые к натуральным числам [§ 2.1] и системам натуральных чисел [§ 2.2]. Отсюда до конца параграфа M, N, Q, R, S означают натуральные числа, представленные как слова в алфавите Ч.

Зададим нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_0$ в С схемой

(1) $$\begin{cases} |*| \to * \\ * \to \end{cases}$$

Этот алгорифм перерабатывает пару натуральных чисел $N*M$ в абсолютную величину разности этих чисел, т. е.

(2) $$\mathfrak{A}_0(N*M) = |N - M|$$

для любых натуральных чисел N и M.

В самом деле, ясно, что

$$\mathfrak{A}_0 : N*M \vdash (N-1)*(M-1)$$

для любых двух положительных чисел N и M. Поэтому, применяя $\mathfrak{A}_0$ к паре чисел $N*M$, где $N \geqslant M$, мы последовательно получим пары

$$N*M,\ (N-1)*(M-1),\ (N-2)*(M-2),\ \ldots,\ (N-M)*.$$

К последней паре уже не применима первая формула схемы (1), а применение второй устраняет звездочку и дает число $N-M$, к которому не применима ни одна из формул схемы. Таким образом, при $N \geqslant M$

$$\mathfrak{A}_0 : N*M \vdash (N-M)\urcorner\ .$$

Аналогичным образом усматривается, что при $N < M$

$$\mathfrak{A}_0 : N * M \vdash (M - N)\urcorner .$$

Следовательно, в обоих случаях

$$\mathfrak{A}_0 : N * M \models |N - M|\urcorner ,$$

откуда, согласно § 3.6.3, вытекает (2).

В частности, $\mathfrak{A}_0(N * M) = 0$ тогда и только тогда, когда $N = M$.

Зададим далее, нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_1$ в С схемой

(3) $$\{ \text{|||||} \to .$$

Покажем, что он перерабатывает всякое натуральное число в остаток от деления этого числа на 5.

В самом деле, из рассмотрения схемы (3) непосредственно усматривается справедливость следующих лемм.

17.1. $\mathfrak{A}_1 : (N + 5) \vdash N$.

17.2. *Если* $N < 5$, *то* $\mathfrak{A}_1 : N\urcorner$.

Из **17.1** вытекает

17.3. $\mathfrak{A}_1 : (R + 5Q) \models R$.

Пусть теперь N — произвольное натуральное число. Представим его в виде $R + 5Q$, где R — остаток, Q — частное от деления N на 5. Так как $N = R + 5Q$ и $R < 5$, алгорифм $\mathfrak{A}_1$ в применении к слову N работает следующим образом:

$$\mathfrak{A}_1 : N \models R\urcorner \qquad [17.3,\ 17.2],$$

откуда

$$\mathfrak{A}_1(N) = R,$$

что и требовалось доказать.

В частности $\mathfrak{A}_1(N) = 0$ тогда и только тогда, когда N делится на 5.

Зададим теперь нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_2$ в С схемой

(4)
$$\begin{cases} *\text{|||||} \to |* \\ *\text{|} \to * \\ * \to \cdot \\ \to *. \end{cases}$$

Покажем, что он перерабатывает всякое натуральное число N в частное от деления N на 5, т. е. в $\left[\frac{N}{5}\right]$.*

В самом деле, из рассмотрения схемы (4) легко усматривается справедливость следующих лемм.

17.4. $\mathfrak{A}_2 : N * (M + 5) \vdash (N + 1) * M$.

17.5. *Если* $0 < M < 5$, *то*

$$\mathfrak{A}_2 : N * M \vdash N * (M - 1).$$

17.6. $\mathfrak{A}_2 : N * \vdash \cdot N$.

17.7. $\mathfrak{A}_2 : N \vdash * N$.

Из **17.4** вытекает

17.8. $\mathfrak{A}_2 : N * (R + 5Q) \models (N + Q) * R$.

* Прямоугольные скобки применяются здесь для обозначения целой части.

Из **17.5** вытекает

17.9. *Если* $R<5$, *то*

$$\mathfrak{A}_2 : Q*R \models Q*.$$

Пусть теперь N — произвольное натуральное число. Представим его в виде $R+5Q$, где R — остаток, Q — частное от деления N на 5. Так как $N=R+5Q$ и $R<5$, алгорифм $\mathfrak{A}_2$ в применении к слову N работает следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_2 : N &\vdash *(R+5Q) && [17.7]\\ &\models Q*R && [17.8]\\ &\models Q* && [17.9]\\ &\vdash \cdot Q && [17.6]. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathfrak{A}_2 : N \models \cdot Q$, откуда $\mathfrak{A}_2(N)=Q$, что и требовалось доказать.

Легко также построить нормальный алгорифм в С, перерабатывающий всякое натуральное число N в пару $Q*R$, где Q — частное от деления N на 5, R — остаток от этого деления. Зададим, в самом деле, нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_3$ в С схемой

(5)
$$\left\{\begin{array}{l} *|||||\to |* \\ *\to \cdot * \\ \to *. \end{array}\right.$$

Этот алгорифм работает указанным только что образом, как читатель без труда докажет.

Делитель 5 в трех предыдущих примерах взят только для определенности. Такие же нормальные алгорифмы можно, очевидно, построить для деления на любое другое, отличное от нуля натуральное число. Для этого надо только заменить пять черточек в левой части первой формулы каждой из схем **(3)**—**(5)** соответствующим другим числом черточек. Если бы мы, однако, попытались построить аналогичные алгорифмы для деления на нуль, совсем отбрасывая черточки в левой части первых формул этих схем, то, как нетрудно видеть, мы получили бы алгорифмы, не применимые ни к какому натуральному числу, что, разумеется, вполне соответствует сущности дела.

18. Построим теперь два несколько более сложных нормальных алгорифма. Первый из них — *алгорифм общего наибольшего делителя* — будет перерабатывать всякую пару натуральных чисел в общего наибольшего делителя этих чисел; второй — *алгорифм умножения* — будет перерабатывать всякую пару натуральных чисел в произведение этих чисел. Оба алгорифма будут алгорифмами над алфавитом С, но не в этом алфавите.

Зададим нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_4$ в алфавите $\{|, *, a, b, c\}$ схемой

(1)
$$\left\{\begin{array}{l} |a\to a| \\ |*|\to a* \\ |*\to *b \\ b\to | \\ a\to c \\ c\to | \\ *\to . \end{array}\right.$$

Покажем, что $\mathfrak{A}_4$ перерабатывает всякую пару чисел $N*M$ в общего наибольшего делителя этих чисел.

Следующие леммы непосредственно получаются из рассмотрения схемы (1).

18.1. $\mathfrak{A}_4 : a^Q NaM*R \vdash a^Q (N-1)\,a\,(M+1)*R \quad (N>0)$.

18.2. $\mathfrak{A}_4 : a^Q N*R \vdash a^Q (N-1)\,a*(R-1) \quad (N>0,\ R>0)$.

18.3. $\mathfrak{A}_4 : a^Q N*b^R \vdash a^Q (N-1)*b^{R+1} \quad (N>0)$.

18.4. $\mathfrak{A}_4 : a^Q *Nb^R \vdash a^Q *(N+1)\,b^{R-1} \quad (R>0)$.

18.5. $\mathfrak{A}_4 : c^M a^Q *N \vdash c^{M+1} a^{Q-1} *N \quad (Q>0)$.

18.6. $\mathfrak{A}_4 : Qc^M *N \vdash (Q+1)\,c^{M-1} *N \quad (M>0)$.

18.7. $\mathfrak{A}_4 : *N \vdash N$.

18.8. $\mathfrak{A}_4 : N\urcorner$.

Из этих лемм далее вытекают следующие леммы.

18.9. $\mathfrak{A}_4 : a^Q Na*R \models a^{Q+1} N*R$ [18.1].

18.10. $\mathfrak{A}_4 : a^Q N*R \models a^{Q+1} (N-1)*(R-1) \quad (N>0,\ R>0)$ [18.2, 18.9].

18.11. $\mathfrak{A}_4 : N*R \models a^R (N-R)* \quad (N \geqslant R)$ [18.10].

18.12. $\mathfrak{A}_4 : N*R \models a^N *(R-N) \quad (N<R)$ [18.10].

18.13. $\mathfrak{A}_4 : a^Q N* \models a^Q *b^N$ [18.3].

18.14. $\mathfrak{A}_4 : a^Q *b^N \models a^Q *N$ [18.4].

18.15. $\mathfrak{A}_4 : a^Q *N \models c^Q *N$ [18.5].

18.16. $\mathfrak{A}_4 : c^Q *N \models Q*N$ [18.6].

18.17. $\mathfrak{A}_4 : N*R \models R*(N-R) \quad (N \geqslant R)$ [18.11, 18.13, 18.14, 18.15, 18.16].

18.18. $\mathfrak{A}_4 : N*R \models N*(R-N) \quad (N<R)$ [18.12, 18.15, 18.16].

18.19. $\mathfrak{A}_4 : *N \models N\urcorner$ [18.7, 18.8].

18.20. $\mathfrak{A}_4 : N* \models N\urcorner$ [18.17, 18.19].

Условимся теперь говорить о парах натуральных чисел $N*R$ и $M*Q$, что они *эквивалентны*, если всякий общий делитель чисел N и R есть общий делитель чисел M и Q и наоборот. При $N \geqslant R$ пара $N*R$, очевидно, эквивалентна паре $R*(N-R)$, а при $N<R$ она эквивалентна паре $N*(R-N)$. Леммы 18.17 и 18.18 показывают поэтому, что *всякая пара $N*R$ отличных от нуля чисел просто преобразуется алгорифмом $\mathfrak{A}_4$ в такую эквивалентную пару чисел $M*Q$, что* $M+Q<N+R$. Отсюда следует далее, что *всякая пара чисел просто преобразуется алгорифмом $\mathfrak{A}_4$ в эквивалентную пару чисел, содержащую нуль в качестве одного из элементов, т. е. в пару вида $*Q$ или $Q*$.*

Для пар этого вида число Q является, очевидно, общим наибольшим делителем, т. е. общим делителем, делящимся на всякий общий делитель. В силу эквивалентности исходной пары чисел и получаемой из нее пары этого вида, Q является также общим наибольшим делителем чисел исходной пары. С другой стороны, согласно 18.19 и 18.20, $\mathfrak{A}_4$ естественно преобразует всякую пару вида $*Q$ или $Q*$ в Q. Таким образом, $\mathfrak{A}_4$ естественно преобразует исходную пару чисел в общего наибольшего делителя этих чисел. Следовательно, $\mathfrak{A}_4$ *перера-*

батывает всякую пару чисел $N*R$ в общего наибольшего делителя этих чисел, что и требовалось доказать.

Алгорифм $\mathfrak{A}_5$ задается в алфавите $\{|, *, a, b\}$ схемой

(2)
$$\begin{cases} b| \to |b \\ a| \to |ba \\ a \to \\ |* \to *a \\ *| \to * \\ * \to \\ b \to | \end{cases}.$$

Покажем, что $\mathfrak{A}_5$ перерабатывает всякую пару чисел $M*R$ в произведение этих чисел.

Справедливость следующих лемм непосредственно усматривается из схемы (2).

18.21. $\mathfrak{A}_5 : M*Nb^Q|b^RP \vdash M*Nb^{Q-1}|b^{R+1}P$ ($Q>0$, P — *слово в* $\{|, *, a, b\}$).

18.22. $\mathfrak{A}_5 : M*Nb^QaRb^S \vdash M*Nb^Q|ba(R-1)b^S$ ($R>0$).

18.23. $\mathfrak{A}_5 : M*Nb^Qab^R \vdash M*Nb^{Q+R}$.

18.24. $\mathfrak{A}_5 : M*Nb^Q \vdash (M-1)*aNb^Q$ ($M>0$).

18.25. $\mathfrak{A}_5 : *Nb^Q \vdash *(N-1)b^Q$ ($N>0$).

18.26. $\mathfrak{A}_5 : *b^Q \vdash b^Q$.

18.27. $\mathfrak{A}_5 : Rb^Q \vdash (R+1)b^{Q-1}$ ($Q>0$).

18.28. $\mathfrak{A}_5 : R\urcorner$.

Из них вытекают следующие леммы.

18.29. $\mathfrak{A}_5 : M*Nb^Q|bP \models M*(N+1)b^{Q+1}P$ (P — *слово в* $\{|, *, a, b\}$) [18.21].

18.30. $\mathfrak{A}_5 : M*Nb^QaRb^S \models M*(N+1)b^{Q+1}a(R-1)b^S$ ($R>0$).

В самом деле, при $R>0$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_5 : M*Nb^QaRb^S &\vdash M*Nb^Q|ba(R-1)b^S && [18.22] \\ &\models M*(N+1)b^{Q+1}a(R-1)b^S && [18.29]. \end{aligned}$$

18.31. $\mathfrak{A}_5 : M*Nb^QaRb^S \models M*(N+R)b^{Q+R}ab^S$ [18.30]

18.32. $\mathfrak{A}_5 : M*aRb^S \models M*Rb^Rab^S$ [18.31].

18.33. $\mathfrak{A}_5 : M*Rb^S \models (M-1)*Rb^{R+S}$ ($M>0$).

В самом деле, при $M>0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_5 : M*Rb^S &\vdash (M-1)*aRb^S && [18.24] \\ &\models (M-1)*Rb^Rab^S && [18.32] \\ &\vdash (M-1)*Rb^{R+S} && [18.23]. \end{aligned}$$

18.34. $\mathfrak{A}_5 : M*Rb^S \models (M-Q)*Rb^{(Q\times R)+S}$ ($Q \leqslant M$).

В самом деле, лемма тривиальна при $Q=0$. Допустим, что она установлена при $Q=N$, где $N<M$, и докажем ее тогда при $Q=N+1$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_5 : M*Rb^S &\models (M-N)*Rb^{(N\times R)+S}\\ &\models (M-N-1)*Rb^{R+(N\times R)+S} \qquad [18.33]\\ &= (M-(N+1))*Rb^{((N+1)\times R)+S},\end{aligned}$$

откуда следует доказываемое.

18.35. $\mathfrak{A}_5 : *Rb^S \models *b^S$ [18.25].

18.36. $\mathfrak{A}_5 : b^S \models S$ [18.27].

18.37. $\mathfrak{A}_5 : M*R \models (M\times R)\urcorner$.

В самом деле,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_5 : M*R &\models *Rb^{(M\times R)} && [18.34]\\ &\models *b^{(M\times R)} && [18.35]\\ &\vdash b^{(M\times R)} && [18.26]\\ &\vdash (M\times R)\urcorner && [18.36,\ 18.28].\end{aligned}$$

В силу 18.37 и § 3.6.3,

$$\mathfrak{A}_5(M*R)=M\times R,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Принцип нормализации

1. Приведенные в предыдущем параграфе разнообразные примеры нормальных алгорифмов выявляют большую общность понятия нормального алгорифма. Мы надеемся, что впечатление общности еще усилится у читателя в результате чтения следующей главы. Ввиду этого естественно возникает вопрос: в какой мере точное понятие нормального алгорифма соответствует более общему, но менее точному понятию алгорифма в некотором алфавите [§ 1.4]?

Этот несколько неопределенно поставленный вопрос должен быть уточнен. Какого соответствия можно здесь ожидать? Конечно, алгорифмы вообще значительно разнообразнее нормальных алгорифмов. Естественно, однако, спросить, нельзя ли заменить всякий алгорифм в алфавите A нормальным алгорифмом, вполне эквивалентным ему относительно A [§ 1.6]. Мы полагаем, что на этот вопрос следует ответить утвердительно, и формулируем следующий принцип нормализации алгорифмов.

Всякий алгорифм в алфавите A *вполне эквивалентен относительно* A *некоторому нормальному алгорифму над* A.

Условимся говорить об алгорифме в алфавите A, что он *нормализуем*, если он вполне эквивалентен относительно A некоторому нормальному алгорифму над A. Принцип нормализации можно тогда формулировать следующим образом.

Всякий алгорифм нормализуем.

2. Формулированный сейчас принцип нормализации требует пояснений.

Прежде всего это не есть математическая теорема, подлежащая доказательству. Такого характера принцип нормализации не имеет уже потому, что одно из понятий, о которых идет речь в этом принципе — общее понятие алгорифма, — не является точным математическим понятием. Принцип именно и выражает уточнение этого понятия в понятии нормального алгорифма.

3. Содержание принципа, однако, не ограничивается простым уточнением понятия алгорифма. Принцип утверждает также *пригодность этого уточнения*. Хотя общее понятие алгорифма и не является достаточно четким, тем не менее это — сложившееся и употребляемое понятие. Обычно не вызывает затруднений решение вопроса о том, считать ли алгорифмом такое-то конкретное предписание. Принцип утверждает, что всякий раз, когда такого рода вопрос будет решаться положительно — «да, это есть алгорифм в данном алфавите», — будет возможно нормализовать предписание, т. е. заменить его эквивалентным относительно этого алфавита нормальным алгорифмом. Формулируя принцип нормализации, мы тем самым делаем большой ряд предсказаний о нормализуемости алгорифмов, построение которых осуществится в будущем.

В этом отношении принцип нормализации подобен физическому закону. Всякий физический закон тоже ведь является основанием для огромного ряда предсказаний о будущих явлениях. Например, закон сохранения энергии предсказывает сохранение общего количества энергии во всякой замкнутой физической системе. В отрицательной форме он утверждает невозможность изобретения perpetuum mobile — физической системы, неограниченно производящей работу без притока энергии извне. Аналогично этому, принцип нормализации предсказывает нормализуемость всякого алгорифма, который будет изобретен, и, значит, невозможность изобретения ненормализуемого алгорифма.

4. На чем же может быть основана уверенность в справедливости принципа нормализации алгорифмов, т. е. в правильности тех предсказаний, которые делаются на его основании? В основном на том же самом, на чем основана наша уверенность в правильности известных нам физических законов, — на опыте.

А опыт, подтверждающий принцип нормализации, огромен. Ведь математикой люди занимаются довольно долго — не менее 4000 лет. За это время было придумано немало различных алгорифмов. И среди них не известно ни одного ненормализуемого. Как-никак, а это веский довод в пользу принципа нормализации. Не менее веский, чем, скажем, опытное подтверждение закона сохранения энергии.

5. Другим важным доводом в пользу принципа нормализации является следующий.

Известно много способов сочетания алгорифмов — построения новых алгорифмов по нескольким заданным. Все эти способы дают нормализуемые алгорифмы, если исходные алгорифмы были нормализуемы. В отношении важнейших способов сочетания этот факт будет установлен в следующей главе. Он показывает, что для построения ненормализуемого алгорифма, — если такое построение вопреки принципу нормализации все-таки возможно, — необходимо привлечение каких-то совсем новых конструктивных средств, таких, какие и не представляются современному математику.

В настоящее время нет, однако, никаких признаков, позволяющих ожидать изобретения таких средств. А, как известно, в истории не бывает скачков, не подготовленных предшествующим развитием.

6. Следует, далее, принять во внимание, что, как отмечалось во **Введении**, многие современные математики пришли к уточнению понятия алгорифма различными путями. Все эти уточнения оказались по существу равносильными друг другу [22, 32]. Как показал В. К. Детловс [1], наше понятие нормального алгорифма также равносильно каждому из этих уточнений.

Равносильность различных уточнений понятия алгорифма, полученных разными авторами, шедшими разными путями, также говорит о естественности этих уточнений, о том, что они соответствуют самой природе вещей.

7. Наконец, в качестве еще одного довода в пользу принципа нормализации автор позволит себе сослаться на свой личный опыт. Все конкретные алгорифмы, которые ему приходилось испытывать в этом отношении, ему удавалось нормализовать. Автор поэтому считает возможным сделать противникам принципа нормализации следующий вызов: «Укажите ненормализуемый алгорифм!».

8. Принимая, однако, во внимание, что читатель может не разделять уверенности автора в правильности принципа нормализации, автор отнюдь не собирается навязывать читателю этот принцип. Поэтому в дальнейшем всякие применения принципа нормализации будут делаться явно.

9. В нашей формулировке принципа нормализации фигурировало понятие полной эквивалентности алгорифмов. Естественно спросить, что получится, если заменить это понятие в формулировке принципа понятием эквивалентности. На первый взгляд может показаться, что получится некоторый новый принцип, утверждающий нечто меньшее, чем принцип нормализации, а именно:

«*Всякий алгорифм в алфавите* A *эквивалентен относительно* A *некоторому нормальному алгорифму над* A».

Мы увидим, однако, скоро [**III. § 3. 6**], что этот «ослабленный» принцип нормализации в действительности является лишь другой формулировкой того же самого принципа. Принцип нормализации мы имеем один.

Глава III

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ АЛГОРИФМОВ

В этой главе указывается ряд конструкций, позволяющих строить новые нормальные алгорифмы, исходя из данных. Наличие таких конструкций показывает, что естественные способы сочетания алгорифмов — такие, как последовательное применение двух алгорифмов, повторное применение одного алгорифма вплоть до получения результата, известным образом «удовлетворяющего» другому алгорифму, и т. п., — ведут от нормализуемых алгорифмов к нормализуемым же алгорифмам.

§ 1. Распространения алгорифма

1. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгорифм в алфавите А, Б — расширение этого алфавита. Условимся говорить об алгорифме $\mathfrak{B}$ в алфавите Б, что он есть *распространение алгорифма* $\mathfrak{A}$ *на алфавит* Б, если

$$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{B}(P) \quad (P \text{ — слово в А}), \tag{1}$$

т. е. если $\mathfrak{B}$ вполне эквивалентен $\mathfrak{A}$ относительно А [II. § 1. 7].

Ясно, что алгорифм в алфавите А может вообще иметь несколько распространений на алфавит Б, так как условие (1) не налагает никаких ограничений на работу алгорифма $\mathfrak{B}$ над словами в Б, не являющимися словами в А. Мы рассмотрим сейчас два специальных вида распространений нормальных алгорифмов.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите А, Б — расширение этого алфавита. Зададим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ в Б, взяв в качестве его схемы схему алгорифма $\mathfrak{A}$, что, конечно, допустимо, так как всякое слово в А есть вместе с тем слово в Б.

Тогда, как мы скоро увидим, имеет место условное равенство

$$\mathfrak{B}(PR) \simeq \mathfrak{A}(P)R \quad (P \text{ — слово в А}, R \text{ — слово в Б} \setminus \text{А}), \tag{1}$$

из которого в частности (при $R = \Lambda$) следует 1 (1).

Фиксируем прежде всего слово P в А и слово R в Б $\setminus$ А и условимся называть *образом* вхождения

$$S * T * U \tag{2}$$

в слово P вхождение

$$S * T * UR. \tag{3}$$

Докажем некоторые леммы.

2.1. *Образ всякого вхождения слова T в P есть вхождение T в PR.* В самом деле, если (2) — вхождение в слово P, то

$$STU = P \qquad \text{[I. § 4.2]}, \tag{4}$$

$$STUR = PR \qquad \text{[(4)]},$$

откуда следует, что (3), т. е. образ вхождения (2), есть вхождение в слово PR [I. § 4.2].

2.2. *Всякое вхождение непустого слова T в алфавите* А *в слово PR есть образ некоторого вхождения T в P.*

В самом деле, пусть T — непустое слово в алфавите А, $S*T*V$ — его вхождение в PR. Тогда

$$STV = PR \qquad \text{[I. § 4.2]}. \tag{5}$$

Так как $T \neq \Lambda$, T можно представить в виде $W\xi$, где ξ — буква алфавита А [I. § 3.8.3]. Имеем

$$T = W\xi, \tag{6}$$

$$SW\xi V = PR \qquad \text{[(5), (6)]}.$$

Таким образом, ξV и R суть концы одного и того же слова. Поэтому R оканчивается словом ξV или V — словом R [I. § 3.10.10]. Первое невозможно, так как буква ξ алфавита А не входит в слово R в Б $\setminus$ А. Следовательно, V оканчивается словом R, т. е. существует такое слово U, что

$$V = UR. \tag{7}$$

Имеем теперь

$$STUR = PR \qquad \text{[(5), (7)]}, \tag{8}$$

$$STU = P \qquad \text{[(8), I. § 3.9.4]},$$

$$S*T*V = S*T*UR \qquad \text{[(7)]}.$$

Следовательно, (2) есть вхождение T в P, а рассматриваемое вхождение $S*T*V$ есть его образ. Этим лемма доказана.

2.3. *Если V и W — вхождения одного и того же слова в P, то образ V тогда и только тогда предшествует образу W, когда V предшествует W.*

Согласно определению предшествования [I. § 4.3], это непосредственно следует из совпадения левых крыльев вхождений в P с левыми крыльями образов этих вхождений.

2.4. *Если T входит в P, то образ первого вхождения T в P есть первое вхождение T в PR.*

В самом деле, пусть V — первое вхождение T в P, W — образ V. Если $T = \Lambda$, то $V = **P$ [I. § 4.3.8], откуда $W = **PR$. Следовательно, в этом случае W есть первое вхождение T в PR [I. § 4.3.8]. Пусть теперь $T \neq \Lambda$.

Рассмотрим какое-нибудь отличное от W вхождение W_1 слова T в PR. Согласно 2.2, оно есть образ некоторого вхождения V_1 слова T

в P. $V_1 \neq V$, так как $W_1 \neq W$. Так как V есть первое вхождение T в P, V предшествует V_1. Поэтому W предшествует W_1 [2.3]. Следовательно, W предшествует всякому отличному от него вхождению слова T в PR, т. е. является первым вхождением T в PR, что и требовалось доказать.

2.5. *Слово T в алфавите A тогда и только тогда входит в P, когда оно входит в PR.*

Это верно при $T = \Lambda$, так как Λ входит и в P и в PR; при $T \neq \Lambda$ это непосредственно следует из лемм 2.1, 2.2 и I. § 4.2.1.

2.6. *Если V — вхождение слова T в P, Q — результат подстановки слова W вместо V, то QR есть результат подстановки слова W вместо образа V.*

В самом деле, пусть

$$V = S * T * U. \tag{9}$$

Тогда

$$Q = SWU \qquad [(9), \text{I. § 4.5}], \tag{10}$$

$$QR = SWUR \qquad [(10)]. \tag{11}$$

Таким образом, QR есть результат подстановки W вместо $S * T * UR$ [(11), I. § 4.5], т. е. вместо образа V [(9)], что и требовалось доказать.

2.7. *Если $\mathfrak{A} : P \vdash Q$, то $\mathfrak{B} : PR \vdash QR$.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{A} : P \vdash Q$. Пусть тогда F — первая формула из схемы $\mathfrak{A}$ с левой частью, входящей в P. Левые части формул, предшествующих F в схеме $\mathfrak{A}$, не входят в P, а, значит, и в PR, так как они являются словами в A [2.5]. Левая же часть F входит в PR, так как она входит в P. Ввиду совпадения схем алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, F является, таким образом, первой формулой из схемы $\mathfrak{B}$ с левой частью, входящей в PR.

Пусть V — первое вхождение левой части F в P. Тогда образ V есть первое вхождение левой части F в PR [2.4]. Алгорифм $\mathfrak{B}$ в применении к слову PR предписывает поэтому подставить правую часть формулы F вместо образа V. Но результатом подстановки правой части F вместо V является слово Q, так как $\mathfrak{A} : P \vdash Q$. Следовательно, результатом подстановки правой части F вместо образа V является QR [2.6].

При этом формула F простая, так как $\mathfrak{A} : P \vdash Q$. Следовательно, $\mathfrak{B} : PR \vdash QR$, что и требовалось доказать.

2.8. *Если $\mathfrak{A} : P \vdash \cdot Q$, то $\mathfrak{B} : PR \vdash \cdot QR$.*

Это доказывается совершенно аналогично предыдущему.

2.9. *Если $\mathfrak{A} : P\,\urcorner$, то $\mathfrak{B} : PR\,\urcorner$.*

Это легко доказывается с помощью 2.5.

До сих пор слова P и R были у нас закреплены, что имело существенное значение при определении образа вхождения. В доказанных леммах 2.7—2.9 понятие образа вхождения, однако, не фигурирует. Эти леммы применимы поэтому к любым словам P, Q, R, таким, что P есть слово в A, а R — в Б $\setminus$ A. В дальнейшем они и будут применяться таким образом.

В леммах 2.10—2.18 мы также предполагаем, что P есть слово в A, R — в Б $\setminus$ A.

2.10. *Если* $\mathfrak{B}: PR \vdash S$, *то существует такое слово* Q *в* А, *что* $S = QR$ *и* $\mathfrak{A}: P \vdash Q$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{B}: PR \vdash S$. Имеет место одно из трех: или существует такое слово Q, что $\mathfrak{A}: P \vdash Q$, или существует такое слово Q, что $\mathfrak{A}: P \vdash \cdot Q$, или $\mathfrak{A}: P\,\neg$ [II. § 3.6.1]. Во втором случае мы имеем, однако, $\mathfrak{B}: PR \vdash \cdot QR$ [2.8], в третьем — $\mathfrak{B}: PR\,\neg$ [2.9]. Так как ни то, ни другое не совместимо с предположением, что $\mathfrak{B}: PR \vdash S$ [II. § 3.6.1], эти случаи отпадают. Таким образом, существует такое слово Q, что $\mathfrak{A}: P \vdash Q$. Q есть слово в А, так как $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в А. Так как $\mathfrak{A}: P \vdash Q$, имеем $\mathfrak{B}: PR \vdash QR$ [2.7]. А так как, по предположению, $\mathfrak{B}: PR \vdash S$, имеем $S = QR$ [II, § 3.6.1], что и оставалось доказать.

Аналогичным образом доказываются следующие две леммы.

2.11. *Если* $\mathfrak{B}: PR \vdash \cdot S$, *то существует такое слово* Q *в* А, *что* $S = QR$ *и* $\mathfrak{A}: P \vdash \cdot Q$.

2.12. *Если* $\mathfrak{B}: PR\,\neg$, *то* $\mathfrak{A}: P\,\neg$.

2.13. *Если* $\mathfrak{A}: P \models \cdot Q$, *то* $\mathfrak{B}: PR \models \cdot QR$.

Это легко доказывается с помощью 2.7 и 2.8.

2.14. *Если* $\mathfrak{A}: P \models Q\,\neg$, *то* $\mathfrak{B}: PR \models QR\,\neg$.

Это легко доказывается с помощью 2.7 и 2.9.

2.15. *Если* $\mathfrak{B}: PR \models \cdot S$, *то алгорифм* $\mathfrak{A}$ *применим к* P.

В самом деле, пусть $\mathfrak{B}: PR \models \cdot S$. Тогда существует такой ряд слов $S_0, \ldots, S_n$ $(n > 0)$, что

$$\mathfrak{B}: S_0 \vdash S_1 \vdash \ldots \vdash S_{n-1} \vdash \cdot S_n, \tag{12}$$

$$S_0 = PR. \tag{13}$$

Покажем индукцией по i, что каждое из слов S_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ имеет вид $Q_i R$, где Q_i — слово в А. Для S_0 это верно, согласно (13), так как P — слово в А. При этом $Q_0 = P$. Допустим, что

$$S_{j-1} = Q_{j-1} R,$$

для некоторого j меньшего или равного n. Согласно (12), имеем тогда

$$\mathfrak{B}: Q_{j-1} R \vdash S_j,$$

если $j < n$, и

$$\mathfrak{B}: Q_{j-1} R \vdash \cdot S_j,$$

если $j = n$. В первом случае существует такое слово Q_j в А, что $S_j = Q_j R$ и $\mathfrak{A}: Q_{j-1} \vdash Q_j$ [2.10]; во втором случае существует такое слово Q_j в А, что $S_j = Q_j R$ и $\mathfrak{A}: Q_{j-1} \vdash \cdot Q_j$ [2.11]. Мы доказали, таким образом, наше утверждение о виде слов S_i. Вместе с тем мы получили такой ряд слов $Q_0, \ldots, Q_n$, что

$$\mathfrak{A}: Q_0 \vdash Q_1 \vdash \ldots \vdash Q_{n-1} \vdash \cdot Q_n,$$

причем $Q_0 = P$. Следовательно, алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к P, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом доказывается следующая лемма.

2.16. *Если* $\mathfrak{B}: PR \models S\,\neg$, *то алгорифм* $\mathfrak{A}$ *применим к* P.

2.17. *Если алгорифм* $\mathfrak{A}$ *применим к* P, *то*

$$\mathfrak{B}(PR) = \mathfrak{A}(P) R.$$

Допустим, в самом деле, что алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к P, и пусть

$$\mathfrak{A}(P) = Q. \tag{14}$$

Тогда $\mathfrak{A} : P \vdash\!\!= \cdot Q$ или $\mathfrak{A} : P \vdash\!\!= Q\,\urcorner$ [II. § 3.6.3]. В первом случае $\mathfrak{B} : PR \vdash\!\!= \cdot QR$ [2.13], во втором — $\mathfrak{B} : PR \vdash\!\!= QR\,\urcorner$ [2.14]. В обоих случаях

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(PR) &= QR && \text{[II. § 3.6.3]} \\ &= \mathfrak{A}(P)\,R, && \text{[(14)]}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2.18. *Если алгорифм* $\mathfrak{B}$ *применим к* PR, *то алгорифм* $\mathfrak{A}$ *применим к* P.

В самом деле, если алгорифм $\mathfrak{B}$ применим к PR, то существует такое слово S, что $\mathfrak{B} : PR \vdash\!\!= \cdot S$ или $\mathfrak{B} : PR \vdash\!\!= S\,\urcorner$. В обоих случаях алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к P [2.15, 2.16], что и требовалось доказать.

Из лемм 2.17 и 2.18 непосредственно следует интересующий нас результат, а именно условное равенство (1).

Из него вытекает условное равенство 1 (1). Этим доказано, что $\mathfrak{B}$ есть распространение $\mathfrak{A}$ на Б.

3. Распространение нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ на алфавит Б, получаемое, как только что указано, мы будем называть *естественным распространением этого алгорифма на алфавит* Б.

Предыдущее мы резюмируем следующим образом.

3.1. *Естественное распространение нормального алгорифма есть нормальный алгорифм.*

3.2. *Схема естественного распространения нормального алгорифма совпадает со схемой этого алгорифма.*

3.3. *Каковы бы ни были нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *в алфавите* А *и расширение* Б *этого алфавита, существует одно и только одно естественное распространение алгорифма* $\mathfrak{A}$ *на алфавит* Б.

3.4. *Если* $\mathfrak{B}$ — *естественное распространение на алфавит* Б *нормального алгорифма* $\mathfrak{A}$ *в алфавите* А, *то имеет место условное равенство* 2 (1).

4. Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите А. Если Б — собственное расширение этого алфавита, то естественное распространение алгорифма $\mathfrak{A}$ на алфавит Б может оказаться применимым, как алгорифм, не только к словам в алфавите А. Оно будет, например, применимо и ко всякому слову в Б $\setminus$ А, если схема алгорифма $\mathfrak{A}$ не содержит формул подстановок с пустой левой частью.

В самом деле, в этом случае левые части всех формул подстановок алгорифма $\mathfrak{A}$ суть непустые слова в алфавите А и, как таковые, не входят в слово в алфавите Б $\setminus$ А. В силу совпадения схем алгорифма $\mathfrak{A}$ и его естественного распространения $\mathfrak{B}$ на алфавит Б, это означает, что никакое слово в Б $\setminus$ А не поддается этому алгорифму $\mathfrak{B}$, т. е. что

$$\mathfrak{B} : P\,\urcorner$$

для любого слова P в Б $\setminus$ А. Отсюда следует, однако, что

$$\mathfrak{B}(P) = P$$

для всякого такого слова P [II. § 3.6.10, II. § 3.6.3].

В некоторых случаях оказывается желательным так построить нормальный алгорифм в алфавите Б, чтобы он был распространением алгорифма $\mathfrak{A}$ на этот алфавит и чтобы вместе с тем он был применим только к словам в алфавите А (и, значит, к тем и только тем словам, к которым применим $\mathfrak{A}$). Это достигается следующим образом.

Присоединим к схеме алгорифма $\mathfrak{A}$ сверху всевозможные формулы вида

(1) $$\xi \to \xi,$$

где ξ — произвольная буква алфавита Б $\setminus$ А. Зададим нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в Б схемой, получаемой таким образом. Тогда, как нетрудно видеть, $\mathfrak{C}$ также есть распространение $\mathfrak{A}$ на Б.

В самом деле, присоединение формул вида (1), очевидно, никак не отразится на первом шаге применения алгорифма к слову в алфавите А, так как левые части этих формул не входят в такое слово. Следовательно, будут иметь место следующие леммы.

4.1. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash Q$, *то* $\mathfrak{C} : P \vdash Q$.

4.2. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash \cdot Q$, *то* $\mathfrak{C} : P \vdash \cdot Q$.

4.3. *Если* $\mathfrak{A} : P\urcorner$, *где* P — *слово в* А, *то* $\mathfrak{C} : P\urcorner$.

На их основе с помощью леммы II. § 3.6.1 легко доказываются следующие леммы.

4.4. *Если* P — *слово в* А *и* $\mathfrak{C} : P \vdash Q$, *то* $\mathfrak{A} : P \vdash Q$ *и* Q *есть слово в* А.

4.5. *Если* P — *слово в* А *и* $\mathfrak{C} : P \vdash \cdot Q$, *то* $\mathfrak{A} : P \vdash \cdot Q$ *и* Q *есть слово в* А.

4.6. *Если* P — *слово в* А *и* $\mathfrak{C} : P\urcorner$, *то* $\mathfrak{A} : P\urcorner$.

Далее доказываются следующие леммы.

4.7. *Если* $\mathfrak{A} : P \models \cdot Q$, *то* $\mathfrak{C} : P \models \cdot Q$ [4.1, 4.2].

4.8. *Если* $\mathfrak{A} : P \models Q\urcorner$, *то* $\mathfrak{C} : P \models Q\urcorner$ [4.1, 4.3].

4.9. *Если* $\mathfrak{A}(P) = Q$, *то* $\mathfrak{C}(P) = Q$ [4.7, 4.8, II. § 3.6.3].

4.10. *Если алгорифм* $\mathfrak{A}$ *применим к слову* P, *то алгорифм* $\mathfrak{C}$ *также применим к* P *и* $\mathfrak{A}(P) = \mathfrak{C}(P)$ [4.9].

4.11. *Если* P — *слово в* А *и* $\mathfrak{C} : P \models \cdot Q$, *то* $\mathfrak{A} : P \models \cdot Q$ [4.4, 4.5].

4.12. *Если* P — *слово в* А *и* $\mathfrak{C} : P \models Q\urcorner$, *то* $\mathfrak{A} : P \models Q\urcorner$ [4.4, 4.6].

4.13. *Если* P — *слово в* А *и* $\mathfrak{C}(P) = Q$, *то* $\mathfrak{A}(P) = Q$ [4.11, 4.12, II. § 3.6.3].

4.14. *Если алгорифм* $\mathfrak{C}$ *применим к слову* P *в алфавите* А, *то алгорифм* $\mathfrak{A}$ *также применим к* P *и* $\mathfrak{A}(P) = \mathfrak{C}(P)$ [4.13].

Из лемм 4.10 и 4.14 вытекает условное равенство

(2) $$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{C}(P) \quad (P \text{ — слово в А}),$$

означающее, что $\mathfrak{C}$ есть распространение $\mathfrak{A}$ на Б.

Попробуем, с другой стороны, применить алгорифм $\mathfrak{C}$ к какому-нибудь слову P в алфавите Б, не являющемуся словом в алфавите А, т. е. содержащему вхождения букв алфавита Б $\setminus$ А. В P входит по крайней мере одна из левых частей формул (1), стоящих в верху схемы алгорифма $\mathfrak{C}$. Пусть

(3) $$\eta \to \eta$$

первая из тех формул (1), левые части которых входят в P. Тогда (3) будет, очевидно, и первой формулой подстановки алгорифма $\mathfrak{C}$, при-

менимой к P. Алгорифм $\mathfrak{C}$ в применении к слову P предписывает подставить правую часть этой формулы вместо первого вхождения ее левой части в P, что, разумеется, дает опять P. Так как примененная формула простая, имеем

$$\mathfrak{C} : P \vdash P,$$

откуда следует невозможность окончания процесса применения алгорифма $\mathfrak{C}$ к слову P. Следовательно, этот алгорифм не применим к P.

Мы видим, таким образом, что алгорифм $\mathfrak{C}$ применим лишь к словам в алфавите А и, значит, к тем и только тем словам, к которым применим алгорифм $\mathfrak{A}$. В условном равенстве (2) можно поэтому отбросить дополнительное условие: P — слово в А. В самом деле, если P не есть слово в А, то ни символ $\mathfrak{A}(P)$, ни символ $\mathfrak{C}(P)$ не имеют смысла.

5. Распространение нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ на алфавит Б, получаемое, как только что было описано, мы будем называть *формальным распространением этого алгорифма на* Б.

Следующие утверждения резюмируют предыдущее.

5.1. *Всякое формальное распространение нормального алгорифма есть нормальный алгорифм.*

5.2. *Схема всякого формального распространения нормального алгорифма* $\mathfrak{A}$ *получается из схемы этого алгорифма путем присоединения сверху формул подстановок вида* 4(1), *где* ξ *пробегает буквы алфавита формального распространения, не принадлежащие алфавиту алгорифма* $\mathfrak{A}$.

5.3. *Каковы бы ни были нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *в алфавите* А *и расширение* Б *этого алфавита, существует формальное распространение алгорифма* $\mathfrak{A}$ *на алфавит* Б.

5.4. *Для всякого формального распространения* $\mathfrak{C}$ *нормального алгорифма* $\mathfrak{A}$ *имеет место условное равенство* $\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{C}(P)$.

Формальное распространение нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ на данное расширение алфавита этого алгорифма вообще не единственно, поскольку взаимное расположение присоединяемых формул (1) может быть любым. Это, однако, не имеет существенного значения, так как, согласно 5.4, имеем

5.5. *Всякие два формальных распространения нормального алгорифма* $\mathfrak{A}$ *на одно и то же расширение алфавита этого алгорифма вполне эквивалентны относительно их общего алфавита.*

Это можно также выразить, сказав, что формальное распространение данного нормального алгорифма на данное расширение его алфавита единственно с точностью до полной эквивалентности относительно этого расширения.

§ 2. Замыкание алгорифма

1. Будем говорить о нормальном алгорифме, что он *замкнут*, если его схема содержит формулу с пустой левой частью.

1.1. *Если нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *в алфавите* А *замкнут, то всякое слово в* А *поддается алгорифму* $\mathfrak{A}$.

В самом деле, схема замкнутого алгорифма содержит формулу с пустой левой частью, выражающую подстановку, применимую ко всякому слову в алфавите алгорифма.

1.2. *Если нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *замкнут, то невозможен естественный обрыв процесса применения алгорифма* $\mathfrak{A}$.

Это следует из предыдущей леммы.

1.3. *Если нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *замкнут, то* $\mathfrak{A}(P)=Q$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}:P\models\cdot Q$.

В самом деле, если нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ замкнут, то, согласно 1.2, $\mathfrak{A}$ не может естественно преобразовывать P в Q. Согласно II. § 3.6.3, отсюда следует 1.3.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите A. Нормальный алгорифм в A со схемой

$$\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\\ \to\cdot\end{array}\right.$$

будем называть *замыканием алгорифма* $\mathfrak{A}$.

Здесь и в дальнейшем мы применяем следующую символику: символ нормального алгорифма (в данном случае $\mathfrak{A}$), написанный после фигурной скобки, означает схему этого алгорифма, написанную без своей фигурной скобки.

Схема замыкания алгорифма $\mathfrak{A}$ получается, таким образом, из схемы $\mathfrak{A}$ путем присоединения формулы

$$\to\cdot$$

снизу.

2.1. *Замыкание всякого нормального алгорифма замкнуто.*

Это очевидно из определений.

Замыкание нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ мы будем обозначать через $\mathfrak{A}'$.

Из сравнения схем алгорифма $\mathfrak{A}$ и его замыкания легко усматривается справедливость следующих лемм.

2.2. *Если* $\mathfrak{A}:P\vdash Q$, *то* $\mathfrak{A}':P\vdash Q$.

2.3. *Если* $\mathfrak{A}:P\vdash\cdot Q$, *то* $\mathfrak{A}':P\vdash\cdot Q$.

2.4. *Если* $\mathfrak{A}:P\urcorner$, *то* $\mathfrak{A}':P\vdash\cdot P$.

Из них вытекают следующие леммы.

2.5. *Если* $\mathfrak{A}':P\vdash Q$, *то* $\mathfrak{A}:P\vdash Q$ [2.2, 2.3, 2.4, II. § 3.6.1].

2.6. *Если* $\mathfrak{A}':P\vdash\cdot Q$, *то либо* $\mathfrak{A}:P\vdash\cdot Q$, *либо* $\mathfrak{A}:P\urcorner$ *и* $P=Q$. [2.2, 2.3, 2.4, II. § 3.6.1].

2.7. *Если* $\mathfrak{A}:P\models\cdot Q$, *то* $\mathfrak{A}':P\models\cdot Q$ [2.2, 2.3].

2.8. *Если* $\mathfrak{A}:P\models Q\urcorner$, *то* $\mathfrak{A}':P\models\cdot Q$ [2.2, 2.4].

2.9. *Если* $\mathfrak{A}':P\models\cdot Q$, *то* $\mathfrak{A}:P\models\cdot Q$ *или* $\mathfrak{A}:P\models Q\urcorner$ [2.5, 2.6].

2.10. *Если* $\mathfrak{A}(P)=Q$, *то* $\mathfrak{A}'(P)=Q$ [2.7, 2.8, II. § 3.6.3].

2.11. *Если* $\mathfrak{A}'(P)=Q$, *то* $\mathfrak{A}(P)=Q$ [2.9, 1.3, 2.1, II. § 3.6.3].

2.12. $\mathfrak{A}(P)\simeq\mathfrak{A}'(P)$ [2.10, 2.11].

Мы доказали, таким образом, следующую теорему.

2.13. *Всякий нормальный алгорифм вполне эквивалентен своему замыканию относительно своего алфавита.*

В силу теорем 2.13 и 2.1, рассмотрение произвольных алгорифмов сводится по существу к рассмотрению замкнутых алгорифмов, что во многих случаях оказывается удобным ввиду теоремы 1.3.

§ 3. Композиция алгорифмов

1. Два алгорифма часто приходится сочетать следующим образом. Предписывается, исходя из произвольных начальных данных, сначала применить первый алгорифм, а затем к результату его работы — второй. Это предписание составляет новый алгорифм — «композицию» двух данных алгорифмов.

Естественно спросить, является ли композиция нормализуемых алгорифмов, также нормализуемым алгорифмом? Мы, как легко убедиться, могли бы дать утвердительный ответ на этот вопрос, если бы нам удалось доказать следующую теорему.

1.1. Теорема композиции. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$, *может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{C}$ *над объединением их алфавитов, что*

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P)) \quad (P \text{ — слово в } \mathrm{A}), \tag{1}$$

где A *означает это объединение алфавитов.*

Доказательство этой теоремы и составляет главное содержание настоящего параграфа.

2. Мы начнем с того частного случая теоремы композиции, когда оба данных алгорифма $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть нормальные алгорифмы, в одном и том же алфавите A. Будем доказывать следующую теорему.

2.1. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *в алфавите* A, *может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{C}$ *над* A, *удовлетворяющий условию* **1** (1).

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — нормальные алгорифмы в алфавите A. Сопоставим каждой букве ξ этого алфавита новую букву, причем разным буквам алфавита A — разные новые буквы. Букву, сопоставленную букве ξ, будем называть *двойником этой буквы* и обозначать символом $\bar{\xi}$. Двойники букв алфавита A составляют *алфавит двойников* $\overline{\mathrm{A}}$, содержащий столько же букв, сколько A, и не имеющий с A общих букв.

Пусть, далее, α и β означают две дальнейшие новые буквы, отличные друг от друга, от букв алфавита A и их двойников.

Составим алфавит $\mathrm{Б} = \mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}} \cup \{\alpha, \beta\}$. Построим систему формул $\mathfrak{A}^{\alpha}$ путем замены в схеме алгорифма $\mathfrak{A}$ всех точек буквами α. Построим систему формул $\overline{\mathfrak{B}}_{\alpha}^{\beta}$ путем замены в схеме алгорифма $\mathfrak{B}$ всех букв алфавита A их двойниками, всех точек — буквами β с последующей заменой всех формул вида

$$\to B \tag{1}$$

формулами

$$\alpha \to \alpha B \tag{2}$$

с теми же B.

Зададим нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в алфавите Б сокращенно записанной схемой

$$\left\{\begin{array}{l} \xi\alpha \to \alpha\xi \ (\xi \in \mathrm{A}) \\ \alpha\xi \to \alpha\bar{\xi} \ (\xi \in \mathrm{A}) \\ \bar{\xi}\eta \to \bar{\xi}\bar{\eta} \ (\xi, \eta \in \mathrm{A}) \\ \bar{\xi}\beta \to \beta\bar{\xi} \ (\xi \in \mathrm{A}) \\ \beta\bar{\xi} \to \beta\xi \ (\xi \in \mathrm{A}) \\ \xi\bar{\eta} \to \xi\eta \ (\xi, \eta \in \mathrm{A}) \\ \alpha\beta \to \cdot \\ \overline{\mathfrak{B}}_{\alpha}^{\beta} \\ \mathfrak{A}^{\alpha} \end{array}\right. \tag{3}$$

Покажем, что он удовлетворяет условию 1 (1).

Для этого заметим прежде всего, что между схемой алгорифма $\mathfrak{A}^{\cdot}$ и системой формул $\mathfrak{A}^{\alpha}$ имеется естественное взаимно-однозначное соответствие, при котором формула системы $\mathfrak{A}^{\alpha}$, соответствующая данной формуле F схемы $\mathfrak{A}^{\cdot}$, получается из F тем же путем, каким вся система $\mathfrak{A}^{\alpha}$ получается из схемы $\mathfrak{A}^{\cdot}$ — заменой точек буквами α. Принимая во внимание, что простые формулы вовсе не содержат точек, а заключительные — ровно по одному вхождению точки — между стрелкой и правой частью, — убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

2.2. *Все формулы системы* $\mathfrak{A}^{\alpha}$ *— простые.*

2.3. *Всякая формула системы* $\mathfrak{A}^{\alpha}$, *соответствующая простой формуле схемы* $\mathfrak{A}^{\cdot}$, *совпадает с этой формулой.*

2.4. *Левая часть всякой формулы системы* $\mathfrak{A}^{\alpha}$ *совпадает с левой частью соответствующей формулы схемы* $\mathfrak{A}^{\cdot}$.

2.5. *Правая часть всякой формулы системы* $\mathfrak{A}^{\alpha}$, *соответствующей заключительной формуле* F *схемы* $\mathfrak{A}^{\cdot}$, *получается из правой части формулы* F *приписыванием слева буквы* α.

Учитывая, что схема алгорифма $\mathfrak{A}^{\cdot}$ содержит формулу «$\rightarrow\cdot$», получаем

2.6. *Система* $\mathfrak{A}^{\alpha}$ *содержит формулу с пустой левой частью.*

Принимая, далее, во внимание схему (3) алгорифма $\mathfrak{C}$, заключаем отсюда о справедливости следующего утверждения.

2.7. *Алгорифм* $\mathfrak{C}$ *замкнут.*

Условимся, далее, называть *двойником слова* P в алфавите A слово, получаемое из P заменой каждой буквы ее двойником. Двойника слова P будем обозначать символом

$$[P^{-}.$$

Это есть слово в алфавите $\overline{\mathrm{A}}$. Очевидно, что

$$[\Lambda^{-} = \Lambda, \tag{4}$$

$$[\xi^{-} = \overline{\xi}\ (\xi \in \mathrm{A}),$$

$$[PQ^{-} = [P^{-}[Q^{-} \tag{5}$$

для любых слов P и Q в A.

Очевидна также следующая лемма.

2.8. *Всякое слово в алфавите* $\overline{A}$ *есть двойник одного и только одного слова в* A.

Заметим теперь, что между схемой алгорифма $\mathfrak{B}^{\cdot}$ и системой формул $\overline{\mathfrak{B}}^{\beta}_{\alpha}$ также имеется естественное взаимно-однозначное соответствие. Формула системы $\mathfrak{B}^{\beta}_{\alpha}$, соответствующая данной формуле F схемы $\mathfrak{B}^{\cdot}$, получается из F заменой точек буквами β, букв алфавита A их двойниками и, наконец, — если при этом получается формула вида (1), — заменой ее формулой (2). Принимая во внимание, что правые и левые части формул схемы $\mathfrak{B}^{\cdot}$ суть слова в алфавите A, убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

2.9. *Все формулы системы* $\overline{\mathfrak{B}}^{\beta}_{\alpha}$ *— простые.*

2.10. *Левая часть всякой формулы системы* $\overline{\mathfrak{B}}^{\beta}_{\alpha}$ *есть двойник левой части соответствующей формулы схемы* $\mathfrak{B}^{\cdot}$ *или равна* α. *Послед-*

нее имеет место тогда и только тогда, когда левая часть соответствующей формулы схемы $\mathfrak{B}^{\cdot}$ *пуста.*

2.11. *Правая часть всякой формулы системы* $\overline{\mathfrak{B}}_{\alpha}^{\beta}$, *соответствующей простой формуле* F *схемы* $\mathfrak{B}^{\cdot}$, *есть двойник правой части формулы* F, *или получается из этого двойника приписыванием слева* α. *Последнее имеет место тогда и только тогда, когда левая часть формулы* F *пуста.*

2.12. *Правая часть всякой формулы системы* $\overline{\mathfrak{B}}_{\alpha}^{\beta}$, *соответствующей заключительной формуле* F *схемы* $\mathfrak{B}^{\cdot}$, *получается из двойника правой части формулы* F *приписыванием слева слова* β *или слова* $\alpha\beta$. *Второе имеет место тогда и только тогда, когда левая часть формулы* F *пуста.*

Имеем далее следующую лемму.

2.13. *Левая часть всякой формулы системы* $\overline{\mathfrak{B}}_{\alpha}^{\beta}$ *содержит букву алфавита* $\overline{A} \cup \alpha$.

Это непосредственно следует из **2.10**.

Мы выясним теперь, что в применении к какому-нибудь слову P в алфавите A алгорифм $\mathfrak{C}$ работает следующим образом.

1-й этап. $\mathfrak{C}$ работает «за алгорифм $\mathfrak{A}$». Выполняются последовательно все преобразования, требуемые алгорифмом $\mathfrak{A}$. При этом применяются формулы системы $\mathfrak{A}^{a}$. Этап заканчивается, если алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к P, причем, однако, в результате имеем не $\mathfrak{A}(P)$, а слово, получаемое из $\mathfrak{A}(P)$ посредством вставки буквы α, «выскакивающей» на последнем шаге 1-го этапа.

2-й этап. Буква α «бежит» влево к началу слова. Применяются формулы, представляемые 1-й строкой схемы **(3)**. В результате получается $\alpha\mathfrak{A}(P)$.

3-й этап. Буква α «переводит» соседнюю с ней первую букву слова $\mathfrak{A}(P)$ в двойник этой буквы. Применяется одна из формул, представляемых 2-й строкой схемы **(3)**. (Этап отпадает, если $\mathfrak{A}(P) = \Lambda$).

4-й этап. Слева направо распространяется процесс замены букв алфавита A их двойниками. Применяются формулы, представляемые 3-й строкой схемы **(3)**. В результате получается слово $\alpha[\mathfrak{A}(P)^{-}$, (Этап отпадает, если $[\mathfrak{A}(P)^{\partial} \leqslant 1$).

5-й этап. $\mathfrak{C}$ работает «за алгорифм $\mathfrak{B}$», но в алфавите двойников $\overline{A}$ и с буквой α, приставленной к преобразуемому слову слева. Применяются формулы системы $\overline{\mathfrak{B}}_{\alpha}^{\beta}$. Этап заканчивается, если алгорифм $\mathfrak{B}$ применим к слову $\mathfrak{A}(P)$, причем в результате имеем слово, получаемое из $[\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))^{-}$ путем вставки буквы β и присоединения слева буквы α.

6-й этап. Буква β «бежит» влево до буквы α. Применяются формулы, представляемые 4-й строкой схемы **(3)**. В результате получается $\alpha\beta[\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))^{-}$.

7-й этап. Буква β «переводит» соседнюю с ней первую букву слова $[\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))^{-}$ в первую букву слова $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))$. Применяется одна из формул, представляемых 5-й строкой схемы **(3)**. (Этап отпадает, если $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P)) = \Lambda$).

8-й этап. Слева направо распространяется процесс замены двойников букв алфавита A самими этими буквами. Применяются формулы, представляемые 6-й строкой схемы **(3)**. В результате получается слово $\alpha\beta\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))$. (Этап отпадает, если $[\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))^{\partial} \leqslant 1$).

9-й и последний этап. $\alpha\beta$ исчезает. Применяется 7-я строка схемы **(3)**,

являющаяся заключительной формулой. Весь процесс на этом заканчивается, и его результатом является слово $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))$.

Из этого описания работы алгорифма $\mathfrak{C}$ видно, в чем состоит смысл введения двойников букв алфавита A. Они понадобились для того, чтобы, переведя схему алгорифма $\mathfrak{B}$ в алфавит двойников, получить возможность так объединить схемы обоих данных алгорифмов, чтобы они при этом не мешали друг другу. Последующие леммы составляют точное математическое оформление сделанного только что наглядного описания процесса применения алгорифма $\mathfrak{C}$.

2.14. *Если* $\mathfrak{A}' : P \vdash Q$, *то* $\mathfrak{C} : P \vdash Q$.

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}' : P \vdash Q$. Тогда P — слово в A, так как $\mathfrak{A}'$ — алгорифм в A. Поэтому левые части формул подстановок алгорифма $\mathfrak{C}$, представляемых первыми семью строками схемы (3), не входят в P, так как каждая из них содержит букву алфавита $\overline{A} \cup \{\alpha\}$. Не входят в P, и левые части формул системы $\overline{\mathfrak{B}}^3_\alpha$, также содержащие буквы этого алфавита [2.13].

Ниже в схеме (3) стоят формулы системы $\mathfrak{A}^\alpha$, идущие в том же порядке, что соответствующие формулы схемы алгорифма $\mathfrak{A}'$. Рассмотрим формулу F схемы $\mathfrak{A}'$, применяемую на первом шаге работы алгорифма $\mathfrak{A}'$ над словом P. Эта формула простая, так как $\mathfrak{A}' : P \vdash Q$. Согласно 2.3, F встречается и в системе $\mathfrak{A}^\alpha$ как формула, соответствующая самой себе. Выше нее в схеме алгорифма $\mathfrak{A}'$ стоят формулы, левые части которых не входят в P. Согласно 2.4, отсюда следует, что и в системе $\mathfrak{A}^\alpha$ левые части формул, стоящих выше F, не входят в P. Принимая во внимание, что левая часть формулы F входит в P, тогда как левые части формул подстановок алгорифма $\mathfrak{C}$, представленных первыми восемью строками схемы (3), как было показано, не входят в P, заключаем, что F есть первая формула подстановки алгорифма $\mathfrak{C}$ с левой частью, входящей в P. Алгорифм $\mathfrak{C}$ в применении к слову P предписывает поэтому подставить правую часть формулы F вместо первого вхождения ее левой части в P, т. е. он предписывает то же самое, что алгорифм $\mathfrak{A}'$. Следовательно, $\mathfrak{C} : P \vdash Q$, что и требовалось доказать.

2.15. *Если* $\mathfrak{A}' : P \vdash\cdot Q$, *то существуют такие слова* R *и* S, *что*

$$Q = RS, \tag{6}$$

$$\mathfrak{C} : P \vdash R\alpha S. \tag{7}$$

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}' : P \vdash\cdot Q$. Как в доказательстве предыдущей леммы, мы убеждаемся тогда, что P есть слово в A и что левые части формул подстановок алгорифма $\mathfrak{C}$, представленных первыми восемью строками схемы (3) не входят в P.

Рассмотрим формулу F схемы алгорифма $\mathfrak{A}'$, применяемую на первом шаге работы алгорифма $\mathfrak{A}'$ над словом P. Эта формула заключительная, так как $\mathfrak{A}' : P \vdash\cdot Q$. Она, следовательно, имеет вид

$$A \to\cdot B,$$

где A и B — слова в A.

Пусть G означает соответствующую формулу системы $\mathfrak{A}^\alpha$. Согласно определению соответствующей формулы, G есть формула

$$A \to \alpha B.$$

Как в доказательстве предыдущей леммы, убеждаемся, что G есть первая формула подстановки алгорифма $\mathfrak{C}$ с левой частью, входящей в P.

Пусть

(8) $$R*A*T$$

— первое вхождение A в P. Алгорифм $\mathfrak{C}$ в применении к P предписывает подставить правую часть формулы G, т. е. αB вместо этого вхождения. Так как G — простая формула, имеем, следовательно,

$$\mathfrak{C} : P \vdash R\alpha BT.$$

С другой стороны, алгорифм $\mathfrak{A}$ в применении к P предписывает подставить вместо вхождения (8) правую часть формулы F, т. е. B. Так как $\mathfrak{A} : P \vdash \cdot Q$, имеем поэтому

$$Q = RBT.$$

Полагая $S = BT$, будем, следовательно, иметь (6) и (7), что и требовалось доказать.

2.16. *Если R и S — слова* в А, *то* $\mathfrak{C} : R\alpha S \models \alpha RS$.

Это следует из леммы II. § 4.6.2.

2.17. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash \cdot Q$, *то* $\mathfrak{C} : P \models \alpha Q$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{A} : P \vdash \cdot Q$. Тогда существуют слова R и S, удовлетворяющие условиям (6) и (7) [2.15]. Q есть слово в А, так как $\mathfrak{A}$ — алгорифм в А и $\mathfrak{A} : P \vdash \cdot Q$. Поэтому, согласно (6), R и S также суть слова в А и применима лемма 2.16. Имеем, таким образом,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} : P &\vdash R\alpha S && [(7)] \\ &\models \alpha RS && [2.16] \\ &= \alpha Q && [(6)]. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathfrak{C} : P \models \alpha Q$, что и требовалось доказать.

2.18. *Если* $\mathfrak{A} : P \models Q$, *то* $\mathfrak{C} : P \models Q$.

Это следует из леммы 2.14.

2.19. *Если* $\mathfrak{A} : P \models \cdot Q$, *то* $\mathfrak{C} : P \models \alpha Q$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{A} : P \models \cdot Q$. Тогда, согласно II. § 3.6.2, существует такое слово R, что

(9) $$\mathfrak{A} : P \models R,$$

(10) $$\mathfrak{A} : R \vdash \cdot Q.$$

Имеем поэтому

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} : P &\models R && [(9), 2.18] \\ &\models \alpha Q && [(10), 2.17]. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathfrak{C} : P \models \alpha Q$, что и требовалось доказать.

2.20. *Если P и Q — такие слова в алфавите* А, *что* $\mathfrak{C} : P \vdash Q$, *то* $\mathfrak{A} : P \vdash Q$.

В самом деле, пусть P и Q — слова в А и пусть

(11) $$\mathfrak{C} : P \vdash Q.$$

В силу замкнутости алгорифма $\mathfrak{A}$ [§ 2.2.1], P поддается ему [§ 2.1.1], и потому существует такое слово T, что $\mathfrak{A}: P \vdash T$ или $\mathfrak{A}: P \vdash \cdot T$ [II. § 3.6.1]. Во втором случае имелись бы, однако, слова R и S такие, что

(12) $\mathfrak{C}: P \vdash R\alpha S$ [2.15].

Мы имели бы тогда $Q = R\alpha S$ [(11), (12), II. § 3.6.1], что невозможно, так как Q — слово в А. Таким образом,

(13) $\mathfrak{A}: P \vdash T$,

(14) $\mathfrak{C}: P \vdash T$ [(13), 2.14],

(15) $T = Q$ [(11), (14), II. § 3.6.1],

$\mathfrak{A}: P \vdash Q$ [(13), (15)],

что и требовалось доказать.

2.21. *Если P — слово в* А, *то* $\mathfrak{C}$ *просто переводит P в некоторое слово.*

В самом деле, пусть P — слово в А. Рассуждая, как в доказательстве предыдущей леммы, убеждаемся в существовании такого слова T, что $\mathfrak{A}: P \vdash T$ или $\mathfrak{A}: P \vdash \cdot T$. В обоих случаях $\mathfrak{C}$ просто переводит P в некоторое слово [2.14, 2.15].

2.22. *Если алгорифм* $\mathfrak{C}$ *применим к слову P в* А, *то алгорифм* $\mathfrak{A}$ *также применим к P.*

В самом деле, пусть алгорифм $\mathfrak{C}$ применим к слову P и пусть $\mathfrak{C}(P) = U$. Тогда, в силу замкнутости алгорифма $\mathfrak{C}$ [2.7], имеем $\mathfrak{C}: P \vdash \cdot U$ [§ 2.1.3]. Поэтому, согласно II. § 3.6, имеется ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n$ $(n > 0)$ такой, что

(16) $P_0 = P$,

$P_n = U$,

(17) $\mathfrak{C}: P_{i-1} \vdash P_i (0 < i < n)$,

(18) $\mathfrak{C}: P_{n-1} \vdash \cdot P_n$.

P_{n-1} не есть слово в А [(18), 2.21, II. § 3.6.1]. Таким образом, среди чисел $0, 1, \ldots, n-1$ имеются числа i такие, что P_i не есть слово в А. Пусть j является наименьшим из этих чисел. Тогда $j > 0$, так как P_0 есть слово в А [(16)]. P_i есть слово в А при $0 \leqslant i < j$, тогда как P_j не есть слово в А. Поэтому

(19) $\mathfrak{A}: P_{i-1} \vdash P_i$ $(0 < i < j)$ [(17), 2.20].

С другой стороны, алгорифм $\mathfrak{A}$ не может просто переводить слово P_{j-1} ни в какое слово. Действительно, если бы имелось такое слово T, что

(20) $\mathfrak{A}: P_{j-1} \vdash T$,

то T было бы словом в А и мы имели бы

$\mathfrak{C}: P_{j-1} \vdash T$ [(20), 2.14]

вопреки тому, что $\mathfrak{C} : P_{j-1} \vdash P_j$ [(17)], где P_j не есть слово в A [II. § 3.6.1]. В силу замкнутости алгорифма $\mathfrak{A}^*$, отсюда следует, что $\mathfrak{A}^*$ заключительно переводит P_{j-1} в некоторое слово T [§ 2.1.1]:

$$\mathfrak{A}^* : P_{j-1} \vdash \cdot\, T. \tag{21}$$

В силу (16), (19) и (21) алгорифм $\mathfrak{A}^*$ применим к P, что и требовалось доказать.

Условимся теперь в следующей терминологии. Если R, T, S — слова в A и $T \neq \Lambda$, то *образом вхождения*

$$R*T*S$$

в алфавите A будем называть вхождение

$$\alpha\,[R^-*[T^-*[S^-$$

в алфавите $\bar{A} \cup \{\alpha\}$. Кроме того, *образом вхождения*

$$**S$$

в алфавите A будем называть вхождение

$$*\alpha*[S^-$$

в алфавите $\bar{A} \cup \{\alpha\}$. Тем самым, образ определен для вхождений в алфавите A с непустой основой, а также для первых вхождений пустого слова в слова в этом алфавите.

2.23. *Образ вхождения в слово P есть вхождение в слово $\alpha\,[P^-$.*

2.24. *Образ вхождения непустого слова T есть вхождение слова $[T^-$.*

Это непосредственно следует из определения образа.

2.25. *Если P — слово в алфавите A, то всякое вхождение двойника непустого слова T в алфавите A в слово $\alpha\,[P^-$ есть образ некоторого вхождения слова T в слово P.*

В самом деле, пусть P — слово в A.

$$U*[T^-*W \tag{22}$$

— вхождение двойника непустого слова T в алфавите A в слово $\alpha\,[P^-$. Тогда

$$U\,[T^-W = \alpha\,[P^- \qquad \text{[I. § 4.2]}, \tag{23}$$

откуда следует, что непустое слово $U\,[T^-$ начинается буквой α. Так как $[T^-$ — слово в алфавите A, не содержащее букву α, этой буквой начинается U. Таким образом, существует такое слово X, что

$$U = \alpha X. \tag{24}$$

Имеем теперь

$$\alpha X[T^-W = \alpha\,[P^- \qquad \text{[(23), (24)]}, \tag{25}$$

$$X\,[T^-W = [P^- \qquad \text{[(25), I. § 3.9.3]}. \tag{26}$$

Так как $[P^-$ — слово в $\overline{A}$, X и W также суть слова в $\overline{A}$ [(26)]. Поэтому существуют такие слова R и S в A, что

(27) $$X = [R^-,$$

(28) $$W = [S^-.$$

Следовательно,

$$U * [T^- * W = \alpha [R^- * [T^- * [S^- \quad [(24), (27), (28)],$$

а это означает, что рассматриваемое вхождение (22) есть образ вхождения $R*T*S$ непустого слова T.

Наконец,

(29) $$[R^- [T^- [S^- = [P^- \quad [(26), (27), (28)],$$

(30) $$[RTS^- = [P^- \quad [(29), (5)],$$

$$RTS = P \quad [(30), 2.8],$$

т. е. $R*T*S$ есть вхождение в P. Таким образом, рассматриваемое вхождение есть образ некоторого вхождения T в P, что и оставалось доказать.

2.26. *Непустое слово T в алфавите* A *тогда и только тогда входит в слово P в этом алфавите, когда его двойник входит в слово* $\alpha [P^-$.

В самом деле, если T входит в P, то существует вхождение T в P [I. § 4.2.1]. Так как $T \neq \Lambda$, образом этого вхождения является некоторое вхождение $[T^-$ в $\alpha [P^-$ [2.23, 2.24]. Следовательно, двойник T входит в $\alpha [P^-$ [I. § 4.2.1].

Обратно, если $[T^-$ входит в $\alpha [P^-$, то существует вхождение $[T^-$ в $\alpha [P^-$ [I. § 4.2.1]. Согласно 2.25, это вхождение есть образ некоторого вхождения T в P. Следовательно, T входит в P [I. § 4.2.1], что и требовалось доказать.

2.27. *Если P — слово в алфавите* A *и вхождение K непустого слова T в P предшествует вхождению L слова T в P, то образ K предшествует образу L.*

В самом деле, пусть R и U означают соответственно левые крылья вхождений K и L. Если K предшествует L, то R есть собственное начало U [I. § 4.3]. Поэтому существует такое непустое слово X, что

(31) $$U = RX.$$

Имеем

$$\alpha [U^- = \alpha [R^- [X^- \quad [(31), (5)],$$

где $[X^- \neq \Lambda$. Следовательно, $\alpha [R^-$ есть собственное начало $\alpha [U^-$. Но, по определению образа, $\alpha [R^-$ и $\alpha [U^-$ суть соответственно левые крылья образов вхождений K и L. Следовательно, образ K предшествует образу L [I. § 4.3], что и требовалось доказать.

2.28. *Если непустое слово T входит в слово P в алфавите* A, *то образом первого вхождения T в P является первое вхождение* $[T^-$ *в* $\alpha [P^-$.

В самом деле, пусть K — первое вхождение T в P. Тогда образ K есть вхождение $[T^-$ в $\alpha [P^-$ [2.23, 2.24]. Рассмотрим теперь произ-

вольное, отличное от образа K, вхождение M слова $[T^-$ в слово $\alpha[P^-$. M есть образ некоторого вхождения L слова T в слово P [2.25]. $L \neq K$, так как образ L отличен от образа K. Так как K — первое вхождение T в P, K предшествует L. Поэтому образ K предшествует образу L [2.27], т. е. M. Таким образом, образ K предшествует всякому отличному от него вхождению $[T^-$ в $\alpha[P^-$, т. е. является первым вхождением $[T^-$ в $\alpha[P^-$, что и требовалось доказать.

2.29. *Пусть F — формула подстановки алгорифма $\mathfrak{B}'$, G — соответствующая формула системы $\overline{\mathfrak{B}}^{\beta}_{\alpha}$, P — слово в* A. *Левая часть F тогда и только тогда входит в P, когда левая часть G входит в $\alpha[P^-$.*

В самом деле, если левая часть F есть непустое слово, то левая часть G есть двойник этого слова [2.10], и утверждение леммы вытекает из 2.26. Если же левая часть F есть пустое слово, то левая часть G есть слово α [2.10]. Утверждение леммы верно и в этом случае, так как Λ входит в P, а α — в $\alpha[P^-$.

2.30. *Если в условиях предыдущей леммы левая часть F входит в P, то первое вхождение левой части G в $\alpha[P^-$ есть образ первого вхождения левой части F в P.*

В самом деле, пусть соблюдены условия предыдущей леммы и пусть левая часть F входит в P. Если левая часть F — непустое слово, то левая часть G есть двойник этого слова и утверждение леммы вытекает из 2.28. Если же левая часть F — пустое слово, то левая часть G есть слово α [2.10]. Первым вхождением левой части F в P является вхождение $**P$, а первым (и единственным) вхождением левой части G в $\alpha[P^-$ — вхождение $*\alpha*[P^-$. Так как $*\alpha*[P^-$ есть, согласно определению, образ $**P$, лемма доказана.

Докажем теперь некоторые леммы, связывающие работу алгорифма $\mathfrak{C}$ с работой алгорифма $\mathfrak{B}'$.

2.31. *Если $\mathfrak{B}' : P \vdash Q$, то $\mathfrak{C} : \alpha[P^- \vdash \alpha[Q^-$.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{B}' : P \vdash Q$. Тогда P есть слово в A, так как $\mathfrak{B}'$ — алгорифм в A. Среди формул подстановок алгорифма $\mathfrak{B}'$ имеются формулы с левой частью, входящей в P. Пусть F — первая из них. Она простая, так как $\mathfrak{B}' : P \vdash Q$. Пусть A и B означают соответственно левую и правую части формулы F. Пусть $R*A*S$ — первое вхождение A в P.

Так как алгорифм $\mathfrak{B}'$ в применении к P предписывает подставить B вместо $R*A*S$ и $\mathfrak{B}' : P \vdash Q$, имеем

$$Q = RBS \qquad \text{[I. § 4.5]}. \tag{32}$$

Пусть далее G — формула системы $\overline{\mathfrak{B}}^{\beta}_{\alpha}$, соответствующая F. Ее левая часть входит в $\alpha[P^-$, так как левая часть F входит в P [2.29]. С другой стороны, левые части формул системы $\overline{\mathfrak{B}}^{\beta}_{\alpha}$, стоящих выше G, не входят в $\alpha[P^-$, так как эти формулы соответствуют формулам схемы $\mathfrak{B}'$, стоящим выше F, а левые части последних не входят в P [2.29]. Таким образом, G есть первая формула системы $\overline{\mathfrak{B}}^{\beta}_{\alpha}$ с левой частью, входящей в $\alpha[P^-$.

Левые части формул, представленных первыми семью строками схемы (3), также не входят в слово $\alpha[P^-$, так как каждая из этих левых частей содержит букву алфавита $A \cup \{\beta\}$, не входящую в $\alpha[P^-$. Следовательно, G есть первая формула подстановки алгорифма $\mathfrak{C}$ с левой частью, входящей в $\alpha[P^-$. В применении к этому слову алго-

рифм $\mathfrak{C}$ предписывает поэтому подставить правую часть формулы G вместо первого вхождения ее левой части. Это вхождение есть образ первого вхождения левой части F в P [2.30], т. е. вхождения $R*A*S$. Таким образом, алгорифм $\mathfrak{C}$ в применении к слову $\alpha[P^-$ предписывает подставить правую часть G вместо образа вхождения $R*A*S$. В дальнейшем будем различать два случая: $A\neq\Lambda$ и $A=\Lambda$.

а. $A\neq\Lambda$. В этом случае образом $R*A*S$ является вхождение $\alpha[R^-*[A^-*[S^-$, а правой частью формулы G является двойник правой части формулы F [2.11], т. е. слово $[B^-$. Принимая во внимание, что формула G простая [2.9[, имеем, следовательно,

$$\mathfrak{C}:\alpha[P^-\vdash\alpha[R^-[B^-[S^- \qquad \text{[I. § 4.5]}$$
$$=\alpha[RBS^- \qquad \text{[(5)]}$$
$$=\alpha[Q^- \qquad \text{[(32)]}.$$

б. $A=\Lambda$. В этом случае

$$R=\Lambda, \tag{33}$$

так как $R*A*S$ — первое вхождение A в P [I. § 4.3.8]. Образом вхождения $R*A*S$ является поэтому вхождение $*\alpha*[S^-$, а правой частью формулы G является слово $\alpha[B^-$ [2.11]. Принимая во внимание, что формула G простая [2.9], имеем, следовательно,

$$\mathfrak{C}:\alpha[P^-\vdash\alpha[B^-[S^- \qquad \text{[I. § 4.5]}$$
$$=\alpha[BS^- \qquad \text{[(5)]}$$
$$=\alpha[RBS^- \qquad \text{[(33)]}$$
$$=\alpha[Q^- \qquad \text{[(32)]}.$$

Таким образом, в обоих случаях $\mathfrak{C}:\alpha[P^-\vdash\alpha[Q^-$, что и требовалось доказать.

2.32. *Если* $\mathfrak{B}:P\vdash\cdot Q$, *то существуют такие слова* R *и* T, *что*

$$Q=RT,$$
$$\mathfrak{C}:\alpha[P^-\vdash\alpha[R^-\beta[T^-.$$

В самом деле, пусть $\mathfrak{B}:P\vdash\cdot Q$. Как в доказательстве предыдущей леммы, убеждаемся, что P есть слово в A. Рассмотрим опять первую среди формул подстановок алгорифма $\mathfrak{B}$, имеющих левые части, входящие в P. Пусть F означает эту формулу. На этот раз F — заключительная формула, так как $\mathfrak{B}:P\vdash\cdot Q$. Пусть A и B означают соответственно ее левую и правую части. Пусть $R*A*S$ — первое вхождение A в P. Как в доказательстве предыдущей леммы, имеем (32).

Пусть G — формула системы $\overline{\mathfrak{B}}_2^{\beta}$, соответствующая F. Как в доказательстве предыдущей леммы, убеждаемся, что в применении к слову $\alpha[P^-$ алгорифм $\mathfrak{C}$ предписывает подставить правую часть формулы G вместо образа вхождения $R*A*S$. Опять различаем два случая: $A\neq\Lambda$ и $A=\Lambda$.

а. $A \neq \Lambda$. В этом случае образом $R*A*S$ является вхождение $\alpha[R^-*[A^-*[S^-$, а правой частью формулы G — слово $\beta[B^-$ [2.12]. Принимая во внимание, что формула G простая [2.9], имеем, следовательно,

$$\mathfrak{C}: \alpha[P^- \vdash \alpha[R^-\beta[B^-[S^-$$
$$= \alpha[R^-\beta[BS^- \qquad [(5)].$$

б. $A = \Lambda$. В этом случае имеем равенство (33), так как $R*A*S$ — первое вхождение A в P [I. § 4.3.8]. Образом вхождения $R*A*S$ является поэтому вхождение $*\alpha*[S^-$, а правой частью формулы G — слово $\alpha\beta[B^-$ [2.12]. Принимая во внимание, что формула G обычная [2.9], имеем, следовательно,

$$\mathfrak{C}: \alpha[P^- \vdash \alpha\beta[B^-[S^- \qquad [\text{I. § 4.5}]$$
$$= \alpha\beta[BS^- \qquad [(5)]$$
$$= \alpha[R^-\beta[BS^- \qquad [(33), (4)].$$

Таким образом, в обоих случаях

$$\mathfrak{C}: \alpha[P^- \vdash \alpha[R^-\beta[BS^- . \tag{34}$$

Согласно (32) и (34), имеем $Q = RT$, $\mathfrak{C}: \alpha[P^- \vdash \alpha[R^-\beta[T^-$, где $T = BS$, что и доказывает лемму.

2.33. *Если R и S — слова в* A, *то*

$$\mathfrak{C}: \alpha[R^-\beta[S^- \models \alpha\beta[RS^- .$$

В самом деле, левые части формул подстановок, представленных строками схемы (3), стоящими выше строки

$$\bar{\xi}\beta \to \beta\bar{\xi} \quad (\xi \in A), \tag{35}$$

содержат буквы алфавита A, не входящие в слово $\alpha[R^-\beta[S^-$. Строка же (35), очевидно, может быть переписана в виде

$$\eta\beta \to \beta\eta \quad (\eta \in \overline{A}).$$

Так как α и $[S^-$ суть слова в алфавите $Б \setminus \{\beta\}$, а $[R^-$ — слово в $\overleftarrow{A}$, применима лемма II. § 4.6.2, согласно которой

$$\mathfrak{C}: \alpha[R^-\beta[S^- \models \alpha\beta[R^-[S^-$$
$$= \alpha\beta[RS^- \qquad [(5)],$$

что и требовалось доказать.

2.34. *Если* $\mathfrak{B}: P \vdash \cdot Q$, *то* $\mathfrak{C}: \alpha[P^- \models \alpha\beta[Q^-$.

Доказательство опирается на леммы 2.32 и 2.33. Оно проводится аналогично доказательству леммы 2.17.

2.35. *Если* $\mathfrak{B}: P \models Q$, *то* $\mathfrak{C}: \alpha[P^- \models \alpha[Q^-$.

Это следует из лемым 2.31.

2.36. *Если* $\mathfrak{B}: P \models \cdot Q$, *то* $\mathfrak{C}: \alpha[P^- \models \alpha\beta[Q^-$.

Доказательство опирается на леммы 2.35, 2.34 и II. § 3.6.2. Оно проводится аналогично доказательству леммы 2.19.

Следующие три леммы касаются одного алгорифма $\mathfrak{C}$.

2.37. *Если* Q — *слово в* А, *то* $\mathfrak{C} : \alpha Q \models \alpha\,[Q^{-}$.

В самом деле, при $Q = \Lambda$ лемма верна [(4)]. Пусть теперь

$$Q = \xi_1 \ldots \xi_k,$$

где ξ_i — буквы алфавита А. Положим

$$Q_i = \alpha\overline{\xi}_1 \ldots \overline{\xi}_i\xi_{i+1} \ldots \xi_k \quad (0 \leqslant i \leqslant k). \tag{36}$$

Очевидно, что левые части формул подстановок, представленных первой строкой схемы (3), не входят ни в одно из слов Q_i. Что касается левых частей формул, представленных второй строкой этой схемы, то они также не входят ни в одно из слов $Q_i (0 < i \leqslant k)$. В слово же Q_0, равное $\alpha\xi_1 \ldots \xi_k$, входит одна и только одна из этих левых частей, а именно $\alpha\xi_1$. Она имеет единственное вхождение в это слово, а именно $*\alpha\xi_1 * \xi_2 \ldots \xi_k$. Алгорифм $\mathfrak{C}$ в применении к Q_0 предписывает поэтому подставить правую часть $\alpha\overline{\xi}_1$ соответствующей формулы подстановки $\alpha\xi_1 \to \alpha\overline{\xi}_1$ вместо этого вхождения, что дает слово $\alpha\overline{\xi}_1\xi_2 \ldots \xi_k$, т. е. Q_1 [(36)]. Так как примененная формула простая, имеем

$$\mathfrak{C} : Q_0 \vdash Q_1. \tag{37}$$

В каждое из слов Q_{i-1} $(1 < i \leqslant k)$ входит одна и только одна из левых частей формул, представленных третьей строкой схемы (3), а именно $\overline{\xi}_{i-1}\xi_i$ [(36)]. Она имеет единственное вхождение в это слово, а именно $\alpha\overline{\xi}_1 \ldots \overline{\xi}_{i-2} * \overline{\xi}_{i-1}\xi_i * \xi_{i+1} \ldots \xi_k$. Алгорифм $\mathfrak{C}$ в применении к Q_{i-1} предписывает подставить правую часть $\overline{\xi}_{i-1}\overline{\xi}_i$ соответствующей формулы подстановки $\overline{\xi}_{i-1}\xi_i \to \overline{\xi}_{i-1}\overline{\xi}_i$ вместо этого вхождения, что дает слово Q_i [(36)]. Так как примененная формула простая, имеем

$$\mathfrak{C} : Q_{i-1} \vdash Q_i \quad (1 < i \leqslant k). \tag{38}$$

В силу (37) и (38)

$$\mathfrak{C} : Q_0 \models Q_k$$

и, так как

$$Q_0 = \alpha Q, \quad Q_k = \alpha\,[Q^{-} \qquad [(36),\ \text{I. § 3.6 (4)}],$$

имеем

$$\mathfrak{C} : \alpha Q \models \alpha\,[Q^{-},$$

что и требовалось доказать.

2.38. *Если* Q — *слово в* А, *то* $\mathfrak{C} : \alpha\beta\,[Q^{-} \models \alpha\beta Q$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.37.

2.39. *Если* Q — *слово в* А, *то* $\mathfrak{C} : \alpha\beta Q \vdash \cdot Q$.

В самом деле, левые части формул подстановок, представленных первыми шестью строками схемы (3), не входят тогда в $\alpha\beta Q$: слова вида $\xi\alpha$ не входят туда, так как α не входит в βQ; слова вида $\alpha\xi$ $(\xi \in \text{А})$ не входят туда, так как $\beta\urcorner \in \text{А}$ и α не входит в βQ; слова видов $\overline{\xi}\eta$, $\overline{\xi}\beta$, $\beta\overline{\xi}$, $\overline{\xi}\overline{\eta}$ $(\xi, \eta \in \text{А})$ не входят в $\alpha\beta Q$, так как туда не входят буквы алфавита А. Левая часть следующей формулы подстановки

$$\alpha\beta \to \cdot \tag{39}$$

входит, однако, в $\alpha\beta Q$, и $*\alpha\beta * Q$ есть ее первое (и единственное) вхождение в $\alpha\beta Q$. Алгорифм $\mathfrak{C}$ в применении к $\alpha\beta Q$ предписывает поэтому подставить вместо этого вхождения правую часть формулы (39), т. е. пустое слово. Так как формула (39) заключительная, $\mathfrak{C} : \alpha\beta Q \vdash \cdot Q$, что и требовалось доказать.

(Заметим между прочим, что (39) есть единственная заключительная формула алгорифма $\mathfrak{C}$).

2.40. *Если* $\mathfrak{B}' : P \models \cdot Q$, *то* $\mathfrak{C} : \alpha P \models \cdot Q$.

В самом деле, тогда P и Q — слова в А, так как $\mathfrak{B}'$ — алгорифм в А. Поэтому

$$\mathfrak{C} : \alpha P \models \alpha\,[P^- \qquad [2.37]$$

$$\models \alpha\beta\,[Q^- \qquad [2.36]$$

$$\models \alpha\beta Q \qquad [2.38]$$

$$\vdash \cdot Q \qquad [2.39]$$

и, следовательно, $\mathfrak{C} : \alpha P \models \cdot Q$, что и требовалось доказать.

2.41. *Если* P *и* Q — *такие слова в алфавите* А, *что* $\mathfrak{C} : \alpha\,[P^- \vdash \alpha\,[Q^-$, *то* $\mathfrak{B}' : P \vdash Q$.

Пусть, в самом деле,

$$\mathfrak{C} : \alpha\,[P^- \vdash \alpha\,[Q^-, \qquad (40)$$

где P и Q — слова в А. Так как алгорифм $\mathfrak{B}'$ замкнут [§ 2.2.1], слово P поддается ему [§ 2.1.1]. Поэтому существует такое слово R, что имеет место одно из двух

$$\mathfrak{B}' : P \vdash R \qquad (41)$$

или

$$\mathfrak{B}' : P \vdash \cdot R.$$

Если бы имело место второе, то, согласно 2.32, существовали бы такие слова S и T, что

$$\mathfrak{C} : \alpha\,[P^- \vdash \alpha\,[S^-\beta\,[T^-, \qquad (42)$$

и мы имели бы

$$\alpha\,[Q^- = \alpha\,[S^-\beta\,[T^- \qquad (43)\ [(40), (42), \text{II. § 3.6.1}],$$

$$[Q^- = [S^-\beta\,[T^- \qquad [(43), \text{I. § 3.9.3}],$$

что невозможно, так как β не входит в $[Q^-$.

Следовательно, имеет место (41) и

$$\mathfrak{C} : \alpha\,[P^- \vdash \alpha\,[R^- \qquad (44)\ [(41), 2.31],$$

$$\alpha\,[Q^- = \alpha\,[R^- \qquad (45)\ [(40), (44), \text{II. § 3.6.1}],$$

$$[Q^- = [R^- \qquad (46)\ [(45), \text{I. § 3.9.3}],$$

$$Q = R \qquad (47)\ [(46), 2.8],$$

$$\mathfrak{B}' : P \vdash Q \qquad [(41), (47)],$$

что и требовалось доказать.

2.42. *Если* P — *слово в алфавите* A, *то* $\mathfrak{C}$ *просто переводит* $\alpha[P^-$ *в некоторое слово.*

В самом деле, пусть P — слово в A. Тогда, в силу замкнутости нормального алгорифма $\mathfrak{B}^*$ в алфавите A [§ 2.2.1], этот алгорифм переводит или заключительно переводит P в некоторое слово [§ 2.1.1]. Согласно леммам 2.31 и 2.32, как в первом, так и во втором случае $\mathfrak{C}$ просто переводит $\alpha[P^-$ в некоторое слово, что и требовалось доказать.

2.43. *Если слово* P *в* A *таково, что алгорифм* $\mathfrak{C}$ *применим к* $\alpha[P^-$, *то алгорифм* $\mathfrak{B}^*$ *применим к* P.

В самом деле, пусть P — такое слово в A, что алгорифм $\mathfrak{C}$ применим к $\alpha[P^-$, и пусть $\mathfrak{C}(\alpha[P^-]) = Q$. Тогда, в силу замкнутости алгорифма $\mathfrak{C}$ [2.7], имеем $\mathfrak{C} : \alpha[P^- \models \cdot Q$ [§ 2.1.3]. Поэтому, согласно II. § 3.6, имеется ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n (n > 0)$ такой, что

$$P_0 = \alpha[P^-, \tag{48}$$

$$P_n = Q,$$

$$\mathfrak{C} : P_{i-1} \vdash P_i \ (0 < i < n), \tag{49}$$

$$\mathfrak{C} : P_{n-1} \vdash \cdot P_n. \tag{50}$$

P_{n-1} не есть слово вида $\alpha[R^-$, где R — слово в A [2.42, (50), II. § 3.6.1]. Таким образом, среди чисел $0, 1, \ldots, n-1$ имеются числа i такие, что P_i не имеет вида $\alpha[R^-$, где R — слово в A. Пусть k является наименьшим из этих чисел. Тогда $k > 0$, так как P_0 имеет этот вид [(48)]. P_i есть слово вида $\alpha[R^-$ при $0 \leqslant i < k$, тогда как P_k не имеет этого вида. Таким образом, существуют такие слова R_i в A $(0 \leqslant i < k)$, что

$$P_i = \alpha[R_i^- \ (0 \leqslant i < k), \tag{51}$$

причем

$$R_0 = P \qquad [(48)]. \tag{52}$$

Имеем

$$\mathfrak{C} : \alpha[R_{i-1}^- \vdash \alpha[R_i^- \ (0 < i < k) \qquad [(49), (51)], \tag{53}$$

$$\mathfrak{B}^* : R_{i-1} \vdash R_i \ (0 < i < k) \qquad [(53), 2.41]. \tag{54}$$

С другой стороны, алгорифм $\mathfrak{B}^*$ не может просто переводить слово R_{k-1} ни в какое слово. Действительно, если бы имелось такое слово S, что

$$\mathfrak{B}^* : R_{k-1} \vdash S, \tag{55}$$

то S было бы словом в A и мы имели бы

$$\mathfrak{C} : \alpha[R_{k-1}^- \vdash \alpha[S^- \qquad [(55), 2.31], \tag{56}$$

$$\mathfrak{C} : P_{k-1} \vdash \alpha[S^- \qquad [(56), (51)], \tag{57}$$

$$P_k = \alpha[S^- \qquad [(49), (57), \text{II. § 3.6.1}],$$

что, однако, невозможно, согласно определению k.

Принимая во внимание замкнутость алгорифма $\mathfrak{B}^*$, заключаем отсюда, что $\mathfrak{B}^*$ заключительно переводит R_{k-1} в некоторое слово S [§ 2.1.1]:

(58) $$\mathfrak{B}^* : R_{k-1} \vdash \cdot S.$$

В силу (52), (54) и (58), алгорифм $\mathfrak{B}^*$ применим к P, что и требовалось доказать.

2.44. *Если слово P в алфавите* A *таково, что алгорифм* $\mathfrak{C}$ *применим к* αP, *то алгорифм* $\mathfrak{B}^*$ *применим к* P.

В самом деле, тогда алгорифм $\mathfrak{C}$ применим к α [P^- [2.37, II. § 3.7.8], откуда следует, что алгорифм $\mathfrak{B}^*$ применим к P [2.43].

2.45. *Если имеет смысл выражение* $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))$, *то алгорифм* $\mathfrak{C}$ *применим к слову* P *и*

$$\mathfrak{C}(P) = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P)).$$

В самом деле, тогда алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P, а алгорифм $\mathfrak{B}$ — к слову $\mathfrak{A}(P)$. Положим

(59) $$\mathfrak{A}(P) = Q,$$

(60) $$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P)) = R.$$

Имеем

(61) $\mathfrak{B}(Q) = R$ [(59), (60)],

(62) $\mathfrak{A}^*(P) = Q$ [(59), § 2.2.10],

(63) $\mathfrak{B}^*(Q) = R$ [(61), § 2.2.10],

(64) $\mathfrak{A}^* : P \models \cdot Q$ [(62), § 2.2.1, § 2.1.3],

(65) $\mathfrak{B}^* : Q \models \cdot R$ [(63), § 2.2.1, § 2.1.3],

$\mathfrak{C} : P \models \alpha Q$ [(64), 2.19]

$\models \cdot R$ [(65), 2.40].

Следовательно,

(66) $\mathfrak{C} : P \models \cdot R$

$\mathfrak{C}(P) = R$ [(66), II. § 3.6.3]

$= \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))$ [(60)],

что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства теоремы нам остается теперь доказать, что выражение $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))$ имеет смысл для слова P в алфавите A, коль скоро имеет смысл $\mathfrak{C}(P)$, т. е. коль скоро алгорифм $\mathfrak{C}$ применим к слову P.

2.46. *Если алгорифм* $\mathfrak{C}$ *применим к слову* P *в алфавите* A, *то имеет смысл выражение* $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))$.

В самом деле, тогда алгорифм $\mathfrak{A}^*$ применим к P [2.22]. Положим

(67) $$\mathfrak{A}^*(P) = Q.$$

Тогда Q есть слово в А, так как $\mathfrak{A}'$ — алгорифм в А. Имеем далее

(68) $\mathfrak{A}' : P \models \cdot Q$ [(67), § 2.2.1, § 2.1.3],

(69) $\mathfrak{C} : P \models \alpha Q$ [(68), 2.19].

Так как, согласно предположению, алгорифм $\mathfrak{C}$ применим к P, он применим и к αQ [(69), II. § 3.7.8]. Отсюда следует, что алгорифм $\mathfrak{B}'$ применим к слову Q [2.44]. Положим

(70) $\mathfrak{B}'(Q) = R.$

Тогда

(71) $\mathfrak{A}(P) = Q$ [(67), § 2.2.11],

(72) $\mathfrak{B}(Q) = R$ [(70), § 2.2.11],

$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P)) = R$ [(71), (72)].

Следовательно, $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))$ имеет смысл, что и требовалось доказать.

Доказательство последней леммы завершает доказательство теоремы 2.1.

3. Докажем теперь теорему композиции в общей форме.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные нормальные алгорифмы. Пусть Б и В означают соответственно их алфавиты и пусть

(1) $\text{А} = \text{Б} \cup \text{В}.$

А является расширением каждого из алфавитов Б и В. Поэтому существуют формальные распространения алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ на алфавит А [§ 1.5.3]. Пусть $\mathfrak{D}$ означает формальное распространение $\mathfrak{A}$ на А, $\mathfrak{E}$ — формальное распространение $\mathfrak{B}$ на А. $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ суть нормальные алгорифмы в А [§ 1.5.1]. К ним применима доказанная теорема 2.1, согласно которой может быть построен такой нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над А, что

(2) $\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{E}(\mathfrak{D}(P))$ (P — слово в А).

Покажем, что так построенный нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над А удовлетворяет условию 1(1).

В самом деле, так как $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ суть соответственно формальные распространения нормальных алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, имеем, согласно § 1.5.4,

(3) $\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{D}(P),$

(4) $\mathfrak{B}(Q) \simeq \mathfrak{E}(Q).$

Следовательно, для слов P в А

$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{D}(P))$ [(2), (4)]

$\simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))$ [(3)],

и, таким образом, условие 1(1) выполнено, что и требовалось доказать.

4. Проведенное только что [2, 3] построение дает для любых двух данных нормальных алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над объединением А их алфавитов, удовлетворяющий условию 1(1). Единственный и, очевидно, несущественный элемент произвола в этом построении — это «новые» буквы, т. е. буквы, принадлежащие алфавиту

алгорифма $\mathfrak{C}$, но не принадлежащие A. Эти буквы, т. е. буквы, играющие роль α, β и двойников, могут быть выбраны произвольно, лишь бы они были отличны друг от друга и не принадлежали алфавиту A. Роль же их в построенном алгорифме $\mathfrak{C}$ вполне определяется схемой 2 (3), где только роль $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ играют формальные распространения $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{C}$ этих алгорифмов.

Нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$, построенный как только что описано и в существенном однозначно определяемый нормальными алгорифмами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, мы будем называть *нормальной композицией* алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ мы будем обозначать символом

$$\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}.$$

В соответствии с этим равенство

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}$$

будет означать, что $\mathfrak{C}$ есть нормальная композиция алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Следующие утверждения резюмируют предыдущее.

4.1. *Для любых двух нормальных алгорифмов* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *существует нормальная композиция* $\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}$.

4.2. *Нормальная композиция нормальных алгорифмов* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *есть нормальный алгорифм над объединением алфавитов этих алгорифмов, определенный в существенном однозначно.*

4.3. *Для любых двух нормальных алгорифмов* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$

$$(\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})(P) \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P)) \quad (P \text{ — слово в A}),$$

где A *означает объединение алфавитов алгорифмов* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$.

5. Определим теперь индукцией по n нормальную композицию

$$\mathfrak{B}_n \circ \mathfrak{B}_{n-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{B}_1$$

n произвольных нормальных алгорифмов $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ $(n \geqslant 2)$.

Для $n = 2$ она уже определена. Предполагая ее определенной для $n = k$, где $k \geqslant 2$, определим ее для $n = k + 1$ равенством

$$\mathfrak{B}_{k+1} \circ \mathfrak{B}_k \circ \ldots \circ \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_{k+1} \circ (\mathfrak{B}_k \circ \ldots \circ \mathfrak{B}_1),$$

означающим, что нормальной композицией алгорифмов $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{B}_{k+1}$ считается нормальная композиция алгорифмов $\mathfrak{B}_k \circ \ldots \circ \mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_{k+1}$.

На основе утверждений 4.1—4.3 индукцией по n легко доказываются следующие утверждения.

5.1. *Для любого* $n \geqslant 2$ *и для любых нормальных алгорифмов* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ *существует нормальная композиция* $\mathfrak{B}_n \circ \ldots \circ \mathfrak{B}_1$.

5.2. *Нормальная композиция нормальных алгорифмов* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ $(n \geqslant 2)$ *есть нормальный алгорифм над объединением алфавитов этих алгорифмов, определенный в существенном однозначно.*

5.3. *Для любых нормальных алгорифмов* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ $(n \geqslant 2)$

$$(\mathfrak{B}_n \circ \ldots \circ \mathfrak{B}_1)(P) \simeq \mathfrak{B}_n(\mathfrak{B}_{n-1}(\ldots(\mathfrak{B}_1(P)\ldots)) \quad (P \text{ — слово в A}),$$

где A *означает объединение алфавитов алгорифмов* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$.

6. Покажем теперь, что принцип нормализации алгорифмов [II. § 5. 1] равносилен следующему утверждению.

6.1. *Всякий алгорифм в алфавите* А *эквивалентен относительно* А *некоторому нормальному алгорифму над* А [ср. II. § 5.9].

Допустим, что утверждение **6.1** верно, и рассмотрим какой-нибудь алгорифм $\mathfrak{A}$ в алфавите А. Покажем, что $\mathfrak{A}$ вполне эквивалентен некоторому нормальному алгорифму над А.

Согласно **6.1**, имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над А, эквивалентный $\mathfrak{A}$ относительно А. Обозначим через Б его алфавит. Имеем

(1) $$А \subset Б.$$

Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в Б со схемой

$$\{\xi \to \xi \ (\xi \in Б \setminus А).$$

Очевидно, что

(2) $$\mathfrak{C}(P) = P \ (P — \text{слово в А})$$

и что $\mathfrak{C}$ не применим ни к какому слову в Б, не являющемуся словом в А.

Построим алгорифм $\mathfrak{D}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$:

(3) $$\mathfrak{D} = \mathfrak{C} \circ \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{D}$ есть нормальный алгорифм над Б [§ 3.4.2] и

(4) $$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{C}(\mathfrak{B}(P)) \ (P — \text{слово в Б}) \qquad [\S\ 3.4.3, (3)]$$

Отсюда следует, что

(5) $$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{B}(P),$$

если P и $\mathfrak{B}(P)$ суть слова в А [(4), (2)].

Покажем, что $\mathfrak{D}$ есть искомый нормальный алгорифм над А, вполне эквивалентный $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{D}$ есть алгорифм над А ввиду **(1)**.

Если алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P в А, то P и $\mathfrak{A}(P)$ суть слова в А, так как $\mathfrak{A}$ — алгорифм в А. Поэтому тогда и $\mathfrak{B}$ применим к P, и мы имеем

$$\mathfrak{A}(P) = \mathfrak{B}(P).$$

В силу **(5)**, отсюда следует, что

(6) $$\mathfrak{A}(P) = \mathfrak{D}(P).$$

Таким образом, равенство **(6)** имеет место, коль скоро алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P в А.

Допустим теперь, что алгорифм $\mathfrak{D}$ применим к слову P в А. Тогда и алгорифм $\mathfrak{B}$ применим к P [(4)], а алгорифм $\mathfrak{C}$ — к $\mathfrak{B}(P)$. Поэтому и $\mathfrak{B}(P)$ есть слово в А. Но тогда и алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к P ввиду эквивалентности алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ относительно А. Следовательно, алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P в А, коль скоро к нему применим алгорифм $\mathfrak{D}$.

Мы доказали таким образом, что алгорифм $\mathfrak{D}$ вполне эквивалентен алгорифму $\mathfrak{A}$ относительно алфавита А. Тем самым мы доказали, что принцип нормализации вытекает из утверждения **6.1**. Обратное очевидно. Следовательно, принцип нормализации равносилен утверждению **6.1**, что и требовалось доказать.

§ 4. Объединение алгорифмов

1. Часто приходится совместно рассматривать результаты работы двух или нескольких алгорифмов над одними и теми же исходными данными. В этом случае полезным является построение системы всех этих результатов, которая может, например, сама служить в качестве исходного данного при работе какого-нибудь другого алгорифма.

Например, если нам уже даны алгорифмы вычисления значений функций $(x+2)$ и $(x+3)$ для натуральных значений переменной x, то алгорифм вычисления значений функций

(1) $$(x+2)\times(x+3)$$

можно построить как следующее предписание: исходя из произвольно данного натурального числа N, вычислить числа $(N+2)$ и $(N+3)$ с помощью двух данных алгорифмов, построить пару этих чисел и применить к ней алгорифм умножения. Первые два этапа этого предписания образуют алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в пару чисел $(N+2)*(N+3)$. Композиция этого алгорифма с алгорифмом умножения составляет искомый алгорифм вычисления значений функции (1).

Вообще, если даны алгорифмы $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ в алфавите А, не содержащем букву γ, то может оказаться целесообразным построить следующее предписание: исходя из произвольного слова P в А, применить к нему каждый из алгорифмов $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ и составить систему

$$\mathfrak{B}_1(P)\gamma\mathfrak{B}_2(P)\ldots\gamma\mathfrak{B}_n(P)$$

получаемых при этом слов $\mathfrak{B}_1(P), \ldots, \mathfrak{B}_n(P)$. Это предписание, очевидно, составляет некоторый алгорифм в алфавите $\text{А}\cup\{\gamma\}$ — «объединение» данных алгорифмов $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$.

Естественно спросить, является ли объединение нормализуемых алгорифмов также нормализуемым алгорифмом? Мы, как легко убедиться, могли бы дать утвердительный ответ на этот вопрос, если бы нам удалось доказать следующую теорему.

1.1. Теорема объединения. *Пусть* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n\ (n\geqslant 2)$ — *нормальные алгорифмы;* А — *объединение их алфавитов;* γ — *произвольная буква. Тогда может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{C}$ *над* $\text{А}\cup\{\gamma\}$, *что*

(2) $$\mathfrak{C}(P)\simeq\mathfrak{B}_1(P)\gamma\mathfrak{B}_2(P)\ldots\gamma\mathfrak{B}_n(P)\quad(P\text{ — слово в }\text{А}\cup\{\gamma\}).$$

2. Доказательство этой теоремы составляет главное содержание § 4. Мы начнем с доказательства следующей теоремы.

2.1. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *в алфавите* А, *может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{C}$ *над* А, *что*

(1) $$\mathfrak{C}(P)\simeq\mathfrak{A}(P)\mathfrak{B}(P)\quad(P\text{ — слово в А}).$$

Для доказательства введем алфавит $\overline{\text{А}}$ двойников букв алфавита А, как в доказательстве теоремы § 3.2.1. Двойника буквы ξ будем попрежнему обозначать через $\overline{\xi}$, двойника слова P — через $\overline{P}$. Положим $\text{Б}=\text{А}\cup\overline{\text{А}}$, и пусть $\text{А}=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — попарно различные буквы.

Введем следующие нормальные алгорифмы над А:

(2) $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}^{\text{А, } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}_{\text{Б, } \alpha_1\bar{\alpha}_1, \alpha_2\bar{\alpha}_2, \ldots, \alpha_n\bar{\alpha}_n}$ [II. § 4.14];

(3) $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}^{\text{Б, } \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n}_{\text{А, } \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n}$ [II. § 4.14];

(4) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_{\text{А, } \bar{\text{А}}}$ [II. § 4.16];

(5) $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_{\bar{\text{А}}, \text{ А}}$ [II. § 4.16];

$\overline{\mathfrak{A}}$ — нормальный алгорифм в $\bar{\text{А}}$, схема которого получается из схемы алгорифма $\mathfrak{A}$ путем замены каждой буквы ее двойником; $\overline{\mathfrak{A}}_1$ — естественное распространение алгорифма $\overline{\mathfrak{A}}$ на алфавит Б; $\mathfrak{B}_1$ — естественное распространение алгорифма $\mathfrak{B}$ на алфавит Б. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\overline{\mathfrak{A}}_1$ и $\mathfrak{K}_2$:

(6) $$\mathfrak{C} = \mathfrak{K}_2 \circ \overline{\mathfrak{A}}_1 \circ \mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{B}_1 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{K}_1.$$

Так как $\mathfrak{B}_1$ есть алгорифм над А, $\mathfrak{C}$ есть нормальный алгорифм над А [§ 3.5.2]. Покажем, что для $\mathfrak{C}$ имеет место условное равенство (1). Предварительно докажем некоторые леммы. P означает в них произвольное слово в алфавите А.

2.2. $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{K}_1(P)) = P\,[P^-$.

При $P = \Lambda$ это равенство верно, так как $[\Lambda^- = \Lambda$, $\mathfrak{K}_1(\Lambda) = \Lambda$ и $\mathfrak{L}_1(\Lambda) = \Lambda$ [(2), (4)].

Пусть теперь

(7) $$P = \eta_1 \ldots \eta_k,$$

где η_i — буквы алфавита А. Тогда

(8) $$\mathfrak{K}_1(P) = \eta_1\bar{\eta}_1 \ldots \eta_k\bar{\eta}_k \qquad [(7), (2)],$$

$$[\mathfrak{K}_1(P)^{\text{А}} = \eta_1 \ldots \eta_k \qquad [(8), \text{II. § 4.14}]$$

(9) $$= P \qquad [(7)],$$

$$[\mathfrak{K}_1(P)^{\bar{\text{А}}} = \bar{\eta}_1 \ldots \bar{\eta}_k \qquad [(8), \text{II. § 4.14}]$$

(10) $$= [P^- \qquad [(7)],$$

$$\mathfrak{L}_1(\mathfrak{K}_1(P)) = [\mathfrak{K}_1(P)^{\text{А}}\,[\mathfrak{K}_1(P)^{\bar{\text{А}}} \qquad [(4), \text{II. § 4.16 (14)}]$$

$$= P\,[P^- \qquad [(9), (10)],$$

что и требовалось доказать.

2.3. $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{K}_1(P))) \simeq \mathfrak{B}(P)\,[P^-$.

В самом деле, так как $\mathfrak{B}_1$ — естественное распространение $\mathfrak{B}$ на Б, имеем

$$\mathfrak{B}_1(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{K}_1(P))) \simeq \mathfrak{B}_1(P[P^-) \qquad [2.2]$$

$$\simeq \mathfrak{B}(P)[P^- \qquad [\S\ 1.\ 2(1)].$$

2.4. $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{B}_1(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{K}_1(P)))) \simeq [P^-\mathfrak{B}(P)$.

В самом деле,

$$\mathfrak{L}_2(\mathfrak{B}_1(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{K}_1(P)))) \simeq \mathfrak{L}_2(\mathfrak{B}(P)[P^-) \qquad [2.3]$$

$$\simeq [P^-\mathfrak{B}(P) \qquad [(5).\ \S\ 4.16.12].$$

2.5. $\overline{\mathfrak{A}}([P^-) \simeq [\mathfrak{A}(P)^-$.

Это непосредственно следует из определения алгорифма $\overline{\mathfrak{A}}$.

2.6. $\overline{\mathfrak{A}}_1(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{B}_1(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{K}_1(P))))) \simeq [\mathfrak{A}(P)^-\mathfrak{B}(P)$.

В самом деле, так как $\overline{\mathfrak{A}}_1$ — естественное распространение $\overline{\mathfrak{A}}$ на Б, имеем

$$\overline{\mathfrak{A}}_1(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{B}_1(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{K}_1(P))))) \simeq \overline{\mathfrak{A}}_1([P^-\mathfrak{B}(P)) \qquad [2.4].$$

$$\simeq \overline{\mathfrak{A}}([P^-)\mathfrak{B}(P) \qquad [\S\ 1.2(1)]$$

$$\simeq [\mathfrak{A}(P)^-\mathfrak{B}(P) \qquad [2.5].$$

2.7. $\mathfrak{K}_2([Q^-R) = QR$ (Q, R — *слова в* А).

Это непосредственно следует из определения (3) алгорифма $\mathfrak{K}_2$.

2.8. $\mathfrak{K}_2(\overline{\mathfrak{A}}_1(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{B}_1(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{K}_1(P)))))) \simeq \mathfrak{A}(P)\mathfrak{B}(P)$.

В самом деле,

$$\mathfrak{K}_2(\overline{\mathfrak{A}}_1(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{B}_1(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{K}_1(P)))))) \simeq \mathfrak{K}_2([\mathfrak{A}(P)^-\mathfrak{B}(P)) \qquad [2.6]$$

$$\simeq \mathfrak{A}(P)\mathfrak{B}(P) \qquad [2.7].$$

Условное равенство (1) следует теперь из (6) и 2.8 согласно § 3.5.3.

3. Теорема 2.1 может быть обобщена следующим образом.

3.1. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* А, *может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{C}$ *над* А, *что*

(1) $$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{A}(P)\mathfrak{B}(P) \quad (P \text{ — слово в А}).$$

В самом деле, пусть Б означает объединение алфавитов алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B}_1$ — формальные распространения алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ на Б. Тогда теорема 2.1 может быть применена к нормальным алгорифмам $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B}_1$ в алфавите Б. Согласно этой теореме может быть построен такой алгорифм $\mathfrak{C}$ над Б, что

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{A}_1(P)\mathfrak{B}_1(P) \quad (P \text{ — слово в Б}).$$

Принимая во внимание, что $\mathfrak{A}_1(P) \simeq \mathfrak{A}(P)$, $\mathfrak{B}_1(P) \simeq \mathfrak{B}(P)$ [§ 1.5.4] и что А $\subset$ Б, получаем отсюда условное равенство (1).

4. Теорема 3.1 допускает далее следующее обобщение.

4.1. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ $(n \geqslant 2)$ *над алфавитом* A, *может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{C}$ *над* A, *что*

(1) $$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{B}_1(P) \ldots \mathfrak{B}_n(P) \quad (P \text{ — слово в A}).$$

При $n=2$ эта теорема совпадает с только что доказанной. Допустим, что она верна при $n=k$, где k — натуральное число, большее единицы. Докажем, что она верна тогда и при $n=k+1$.

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_{k+1}$ — нормальные алгорифмы над алфавитом A. Согласно индуктивному предположению, может быть построен такой нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над A, что

(2) $$\mathfrak{B}(P) \simeq \mathfrak{B}_1(P) \ldots \mathfrak{B}_k(P) \quad (P \text{ — слово в A}).$$

Согласно **3.1**, может быть построен такой нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над A, что

(3) $$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{B}(P)\, \mathfrak{B}_{k+1}(P) \quad (P \text{ — слово в A}).$$

Имеем теперь

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{B}_1(P) \ldots \mathfrak{B}_k(P)\, \mathfrak{B}_{k+1}(P) \quad (P \text{ — слово в A}) \qquad [(3), (2)].$$

Этим доказана справедливость теоремы при $n=k+1$ в предположении ее справедливости при $n=k$. Следовательно, теорема верна при любом n, большем или равном двум, что и требовалось доказать.

На основе теоремы **4.1** докажем теперь следующую теорему.

4.2. *Пусть* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ $(n \geqslant 2)$ *— нормальные алгорифмы;* A *— объединение их алфавитов. Тогда может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{C}$ *над* A, *что*

(4) $$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{B}_1(P) \ldots \mathfrak{B}_n(P) \quad (P \text{ — слово в A}).$$

В самом деле, пусть $\mathfrak{C}_i$ означает формальное распространение алгорифма $\mathfrak{B}_i$ на алфавит A [§ **1.5**]. $\mathfrak{C}_i$ есть тогда нормальный алгорифм в A [§ **1.5.1**], причем

(5) $$\mathfrak{C}_i(P) \simeq \mathfrak{B}_i(P) \quad (P \text{ — слово в A}) \qquad [\S\ \mathbf{1.5.4}].$$

Построим согласно **4.1** такой нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над A, что

(6) $$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{C}_1(P) \ldots \mathfrak{C}_n(P) \quad (P \text{ — слово в A}).$$

Условное равенство (4) непосредственно следует из условных равенств (5) и (6).

5. Докажем теперь теорему **1.1**.

Пусть $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ $(n \geqslant 2)$ — нормальные алгорифмы; A — объединение их алфавитов; γ — какая-нибудь буква. Укажем построение нормального алгорифма $\mathfrak{C}$ над $A \cup \{\gamma\}$, для которого имеет место условное равенство **1 (2)**.

Пусть $\mathfrak{D}$ означает нормальный алгорифм в $A \cup \{\gamma\}$, перерабатывающий всякое слово в этом алфавите в слово γ. Как строится такой алгорифм, нам известно [II. § 4.7]. $A \cup \{\gamma\}$ есть, очевидно, объединение алфавитов алгорифмов $\mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{D}$. К этим нормальным алго-

рифмам применима теорема 4.2, согласно которой может быть построен такой нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над $A \cup \{\gamma\}$, что

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{B}_1(P)\,\mathfrak{D}(P)\,\mathfrak{B}_2(P)\ldots\mathfrak{D}(P)\,\mathfrak{B}_n(P) \quad (P \text{ — слово в } A \cup \{\gamma\}).$$

Для этого алгорифма имеет место условное равенство **1(2)**, так как

$$\mathfrak{D}(P) = \gamma \quad (P \text{ — слово в } A \cup \{\gamma\})$$

согласно построению алгорифма $\mathfrak{D}$.

6. Формулируем некоторые следствия из доказанных теорем.

6.1. *Каков бы ни был нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *над алфавитом* A, *могут быть построены такие нормальные алгорифмы* $\mathfrak{C}$ *и* $\mathfrak{D}$ *над* A, *что*

(1) $$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{A}(P)\,P \quad (P \text{ — слово в } A),$$

(2) $$\mathfrak{D}(P) \simeq P\mathfrak{A}(P) \quad (P \text{ — слово в } A).$$

Для доказательства воспользуемся тождественным нормальным алгорифмом в алфавите A [II. § 4.2]. Применяя теорему **3.1** к алгорифму $\mathfrak{A}$ и тождественному алгорифму в A (в роли $\mathfrak{P}$), получаем нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над A, для которого справедливо условное равенство **(1)**. Подобным же образом, с переменой ролей алгорифма $\mathfrak{A}$ и тождественного алгорифма, получаем нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над A, для которого имеет место (2).

6.2. *Каковы бы ни были нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *над алфавитом* A *и буква* γ, *существуют такие нормальные алгорифмы* $\mathfrak{C}$ *и* $\mathfrak{D}$ *над алфавитом* $A \cup \{\gamma\}$, *что*

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{A}(P)\,\gamma P \quad (P \text{ — слово в } A),$$

$$\mathfrak{D}(P) \simeq P\gamma\mathfrak{A}(P) \quad (P \text{ — слово в } A).$$

Это доказывается аналогично **6.1** с применением **1.1** вместо **3.1**.

§ 5. Разветвление алгорифмов

1. Иногда приходится строить предписания следующего типа: «применить к исходным данным алгорифм $\mathfrak{B}$ или алгорифм $\mathfrak{A}$ в зависимости от того, обладают ли эти данные таким-то свойством». Для того, чтобы такое предписание можно было рассматривать как алгорифм, необходимо, разумеется, чтобы существовал конструктивный метод распознавания свойства исходных данных, о котором идет речь. Этот метод может, например, состоять в применении к исходным данным некоторого специально подобранного «распознающего» алгорифма, перерабатывающего исходные данные в пустое слово тогда и только тогда, когда они обладают интересующим нас свойством. Чтобы узнать, обладают ли этим свойством исходные данные, нужно будет тогда применить к ним распознающий алгорифм и посмотреть на результат этого применения. Свойство имеет место, если этот результат есть пустое слово, и не имеет места, если он есть непустое слово. В первом случае предписание требует применить к исходным данным алгорифм $\mathfrak{B}$, во втором — алгорифм $\mathfrak{A}$. Переходя от алгорифмов вообще

к алгорифмам в некоторых алфавитах, мы приходим к предписаниям следующего типа.

Даны алгорифмы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ в алфавите А. Предписывается, исходя из произвольного слова P в этом алфавите, применить к нему алгорифм $\mathfrak{C}$. Если в результате получится пустое слово, то надлежит применить к P алгорифм $\mathfrak{B}$; если же получится непустое слово, то надлежит применить к P алгорифм $\mathfrak{A}$.

Это предписание можно рассматривать как некоторый алгорифм в А. Для его применимости к слову P в А, разумеется, необходимо, чтобы алгорифм $\mathfrak{C}$ был применим к P.

Мы приходим, таким образом, к некоторому сочетанию трех алгорифмов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ в А, являющемуся новым алгорифмом в А. Это сочетание естественно называть *разветвленным сочетанием алгорифмов* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$, *управляемым алгорифмом* $\mathfrak{C}$. Короче мы будем называть его *разветвлением* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$, *управляемым* $\mathfrak{C}$.

Естественно спросить, является ли разветвление двух нормализуемых алгорифмов, управляемое третьим нормализуемым алгорифмом, также нормализуемым алгорифмом. Положительный ответ вытекает из следующей теоремы.

1.1. Теорема разветвления. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{C}$, *может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{D}$ *над объединением* А *их алфавитов, такой, что*

(1) $$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{B}(P) \quad (P \text{ — слово в А}, \ \mathfrak{C}(P) = \Lambda),$$

(2) $$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{A}(P) \quad (P \text{ — слово в А}, \ \mathfrak{C}(P) \neq \Lambda)$$

и что $\mathfrak{D}$ *применим лишь к тем словам в* А, *к которым применим* $\mathfrak{C}$.

Здесь и в дальнейшем знак неравенства «$\neq$» надлежит понимать следующим образом: оба выражения, связываемые этим знаком, имеют смысл и означают различные слова.

Доказательство теоремы разветвления составляет главное содержание этого параграфа.

2. Докажем некоторые леммы.

2.1. *Каковы бы ни были нормальный алгорифм* $\mathfrak{C}$ *в алфавите* А *и буква* α, *может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{E}$ *над* $A \cup \{\alpha\}$, *что*

(1) $$\mathfrak{E}(P) = \begin{cases} \alpha \text{ для слов } P \text{ в А таких, что } \mathfrak{C}(P) = \Lambda, \\ \Lambda \text{ для слов } P \text{ в А таких, что } \mathfrak{C}(P) \neq \Lambda \end{cases}$$

и что $\mathfrak{E}$ *применим к тем и только к тем словам в* А, *к которым применим* $\mathfrak{C}$.

Воспользуемся нормальным алгорифмом $\mathfrak{A}^{A \cup \{\alpha\}, \Lambda, \alpha, \Lambda}$ над алфавитом $A \cup \{\alpha\}$, перерабатывающим Λ в α, а всякое непустое слово в алфавите $A \cup \{\alpha\}$ — в Λ [II. § 4.11]. Для сокращения письма обозначим его через $\mathfrak{E}_0$. Имеем

(2) $$\mathfrak{E}_0(\Lambda) = \alpha,$$

(3) $$\mathfrak{E}_0(P) = \Lambda \quad (P \text{ — слово в А}, \ P \neq \Lambda).$$

Построим искомый алгорифм $\mathfrak{E}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{E}_0$:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \circ \mathfrak{C}. \tag{4}$$

$\mathfrak{E}$ есть, как и $\mathfrak{E}_0$, нормальный алгорифм над $A \cup \{\alpha\}$ [(4), § 3.4.2] и

$$\mathfrak{E}(P) \simeq \mathfrak{E}_0(\mathfrak{C}(P)) \quad (P \text{ — слово в } A) \tag{5}$$

[(4), § 3.4.3].

Если P — слово в A и $\mathfrak{C}(P) = \Lambda$, то

$$\mathfrak{E}(P) \simeq \mathfrak{E}_0(\Lambda) \qquad [(5)]$$

$$= \alpha \qquad [(2)].$$

Если же P — слово в A и $\mathfrak{C}(P) \neq \Lambda$, то $\mathfrak{C}(P)$ есть слово в A и

$$\mathfrak{E}(P) = \Lambda \qquad [(5), (3)].$$

Таким образом, алгорифм $\mathfrak{E}$ удовлетворяет условию (1).

В силу (5), алгорифм $\mathfrak{E}$ применим лишь к тем словам в A, к которым применим $\mathfrak{C}$. С другой стороны, согласно уже доказанному, он применим ко всем таким словам. Лемма, таким образом, доказана.

2.2. *Каковы бы ни были нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в алфавите* A *и буква α, может быть построен такой нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над* $A \cup \{\alpha\}$, *что*

$$\mathfrak{F}(P) = \begin{cases} \alpha P \text{ для таких слов } P \text{ в A, что } \mathfrak{C}(P) = \Lambda, \\ P \text{ для таких слов } P \text{ в A, что } \mathfrak{C}(P) \neq \Lambda \end{cases} \tag{6}$$

и что $\mathfrak{F}$ будет применим к тем и только к тем словам в A, *к которым применим $\mathfrak{C}$.*

В самом деле, построим алгорифм $\mathfrak{E}$ согласно предыдущей лемме. Построим затем согласно § 4.6.1 такой нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над $A \cup \{\alpha\}$, что

$$\mathfrak{F}(P) \simeq \mathfrak{E}(P)P \quad (P \text{ — слово в } A \cup \{\alpha\}). \tag{7}$$

Он, очевидно, применим к тем и только к тем словам в A, к которым применим $\mathfrak{E}$, т. е. к тем и только к тем словам в A, к которым применим $\mathfrak{C}$. Соблюдение условия (6) для $\mathfrak{F}$ непосредственно следует из соблюдения условия (1) для $\mathfrak{E}$, в силу условного равенства (7).

2.3. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в алфавите* A *и не принадлежащая этому алфавиту буква α, может быть построен такой нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над* $A \cup \{\alpha\}$, *что*

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{A}(P) \quad (P \text{ — слово в A}), \tag{8}$$

$$\mathfrak{C}(\alpha P) \simeq \mathfrak{B}(P) \quad (P \text{ — слово в A}). \tag{9}$$

Доказательство этой леммы будет представлять собой небольшое видоизменение доказательства теоремы § 3.2.1. Так же, как в том доказательстве, введем алфавит «двойников» букв алфавита A, заботясь теперь не только о том, чтобы эти двойники были отличны друг от друга и от букв алфавита A, но и о том, чтобы буква α не фигуриро-

вала среди них. Алфавит двойников обозначим через $\overline{\text{А}}$ и составим алфавит Б и систему формул $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha^\beta$, как в доказательстве теоремы § 3.2.1.

Зададим нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в алфавите Б сокращенно записанной схемой

$$(10)\qquad \begin{cases} \alpha\xi \to \alpha\overline{\xi} & (\xi \in \text{А}) \\ \overline{\xi}\eta \to \overline{\xi}\overline{\eta} & (\xi, \eta \in \text{А}) \\ \overline{\xi}\beta \to \beta\overline{\xi} & (\xi \in \text{А}) \\ \beta\overline{\xi} \to \beta\xi & (\xi \in \text{А}) \\ \overline{\xi}\overline{\eta} \to \xi\eta & (\xi, \eta \in \text{А}) \\ \alpha\beta \to \cdot & \\ \overline{\mathfrak{B}}_\alpha^\beta & \\ \mathfrak{A}^\cdot & \end{cases},$$

отличающейся от схемы § 3.2(3) только отсутствием строки

$$\xi\alpha \to \alpha\xi \quad (\xi \in \text{А})$$

и тем, что вместо системы формул $\mathfrak{A}^\alpha$ теперь фигурирует схема алгорифма $\mathfrak{A}^\cdot$. Покажем, что так построенный алгорифм $\mathfrak{C}$ удовлетворяет условиям (8) и (9). Заметим прежде всего, что лемма § 3.2.7 имеет место и теперь, так как формула «$\to \cdot$», содержащаяся в схеме алгорифма $\mathfrak{A}^\cdot$, содержится и в схеме алгорифма $\mathfrak{C}$.

Определим понятие *двойника* слова в А, как в доказательстве теоремы § 3.2.1. Свойствами двойников § 3.2(4), § 3.2(5) и § 3.2.8, установленными в этом доказательстве, можно пользоваться и теперь. Имеют место также свойства § 3.2.9—§ 3.2.13 системы $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha^\beta$. Справедлива и основанная на § 3.2.13 лемма § 3.2.14, причем ее доказательство теперь только упрощается, так как в схеме алгорифма $\mathfrak{C}$ фигурирует сама схема алгорифма $\mathfrak{A}^\cdot$, а не система формул $\mathfrak{A}^\alpha$. Ввиду этого же вместо § 3.2.15—§ 3.2.17 имеем теперь

2.4. *Если* $\mathfrak{A}^\cdot : P \vdash \cdot Q$, *то* $\mathfrak{C} : P \vdash \cdot Q$.

Лемма § 3.2.18, основанная на § 3.2.14, справедлива и теперь. Вместо § 3.2.19 имеем

2.5. *Если* $\mathfrak{A}^\cdot : P \models \cdot Q$, *то* $\mathfrak{C} : P \models \cdot Q$.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству § 3.2.19 с помощью § 3.2.18, 2.4 и II. § 3.6.2.

Вместо леммы § 3.2.20 имеем теперь

2.6. *Если* P *— слово в* А *и* $\mathfrak{C} : P \vdash Q$, *то* $\mathfrak{A}^\cdot : P \vdash Q$ *и* Q *есть слово в* А.

В силу замкнутости алгорифма $\mathfrak{A}^\cdot$ [§ 2.2.1], это легко доказывается с помощью лемм § 2.1.1, 2.4, II. § 3.6.1 и § 3.2.14. Аналогичным образом доказывается следующая лемма.

2.7. *Если* P *— слово в* А *и* $\mathfrak{C} : P \vdash \cdot Q$, *то* $\mathfrak{A}^\cdot : P \vdash \cdot Q$ *и* Q *есть слово в* А.

Из леммы 2.6 следует лемма

2.8. *Если* P *— слово в* А *и* $\mathfrak{C} : P \models Q$, *то* $\mathfrak{A}^\cdot : P \models Q$ *и* Q *есть слово в* А.

Из лемм 2.7, 2.8 и II. § 3.6.2 следует лемма

2.9. *Если* P *— слово в* А *и* $\mathfrak{C} : P \models \cdot Q$, *то* $\mathfrak{A}^\cdot : P \models \cdot Q$.

Из лемм 2.5 и 2.9 в силу замкнутости алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ [§ 2.2.1, § 3.2.7] вытекает, согласно § 2.1.3, § 2.2.10 и § 2.2.11, следующая лемма.

2.10. *Если P — слово в* A, *то $\mathfrak{C}(P) = Q$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}(P) = Q$.*

Из 2.10 непосредственно следует справедливость условного равенства (8) для слов P в A.

Определим далее, как в доказательстве теоремы § 3.2.1, понятие *образа вхождения*. Нетрудно видеть, что вся часть этого доказательства от леммы § 3.2.23 до леммы § 3.2.44 включительно сохраняет силу (с небольшими и очевидными изменениями: например вместо того, чтобы говорить о первых семи строках схемы § 3.2 (3), теперь надо говорить о первых шести строках схемы 2 (10)). Из лемм § 2.2.10, § 2.2.1, § 2.1.3, § 3.2.40, II. § 3.6.3 вытекает следующая лемма.

2.11. *Если $\mathfrak{B}(P) = Q$, то $\mathfrak{C}(\alpha P) = Q$.*

Из нее следует, что равенство

$$\mathfrak{C}(\alpha P) = \mathfrak{B}(P) \tag{11}$$

имеет место, коль скоро осмыслена его правая часть. С другой стороны, согласно леммам § 3.2.44 и § 2.2.12 правая часть равенства (11) осмыслена для слова P в алфавите A, если осмыслена левая часть этого равенства. Следовательно, для слов P в A имеет место условное равенство (9), что и оставалось доказать для завершения доказательства леммы 2.3.

3. Докажем теперь теорему 1.1.

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — нормальные алгорифмы; A — объединение их алфавитов. Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{C}_1$ означают соответственно формальные распространения алгорифмов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ на алфавит A. Фиксируем букву α, не принадлежащую A. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над $A \cup \{\alpha\}$ согласно лемме 2.2 таким образом, чтобы этот алгорифм был применим к тем и только к тем словам в A, к которым применим $\mathfrak{C}_1$, и чтобы соблюдалось условие

$$\mathfrak{F}(P) = \begin{cases} \alpha P \text{ для таких слов } P \text{ в A, что } \mathfrak{C}_1(P) = \Lambda \\ P \text{ для таких слов } P \text{ в A, что } \mathfrak{C}_1(P) \neq \Lambda. \end{cases} \tag{1}$$

Применяя лемму 2.3 к алгорифмам $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B}_1$, построим нормальный алгорифм $\mathfrak{G}$ над $A \cup \{\alpha\}$ таким образом, чтобы соблюдались условные равенства

$$\mathfrak{G}(P) \simeq \mathfrak{A}_1(P) \quad (P \text{ — слово в A}), \tag{2}$$

$$\mathfrak{G}(\alpha P) \simeq \mathfrak{B}_1(P) \quad (P \text{ — слово в A}). \tag{3}$$

Построим искомый алгорифм $\mathfrak{D}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}. \tag{4}$$

Тогда $\mathfrak{D}$ есть, как и $\mathfrak{F}$, нормальный алгорифм над A [(4), § 3.4.2], причем

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(P)) \quad (P \text{ — слово в A}) \qquad [(4), \S\ 3.4.3]. \tag{5}$$

Если для слова P в алфавите А имеем $\mathfrak{C}(P)=\Lambda$, то

(6) $$\mathfrak{C}_1(P)=\Lambda \qquad [\S\ 1.5.4],$$

(7) $$\mathfrak{F}(P)=\alpha P \qquad [(6),\ (1)],$$

$$\mathfrak{D}(P)\simeq\mathfrak{G}(\alpha P) \qquad [(7),\ (5)]$$

$$\simeq\mathfrak{B}_1(P) \qquad [(3)]$$

$$\simeq\mathfrak{B}(P) \qquad [\S\ 1.5.4];$$

если же для P в А имеем $\mathfrak{C}(P)\neq\Lambda$, то

(8) $$\mathfrak{C}_1(P)\neq\Lambda \qquad [\S\ 1.5.4],$$

(9) $$\mathfrak{F}(P)=P \qquad [(8),\ (1)],$$

$$\mathfrak{D}(P)\simeq\mathfrak{G}(P) \qquad [(9),\ (5)]$$

$$\simeq\mathfrak{A}_1(P) \qquad [(2)]$$

$$\simeq\mathfrak{A}(P) \qquad [\S\ 1.5.4].$$

Таким образом, условные равенства 1 (1) и 1 (2) имеют место.

Рассмотрим, наконец, какое-нибудь слово P в А, к которому применим алгорифм $\mathfrak{D}$. Согласно (5), к P применим алгорифм $\mathfrak{F}$, следовательно, и алгорифм $\mathfrak{C}_1$, а значит, и алгорифм $\mathfrak{C}$ [§ 1.5.4]. Таким образом, алгорифм $\mathfrak{D}$ применим лишь к тем словам в А, к которым применим алгорифм $\mathfrak{C}$, что и оставалось доказать.

4. Теорема 1.1 допускает следующее обобщение.

4.1. Обобщенная теорема разветвления. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы* $\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_n$ $(n>0)$, *может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{D}$ *над объединением* А *их алфавитов, что*

$$\mathfrak{D}(P)\simeq\begin{cases}\mathfrak{A}_0(P) & (P\text{ — слово в А, } \mathfrak{C}_1(P)=\Lambda,\ \mathfrak{C}_2(P)=\Lambda,\ldots,\ \mathfrak{C}_n(P)=\Lambda)\\ \mathfrak{A}_1(P) & (P\text{ — слово в А, } \mathfrak{C}_1(P)\neq\Lambda,\ \mathfrak{C}_2(P)=\Lambda,\ldots,\ \mathfrak{C}_n(P)=\Lambda)\\ \mathfrak{A}_2(P) & (P\text{ — слово в А, } \mathfrak{C}_2(P)\neq\Lambda,\ldots,\ \mathfrak{C}_n(P)=\Lambda)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathfrak{A}_n(P) & (P\text{ — слово в А, } \mathfrak{C}_n(P)\neq\Lambda).\end{cases}$$

Доказательство этой теоремы будем вести индукцией по n. При $n=1$ теорема следует из 1.1. Допустим, что она доказана при $n=m$, где $m>0$. Докажем ее при $n=m+1$.

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_{m+1}$, $\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_{m+1}$ — нормальные алгорифмы; А — объединение их алфавитов. Построим формальные распространения $\mathfrak{B}_0,\ldots,\mathfrak{B}_m$ алгорифмов $\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_m$ на алфавит А. К алгорифмам $\mathfrak{B}_0,\ldots,\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_m$, согласно индуктивному допущению, применима теорема 4.1. Можно, следовательно, построить такой нормальный

алгорифм $\mathfrak{B}$ над объединением алфавитов алгорифмов $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_m$, т. е. над А, что

$$(1)\quad \mathfrak{B}(P) \simeq \begin{cases} \mathfrak{B}_0(P) & (P \text{— слово в А}, \ \mathfrak{C}_1(P) = \Lambda, \ \mathfrak{C}_2(P) = \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_m(P) = \Lambda) \\ \mathfrak{B}_1(P) & (P \text{— слово в А}, \ \mathfrak{C}_1(P) \neq \Lambda, \ \mathfrak{C}_2(P) = \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_m(P) = \Lambda) \\ \mathfrak{B}_2(P) & (P \text{— слово в А}, \ \mathfrak{C}_2(P) \neq \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_m(P) = \Lambda) \\ \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}_m(P) & (P \text{— слово в А}, \ \mathfrak{C}_m(P) \neq \Lambda). \end{cases}$$

Построим такой алгорифм $\mathfrak{B}$. Построим затем согласно теореме **1.1** такой нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над объединением Б алфавитов алгорифмов $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_{m+1}$ и $\mathfrak{C}_{m+1}$, что

$$(2)\quad \mathfrak{D}(P) \simeq \begin{cases} \mathfrak{B}(P) & (P \text{— слово в Б}, \ \mathfrak{C}_{m+1}(P) = \Lambda) \\ \mathfrak{A}_{m+1}(P) & (P \text{— слово в Б}, \ \mathfrak{C}_{m+1}(P) \neq \Lambda). \end{cases}$$

$\mathfrak{D}$ является тогда искомым нормальным алгорифмом над А, удовлетворяющим условиям

$$(3)\quad \mathfrak{D}(P) \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}_0(P) & (P \text{— слово в А}, \ \mathfrak{C}_1(P) = \Lambda, \ \mathfrak{C}_2(P) = \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_m(P) = \Lambda, \ \mathfrak{C}_{m+1}(P) = \Lambda) \\ \mathfrak{A}_1(P) & (P \text{— слово в А}, \ \mathfrak{C}_1(P) \neq \Lambda, \ \mathfrak{C}_2(P) = \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_m(P) = \Lambda, \ \mathfrak{C}_{m+1}(P) = \Lambda) \\ \mathfrak{A}_2(P) & (P \text{— слово в А}, \ \mathfrak{C}_2(P) \neq \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_m(P) = \Lambda, \ \mathfrak{C}_{m+1}(P) = \Lambda) \\ \ldots & \ldots \\ \mathfrak{A}_m(P) & (P \text{— слово в А}, \ \mathfrak{C}_m(P) \neq \Lambda, \ \mathfrak{C}_{m+1}(P) = \Lambda) \\ \mathfrak{A}_{m+1}(P) & (P \text{— слово в А}, \ \mathfrak{C}_{m+1}(P) \neq \Lambda). \end{cases}$$

В самом деле, А $\subset$ Б, так как $\mathfrak{B}$ — алгорифм над А, а Б — объединение алфавитов алгорифмов $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_{m+1}$ и $\mathfrak{C}_{m+1}$. Поэтому $\mathfrak{D}$ есть нормальный алгорифм над А.

Рассмотрим какое-нибудь слово P в А, удовлетворяющее условиям

$$(4)\quad \mathfrak{C}_1(P) = \Lambda, \ \mathfrak{C}_2(P) = \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_m(P) = \Lambda, \ \mathfrak{C}_{m+1}(P) = \Lambda.$$

Так как А $\subset$ Б, имеем для него

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(P) &\simeq \mathfrak{B}(P) && [(2),\ (4)] \\ &\simeq \mathfrak{B}_0(P) && [(1),\ (4)] \\ &\simeq \mathfrak{A}_0(P) && [\S\ 1.5.4]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{A}_0(P)$$

$(P$ — слово в А, $\mathfrak{C}_1(P) = \Lambda$, $\mathfrak{C}_2(P) = \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_m(P) = \Lambda$, $\mathfrak{C}_{m+1}(P) = \Lambda)$.

Аналогичным образом устанавливаем, что

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{A}_1(P)$$

$(P$ — слово в А, $\mathfrak{C}_1(P) \neq \Lambda$, $\mathfrak{C}_2(P) = \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_m(P) = \Lambda$, $\mathfrak{C}_{m+1}(P) = \Lambda)$,

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{A}_2(P)$$

(P — слово в А, $\mathfrak{C}_2(P) \neq \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_m(P) = \Lambda, \mathfrak{C}_{m+1}(P) = \Lambda$),

. . . . . .

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{A}_m(P) \quad (P \text{ — слово в А}, \mathfrak{C}_m(P) \neq \Lambda, \mathfrak{C}_{m+1}(P) = \Lambda).$$

Наконец, если P — слово в А, удовлетворяющее условию

$$\mathfrak{C}_{m+1}(P) \neq \Lambda,$$

то, принимая во внимание, что А $\subset$ Б, получаем для него, согласно (2), $\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{A}_{m+1}(P)$. Таким образом,

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{A}_{m+1}(P) \quad (P \text{ — слово в А}, \mathfrak{C}_{m+1}(P) \neq \Lambda).$$

Следовательно, алгорифм $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условиям (3), что и требовалось доказать.

§ 6. Повторение алгорифма

1. В математике часто бывает нужно строить предписания следующего типа: «применить к исходным данным заданный алгорифм $\mathfrak{A}$; если результат применения не обладает таким-то свойством $\mathfrak{P}$, применить к этому результату алгорифм $\mathfrak{A}$; если и этот результат не обладает свойством $\mathfrak{P}$, применить и к нему алгорифм $\mathfrak{A}$ и т. д., до тех пор, пока не получится объект, обладающий свойством $\mathfrak{P}$». Для того чтобы такое предписание можно было рассматривать как алгорифм, необходимо, конечно, наличие конструктивного метода распознавания свойства $\mathfrak{P}$. Этот метод может, например, состоять в применении к рассматриваемому объекту «распознающего» алгорифма, тогда и только тогда перерабатывающего этот объект в пустое слово, когда он обладает свойством $\mathfrak{P}$. Переходя теперь от алгорифмов вообще к алгорифмам в некоторых алфавитах, мы приходим к предписаниям следующего типа.

Даны алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ в алфавите А. Предписывается, исходя из произвольного слова P в А, применить к нему алгорифм $\mathfrak{A}$, что (в случае применимости) даст слово P_1; к P_1 надлежит применить алгорифм $\mathfrak{C}$ и, если в результате получится непустое слово, предписывается применить к P_1 алгорифм $\mathfrak{A}$, что (в случае применимости) даст слово P_2; с ним надлежит поступать так же, как с P_1, и т. д.; этот процесс следует оборвать, когда получится слово P_n, перерабатываемое в пустое слово алгорифмом $\mathfrak{C}$.

Это предписание можно рассматривать как некоторый алгорифм в А. Результат Q его применения к слову P может быть охарактеризован следующим условием: существует такой ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ($n > 0$), что

(1) $P_0 = P$,

(2) $P_i = \mathfrak{A}(P_{i-1})$ $(0 < i \leqslant n)$,

(3) $P_n = Q$,

(4) $\mathfrak{C}(P_i) \neq \Lambda$ $(0 < i < n)$,

(5) $\mathfrak{C}(P_n) = \Lambda$.

Мы пришли таким образом к некоторому сочетанию алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ в A, сочетанию, являющемуся алгорифмом в A. Это сочетание мы будем называть *повторением алгорифма* $\mathfrak{A}$, *управляемым алгорифмом* $\mathfrak{C}$.

Естественно спросить, является ли нормализуемым повторение нормализуемого алгорифма, управляемое нормализуемым алгорифмом, Положительный ответ вытекал бы из следующей теоремы.

1.1. Теорема повторения. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{C}$, *может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}$ *над объединением* A *их алфавитов со следующим свойством:* $\mathfrak{B}$ *тогда и только тогда перерабатывает слово* P *в алфавите* A *в слово* Q, *когда существует ряд слов* $P_0, P_1, \ldots, P_n (n > 0)$, *удовлетворяющий условиям* (1)—(5).

В данном параграфе мы докажем эту теорему.

2. Начнем с доказательства следующей леммы.

2.1. *Если* $\mathfrak{A}$ *— нормальный алгорифм в алфавите* A *и* β *— буква этого алфавита, то может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{G}$ *над* A *со следующим свойством:* $\mathfrak{G}$ *тогда и только тогда перерабатывает слово* P *в алфавите* A *в слово* Q, *когда существует ряд слов* $P_0, P_1, \ldots, P_n$, *удовлетворяющий условиям* 1(1)—1(3) *и такой, что* P_n *есть единственное из слов* $P_1, \ldots, P_n$,*начинающееся буквой* β.

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите A, $\beta \in$ A. Введем букву α, не принадлежащую A, и построим нормальный алгорифм $\mathfrak{G}$ в A $\cup \{\alpha\}$ с сокращенно записанной схемой

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \xi\alpha \to \alpha\xi \ (\xi \in \mathrm{A}) \\ \alpha\beta \to \cdot\beta \\ \alpha \to \\ \mathfrak{A}^{\alpha} \end{array}\right. ,$$

где $\mathfrak{A}^{\alpha}$ имеет тот же смысл, что в доказательстве теоремы § 3.2.1.

$\mathfrak{G}$ есть нормальный алгорифм над A. Покажем, что он обладает требуемым свойством.

Для этого заметим прежде всего, что всё, сказанное в доказательстве теоремы § 3.2.1 о системе формул $\mathfrak{A}^{\alpha}$, сохраняет силу и сейчас. В частности, справедливы леммы § 3.2.2—§ 3.2.6. Принимая это во внимание, легко убедиться в том, что леммы § 3.2.7 и § 3.2.14—§ 3.2.22 сохраняют силу с заменой $\mathfrak{C}$ на $\mathfrak{G}$. Доказательства этих лемм претерпевают лишь небольшие изменения в сторону упрощения. При дальнейших ссылках на эти леммы мы будем подразумевать указанную замену.

Докажем следующие леммы.

2.2. *Если* Q *— слово в* A, *начинающееся буквой* β, *то* $\mathfrak{G} : \alpha Q \vdash \cdot Q$.

Пусть, в самом деле, Q — слово в A, начинающееся буквой β. Тогда $Q = \beta R$, где R — слово в A, и $\alpha Q = \alpha\beta R$. α не входит в Q, так как α не принадлежит алфавиту A. Поэтому никакое слово вида $\xi\alpha$ не входит в αQ. С другой стороны, первым вхождением $\alpha\beta$ в αQ является $*\alpha\beta * R$. Как показывает схема (1), алгорифм $\mathfrak{G}$ в применении к αQ предписывает подставить β вместо этого вхождения, что дает βR, т. е. Q. Так как примененная здесь формула подстановки $\alpha\beta \to \cdot\beta$ — заключительная, имеем $\mathfrak{G} : \alpha Q \vdash \cdot Q$, что и требовалось доказать.

2.3. *Если* Q *— слово в* A, *не начинающееся буквой* β, *то* $\mathfrak{G} : \alpha Q \vdash Q$.

Пусть, в самом деле, Q — слово в A, не начинающееся буквой β. Тогда α не входит в Q, в силу чего никакое слово вида $\xi\alpha$ не входит в αQ.

Так как, кроме того, Q не начинается буквой β, $\alpha\beta$ не входит в αQ. С другой стороны, $*\alpha * Q$ есть первое вхождение α в αQ. Как показывает схема (1), алгорифм $\mathfrak{G}$ предписывает подставить пустое слово вместо этого вхождения, что дает Q. Так как примененная здесь формула подстановки $\alpha \rightarrow$ простая, имеем $\mathfrak{G} : \alpha Q \vdash Q$, что и требовалось доказать.

2.4. *Если* $\mathfrak{A}(P) = Q$ *и* Q *начинается буквой* β, *то* $\mathfrak{G} : P \models \cdot Q$.

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}(P) = Q$, где Q начинается буквой β. Тогда $\mathfrak{A}^{\cdot}(P) = Q$ [§ 2.2.10], и потому $\mathfrak{A}^{\cdot} : P \models \cdot Q$ [§ 2.2.1, § 2.1.3]. Поэтому

(2) $\mathfrak{G} : P \models \alpha Q$ [§ 3.2.19].

Q является при этом словом в алфавите A, так как $\mathfrak{A}(P) = Q$ и $\mathfrak{A}$ — алгорифм в A. Так как Q начинается буквой β, имеем

(3) $\mathfrak{G} : \alpha Q \vdash \cdot Q$ [2.2],

$\mathfrak{G} : P \models \cdot Q$ [(2), (3)],

что и требовалось доказать.

2.5. *Если* $\mathfrak{A}(P) = Q$ *и* Q *не начинается буквой* β, *то* $\mathfrak{G} : P \llcorner Q$.

Здесь «$\llcorner$» — знак собственной преобразуемости [II. § 3.7].

Лемма 2.5 доказывается аналогично лемме 2.4 с использованием 2.3 вместо 2.2.

2.6. *Если ряд слов* $P_0, \ldots, P_n$ *удовлетворяет условиям* 1(1)—1(3) *и* P_n *есть единственное из слов* $P_1, \ldots, P_n$, *начинающееся буквой* β, *то* $\mathfrak{G}(P) = Q$.

В самом деле, при соблюдении условий этой леммы, имеем

(4) $\mathfrak{G} : P_{i-1} \models P_i \ (0 < i < n)$ [1(2), 2.5],

(5) $\mathfrak{G} : P_{n-1} \models \cdot P_n$ [1(2), 2.4],

(6) $\mathfrak{G} : P_0 \models \cdot P_n$ [(4), (5)],

$\mathfrak{G}(P) = Q$ [(6), 1(1), 1(3), II. § 3.6.3],

что и требовалось доказать.

2.7. *Если* P *— слово в* A *и* $\mathfrak{G}(P) = Q$, *то существует ряд слов* $P_0, \ldots, P_n (n > 0)$, *удовлетворяющий условиям* 1(1)—1(3) *и такой, что* P_n *есть единственное из слов* $P_1, \ldots, P_n$, *начинающееся буквой* β.

В самом деле, пусть P — слово в A и $\mathfrak{G}(P) = Q$. Тогда $\mathfrak{G} : P \models \cdot Q$ [§ 3.2.7, § 2.1.3], и потому для некоторого натурального числа m^0

(7) $\mathfrak{G} : P \models_{m_0} \cdot Q$.

Так как алгорифм $\mathfrak{G}$ применим к слову P в А, алгорифм $\mathfrak{A}'$ также применим к этому слову [§ 3.2.22]. Следовательно, и алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к P [§ 2.2.12]. Пусть

$$P_1 = \mathfrak{A}(P). \tag{8}$$

Тогда P_1 есть слово в А, так как $\mathfrak{A}$ — алгорифм в А.

Если P_1 не начинается буквой β, то

$$\mathfrak{G} : P \vdash P_1 \qquad [(8), 2.5]. \tag{9}$$

В этом случае

$$\mathfrak{G} : P_1 \models_{m_1} \cdot Q, \tag{10}$$

где $m_1 < m_0$ [(7), (9), II. § 3.7.10]. Следовательно, $\mathfrak{G}(P_1) = Q$ [(10), II. § 3.6.3] и можно применить к P_1 рассуждение, которое мы только что применяли к P. Алгорифм $\mathfrak{A}$ применим, следовательно, к P_1. Пусть

$$P_2 = \mathfrak{A}(P_1).$$

P_2 есть тогда слово в А. Если и оно не начинается буквой β, то, рассуждая аналогично предыдущему, убеждаемся в том, что

$$\mathfrak{G} : P_2 \models_{m_2} \cdot Q,$$

где $m_2 < m_1$.

Этот процесс последовательного построения слов P_1, P_2, ... таких, что

$$P_1 = \mathfrak{A}(P),$$

$$P_2 = \mathfrak{A}(P_1),$$

. . . . .

$$\mathfrak{G} : P \models_{m_0} \cdot Q,$$

$$\mathfrak{G} : P_1 \models_{m_1} \cdot Q,$$

$$\mathfrak{G} : P_2 \models_{m_2} \cdot Q,$$

. . . ,

где $m_0 > m_1 > m_2 > \ldots$, можно, очевидно, продолжать до тех пор, пока не получится некоторое слово P_n в А, начинающееся буквой β. Рано или поздно это должно случиться, так как убывающий ряд натуральных чисел m_0, m_1, m_2, ... должен оборваться. Полагая $P_0 = P$, будем иметь ряд слов P_0, P_1, ..., P_n, удовлетворяющий условиям 1(1), 1(2) и такой, что P_n есть единственное из слов P_1, ..., P_n, начинающееся буквой β. Остается показать, что этот ряд удовлетворяет также условию 1(3).

Для этого заметим, что $\mathfrak{A}(P_{n-1}) = P_n$, где P_n начинается буквой β. Поэтому

$$\mathfrak{G} : P_{n-1} \models \cdot P_n \qquad [2.4], \tag{11}$$

$$\mathfrak{G}(P_{n-1}) = P_n \qquad [(11), \text{II. § 3.6.3}]. \tag{12}$$

С другой стороны

(13) $$\mathfrak{G} : P_{n-1} \models_{m_{n-1}} \cdot Q,$$

(14) $$\mathfrak{G}(P_{n-1}) = Q \qquad [(13), \text{II. § 3.6.3}].$$

Следовательно, $P_n = Q$ [(12), (14)], что и оставалось доказать.

Леммы 2.6 и 2.7 завершают доказательство леммы 2.1.

3. Докажем теперь теорему 1.1 для того частного случая, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ суть алгорифмы в А.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ — нормальные алгорифмы в алфавите А. Выберем букву β, не принадлежащую А. Присоединяя β к А, получим алфавит

(1) $$\text{Б} = \text{А} \cup \{\beta\}.$$

Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{C}_{\text{Б},\beta}$ в алфавите Б [II. § 4.7]. Для краткости обозначим его буквою $\mathfrak{E}$:

(2) $$\mathfrak{E} = \mathfrak{C}_{\text{Б},\beta}.$$

Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над Б согласно лемме § 5.2.2 таким образом, что

(3) $$\mathfrak{F}(P) = \begin{cases} \beta P & \text{для таких слов } P \text{ в А, что } \mathfrak{C}(P) = \Lambda \\ P & \text{для таких слов } P \text{ в А, что } \mathfrak{C}(P) \neq \Lambda \end{cases}$$

и что $\mathfrak{F}$ применим к тем и только к тем словам в А, к которым применим $\mathfrak{C}$. Построим алгорифм $\mathfrak{D}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{F}$:

(4) $$\mathfrak{D} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{D}$ есть нормальный алгорифм над объединением алфавитов алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{F}$ [(4), § 3.4.2] и, так как $\mathfrak{F}$ — алгорифм над Б, $\mathfrak{D}$ есть алгорифм над Б. Пусть В означает алфавит алгорифма $\mathfrak{D}$. Так как $\beta \in$ Б [(1)] и Б $\subset$ В, к $\mathfrak{D}$ применима лемма 2.1 (с заменой А на В и $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{D}$). Согласно этой лемме, может быть построен нормальный алгорифм $\mathfrak{G}$ над В со следующим свойством: $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда перерабатывает слово P в алфавите В в слово Q, когда существует ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n$ $(n > 0)$, удовлетворяющий условиям 1(1)—1(3) с заменой $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{D}$ и такой, что P_n есть единственное из слов $P_1, \ldots, P_n$, начинающееся буквой β. Построим такой алгорифм $\mathfrak{G}$. Построим, наконец, искомый алгорифм $\mathfrak{B}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{E}$:

(5) $$\mathfrak{B} = \mathfrak{E} \circ \mathfrak{G}.$$

$\mathfrak{B}$ есть нормальный алгорифм над объединением алфавитов алгорифмов $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{E}$ [(5), § 3.4.2] и, так как $\mathfrak{E}$ — алгорифм над А, $\mathfrak{B}$ есть алгорифм над А. Покажем, что он тогда и только тогда перерабатывает слово P в алфавите А в слово Q, когда существует ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n$ $(n > 0)$, удовлетворяющий условиям 1(1)—1(5).

Докажем предварительно некоторые леммы

3.1. $\mathfrak{E}(\beta P) = P$ *для всякого слова* P *в* А.

Справедливость этой леммы легко усматривается из равенства (2) [II. § 4. 7].

3.2. $\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{A}(P))$ (P — *слово в* А).

Это следует из равенства (4) согласно § 3.4.3.

3.3. $\mathfrak{B}(P) \simeq \mathfrak{E}(\mathfrak{G}(P))$ (P — *слово в* А).

В самом деле, алфавит А содержится в алфавите Б алгорифма $\mathfrak{E}$ [(1)], а этот алфавит — в объединении алфавитов алгорифмов $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{E}$. Согласно (5) и § 3.4.3, мы имеем поэтому условное равенство 3.3.

3.4. *Если ряд слов* $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ($n > 0$) *удовлетворяет условиям* 1(1)—1(5), *то* $\mathfrak{B}(P) = Q$.

В самом деле, пусть ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n (n > 0)$ удовлетворяет условиям 1(1)—1(5). В силу 1(2), все эти слова суть слова в алфавите А, так как $\mathfrak{A}$ — алгорифм в А. Имеем поэтому

$$\mathfrak{D}(P_{i-1}) \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{A}(P_{i-1})) \qquad [3.2]$$

$$\simeq \mathfrak{F}(P_i) \qquad [1(2)] \tag{6}$$

для $(0 < i \leqslant n)$. Но

$$\mathfrak{F}(P_i) = P_i \ (0 < i < n) \qquad [(3),\ 1(4)], \tag{7}$$

$$\mathfrak{F}(P_n) = \beta P_n \qquad [(3),\ 1(5)]. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\mathfrak{D}(P_{i-1}) = P_i \ (0 < i < n) \qquad [(6),\ (7)],$$

$$\mathfrak{D}(P_{n-1}) = \beta P_n \qquad [(6),\ (8)].$$

В силу 1(1) и 1(3), ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, \beta P_n$ удовлетворяет условиям

$$P_0 = P,$$

$$\beta P_n = \beta Q.$$

Из слов $P_1, \ldots, P_{n-1}, \beta P_n$ лишь последнее начинается буквой β, так как P_i — слова в алфавите А, не содержащем букву β.

Принимая во внимание всё установленное в предыдущем абзаце и учитывая, что $\text{А} \subset \text{Б} \subset \text{В}$, заключаем, что

$$\mathfrak{G}(P) = \beta Q. \tag{9}$$

P и Q суть слова в А в силу 1(1) и 1(3). Имеем поэтому

$$\mathfrak{E}(\beta Q) = Q \qquad [3.1], \tag{10}$$

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{G}(P)) = Q \qquad [(10),\ (9)], \tag{11}$$

$$\mathfrak{B}(P) = Q \qquad [(11).\ 3.3],$$

что и требовалось доказать.

3.5. *Если* P — *слово в* А *и* $\mathfrak{B}(P) = Q$, *то существует ряд слов* $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ($n > 0$), *удовлетворяющий условиям* 1(1)—1(5).

Пусть, в самом деле, P — слово в А и

(12) $$\mathfrak{B}(P) = Q.$$

Тогда

(13) $$\mathfrak{E}(\mathfrak{G}(P)) = Q \qquad [(12),\ 3.3].$$

Обозначим $\mathfrak{G}(P)$ через R:

(14) $$\mathfrak{G}(P) = R.$$

Согласно построению алгорифма $\mathfrak{G}$, существует ряд слов $R_0, \ldots, R_n$ $(n > 0)$, удовлетворяющий условиям

(15) $$R_0 = P,$$

(16) $$\mathfrak{D}(R_{i-1}) = R_i \ (0 < i \leqslant n),$$

(17) $$R_n = R$$

и такой, что R_n есть единственное из слов $R_1, \ldots, R_n$, начинающееся буквой β.

Определим слова $P_0, \ldots, P_n$ равенствами

(18) $$P_i = R_i \ (0 \leqslant i < n),$$

(19) $$\beta P =_n R_n,$$

что возможно, так как R_n начинается буквой β.

Имеем **1 (1)** в силу **(18)** и **(15)**.

Покажем, что все P_i суть слова в А.

Относительно P_0 это верно в силу **1 (1)**, так как P по предположению — слово в А. Допустим, что это доказано относительно P_{i-1}, где i — одно из чисел $1, \ldots, n$. Покажем, что тогда P_i также есть слово в А.

Принимая во внимание, что P_{i-1} — слово в А, получаем

$$R_i = \mathfrak{D}(P_{i-1}) \qquad [(16),\ (18)]$$

(20) $$= \mathfrak{F}(\mathfrak{A}(P_{i-1})) \qquad [3.2].$$

$\mathfrak{A}(P_{i-1})$ есть слово в А, так как $\mathfrak{A}$ — алгорифм в А. К этому слову применим алгорифм $\mathfrak{F}$ [(20)], применимый лишь к тем словам в А, к которым применим алгорифм $\mathfrak{E}$. Следовательно, алгорифм $\mathfrak{E}$ применим к $\mathfrak{A}(P_{i-1})$. При $i < n$ слово $\mathfrak{E}(\mathfrak{A}(P_{i-1}))$ не может быть пустым, так как тогда слово $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}(P_{i-1}))$, равное R_i [(20)], начиналось бы, согласно (3), буквой β:

(21) $$\mathfrak{E}(\mathfrak{A}(P_{i-1})) \neq \Lambda \ (0 < i < n).$$

С другой стороны, при $i = n$

(22) $$\mathfrak{E}(\mathfrak{A}(P_{i-1})) = \Lambda,$$

так как в противном случае слово $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}(P_{i-1}))$, равное R_n, было бы, согласно (3), словом в A и не могло бы поэтому начинаться буквой β. Имеем теперь при $0<i<n$

$$P_i = \mathfrak{F}(\mathfrak{A}(P_{i-1})) \qquad [(18), (20)]$$

$$= \mathfrak{A}(P_{i-1}) \qquad [(21), (3)],$$

тогда как при $i=n$

$$\beta P_i = \mathfrak{F}(\mathfrak{A}(P_{i-1})) \qquad [(19), (20)]$$

(23) $$= \beta\mathfrak{A}(P_{i-1}) \qquad [(22), (3)]$$

(24) $$P_i = \mathfrak{A}(P_{i-1}) \qquad [(23), \text{I. § 3.9.3}].$$

Таким образом, предполагая, что P_{i-1} — слово в A, мы установили справедливость равенства (24), из которого сразу следует, что P_i также есть слово в A. Следовательно, все P_i суть слова в A. Вместе с тем мы видим, что равенство (24) имеет место при $0<i\leqslant n$, т. е., что соблюдается условие 1(2). Из предыдущего мы усматриваем также, что неравенство (21) имеет место при $0<i<n$ и что

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{A}(P_{n-1})) = \Lambda.$$

Принимая во внимание 1(2), заключаем, что соблюдены условия 1(4) и 1(5). Соблюдено, наконец, и условие 1(3), так как

(25) $$\mathfrak{G}(P) = \beta P_n \qquad [(14), (17), (19)],$$

$$P_n = \mathfrak{E}(\beta P_n) \qquad [3.1]$$

$$= \mathfrak{E}(\mathfrak{G}(P)) \qquad [(25)]$$

$$= Q \qquad [(13)].$$

Леммы 3.4 и 3.5 завершают доказательство теоремы 1.1 для рассматриваемого частного случая.

4. Докажем теперь теорему 1.1 в общем случае.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{E}$ — нормальные алгорифмы. Построим объединение A их алфавитов. Построим формальные распространения $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{E}_1$ алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{E}$ на алфавит A [§ 1.5.3].

$\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{E}_1$ суть нормальные алгорифмы в A [§ 1.5.1]. Согласно только что доказанному, может быть построен нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над A со свойством: $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда перерабатывает слово P в алфавите A в слово Q, когда существует ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n$ $(n>0)$, удовлетворяющий условиям 1(1), 1(3) и условиям

(1) $$P_i = \mathfrak{A}_1(P_{i-1}) \quad (0<i\leqslant n),$$

(2) $$\mathfrak{E}_1(P_i) \neq \Lambda \qquad (0<i<n),$$

(3) $$\mathfrak{E}_1(P_n) = \Lambda.$$

Но

$$\mathfrak{A}_1(R) \simeq \mathfrak{A}(R),$$

$$\mathfrak{E}_1(R) \simeq \mathfrak{E}(R)$$

для любого слова R [§ 1.5.4]. Поэтому условия (1)—(3) равносильны условиям 1(2), 1(4), 1(5). Таким образом, алгорифм $\mathfrak{B}$ обладает свойством, требуемым в теореме 1.1, которая, следовательно, доказана.

5. В теореме 1.1 речь идет о повторном применении данного нормального алгорифма до тех пор, пока не получится слово с желаемым свойством, причем само исходное слово не испытывается на это свойство. Соответственно этому требуется положительность числа n последовательных применений алгорифма $\mathfrak{A}$ и в условии 1(4) индекс i пробегает лишь положительные значения, меньше n.

Может, однако, оказаться нужным начать испытания на желаемое свойство уже с самого исходного слова. Процесс заканчивается в этом случае на исходном слове, если оно обладает этим свойством. Если же оно им не обладает, то к нему применяется алгорифм $\mathfrak{A}$, и далее процесс идет, как описано выше. Этому видоизменению повторения алгорифма $\mathfrak{A}$, управляемого $\mathfrak{C}$, соответствует следующее видоизменение теоремы 1.1.

5.1. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{C}$, *может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{D}$ *над объединением* А *их алфавитов со следующим свойством:* $\mathfrak{D}$ *тогда и только тогда перерабатывает слово* P *в алфавите* А *в слово* Q, *когда существует ряд слов* $P_0, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$, *удовлетворяющий условиям* 1(1)—1(3), 1(5) *и условию*

$$\mathfrak{C}(P_i) \neq \Lambda \quad (0 \leqslant i < n). \tag{1}$$

Отличие от теоремы 1.1 состоит здесь в том, что для n допускается значение 0 и условие 1(4) заменяется условием (1), в котором i принимает наряду с положительными значениями также и значение 0 (если $n > 0$).

Теорема 5.1 может быть доказана следующим образом.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ — произвольные нормальные алгорифмы; А — объединение их алфавитов. Построим тождественный нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_{\text{А}, \Lambda}$ в алфавите А [II. § 4.2]. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над А согласно теореме 1.1 таким образом, чтобы он обладал свойством, указанным в этой теореме. К алгорифмам $\mathfrak{A}_{\text{А}, \Lambda}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ применим теорему разветвления § 5.1.1. Построим согласно этой теореме нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над объединением алфавитов этих алгорифмов, т. е. над алфавитом Б алгорифма $\mathfrak{B}$, таким образом, чтобы соблюдались условия

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}_{\text{А}, \Lambda}(P) & (P \text{ — слово в Б}, \ \mathfrak{C}(P) = \Lambda) \\ \mathfrak{B}(P) & (P \text{ — слово в Б}, \ \mathfrak{C}(P) \neq \Lambda) \end{cases} \tag{2}$$

и чтобы алгорифм $\mathfrak{D}$ был применим лишь к тем словам в Б, к которым применим алгорифм $\mathfrak{C}$. Тогда $\mathfrak{D}$ является искомым алгорифмом.

В самом деле А $\subset$ Б, так как $\mathfrak{B}$ есть алгорифм над А и вместе с тем алгорифм в Б. Поэтому $\mathfrak{D}$ как алгорифм над Б есть алгорифм над А.

Пусть P — слово в А, Q — некоторое слово и пусть существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$, удовлетворяющий условиям 1(1)—1(3), 1(5) и (1).

Если $n > 0$, то, так как из соблюдения условия (1) следует соблюдение условия 1(4), имеем ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n$ $(n > 0)$, удовлетво-

ряющий условиям 1 (1)—1 (5). Согласно построению алгорифма $\mathfrak{B}$, имеем поэтому

(3) $$\mathfrak{B}(P) = Q.$$

С другой стороны, в этом случае

(4) $$\mathfrak{C}(P_0) \neq \Lambda \qquad [(1)],$$

(5) $$\mathfrak{C}(P) \neq \Lambda \qquad [(4),\ 1\,(1)],$$

откуда, принимая во внимание, что А $\subset$ Б, заключаем, что

(6) $$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{B}(P) \qquad [(5),\ (2)],$$

(7) $$\mathfrak{D}(P) = Q \qquad [(6),\ (3)].$$

Если же $n = 0$, то

$$Q = P \qquad [1\,(1),\ 1\,(3)]$$
$$= \mathfrak{A}_{\text{А},\,\Lambda}(P),$$

так как $\mathfrak{A}_{\text{А},\,\Lambda}$ — тождественный алгорифм в А. С другой стороны, в этом случае

(8) $$\mathfrak{C}(P_0) = \Lambda \qquad [1\,(5)],$$

(9) $$\mathfrak{C}(P) = \Lambda \qquad [(8),\ 1\,(1)],$$

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{A}_{\text{А},\,\Lambda}(P) \qquad [(9),\ (2)].$$

Следовательно, при $n = 0$ равенство (7) также имеет место.

Таким образом, это равенство имеет место для слова P в А и слова Q, если существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$, удовлетворяющий условиям 1 (1)—1 (3), 1 (5) и (1).

Допустим теперь, что равенство (7) соблюдено для слова P в Λ и некоторого слова Q. Так как А $\subset$ Б, а алгорифм $\mathfrak{D}$ применим лишь к тем словам в Б, к которым применим алгорифм $\mathfrak{C}$, последний применим к слову P.

Если $\mathfrak{C}(P) \neq \Lambda$, то, в силу (7) и (2), имеет место равенство (3). Поэтому существует ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n$ $(n > 0)$, удовлетворяющий условиям 1 (1)—1 (5). Так как $\mathfrak{C}(P) \neq \Lambda$, имеем, в силу 1 (1), $\mathfrak{C}(P_0) \neq \Lambda$. Совместно с 1 (4) это дает условие (1). Таким образом, в этом случае существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$, удовлетворяющий условиям 1 (1)—1 (3), 1 (5) и (1).

Если же $\mathfrak{C}(P) = \Lambda$, то, в силу (7) и (2),

$$P = \mathfrak{A}_{\text{А},\,\Lambda}(P)$$
$$= Q.$$

Полагая $P_0 = P$, получаем в этом случае ряд слов $P_0, \ldots, P_n$ с $n = 0$, удовлетворяющий условиям 1 (1)—1 (3), 1 (5) и (1). (От условий 1 (2) и (1) в этом случае ничего не остается).

Таким образом, при соблюдении равенства (7) для слова P в А и какого-нибудь слова Q существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$, удовлетворяющий условиям 1 (1)—1 (3), 1 (5) и (1), что и оставалось доказать.

6. Часто бывает нужно повторно применить данный алгорифм к произвольному слову произвольное число раз, что дает новый алгорифм. Данное число применений первоначального алгорифма следует тогда рассматривать как одно из исходных данных для нового алгорифма. При оформлении нового алгорифма в виде алгорифма в некотором алфавите это число должно так или иначе включаться в исходное слово и быть однозначно извлекаемым из этого слова. Применяя для записи чисел алфавит Ч [I. § 3.13], мы можем, например, выражать исходные данные для нового алгорифма словом вида $n*P$, где n — слово в алфавите Ч, выражающее заданное число последовательных применений первоначального алгорифма $\mathfrak{A}$, P — исходное слово в алфавите алгорифма $\mathfrak{A}$. Если А есть этот алфавит, то новый алгорифм имеет алфавит $\text{А} \cup \text{С}$ [I. § 2.6]. (При этом как , так и $*$ может быть буквой алфавита А). Следующая теорема показывает, что это построение новых алгорифмов по данным также ведет от нормализуемых алгорифмов к нормализуемым алгорифмам.

6.1. *Каков бы ни был нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *в алфавите* А, *может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* $\text{А} \cup \text{С}$ *такой, что равенство*

$$\mathfrak{B}(n*P) = Q \tag{1}$$

тогда и только тогда имеет место для слова P *в* А, *слова* Q *и числа* n, *когда существует ряд слов* $P_0, \ldots, P_n$, *удовлетворяющий условиям* 1 (1)—1 (3).

Докажем эту теорему.

Пусть

$$\text{Б} = \text{А} \cup \text{С}, \tag{2}$$

α — буква, не принадлежащая Б,

$$\text{В} = \text{Б} \cup \{\alpha\}. \tag{3}$$

Построим нормальные алгорифмы $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ в алфавите В со схемами

$$\mathfrak{C}\ \begin{cases} \alpha\,| \to \cdot \\ \alpha * \xi \to \alpha * (\xi \in \text{Б}) \\ \alpha * \to \cdot \\ \quad \to \alpha \end{cases},$$

$$\mathfrak{E}\ \begin{cases} * \xi \to * \ (\xi \in \text{Б}) \\ * \to \end{cases},$$

$$\mathfrak{F}\ \begin{cases} \alpha\,| \to \alpha \\ \alpha * \to \cdot \\ \quad \to \alpha, \end{cases}$$

$$\mathfrak{G}\ \{\,| \to \cdot,$$

$$\mathfrak{K}\ \{\dot{*} \to \cdot.$$

Построим нормальные композиции $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{F}$. Это — нормальные алгорифмы над В [§ 3.4.2]. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над В согласно теореме объединения [§ 4.1.1] таким образом, что

(4) $$\mathfrak{H}(Q) \simeq (\mathfrak{G} \circ \mathfrak{E})(Q) * (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{F})(Q) \quad (Q \text{ — слово в В}).$$

Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над алфавитом Г алгорифма $\mathfrak{H}$ согласно теореме 5.1 таким образом, чтобы он обладал следующим свойством: $\mathfrak{D}$ тогда и только тогда перерабатывает слово R в алфавите Г в слово S, когда существует ряд слов $R_0, \ldots, R_n$ $(n \geqslant 0)$, удовлетворяющий условиям

(5) $$R_0 = R,$$

(6) $$R_i = \mathfrak{H}(R_{i-1}) \quad (0 < i \leqslant n),$$

(7) $$R_n = S,$$

(8) $$\mathfrak{E}(R_i) \neq \Lambda \quad (0 \leqslant i < n),$$

(9) $$\mathfrak{E}(R_n) = \Lambda.$$

Построим, наконец, искомый алгорифм $\mathfrak{B}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{K}$:

(10) $$\mathfrak{B} = \mathfrak{K} \circ \mathfrak{D}.$$

$\mathfrak{B}$ является нормальным алгорифмом над объединением алфавитов алгорифмов $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{D}$ [(10), § 3.4.2], а так как $\mathfrak{K}$ — алгорифм в В, $\mathfrak{B}$ есть алгорифм над В и, значит, над Б [(3)]. Покажем, что этот нормальный алгорифм над Б обладает требуемым свойством.

Для этого установим некоторые леммы, относящиеся к алгорифмам $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{H}$. В леммах 6.2—6.7 n означает произвольное натуральное число, P — произвольное слово в алфавите Б.

6.2. $\mathfrak{C}(n * P) = (n-1) * P \quad (n > 0)$.

6.3. $\mathfrak{C}(* P) = \Lambda$.

6.4. $\mathfrak{E}(n * P) = n$.

6.5. $\mathfrak{F}(n * P) = P$.

6.6. $\mathfrak{G}(n) = n - 1 \quad (n > 0)$.

6.7. $\mathfrak{K}(* P) = P$.

В справедливости этих лемм мы легко убеждаемся из рассмотрения схем алгорифмов $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$.

6.8. $\mathfrak{H}(n * P) \simeq (n-1) * \mathfrak{A}(P)$ $(n > 0$, P — *слово в* А$)$.

В самом деле, если n — отличное от нуля натуральное число, P — слово в А, то $n * P$ есть слово в Б и потому

$$(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{E})(n * P) \simeq \mathfrak{G}(\mathfrak{E}(n * P)) \qquad [(3), \S\ 3.4.3]$$

$$\simeq \mathfrak{G}(n) \qquad [6.4]$$

$$= n - 1 \qquad [6.6],$$

откуда

(11) $$(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{E})(n * P) = n - 1;$$

$$(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{F})(n * P) \simeq \mathfrak{A}(\mathfrak{F}(n * P)) \qquad [(3), \S\ 3.4.3]$$

(12) $$\simeq \mathfrak{A}(P) \qquad [6.5];$$

$$\mathfrak{H}(n*P) \simeq (\mathfrak{G} \circ \mathfrak{E})(n*P) * (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{F})(n*P) \qquad [(4)]$$

$$\simeq (n-1)*\mathfrak{A}(P) \qquad [(11), (12)],$$

что и требовалось доказать.

6.9. $\mathfrak{P}(R) \simeq \mathfrak{K}(\mathfrak{D}(R))$ (R — *слово в* В).

Это, согласно § 3.4.3, следует из (10).

Допустим теперь, что слово P в А, слово Q и число n таковы, что существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$, удовлетворяющий условиям 1 (1)—1 (3). В силу 1 (1) и 1 (2), P_i суть слова в А, так как $\mathfrak{A}$ — алгорифм в А. Положим

(13) $$R_i = (n-i)*P_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Имеем

$$R_0 = n*P \qquad [(13), 1\,(1)],$$

(14) $$R_n = *Q \qquad [(13), 1\,(3)].$$

При $0 < i \leqslant n$ имеем

$$R_i = (n-(i-1)-1)*\mathfrak{A}(P_{i-1}) \qquad [(13), 1\,(2)]$$

$$= \mathfrak{H}((n-(i-1))*P_{i-1}) \qquad [6.8]$$

$$= \mathfrak{H}(R_{i-1}) \qquad [(13)].$$

При $0 \leqslant i < n$ имеем

$$\mathfrak{E}(R_i) = (n-i-1)*P_i \qquad [(13), 6.2]$$

$$\neq \Lambda,$$

тогда как

$$\mathfrak{E}(R_n) = \Lambda \qquad [(14), 6.3].$$

Таким образом, ряд слов $R_0, \ldots, R_n$ удовлетворяет условиям (5)—(9), где

(15) $$R = n*P,$$

(16) $$S = *Q.$$

R является здесь словом в алфавите Б [(15)], содержащемся в алфавите В [(3)]. Последний же содержится в алфавите Г алгорифма $\mathfrak{H}$ над В. Следовательно, R есть слово в алфавите Г. Согласно построению алгорифма $\mathfrak{D}$, заключаем, что

(17) $$\mathfrak{D}(R) = S.$$

Имеем

$$\mathfrak{B}(n*P) \simeq \mathfrak{K}(\mathfrak{D}(R)) \qquad [(15), 6.9]$$

$$\simeq \mathfrak{K}(*Q) \qquad [(17), (16)]$$

$$= Q \qquad [6.7, 1\,(3)].$$

Таким образом, равенство (1) имеет место, коль скоро существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$, удовлетворяющий условиям 1 (1)—1 (3).

Допустим теперь, что это равенство имеет место для слова P в А, слова Q и натурального числа n; покажем, что тогда существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$, удовлетворяющий условиям 1 (1)—1 (3).

Имеем

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{D}(n*P)) = Q \qquad [(1),\ 6.9],$$

и, полагая

(18) $$S = \mathfrak{D}(n*P),$$

имеем

(19) $$\mathfrak{K}(S) = Q.$$

Согласно построению алгорифма $\mathfrak{D}$ и в силу (18), существует ряд слов $R_0, \ldots, R_m$, удовлетворяющий условиям

(20) $$R_0 = n*P,$$

(21) $$R_i = \mathfrak{H}(R_{i-1}) \quad (0 < i \leqslant m),$$

(22) $$R_m = S,$$

(23) $$\mathfrak{C}(R_i) \neq \Lambda \quad (0 \leqslant i < m),$$

(24) $$\mathfrak{C}(R_m) = \Lambda.$$

Обозначим буквой l меньшее из чисел m и n.

Покажем индукцией по i, что каждое из слов $R_i (0 \leqslant i \leqslant l)$ может быть представлено в виде $(n-i)*P_i$, где P_i — слово в А.

Это верно относительно слова R_0, равного $n*P$ [(20)]. В качестве P_0 нужно при этом взять слово P в алфавите А.

Допустим, что для некоторого i $(0 < i \leqslant l)$ имеем

(25) $$R_{i-1} = (n-(i-1))*P_{i-1},$$

где P_{i-1} — слово в А. Тогда

$$R_i = \mathfrak{H}(R_{i-1}) \qquad [(21)]$$

$$= (n-i)*\mathfrak{A}(P_{i-1}) \qquad [(25),\ 6.8],$$

причем мы убеждаемся в применимости алгорифма $\mathfrak{A}$ к слову P_{i-1}. Таким образом, при нашем предположении имеем

$$R_i = (n-i)*P_i,$$

где

$$P_i = \mathfrak{A}(P_{i-1}).$$

Так как $\mathfrak{A}$ — алгорифм в А, P_i есть слово в А.

Имеем, следовательно,

(26) $$R_i = (n-i)*P_i \quad (0 \leqslant i \leqslant l),$$

где $P_0 = P$ и P_i — слова в А, удовлетворяющие условиям

(27) $$P_i = \mathfrak{A}(P_{i-1}) \quad (0 < i \leqslant l).$$

m не может быть меньше n, так как тогда мы имели бы

(28) $$l = m,$$

$$R_m = R_l \qquad [(28)]$$

(29) $$= (n - m) * P_m \qquad [(26), (28)],$$

$$\mathfrak{C}(R_m) = (n - m - 1) * P_m \qquad [(29), 6.2]$$

$$\neq \Lambda$$

вопреки (24). Следовательно,

(30) $$n \leqslant m,$$

(31) $$l = n \qquad [(30)],$$

(32) $$R_n = * P_n \qquad [(31), (26)],$$

(33) $$\mathfrak{C}(R_n) = \Lambda \qquad [(32), 6.3],$$

(34) $$n = m \qquad [(33), (23), (30)],$$

(35) $$* P_n = S \qquad [(32), (34), (22)],$$

$$P_n = Q \qquad [(35), 6.7, (19)],$$

$$P_i = \mathfrak{A}(P_{i-1}) \quad (0 < i \leqslant n) \qquad [(27), (31)].$$

Так как, кроме того, $P_0 = P$, ряд слов $P_0, \ldots, P_n$ удовлетворяет условиям **1 (1)**, **1 (2)** и **1 (3)**, что и требовалось доказать.

§ 7. Перевод алгорифма

1. В I. § 6 мы ввели понятие «перевода» слова. Мы рассматривали там алфавиты

(1) $$А = В \cup \{\alpha, \beta\}$$

и

(2) $$Б = В \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\},$$

где В есть некоторый (может быть, пустой) алфавит; α, β, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — буквы, не принадлежащие этому алфавиту, причем $\alpha \neq \beta$ и буквы $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ все различны. Мы определили перевод произвольного слова в Б как некоторое слово в А, по которому исходное слово в Б может быть однозначно восстановлено [I. § 6.2].

В II. § 4. 14 мы построили нормальный алгорифм $\mathfrak{T}$ над алфавитом А $\cup$ Б, перерабатывающий всякое слово в алфавите Б в перевод этого слова.

Рассмотрим теперь какой-нибудь нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ в алфавите Б. Заменяя в схеме этого алгорифма левые и правые части формул подстановок их переводами, мы получим некоторый список формул подстановок в алфавите А. Этот список является схемой некоторого

нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в алфавите А. Алгорифм $\mathfrak{A}$, однозначно определяемый алгорифмом $\mathfrak{B}$, мы будем называть *переводом алгорифма* $\mathfrak{B}$.

1.1. *Перевод всякого нормального алгорифма в алфавите* Б *есть нормальный алгорифм в алфавите* А.

2. Докажем следующую теорему.

2.1. Теорема перевода. *Если* $\mathfrak{B}$ *— нормальный алгорифм в алфавите* Б *и* $\mathfrak{A}$ *— перевод этого алгорифма, то*

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{T}(P)) \simeq \mathfrak{T}(\mathfrak{B}(P)) \quad (P \text{ — слово в Б}). \tag{1}$$

3. Заметим прежде всего, что, по определению перевода алгорифма, между формулами подстановок алгорифма $\mathfrak{B}$, с одной стороны, и формулами подстановок алгорифма $\mathfrak{A}$ — с другой, имеется сохраняющее порядок взаимно-однозначное соответствие, при котором простым формулам соответствуют простые формулы, а заключительным — заключительные; левая (правая) часть формулы, соответствующей какой-либо формуле подстановки F алгорифма $\mathfrak{B}$ есть при этом перевод левой (правой) части формулы F.

Докажем некоторые леммы.

3.1. *Если* $\mathfrak{B} : P \vdash Q$, *то* $\mathfrak{A} : [P^\tau \vdash [Q^\tau$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{B} : P \vdash Q$. P является тогда словом в алфавите Б. Рассмотрим формулу F, применяемую при первом шаге работы алгорифма $\mathfrak{B}$ над словом P. Эта формула простая. Пусть

$$F = A \to B,$$

где A и B — слова в Б. Имеем тогда

$$Q = \Sigma(P, A, B) \qquad [\text{II. § 3.5, I. § 4.6}],$$

откуда

$$[Q^\tau = \Sigma([P^\tau, [A^\tau, [B^\tau) \qquad [\text{I. § 6.3.10}]. \tag{1}$$

Левые части формул подстановок алгорифма $\mathfrak{B}$, предшествующих F, не входят в P. Поэтому переводы этих левых частей, т. е. левые части соответствующих формул подстановок алгорифма $\mathfrak{A}$, не входят в $[P^\tau$ [I. § 6.3.4]. Таким образом, в $[P^\tau$ не входят левые части формул, предшествующих в схеме $\mathfrak{A}$ простой формуле

$$[A^\tau \to [B^\tau,$$

соответствующей F. В силу (1), имеем поэтому $\mathfrak{A} : [P^\tau \vdash [Q^\tau$ [II. § 3.5], что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично этому доказывается лемма.

3.2. *Если* $\mathfrak{B} : P \vdash \cdot Q$, *то* $\mathfrak{A} : [P^\tau \vdash \cdot [Q^\tau$.

Из теоремы I. § 6.3.4 непосредственно следует

3.3. *Если* $\mathfrak{B} : P\urcorner$, *то* $\mathfrak{A} : [P^\tau\urcorner$.

Докажем следующие три леммы.

3.4. *Если* P *— слово в* Б *и* $\mathfrak{A} : [P^\tau \vdash R$, *то существует такое слово* Q *в* Б, *что* $\mathfrak{B} : P \vdash Q$ *и* $R = [Q^\tau$.

3.5. *Если* P *— слово в* Б *и* $\mathfrak{A} : [P^\tau \vdash \cdot R$, *то существует такое слово* Q *в* Б, *что* $\mathfrak{B} : P \vdash \cdot Q$ *и* $R = [Q^\tau$.

3.6. *Если* P *— слово в* Б *и* $\mathfrak{A} : [P^\tau\urcorner$, *то* $\mathfrak{B} : P\urcorner$.

Лемма 3.4. доказывается следующим образом.

Пусть P — слово в Б и $\mathfrak{A} : [P^\tau \vdash R$. Тогда имеет место одно из трех: или существует такое слово Q, что $\mathfrak{B} : P \vdash Q$, или существует такое слово Q, что $\mathfrak{B} : P \vdash \cdot Q$, или $\mathfrak{B} : P\urcorner$ [II. § 3.6.1]. Во втором случае мы имеем, однако, $\mathfrak{A} : [P^\tau \vdash \cdot [Q^\tau$ [3.2], в третьем — $\mathfrak{A} : [P^\tau\urcorner$ [3.3]. Так как ни то, ни другое не совместимо с предположением, что $\mathfrak{A} : [P^\tau \vdash R$ [II. § 3.6.1], эти случаи отпадают. Таким образом, существует такое слово Q, что $\mathfrak{B} : P \vdash Q$. Имеем поэтому $\mathfrak{A} : [P^\tau \vdash [Q^\tau$ [3.1]. А так как, согласно предположению, $\mathfrak{A} : [P^\tau \vdash R$, имеем $R = [Q^\tau$ [II. § 3.6.1], что и требовалось доказать.

Аналогичным образом доказываются леммы 3.5 и 3.6.

Докажем теперь некоторые дальнейшие леммы.

3.7. *Если* $\mathfrak{B} : P \models \cdot Q$, *то* $\mathfrak{A} : [P^\tau \models \cdot [Q^\tau$.

Это легко доказывается с помощью 3.1 и 3.2.

3.8. *Если* $\mathfrak{B} : P \models Q\urcorner$, *то* $\mathfrak{A} : [P^\tau \models [Q^\tau\urcorner$.

Это легко доказывается с помощью 3.1 и 3.3.

3.9. *Если* P *— слово в* Б *и* $\mathfrak{A} : [P^\tau \models \cdot S$, *то алгорифм* $\mathfrak{B}$ *применим к* P.

В самом деле, пусть P — слово в Б и $\mathfrak{A} : [P^\tau \models \cdot S$. Тогда существует такой ряд слов $S_0, S_1, \ldots, S_n$ $(n > 0)$, что

$$\mathfrak{A} : S_0 \vdash S_1 \vdash \ldots \vdash S_{n-1} \vdash \cdot S_n, \tag{2}$$

$$S_0 = [P^\tau. \tag{3}$$

Покажем индукцией по i, что каждое из слов S_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ имеет вид $[Q_i^\tau$, где Q_i — слово в Б. Для S_0 это верно согласно (3), так как P — слово в Б. При этом $Q_0 = P$. Допустим, что

$$S_{j-1} = [Q_{j-1}^\tau$$

для некоторого j, меньшего или равного n, и некоторого слова Q_{j-1} в Б. Согласно (2), имеем тогда

$$\mathfrak{A} : [Q_{j-1}^\tau \vdash S_j,$$

если $j < n$, и

$$\mathfrak{A} : [Q_{j-1}^\tau \vdash \cdot S_j,$$

если $j = n$. В первом случае существует такое слово Q_j, что $S_j = [Q_j^\tau$ и $\mathfrak{B} : Q_{j-1} \vdash Q_j$ [3.4.]. Во втором случае существует такое слово Q_j, что $S_j = [Q_j^\tau$ и $\mathfrak{B} : Q_{j-1} \vdash \cdot Q_j$ [3.5]. В обоих случаях Q_j есть слово в Б, так как $\mathfrak{B}$ — алгорифм в Б. Мы доказали, таким образом, наше утверждение о виде слов S_i. Вместе с тем мы получили такой ряд слов $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, что

$$\mathfrak{B} : Q_0 \vdash Q_1 \vdash \ldots \vdash Q_{n-1} \vdash \cdot Q_n,$$

причем $Q_0 = P$. Следовательно, алгорифм $\mathfrak{B}$ применим к P, что и требовалось доказать.

3.10. *Если* P *— слово в* Б *и* $\mathfrak{A} : [P^\tau \models S\urcorner$, *то алгорифм* $\mathfrak{B}$ *применим к* P.

Эта лемма доказывается аналогично предыдущей.

3.11. *Если алгорифм* $\mathfrak{B}$ *применим к* P, *то*

$$\mathfrak{A}([P^\tau) = [\mathfrak{B}(P)^\tau.$$

В самом деле, пусть алгорифм $\mathfrak{B}$ применим к P и пусть

(4) $$\mathfrak{B}(P) = Q.$$

Тогда $\mathfrak{B}: P \models\cdot Q$ или $\mathfrak{B}: P \models Q\urcorner$ [II. § 3.6.3]. В первом случае $\mathfrak{A}: [P^\tau \models\cdot [Q^\tau$ [3.7]; во втором $\mathfrak{A}: [P^\tau \models [Q^\tau\urcorner$ [3.8]. В обоих случаях

$$\mathfrak{A}([P^\tau) = [Q^\tau \qquad \text{[II. § 3.6.3]}$$
$$= [\mathfrak{B}(P)^\tau \qquad \text{[(4)]},$$

что и требовалось доказать.

3.12. *Если алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к $[P^\tau$, где P — слово в Б, то алгорифм $\mathfrak{B}$ применим к P.*

В самом деле, если алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к $[P^\tau$, то существует такое слово S, что $\mathfrak{A}: [P^\tau \models\cdot S$ или $\mathfrak{A}: [P^\tau \models S\urcorner$ [II. § 3.6.3]. В обоих случаях $\mathfrak{B}$ применим к P [3.9, 3.10], что и требовалось доказать.

Из лемм 3.11 и 3.12 непосредственно следует условное равенство

$$\mathfrak{A}([P^\tau) \simeq [\mathfrak{B}(P)^\tau \quad (P \text{ — слово в Б}),$$

которое может быть переписано в виде 2(1) [II. § 4.14 (11)]. Этим теорема 2.1 доказана.

4. Выведем теперь некоторые следствия из теоремы перевода.

4.1. *Всякий нормальный алгорифм в алфавите* Б *эквивалентен относительно алфавита* В *своему переводу.*

В самом деле, рассмотрим какой-нибудь нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ в алфавите Б и его перевод $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ есть нормальный алгорифм в алфавите А,

$$\text{В} \subset \text{А} \qquad \text{[(1)]},$$
$$\text{В} \subset \text{Б} \qquad \text{[(2)]};$$

следовательно, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть алгорифмы над В. Покажем, что они эквивалентны относительно В.

Заметим для этого, что для всякого слова P в алфавите В

(1) $$\mathfrak{T}(P) = P \quad \text{[II. § 4.14 (11), I. § 6.2.2]}.$$

Если алгорифм $\mathfrak{B}$ перерабатывает слово P в алфавите В в слово в этом же алфавите, то мы имеем равенство (1) и аналогичное равенство для слова $\mathfrak{B}(P)$

(2) $$\mathfrak{T}(\mathfrak{B}(P)) = \mathfrak{B}(P).$$

Из равенств (1), (2) и условного равенства 2(1) непосредственно следует равенство

(3) $$\mathfrak{A}(P) = \mathfrak{B}(P),$$

которое, таким образом, имеет место, коль скоро P есть слово в В, перерабатываемое алгорифмом $\mathfrak{B}$ в слово в этом же алфавите.

Заметим далее, что всякое слово, перерабатываемое алгорифмом $\mathfrak{T}$ в слово в алфавите В, само является словом в В. Это следует из равенств II. § 4.14(11), I. § 6.2(2), I. § 6.1(4).

Рассмотрим теперь слово P в В, перерабатываемое алгорифмом $\mathfrak{A}$ в слово в этом же алфавите. В силу (1), имеет смысл $\mathfrak{A}(\mathfrak{T}(P))$ и

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{T}(P)) = \mathfrak{A}(P). \tag{4}$$

В силу 2(1) и (4), имеет смысл $\mathfrak{T}(\mathfrak{B}(P))$ и

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{B}(P)) = \mathfrak{A}(P).$$

Следовательно, имеет смысл и $\mathfrak{B}(P)$, причем алгорифм $\mathfrak{T}$ перерабатывает слово $\mathfrak{B}(P)$ в слово $\mathfrak{A}(P)$ в В. Согласно сделанному только что замечанию, отсюда следует, что $\mathfrak{B}(P)$ есть слово в В. Наконец, из этого следует, по доказанному выше, что имеет место равенство (3).

Это равенство соблюдается, таким образом, коль скоро P есть слово в В, перерабатываемое алгорифмом $\mathfrak{A}$ в слово в этом же алфавите.

Этим завершено доказательство эквивалентности алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ относительно алфавита В.

До сих пор мы считали фиксированными алфавит В и буквы α, β, γ_1, ..., γ_k. Лишь при фиксации этих объектов получают определенный смысл понятия перевода слова и перевода алгорифма. В дальнейших теоремах этого параграфа речь идет о произвольном алфавите В.

4.2. Теорема приведения. *Пусть α и β — отличные друг от друга буквы, не принадлежащие алфавиту* В. *Тогда всякий нормальный алгорифм над* В *эквивалентен относительно* В *некоторому нормальному алгорифму в* $\mathrm{B} \cup \{\alpha, \beta\}$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{B}$ — произвольный нормальный алгорифм над В. Покажем, что он эквивалентен относительно В некоторому нормальному алгорифму в $\mathrm{B} \cup \{\alpha, \beta\}$.

Пусть Б означает алфавит алгорифма $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathrm{B} \subset$ Б. Перенумеруем буквы алфавита $\text{Б} \setminus \mathrm{B}$. Пусть

$$\text{Б} \setminus \mathrm{B} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\},$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ попарно различны. Полагая

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \cup \{\alpha, \beta\}, \tag{5}$$

имеем ситуацию, описанную в I. § 6.1. Можно, следовательно, строить переводы слов в Б и перевод алгорифма $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{A}$ означает перевод $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{A}$ есть нормальный алгорифм в А, т. е. в $\mathrm{B} \cup \{\alpha, \beta\}$ [(5)], и $\mathfrak{B}$ эквивалентен $\mathfrak{A}$ относительно В 4. [1]. Таким образом, $\mathfrak{B}$ эквивалентен относительно В некоторому нормальному алгорифму в $\mathrm{B} \cup \{\alpha, \beta\}$, что и требовалось доказать.

Мы назвали теорему 4.2 «теоремой приведения», так как она позволяет «приводить» всякий нормальный алгорифм над алфавитом В к эквивалентному относительно В нормальному алгорифму в алфавите $\mathrm{B} \cup \{\alpha, \beta\}$, получаемом из В путем присоединения к В всего двух новых букв. Н. М. Нагорному [11] удалось показать, что число новых букв может быть даже сведено здесь к единице, т. е. что имеет место следующая теорема приведения.

4.3. *Пусть* $\alpha\urcorner \in \mathrm{B}$. *Тогда всякий нормальный алгорифм над* В *эквивалентен относительно* В *некоторому нормальному алгорифму в* $\mathrm{B} \cup \{\alpha\}$.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли здесь совсем обойтись без новых букв, т. е. не является ли верным и следующее утверждение: «всякий нормальный алгорифм над алфавитом В эквивалентен относительно В некоторому нормальному алгорифму в В». На этот вопрос можно, однако, дать отрицательный ответ, как показывает следующая теорема Н. М. Нагорного [11].

4.4. *Удваивающий нормальный алгорифм* $\mathfrak{Y}_B$ *над алфавитом* В [II. § 4.12] *не эквивалентен относительно* В *никакому нормальному алгорифму в* В.

В заключение этого параграфа приведем еще одно следствие из теоремы перевода, используемое в дальнейшем.

4.5. *Пусть* α *и* β *— отличные друг от друга буквы, не принадлежащие алфавиту* В. *Тогда, каков бы ни был нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}$ *над* В, *может быть построен нормальный алгорифм в* $B \cup \{\alpha, \beta\}$, *применимый к тем и только к тем словам в* В, *к которым применим* $\mathfrak{B}$.

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{B}$ — нормальный алгорифм над В, Б — его алфавит. Положим $A = B \cup \{\alpha, \beta\}$. Как в доказательстве теоремы 4.2, мы имеем тогда ситуацию, описанную в [I. § 6.1], и можем построить перевод $\mathfrak{A}$ алгорифма $\mathfrak{B}$. Согласно теореме перевода, имеет место условное равенство 2(1). В применении к словам P в алфавите В получаем

$$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{T}(\mathfrak{B}(P)) \quad (P \text{ — слово в } B) \qquad [2\,(1),\ (1)]. \tag{6}$$

Но алгорифм $\mathfrak{T}$ применим ко всякому слову в алфавите Б и, значит, применим к $\mathfrak{B}(P)$, коль скоро алгорифм $\mathfrak{B}$ применим к P. Следовательно, правая часть равенства (6) имеет смысл, коль скоро $\mathfrak{B}$ применим к P. В силу (6), $\mathfrak{A}(P)$ имеет смысл для тех же слов P в В. Таким образом, алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ применимы к одним и тем же словам в алфавите В, что и требовалось доказать.

§ 8. Некоторые алгорифмы, связанные с матрицами

1. Мы применим сейчас теоремы этой главы к построению некоторых нормальных алгорифмов, связанных с целочисленными матрицами. Эти алгорифмы будут нам нужны в дальнейшем [VI. § 10].

Под *матрицей* мы будем в дальнейшем понимать квадратную матрицу с целыми коэффициентами. Исключение составляют матрицы O_m [2].

Будем записывать произвольные целые числа в виде слов в *алфавите целых чисел* Ц [I. § 2.6]: положительные целые числа, попрежнему, в виде рядов вертикальных черточек, отрицательные целые числа в виде таких рядов со знаком «минус» слева, нуль в виде пустого слова. Например,

$$-|||||$$

будет означать число «минус пять».

Матрицы мы будем следующим образом записывать в виде слов в *алфавите матриц* М [I. § 2.6]. Выписываем друг за другом элементы 1-й строки матрицы, отделяя их друг от друга звездочками, ставим затем квадратик, затем выписываем элементы 2-й строки матрицы, отделяя их друг от друга звездочками, ставим квадратик и т. д.,

пока не дойдем до последнего элемента последней строки матрицы. Матрица

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

запишется, например, так

$$|||**-||\square|*|*|||||\square-|*||*.$$

Число квадратиков в записи матрицы всегда на единицу меньше числа ее строк, а число звездочек между любыми двумя последовательными квадратиками на единицу меньше числа столбцов. В дальнейшем мы будем отождествлять всякую матрицу с ее записью.

2. Обозначим через I_n единичную матрицу n-го порядка, через O_{nm} — нулевую матрицу с n строками и m столбцами.

В частности,

(1) $$I_2 = |*\square*|,$$
$$O_{22} = *\square*.$$

3. *Прямой суммой* матриц M и N называется матрица, составляемая по схеме

$$\left[\begin{array}{c|c} M & O_{mn} \\ \hline O_{nm} & N \end{array}\right],$$

где m — порядок матрицы M, n — порядок матрицы N.

Прямую сумму матриц M и N мы будем обозначать через

$$M \dot{+} N.$$

Рассмотрим прямую сумму $I_2 \dot{+} N$ единичной матрицы I_2 и матрицы 2-го порядка N.

Если

(1) $$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix},$$

то

$$I_2 \dot{+} N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{11} & N_{12} \\ 0 & 0 & N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}.$$

Записью N является тогда слово

(2) $$N_{11} * N_{12} \square N_{21} * N_{22},$$

а записью $I_2 \dot{+} N$ — слово

(3) $$|***\square*|**\square**N_{11}*N_{12}\square**N_{21}*N_{22}.$$

Легко построить нормальный алгорифм, перерабатывающий всякое слово (2) в слово (3). Для этого воспользуемся нормальными алгорифмами

$$\mathfrak{I}_{\square} = \mathfrak{I}_{\{|, -, *\}, \square}$$

и

$$\mathfrak{G}_{\square} = \mathfrak{G}_{\{|, -, *\}, \square},$$

перерабатывающими слово (2) в слова $N_{11} * N_{12}$ и $N_{21} * N_{22}$ соответственно [II. § 4.10]:

(4) $$\mathfrak{I}_{\square}(N) = N_{11} * N_{12},$$

(5) $$\mathfrak{G}_{\square}(N) = N_{21} * N_{22}.$$

Привлечем также нормальные алгорифмы

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{M}^{|**\square*|**\square**}$$

и

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_{M}^{\square**},$$

перерабатывающие всякое слово в алфавите M в слова $|***\square*|**\square**$ и $\square**$ соответственно [II. § 4.7]. $\mathfrak{I}_{\square}$, $\mathfrak{G}_{\square}$, $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ суть нормальные алгорифмы в алфавите M. Применяя к ним теорему § 4.4.1, построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ над M, что

$$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{C}(P)\,\mathfrak{I}_{\square}(P)\,\mathfrak{D}(P)\,\mathfrak{G}_{\square}(P) \quad (P \text{ — слово в M}).$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\mathfrak{A}(N_{11} * N_{12} \square N_{21} * N_{22}) = |*** \square *|** \square ** N_{11} * N_{12} \square ** N_{21} * N_{22}$$

для любых целых чисел N_{11}, N_{12}, N_{21} и N_{22}.

Таким образом, $\mathfrak{A}$ есть нормальный алгорифм над алфавитом M, перерабатывающий всякую матрицу N 2-го порядка в матрицу $I_2 \dotplus N$.

Аналогичным образом может быть построен для любой постоянной матрицы A 2-го порядка нормальный алгорифм над M, перерабатывающий всякую матрицу N 4-го порядка в матрицу $N \dotplus A$.

4. Будем говорить о матрице, что она *унимодулярна*, если ее определитель равен 1.

Если матрица 3 (1) унимодулярна, то для обратной матрицы имеем

(1) $$N^{-1} = \begin{bmatrix} N_{22} & (-1) \times N_{12} \\ (-1) \times N_{21} & N_{11} \end{bmatrix}.$$

Для построения нормального алгорифма, перерабатывающего унимодулярную матрицу N 2-го порядка в матрицу N^{-1}, построим прежде всего нормальный алгорифм умножения целого числа на (—1), перерабатывающий всякое целое число N в число $(-1) \times N$.

Применение этого алгорифма к положительному числу должно сводиться к приписке слева знака минус, его применение к отрицательному числу должно сводиться к отбрасыванию знака минус, а пустое слово

алгорифм должен перерабатывать в пустое слово. Нетрудно видеть, что нормальный алгорифм $\mathfrak{N}$ в алфавите Ц со схемой

$$\begin{cases} — \to \cdot \\ \to \cdot — | \end{cases}$$

работает именно так. Имеем, таким образом,

$$\mathfrak{N}(N) = (-1) \times N \tag{2}$$

для всякого целого числа N.

Воспользуемся теперь алгорифмами $\mathfrak{I}_\square$ и $\mathfrak{G}_\square$ [3], а также аналогичными нормальными алгорифмами

$$\mathfrak{I}_* = \mathfrak{I}_{Ц,*}$$

и

$$\mathfrak{G}_* = \mathfrak{G}_{Ц,*},$$

перерабатывающими всякую пару чисел $N_1 * N_2$ в числа N_1 и N_2 соответственно [II. § 4.10]. Построим алгорифмы $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ и $\mathfrak{B}_4$ следующим образом:

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{I}_* \circ \mathfrak{I}_\square, \tag{3}$$

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{G}_* \circ \mathfrak{I}_\square, \tag{4}$$

$$\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{I}_* \circ \mathfrak{G}_\square, \tag{5}$$

$$\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{G}_* \circ \mathfrak{G}_\square. \tag{6}$$

$\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ и $\mathfrak{B}_4$ суть нормальные алгорифмы над М [§ 3.4.2, (3)—(6)] и, в силу (3)—(6) и § 3.4.3, имеем для любых чисел N_{11}, N_{12}, N_{21} и N_{22}

$$\mathfrak{B}_1(N) = N_{11}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{B}_2(N) = N_{12}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{B}_3(N) = N_{21}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{B}_4(N) = N_{22}, \tag{10}$$

где

$$N = N_{11} * N_{12} \square N_{21} * N_{22}. \tag{11}$$

Построим далее алгорифмы $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ как нормальные композиции алгорифмов $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$ соответственно с алгорифмом $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{N} \circ \mathfrak{B}_2, \tag{12}$$

$$\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{N} \circ \mathfrak{B}_3. \tag{13}$$

$\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ также суть нормальные алгорифмы над М [§ 3.4.2, (12), (13)], и для любых чисел N_{11}, N_{12}, N_{21} и N_{22} имеем

$$\mathfrak{C}_1(N) = (-1) \times N_{12}, \tag{14}$$

$$\mathfrak{C}_2(N) = (-1) \times N_{21}, \tag{15}$$

где N попрежнему есть матрица, определяемая равенством (11) [(12), (13), (8), (9), (2), § 3.4.3].

К нормальным алгорифмам $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{C}^*_M$ [II. § 4.7], $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}^{\square}_M$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}^*_M$, $\mathfrak{B}_1$ над алфавитом М применим теорему § 4.4.1, согласно которой построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{E}$ над М, что

(16) $$\mathfrak{E}(N) \simeq \mathfrak{B}_4(N)\,\mathfrak{C}^*_M(N)\,\mathfrak{C}_1(N)\,\mathfrak{C}^{\square}_M(N)\,\mathfrak{C}_2(N)\,\mathfrak{C}^*_M(N)\,\mathfrak{B}_1(N)$$

(N — слово в М).

Для матрицы N, определяемой равенством (11), будем иметь

(17) $$\mathfrak{E}(N) = N_{22} * ((-1) \times N_{12}) \square ((-1) \times N_{21}) * N_{11}$$ [(16), (10), (14), (15), (7)],

так как

(18) $$\mathfrak{C}^*_M(N) = *$$ [II. § 4.7],

(19) $$\mathfrak{C}^{\square}_M(N) = \square$$ [II. § 4.7].

Но правая часть равенства (17) есть матрица N^{-1}, если матрица N унимодулярна [(1)]. Таким образом, $\mathfrak{E}$ есть искомый нормальный алгорифм над М, перерабатывающий всякую унимодулярную матрицу 2-го порядка в обратную матрицу.

5. Будем говорить о матрице, что она *положительна*, если все ее коэффициенты неотрицательны и хотя бы один из них положителен. Иначе говоря, положительной мы будем называть матрицу, если знак минус не входит в ее запись, а вертикальная черточка входит.

Положим

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Имеем для любой матрицы

(1) $$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

2-го порядка, согласно закону умножения матриц,

(2) $$A_1 \times N = \begin{bmatrix} N_{11}+N_{21} & N_{12}+N_{22} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix},$$

(3) $$A_2 \times N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{11}+N_{21} & N_{12}+N_{22} \end{bmatrix}.$$

Здесь и в дальнейшем косой крест означает умножение матриц.*

Из равенств (2) и (3) следует, что матрицы $A_1 \times N$ и $A_2 \times N$ положительны, если матрица N положительна.

Построим нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, перерабатывающие положительную матрицу N в матрицы $A_1 \times N$ и $A_2 \times N$ соответственно.

---

* Это согласуется с применением косого креста как знака умножения чисел, так как числа суть матрицы первого порядка.

Для этого, принимая во внимание, что при записи натуральных чисел в виде слов в алфавите Ч сложение чисел просто сводится к написанию их рядом, перепишем равенство (1) в виде 4 (11), равенства (2) и (3) — в виде

(4) $$A_1 \times N = N_{11} N_{21} * N_{12} N_{22} \square N_{21} * N_{22},$$

(5) $$A_2 \times N = N_{11} * N_{12} \square N_{11} N_{21} * N_{12} N_{22}.$$

В силу 4 (11), имеем равенства 3 (4), 3 (5), 4 (7)—4 (10), 4 (18), 4 (19), дающие возможность переписать равенства (4) и (5) в виде

$$A_1 \times N = \mathfrak{B}_1(N)\, \mathfrak{B}_3(N)\, \mathfrak{C}^{*}_{M}(N)\, \mathfrak{B}_2(N)\, \mathfrak{B}_4(N)\, \mathfrak{C}^{\square}_{M}(N)\, \mathfrak{G}_{\square}(N),$$

$$A_2 \times N = \mathfrak{I}_{\square}(N)\, \mathfrak{C}^{\square}_{M}(N)\, \mathfrak{B}_1(N)\, \mathfrak{B}_3(N)\, \mathfrak{C}^{*}_{M}(N)\, \mathfrak{B}_2(N)\, \mathfrak{B}_4(N).$$

Эти равенства показывают, что искомые нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ над М могут быть получены на основе применения теоремы § 4.4.1 к алгорифмам $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{C}^{*}_{M}$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{C}^{\square}_{M}$, $\mathfrak{G}_{\square}$ и, соответственно, к $\mathfrak{I}_{\square}$, $\mathfrak{C}^{\square}_{M}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{C}^{*}_{M}$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_4$. Имеем тогда

(6) $$\mathfrak{A}_1(N) = A_1 \times N,$$

(7) $$\mathfrak{A}_2(N) = A_2 \times N$$

для всякой положительной матрицы N 2-го порядка.

6. Перейдем теперь к построению некоторых нормальных алгорифмов над алфавитом $A_0 \cup M$ [I. § 2.6]. Нашей целью будет при этом доказательство следующей теоремы.

6.1. *Может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{M}$ *над алфавитом* $M \cup A_0$, *перерабатывающий всякое слово в алфавите* A_0 *в положительную унимодулярную матрицу 2-го порядка и удовлетворяющий следующим условиям:*

(1) $$\mathfrak{M}(\Lambda) = I_2,$$

(2) $$\mathfrak{M}(a) = A_1,$$

(3) $$\mathfrak{M}(b) = A_2,$$

(4) $$\mathfrak{M}(PQ) = \mathfrak{M}(P) \times \mathfrak{M}(Q) \quad (P,\ Q \text{ — слова в } A_0).$$

Предварительно мы докажем следующую лемму.

6.2. *Может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* $M \cup \{a, b, c\}$, *что*

(5) $\mathfrak{B}(P\,ac\,N) = P\,c\,\mathfrak{A}_1(N)$ (P — *слово в* A_0, N — *положительная матрица 2-го порядка*),

(6) $\mathfrak{B}(P\,bc\,N) = P\,c\,\mathfrak{A}_2(N)$ (P — *слово в* A_0, N — *положительная матрица 2-го порядка*).

Здесь $\mathfrak{A}_1$ *и* $\mathfrak{A}_2$ — *нормальные алгорифмы, построенные в пункте* **5.**

В самом деле, положим для сокращения $M_1 = M \cup \{a, b, c\}$ и построим нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в M_1 со схемой

$$\begin{cases} c\xi \to c & (\xi \in M) \\ \eta c \to \cdot c & (\eta \in A_0). \end{cases}$$

Ясно, что

(7) $\mathfrak{C}(P\eta cN) = Pc$ (P — слово в A_0, $\eta \in A_0$, N — слово в M).

Воспользуемся нормальным алгорифмом

(8) $$\mathfrak{G}_c = \mathfrak{G}_{MUA_0, c}$$

в алфавите M_1 [II. § 4.10] и построим алгорифмы $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ как его нормальные композиции с алгорифмами $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, соответственно:

(9) $$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{G}_c,$$

(10) $$\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{G}_c.$$

$\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ суть нормальные алгорифмы над M_1 [(9), (10), § 3.4.2], и для всякого слова P в A_0 и всякой положительной матрицы N 2-го порядка имеем

(11) $\mathfrak{D}_1(PcN) = \mathfrak{A}_1(N)$ [(9), § 3.4.3, (8), II. § 4.10.6],

(12) $\mathfrak{D}_2(PcN) = \mathfrak{A}_2(N)$ [(10), § 3.4.3, (8). II. § 4.10.6].

Построим нормальные алгорифмы $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ над M_1 согласно § 4.3.1 таким образом, что

(13) $$\mathfrak{E}_1(Q) \simeq \mathfrak{C}(Q)\mathfrak{D}_1(Q) \quad (Q \text{ — слово в } M_1),$$

(14) $$\mathfrak{E}_2(Q) \simeq \mathfrak{C}(Q)\mathfrak{D}_2(Q) \quad (Q \text{ — слово в } M_1).$$

Имеем

(15) $\mathfrak{E}_1(P\eta cN) = Pc\,\mathfrak{A}_1(N)$ (P — слово в A_0, $\eta \in A_0$, N — положительная матрица 2-го порядка) [(13), (7), (11)],

(16) $\mathfrak{E}_2(P\eta cN) = Pc\,\mathfrak{A}_2(N)$ (P — слово в A_0, $\eta \in A_0$, N — положительная матрица 2-го порядка) [(14), (7), (12)].

Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ в M_1 со схемой

$$\begin{cases} ac\xi \to ac & (\xi \in M) \\ \eta ac \to ac & (\eta \in A_0) \\ ac \to & \end{cases}.$$

Имеем, очевидно,

(17) $\mathfrak{F}(PacN) = \Lambda$ (P — слово в A_0, N — слово в M),

$\mathfrak{F}(PbcN) = PbcN$ (P — слово в A_0, N — слово в M)

(18) $\neq \Lambda$.

Применим, наконец, к построенным алгорифмам $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ и $\mathfrak{F}$ теорему разветвления § 5.1.1, согласно которой построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над M_1, что

(19) $$\mathfrak{B}(Q) \simeq \begin{cases} \mathfrak{E}_1(Q) & (Q \text{ — слово в } M_1,\ \mathfrak{F}(Q) = \Lambda) \\ \mathfrak{E}_2(Q) & (Q \text{ — слово в } M_1,\ \mathfrak{F}(Q) \neq \Lambda). \end{cases}$$

Этот алгорифм удовлетворяет условиям (5) и (6) [(15)—19)], что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему 6.1.

Построим алгорифм

(20) $$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_{M_1, c|*\square*|}$$ [II. § 4.4].

$\mathfrak{B}_0$ — нормальный алгорифм над M_1 [II. § 4.4] и

(21) $$\mathfrak{B}_0(P) = Pc|*\square*| \quad (P \text{ — слово в } A_0)$$ [(20), II. § 4.4.5].

Построим нормальный алгорифм

(22) $$\mathfrak{I}_c = \mathfrak{I}_{MUA_0, c}$$ [II. § 4.10].

$\mathfrak{I}_c$ — нормальный алгорифм в M_1 [II. § 4.10] и

(23) $\mathfrak{I}_c(PcN) = P$ (P — слово в A_0, N — слово в M) [(22), II. § 4.10.5].

Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над M_1 согласно 6.2 таким образом, чтобы имели место равенства (5) и (6).

Применим к алгорифмам $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{I}_c$ теорему повторения § 6.5.1, согласно которой построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_1$ над M_1 со следующим свойством: $\mathfrak{B}_1$ тогда и только тогда перерабатывает слово Q в алфавите M_1 в слово R, когда существует ряд слов $Q_0, \ldots, Q_n$ ($n \geqslant 0$), удовлетворяющий условиям

(24) $$Q_0 = Q,$$

(25) $$Q_i = \mathfrak{B}(Q_{i-1}) \quad (0 < i \leqslant n),$$

(26) $$Q_n = R,$$

(27) $$\mathfrak{I}_c(Q_i) \neq \Lambda \quad (0 \leqslant i < n),$$

(28) $$\mathfrak{I}_c(Q_n) = \Lambda.$$

Построим алгорифм

(29) $$\mathfrak{C}_c = \mathfrak{C}_{M_1, c}$$ [II. § 4.7].

$\mathfrak{C}_c$ — нормальный алгорифм в M_1 [II. § 4.7] и

(30) $$\mathfrak{C}_c(cN) = N \quad (N \text{ — слово в M}).$$ [II. § 4.7].

Построим алгорифм $\mathfrak{M}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{C}_c$:

(31) $$\mathfrak{M} = \mathfrak{C}_c \circ \mathfrak{B}_1 \circ \mathfrak{B}_0$$ [§ 3.5.1].

$\mathfrak{M}$ — нормальный алгорифм над M_1 [(31), § 3.5.2] и, значит, над $M \cup A_0$. Покажем, что он удовлетворяет условиям (1)—(4).

Для всякого слова P в A_0 имеем

$$\mathfrak{M}(P) \simeq \mathfrak{C}_c(\mathfrak{B}_1(\mathfrak{B}_0(P))) \qquad [(31), \S\,3.5.3]$$

$$\simeq \mathfrak{C}_c(\mathfrak{B}_1(Pc\,I_2)) \qquad [(21), 2\,(1)]. \tag{32}$$

В частности,

$$\mathfrak{M}(\Lambda) \simeq \mathfrak{C}_c(\mathfrak{B}_1(c\,I_2)) \qquad [(32)], \tag{33}$$

$$\mathfrak{M}(a) \simeq \mathfrak{C}_c(\mathfrak{B}_1(ac\,I_2)) \qquad [(32)]. \tag{34}$$

Полагая

$$Q_0 = c\,I_2, \tag{35}$$

имеем

$$\mathfrak{I}_c(Q_0) = \Lambda \qquad [(35), (23)] \tag{36}$$

В силу (35) и (36), имеем, согласно построению алгорифма $\mathfrak{B}_1$,

$$\mathfrak{B}_1(c\,I_2) = c\,I_2. \tag{37}$$

Следовательно,

$$\mathfrak{M}(\Lambda) \simeq \mathfrak{C}_c(c\,I_2) \qquad [(33), (37)]$$

$$= I_2 \qquad [(30)].$$

Таким образом, $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию (1).

Имеем далее

$$\mathfrak{B}(ac\,I_2) = c\,\mathfrak{A}_1(I_2) \qquad [(5)]$$

$$= cA_1 \times I_2 \qquad [5\,(6)]$$

$$= cA_1. \tag{38}$$

Поэтому, полагая

$$Q_0 = ac\,I_2, \tag{39}$$

$$Q_1 = cA_1, \tag{40}$$

имеем

$$\mathfrak{B}(Q_0) = Q_1 \qquad [(38), (39), (40)]. \tag{41}$$

При этом

$$\mathfrak{I}_c(Q_0) = a \qquad [(39), (23)]$$

$$\neq \Lambda, \tag{42}$$

$$\mathfrak{I}_c(Q_1) = \Lambda \qquad [(40), (23)]. \tag{43}$$

В силу (39)—(43), имеем, согласно построению алгорифма $\mathfrak{B}_1$,

$$\mathfrak{B}_1(ac\,I_2) = cA_1. \tag{44}$$

Следовательно,

$$\mathfrak{M}(a) \simeq \mathfrak{C}_c(cA_1) \qquad [(34), (44)]$$

$$= A_1 \qquad [(30)],$$

и, значит, $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию (2).

Аналогичным образом устанавливается, что $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию (3). Остается показать, что $\mathfrak{M}$ перерабатывает всякое слово в алфавите A_0 в положительную унимодулярную матрицу и удовлетворяет условию (4).

Докажем для этого следующую лемму.

6.3. *Если алгорифм $\mathfrak{M}$ перерабатывает слово P в алфавите A_0 в положительную унимодулярную матрицу, то $\mathfrak{M}$ перерабатывает в положительные унимодулярные матрицы слова aP и bP. При этом*

$$\mathfrak{M}(\eta P) = \mathfrak{M}(\eta) \times \mathfrak{M}(P) \quad (\eta \in A_0). \tag{45}$$

Допустим, что $\mathfrak{M}$ перерабатывает слово P в алфавите A_0 в положительную унимодулярную матрицу и что $\eta \in A_0$. Тогда, согласно (32), алгорифм $\mathfrak{B}_1$ применим к слову $Pc\,I_2$. Пусть

$$R = \mathfrak{B}_1(Pc\,I_2). \tag{46}$$

Согласно построению алгорифма $\mathfrak{B}_1$, имеется ряд слов $Q_0, \ldots, Q_n$ $(n \geqslant 0)$, удовлетворяющий условию

$$Q_0 = Pc\,I_2 \tag{47}$$

и условиям (25)—(28). Покажем, что существуют слова $P_0, \ldots, P_n$ в алфавите A_0 и положительные матрицы 2-го порядка $N_0, \ldots, N_n$ такие, что

$$Q_i = P_i c\,N_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{48}$$

Согласно (47), равенство (48) соблюдается при $i = 0$, если положить

$$P_0 = P,$$

$$N_0 = I_2.$$

Допустим, что $0 < j \leqslant n$ и что

$$Q_{j-1} = P_{j-1} c\,N_{j-1} \tag{49}$$

для некоторого слова P_{j-1} в A_0 и некоторой положительной матрицы 2-го порядка N_{j-1}.

Тогда

$$P_{j-1} = \mathfrak{I}_c(Q_{j-1}) \qquad [(49), (23)]$$

$$\neq \Lambda \qquad [(27)]$$

и потому

$$P_{j-1} = P_j \eta_j \tag{50}$$

для некоторого слова P_j в A_0 и некоторой буквы η_j алфавита A_0. Имеем поэтому

$$Q_j = \mathfrak{B}(P_{j-1} c N_{j-1}) \qquad [(25), (49)]$$

$$= P_j c \mathfrak{A}_{k_j}(N_{j-1}) \qquad [(50), (5), (6)],$$

где

(51) $$k_j = \begin{cases} 1 \text{ при } \eta_j = a, \\ 2 \text{ при } \eta_j = b. \end{cases}$$

Таким образом,

$$Q_j = P_j c N_j,$$

где P_j — слово в A_0 и где

(52) $$N_j = \mathfrak{A}_{k_j}(N_{j-1}),$$

т. е.

(53) $$N_j = A_{k_j} \times N_{j-1} \qquad [(52), 5(6), 5(7)].$$

В силу (53), N_j есть, как и N_{j-1}, положительная матрица 2-го порядка. Этим доказано существование слов $P_0, \ldots, P_n$ в A_0 и положительных матриц 2-го порядка $N_0, \ldots, N_n$ таких, что имеют место равенства (48). Вместе с тем имеем равенства (50) и (52), где $0 < j \leqslant n$ и где $\eta_1, \ldots, \eta_m$ — буквы алфавита A_0, а $k_1, \ldots, k_n$ определяются условиями (51).

Положим теперь

(54) $$S_i = \eta Q_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Имеем

(55) $$S_0 = \eta P c I_2 \qquad [(54), (47)],$$

(56) $$S_i = \eta P_i c N_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n) \qquad [(54), (48)].$$

При $0 < i \leqslant n$ имеем

$$\mathfrak{B}(S_{i-1}) \simeq \mathfrak{B}(\eta P_i \eta_i c N_{i-1}) \qquad [(56), (50)]$$

$$\simeq \eta P_i c \mathfrak{A}_{k_i}(N_{i-1}) \qquad [(5), (6), (51)]$$

(57) $$= S_i \qquad [(52), (56)],$$

$$\mathfrak{I}_0(S_i) = \eta P_i \qquad [(56), (23)]$$

(58) $$\neq \Lambda.$$

Положим далее

(59) $$S_{n+1} = c \mathfrak{A}_k(N_n),$$

где

(60) $$k = \begin{cases} 1 \text{ при } \eta = a, \\ 2 \text{ при } \eta = b. \end{cases}$$

Имеем

$$P_n = \mathfrak{I}_c(Q_n) \qquad [(48),\ (23)]$$

(61) $$= \Lambda \qquad [(28)],$$

(62) $$S_n = \eta c N_n \qquad [(56),\ (61)],$$

(63) $$\mathfrak{B}(S_n) = c\mathfrak{A}_k(N_n) \qquad [(62),\ (5),\ (6),\ (60)],$$

так как N_n есть положительная матрица 2-го порядка. Следовательно,

(64) $$\mathfrak{B}(S_n) = S_{n+1} \qquad [(63),\ (59)].$$

$\mathfrak{A}_k(N_n)$ есть, как и N_n, положительная матрица 2-го порядка [5 (6), 5 (7)]. Поэтому,

(65) $$\mathfrak{I}_c(S_{n+1}) = \Lambda \qquad [(59),\ (23)].$$

В силу (55), (57), (64), (59), (58), (65), имеем, согласно построению алгорифма $\mathfrak{B}_1$,

(66) $$\mathfrak{B}_1(\eta P c I_2) = c\,\mathfrak{A}_k(N_n).$$

Имеем далее

$$\mathfrak{M}(P) = \mathfrak{C}_c(R) \qquad [(32),\ (46)]$$

$$= \mathfrak{C}_c(P_n c N_n) \qquad [(26),\ (48)]$$

(67) $$= N_n \qquad [(61),\ (30)],$$

(68) $$\mathfrak{M}(\eta) = A_k \qquad [(60),\ (2),\ (3)],$$

$$\mathfrak{M}(\eta P) = \mathfrak{C}_c(c\,\mathfrak{A}_k(N_n)) \qquad [(32),\ (66)].$$

$$= A_k \times N_n \qquad [(30),\ 5(6),\ 5(7)]$$

$$= \mathfrak{M}(\eta) \times \mathfrak{M}(P) \qquad [(68),\ (67)].$$

Равенство (45) тем самым установлено. Здесь $\mathfrak{M}(P)$ есть, согласно предположению, положительная унимодулярная матрица 2-го порядка; $\mathfrak{M}(\eta)$ есть одна из матриц A_1, A_2 [(2), (3)]. Поэтому и $\mathfrak{M}(\eta P)$ есть положительная унимодулярная матрица 2-го порядка [(45)]. Лемма 6.3 тем самым доказана.

Закончим теперь доказательство теоремы 6.1. Применяя метод левой индукции в алфавите A_0 [I. § 3.8], убеждаемся на основании равенства (1) и леммы 6.3, что алгорифм $\mathfrak{M}$ перерабатывает всякое слово в этом алфавите в положительную унимодулярную матрицу 2-го порядка. Покажем, что для любых слов P и Q в A_0 имеет место равенство (4).

Фиксируем слово Q. Равенство (4) верно при $P = \Lambda$, так как

$$\mathfrak{M}(\Lambda Q) = \mathfrak{M}(Q) \qquad [\text{I. § 3.6 (2)}]$$

$$= I_2 \times \mathfrak{M}(Q)$$

$$= \mathfrak{M}(\Lambda) \times \mathfrak{M}(Q) \qquad [(1)].$$

Допустим, что равенство (4) установлено для некоторого слова P в A_0. Докажем его для слова ηP в роли P, где $\eta \in A_0$. В силу сочетательного закона умножения матриц и сделанного о слове P предположения имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\eta PQ) &= \mathfrak{M}(\eta) \times \mathfrak{M}(PQ) && [6.3] \\ &= \mathfrak{M}(\eta) \times (\mathfrak{M}(P) \times \mathfrak{M}(Q)) \\ &= (\mathfrak{M}(\eta) \times \mathfrak{M}(P)) \times \mathfrak{M}(Q) \\ &= \mathfrak{M}(\eta P) \times \mathfrak{M}(Q) && [6.3], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Глава IV

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АЛГОРИФМ

В этой главе мы построим нормальный алгорифм над данным произвольным алфавитом А, способный в известном смысле выполнить работу любого алгорифма в А, — «универсальный алгорифм» над А. Универсальный алгорифм будет при этом применяться не к тем словам, к которым применяются отдельные алгорифмы в А, не к словам в А, а к словам, являющимся комбинациями слов в А со словами в некотором расширении этого алфавита, изображающими схемы нормальных алгорифмов в А. Здесь, как и в «универсальной машине» Тюринга [31], применяется метод, используемый в современных больших математических машинах дискретного действия: не только исходные данные, но и предписания, устанавливающие последовательность применяемых действий, записываются в виде слов в надлежащем алфавите и вводятся в машину, способную «разбираться» в записанных предписаниях и выполнять их. Возможность такой записи предписаний обеспечивается их стандартизацией, чему соответствуют у нас схемы нормальных алгорифмов. Прежде всего мы должны дать способ изображения этих схем словами в некотором алфавите, что будет сделано в § 1 этой главы.

§ 1. Изображение нормального алгорифма

1. Будем рассматривать нормальные алгорифмы в произвольном фиксированном алфавите А. Опишем один способ изображения схем таких алгорифмов словами в некотором расширении этого алфавита.

Пусть α, β, γ — буквы, не принадлежащие алфавиту А, отличные друг от друга, от стрелки и от точки. Пусть

$$\text{Б} = \text{А} \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}. \tag{1}$$

Рассмотрим какой-нибудь нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ в алфавите А. Исходя из его схемы, построим следующим образом слово в алфавите Б.

Выпишем друг за другом в порядке очередности формул подстановок алгорифма $\mathfrak{A}$ слова, получаемые из этих формул заменой стрелки буквой α, точки буквой β и присоединением справа буквы γ. Так полученное слово мы будем называть *изображением алгорифма* $\mathfrak{A}$. Изображение алгорифма $\mathfrak{A}$ будем обозначать символом $\mathfrak{A}^{и}$.

Таким образом, если схема $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$(2)\qquad \begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n, \end{cases}$$

где $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — формулы подстановок, то, по определению,

$$(3)\qquad \mathfrak{A}^{\text{и}} = S^{\rightarrow}_{\alpha,\beta} F_1 | \gamma \ldots S^{\rightarrow}_{\alpha,\beta} F_n | \gamma,$$

или, что то же самое,

$$\mathfrak{A}^{\text{и}} = S^{\rightarrow}_{\alpha,\beta} F_1 \gamma \ldots F_n \gamma |.$$

1.1. *Изображение всякого нормального алгорифма в алфавите* А *есть слово в алфавите* Б.

Это непосредственно вытекает из определения изображения алгорифма.

2. Рассмотрим некоторые примеры. В качестве А возьмем алфавит С, в качестве α, β, γ — буквы a, b, c. Тогда алгорифмы $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, рассмотренные в II. § 4.17, будут иметь следующие изображения:

$$\mathfrak{A}_0^{\text{и}} = |*|a*c*ac,$$

$$\mathfrak{A}_1^{\text{и}} = |||||ac,$$

$$\mathfrak{A}_2^{\text{и}} = *|||||a|*c*|a*c*abca*c,$$

$$\mathfrak{A}_3^{\text{и}} = *|||||a|*c*ab*ca*c.$$

3. Нетрудно видеть, что схема алгорифма $\mathfrak{A}$ может быть однозначно восстановлена по его изображению.

В самом деле, слова $S^{\rightarrow}_{\alpha,\beta} F_i | (1 \leqslant i \leqslant n)$ в равенстве 1 (3) не содержат букву γ, так как эта буква не входит в F_i и отлична от α и β. Но всякое слово P в алфавите Б, очевидно, представляется не более чем одним способом в виде

$$P_1 \gamma P_2 \gamma \ldots P_k \gamma,$$

где $P_1, \ldots, P_k$ — слова, не содержащие γ. Это представление слова легко может быть найдено, если P дано: P_1 характеризуется как левое крыло первого вхождения γ в P, $P_2\gamma \ldots P_k\gamma$ находится затем как правое крыло этого вхождения, P_2 — как левое крыло первого вхождения γ в $P_2\gamma \ldots P_k\gamma$ и т. д.; k — как число вхождений γ в P. Следовательно, слова $S^{\rightarrow}_{\alpha,\beta} F_i |$ и их число n определяются однозначно по данному $\mathfrak{A}^{\text{и}}$. Эти слова располагаются здесь в определенном порядке, соответствующем порядку формул подстановок алгорифма $\mathfrak{A}$.

Наконец, по всякому слову $S^{\rightarrow}_{\alpha,\beta} F_i |$ однозначно определяется само соответствующее слово F_i. Ведь α и β не входят в F_i; поэтому все их вхождения в $S^{\rightarrow}_{\alpha,\beta} F_i |$ происходят исключительно от вхождений стрелки

и точки в F_i. Мы, следовательно, получим F_i, если заменим α и β, входящие в $S^{\rightarrow}_{\alpha,\beta}F_i|$, стрелкой и точкой соответственно:

$$F_i = S^{\alpha.}_{\rightarrow,\beta}S^{\rightarrow,}_{\alpha,\beta}F_i||.$$

Таким образом, и число формул подстановок алгорифма $\mathfrak{A}$, и сами эти формулы, и их порядок — всё это однозначно определяется изображением алгорифма $\mathfrak{A}$, что и требовалось доказать.

§ 2. Теорема об универсальном алгорифме

1. Введем теперь букву δ, не принадлежащую нашему алфавиту Б [§ 1 (1)]. Пусть

$$\text{В} = \text{Б} \cup \{\delta\}. \tag{1}$$

Алфавит В дает возможность изображать словами пары: «нормальный алгорифм в А и слово в А». Во всякой такой паре нормальный алгорифм в А может быть представлен своим изображением [§ 1.3], являющимся словом в Б [§ 1.1.1]. Приписывая к этому слову справа букву δ и затем какое-нибудь слово в А, мы получим слово в В вида

$$\mathfrak{A}^{и}\delta P, \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в А, P — слово в А. Слово (2) изображает пару «алгорифм $\mathfrak{A}$ и слово P» в том смысле, что оно этой парой однозначно определяется и само ее однозначно определяет. Первое — очевидно, а второе ясно из того, что P есть правое крыло единственного вхождения δ в $\mathfrak{A}^{и}\delta P$, $\mathfrak{A}^{и}$ — левое крыло этого вхождения, а схема $\mathfrak{A}$ определяется однозначно по $\mathfrak{A}^{и}$ [§ 1.3].

К парам вида (2) естественно применять предписание: «построив по паре $\mathfrak{A}^{и}\delta P$ слово P и схему алгорифма $\mathfrak{A}$, применить затем $\mathfrak{A}$ к P». Это предписание само составляет некоторый алгорифм, перерабатывающий $\mathfrak{A}^{и}\delta P$ в $\mathfrak{A}(P)$, если алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к P. Возникает вопрос о возможности оформления такого алгорифма как нормального. Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

1.1. Теорема об универсальном алгорифме. *Может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{U}$ *над* В, *что*

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{A}^{и}\delta P) \simeq \mathfrak{A}(P) \tag{3}$$

для слов P *в* А *и нормальных алгорифмов* $\mathfrak{A}$ *в* А.

Доказательство этой теоремы составляет главное содержание настоящей главы.

Предварительно мы построим ряд вспомогательных алгорифмов. Некоторые из них будут представлять и самостоятельный интерес.

2. Прежде всего мы построим некоторые алгорифмы, распознающие, является ли одно слово началом другого и работающие в зависимости от этого.

2.1. *Пусть* А — *произвольный алфавит*, ε — *буква, не принадлежащая* А. *Тогда может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *над* $\text{А} \cup \{\varepsilon\}$, *удовлетворяющий следующим условиям.*

Н. 1. $\mathfrak{A}$ *применим ко всякому слову вида* $P\varepsilon Q$, *где* P *и* Q — *слова в* А.

Н. 2. *Если P и Q — слова в* A, *то* $\mathfrak{A}(P\varepsilon Q)$ *тогда и только тогда начинается буквой* ε, *когда Q начинается словом P.*

Н. 3. *Если Q — слово в* A, *начинающееся словом P, то*

$$\mathfrak{A}(P\varepsilon Q) = \varepsilon R,$$

где R таково, что

$$Q = PR.$$

Н. 4. *Если P и Q — слова в* A, *то* $\mathfrak{A}(P\varepsilon Q)$ *содержит единственное вхождение буквы* ε.

Для доказательства этой леммы построим отсекающие алгорифмы $\mathfrak{I}_{A,\varepsilon}$, $\mathfrak{G}_{A,\varepsilon}$ [II. § 4.10] и обращающий алгорифм $\mathfrak{H}_A$ [II. § 4.13]. Пусть $\mathfrak{B}$ означает нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{I}_{A,\varepsilon}$ и $\mathfrak{H}_A$:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}_A \circ \mathfrak{I}_{A,\varepsilon}. \tag{1}$$

Так как $\mathfrak{I}_{A,\varepsilon}$ есть нормальный алгорифм в $A \cup \{\varepsilon\}$ [II. § 4.10], $\mathfrak{B}$ есть нормальный алгорифм над $A \cup \{\varepsilon\}$ [III. § 3.4.2, (1)].

Применим теорему объединения III. § 4. 1. 1 к нормальным алгорифмам $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{G}_{A,\varepsilon}$. Построим согласно этой теореме такой нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над $A \cup \{\varepsilon\}$, что

$$\mathfrak{C}(R) \simeq \mathfrak{B}(R)\varepsilon\mathfrak{I}_{A,\varepsilon}(R) \quad (R \text{ — слово в } A \cup \{\varepsilon\}). \tag{2}$$

Построим далее нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ в $A \cup \{\varepsilon\}$ со схемой

$$\{\xi\varepsilon\xi \to \varepsilon \ (\xi \in A).$$

Искомый алгорифм $\mathfrak{A}$ построим как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D} \circ \mathfrak{C}. \tag{3}$$

Так как $\mathfrak{D}$ — нормальный алгорифм в $A \cup \{\varepsilon\}$, $\mathfrak{A}$ есть нормальный алгорифм над $A \cup \{\varepsilon\}$ [(3), III. § 3.4.2]. Покажем, что он удовлетворяет условиям Н. 1—Н. 4.

Пусть, в самом деле, P и Q — слова в A. Имеем

$$\mathfrak{I}_{A,\varepsilon}(P\varepsilon Q) = P \qquad \text{[II. § 4.10.5]}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{G}_{A,\varepsilon}(P\varepsilon Q) = Q \qquad \text{[II. § 4.10.6]}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{H}_A(P) = [P^{\sim} \qquad \text{[II. § 4.13 (2)]}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{B}(P\varepsilon Q) = [P^{\sim} \qquad \text{[(1), III. § 3.4.3, (4), (6)]}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{C}(P\varepsilon Q) = [P^{\sim}\varepsilon Q \qquad \text{[(2), (7), (5)]}. \tag{8}$$

Пусть теперь S означает наибольшее общее начало слов P и Q [I. § 3.11.3]. S есть слово в A, так как P — слово в A. Имеем

$$P = SU, \tag{9}$$

$$Q = SR, \tag{10}$$

где U и R — слова в A, взаимно простые слева [I. § 3.11.4].

Пусть

(11) $$S = \xi_1 \ldots \xi_m,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — буквы алфавита A. В этом случае

(12) $$[S^\smile = \xi_m \cdots \xi_1 \quad [(11), \text{ I. § 3.12 (3)}],$$

$$[P^\smile = [U^\smile [S^\smile \quad [(9), \text{ I. § 3.12 (4)}]$$

(13) $$= [U^\smile \xi_m \cdots \xi_1 \quad [(12)],$$

(14) $$[P^\smile \varepsilon Q = [U^\smile \xi_m \cdots \xi_1 \varepsilon \xi_1 \ldots \xi_m R \quad [(13), (10), (11)].$$

Из схемы алгорифма $\mathfrak{D}$ усматриваем поэтому, что при $S \neq \Lambda$

(15) $$\mathfrak{D} : [P^\smile \varepsilon Q \rangle = [U^\smile \varepsilon R \quad [(14), \text{ II. § 3.6}].$$

Если же $S = \Lambda$, то

(16) $$P = U \quad [(9)],$$

(17) $$Q = R \quad [(10)],$$

$$[P^\smile \varepsilon Q = [U^\smile \varepsilon R \quad [(16), (17)]$$

и, следовательно, также имеем (15) [II. § 3.6.4].

Так как U и R — слова в A, $[U^\smile * \varepsilon * R$ есть единственное вхождение ε в слово $[U^\smile \varepsilon R$. Поэтому в это слово лишь в том случае входит слово вида $\xi\varepsilon\xi$, когда первая буква слова R совпадает с последней буквой слова $[U^\smile$, т. е. с первой буквой слова U. Это, однако, не имеет места ввиду взаимной простоты слева слов U и R [I. § 3.11.1]. Следовательно, в слово $[U^\smile \varepsilon R$ не входит никакое слово вида $\xi\varepsilon\xi$, т. е.

(18) $$\mathfrak{D} : [U^\smile \varepsilon R \urcorner \quad [\text{II. § 3.6}].$$

Таким образом,

(19) $$\mathfrak{D}([P^\smile \varepsilon Q) = [U^\smile \varepsilon R \quad [(15), (18), \text{ II. § 3.6.3}],$$

(20) $$\mathfrak{D}(\mathfrak{C}(P \varepsilon Q)) = [U^\smile \varepsilon R \quad [(8), (19)].$$

Но

(21) $$\mathfrak{A}(R) \simeq \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(R)) \quad (R \text{ — слово в } A \cup \{\varepsilon\}) \quad [(3), \text{ III. § 3.4.3}].$$

Следовательно,

(22) $$\mathfrak{A}(P \varepsilon Q) = [U^\smile \varepsilon R \quad [(21), (20)].$$

Этим доказано соблюдение условий **H. 1** и **H. 4**. Равенство (22) показывает далее, что $\mathfrak{A}(P \varepsilon Q)$ тогда и только тогда начинается буквой ε, когда $[U^\smile = \Lambda$, т. е. когда $U = \Lambda$. А это имеет место в том и только в том случае, когда $P = S$ [(9)]. Принимая во внимание, что S есть наибольшее общее начало слов P и Q, мы убеждаемся таким

образом в соблюдении условия **Н. 2**. Наконец, соблюдено и условие **Н. 3**, так как в случае, когда Q начинается словом P, имеем

(23) $$P = S,$$

(24) $$U = \Lambda \qquad [(9), (23)],$$

$$Q = PR \qquad [(10), (23)],$$

$$\mathfrak{A}(P\varepsilon Q) = \varepsilon R \qquad [(22), (24)].$$

Лемма, таким образом, доказана.

2.2. *Если буква* ε *не принадлежит алфавиту* A, *то может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* $A \cup \{\varepsilon\}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

(25) $\mathfrak{B}(P\varepsilon Q) = \Lambda$ (P *и* Q — *слова в* A; Q *не начинается словом* P),

(26) $\mathfrak{B}(P\varepsilon PR) = \varepsilon R$ (P *и* R — *слова в* A).

В самом деле, пусть $\varepsilon\urcorner \in A$. Построим тогда нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ над $A \cup \{\varepsilon\}$ со свойствами **Н. 1** — **Н. 4** согласно лемме 2.1. Введем букву ι, не принадлежащую алфавиту $A \cup \{\varepsilon\}$, и построим нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в алфавите $A \cup \{\varepsilon, \iota\}$ со схемой

(27)
$$\begin{cases} \xi\varepsilon \to \iota & (\xi \in A) \\ \xi\iota \to \iota & (\xi \in A) \\ \iota\xi \to \iota & (\xi \in A) \\ \iota \to \end{cases}.$$

Построим искомый алгорифм $\mathfrak{B}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$:

(28) $$\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \circ \mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{B}$ есть, как и $\mathfrak{A}$, нормальный алгорифм над $A \cup \{\varepsilon\}$ [III. § 3.4.2]. Покажем, что этот алгорифм удовлетворяет условиям (25) и (26).

Рассмотрим для этого работу алгорифма $\mathfrak{C}$ в применении к словам в $A \cup \{\varepsilon\}$, содержащим одно и только одно вхождение ε, т. е. к словам вида $S\varepsilon R$, где R и S — слова в A. Если $S = \Lambda$, то в $S\varepsilon R$, очевидно, не входит ни одна из левых частей формул подстановок алгорифма $\mathfrak{C}$. Имеем поэтому

(29) $$\mathfrak{C} : \varepsilon R\urcorner,$$

(30) $\mathfrak{C}(\varepsilon R) = \varepsilon R$ (R — слово в A) [(29), II. § 3.6.10, II. § 3.6.3].

Если же $S \neq \Lambda$, то S имеет вид $T\eta$, где T — слово в A, $\eta \in A$ [I. § 3.8.3] и, как показывает схема (27) алгорифма $\mathfrak{C}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} : S\varepsilon R &\vdash T\iota R \\ &\models \iota R \\ &\models \iota \\ &\vdash \Lambda\urcorner, \end{aligned}$$

и потому

(31) $$\mathfrak{C}(S\varepsilon R)=\Lambda \quad (S,\ R\text{ — слова в А},\ S\neq\Lambda).$$

Пусть теперь P и R — слова в А. Имеем тогда

(32) $$\mathfrak{A}(P\varepsilon PR)=\varepsilon R,$$

так как $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию **Н. 3**. Имеем далее

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(P\varepsilon PR) &\simeq \mathfrak{C}(\mathfrak{A}(P\varepsilon PR)) && [(28),\ \text{III. § 3.4.3}]\\ &\simeq \mathfrak{C}(\varepsilon R) && [(32)]\\ &=\varepsilon R && [(30)]\end{aligned}$$

и, значит, $\mathfrak{B}(P\varepsilon PR)=\varepsilon R$. Таким образом, алгорифм $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию (26).

Пусть, наконец, P и Q — слова в А и Q не начинается словом P. Тогда, в силу условий **Н. 1** и **Н. 4**, которым удовлетворяет алгорифм $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}(P\varepsilon Q)$ есть слово вида $S\varepsilon R$, где S и R — слова в А. При этом $S\neq\Lambda$ [**Н. 2**]. Имеем поэтому

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(P\varepsilon Q) &\simeq \mathfrak{C}(\mathfrak{A}(P\varepsilon Q)) && [(28),\ \text{III. § 3.4.3}]\\ &\simeq \mathfrak{C}(S\varepsilon R)\\ &=\Lambda && [(31)]\end{aligned}$$

и, значит, $\mathfrak{B}(P\varepsilon Q)=\Lambda$. Таким образом, алгорифм $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию (25), что и оставалось доказать.

3. Построим теперь дальнейшие вспомогательные алгорифмы.

3.1. *Если* $\varepsilon\neg\in$ А, *то может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{C}$ *в алфавите* А $\cup\{\varepsilon\}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

(1) $$\mathfrak{C}(P\varepsilon\xi Q)=P\xi\varepsilon Q \quad (P,\ Q\text{ — слова в А},\ \xi\in\text{А}),$$

(2) $$\mathfrak{C}(P\varepsilon)=\Lambda \quad (P\text{ — слово в А}).$$

В самом деле, как нетрудно видеть, нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в А $\cup\{\varepsilon\}$ со схемой

$$\begin{cases}\varepsilon\xi\to\cdot\,\xi\varepsilon & (\xi\in\text{А})\\ \xi\varepsilon\to\varepsilon & (\xi\in\text{А})\\ \varepsilon\to\end{cases}$$

удовлетворяет условиям (1) и (2).

3.2. *Пусть* ε, α *и* γ — *отличные друг от друга буквы, не принадлежащие алфавиту* А. *Тогда может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{D}$ *над* А $\cup\{\alpha,\ \gamma,\ \varepsilon\}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

(3) $$\mathfrak{D}(P\alpha Q\gamma R\varepsilon PS)=\gamma RQS \quad (P,\ Q,\ R,\ S\text{ — слова в А}),$$

(4) $$\mathfrak{D}(P\alpha Q\gamma R\varepsilon\xi S)=P\alpha Q\gamma R\xi\varepsilon S \quad (P,\ Q,\ R,\ S\text{ — слова в А};\ \xi S\text{ не начинается словом }P,\ \xi\in\text{А}),$$

(5) $$\mathfrak{D}(P\alpha Q\gamma R\varepsilon)=\Lambda \quad (P,\ Q,\ R\text{ — слова в А},\ P\neq\Lambda).$$

В самом деле, пусть выполнены условия леммы. Пусть

(6) $$Д = A \cup \{\alpha, \gamma, \varepsilon\}.$$

Построим согласно II. § 4.10 и II. § 4.7 нормальные алгорифмы

(7) $$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{I}_{A \cup \{\gamma, \varepsilon\}, \alpha},$$

(8) $$\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{K}_{A \cup \{\varepsilon\}, \alpha, \gamma},$$

(9) $$\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{K}_{A \cup \{\alpha\}, \gamma, \varepsilon},$$

(10) $$\mathfrak{D}_4 = \mathfrak{G}_{A \cup \{\alpha, \gamma\}, \varepsilon},$$

(11) $$\mathfrak{D}_5 = \mathfrak{C}_{Д, \varepsilon},$$

(12) $$\mathfrak{D}_6 = \mathfrak{C}^{-1}_{Д}.$$

Всё это — алгорифмы в алфавите Д [(6), II. § 4.10, II. § 4.7]. По теореме объединения [III. § 4.1.1] построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{D}_7$ над Д, что

(13) $$\mathfrak{D}_7(T) \simeq \mathfrak{D}_1(T)\,\varepsilon\,\mathfrak{D}_4(T) \quad (T \text{ — слово в } Д).$$

Построим согласно 2.2 нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над $A \cup \{\varepsilon\}$, удовлетворяющий условиям 2(25) и 2(26).

Построим алгорифм $\mathfrak{D}_8$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{D}_7$ и $\mathfrak{B}$:

(14) $$\mathfrak{D}_8 = \mathfrak{B} \circ \mathfrak{D}_7.$$

$\mathfrak{D}_8$, как и $\mathfrak{D}_7$, есть нормальный алгорифм над Д [III. § 3.4.2, (14)].

Построим алгорифм $\mathfrak{D}_9$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{D}_8$ и $\mathfrak{D}_5$:

(15) $$\mathfrak{D}_9 = \mathfrak{D}_5 \circ \mathfrak{D}_8.$$

$\mathfrak{D}_9$, как и $\mathfrak{D}_8$, есть нормальный алгорифм над Д [III. § 3.4.2, (15)].

К нормальным алгорифмам $\mathfrak{D}_6$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_2$ и $\mathfrak{D}_9$ над алфавитом Д применим теорему объединения III. § 4.4.1. Построим согласно этой теореме такой нормальный алгорифм $\mathfrak{D}_{10}$ над Д, что

(16) $$\mathfrak{D}_{10}(T) \simeq \mathfrak{D}_6(T)\,\mathfrak{D}_3(T)\,\mathfrak{D}_2(T)\,\mathfrak{D}_9(T) \quad (T \text{ — слово в } Д).$$

Применим лемму 3.1 к алфавиту $A \cup \{\alpha, \gamma\}$ и букве ε, не принадлежащей этому алфавиту. Построим согласно 3.1 такой нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над Д, что

(17) $$\mathfrak{C}(T\varepsilon\xi S) = T\xi\varepsilon S \quad (T, S \text{ — слова в } A \cup \{\alpha, \gamma\},\ \xi \in A \cup \{\alpha, \gamma\}),$$

(18) $$\mathfrak{C}(T\varepsilon) = \Lambda \quad (T \text{ — слово в } A \cup \{\alpha, \gamma\}).$$

Наконец, применим теорему разветвления III. § 5.1.1 к нормальным алгорифмам $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}_{10}$ и $\mathfrak{D}_8$ над алфавитом Д. Построим согласно этой теореме такой нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над Д, что

(19) $$\mathfrak{D}(T) \simeq \begin{cases} \mathfrak{C}(T), & \text{если } \mathfrak{D}_8(T) = \Lambda \\ \mathfrak{D}_{10}(T), & \text{если } \mathfrak{D}_8(T) \neq \Lambda \end{cases} \quad (T \text{ — слово в } Д).$$

Покажем, что он удовлетворяет условиям (3)—(5).
Имеем в самом деле для любых слов P, Q, R и S в А

(20) $\mathfrak{D}_1(P\alpha Q\gamma R\varepsilon S) = P$ [(7), II. § 4.10.5],

(21) $\mathfrak{D}_2(P\alpha Q\gamma R\varepsilon S) = Q$ [(8), II. § 4.10.7],

(22) $\mathfrak{D}_3(P\alpha Q\gamma R\varepsilon S) = R$ [(9), II. § 4.10.7],

(23) $\mathfrak{D}_4(P\alpha Q\gamma R\varepsilon S) = S$ [(10), II. § 4.10.6],

(24) $\mathfrak{D}_5(\varepsilon S) = S$ [(11), II. § 4.7],

(25) $\mathfrak{D}_7(P\alpha Q\gamma R\varepsilon S) = P\varepsilon S$ [(13), (20), (23)],

(26) $\mathfrak{D}_7(P\alpha Q\gamma R\varepsilon PS) = P\varepsilon PS$ [(25)],

(27) $\mathfrak{B}(\mathfrak{D}_7(P\alpha Q\gamma R\varepsilon PS)) = \varepsilon S$ [(26), 2(26)].

Имеем далее

(28) $\mathfrak{D}_8(T) \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{D}_7(T))$ (T — слово в Д) [(14), III. § 3.4.3],

(29) $\mathfrak{D}_9(T) \simeq \mathfrak{D}_5(\mathfrak{D}_8(T))$ (T — слово в Д) [(15), III. § 3.4.3],

(30) $\mathfrak{D}_8(P\alpha Q\gamma R\varepsilon PS) = \varepsilon S$ (P, Q, R, S — слова в А) [(27), (28)],

(31) $\mathfrak{D}_9(P\alpha Q\gamma R\varepsilon PS) = S$ (P, Q, R, S — слова в А) [(29), (30), (24)],

(32) $\mathfrak{D}_6(T) = \gamma$ (T — слово в Д) [(12), II. § 4.7],

(33) $\mathfrak{D}_{10}(P\alpha Q\gamma R\varepsilon PS) = \gamma RQS$ (P, Q, R, S — слова в А) [(16), (32), (22), (21), (31)].

Так как

$$\mathfrak{D}_8(P\alpha Q\gamma R\varepsilon PS) \neq \Lambda \quad (P,\ Q,\ R,\ S \text{ — слова в А}) \qquad [(30)],$$

получаем, согласно (19) и (33), равенство (3).
Пусть теперь P, Q, R, S — слова в А, ξ — буква алфавита А, такая, что ξS не начинается словом P. Тогда

(34) $\mathfrak{D}_7(P\alpha Q\gamma R\varepsilon\xi S) = P\varepsilon\xi S$ [(25)],

(35) $\mathfrak{B}(\mathfrak{D}_7(P\alpha Q\gamma R\varepsilon\xi S)) = \Lambda$ [(34), 2(25)],

(36) $\mathfrak{D}_8(P\alpha Q\gamma R\varepsilon\xi S) = \Lambda$ [(35), (28)],

(37) $\mathfrak{C}(P\alpha Q\gamma R\varepsilon\xi S) = P\alpha Q\gamma R\zeta\varepsilon S$ [(17)].

В силу (19), (36) и (37), имеем равенство (4).
Пусть, наконец, P, Q, R — слова в А, причем $P \neq \Lambda$. Тогда

(38) $\mathfrak{D}_7(P\alpha Q\gamma R\varepsilon) = P\varepsilon$, [(25)]

и, так как пустое слово не начинается непустым словом P, имеем

(39) $\mathfrak{B}(P\varepsilon) = \Lambda$ [2(25)].

Следовательно,

$$\mathfrak{D}_8(P\alpha Q\gamma R\varepsilon) = \Lambda \qquad [(28), (38), (39)], \tag{40}$$

а с другой стороны,

$$\mathfrak{E}(P\alpha Q\gamma R\varepsilon) = \Lambda \qquad [(18)]. \tag{41}$$

В силу (19), (40) и (41), мы получаем равенство (5).

Лемма, таким образом, доказана.

4. Мы построим теперь нормальный алгорифм, осуществляющий подстановку слова Q вместо первого вхождения слова P в слово R.

4.1. *Пусть α и γ — отличные друг от друга буквы, не принадлежащие алфавиту* A. *Тогда может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{E}$ *над алфавитом* $A \cup \{\alpha, \gamma\}$, *что для слов* P, Q *и* R *в* A

$$\mathfrak{E}(P\alpha Q\gamma R) = \begin{cases} \gamma\Sigma(R, P, Q), & \text{если } P \text{ входит в } R \\ \Lambda, & \text{если } P \text{ не входит в } R. \end{cases} \tag{1}$$

Для построения алгорифма $\mathfrak{E}$ введем букву ε, не принадлежащую алфавиту $A \cup \{\alpha, \gamma\}$. Буквы α, γ и ε отличны друг от друга и не принадлежат A. Применима поэтому лемма 3.2. Построим согласно этой лемме нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над $A \cup \{\alpha, \gamma, \varepsilon\}$, удовлетворяющий равенствам 3 (3)—3 (5). Пусть опять $Д = A \cup \{\alpha, \gamma, \varepsilon\}$ и пусть E означает алфавит алгорифма $\mathfrak{D}$.

Построим нормальные алгорифмы $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ в Д со схемами

$$\{\gamma \to \cdot\, \gamma\varepsilon$$

и

$$\{\xi \to (\xi \in Д \setminus \{\varepsilon\})$$

соответственно.

Построим согласно теореме повторения III. § 6.1.1 нормальный алгорифм $\mathfrak{E}_3$ над E со следующим свойством: $\mathfrak{E}_3$ тогда и только тогда перерабатывает слово T в E в некоторое слово U, когда существует ряд слов $T_0, \ldots, T_m$ $(m > 0)$, удовлетворяющий условиям

$$T_0 = T,$$
$$T_i = \mathfrak{D}(T_{i-1}) \quad (0 < i \leqslant m),$$
$$T_m = U,$$
$$\mathfrak{E}_2(T_i) \neq \Lambda \quad (0 < i < m),$$
$$\mathfrak{E}_2(T_m) = \Lambda.$$

Построим, наконец, искомый алгорифм $\mathfrak{E}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_3$:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_3 \circ \mathfrak{E}_1. \tag{2}$$

Так как $\mathfrak{E}_1$ — нормальный алгорифм в Д, $\mathfrak{E}$ есть нормальный алгорифм над Д [(2), III. § 3.4.2]. Покажем, что для этого алгорифма имеет место равенство (1).

Пусть, в самом деле, P, Q, R — слова в A. Из схемы алгорифма $\mathfrak{E}_1$ усматриваем, что

$$\mathfrak{E}_1 : P\alpha Q\gamma R \vdash\!\!\!- \cdot P\alpha Q\gamma\varepsilon R.$$

Поэтому

(3) $$\mathfrak{E}_1(P\alpha Q\gamma R) = P\alpha Q\gamma\varepsilon R.$$

Допустим сначала, что P входит в R. Пусть тогда

$$V * P * W$$

есть первое вхождение P в R.

Имеем

(4) $$R = VPW \qquad [\text{I. § 4.2}],$$

(5) $$\Sigma(R,\ P,\ Q) = VQW \qquad [\text{I. § 4.6, I. § 4.5}].$$

Если $V \neq \Lambda$, то пусть

(6) $$V = \xi_1 \ldots \xi_k,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — буквы алфавита A. Ни одно из слов $\xi_i \ldots \xi_k PW$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ не начинается в этом случае словом P, так как $\xi_1 \ldots \xi_k * P * W$ — первое вхождение P в R. Согласно 3 (4), имеем поэтому

$$\mathfrak{D}(P\alpha Q\gamma\xi_1 \ldots \xi_{i-1}\varepsilon\xi_i \ldots \xi_k PW) = P\alpha Q\gamma\xi_1 \ldots \xi_i\varepsilon\xi_{i+1} \ldots \xi_k PW \qquad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

т. е., полагая

(7) $$T_i = P\alpha Q\gamma\xi_1 \ldots \xi_i\varepsilon\xi_{i+1} \ldots \xi_k PW \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

имеем

(8) $$\mathfrak{D}(T_{i-1}) = T_i \quad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

Здесь, в частности,

$$T_0 = P\alpha Q\gamma\varepsilon\xi_1 \ldots \xi_k PW \qquad [(7),\ \text{I. § 3.6 (4)}]$$
$$= P\alpha Q\gamma\varepsilon R \qquad [(6),\ (4)],$$

$$T_k = P\alpha Q\gamma\xi_1 \ldots \xi_k\varepsilon PW \qquad [(7),\ \text{I. § 3.6 (4)}]$$

(9) $$= P\alpha Q\gamma V\varepsilon PW \qquad [(6)].$$

Полагая еще

(10) $$T_{k+1} = \gamma\Sigma(R,\ P,\ Q)$$

и принимая во внимание, что P, Q, V и W — слова в A, будем иметь

$$\mathfrak{D}(T_k) = \gamma VQW \qquad [(9),\ 3\,(3)]$$
$$= T_{k+1} \qquad [(5),\ (10)].$$

Согласно (7) и (10), слова $T_1, \ldots, T_k$ содержат букву ε, а слово T_{k+1} не содержит ее. Из схемы алгорифма $\mathfrak{E}_2$ усматриваем поэтому, что

$$\mathfrak{E}_2(T_i) = \varepsilon \neq \Lambda \quad (0 < i \leqslant k), \tag{11}$$

тогда как

$$\mathfrak{E}_2(T_{k+1}) = \Lambda. \tag{12}$$

При $V = \Lambda$ мы определяем лишь слова T_0 и T_1 равенствами

$$T_0 = P\alpha Q\gamma\varepsilon R, \tag{13}$$

$$T_1 = \gamma\Sigma(R, P, Q) \tag{14}$$

и усматриваем, что

$$T_1 = \mathfrak{D}(T_0) \quad [(13), (4), 3(3), (5), (14)],$$

$$\mathfrak{E}_2(T_1) = \Lambda \quad [(14)].$$

Согласно построению алгорифма $\mathfrak{E}_3$, из доказанного следует, что во всех случаях

$$\mathfrak{E}_3(P\alpha Q\gamma\varepsilon R) = \gamma\Sigma(R, P, Q). \tag{15}$$

Имеем, следовательно,

$$\mathfrak{E}_3(\mathfrak{E}_1(P\alpha Q\gamma R)) = \gamma\Sigma(R, P, Q) \quad [(3), (15)], \tag{16}$$

$$\mathfrak{E}(P\alpha Q\gamma R) = \gamma\Sigma(R, P, Q) \quad [(2), \text{III. § 3.4.3}, (16)].$$

Пусть теперь P не входит в R.
Полагая тогда при $R \neq \Lambda$

$$R = \xi_1 \ldots \xi_k, \tag{17}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — буквы алфавита A, будем иметь, согласно 3(4),

$$\mathfrak{D}(P\alpha Q\gamma\xi_1 \ldots \xi_{i-1}\varepsilon\xi_i \ldots \xi_k) = P\alpha Q\gamma\xi_1 \ldots \xi_i\varepsilon\xi_{i+1} \ldots \xi_k \quad (0 < i \leqslant k),$$

так как ни одно из слов $\xi_i \ldots \xi_k$ не начинается словом P. Иначе говоря, полагая

$$T_i = P\alpha Q\gamma\xi_1 \ldots \xi_i\varepsilon\xi_{i+1} \ldots \xi_k \quad (0 \leqslant i \leqslant k), \tag{18}$$

будем иметь равенства (8). Здесь, в частности,

$$T_0 = P\alpha Q\gamma\varepsilon\xi_1 \ldots \xi_k \quad [(18), \text{I. § 3.6 (4)}]$$

$$= P\alpha Q\gamma\varepsilon R \quad [(17)],$$

$$T_k = P\alpha Q\gamma\xi_1 \ldots \xi_k\varepsilon \quad [(18), \text{I. § 3.6 (4)}]$$

$$= P\alpha Q\gamma R\varepsilon \quad [(17)]. \tag{19}$$

Полагая еще

$$T_{k+1} = \Lambda, \tag{20}$$

будем иметь равенство

$$\mathfrak{D}(T_k) = T_{k+1} \qquad [(19),\ (20),\ 3(5)].$$

так как слово P, не входящее в R, непусто. Опять имеем **(11)** и **(12)**, так как ε входит в T_i при $0 < i \leqslant k$ [**(18)**] и не входит в T_{k+1} [**(20)**]. Следовательно,

$$\mathfrak{E}_3(P\alpha Q\gamma\varepsilon R) = \Lambda,$$

причем и здесь, как нетрудно видеть, случай, когда $R = \Lambda$, не составляет исключения. Принимая, наконец, во внимание **(3)** и **(2)**, мы убеждаемся, что

$$\mathfrak{E}(P\alpha Q\gamma R) = \Lambda,$$

что и требовалось доказать.

5. Построим теперь еще один вспомогательный алгорифм.

5.1. *Пусть* α, β, γ, δ, ε — *отличные друг от друга буквы, не принадлежащие алфавиту* A. *Тогда может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{F}$ *над алфавитом* $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, *что для любых слов* P *и* R *в* A, *любого слова* Q *в* $A \cup \{\beta\}$ *и любых слов* S *и* T *в* $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$

(1) $$\mathfrak{F}(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = \begin{cases} \varepsilon SP\alpha Q\gamma T\delta\Sigma(R, P, Q), & \text{если } P \text{ входит в } R \\ SP\alpha Q\gamma\varepsilon T\delta R, & \text{если } P \text{ не входит в } R, \end{cases}$$

(2) $$\mathfrak{F}(\varepsilon SP\beta R) = PR,$$

(3) $$\mathfrak{F}(S\varepsilon\delta R) = R.$$

Пусть, в самом деле, $\Gamma = A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Построим следующие нормальные алгорифмы в Γ:

$\mathfrak{A}_0$ со схемой

$$\begin{cases} \varepsilon\xi \to \xi\varepsilon \\ \varepsilon\gamma \to \cdot\,\gamma\varepsilon, \end{cases}$$

$\mathfrak{A}_2$ со схемой

$$\begin{cases} \eta\varepsilon \to \varepsilon \\ \varepsilon\delta \to\ , \end{cases}$$

$\mathfrak{A}_3$ со схемой

$$\begin{cases} \zeta\delta \to \delta \\ \delta \to \\ \beta \to\ , \end{cases}$$

$\mathfrak{E}_2$ со схемой

$$\begin{cases} \eta\varepsilon \to \varepsilon \\ \varepsilon\eta\rho \to \varepsilon\eta \\ \varepsilon\eta \to\ , \end{cases}$$

$\mathfrak{E}_3$ со схемой

$$\begin{cases} \zeta\delta \to \delta \\ \delta\sigma \to \delta \\ \delta \to\ , \end{cases}$$

$\mathfrak{B}_1$ со схемой

$$\{\ \eta\varepsilon \to \varepsilon\eta,$$

$\mathfrak{B}_2$ со схемой

$$\begin{cases} \eta\varepsilon \to \varepsilon \\ \varepsilon \to \\ \gamma\eta \to \gamma \\ \gamma\delta \to \cdot\gamma. \end{cases}$$

Все эти схемы записаны здесь сокращенно, причем ξ означает произвольную букву алфавита $A \cup \{\alpha, \beta\}$, η — произвольную букву алфавита $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$, ζ — произвольную букву алфавита $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}$, ρ — произвольную букву алфавита $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, σ — произвольную букву алфавита A. Построим еще алгорифмы

(4) $$\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{C}_{\Gamma,\gamma} \qquad [\text{II. § 4.7}],$$

(5) $$\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{I}_{A\cup\{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon\},\delta} \qquad [\text{II. § 4.10}].$$

Это также нормальные алгорифмы в Г [II. § 4.7, II. § 4.10].

Применим лемму 4.1 к алфавиту $A \cup \{\beta\}$ в роли A и буквам α и γ. Это допустимо, так как буквы α и γ отличны друг от друга и не принадлежат алфавиту $A \cup \{\beta\}$. Построим согласно 4.1 такой нормальный алгорифм $\mathfrak{E}$ над $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$, что для слов P, Q, R в $A \cup \{\beta\}$

(6) $$\mathfrak{E}(P\alpha Q\gamma R) = \begin{cases} \gamma\Sigma(R, P, Q), & \text{если } P \text{ входит в } R \\ \Lambda, & \text{если } P \text{ не входит в } R. \end{cases}$$

Построим алгорифм $\mathfrak{C}_1$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{E}$:

(7) $$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{E} \circ \mathfrak{B}_2.$$

$\mathfrak{C}_1$ есть, как и $\mathfrak{B}_2$, нормальный алгорифм над Г [(7), III. § 3.4.2].

Построим алгорифм $\mathfrak{B}_5$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{B}_3$:

(8) $$\mathfrak{B}_5 = \mathfrak{B}_3 \circ \mathfrak{C}_1.$$

$\mathfrak{B}_5$ есть, как и $\mathfrak{B}_3$, нормальный алгорифм над Г [(8), III. § 3.4.2].

Применим к нормальным алгорифмам $\mathfrak{B}_4$ и $\mathfrak{B}_5$ теорему объединения III. § 4.1.1, согласно которой построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_6$ над Г, что

(9) $$\mathfrak{B}_6(W) \simeq \mathfrak{B}_4(W)\,\delta\,\mathfrak{B}_5(W) \quad (W \text{ — слово в Г}).$$

Построим алгорифм $\mathfrak{A}_1$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{B}_6$ и $\mathfrak{B}_1$:

(10) $$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1 \circ \mathfrak{B}_6.$$

$\mathfrak{A}_1$ есть, как и $\mathfrak{B}_1$, нормальный алгорифм над Г [(10), III. § 3.4.2].

Применим к нормальным алгорифмам $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ обобщен-

ную теорему разветвления III. § 5.4.1, согласно которой построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над Г, что

$$(11)\quad \mathfrak{F}(W) \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}_0(W) & (W \text{ — слово в } \Gamma,\ \mathfrak{C}_1(W)=\Lambda,\ \mathfrak{C}_2(W)=\Lambda,\ \mathfrak{C}_3(W)=\Lambda) \\ \mathfrak{A}_1(W) & (W \text{ — слово в } \Gamma,\ \mathfrak{C}_1(W)\neq\Lambda,\ \mathfrak{C}_2(W)=\Lambda,\ \mathfrak{C}_3(W)=\Lambda) \\ \mathfrak{A}_2(W) & (W \text{ — слово в } \Gamma,\ \mathfrak{C}_2(W)\neq\Lambda,\ \mathfrak{C}_3(W)=\Lambda) \\ \mathfrak{A}_3(W) & (W \text{ — слово в } \Gamma,\ \mathfrak{C}_3(W)\neq\Lambda). \end{cases}$$

Покажем, что этот алгорифм удовлетворяет условиям (1)—(3).

Пусть, в самом деле, P и R — слова в А, S и T — слова в $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$, U — слово в $A \cup \{\alpha, \beta\}$, V — слово в $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, Z — слово в $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}$, η — буква алфавита $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Из схем алгорифмов $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ легко усматриваем, что

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_0 : S\varepsilon U\gamma V \models SU\varepsilon\gamma V \\
&\qquad\qquad \vdash \cdot SU\gamma\varepsilon V, \\
&\mathfrak{A}_2 : S\varepsilon\delta R \models \varepsilon\delta R \\
&\qquad\qquad \vdash R\urcorner, \\
&\mathfrak{A}_3 : Z\delta P\beta R \models \delta P\beta R \\
&\qquad\qquad \vdash P\beta R \\
&\qquad\qquad \vdash PR\urcorner, \\
&\mathfrak{C}_2 : S\varepsilon\eta V \models \varepsilon\eta V \\
&\qquad\qquad \models \varepsilon\eta \\
&\qquad\qquad \vdash \Lambda\urcorner, \\
&\mathfrak{C}_2 : S\varepsilon\delta V \models \varepsilon\delta V\urcorner, \\
&\mathfrak{C}_3 : Z\delta R \models \delta R \\
&\qquad\qquad \models \delta \\
&\qquad\qquad \models \Lambda\urcorner, \\
&\mathfrak{C}_3 : Z\delta P\beta R \models \delta P\beta R \\
&\qquad\qquad \models \delta\beta R \\
&\qquad\qquad \vdash \beta R\urcorner, \\
&\mathfrak{B}_1 : S\varepsilon V \models \varepsilon SV\urcorner, \\
&\mathfrak{B}_2 : S\varepsilon U\gamma T\delta R \models \varepsilon U\gamma T\delta R \\
&\qquad\qquad \vdash U\gamma T\delta R \\
&\qquad\qquad \models U\gamma\delta R \\
&\qquad\qquad \vdash \cdot\cdot U\gamma R
\end{aligned}$$

Следовательно,

(12) $$\mathfrak{A}_0(S\varepsilon U\gamma V) = SU\gamma\varepsilon V,$$

(13) $$\mathfrak{A}_2(S\varepsilon\delta R) = R,$$

(14) $$\mathfrak{A}_3(Z\delta P\beta R) = PR,$$

(15) $$\mathfrak{C}_2(S\varepsilon\eta V) = \Lambda,$$

(16) $$\mathfrak{C}_2(S\varepsilon\delta V) = \varepsilon\delta V,$$

(17) $$\mathfrak{C}_3(Z\delta R) = \Lambda,$$

(18) $$\mathfrak{C}_3(Z\delta P\beta R) = \beta R,$$

(19) $$\mathfrak{B}_1(S\varepsilon V) = \varepsilon SV,$$

(20) $$\mathfrak{B}_2(S\varepsilon U\gamma T\delta R) = U\gamma R.$$

Имеем, кроме того,

(21) $$\mathfrak{B}_3(\gamma U) = U \qquad [(4),\ \text{II. § 4.7}],$$

(22) $$\mathfrak{B}_4(Z\delta R) = Z \qquad [(5),\ \text{II. § 4.10.5}].$$

Пусть теперь Q — слово в алфавите $A \cup \{\beta\}$. $P\alpha Q$ есть тогда слово в $A \cup \{\alpha, \beta\}$, и в равенстве (20) можно положить $U = P\alpha Q$, что дает

(23) $$\mathfrak{B}_2(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = P\alpha Q\gamma R,$$

(24) $$\mathfrak{C}(\mathfrak{B}_2(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R)) = \begin{cases} \gamma\Sigma(R, P, Q), & \text{если } P \text{ входит в } R \\ \Lambda, & \text{если } P \text{ не входит в } R \end{cases} \quad [(23), (6)],$$

(25) $$\mathfrak{C}_1(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = \begin{cases} \gamma\Sigma(R, P, Q), & \text{если } P \text{ входит в } R \\ \Lambda, & \text{если } P \text{ не входит в } R \end{cases}$$

$$[(24), (7), \text{III. § 3.4.3}].$$

Предполагая теперь, что P входит в R, и полагая в равенстве (21) $U = \Sigma(R, P, Q)$, что, очевидно, допустимо, получим

(26) $$\mathfrak{B}_3(\mathfrak{C}_1(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R)) = \Sigma(R, P, Q) \qquad [(25), (21)],$$

(27) $$\mathfrak{B}_5(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = \Sigma(R, P, Q) \quad [(26), (8), \text{III. § 3.4.3}].$$

С другой стороны, $S\varepsilon P\alpha Q\gamma T$ есть слово в $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}$ и потому в равенстве (22) можно приравнять Z этому слову, что дает

(28) $$\mathfrak{B}_4(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = S\varepsilon P\alpha Q\gamma T.$$

Далее получаем

(29) $$\mathfrak{B}_6(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta\Sigma(R, P, Q) \quad [(28), (27), (9)]$$

и, приравнивая V в равенстве (19) слову $P\alpha Q\gamma T\delta\Sigma(R, P, Q)$, имеем

(30) $$\mathfrak{B}_1(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta\Sigma(R, P, Q)) = \varepsilon SP\alpha Q\gamma T\delta\Sigma(R, P, Q).$$

Следовательно,

(31) $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{B}_6(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R)) = \varepsilon SP\alpha Q\gamma T\delta\Sigma(R, P, Q)$ [(29), (30)],

(32) $\mathfrak{A}_1(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = \varepsilon SP\alpha Q\gamma T\delta\Sigma(R, P, Q)$ [(31), (10), III. § 3. 4. 3].

Последнее равенство доказано в предположении, что P входит в R. В этом же предположении получаем

(33) $\mathfrak{C}_1(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) \neq \Lambda$ [(25)].

Кроме того, уже независимо от предположения о вхождении P в R, имеем

(34) $\mathfrak{C}_3(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = \Lambda$ [(17)]

и, так как первая буква непустого слова $P\alpha$ принадлежит, очевидно, алфавиту $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$, имеем

(35) $\mathfrak{C}_2(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = \Lambda$ [(15)]

также независимо от того, входит ли P в R.

Имеем поэтому

$$\mathfrak{F}(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = \varepsilon SP\alpha Q\gamma T\delta\Sigma(R, P, Q),$$

если P входит в R [(11), (33), (35), (34), (32)].

Полагая далее $U = P\alpha Q$, $V = T\delta R$ в равенстве (12), получаем

(36) $\mathfrak{A}_0(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = SP\alpha Q\gamma\varepsilon T\delta R$

и в предположении, что P не входит в R, получаем далее

$$\mathfrak{F}(S\varepsilon P\alpha Q\gamma T\delta R) = SP\alpha Q\gamma\varepsilon T\delta R \quad [(11), (25), (35), (34), (36)].$$

Мы доказали таким образом, что алгорифм $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (1).

Согласно (18),

$$\mathfrak{C}_3(Z\delta P\beta R) \neq \Lambda,$$

откуда, согласно (11) и (14),

$$\mathfrak{F}(Z\delta P\beta R) = PR.$$

Полагая здесь в частности $Z = \varepsilon S$, что, очевидно, допустимо, убеждаемся, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (2).

Полагая, наконец, $V = R$ в равенстве (16) и $Z = S\varepsilon$ в равенстве (17), видим, что

$$\mathfrak{C}_2(S\varepsilon\delta R) \neq \Lambda,$$

$$\mathfrak{C}_3(S\varepsilon\delta R) = \Lambda,$$

откуда, согласно (11) и (13), вытекает, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (3), что и оставалось доказать.

6. Возвращаясь теперь к терминологии и обозначениям, введенным в § 1 и § 2. 1, докажем теорему об универсальном алгорифме 1. 1.

Введем букву ε, не принадлежащую алфавиту B. Так как

(1) $$B = A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \qquad [1(1), \S\ 1.1\ (1)],$$

соблюдены условия леммы 5.1. Построим согласно этой лемме нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над алфавитом Г, равным $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, удовлетворяющий условиям 5(1)—5(3). Построим также нормальный алгорифм $\mathfrak{G}$ в Г со схемой

$$\{\rho \to \quad (\rho \in B).$$

К нормальным алгорифмам $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ приме́ним теорему повторения III. § 6.1.1, согласно которой построим нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над Г со следующим свойством: $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда перерабатывает слово U в Г в слово V, когда существует ряд слов $U_0, \ldots, U_m$ $(m > 0)$, удовлетворяющий условиям

$$U_0 = U,$$

(2) $$U_i = \mathfrak{F}(U_{i-1}) \quad (0 < i \leqslant m),$$

(3) $$U_m = V,$$

(4) $$\mathfrak{G}(U_i) \neq \Lambda \qquad (0 < i < m),$$

(5) $$\mathfrak{G}(U_m) = \Lambda.$$

Построим, наконец, нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_{\Gamma,\varepsilon}$ [II. § 4.2] и определим искомый алгорифм $\mathfrak{U}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{A}_{\Gamma,\varepsilon}$ и $\mathfrak{H}$:

(6) $$\mathfrak{U} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{A}_{\Gamma,\varepsilon}.$$

$\mathfrak{U}$ есть нормальный алгорифм над Г [(6), III. § 3.4.2] и, следовательно, над B [(1)]. Покажем, что для него выполняется условное равенство 1(3), в котором P означает произвольное слово в A, $\mathfrak{A}$ — произвольный алгорифм в A.

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в A со схемой § 1.1 (2). Положим для сокращения письма

(7) $$E_i = S^{\rightarrow}_{\alpha,\beta} F_i \,|\, \gamma \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Тогда

(8) $$\mathfrak{A}^{\mathfrak{U}} = E_1 \ldots E_n \qquad [(7), \S\ 1.1\ (3)]$$

Положим

(9) $$C_i = E_1 \ldots E_i \varepsilon E_{i+1} \ldots E_n \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Тогда

(10) $$C_0 = \varepsilon \mathfrak{A}^{\mathfrak{U}} \qquad [(9), (8), \text{I. } \S\ 3.6\,(4)],$$

(11) $$C_n = \mathfrak{A}^{\mathfrak{U}} \varepsilon \qquad [(9), (8), \text{I. } \S\ 3.6\,(4)]$$

Формула подстановки $F_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет вид $A_i \to B_i$, где A_i — слово в A, а B_i, в зависимости от того, является ли F_i простой формулой или заключительной, есть либо также слово в A, либо слово вида $\cdot H_i$, где H_i — слово в A [II. § 3.5]. Представив каждую из формул F_i в этом виде, будем иметь

$$E_i = A_i \alpha D_i \gamma \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \qquad [(7)], \tag{12}$$

где

$$D_i = \mathrm{S}_\beta^{\cdot} B_i| \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{13}$$

D_i есть, очевидно, слово в алфавите $\mathrm{A} \cup \{\beta\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

В следующих леммах P и R — произвольные слова в алфавите A, i — любое из чисел $1, \ldots, n$.

6.1. *Если A_i не входит в R, то*

$$\mathfrak{F}(C_{i-1} \delta R) = C_i \delta R. \tag{14}$$

В самом деле, $E_1 \ldots E_{i-1}$ и $E_{i+1} \ldots E_n$ суть слова в $\mathrm{A} \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$, A_i и R — слова в A, D_i — слово в $\mathrm{A} \cup \{\beta\}$. Поэтому, если A_i не входит в R, то

$$\mathfrak{F}(E_1 \ldots E_{i-1} \varepsilon A_i \alpha D_i \gamma E_{i+1} \ldots E_n \delta R)$$
$$= E_1 \ldots E_{i-1} A_i \alpha D_i \gamma \varepsilon E_{i+1} \ldots E_n \delta R \qquad [5\,(1)],$$

что переписывается в виде (14) [(12), I. § 3.6 (6), I. § 3.6 (5), (9)].

6.2. *Если A_i входит в R, то*

$$\mathfrak{F}(C_{i-1} \delta R) = C_0 \delta \Sigma (R, A_i, D_i). \tag{15}$$

В самом деле, при этом условии

$$\mathfrak{F}(E_1 \ldots E_{i-1} \varepsilon A_i \alpha D_i \gamma E_{i+1} \ldots E_n \delta R)$$
$$= \varepsilon E_1 \ldots E_{i-1} A_i \alpha D_i \gamma E_{i+1} \ldots E_n \delta \Sigma (R, A_i, D_i) \qquad [5\,(1)],$$

что переписывается в виде (15) [(12), (8), (10)].

6.3. $\mathfrak{F}(C_n \delta R) = R$.

Это следует из (11) и 5 (3).

6.4. $\mathfrak{F}(C_0 \delta P \beta R) = PR$.

Это следует из (10) и 5 (2).

6.5. $\mathfrak{A}_{\Gamma, \varepsilon}(\mathfrak{A}^{\mathrm{и}} \delta P) = C_0 \delta P$.

В самом деле,

$$\mathfrak{A}_{\Gamma, \varepsilon}(\mathfrak{A}^{\mathrm{и}} \delta P) = \varepsilon \mathfrak{A}^{\mathrm{и}} \delta P \qquad [\text{II. § 4.2 (3)}]$$
$$= C_0 \delta P \qquad [(10)].$$

6.6. *Если $\mathfrak{A} : P \vdash Q$, то существует такой ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_k$ $(k > 0)$, что*

$$P_0 = C_0 \delta P, \tag{16}$$

$$P_i = \mathfrak{F}(P_{i-1}) \quad (0 < i \leqslant k), \tag{17}$$

(18) $$P_k = C_0 \delta Q,$$

(19) $$\mathfrak{G}(P_i) \neq \Lambda \qquad (0 \leqslant i \leqslant k).$$

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A} : P \vdash Q$. Тогда существуют такие числа i, что $1 \leqslant i \leqslant n$ и что A_i входит в P. Пусть k будет наименьшим из таких i. Тогда $1 \leqslant k \leqslant n$ и A_i не входит в P при $1 \leqslant i < k$, тогда как A_k входит в P. Определим слова $P_0, \ldots, P_{k-1}$ равенствами

(20) $$P_i = C_i \delta P \quad (0 \leqslant i < k)$$

и слово P_k равенством (18).

Равенство (16) тогда будет выполнено [(20)]. Равенство (17) будет при $0 < i < k$ вытекать из 6.1 и (20).

Имеем далее

(21) $$Q = \Sigma(P, A_k, B_k),$$

так как $\mathfrak{A} : P \vdash Q$, причем применяется простая k-я формула преобразования

$$F_k = A_k \to B_k,$$

где B_k — слово в A. Согласно (13),

(22) $$D_k = B_k,$$

так как B_k не содержит точки. Имеем поэтому

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(P_{k-1}) &= \mathfrak{F}(C_{k-1}\delta P) && [(20)] \\ &= C_0 \delta \Sigma(P, A_k, B_k) && [6.2, (22)] \\ &= P_k && [(21), (18)]. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (17) выполняется при $0 < i \leqslant k$. Равенство (18) имеет место по определению P_k. Наконец, все слова P_i содержат букву ε [(20), (18), (9)], откуда, согласно схеме алгорифма $\mathfrak{G}$, следуют неравенства (19).

6.7. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash\cdot Q$, *то существует такой ряд слов* $P_0, \ldots, P_k$ $(k > 0)$, *что выполнены условия* (16) *и* (17) *и что*

(23) $$P_k = Q,$$

(24) $$\mathfrak{G}(P_i) \neq \Lambda \qquad (0 \leqslant i < k),$$

(25) $$\mathfrak{G}(P_k) = \Lambda.$$

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A} : P \vdash\cdot Q$. Аналогично тому, как определялось число k в доказательстве предыдущей леммы, определим число h таким образом, что $1 \leqslant h \leqslant n$ и что A_i не входит в P при $1 \leqslant i < h$, тогда как A_h входит в P. Положим $k = h + 1$ и определим слова $P_0, \ldots, P_{h-1}$ равенствами

(26) $$P_i = C_i \delta P \quad (0 \leqslant i < h);$$

слово P_h — равенством

(27) $$P_h = C_0 \delta\, \Sigma(P,\ A_h,\ D_h);$$

слово P_k — равенством (23).

Равенство (16) будет тогда выполнено [(26)]. При $1 \leqslant i < h$ равенство (17) вытекает из 6.1 и (26), а при $i = h$ из 6.2, (26) и (27). Это равенство, таким образом, выполнено при $1 \leqslant i < k$.

Так как $\mathfrak{A} : P \,|\!-\!\cdot Q$ и A_h есть единственное из слов $A_1, \ldots, A_h$, входящее в P, формула F_h действует при применении алгорифма $\mathfrak{A}$ к слову P и является заключительной. Как таковая она имеет вид

$$A_h \rightarrow \cdot H_h,$$

причем H_h — слово в A и

(28) $$Q = \Sigma(P,\ A_h,\ H_h).$$

Имеем поэтому

(29) $$B_h = \cdot H_h,$$

(30) $$D_h = \beta H_h \qquad [(29),\ (13)].$$

Пусть теперь $R * A_h * S$ есть первое вхождение A_h в P. Тогда

(31) $$\Sigma(P,\ A_h,\ D_h) = R\beta H_h S \qquad [(30)],$$

(32) $$Q = RH_hS \qquad [(28)],$$

$$P_h = C_0 \delta R\beta H_h S \qquad [(27),\ (31)]$$

(33) $$= \varepsilon \mathfrak{A}^{\mathfrak{n}} \delta R\beta H_h S \qquad [(10)].$$

Здесь $\mathfrak{A}^{\mathfrak{n}}$ — слово в $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$; R, H_h и S — слова в A. Поэтому

$$\mathfrak{F}(P_h) = RH_hS \qquad [(33),\ 5\,(2)]$$

$$= P_k \qquad [(32),\ (23)],$$

т. е.

$$\mathfrak{F}(P_{k-1}) = P_k.$$

Равенство (17) выполнено, таким образом, и при $i = k$. Равенство (23) выполнено по определению P_k.

Слова P_i содержат ε при $0 \leqslant i \leqslant h$ [(26), (27), (9)], а слово P_k не содержит ε [(23)]. Отсюда, согласно схеме алгорифма $\mathfrak{F}$, следует соблюдение условий (24) и (25). Лемма, таким образом, доказана.

6.8. *Если* $\mathfrak{A} : P \urcorner$, *где* P *— слово в* A, *то существует такой ряд слов* $P_0, \ldots, P_k$ $(k > 0)$, *что выполнены условия* (16), (17), (24), (25) *и условие*

(34) $$P_k = P.$$

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A} : P \urcorner$. Тогда ни одно из слов A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ не входит в P. Положим $k = n + 1$ и определим слова $P_0, \ldots, P_n$ равенствами

(35) $$P_i = C_i \delta P \quad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

и слово P_k равенством (34).

Равенство (16) выполнено согласно (35). При $0<i\leqslant n$, т. е. при $0<i<k$, равенство (17) выполнено согласно 6.1 и (35).

Имеем далее

$$P_n=\mathfrak{A}^{\text{и}}\varepsilon\delta P \qquad [(35),\ (11)], \tag{36}$$

причем $\mathfrak{A}^{\text{и}}$ есть слово в $A\cup\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$, а P — слово в A. Поэтому

$$\mathfrak{F}(P_n)=P \qquad [(36),\ 5\,(3)]$$

$$=P_k \qquad [(34)],$$

т. е. $\mathfrak{F}(P_{k-1})=P_k$. Равенство (17) выполнено, таким образом, и при $i=k$. Равенство (34) выполнено по определению P_k.

Слова P_i содержат ε при $0\leqslant i<k$ [(35), (9)], тогда как P_k не содержит ε [(34)]. Принимая во внимание схему алгорифма $\mathfrak{G}$, убеждаемся поэтому, что соблюдены условия (24) и (25).

6.9. *Если* $\mathfrak{A}:P\models\cdot Q$, *то*

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{A}^{\text{и}}\delta P)=Q. \tag{37}$$

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}:P\models\cdot Q$. Тогда существует такой ряд слов $P_0,\ldots,P_r$ $(r>0)$, что

$$P_0=P, \tag{38}$$

$$P_r=Q \tag{39}$$

и что

$$\mathfrak{A}:P_0\vdash P_1\vdash\ldots\vdash P_{r-1}\vdash\cdot P_r. \tag{40}$$

Согласно (40) и 6.6, для каждого j такого, что $0<j<r$, может быть построен такой ряд слов $P_{j,0},\ P_{j,1},\ldots,\ P_{j,k_j}$ $(k_j>0)$, что

$$P_{j,0}=C_0\delta P_{j-1}, \tag{41}$$

$$P_{j,i}=\mathfrak{F}(P_{j,i-1}) \quad (0<i\leqslant k_j), \tag{42}$$

$$P_{j,k_j}=C_0\delta P_j, \tag{43}$$

$$\mathfrak{G}(P_{j,i})\neq\Lambda \quad (0\leqslant i\leqslant k_j). \tag{44}$$

Согласно (40) и 6.7, может быть построен такой ряд слов $P_{r,0}$, $P_{r,1},\ldots,\ P_{r,k_r}$ $(k_r>0)$, что

$$P_{r,0}=C_0\delta P_{r-1}, \tag{45}$$

$$P_{r,i}=\mathfrak{F}(P_{r,i-1}) \quad (0<i\leqslant k_r), \tag{46}$$

$$P_{r,k_r}=P_r, \tag{47}$$

$$\mathfrak{G}(P_{r,i})\neq\Lambda \quad (0\leqslant i<k_r), \tag{48}$$

$$\mathfrak{G}(P_{r,k_r})=\Lambda \tag{49}$$

Мы имеем, таким образом, r рядов слов

(50) $$P_{j,0},\ P_{j,1},\ldots,\ P_{j,k_j}\quad (1\leqslant j\leqslant r),$$

причем, согласно (41), (43) и (45), последний член $P_{j-1,k_{j-1}}$ $(j-1)$-го ряда совпадает с первым членом $P_{j,0}$ j-го ряда при $1<j\leqslant r$. Эти ряды можно поэтому так объединить в один ряд $U_0, U_1,\ldots, U_m$, что всякий ряд (50) будет совпадать с рядом

$$U_{h_{j-1}},\ U_{h_{j-1}+1},\ldots,U_{h_j},$$

где

(51) $$h_0=0,$$

$$h_j=k_1+k_2+\ldots+k_j\quad (1\leqslant j\leqslant r),$$

(52) $$m=h_r.$$

При этом

$$U_0=U_{h_0}\qquad [(51)]$$

$$=P_{1,0}$$

$$=C_0\mathfrak{d}P\qquad [(41),\ (45),\ (38)]$$

(53) $$=\mathfrak{A}_{\Gamma,\varepsilon}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{u}}\mathfrak{d}P)\qquad [6.5],$$

(54) $$U_i=\mathfrak{F}(U_{i-1})\quad (0<i\leqslant m)\qquad [(42),\ (46)],$$

$$U_m=U_{h_r}\qquad [(52)]$$

(55) $$=P_{r,k_r}$$

(56) $$=Q\qquad [(47),\ (39)],$$

(57) $$\mathfrak{G}(U_i)\neq\Lambda\quad (0\leqslant i<m)\qquad [(44),\ (48)],$$

(58) $$\mathfrak{G}(U_m)=\Lambda\qquad [(55),\ (49)].$$

В силу (53), (54), (56) — (58) и согласно построению алгорифма $\mathfrak{H}$,

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{A}_{\Gamma,\varepsilon}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{u}}\mathfrak{d}P))=Q.$$

Поэтому, согласно III. § 3. 4. 3 и (6), имеем доказываемое равенство (37).

6.10. *Если* $\mathfrak{A}:P\,|=Q\urcorner$, *то имеет место равенство* (37).

Это доказывается аналогично предыдущему, с той разницей, что вместо леммы 6.7 придется применить лемму 6.8.

6.11. *Если алгорифм* $\mathfrak{A}$ *применим к слову* P, *то*

(59) $$\mathfrak{U}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{u}}\mathfrak{d}P)=\mathfrak{A}(P).$$

В самом деле, пусть алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P. Пусть Q означает результат применения $\mathfrak{A}$ к P. Тогда

(60) $$\mathfrak{A}(P)=Q,$$

и потому либо $\mathfrak{A}:P|=\cdot Q$, либо $\mathfrak{A}:P|=Q\urcorner$ [II. § 3.6.3]. В обоих случаях имеет место равенство (37) [6.9, 6.10]. В силу (37) и (60), имеет место равенство (59), что и требовалось доказать.

6.12. *Если алгорифм* $\mathfrak{U}$ *применим к слову* $\mathfrak{A}^{\mu}\delta P$, *то алгорифм* $\mathfrak{H}$ *применим к слову* $C_0\delta P$.

В силу III. § 3.4.3 и 6.5, это легко усматривается из равенства (6).

6.13. *Если алгорифм* $\mathfrak{H}$ *применим к слову* $C_0\delta P$, *то алгорифм* $\mathfrak{A}$ *применим к слову* P.

В самом деле, пусть алгорифм $\mathfrak{H}$ применим к слову $C_0\delta P$ и пусть

$$\mathfrak{H}(C_0\delta P)=V.$$

Тогда, согласно построению алгорифма $\mathfrak{H}$, существует ряд слов $U_0,\ldots,U_m$ $(m>0)$, удовлетворяющий условиям (2)—(5) и условию

(61) $$U_0=C_0\delta P.$$

Имеет место одно из трех: либо $\mathfrak{A}:P\urcorner$, либо существует такое слово Q, что $\mathfrak{A}:P|-Q$, либо существует такое слово Q, что $\mathfrak{A}:P|-\cdot Q$ [II. § 3.6.1]. В первом и третьем случаях алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P, и доказывать больше нечего. Во втором случае существует ряд слов $P_0,\ldots,P_k$ $(k>0)$, удовлетворяющий условиям (16)—(19) [6.6]. Пусть тогда r означает меньшее из чисел m и k. В силу (16) и (61),

$$P_0=U_0,$$

откуда, согласно (17) и (2),

(62) $$P_i=U_i \quad (0\leqslant i\leqslant r).$$

В частности $P_r=U_r$, откуда, в силу (19) и (5), $r\neq m$. Следовательно, $r=k$ и $k<m$.

Имеем поэтому

$$U_k=P_k \qquad [(62)]$$
$$=C_0\delta Q \qquad [(18)].$$

Здесь Q есть слово в алфавите A, так как $\mathfrak{A}:P|-Q$. Применяя к Q рассуждение, совершенно аналогичное только что проведенному для слова P, мы убеждаемся в том, что либо алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к Q, либо словом U_k начинается ряд слов

$$U_k,\ U_{k+1},\ldots,\ U_{k+k_2} \quad (k_2>0,\ k+k_2<m)$$

такой, что

$$U_{k+k_2}=C_0\delta Q_2,$$

где Q_2 таково, что $\mathfrak{A}:Q|-Q_2$. В первом случае алгорифм $\mathfrak{A}$ применим и к P, так как $\mathfrak{A}:P|-Q$. Во втором случае мы можем применить к Q_2 аналогичное рассуждение.

Этот процесс последовательного построения слов Q, Q_2, Q_3 и т. д. таких, что $\mathfrak{A}:P|-Q|-Q_2|-\cdots$ и рядов слов

$$U_0,\ldots,\ U_k \quad (0<k<m),$$

$$U_k, \ldots, U_{k+k_2} \quad (k_2 > 0,\ k + k_2 < m),$$

. . . . . .

$$U_{k+k_2+\ldots+k_{j-1}}, \ldots, U_{k+k_2+\ldots+k_j} \quad (k_j > 0,\ k + k_2 + \ldots + k_j < m)$$

должен оборваться, так как числа k, $k+k_2, \ldots$, $k+k_2+\ldots+k_j$, меньшие m, образуют возрастающий ряд. Оборваться же он может лишь на таком слове Q_s, что либо $\mathfrak{A} : Q_s \urcorner$, либо $\mathfrak{A} : Q_s \vdash \cdot\, Q_{s+1}$, где Q_{s+1} есть некоторое слово. В первом случае

$$\mathfrak{A} : P \models Q_s \urcorner,$$

а во втором

$$\mathfrak{A} : P \models \cdot\, Q_{s+1}.$$

В обоих случаях алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P, что и требовалось доказать.

6.14. *Если алгорифм* $\mathfrak{U}$ *применим к слову* $\mathfrak{A}^{\mathfrak{n}}\delta P$, *то алгорифм* $\mathfrak{A}$ *применим к слову* P.

Это непосредственно следует из двух предыдущих лемм.

Из лемм **6.11** и **6.14** вытекает справедливость условного равенства **1 (3)**. Тем самым теорема об универсальном алгорифме **1.1** доказана.

§ 3. Запись нормального алгорифма

1. Способ изображения схемы нормального алгорифма, указанный в § **1**, является простым и удобным, но требует введения новых букв. В дальнейшем [V] нам понадобится иной способ изображения схем нормальных алгорифмов, способ несколько более сложный, однако обходящийся лишь двумя буквами. В тех случаях, когда исходный алфавит содержит более одной буквы, этот способ даст нам возможность записывать схемы нормальных алгорифмов в исходном алфавите в виде слов в этом же алфавите, что имеет существенное значение, как мы увидим ниже.

2. Рассмотрим наряду с произвольным алфавитом А алфавит A_0 [I. § 2.6]. Определим перевод слова в алфавите Б [§ 1.1 (1)], как в I. § 6, считая при этом алфавит В пустым, беря в качестве α и β [I. § 6] соответственно буквы a и b, а в качестве $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — буквы алфавита Б [§ 1. 1 (1)]. Роль алфавита Б [I. § 6.1 (2)] играет наш теперешний алфавит Б, роль алфавита А [I. § 6.1 (1)] — алфавит A_0 (отнюдь не теперешний алфавит А).

Перевод всякого слова в алфавите Б есть теперь слово в алфавите A_0, а именно некоторая (a, b)-цепь в A_0 [I. § 6.2.1], т. е. некоторое соединение (a, b)-звеньев [I. § 5.2] или пустое слово. (a, b)-звеньями являются слова aba, $abba$, $abbba$, ... [I. § 5.1].

Может быть построен нормальный алгорифм $\mathfrak{T}$ над алфавитом $A_0 \cup$ Б, перерабатывающий всякое слово в алфавите Б в перевод этого слова [II. § 4.14]. Может быть также построен нормальный алгорифм $\mathfrak{T}_1$ над $A_0 \cup$ Б, перерабатывающий перевод всякого слова в Б в само это слово [II. § 4.15]. Этими алгорифмами мы будем пользоваться в дальнейшем.

3. Будем теперь рассматривать нормальные алгорифмы в алфавите А и их изображения [§ 1.1]. Изображение всякого нормального

алгорифма в А есть слово в алфавите Б [§. 1.1(1)]. Перевод этого изображения есть слово в алфавите A_0.

Перевод изображения нормального алгорифма в алфавите А мы будем называть *записью* этого алгорифма. Запись алгорифма $\mathfrak{A}$ мы будем обозначать символом $\mathfrak{A}^з$.

По определению записи

$$\mathfrak{A}^з = \mathfrak{T}(\mathfrak{A}^и),$$

(1)
$$\mathfrak{A}^и = \mathfrak{T}_1(\mathfrak{A}^з)$$

для всякого нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в алфавите А.

3.1. *Запись всякого нормального алгорифма в алфавите* А *есть слово в алфавите* A_0.

3.2. *Всякий нормальный алгорифм в алфавите* А *вполне определяется своей записью.*

В самом деле, если дана запись $\mathfrak{A}^з$ нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в алфавите А, то изображение $\mathfrak{A}^и$ этого алгорифма может быть получено в результате применения к $\mathfrak{A}^з$ алгорифма $\mathfrak{T}_1$ [(1)], а схема алгорифма $\mathfrak{A}$ может быть затем однозначно восстановлена по изображению [§ 1.3].

4. Особенно интересен тот случай, когда буквы a и b принадлежат алфавиту А, т. е. когда $A_0 \subset A$. Тогда запись всякого нормального алгорифма в алфавите А есть слово в том же алфавите [3.1]. Эта возможность записывать схемы нормальных алгорифмов в алфавите А в виде слов в том же алфавите, очевидно, связана не с тем, что А содержит именно буквы a и b, а только с тем, что этот алфавит содержит не менее двух букв. Тогда можно выбрать произвольным образом какие-нибудь две из букв алфавита А и определить запись нормального алгорифма в А, заставляя эти буквы играть роли a и b.

5. Запись $\mathfrak{A}^з$ нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в алфавите А была определена выше с помощью изображения этого алгорифма и, значит, с помощью вспомогательных букв α, β, γ, не принадлежащих А. В ее определении играла существенную роль нумерация букв получаемого после их присоединения алфавита $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$, поскольку от этой нумерации существенно зависит операция перевода слов в $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ [I. § 6.1]. Это вносило в определение записи нормального алгорифма элемент произвола. Для сведения произвола к минимуму условимся придавать буквам алфавита А номера от 1 до n, где n — число их, а буквам α, β, γ — соответственно номера $n+1$, $n+2$ и $n+3$. Запись $\mathfrak{A}^з$ нормального алгорифма $\mathfrak{A}$, очевидно, не будет тогда зависеть от того, каковы буквы α, β, γ, так как эти буквы при переходе от $\mathfrak{A}^и$ к $\mathfrak{A}^з$ всё равно заменяются соответственно (a, b)-звеньями:

$$ab^{n+1}a, \quad ab^{n+2}a, \quad ab^{n+3}a.$$

Остается лишь зависимость записи от избранной нумерации букв алфавита А. Коль скоро эта нумерация фиксирована, мы вправе рассматривать записи нормальных алгорифмов в $\mathfrak{A}$ как вполне определенные слова в A_0.

§ 4. Видоизменение теоремы об универсальном алгорифме

1. Мы докажем теперь теорему, аналогичную теореме § 2.1.1, в которой роль изображения $\mathfrak{A}^{\mathfrak{a}}$ алгорифма $\mathfrak{A}$ будет играть его запись $\mathfrak{A}^{\mathfrak{z}}$. Эта «видоизмененная теорема об универсальном алгорифме» понадобится нам в дальнейшем. При ее формулировке мы сохраним обозначения, введенные в § 3 (предположения о принадлежности букв a и b к алфавиту A делать не будем) и будем считать фиксированной некоторую нумерацию букв алфавита A.

1.1. *Пусть буква* δ *не принадлежит алфавиту* $A \cup A_0$. *Тогда может быть построен такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* $A \cup A_0 \cup \{\delta\}$, *что*

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{z}}\delta P) \simeq \mathfrak{A}(P) \tag{1}$$

для слов P *в* A *и нормальных алгорифмов* $\mathfrak{A}$ *в* A.

В самом деле, пользуясь какими-нибудь буквами α, β, γ, не принадлежащими алфавиту $A \cup \{\delta\}$, построим универсальный алгорифм $\mathfrak{U}$ над алфавитом $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ согласно § 2.1.1 таким образом, чтобы имело место условное равенство § 2.1 (3). Построим нормальные алгорифмы $\mathfrak{I}_{\Gamma,\delta}$ и $\mathfrak{G}_{\Gamma,\delta}$ [II. § 4.10], где

$$\Gamma = A \cup A_0 \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}. \tag{2}$$

Построим алгорифм $\mathfrak{R}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{I}_{\Gamma,\delta}$ и $\mathfrak{T}_1$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{T}_1 \circ \mathfrak{I}_{\Gamma,\delta}. \tag{3}$$

$\mathfrak{R}$ есть нормальный алгорифм над $\Gamma \cup \{\delta\}$ [III. § 3.4.2]. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{S}$ над $\Gamma \cup \{\delta\}$ согласно теореме объединения [III. § 4.1.1] таким образом, что

$$\mathfrak{S}(Q) \simeq \mathfrak{R}(Q)\delta\mathfrak{G}_{\Gamma,\delta}(Q) \quad (Q \text{ — слово в } \Gamma \cup \{\delta\}). \tag{4}$$

Искомый алгорифм $\mathfrak{B}$ построим как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{U} \circ \mathfrak{S}. \tag{5}$$

$\mathfrak{B}$ есть нормальный алгорифм над алфавитом $\Gamma \cup \{\delta\}$ [(5), III. § 3.4.2] и, следовательно [(2)], над $A \cup A_0 \cup \{\delta\}$. Покажем, что для него имеет место условное равенство (1).

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в A, P — слово в этом алфавите. Тогда

$$\mathfrak{I}_{\Gamma,\delta}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{z}}\delta P) = \mathfrak{A}^{\mathfrak{z}} \qquad \text{[II. § 4.10.5]}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{G}_{\Gamma,\delta}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{z}}\delta P) = P \qquad \text{[II. § 4.10.6]}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{z}}\delta P) \simeq \mathfrak{T}_1(\mathfrak{I}_{\Gamma,\delta}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{z}}\delta P)) \qquad \text{[(3), III. § 3.4.3]}$$

$$= \mathfrak{A}^{\mathfrak{a}} \qquad \text{[(6), § 3.3 (1)]}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{z}}\delta P) = \mathfrak{A}^{\mathfrak{a}}\delta P \qquad \text{[(4), (8), (7)]}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{z}}\delta P) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{S}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{z}}\delta P)) \qquad \text{[(5), III. § 3.4.3]}$$

$$\simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{a}}\delta P) \qquad \text{[(9)]}$$

$$\simeq \mathfrak{A}(P) \qquad \text{[§ 2.1 (3)]},$$

что и требовалось доказать.

Глава V

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ НЕВОЗМОЖНОСТИ АЛГОРИФМОВ

Уточнение понятия алгорифма путем перехода к понятию нормализуемого алгорифма дает возможность доказать неразрешимость ряда математических проблем. Все эти проблемы имеют одну существенную общую черту — это суть «массовые» проблемы. Так естественно называть проблемы следующего типа. Рассматривается некоторый класс единичных проблем, каждая из которых является вопросом, требующим утвердительного или отрицательного ответа. Ставится проблема разыскания единого общего конструктивного метода нахождения правильного решения для любой единичной проблемы из рассматриваемого класса.

Можно, например, интересоваться единичными проблемами о взаимной простоте каких-нибудь двух данных натуральных чисел. Каждая из этих проблем формулируется как вопрос: «являются ли данные натуральные числа M и N взаимно простыми?». Массовая проблема, соответствующая классу этих единичных проблем, будет состоять в разыскании единого общего конструктивного метода, позволяющего узнавать для любых двух данных натуральных чисел M и N являются ли они взаимно простыми. Эта массовая проблема, как известно, разрешима; ее решение может, например, состоять в применении алгорифма Эвклида для разыскания общего наибольшего делителя к данным натуральным числам M и N: эти числа тогда и только тогда взаимно просты, когда их общий наибольший делитель, найденный в результате применения алгорифма Эвклида, равен единице.

Можно, далее, интересоваться единичными проблемами значительно более общего характера, скажем, проблемами о разрешимости в целых числах какой-нибудь данной системы так называемых «неопределенных» уравнений. Каждая из этих проблем формулируется как вопрос: «существуют ли целые числа $N_1, \ldots, N_k$, удовлетворяющие данной системе неопределенных уравнений?». Массовая проблема, соответствующая классу таких единичных проблем, будет состоять в разыскании единого общего конструктивного метода, позволяющего узнавать для любой системы неопределенных уравнений, имеет ли эта система решение в целых числах. Эта массовая проблема была, как известно, формулирована Гильбертом на математическом конгрессе в Париже в 1900 г. в числе других трудных математических проблем. Она не решена до сих пор.

В обоих этих примерах каждую единичную проблему, входящую в рассматриваемый класс, можно характеризовать некоторым словом: в первом примере единичная проблема характеризуется парой натураль-

ных чисел, которую можно записать словом в алфавите С [II. § 2.2]; во втором примере единичная проблема характеризуется системой неопределенных уравнений, и можно придумать различные способы записи таких систем в виде слов в некотором алфавите.

Несколько расплывчатый термин «единый общий конструктивный метод», встречающийся в формулировке массовой проблемы, естественно уточнить как «алгорифм». Алгорифм этот должен давать правильный ответ «да» или «нет» на всякий вопрос, составляющий содержание какой-либо из единичных проблем рассматриваемого класса. Это требование естественно истолковывать так: алгорифм должен быть применим к записи любой единичной проблемы рассматриваемого класса и должен перерабатывать эту запись в слово «да», если проблема решается в положительном смысле, и в слово «нет», если она решается в отрицательном смысле. При этом алфавит записей единичных проблем дополняется русскими буквами а, д, е, н, т (нужными для составления слов «да» и «нет») и «алгорифм» понимается как алгорифм над полученным таким образом алфавитом А [II. § 1.6].

Нетрудно, однако, видеть, что в явном введении этих русских букв в сущности нет надобности. Чтобы в этом убедиться, надо лишь принять во внимание наличие алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в алфавите А, работающих следующим образом: $\mathfrak{A}$ перерабатывает «да» в пустое слово, а «нет» в непустое слово; $\mathfrak{B}$ перерабатывает пустое слово в «да», а всякое непустое слово в алфавите А в слово «нет».

Наличие этих алгорифмов дает возможность заменить формулированное выше требование, предъявляемое к искомому алгорифму, следующим требованием: алгорифм должен быть применим к записи любой единичной проблемы рассматриваемого класса и должен тогда и только тогда перерабатывать эту запись в пустое слово, когда единичная проблема решается в положительном смысле.

Принцип нормализации алгорифмов [II. § 5] дает, наконец, возможность еще более уточнить формулировку массовой проблемы. Согласно этому принципу, искомый алгорифм, если существует, то нормализуем и, следовательно, вполне эквивалентен относительно рассматриваемого алфавита записей проблем некоторому нормальному алгорифму над этим алфавитом. При применении к записям проблем этот нормальный алгорифм работает так же, как первоначальный: он тогда и только тогда перерабатывает запись единичной проблемы в пустое слово, когда проблема решается в положительном смысле.

Таким образом мы приходим к следующей постановке массовой проблемы для данного класса единичных проблем. Требуется построить нормальный алгорифм над алфавитом записей рассматриваемых единичных проблем, тогда и только тогда перерабатывающий запись единичной проблемы в пустое слово, когда эта проблема решается в положительном смысле.

Так поставленные массовые проблемы мы будем называть *нормальными массовыми проблемами*. Принцип нормализации, очевидно, дает возможность утверждать, что всякая массовая проблема сводится к нормальной массовой проблеме.

Ряд нормальных массовых проблем естественно возникает в самой теории алгорифмов. Это в первую очередь проблемы, связанные с применимостью нормального алгорифма к слову. В настоящей главе мы докажем неразрешимость некоторых проблем этого рода — невозможность искомых в них нормальных алгорифмов.

§ 1. Самоприменимые и несамоприменимые алгорифмы

1. Если алфавит А содержит более одной буквы, то, как было выяснено [IV. § 3.4], имеется простая возможность записывать схемы нормальных алгорифмов в А в виде слов в этом же алфавите. К записи $\mathfrak{A}^3$ какого-нибудь нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в алфавите А можно тогда попытаться применить этот же самый алгорифм $\mathfrak{A}$. Мы докажем в этом параграфе одну простую и почти очевидную теорему невозможности, связанную с применением нормальных алгорифмов к их собственным записям. В дальнейшем она послужит нам основой многих менее тривиальных результатов.

2. Будем рассматривать алфавит А, содержащий алфавит A_0, т. е. содержащий латинские буквы *a* и *b*. Определим, как выше [IV. § 3.3], запись произвольного нормального алгорифма в А. Она является словом в A_0 [IV. § 3.3.1] и, значит, в А.

Будем говорить о нормальном алгорифме $\mathfrak{A}$ в А, что он *самоприменим*, если он применим к своей записи. Будем говорить о нем, что он *несамоприменим*, если он не применим к своей записи.

Легко могут быть построены как самоприменимые, так и несамоприменимые нормальные алгорифмы в А. Самоприменимым является, например, тождественный алгорифм в алфавите А [II. § 4.2]. Он применим ко всякому слову в А, в частности к своей записи. Несамоприменимым является пустой алгорифм в А [II. § 4.3]. Он не применим ни к какому слову в А и, в частности, не применим к своей записи.

2.1. *Невозможен нормальный алгорифм в* А, *применимый к тем и только к тем записям нормальных алгорифмов в* А, *которые являются записями несамоприменимых алгорифмов.*

Иначе говоря, невозможен нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ в А со следующим свойством H: $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда применим к записи $\mathfrak{A}^3$ какого-либо нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в А, когда этот алгорифм несамоприменим.

В самом деле, допустим, что построен такой алгорифм $\mathfrak{H}$. Если бы он был самоприменим, т. е. применим к $\mathfrak{H}^3$, то в силу своего свойства H, он был бы несамоприменим. Таким образом, предположение о самоприменимости $\mathfrak{H}$ опровергается приведением к нелепости. Следовательно, $\mathfrak{H}$ несамоприменим и, значит, $\mathfrak{H}^3$ есть запись несамоприменимого алгорифма. В силу свойства H алгорифма $\mathfrak{H}$ отсюда следует, однако, что $\mathfrak{H}$ применим к $\mathfrak{H}^3$, т. е. самоприменим. Таким образом, предположение о наличии алгорифма $\mathfrak{H}$ со свойством H опровергается приведением к нелепости. Такой алгорифм, следовательно, невозможен, что и требовалось доказать.

3. В доказанной только что теореме устанавливалась невозможность нормального алгорифма *в алфавите* А, обладающего некоторым свойством H. Предполагая теперь, что алфавит А содержит не только буквы *a* и *b*, но также буквы *c* и *d*, мы усилим теорему 2.1, утверждая невозможность нормальных алгорифмов *над алфавитом* A_0, обладающих тем же свойством H. Записи нормальных алгорифмов, о которых будет идти речь, попрежнему определены лишь для нормальных алгорифмов в А. Алфавит, состоящий из четырех букв *a*, *b*, *c*, *d*, мы обозначили через A_1 [I. § 2.6].

3.1. *Если* $A_1 \subset A$, *то невозможен нормальный алгорифм над* A_0, *применимый к тем и только к тем записям нормальных алгорифмов в* А, *которые являются записями несамоприменимых алгорифмов.*

Иначе говоря, если $A_1 \subset A$, то невозможен нормальный алгорифм над A_0 со свойством Н.

В самом деле, допустим, что построен такой алгорифм $\mathfrak{R}$. Тогда к алфавиту A_0, буквам c, d и алгорифму $\mathfrak{R}$ применима теорема **III. §7.4.5.** Согласно этой теореме может быть построен нормальный алгорифм $\mathfrak{H}_0$ в алфавите A_1, применимый к тем и только к тем словам в A_0, к которым применим алгорифм $\mathfrak{R}$.

Принимая во внимание, что $A_1 \subset A$, построим естественное распространение $\mathfrak{H}$ алгорифма $\mathfrak{H}_0$ на алфавит А [**III.** § 1.3]. Имеет место условное равенство

$$\mathfrak{H}_0(P) \simeq \mathfrak{H}(P) \quad (P \text{ — слово в } A_1) \qquad \text{[III. § 1 (1)]},$$

показывающее, что алгорифм $\mathfrak{H}$ применим к тем и только к тем словам в A_1, к которым применим алгорифм $\mathfrak{H}_0$. Так как $A_0 \subset A_1$, алгорифмы $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{R}$ применимы к одним и тем же словам в A_0 и, значит, к одним и тем же записям нормальных алгорифмов в А. Следовательно, $\mathfrak{H}$, как и $\mathfrak{R}$, применим к тем и только к тем записям нормальных алгорифмов в А, которые являются записями несамоприменимых алгорифмов. Вместе с тем $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм в А. Такой алгорифм, однако, невозможен [**2.1**]. Невозможен, следовательно, и нормальный алгорифм $\mathfrak{R}$ над A_0 со свойством Н, что и требовалось доказать.

4. Со свойствами самоприменимости и несамоприменимости нормальных алгорифмов естественно связать массовые проблемы распознавания этих свойств. Для каждого нормального алгорифма в алфавите А, заданного своей записью, можно поставить единичную проблему о самоприменимости (несамоприменимости) этого алгорифма. Всякому данному алфавиту А, содержащему алфавит A_0, соответствует класс таких единичных проблем. Каждая единичная проблема этого класса характеризуется некоторым словом в алфавите A_0 — записью нормального алгорифма, о котором идет речь в единичной проблеме. Соответствующая нормальная массовая проблема будет состоять в построении нормального алгорифма над алфавитом записей A_0, применимого к записи $\mathfrak{A}^3$ любого нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в А и перерабатывающего $\mathfrak{A}^3$ в Λ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ самоприменим (несамоприменим). Мы покажем сейчас, что эта массовая проблема неразрешима, если $A_1 \subset A$.

4.1. *Если* $A_1 \subset A$, *то невозможен нормальный алгорифм* $\mathfrak{H}$ *над* A_0, *удовлетворяющий следующему условию: каков бы ни был нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *в* А, $\mathfrak{H}$ *тогда и только тогда перерабатывает* $\mathfrak{A}^3$ *в* Λ, *когда* $\mathfrak{A}$ *несамоприменим.*

В самом деле, допустим, что построен нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над A_0, удовлетворяющий этому условию. Пусть Б — его алфавит. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ в Б со схемой

$$\{\xi \to \xi \quad (\xi \in \text{Б}).$$

Очевидно, что $\mathfrak{B}$ применим к Λ и не применим ни к какому непустому слову в Б.

Определим алгорифм $\mathfrak{R}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{B}$:

(1) $$\mathfrak{R} = \mathfrak{B} \circ \mathfrak{H}.$$

$\mathfrak{R}$ есть нормальный алгорифм над Б [(1), III. § 3.4.2] и, следовательно. над A_0.

$$\mathfrak{R}(P) \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{H}(P)) \quad (P \text{ — слово в Б}) \quad [(1), \text{III. § 3.4.3}]$$

и, в частности,

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{A}^3) \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3)) \tag{2}$$

для любого нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в А.

Согласно (2), для применимости $\mathfrak{R}$ к записи $\mathfrak{A}^3$ нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ необходимо и достаточно, чтобы алгорифм $\mathfrak{H}$ был применим к $\mathfrak{A}^3$, а алгорифм $\mathfrak{B}$ — к $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3)$. Но в случае применимости $\mathfrak{H}$ к $\mathfrak{A}^3$ $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3)$ есть слово в Б, так как $\mathfrak{H}$ — алгорифм в Б. Поэтому $\mathfrak{B}$ применим к $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda$. Таким образом, алгорифм $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда применим к $\mathfrak{A}^3$, когда $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda$, т. е. когда алгорифм $\mathfrak{A}$ несамоприменим. Такой алгорифм $\mathfrak{R}$, однако, невозможен, так как $A_1 \subset A$ [3.1]. Невозможен, следовательно, и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий формулированному в теореме условию, что и требовалось доказать.

В теореме 4.1 не требовалось даже, чтобы алгорифм $\mathfrak{H}$ был применим к записи любого нормального алгорифма в А. Требовалось лишь, во-первых, чтобы он перерабатывал в пустое слово запись всякого несамоприменимого алгорифма, и, во-вторых, чтобы всякий нормальный алгорифм в А, запись которого $\mathfrak{H}$ перерабатывает в пустое слово, был несамоприменим. Теорема утверждала невозможность алгорифма $\mathfrak{H}$ над A_0, удовлетворяющего этим условиям. Теорема, разумеется, остается верной, если к условиям, налагаемым на $\mathfrak{H}$, добавить требование применимости к записи любого нормального алгорифма в А в соответствии с приведенной выше формулировкой нормальной массовой проблемы распознавания несамоприменимости. Мы получаем, таким образом, следующее видоизменение теоремы 4.1.

4.2. *Если* $A_1 \subset A$, *то невозможен нормальный алгорифм над* A_0, *применимый к записи* $\mathfrak{A}^3$ *любого нормального алгорифма* $\mathfrak{A}$ *в* А *и перерабатывающий* $\mathfrak{A}^3$ *в* Λ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *несамоприменим.*

Нетрудно далее видеть, что в теореме 4.2 возможна замена слова «несамоприменим» словом «самоприменим», т. е. что имеет место и следующая теорема.

4.3. *Если* $A_1 \subset A$, *то невозможен нормальный алгорифм над* A_0, *применимый к записи* $\mathfrak{A}^3$ *любого нормального алгорифма* $\mathfrak{A}$ *в* А *и перерабатывающий* $\mathfrak{A}^3$ *в* Λ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *самоприменим.*

В самом деле, допустим, что такой алгорифм $\mathfrak{R}$ построен. Пусть Б — его алфавит. Тогда $A_0 \subset$ Б и потому $a \in$ Б [I. § 2.6]. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_{\text{Б}, \Lambda, a, \Lambda}$ [II. § 4.11] и определим алгорифм $\mathfrak{H}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{A}_{\text{Б}, \Lambda, a, \Lambda}$:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_{\text{Б}, \Lambda, a, \Lambda} \circ \mathfrak{R}. \tag{3}$$

$\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над Б [(3), III. § 3.4.2] и, следовательно, над A_0.

$$\mathfrak{H}(Q) \simeq \mathfrak{A}_{\text{Б}, \Lambda, a, \Lambda}(\mathfrak{R}(Q)) \quad (Q \text{ — слово в Б}) \quad [(3), \text{III. § 3.4.3}]$$

и, в частности,

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) \simeq \mathfrak{A}_{\text{Б}, \Lambda, a, \Lambda}(\mathfrak{R}(\mathfrak{A}^3)) \tag{4}$$

для любого нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в алфавите A. С другой стороны,

$$\mathfrak{A}_{Б, \Lambda, a, \Lambda}(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}^3)) = a \neq \Lambda, \tag{5}$$

если $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda$ [II. § 4.11(2)] и

$$\mathfrak{A}_{Б, \Lambda, a, \Lambda}(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}^3)) = \Lambda, \tag{6}$$

если $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}^3) \neq \Lambda$ [II. § 4.11(3)].

Так как алгорифм $\mathfrak{K}$ применим к записи любого нормального алгорифма в A, алгорифм $\mathfrak{H}$ также применим к записи любого нормального алгорифма в A, причем $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}^3) \neq \Lambda$ [(4)—(6)]. Но $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda$ тогда и только тогда, когда алгорифм $\mathfrak{A}$ самоприменим. Следовательно, $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}^3) \neq \Lambda$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ несамоприменим. Значит, $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ несамоприменим. Невозможность нормального алгорифма $\mathfrak{H}$ с этим свойством была, однако, только что установлена [4.2]. Следовательно, невозможен и нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ со свойством, указанным в теореме 4.3, что и требовалось доказать.

§ 2. Проблема распознавания применимости

1. В связи со всяким нормальным алгорифмом $\mathfrak{C}$ над данным алфавитом Г естественно поставить *проблему распознавания применимости этого алгорифма к словам в* Г, состоящую в следующем: требуется построить нормальный алгорифм над Г, применимый ко всякому слову в Г и перерабатывающий в пустое слово те и только те слова в Г, к которым применим алгорифм $\mathfrak{C}$. Мы покажем в этом параграфе, что алфавит Г и нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в нем могут быть построены так, что проблема распознавания применимости алгорифма $\mathfrak{C}$ к словам в Г окажется неразрешимой: искомый в этой проблеме нормальный алгорифм будет невозможен. В основе построения будет лежать видоизмененная теорема об универсальном алгорифме, которую мы будем сочетать с результатами § 1.

2. Докажем следующую теорему.

2.1. *Может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* A_2 [I. § 2.6], *удовлетворяющий следующему условию: невозможен нормальный алгорифм* $\mathfrak{K}$ *над* A_2, *перерабатывающий в* Λ *те и только те слова в* A_2, *к которым* $\mathfrak{B}$ *не применим.*

В самом деле, принимая во внимание, что буква e не принадлежит алфавиту $A_1 \cup A_0$, т. е. A_1 [I. § 2.6], построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над $A_1 \cup A_0 \cup \{e\}$, т. е. над A_2 [I. § 2.6], согласно IV. § 4.1.1 таким образом, чтобы соблюдалось условие

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}^3 eP) \simeq \mathfrak{A}(P). \tag{1}$$

A_1 играет при этом роль алфавита A из теоремы IV. § 4.1.1, e — роль δ; записи определяются для нормальных алгорифмов в A_1; (1) имеет место для слов P в A_1 и нормальных алгорифмов $\mathfrak{A}$ в A_1. Покажем, что $\mathfrak{B}$ удовлетворяет формулированному в теореме условию.

Допустим, в самом деле, что $\mathfrak{K}$ есть нормальный алгорифм над A_2, перерабатывающий в Λ те и только те слова в A_2, к которым $\mathfrak{B}$ не применим.

Построим тождественный нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_{A_0, \Lambda}$ в алфавите A_0 [II. § 4.2]. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над алфавитом $A_0 \cup \{e\}$ согласно теореме объединения III. § 4.1.1 таким образом, что

(2) $$\mathfrak{B}(P) \simeq \mathfrak{A}_{A_0, \Lambda}(P) e \mathfrak{A}_{A_0, \Lambda}(P) \quad (P \text{ — слово в } A_0).$$

Построим, наконец, алгорифм $\mathfrak{H}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{K}$:

(3) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{K} \circ \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над A_2, так как $\mathfrak{K}$ — нормальный алгорифм над A_2 [(3), III. § 3.4.2]. Следовательно, $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над A_0. Так как $\mathfrak{A}_{A_0, \Lambda}$ — тождественный алгорифм в A_0, имеем, согласно (2),

(4) $$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}^3) = \mathfrak{A}^3 e \mathfrak{A}^3$$

для любого нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в A_1. Поэтому

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) \simeq \mathfrak{K}(\mathfrak{A}^3 e \mathfrak{A}^3) \qquad [(3), \text{ III. § 3.4.3, (4)}]$$

и, следовательно, $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}^3 e \mathfrak{A}^3) = \Lambda$.

С другой стороны, $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}^3 e \mathfrak{A}^3) \simeq \mathfrak{A}(\mathfrak{A}^3)$ для любого нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в A_1 [(1)]. Поэтому нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ в A_1 тогда и только тогда несамоприменим, когда алгорифм $\mathfrak{B}$ не применим к слову $\mathfrak{A}^3 e \mathfrak{A}^3$.

Но, согласно нашему допущению, касающемуся алгорифма $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда не применим к $\mathfrak{A}^3 e \mathfrak{A}^3$, когда $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}^3 e \mathfrak{A}^3) = \Lambda$, т. е. когда $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda$. Таким образом, $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda$ тогда и только тогда, когда алгорифм $\mathfrak{A}$ несамоприменим. Алгорифм $\mathfrak{H}$ с этим свойством, однако, невозможен согласно теореме § 1.4.1, условие которой соблюдено, так как роль A играет A_1.

Тем самым установлена невозможность нормального алгорифма $\mathfrak{K}$ над A_2, перерабатывающего в Λ те и только те слова в A_2, к которым алгорифм $\mathfrak{B}$ не применим, что и требовалось доказать.

Только что указанный алгорифм $\mathfrak{B}$, удовлетворяющий условию, формулированному в теореме 2.1, является нормальным алгорифмом в некотором алфавите, состоящем из большого числа букв. Мы покажем сейчас, что уже в двухбуквенном алфавите A_0 может быть построен нормальный алгорифм с тем же свойством.

2.2. *Может быть построен нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_0$ в алфавите A_0, удовлетворяющий следующему условию: невозможен нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над A_0, перерабатывающий в Λ те и только те слова в A_0, к которым $\mathfrak{B}_0$ не применим.*

Построим, в самом деле, нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над A_2 согласно 2.1 и нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_0$ в A_0 как перевод алгорифма $\mathfrak{B}$ [III. § 7.1]. При этом роли B, α, β, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ пусть играют соответственно пустой алфавит, a, b и буквы алфавита алгорифма $\mathfrak{B}$. Роль алфавита Б [III. § 7.1 (2)] будет соответственно этому играть алфавит алгорифма $\mathfrak{B}$, который мы и обозначим через Б; роль алфавита А [III. § 7.1 (1)] будет играть A_0. Очевидно, что

(5) $$A_2 \subset \text{Б}.$$

Обозначая алгорифм перевода через $\mathfrak{T}$, будем иметь

$$\mathfrak{B}_0(\mathfrak{T}(Q)) \simeq \mathfrak{T}(\mathfrak{B}(Q)) \quad (Q \text{ — слово в Б}) \qquad [\text{III. § 7.2.1}],$$

причем $\mathfrak{T}$ есть нормальный алгорифм над Б [II. § 4.14]. Так как алгорифм $\mathfrak{T}$ применим ко всякому слову в Б, это условное равенство показывает, что $\mathfrak{B}_0$ тогда и только тогда применим к переводу слова Q в Б, когда $\mathfrak{B}$ применим к самому этому слову.

$\mathfrak{B}_0$ есть нормальный алгорифм в A_0 [III. § 7.1.1]. Покажем, что он удовлетворяет условию, формулированному в 2.2.

Допустим, действительно, что $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над A_0, перерабатывающий в Λ те и только те слова в A_0, к которым $\mathfrak{B}_0$ не применим.

Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{T}. \tag{6}$$

$\mathfrak{K}$ есть, как и $\mathfrak{T}$, нормальный алгорифм над Б [(6), III. § 3.4.2] и, значит, над A_2 [(5)].

$$\mathfrak{K}(Q) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{T}(Q)) \quad (Q \text{ — слово в Б}) \quad [(6), \text{III. § 3.4.3}],$$

и потому $\mathfrak{K}(Q) = \Lambda$ для тех и только тех слов Q в A_2, для которых

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{T}(Q)) = \Lambda. \tag{7}$$

Здесь $\mathfrak{T}(Q)$ всегда является словом в A_0. Поэтому, согласно предположению об алгорифме $\mathfrak{H}$, равенство (7) имеет место для тех и только для тех слов Q в A_2, для которых слово $\mathfrak{T}(Q)$ таково, что алгорифм $\mathfrak{B}_0$ к нему не применим. Применимость же $\mathfrak{B}_0$ к $\mathfrak{T}(Q)$, как отмечено выше, равносильна применимости алгорифма $\mathfrak{B}$ к Q. Таким образом, нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ над A_2 перерабатывает в Λ те и только те слова в A_2, к которым алгорифм $\mathfrak{B}$ не применим. Такой нормальный алгорифм, однако, невозможен [2.1]. Невозможен, следовательно, и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над A_0, перерабатывающий в Λ те и только те слова в A_0, к которым алгорифм $\mathfrak{B}_0$ не применим, что и требовалось доказать.

Аналогично тому, как мы переходили от теоремы § 1.4.1 к теоремам § 1.4.2 и § 1.4.3, можно перейти от теоремы 2.2 к следующим результатам.

2.3. *Может быть построен нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_0$ в алфавите A_0, удовлетворяющий следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над A_0, применимый ко всякому слову в A_0 и перерабатывающий в Λ те и только те слова в A_0, к которым $\mathfrak{B}_0$ не применим.*

2.4. *Может быть построен нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_0$ в алфавите A_0, удовлетворяющий следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над A_0, применимый ко всякому слову в A_0, и перерабатывающий в пустое слово те и только те слова в A_0, к которым $\mathfrak{B}_0$ применим.*

Теорема 2.3 есть очевидное следствие теоремы 2.2, а теорема 2.4 легко доказывается на основе 2.3 с помощью алгорифма $\mathfrak{A}_{\text{Б},\Lambda,a,\Lambda}$, где Б — алфавит предполагаемого алгорифма $\mathfrak{H}$ [II. § 4.11].

Теорема 2.4 показывает, что для некоторого нормального алгорифма $\mathfrak{B}_0$ в A_0 проблема распознавания применимости к словам в A_0 [1] неразрешима: искомый в этой проблеме нормальный алгорифм невозможен.

§ 3. Проблема распознавания аннулирования

1. Будем говорить, что алгорифм $\mathfrak{R}$ *аннулирует* слово P, если он перерабатывает P в пустое слово.

Аналогично проблеме распознавания применимости нормального алгорифма [§ 2.1] может быть поставлена *проблема распознавания аннулирования слов нормальным алгорифмом*, состоящая в следующем. Пусть дан нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над алфавитом Г. Требуется построить нормальный алгорифм над Г, применимый ко всякому слову в Г и аннулирующий те и только те слова в Г, которые аннулирует $\mathfrak{C}$. Мы покажем в этом параграфе, что алфавит Г и нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в нем могут быть построены так, что проблема распознавания аннулирования слов в Г алгорифмом $\mathfrak{C}$ будет неразрешимой.

2. Докажем прежде всего следующую лемму.

2.1. *Каков бы ни был нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *над алфавитом* А, *может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}$ *над* А, *аннулирующий те и только те слова в* А, *к которым применим алгорифм* $\mathfrak{A}$.

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм над алфавитом А. Пусть Б — его алфавит. Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{C}_Б$ в Б, аннулирующий всякое слово в этом алфавите [II. § 4.7]. Определим алгорифм $\mathfrak{B}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}_Б$:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_Б \circ \mathfrak{A} \tag{1}$$

и покажем, что он является искомым нормальным алгорифмом над А, аннулирующим те и только те слова в А, к которым применим алгорифм $\mathfrak{A}$.

Действительно, $\mathfrak{B}$ есть нормальный алгорифм над Б [(1), III. § 3.4.2], а так как, очевидно,

$$А \subset Б, \tag{2}$$

$\mathfrak{B}$ есть нормальный алгорифм над А. Имеем далее

$$\mathfrak{B}(P) \simeq \mathfrak{C}_Б(\mathfrak{A}(P)) \quad (P \text{ — слово в Б}) \quad [III.\ \S\ 3.4.3,\ (1)]. \tag{3}$$

Здесь $\mathfrak{A}(P)$ есть слово в Б, коль скоро алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к P. Следовательно, $\mathfrak{C}_Б(\mathfrak{A}(P)) = \Lambda$ при том же условии. Условное равенство (3) показывает, таким образом, что алгорифм $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда применим к слову P в Б, когда алгорифм $\mathfrak{B}$ аннулирует это слово. В силу (2), это и подавно справедливо для слов в А, что и требовалось доказать.

3. Теорема § 2.2.2 и лемма 2.1 дают следующий результат.

3.1. *Может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}_1$ *над алфавитом* $А_0$, *удовлетворяющий следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над* $А_0$, *аннулирующий те и только те слова в* $А_0$, *которые алгорифм* $\mathfrak{B}_1$ *не аннулирует.*

В самом деле, построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_0$ согласно § 2.2.2 и применим к алфавиту $А_0$ и алгорифму $\mathfrak{B}_0$ лемму 2.1. Согласно этой лемме построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_1$, аннулирующий те и только те слова в $А_0$, к которым применим алгорифм $\mathfrak{B}_0$. Согласно построению, $\mathfrak{B}_1$ тогда и только тогда не аннулирует какое-нибудь слово в $А_0$, когда алгорифм $\mathfrak{B}_0$ не применим к этому слову, откуда и следует, что $\mathfrak{B}_1$ есть искомый алгорифм.

Теорема 3.1 допускает следующее усиление.

3.2. *Может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}_2$ *в алфавите* A_0, *удовлетворяющий следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над* A_0, *аннулирующий те и только те слова в* A_0, *которые алгорифм* $\mathfrak{B}_2$ *не аннулирует.*

По сравнению с 3.1 усиление состоит в том, что $\mathfrak{B}_2$ строится как алгорифм *в* A_0, тогда как $\mathfrak{B}_1$ строился как алгорифм *над* A_0. Переход от 3.1 к 3.2 аналогичен переходу от § 2.2.1 к § 2.2.2; он осуществляется посредством построения перевода алгорифма $\mathfrak{B}_1$ в алфавит A_0, что и дает искомый алгорифм $\mathfrak{B}_2$. Подробное проведение доказательства теоремы 3.2 мы предоставляем читателю.

Аналогично переходу от теоремы § 1.4.1 к теоремам § 1.4.2 и § 1.4.3 осуществляется переход от 3.2 к следующим результатам.

3.3. *Может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}_2$ *в алфавите* A_0, *удовлетворяющий следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над* A_0, *применимый ко всякому слову в* A_0 *и аннулирующий те и только те слова в* A_0, *которые* $\mathfrak{B}_2$ *не аннулирует.*

3.4. *Может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}_2$ *в алфавите* A_0, *удовлетворяющий следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над* A_0, *применимый ко всякому слову в* A_0 *и аннулирующий те и только те слова в* A_0, *которые аннулирует* $\mathfrak{B}_2$.

Теорема 3.3 есть очевидное следствие теоремы 3.2, а теорема 3.4 легко доказывается на основе 3.3 с помощью алгорифма $\mathfrak{A}_{Б,А,а,А}$, где Б—алфавит предполагаемого алгорифма.

Теорема 3.4 показывает, что для некоторого нормального алгорифма $\mathfrak{B}_2$ в A_0 проблема распознавания аннулирования слов в A_0 неразрешима.

Теорема 3.2 послужит нам основой доказательств многих дальнейших теорем невозможности алгорифмов.

§ 4. Проблема распознавания полноты

1. Будем рассматривать записи произвольных нормальных алгорифмов в алфавите A_1. Это — слова в алфавите A_0.

Будем говорить об алгорифме $\mathfrak{A}$ над A_0, что он *полн*, если он применим к записи всякого нормального алгорифма в A_1.

При рассмотрении нормальных алгорифмов в алфавите A_1 естественно возникает следующая проблема распознавания полноты алгорифма. Требуется построить полный нормальный алгорифм над A_0, тогда и только тогда аннулирующий запись какого-либо нормального алгорифма в A_1, когда этот алгорифм полн. Мы установим сейчас неразрешимость этой проблемы, т. е. невозможность искомого в ней алгорифма.

1.1. *Невозможен полный нормальный алгорифм над* A_0, *тогда и только тогда аннулирующий запись* $\mathfrak{A}^3$ *какого-либо нормального алгорифма* $\mathfrak{A}$ *в* A_1, *когда* $\mathfrak{A}$ *полн.*

Допустим, в самом деле, что $\mathfrak{H}$ является полным нормальным алгорифмом над A_0 с только что указанным свойством.

Построим нормальные алгорифмы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{V}$, как в доказательстве теоремы § 2.2.1, алгорифм $\mathfrak{W}$ — как их нормальную композицию:

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{V} \circ \mathfrak{B}. \tag{1}$$

Согласно построению алгорифмов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{V}$, равенство § 2.2 (4) имеет место для любого нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в A_1, а условное равенство

§ 2.2 (1) — для любого такого алгорифма и любого слова P в A_1. Так как $\mathfrak{B}$ — алгорифм над A_2, $\mathfrak{W}$ есть нормальный алгорифм над A_2 [(1), III. § 3.4.2], причем

$$\mathfrak{W}(P) \simeq \mathfrak{V}(\mathfrak{B}(P)) \quad (P \text{ — слово в } A_2) \quad [(1), \text{ III. § 3.4.3}]$$

и, в частности, для нормальных алгорифмов $\mathfrak{A}$ в A_1

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}(\mathfrak{A}^3) &\simeq \mathfrak{V}(\mathfrak{B}(\mathfrak{A}^3)) \\ &\simeq \mathfrak{V}(\mathfrak{A}^3 e\, \mathfrak{A}^3) && [\S\ 2.2\,(4)] \\ &\simeq \mathfrak{A}(\mathfrak{A}^3) && [\S\ 2.2\,(1)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Построим нормальные алгорифмы $\mathfrak{C}_{A_2}$ и $\mathfrak{C}^a_{A_2}$ [II. § 4.7] в алфавите A_2. Применяя к нормальным алгорифмам $\mathfrak{C}^a_{A_2}$ и $\mathfrak{W}$ теорему объединения III. § 4.3.1, построим нормальный алгорифм $\mathfrak{X}$ над A_2 такой, что

$$\mathfrak{X}(Q) \simeq \mathfrak{C}^a_{A_2}(Q)\,\mathfrak{W}(Q) \quad (Q \text{ — слово в } A_2). \tag{3}$$

Применим далее к нормальным алгорифмам $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{C}_{A_2}$ и $\mathfrak{H}$ теорему разветвления III. § 5.1.1. Согласно этой теореме построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{Y}$ над A_2, что

$$\mathfrak{Y}(Q) \simeq \begin{cases} \mathfrak{X}(Q) & (Q \text{ — слово в } A_2,\ \mathfrak{H}(Q) = \Lambda) \\ \mathfrak{C}_{A_2}(Q) & (Q \text{ — слово в } A_2,\ \mathfrak{H}(Q) \neq \Lambda). \end{cases} \tag{4}$$

Пусть Б означает алфавит алгорифма $\mathfrak{Y}$. Имеем

$$A_0 \subset A_2 \subset \text{Б}.$$

«Переведем» теперь алгорифм $\mathfrak{Y}$ в алфавит A_1 и воспользуемся теоремой перевода алгорифма III. § 7.2.1. Роль алфавита В будет при этом играть алфавит A_0, роль букв α и β — буквы c и d, роль алфавита Б — наш теперешний алфавит Б, роль букв $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — буквы алфавита Б $\setminus A_0$. Пусть $\mathfrak{T}$ означает соответствующий алгорифм перевода, $\mathfrak{Z}$ — перевод алгорифма $\mathfrak{Y}$. $\mathfrak{Z}$ есть нормальный алгорифм в A_1 [III. § 7.1.1], $\mathfrak{T}$ — нормальный алгорифм над Б [II. § 4.14] и

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{T}(Q)) \simeq \mathfrak{T}(\mathfrak{Y}(Q)) \quad (Q \text{ — слово в Б}) \quad [\text{III. § 7.2.1}]. \tag{5}$$

Докажем ряд утверждений, касающихся построенных алгорифмов.

1.2. *Если* $\mathfrak{A}$ — *нормальный алгорифм в* A_1 *и* $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda$, *то*

$$\mathfrak{Y}(\mathfrak{A}^3) = a\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^3). \tag{6}$$

В самом деле, мы имеем тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}(\mathfrak{A}^3) &\simeq \mathfrak{X}(\mathfrak{A}^3) && [(4)] \\ &\simeq \mathfrak{C}^a_{A_2}(\mathfrak{A}^3)\,\mathfrak{W}(\mathfrak{A}^3) && [(3)] \\ &\simeq a\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^3) && [\text{II. § 4.7, (2)}]. \end{aligned} \tag{7}$$

С другой стороны, алгорифм $\mathfrak{A}$ в этом случае полн, т. е. применим к записи любого алгорифма в A_1. В частности, он применим к своей

собственной записи $\mathfrak{A}^3$ и, значит, правая часть условного равенства (7) имеет смысл. Мы имеем поэтому равенство (6).

1.3. *Если* $\mathfrak{A}$ — *нормальный алгорифм в* A_1 *и* $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) \neq \Lambda$, *то*

$$\mathfrak{Y}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda.$$

В самом деле, в этом случае

$$\mathfrak{Y}(\mathfrak{A}^3) = \mathfrak{C}_{A_2}(\mathfrak{A}^3) \qquad [(4)]$$
$$= \Lambda \qquad [\text{II. § 4.7}].$$

1.4. *Если* $\mathfrak{A}$ — *нормальный алгорифм в* A_1, *то*

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}^3) = \begin{cases} \mathfrak{T}(a\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^3)) & \text{при } \mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) = \Lambda \\ \Lambda & \text{при } \mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3) \neq \Lambda. \end{cases} \tag{8}$$

В самом деле, $\mathfrak{A}^3$ есть тогда слово в A_0 и потому

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{A}^3) = \mathfrak{A}^3 \quad [\text{I. § 6.2.2, II. § 4.14 (11)}], \tag{9}$$
$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}^3) \simeq \mathfrak{Z}(\mathfrak{T}(\mathfrak{A}^3)) \qquad [(9)]$$
$$\simeq \mathfrak{T}(\mathfrak{Y}(\mathfrak{A}^3)) \qquad [(5)].$$

Принимая во внимание, что $\mathfrak{T}(\Lambda) = \Lambda$, получаем отсюда, согласно 1.2 и 1.3, равенства (8).

1.5. *Алгорифм* $\mathfrak{Z}$ *полн.*

Это непосредственно следует из 1.4 и предполагаемой полноты алгорифма $\mathfrak{H}$.

Примем теперь во внимание, что $\mathfrak{Z}$ — нормальный алгорифм в алфавите A_1. Как таковой он имеет запись $\mathfrak{Z}^3$, причем

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{Z}^3) = \Lambda,$$

в силу 1.5. Согласно 1.4, отсюда следует, что

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}^3) = \mathfrak{T}(a\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}^3)).$$

Это, однако, невозможно, так как

$$[\mathfrak{T}(a\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}^3))^\partial \geqslant [a\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}^3)^\partial \quad [\text{I. § 6.2.3, II. § 4.14 (11)}]$$
$$= [\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}^3)^\partial + 1$$

и, значит,

$$[\mathfrak{T}(a\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}^3))^\partial > [\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}^3)^\partial.$$

Наше предположение о наличии полного нормального алгорифма над A_0 с указанным в теореме 1.1 свойством привело нас, таким образом, к противоречию. Следовательно, такой алгорифм невозможен, что и требовалось доказать.

Глава VI

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ МАССОВЫХ ПРОБЛЕМ

Результаты главы V дают возможность установить неразрешимость ряда массовых математических проблем. Все эти проблемы трактуются при этом как нормальные массовые проблемы — как проблемы о розыскании нормальных алгорифмов, позволяющих распознавать те или иные свойства изучаемых объектов. Ряд проблем этого рода относится к теории «ассоциативных исчислений», т. е. к конструктивной теории так называемых ассоциативных систем.

Еще в 1914 г. норвежским математиком Туэ [30] была формулирована проблема эквивалентности для ассоциативного исчисления. В 1946 и 1947 гг. одновременно и независимо автором и американским математиком Постом были построены ассоциативные исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности [3, 5, 28]. Впоследствии, в 1951 г., на основе этого результата автору удалось доказать невозможность распознающих алгорифмов для весьма широкого класса свойств ассоциативных исчислений [6, 7].

Другой областью математики, где естественно возникают неразрешимые алгорифмические проблемы, оказалась теория целочисленных матриц. Первый относящийся сюда результат — неразрешимость проблемы пересечения матричных полугрупп — был установлен автором в 1947 г. [1] на основе доказанной Постом неразрешимости некоторой весьма просто формулируемой комбинаторной проблемы [27]. Впоследствии, в 1951 г., автором были получены дальнейшие результаты этого рода, связанные уже с проблемой представимости целочисленной матрицы в виде произведения данных целочисленных матриц [8].

В настоящей главе важнейшие из только что упомянутых результатов подробно доказываются на основе излагаемой в этой книге теории нормальных алгорифмов.

§ 1. Ассоциативные исчисления

1. Допустим, что знак «$\longleftrightarrow$» не является буквой алфавита A. *Соотношением* в алфавите A будем тогда называть всякое слово в алфавите $A \cup \{\longleftrightarrow\}$ вида

(1) $$T \longleftrightarrow U,$$

где T и U — слова в A.

В частности

(2) $$\longleftrightarrow$$

есть соотношение в A.

Слово T мы будем называть *левой частью соотношения* (1), *слово* U — *его правой частью*.

2. Определим теперь понятие «ассоциативного исчисления». Это понятие будет иметь много общего с понятием нормального алгорифма. Существенное различие будет, однако, состоять в том, что в то время, как всякий алгорифм является некоторым *предписанием* действовать в точности так-то и так-то и в такой-то последовательности, ассоциативное исчисление будет не предписанием, а лишь *разрешением* производить такие-то действия. При этом таких разрешенных действий будет обычно несколько и на выбор того или иного из них не будет накладываться никаких ограничений.

3. Аналогично нормальному алгорифму всякое ассоциативное исчисление будет связано с некоторым алфавитом. Подобно тому, как существенной составной частью нормального алгорифма является его схема, т. е. система его формул подстановок, существенной составной частью всякого ассоциативного исчисления будет являться его «определяющая система» — некоторый список соотношений в алфавите исчисления. В отличие от того, что имеет место для формул схемы нормального алгорифма, порядок соотношений в определяющей системе ассоциативного исчисления не будет иметь существенного значения. Определяющую систему ассоциативного исчисления можно поэтому рассматривать и как некоторое («неупорядоченное») множество соотношений.

4. Пусть имеем некоторый список соотношений $\mathfrak{S}$ в алфавите A. Будем называть *допустимыми относительно* $\mathfrak{S}$ действиями следующие действия над словами в A:

1) подстановку вместо любого вхождения левой части одного из соотношений, принадлежащих $\mathfrak{S}$, правой части того же соотношения;

2) подстановку вместо любого вхождения правой части одного из соотношений, принадлежащих $\mathfrak{S}$, левой части того же соотношения.

Ассоциативным исчислением в алфавите A, *определяемым системой* $\mathfrak{S}$, будем называть разрешение последовательно производить, исходя из любого слова P в A любые действия, допустимые относительно $\mathfrak{S}$. Обо всех словах, которые будут при этом получаться, включая само исходное слово P, будем говорить, что они *эквивалентны* P в рассматриваемом ассоциативном исчислении.

Всякое ассоциативное исчисление определяется, таким образом, некоторым алфавитом — *алфавитом этого исчисления* — и некоторой системой соотношений в этом алфавите — *определяющей системой этого исчисления*. Мы будем говорить об ассоциативном исчислении $\mathfrak{A}$, что оно есть *ассоциативное исчисление над алфавитом* A, если алфавит этого исчисления есть расширение A.

5. Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативное исчисление в алфавите A, определяемое системой соотношений $\mathfrak{S}$. Будем говорить, что слово Q в A *смежно* со словом P в исчислении $\mathfrak{A}$, если Q может быть получено из P в результате одного действия, допустимого относительно $\mathfrak{S}$. Предполагая, что знак «$\perp$» не есть буква алфавита A, будем пользоваться этим знаком для обозначения смежности слов в ассоциативных исчислениях в этом алфавите. В дальнейшем запись $\mathfrak{A} : P \perp Q$ будет означать, что Q смежно с P в ассоциативном исчислении $\mathfrak{A}$.

Следующие утверждения непосредственно вытекают из определения смежности.

5.1. *Если* P *и* Q — *слова в алфавите ассоциативного исчисления* $\mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{A}: P \perp Q$ *тогда и только тогда, когда существуют такие слова* R, S, T, U, *что*

(1) $$P = RTS,$$

(2) $$Q = RUS$$

и что хотя бы одно из соотношений

(3) $$T \longleftrightarrow U,$$

(4) $$U \longleftrightarrow T$$

принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{A}$.

5.2. *Если* $\mathfrak{A}: P \perp Q$, *то* $\mathfrak{A}: Q \perp P$.

5.3. *Если* $\mathfrak{A}: P \perp Q$, *то* $\mathfrak{A}: RP \perp RQ$ *и* $\mathfrak{A}: PR \perp QR$ *для всякого слова* R *в алфавите исчисления* $\mathfrak{A}$.

В дальнейшем вместо

$$\mathfrak{A}: P_0 \perp P_1,$$

$$\mathfrak{A}: P_1 \perp P_2,$$

. . . . .

$$\mathfrak{A}: P_{n-1} \perp P_n$$

мы будем писать короче:

$$\mathfrak{A}: P_0 \perp P_1 \perp P_2 \perp \ldots \perp P_n.$$

6. Предполагая, что знак «$\parallel$» не есть буква алфавитов рассматриваемых ассоциативных исчислений, будем пользоваться этим знаком для обозначения эквивалентности в этих исчислениях. В дальнейшем запись

(1) $$\mathfrak{A}: P \parallel Q$$

будет означать, что Q эквивалентно P в ассоциативном исчислении $\mathfrak{A}$.

Следующие утверждения очевидны.

6.1. $\mathfrak{A}: P \parallel Q$ *тогда и только тогда, когда* P *есть слово в алфавите исчисления* $\mathfrak{A}$ *и существует такой ряд слов* $P_0, P_1, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$, *что*

(2) $$\mathfrak{A}: P_0 \perp P_1 \perp \ldots \perp P_n,$$

(3) $$P_0 = P,$$

(4) $$P_n = Q.$$

6.2. *Если* $\mathfrak{A}: P \perp Q$, *то* $\mathfrak{A}: P \parallel Q$.

6.3. $\mathfrak{A}: P \parallel P$ *для всякого слова* P *в алфавите ассоциативного исчисления* $\mathfrak{A}$.

6.4. *Если* $\mathfrak{A}: P \parallel Q$, *то* $\mathfrak{A}: Q \parallel P$.

6.5. *Если* $\mathfrak{A}: P \parallel Q$ *и* $\mathfrak{A}: Q \parallel R$, *то* $\mathfrak{A}: P \parallel R$.

С помощью 5.3 и 6.1 легко доказывается следующее утверждение.

6.6. *Если* $\mathfrak{A}: P \parallel Q$, *то* $\mathfrak{A}: RP \parallel RQ$ *и* $\mathfrak{A}: PR \parallel QR$ *для всякого слова* R *в алфавите исчисления* $\mathfrak{A}$.

С помощью 6.5 и 6.6 доказывается

6.7. *Если* $\mathfrak{A}: P \underline{\parallel} Q$ *и* $\mathfrak{A}: R \underline{\parallel} S$, *то* $\mathfrak{A}: PR \underline{\parallel} QS$.

Иногда нам будет удобно пользоваться следующей терминологией.

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативное исчисление в алфавите A. Условимся говорить о ряде слов $P_0, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$ в алфавите A, что он есть $\mathfrak{A}$-*ряд*, если он удовлетворяет условию (2).

Будем говорить о ряде слов $P_0, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$, что он *связывает* слово P со словом Q, если удовлетворяются условия (3) и (4).

Утверждение 6.1 можно тогда формулировать следующим образом.

6.8. $\mathfrak{A}: P \underline{\parallel} Q$ *тогда и только тогда, когда имеется* $\mathfrak{A}$-*ряд, связывающий* P *с* Q.

7. В литературе встречается другое определение ассоциативного исчисления [3,21], по существу равносильное формулированному выше. Оно состоит в следующем.

Будем опять рассматривать систему соотношений $\mathfrak{S}$ в алфавите A. *Ассоциативным исчислением в алфавите* A, *определяемым системой* $\mathfrak{S}$, будем называть разрешение последовательно производить, исходя из соотношений системы $\mathfrak{S}$ и соотношения 1 (2), следующие действия, порождающие новые соотношения в A:

1) переход от какого-либо уже имеющегося соотношения 1 (1) к соотношению

$$\xi T \longleftrightarrow \xi U, \tag{1}$$

где ξ — любая буква алфавита A;

2) переход от какого-либо уже имеющегося соотношения 1 (1) к соотношению

$$T\xi \longleftrightarrow U\xi, \tag{2}$$

где ξ — любая буква алфавита A;

3) переход от каких-либо уже имеющихся соотношений 1 (1) и

$$T \longleftrightarrow V \tag{3}$$

к соотношению

$$U \longleftrightarrow V. \tag{4}$$

В отличие от определения ассоциативного исчисления, данного в пункте 4, здесь фиксируется совокупность исходных слов. Таковыми являются соотношения системы $\mathfrak{S}$ и соотношение 1 (2). Допустимыми действиями являются три действия над соотношениями в A, «порождающие» (т. е. позволяющие получать) новые соотношения, исходя из имеющихся. Два из них дают возможность получить соотношения (1) и (2), исходя из имеющегося соотношения 1 (1). Третье применимо к паре имеющихся соотношений 1 (1) и (3) с равными левыми частями. Его применение к этим соотношениям дает соотношение (4).

Будем говорить о соотношении, что оно *выводимо* в ассоциативном исчислении $\mathfrak{A}$, если оно может быть получено в результате последовательного применения указанных только что допустимых действий при указанных исходных словах. Будем тогда также говорить, что оно есть *следствие* из системы $\mathfrak{S}$.

Будем говорить о словах T и U, что они *эквивалентны* в исчислении $\mathfrak{A}$, если соотношение 1 (1) выводимо в $\mathfrak{A}$. Для выражения эквива-

лентности слов P и Q в исчислении $\mathfrak{A}$ будем применять прежнюю запись **6** (1).

Мы имеем, таким образом, два различных определения ассоциативного исчисления в алфавите A, определяемого системой соотношений $\mathfrak{S}$. Каждому из них соответствует свое понятие эквивалентности слов. Эти два понятия эквивалентности оказываются, однако, равносильными, что выражается следующей теоремой.

7.1. *Пусть* $\mathfrak{S}$ *— система соотношений в алфавите* A; $\mathfrak{A}$ *— ассоциативное исчисление, определяемое системой* $\mathfrak{S}$ *в смысле пункта* 4; $\mathfrak{B}$ *— ассоциативное исчисление, определяемое системой* $\mathfrak{S}$ *в только что указанном смысле. Для того, чтобы слова* P *и* Q *были эквивалентны в* $\mathfrak{B}$, *необходимо и достаточно, чтобы они были эквивалентны в* $\mathfrak{A}$.

Доказательство мы предоставляем читателю.

Поскольку понятие эквивалентности слов можно считать основным в теории ассоциативных исчислений, можно два формулированных выше определения ассоциативного исчисления считать равносильными. В дальнейшем мы, говоря об «ассоциативном исчислении, определяемом системой соотношений $\mathfrak{S}$ в алфавите A», будем (при отсутствии соответствующих оговорок) понимать этот термин в смысле пункта 4.

8. Теорию ассоциативных исчислений можно рассматривать как некоторый конструктивный подход к так называемым ассоциативным системам [2, 3].

Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативное исчисление в алфавите A. В силу **6.3—6.5**, мы имеем тогда возможность применить к словам в A абстракцию отождествления, отождествляя слова, эквивалентные в $\mathfrak{A}$, т. е. рассматривая слова в A с точностью до эквивалентности в $\mathfrak{A}$. Так рассматриваемые слова в A будут играть роль элементов подлежащей построению ассоциативной системы. Будем для краткости называть их просто *элементами*.

Мы можем далее определить умножение элементов как действие, соответствующее построению соединения представляющих эти элементы слов. Однозначность так определенного умножения обеспечивается свойством эквивалентности **6.7**; сочетательный закон умножения — сочетательным законом соединения слов [I. § **3.6** (1)].

Мы получаем таким образом некоторую ассоциативную систему. Будем говорить, что она *порождается* ассоциативным исчислением $\mathfrak{A}$. Ассоциативные системы, порождаемые ассоциативными исчислениями, будем называть К-*системами*.*

Нетрудно видеть, что всякая К-система имеет единицу. В самом деле, роль единицы К-системы играет, в силу I. § **3.6** (2), элемент ее, представляемый пустым словом.

Нетрудно далее видеть, что всякая К-система имеет конечное множество производящих элементов. Пусть, в самом деле, К-система C порождается ассоциативным исчислением $\mathfrak{A}$ в алфавите A. Если

$$A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\},$$

то, как легко убедиться, элементы системы C, представляемые буквами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ алфавита A, образуют систему производящих элементов системы C: всякий отличный от единичного элемент системы C может быть выражен в виде некоторого произведения (с возможными повторениями множителей) этих элементов.

* Букву К мы применяем здесь как первую букву слова «конечный».

Элементы К-системы С, представляемые словами T и U, тогда и только тогда тождественны, когда эти слова эквивалентны в $\mathfrak{A}$. Понимая в данном случае термин «ассоциативное исчисление» в смысле пункта 7, мы можем сказать, что эти слова тогда и только тогда тождественны, когда соотношение 1 (1) выводимо в нашем исчислении, т. е. когда оно является следствием из $\mathfrak{S}$. Это положение дел можно коротко выразить, сказав, что система $\mathfrak{S}$ есть полная система соотношений между производящими элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ассоциативной системы С.

9. Ввиду того, что элементы К-системы представляются словами в алфавите порождающего ее ассоциативного исчисления, естественно возникает вопрос о распознавании тождества элементов, представленных двумя разными словами. Тождественными эти элементы являются тогда и только тогда, когда представляющие их слова эквивалентны в порождающем ассоциативном исчислении. Таким образом, распознавание тождества элементов К-систем сводится к распознаванию эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях.

Для всяких слов P и Q в алфавите ассоциативного исчисления $\mathfrak{A}$ может быть поставлена единичная проблема распознавания эквивалентности этих слов в $\mathfrak{A}$: верно ли, что

$$\mathfrak{A} : P \,\underline{\|}\, Q?$$

Всякому данному ассоциативному исчислению $\mathfrak{A}$ соответствует класс единичных проблем этого рода. Массовая проблема, соответствующая этому классу, состоит в розыскании единого общего конструктивного метода, позволяющего узнавать для любых двух данных слов P и Q, являются ли они эквивалентными в $\mathfrak{A}$. Эту проблему мы будем называть *проблемой эквивалентности для исчисления* $\mathfrak{A}$. Впервые проблема эквивалентности для произвольного ассоциативного исчисления была формулирована А. Туэ в 1914 г. [30]. Туэ удалось решить ее лишь в весьма частных случаях.

Ввиду того, что эквивалентность двух слов в ассоциативном исчислении $\mathfrak{A}$, порождающем К-систему С, равносильна тождеству представляемых ими элементов системы С, проблему эквивалентности для $\mathfrak{A}$ можно также рассматривать как *проблему тождества* для С, т. е. как проблему построения единого общего конструктивного метода, позволяющего узнавать для любых двух элементов системы С, заданных представляющими их словами, тождественны ли эти элементы. Этим определяется роль проблемы эквивалентности для ассоциативного исчисления $\mathfrak{A}$ в исследовании порождаемой этим исчислением ассоциативной системы.

Как всякая массовая проблема, проблема эквивалентности для ассоциативного исчисления $\mathfrak{A}$ допускает уточнение в терминах теории алгорифмов — она может быть поставлена как нормальная массовая проблема [V]. Для этого нам необходимо лишь условиться в определенном способе записи единичных проблем эквивалентности слов в алфавите исчисления $\mathfrak{A}$. Всякая такая единичная проблема определяется парой слов в алфавите исчисления. Для этого может быть использован любой знак, не являющийся буквой этого алфавита. Мы будем предполагать, что звездочка является таким знаком и будем записывать пару слов P и Q в виде

$$P * Q. \tag{1}$$

Проблема эквивалентности для ассоциативного исчисления $\mathfrak{A}$ в алфавите A ставится тогда как нормальная массовая проблема следующим образом.

Ищется нормальный алгорифм над алфавитом $A \cup \{*\}$, применимый ко всякому слову вида (1), где P и Q — слова в A, и аннулирующий слово (1) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} : P \parallel Q$.

Эту проблему мы и будем в дальнейшем называть *проблемой эквивалентности для ассоциативного исчисления* $\mathfrak{A}$.

В следующем параграфе мы укажем построение ассоциативного исчисления, для которого проблема эквивалентности неразрешима.

§ 2. Построение ассоциативного исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности

1. Для построения ассоциативного исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности мы свяжем ассоциативные исчисления с нормальными алгорифмами посредством следующей теоремы.

1.1. *Пусть* α, β, γ — *отличные друг от друга буквы, не принадлежащие алфавиту* A. *Тогда, каков бы ни был нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *в алфавите* A, *может быть построено такое ассоциативное исчисление* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* $A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$, *что равенство*

$$\mathfrak{A}(P) = Q$$

будет иметь место для слов P *и* Q *в* A *тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{B} : \beta\alpha P\beta \parallel \beta\gamma Q\beta. \tag{1}$$

В самом деле, пусть алгорифм $\mathfrak{A}$ имеет схему

$$\{A_i \to B_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{2}$$

где A_i — слова в A, а каждое B_i либо тоже есть слово в A, либо получается из слова в A посредством присоединения точки слева. Пусть

$$\text{Б} = A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Введем буквы $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, отличные друг от друга и от букв алфавита Б; положим

$$\alpha_1 = \alpha,$$

$$\gamma_{n+1} = \gamma.$$

Положим затем

$$\text{B} = A \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}\}$$

и построим ассоциативное исчисление $\mathfrak{B}$ в алфавите B, определяемое следующей сокращенно записанной системой соотношений:

$$\begin{cases} \alpha_i\xi\Xi \longleftrightarrow \xi\alpha_i\Xi \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ \xi \in A,\ \Xi \text{ — слово в A},\ [\xi\Xi^\partial = l_i,\ \xi\Xi \neq A_i) \\ \alpha_i\Xi\beta \longleftrightarrow \gamma_{i+1}\Xi\beta \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ \Xi \text{ — слово в A},\ [\Xi^\partial < l_i) \\ \alpha_i A_i \longleftrightarrow \gamma_1 B_i \quad (B_i \text{ — слово в A}) \\ \alpha_i A_i \longleftrightarrow \gamma_{n+1} C_i \quad (B_i = \cdot\, C_i) \\ \beta\gamma_i \longleftrightarrow \beta\alpha_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \\ \xi\gamma_i \longleftrightarrow \gamma_i\xi \quad (1 \leqslant i \leqslant n+1,\ \xi \in A). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь

$$l_i = [A_i^{\partial} \quad (1 \leqslant i \leqslant n);$$

Ξ в соотношениях первых двух групп — произвольное слово в алфавите A, удовлетворяющее записанным справа в скобках условиям. Так как эти условия ограничивают сверху длину Ξ, первые две группы соотношений содержат конечное число соотношений, причем все эти соотношения могут быть явно выписаны. Соотношения третьей группы соответствуют простым формулам подстановок алгорифма $\mathfrak{A}$; соотношения четвертой группы — заключительным формулам подстановок. Всего третья и четвертая группа соотношений содержат вместе n соотношений. Последние две группы соотношений не нуждаются в пояснениях.

Мы покажем, что так построенное ассоциативное исчисление $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию, формулированному в теореме 1.1. Для этого введем некоторые вспомогательные термины и докажем некоторые леммы.

Будем называть *оперативными буквами* буквы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}$. Будем называть *специальными словами* слова вида

$$\beta Q \eta R \beta,$$

где Q и R — слова в A, η — оперативная буква. Иначе говоря, специальными словами мы будем называть слова в алфавите B, начинающиеся буквой β, оканчивающиеся буквой β, не содержащие других вхождений β и содержащие ровно одно вхождение оперативной буквы.

Следующие свойства любого из соотношений системы (3) усматриваются непосредственно.

1.2. *Левая (правая) часть соотношения содержит одно и только одно вхождение оперативной буквы.*

1.3. *Буква β либо не входит ни в левую, ни в правую часть соотношения, либо входит по одному разу в обе части. В последнем случае либо обе части начинаются этой буквой, либо обе оканчиваются ею.*

Из 1.2 и 1.3, согласно определениям смежности [§ 1.5] и специальности, вытекает

1.4. *Всякое слово, смежное в $\mathfrak{B}$ с каким-нибудь специальным словом, само есть специальное слово.*

Отсюда следует, в силу § 1.6.1,

1.5. *Всякое слово, эквивалентное в $\mathfrak{B}$ какому-нибудь специальному слову, само есть специальное слово.*

Пусть P — слово в алфавите B. Условимся говорить, что слово Q *смежно справа* со словом P, если Q может быть получено из P в результате подстановки правой части одного из соотношений системы (3) вместо какого-нибудь вхождения левой части этого соотношения. Для обозначения смежности справа будем пользоваться знаком «$\vdash$». Запись

$$P \vdash Q$$

будет в дальнейшем означать, что Q смежно справа с P.

Из сравнения определений смежности слов в ассоциативном исчислении [§ 1.5] и смежности справа непосредственно очевидна справедливость следующего утверждения.

1.6. $\mathfrak{B} : P \perp Q$ *тогда и только тогда, когда имеет место одно из двух:* $P \vdash Q$ *или* $Q \vdash P$.

Докажем следующую лемму.

1.7. *Со всяким специальным словом смежно справа не более чем одно слово.*

Для доказательства, очевидно, достаточно установить, что во всякое специальное слово входит не более чем одна из левых частей соотношений системы (3) и не более чем один раз.

Рассмотрим какое-нибудь специальное слово T. Согласно определению, $T=\beta Q\eta R\beta$, где Q и R — некоторые слова в A, η — оперативная буква. Возможны 2 случая: η есть одна из букв $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$; η есть одна из букв $\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}$. Рассмотрим их порознь.

а. Пусть $\eta=\alpha_j$. Так как $\gamma_i\neq\alpha_j$ $(1\leqslant i\leqslant n+1)$, ни одна из левых частей соотношений 5-й и 6-й групп не входит в T. Так как $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$, из числа левых частей соотношений первых четырех групп в T могут входить лишь $\alpha_j\xi\Xi$ ($\xi\in$A, Ξ — слово в A; $[\xi\Xi^\partial=l_j$, $\xi\Xi\neq A_j)$, $\alpha_j\Xi\beta$ (Ξ — слово в A, $[\Xi^\partial<l_j)$, α_jA_j. Слово α_jA_j входит в T лишь тогда, когда R начинается словом A_j. Слово вида $\alpha_j\xi\Xi$ ($\xi\in$A, Ξ — слово в A, $[\xi\Xi^\partial=l_j$, $\xi\Xi\neq A_j)$ входит в T лишь тогда, когда R не начинается словом A_j и $[R^\partial\geqslant l_j$; в этом случае лишь одно слово указанного вида входит в T — то, для которого $\xi\Xi$ есть начало длины l_j слова R. Слово вида $\alpha_j\Xi\beta$ (Ξ — слово в A, $[\Xi^\partial<l_j)$ входит в T лишь тогда, когда $[R^\partial<l_j$; в этом случае лишь одно слово указанного вида входит в T — то, для которого $\Xi=R$. Так как эти три случая попарно несовместимы, в T входит не более чем одно слово рассмотренных видов. Единственность его вхождения в T очевидна.

б. Пусть $\eta=\gamma_j$. Так как $\alpha_i\neq\gamma_j$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, ни одна из левых частей соотношений первых четырех групп не входит в T. Что касается остальных соотношений, то при $Q=\Lambda$ и $1\leqslant j\leqslant n$ в T, очевидно, входит левая часть $\beta\gamma_j$ j-го соотношения 5-й группы и только один раз, тогда как левые части соотношений 6-й группы и других соотношений 5-й группы не входят в T; при $Q=\Lambda$ и $j=n+1$ в T вообще не входит ни одна из левых частей соотношений системы (3); наконец, при $Q\neq\Lambda$ в T входит левая часть $\xi\gamma_j$ одного из соотношений 6-й группы, входит только один раз, левые же части других соотношений 6-й группы и левые части соотношений 5-й группы не входят в T.

Этим лемма доказана.

1.8. *Если Q — слово в* A, *то никакое слово не смежно справа со словом $\beta\gamma Q\beta$.*

В самом деле, ни одна из левых частей соотношений системы (3) не входит в слово $\beta\gamma_{n+1}Q\beta$, т. е. в $\beta\gamma Q\beta$.

Будем говорить, что слово P *собственно преобразуемо* в слово Q, если может быть построен такой ряд слов $P_0,\ldots,P_k$ $(k>0)$, что

$$P_0=P,$$

$$P_k=Q,$$

$$P_{i-1}\vdash P_i \quad (0<i\leqslant k).$$

Будем говорить, что P *преобразуемо* в Q, если P собственно преобразуемо в Q или $P=Q$. В дальнейшем запись

$$P\vdash\!\!=Q$$

будет означать, что P собственно преобразуемо в Q; запись

$$P \models Q$$

будет означать, что P преобразуемо в Q.

1.9. *Если P и Q — такие слова в* A, *что имеет место эквивалентность* **(1)**, *то*

$$\beta\alpha P\beta \models \beta\gamma Q\beta.$$

В самом деле, пусть эквивалентность **(1)** имеет место для слов P и Q в алфавите A. Тогда, согласно § **1.6.1**, может быть построен ряд слов $Q_0, \ldots, Q_h$ такой, что

(4) $$Q_0 = \beta\alpha P\beta,$$

(5) $$Q_h = \beta\gamma Q\beta,$$

(6) $$\mathfrak{B} : Q_{i-1} \perp Q_i \quad (0 < i \leqslant h).$$

Здесь $h > 0$, так как $\gamma \neq \alpha$. Согласно **(6)** и **1.6**, имеем $Q_{h-1} \vdash Q_h$ или $Q_h \vdash Q_{h-1}$. Однако, в силу **(5)** и **1.8**, невозможна правая смежность $Q_h \vdash Q_{h-1}$ и, значит,

(7) $$Q_{h-1} \vdash Q_h.$$

Если

(8) $$Q_{i-1} \vdash Q_i \quad (0 < i \leqslant h),$$

то $\beta\alpha P\beta \models \beta\gamma Q\beta$ по определению собственной преобразуемости [**(4)**, **(5)**].

Допустим теперь, что имеют место не все правые смежности **(8)**. Пусть m означает наибольший из номеров i $(0 < i \leqslant h)$, для которых правая смежность $Q_{i-1} \vdash Q_i$ не имеет места. В силу **(7)**, $m < h$ и, согласно определению m,

(9) $$Q_m \vdash Q_{m+1}.$$

С другой стороны, в силу **(6)** и **1.6**,

(10) $$Q_m \vdash Q_{m-1},$$

так как правая смежность $Q_{m-1} \vdash Q_m$ не имеет места. Слово Q_h специальное [**(5)**] и, так как

$$\mathfrak{B} : Q_m \perp\!\!\!\perp Q_h \qquad [\textbf{(6)}, \S\ \textbf{1.6.1}],$$

слово Q_m также специальное [**1.5**]. Следовательно,

(11) $$Q_{m-1} = Q_{m+1} \qquad [\textbf{(9)}, \textbf{(10)}, \textbf{1.7}].$$

Полагая теперь $g = h - 2$, $R_i = Q_i$ $(0 \leqslant i < m)$, $R_i = Q_{i+2}$ $(m \leqslant i \leqslant g)$, мы, в силу **(4)**—**(6)** и **(11)**, будем иметь

(12) $$R_0 = \beta\alpha P\beta,$$

(13) $$R_g = \beta\gamma Q\beta,$$

$$\mathfrak{B}: R_{i-1} \perp R_i \quad (0 < i \leqslant g),$$

$$g > 0 \qquad [(12), (13)].$$

Мы, таким образом, заменили ряд $Q_1, \ldots, Q_h$ $(h > 0)$, удовлетворяющий условиям (4)—(6), более коротким рядом с теми же свойствами.

Если теперь

$$R_{i-1} \vdash R_i \quad (0 < i \leqslant g),$$

то положим $k = g$, $P_i = R_i$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$. Если же хотя бы одна из этих правых смежностей не имеет места, то, действуя аналогично предыдущему, заменим ряд $R_0, \ldots, R_g$ еще более коротким рядом $S_0, \ldots, S_f$ с теми же свойствами. Продолжая этот процесс последовательного сокращения ряда, мы в конце концов придем к ряду $P_0, \ldots, P_k$ $(k > 0)$, удовлетворяющему условиям

(14) $$P_0 = \beta\alpha P\beta,$$

(15) $$P_k = \beta\gamma Q\beta,$$

(16) $$P_{i-1} \vdash P_i \quad (0 < i \leqslant k).$$

Следовательно, $\beta\alpha P\beta \vdash \beta\gamma Q\beta$, что и требовалось доказать.

Следующее утверждение вытекает из 1.6.

1.10. *Если* $P \vdash Q$, *то* $\mathfrak{B}: P \parallel Q$.

1.11. *Если ряд слов* $P_0, \ldots, P_k$ $(k > 0)$ *удовлетворяет условиям* (15) *и* (16), *где* Q — *слово в* A, *то всякое слово, в которое* P_0 *собственно преобразуемо, равно одному из слов* $P_1, \ldots, P_k$.

В самом деле, пусть выполнены условия (15) и (16), причем Q — слово в A, и пусть

(17) $$P_0 \vdash R.$$

Покажем, что R равно одному из слов $P_1, \ldots, P_k$.

В силу (17), может быть построен такой ряд слов $R_0, \ldots, R_h$ $(h > 0)$, что

(18) $$R_0 = P_0,$$

(19) $$R_h = R,$$

(20) $$R_{i-1} \vdash R_i \quad (0 < i \leqslant h).$$

Обозначим через m меньшее из положительных чисел k и h.

Имеем

(21) $$\mathfrak{B}: P_{i-1} \perp P_i \quad (0 < i \leqslant k) \qquad [(16), 1.6],$$

(22) $$\mathfrak{B}: P_i \parallel \beta\gamma Q\beta \quad (0 \leqslant i \leqslant k) \quad [(21), (15), \S\ 1.6.1]$$

и, так как $\beta\gamma Q\beta$ есть специальное слово, все слова P_i суть также специальные слова [(22), 1.5].

Докажем теперь индукцией по j, что

(23) $$R_j = P_j \quad (0 \leqslant j \leqslant m).$$

Равенство (23) верно при $j=0$ [(18)]. Если оно верно при $j=i-1$, где $1\leqslant i\leqslant m$, то, в силу (16) и (20), оно верно и при $j=i$, так как слово P_{i-1} — специальное [1.7]. Следовательно, (23) действительно имеет место при $0\leqslant i\leqslant m$.

Если бы оказалось, что $k<h$, то мы имели бы $m=k$,

$$R_k=P_k \qquad [(23)]$$

(24)
$$=\beta\gamma Q\beta \qquad [(15)],$$

$$\beta\gamma Q\beta \vdash R_{h+1} \qquad [(20),\ (24)],$$

что невозможно [1.8]. Следовательно, $h\leqslant k$ и $m=h$. Поэтому

$$R_h=P_h \qquad [(23)],$$

т. е. $R=P_h$ [(19)], и наше утверждение доказано.

1.12. *Если слово A_i не входит в слово P в алфавите* A, *то*

(25)
$$\beta\alpha_i P\beta \vdash \beta\gamma_{i+1} P\beta.$$

В самом деле, если $[P^\partial<l_i$, то соотношение

$$\alpha_i P\beta \longleftrightarrow \gamma_{i+1} P\beta$$

принадлежит 2-й группе соотношений системы (3). Следовательно, тогда

$$\beta\alpha_i P\beta \vdash \beta\gamma_{i+1} P\beta,$$

и потому имеем (25).

Пусть теперь $[P^\partial\geqslant l_i$. Так как A_i не входит в P, имеем $A_i\neq\Lambda$ и, значит, $l_i>0$. Поэтому в данном случае $P\neq\Lambda$. Пусть

(26)
$$P=\xi_1\ldots\xi_m,$$

где $\xi_1,\ldots,\xi_m$ — буквы алфавита A. Положим для сокращения письма $l_i=l$. Тогда $m\geqslant l>0$.

Положим

(27)
$$P_j=\beta\xi_1\ldots\xi_j\alpha_i\xi_{j+1}\ldots\xi_m\beta \quad (0\leqslant j\leqslant m-l+1).$$

При $j\leqslant m-l$ в слово P_j входит слово $\alpha_i\xi_{j+1}\ldots\xi_{j+l}$, конец которого $\xi_{j+1}\ldots\xi_{j+l}$ входит в P [(26)]. Согласно условию, этот конец отличен от A_i. Так как $l>0$, он представляется в виде $\xi\Xi$, где ξ $(=\xi_{j+1})$ есть буква алфавита A, а Ξ — слово в A. Таким образом, в P_j входит слово вида $\alpha_i\xi\Xi$, являющееся левой частью одного из соотношений первой группы системы (3). Применяя к P_j допустимое действие исчисления $\mathfrak{B}$, соответствующее этому соотношению, получаем

$$P_j \vdash \beta\xi_1\ldots\xi_j\xi_{j+1}\alpha_i\xi_{j+2}\ldots\xi_m\beta$$
$$=P_{j+1} \qquad (0\leqslant j\leqslant m-l).$$

Таким образом,

$$P_0 \vdash P_1 \vdash \ldots \vdash P_{m-l+1},$$

откуда

(28) $$P_0 \vdash P_{m-l+1},$$

т. е.

(29) $$\beta\alpha_i P\beta \vdash \beta Q\alpha_i R\beta \qquad [(28), (27), (26)],$$

где

(30) $$Q = \xi_1 \ldots \xi_{m-l+1},$$

(31) $$R = \xi_{m-l+2} \ldots \xi_m.$$

Согласно (26), (30) и (31),

(32) $$P = QR,$$

(33) $$[R^\partial = l - 1.$$

В силу (33), соотношение

$$\alpha_i R\beta \longleftrightarrow \gamma_{i+1} R\beta$$

принадлежит 2-й группе соотношений системы (3) и, значит,

(34) $$\beta Q\alpha_i R\beta \vdash \beta Q\gamma_{i+1} R\beta.$$

Принимая, наконец, во внимание соотношения последней группы системы (3), получаем

$$S_{j+1} \vdash S_j \quad (0 \leqslant j \leqslant m - l),$$

где

(35) $$S_j = \beta\xi_1 \ldots \xi_j \gamma_{i+1} \xi_{j+1} \ldots \xi_{m-l+1} R\beta \quad (0 \leqslant j \leqslant m - l + 1).$$

Следовательно,

(36) $$S_{m-l+1} \vdash S_0,$$

т. е.

(37) $$\beta Q\gamma_{i+1} R\beta \vdash \beta\gamma_{i+1} QR\beta \qquad [(36), (35), (30)].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \beta\alpha_i P\beta &\vdash \beta Q\alpha_i R\beta && [(29)] \\ &\vdash \beta Q\gamma_{i+1} R\beta && [(34)] \\ &\vdash \beta\gamma_{i+1} QR\beta && [(37)] \\ &= \beta\gamma_{i+1} P\beta && [(32)], \end{aligned}$$

откуда

$$\beta\alpha_i P\beta \vdash \beta\gamma_{i+1} P\beta,$$

что и требовалось доказать.

1.13. *Если ни одно из слов* $A_1, \ldots, A_{k-1}$ $(1 < k \leqslant n+1)$, *не входит в слово* P *в алфавите* A, *то*

$$\beta\alpha_1 P\beta \vdash \beta\gamma_k P\beta.$$

В самом деле, при этом условии

$$\beta\alpha_i P\beta \vdash \beta\gamma_{i+1} P\beta \quad (1 \leqslant i < k) \tag{38}$$ [1.12].

Кроме того, в силу соотношений 5-й группы схемы (3),

$$\beta\gamma_{i+1} P\beta \vdash \beta\alpha_{i+1} P\beta \quad (1 \leqslant i < k-1). \tag{39}$$

Следовательно,

$$\beta\alpha_i P\beta \vdash \beta\alpha_{i+1} P\beta \quad (1 \leqslant i < k-1) \quad [(38), (39)],$$

и потому

$$\beta\alpha_1 P\beta \vdash \beta\alpha_{k-1} P\beta \vdash \beta\gamma_k P\beta \quad [(38)],$$

откуда следует доказываемое.

1.14. *Если* P *— слово в* A *и* $\mathfrak{A} : P\urcorner$, *то*

$$\beta\alpha P\beta \vdash \beta\gamma P\beta. \tag{40}$$

В самом деле, в этом случае ни одно из слов $A_1, \ldots, A_n$ не входит в P, и потому

$$\beta\alpha_1 P\beta \vdash \beta\gamma_{n+1} P\beta \quad [1.13],$$

что совпадает с (40), так как $\alpha_1 = \alpha$, $\gamma_{n+1} = \gamma$.

1.15. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash Q$, *то*

$$\beta\alpha P\beta \vdash \beta\alpha Q\beta. \tag{41}$$

В самом деле, пусть $\mathfrak{A} : P \vdash Q$. Тогда на первом шаге работы алгорифма $\mathfrak{A}$ в применении к слову P действует одна из обычных формул схемы (2). Пусть это будет формула

$$A_k \to B_k. \tag{42}$$

Тогда слова $A_1, \ldots, A_{k-1}$ не входят в P и B_k есть слово в алфавите A. При этом P есть слово в A, так как $\mathfrak{A}$ — алгорифм в A. Применима, следовательно, лемма 1.13, согласно которой

$$\beta\alpha_1 P\beta \vdash \beta\gamma_k P\beta. \tag{43}$$

В силу применимости формулы (42) к слову P, ее левая часть A_k входит в P. Пусть $R * A_k * S$ — первое вхождение A_k в P. Тогда

$$P = RA_k S, \tag{44}$$

$$Q = RB_k S. \tag{45}$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда $A_k \neq \Lambda$, т. е. когда $l_k > 0$. Пусть тогда

$$RA_k = \xi_1 \ldots \xi_m, \tag{46}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — буквы алфавита A. Положим для сокращения письма $l_k = l$.

Так как $R * A_k * S$ — первое вхождение A_k в P, ни одно из слов

$$\xi_{j+1} \ldots \xi_{j+l} \quad (0 \leqslant j < m - l)$$

не равно A_k. Каждое из этих слов имеет, таким образом, вид $\xi\Xi$, где $\xi \in$ A, Ξ — слово в A, $[\xi\Xi^\partial = l_k$, $\xi\Xi \neq A_k$. Поэтому соотношения

$$\alpha_k \xi_{j+1} \ldots \xi_{j+l} \longleftrightarrow \xi_{j+1} \alpha_k \xi_{j+2} \ldots \xi_{j+l} \quad (0 \leqslant j < m - l)$$

принадлежат 1-й группе соотношений системы (3). Полагая

$$P_j = \beta\xi_1 \ldots \xi_j \alpha_k \xi_{j+1} \ldots \xi_m S\beta \quad (0 \leqslant j \leqslant m - l), \tag{47}$$

имеем, следовательно, $P_j \vdash P_{j+1}$ $(0 \leqslant j < m - l)$, откуда

$$P_0 \models P_{m-l}. \tag{48}$$

Здесь

$$P_0 = \beta\alpha_k R A_k S\beta \qquad [(47), (46)]$$

$$= \beta\alpha_k P\beta \qquad [(44)], \tag{49}$$

$$P_{m-l} = \beta\xi_1 \ldots \xi_{m-l} \alpha_k \xi_{m-l+1} \ldots \xi_m S\beta \qquad [(47)]. \tag{50}$$

Но

$$\xi_{m-l+1} \ldots \xi_m = A_k \qquad [(46)], \tag{51}$$

$$\xi_1 \ldots \xi_{m-l} = R \qquad [(46), (51)], \tag{52}$$

так как $[A_k^\partial = l$. Следовательно,

$$P_{m-l} = \beta R \alpha_k A_k S\beta \qquad [(50), (52), (51)] \tag{53}$$

и, значит,

$$\beta\alpha_k P\beta \models \beta R \alpha_k A_k S\beta \qquad [(48), (49), (53)]. \tag{54}$$

Пусть теперь $A_k = \Lambda$. Тогда $R = \Lambda$, $S = P$ [I. § 4.3.8], и потому $\beta\alpha_k P\beta = \beta R \alpha_k A_k S\beta$, откуда следует (54). Таким образом, (54) имеет место во всех случаях.

Соотношение $\alpha_k A_k \longleftrightarrow \gamma_1 B_k$ принадлежит третьей группе системы (3), так как формула (42) простая. Поэтому

$$\beta R \alpha_k A_k S\beta \vdash \beta R \gamma_1 B_k S\beta. \tag{55}$$

Пользуясь далее соотношениями 6-й группы системы (3), получаем

$$\beta R \gamma_1 B_k S\beta \models \beta\gamma_1 R B_k S\beta$$

$$= \beta\gamma_1 Q\beta \qquad [(45)]. \tag{56}$$

Наконец, соотношения 5-й группы системы (3) дают

(57) $$\beta\gamma_k P\beta \vdash \beta\alpha_k P\beta,$$

(58) $$\beta\gamma_1 Q\beta \vdash \beta\alpha_1 Q\beta.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\beta\alpha_1 P\beta &\models \beta\gamma_k P\beta && [(43)]\\
&\vdash \beta\alpha_k P\beta && [(57)]\\
&\models \beta R\alpha_k A_k S\beta && [(54)]\\
&\vdash \beta R\gamma_1 B_k S\beta && [(55)]\\
&\models \beta\gamma_1 Q\beta && [(56)]\\
&\vdash \beta\alpha_1 Q\beta && [(58)],
\end{aligned}$$

что и доказывает собственную преобразуемость (41), так как $\alpha_1 = \alpha$.

1.16. *Если* $\mathfrak{A} : P \vdash \cdot Q$, *то*

(59) $$\beta\alpha P\beta \models \beta\gamma Q\beta.$$

Рассуждая как в предыдущем доказательстве, получаем (43), (57) и (54), где k, R и S имеют прежний смысл. В отличие от предыдущего доказательства, формула (42) теперь заключительная и потому 4-я группа соотношений системы (3) содержит соотношение

(60) $$\alpha_k A_k \longleftrightarrow \gamma_{n+1} C_k,$$

где C_k есть такое слово, что $B_k = \cdot C_k$. Равенство (44) имеет место по-прежнему, тогда как вместо (45) имеем теперь

(61) $$Q = RC_k S.$$

Так как соотношение (60) принадлежит системе (3), имеем

(62) $$\beta R\alpha_k A_k S\beta \vdash \beta R\gamma_{n+1} C_k S\beta.$$

Соотношения 6-й группы системы (3) дают, наконец,

(63) $$\begin{aligned}
\beta R\gamma_{n+1} C_k S\beta &\models \beta\gamma_{n+1} RC_k S\beta\\
&= \beta\gamma_{n+1} Q\beta && [(61)].
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\beta\alpha_1 P\beta &\models \beta R\alpha_k A_k S\beta && [(43), (57), (54)]\\
&\vdash \beta R\gamma_{n+1} C_k S\beta && [(62)]\\
&\models \beta\gamma_{n+1} Q\beta && [(63)],
\end{aligned}$$

что и доказывает собственную преобразуемость (59), так как $\alpha_1 = \alpha$, $\gamma_{n+1} = \gamma$.

1.17. *Если* $\mathfrak{A}: P \models Q$, *то* $\beta\alpha P\beta \models \beta\alpha Q\beta$.

Это следует из **1.15**.

1.18. *Если* $\mathfrak{A}(P) = Q$, *то имеет место эквивалентность* **(1)**.

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A}(P) = Q$. Тогда имеет место одно из двух: $\mathfrak{A}: P \models Q\urcorner$ или $\mathfrak{A}: P \models \cdot Q$ [II. § 3.6.3].

В первом случае

$$\beta\alpha P\beta \models \beta\alpha Q\beta \qquad [1.17],$$

$$\beta\alpha Q\beta \underline{\models} \beta\gamma Q\beta \qquad [1.14],$$

откуда

$$\beta\alpha P\beta \underline{\models} \beta\gamma Q\beta. \qquad (64)$$

Следовательно, **(1)** имеет место [1.10].

Во втором случае имеется такое слово R, что

$$\mathfrak{A}: P \models R \vdash \cdot Q \qquad [II. § 3.6.2].$$

Для него имеем

$$\beta\alpha P\beta \models \beta\alpha R\beta \qquad [1.17],$$

$$\beta\alpha R\beta \underline{\models} \beta\gamma Q\beta \qquad [1.16],$$

откуда также следует **(64)** и **(1)**.

Для завершения доказательства теоремы **1.1** нам, очевидно, остается доказать следующее утверждение, обратное лемме **1.18**.

1.19. *Если имеет место эквивалентность* **(1)**, *где* P *и* Q *— слова в* A, *то* $\mathfrak{A}(P) = Q$.

Докажем его.

Пусть эквивалентность **(1)** имеет место для слов P и Q в алфавите A. Тогда $\beta\alpha P\beta \underline{\models} \beta\gamma Q\beta$ [1.9], т. е. может быть построен ряд слов $P_0, \ldots, P_k$ $(k > 0)$, удовлетворяющий условиям **(14)**—**(16)**.

При применении алгорифма $\mathfrak{A}$ к слову P возможны три случая: $\mathfrak{A}: P\urcorner$, $\mathfrak{A}: P \vdash R_1$ для некоторого R_1, $\mathfrak{A}: P \vdash \cdot R$ для некоторого R [II. § 3.6.1].

Если $\mathfrak{A}: P\urcorner$, то имеем **(40)** [1.14], откуда следует, что $\beta\gamma P\beta$ равно одному из слов $P_1, \ldots, P_k$ [**(14)**—**(16)**, 1.11]. В силу **(16)**, $\beta\gamma P\beta$ не может, однако, быть равным никакому P_i с $i < k$ [1.8]. Следовательно, в этом случае

$$\beta\gamma P\beta = P_k$$

$$= \beta\gamma Q\beta \qquad [(15)],$$

откуда $P = Q$. Кроме того $\mathfrak{A}(P) = P$, так как $\mathfrak{A}: P\urcorner$. Следовательно, $\mathfrak{A}(P) = Q$, что и утверждается.

Если $\mathfrak{A}: P \vdash \cdot R$ для некоторого слова R, то

$$\beta\alpha P\beta \underline{\models} \beta\gamma R\beta \qquad [1.16],$$

откуда следует, что $\beta\gamma R\beta$ равно одному из слов $P_1, \ldots, P_k$ [**(14)**—**(16)**, 1.11]. В силу **(16)**, $\beta\gamma R\beta$ не может, однако, быть равным никакому P_i с $i < k$ [1.8]. Следовательно,

$$\beta\gamma R\beta = P_k$$

$$= \beta\gamma Q\beta \qquad [(15)],$$

откуда $R = Q$. Кроме того, $\mathfrak{A}(P) = R$, так как $\mathfrak{A} : P \models \cdot R$. Следовательно, $\mathfrak{A}(P) = Q$, что и утверждается.

Пусть, наконец, $\mathfrak{A} : P \vdash R_1$ для некоторого слова R_1. Имеем тогда

$$\beta\alpha P\beta \models \beta\alpha R_1\beta \qquad [1.15],$$

откуда следует, что $\beta\alpha R_1\beta$ равно одному из слов $P_1, \ldots, P_k$ [(14)—(16), 1.11].

В силу (15), $\beta\alpha R_1\beta$ не может быть равно P_k, так как $\alpha \neq \gamma$. Следовательно, имеется такое число i_1, что $1 \leqslant i_1 < k$ и что

$$P_{i_1} = \beta\alpha R_1\beta. \tag{65}$$

Ряд слов $P_{i_1}, \ldots, P_k$ удовлетворяет условиям (65), (15) и

$$P_{i-1} \vdash P_i \quad (i_1 < i \leqslant k) \qquad [(16)],$$

аналогичным условиям (14)—(16), причем роль P играет теперь R_1. Поэтому к этому ряду и слову R применимо рассуждение, только что проведенное для ряда $P_0, \ldots, P_k$ и слова P. Мы заключаем из этого рассуждения, что возможно лишь одно из двух: либо $\mathfrak{A}(R_1) = Q$, либо имеются слово R_2 и число i_2 такие, что

$$\mathfrak{A} : R_1 \vdash R_2,$$
$$i_1 < i_2 < k,$$
$$P_{i_2} = \beta\alpha R_2\beta.$$

В первом случае $\mathfrak{A}(P) = Q$, так как $\mathfrak{A} : P \vdash R_1$ и $\mathfrak{A}(R_1) = Q$ [II. § 3.6.8, II. § 3.7.6]. Во втором случае мы, рассуждая аналогично предыдущему, убеждаемся в том, что либо $\mathfrak{A}(R_2) = Q$, либо имеются слово R_3 и число i_3 такие, что

$$\mathfrak{A} : R_2 \vdash R_3,$$
$$i_2 < i_3 < k,$$
$$P_{i_3} = \beta\alpha R_3\beta.$$

Это последовательное построение слов R_1, R_2, $R_3, \ldots$ и чисел i_1, i_2, $i_3, \ldots$ таких, что

$$\mathfrak{A} : P \vdash R_1 \vdash R_2 \vdash R_3 \vdash \ldots, \tag{66}$$
$$0 < i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < k, \tag{67}$$
$$P_{i_j} = \beta\alpha R_j\beta,$$

должно, ввиду (67), оборваться на некотором слове R_h, для которого

$$\mathfrak{A}(R_h) = Q. \tag{68}$$

Имеем тогда

$$\mathfrak{A} : P \models R_h \qquad [(66)] \tag{69}$$
$$\mathfrak{A}(P) = Q \qquad [(68), (69), \text{II. § 3.7.6}],$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.1, таким образом, доказана.

2. Пользуясь теоремой 1.1, докажем следующую теорему.

2.1. *Может быть построено ассоциативное исчисление* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* A_2, *удовлетворяющее следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над алфавитом* A_0, *аннулирующий те и только те слова* P *в* A_0, *для которых эквивалентность*

$$\mathfrak{B} : dcPd \parallel ded \tag{1}$$

не имеет места.

Построим, в самом деле, нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_2$ в алфавите A_0 согласно V. § 3.3.2, т. е. так, чтобы удовлетворялось условие: невозможен нормальный алгорифм над A_0, аннулирующий те и только те слова в A_0, которые $\mathfrak{B}_2$ не аннулирует. Применим к алгорифму $\mathfrak{B}_2$ теорему 1.1, полагая $A = A_0$, $\alpha = c$, $\beta = d$, $\gamma = e$. Согласно этой теореме построим ассоциативное исчисление $\mathfrak{B}$ над алфавитом $A_0 \cup \{c, d, e\}$, т. е. над A_2 [I. § 2.6], удовлетворяющее условию: равенство

$$\mathfrak{B}_2(P) = Q$$

имеет место для слов P и Q в A_0 тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{B} : dcPd \parallel deQd.$$

Это исчисление и является искомым.

Действительно, согласно построению, $\mathfrak{B}_2$ аннулирует те и только те слова P в A_0, для которых имеет место (1). Если теперь какой-нибудь нормальный алгорифм над A_0 аннулирует те и только те слова в A_0, для которых (1) не имеет места, то он аннулирует те и только те слова в A_0, которые $\mathfrak{B}_2$ не аннулирует. Такой нормальный алгорифм над A_0, однако, невозможен по построению $\mathfrak{B}_2$. Невозможен, следовательно, нормальный алгорифм над A_0, аннулирующий те и только те слова в A_0, для которых эквивалентность (1) не имеет места, что и требовалось доказать.

Пользуясь аналогичным образом теоремой V. § 3.3.4 вместо теоремы V. § 3.3.2, получаем следующий результат.

2.2. *Может быть построено ассоциативное исчисление* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* A_2, *удовлетворяющее следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над* A_0, *применимый ко всякому слову в* A_0 *и аннулирующий те и только те слова* P *в* A_0, *для которых имеет место эквивалентность* (1).

3. Исходя из 2.1, докажем следующую теорему.

3.1. *Может быть построено ассоциативное исчисление* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* $\{d, e\}$, *удовлетворяющее следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над алфавитом исчисления* $\mathfrak{B}$, *аннулирующий те и только те слова в этом алфавите, которые не эквивалентны в* $\mathfrak{B}$ *слову ded.*

Построим, в самом деле, ассоциативное исчисление $\mathfrak{B}$ над алфавитом A_2 согласно 2.1, т. е. так, чтобы соблюдалось условие: невозможен нормальный алгорифм над A_0, аннулирующий те и только те слова P в A_0, для которых эквивалентность 2(1) не имеет места. Покажем, что исчисление является искомым.

Действительно, пусть Б означает алфавит исчисления $\mathfrak{B}$. Тогда $A_2 \subset$ Б и потому $\{d, e\} \subset$ Б, т. е. $\mathfrak{B}$ есть исчисление над $\{d, e\}$. Допустим,

что $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над Б, аннулирующий те и только те слова в Б, которые не эквивалентны в исчислении $\mathfrak{B}$ слову *ded*.

Введем букву δ, не принадлежащую алфавиту Б, и построим нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в алфавите Б $\cup \{\delta\}$, задав его схемой

$$\begin{cases} \delta\xi \to \xi\delta \ (\xi \in \text{Б}) \\ \delta \to \cdot d \\ \to dc\delta \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathfrak{C}(P) = dcPd \tag{1}$$

для всякого слова P в Б.

Построим теперь алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{C}. \tag{2}$$

$\mathfrak{K}$ есть нормальный алгорифм над Б [(2), III. § 3.4.2] и, значит, над A_0.

$$\mathfrak{K}(P) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{C}(P)) \quad (P \text{ — слово в Б}) \qquad [(2), \text{III. § 3.4.3}]$$

$$\simeq \mathfrak{H}(dcPd) \quad (P \text{ — слово в Б}) \qquad [(1)].$$

Отсюда следует, что алгорифм $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда аннулирует слово P в алфавите A_0, когда алгорифм $\mathfrak{H}$ аннулирует слово $dcPd$. Но $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда аннулирует это слово, когда оно не эквивалентно в исчислении $\mathfrak{B}$ слову *ded*. Таким образом, нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ над алфавитом A_0 аннулирует те и только те слова в этом алфавите, для которых эквивалентность 2 (1) не имеет места. Такой алгорифм невозможен, согласно построению исчисления $\mathfrak{B}$. Следовательно, невозможен и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над Б, аннулирующий те и только те слова в Б, которые не эквивалентны в $\mathfrak{B}$ слову *ded*, что и требовалось доказать.

Пользуясь аналогичным образом теоремой 2.2, получаем следующий результат.

3.2. *Может быть построено ассоциативное исчисление $\mathfrak{B}$ над алфавитом $\{d, e\}$, удовлетворяющее следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над алфавитом исчисления $\mathfrak{B}$, применимый ко всякому слову в этом алфавите и аннулирующий те и только те слова в нем, которые эквивалентны в $\mathfrak{B}$ слову ded.*

4. Установленная только что теорема 3.2 утверждает возможность построения ассоциативного исчисления $\mathfrak{B}$ и некоторого слова A в его алфавите таким образом, что окажется неразрешимой следующая нормальная массовая проблема: построить нормальный алгорифм над алфавитом исчисления $\mathfrak{B}$, применимый ко всякому слову в этом алфавите и аннулирующий те и только те слова в нем, которые эквивалентны в $\mathfrak{B}$ слову A. Эту проблему мы будем называть *проблемой эквивалентности слову A* в исчислении $\mathfrak{B}$. Следующая почти очевидная теорема устанавливает простую связь между проблемами этого типа и ранее определенными проблемами эквивалентности для ассоциативных исчислений [§ 1.9].

4.1. *Если разрешима проблема эквивалентности для ассоциативного исчисления* $\mathfrak{A}$, *то, каково бы ни было слово* A *в его алфавите, разрешима и проблема эквивалентности этому слову в исчислении* $\mathfrak{A}$.

В самом деле, пусть А — алфавит исчисления $\mathfrak{A}$, A — слово в А, $\mathfrak{H}$ — нормальный алгорифм над $A \cup \{*\}$, применимый ко всякому слову вида $P*Q$, где P и Q — слова в А, и аннулирующий такое слово тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}: P \parallel Q$.

Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}_{A \cup \{*\},*A}$ [II. § 4.4]. Имеем

(1) $$\mathfrak{B}_{A \cup \{*\},*A}(P) = P*A \quad (P \text{ — слово в А}) \qquad \text{[II. § 4.4.5]}.$$

Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{B}_{A \cup \{*\},*A}$ и $\mathfrak{H}$:

(2) $$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{B}_{A \cup \{*\},*A}.$$

$\mathfrak{K}$ есть нормальный алгорифм над А [(2), III. § 3.4.2], причем

$$\mathfrak{K}(P) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_{A \cup \{*\},*A}(P)) \quad (P \text{ — слово в А}) \quad \text{[(2), III. § 3.4.3]}$$

(3) $$\simeq \mathfrak{H}(P*A) \qquad (P \text{ — слово в А}) \qquad \text{[(1)]}.$$

Так как алгорифм $\mathfrak{H}$ применим ко всякому слову вида $P*Q$, где P и Q — слова в А, алгорифм $\mathfrak{K}$ применим ко всякому слову в А [(3)]. Из (3) следует далее, что $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда аннулирует слово P в А, когда $\mathfrak{H}$ аннулирует слово $P*A$. А это имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}: P \parallel$ А. Таким образом, $\mathfrak{K}$ есть нормальный алгорифм над А, применимый ко всякому слову в этом алфавите и аннулирующий те и только те слова в нем, которые эквивалентны в $\mathfrak{A}$ слову A. Тем самым проблема эквивалентности слову A в исчислении $\mathfrak{A}$ решена и теорема доказана.

Как непосредственное следствие из 4.1 получаем

4.2. *Пусть ассоциативное исчисление* $\mathfrak{A}$ *таково, что для некоторого слова в его алфавите неразрешима проблема эквивалентности в* $\mathfrak{A}$ *этому слову. Тогда проблема эквивалентности для* $\mathfrak{A}$ *неразрешима.*

Как следствие из 3.2 и 4.2 получаем

4.3. *Может быть построено ассоциативное исчисление, для которого проблема эквивалентности неразрешима.* *

Эта теорема допускает следующее уточнение.

4.4. *Может быть построено ассоциативное исчисление* $\mathfrak{B}$ *в некотором, не содержащем звездочку алфавите* Б, *удовлетворяющее следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над* $Б \cup \{*\}$, *аннулирующий те и только те слова вида* $P*Q$ (P *и* Q *в* Б), *для которых эквивалентность*

$$\mathfrak{B}: P \parallel Q$$

не имеет места.

* В настоящее время автору известно пять доказательств этой теоремы: первое доказательство автора [3], основанное на применении методов Поста [26] к результатам Чёрча [15, 17] и Россера [29]; второе доказательство автора [5], основанное на результатах Поста [26]; доказательство Поста [28], основанное на идеях Тюринга [31]; доказательство Кольмара [20], основанное на результатах Клина [21]; только что проведенное доказательство. Доказательство Поста стало известно автору во время печатания заметки [5].

Эта теорема доказывается совершенно аналогично 4.3. Надо лишь воспользоваться 3.1 вместо 3.2 и применить алгорифм $\mathfrak{B}_{B\cup\{*\},\,*ded}$, связывающий алгорифмы, о которых говорится в 4.4, с алгорифмами, о которых говорится в 3.1.

Имея в виду истолкование проблемы эквивалентности для ассоциативного исчисления как проблемы тождества для порождаемой им К-системы [§ 1.9], мы можем истолковать теорему 4.3 как теорему о возможности построения К-системы с неразрешимой проблемой тождества.

5. В теореме 4.3 лишь утверждается возможность построения ассоциативного исчисления, но не выписывается определяющая система такого исчисления в явном виде. Теоретически такая система соотношений может быть, правда, получена на основе всего предыдущего. Для этого нам пришлось бы, проследив весь ход рассуждений, приведший нас к теореме 4.3, конкретизировать его в том смысле, что схемы всех применявшихся нормальных алгорифмов выписывались бы в явном виде. В частности, нам пришлось бы выписать в явном виде схему видоизмененного универсального алгорифма $\mathfrak{V}$ на основе указанного в главе IV довольно сложного способа построения этой схемы. Конкретизируя эту схему для алфавита A_1 в роли А и буквы e в роли δ [V. § 2.2.1], мы затем должны были бы построить схемы нормальных алгорифмов $\mathfrak{V}_0$ [V. § 2.2.2], $\mathfrak{V}_1$ [V. § 3.3.1] и $\mathfrak{V}_2$ [V. § 3.3.2]. Исходя, наконец, из схемы алгорифма $\mathfrak{V}_2$ и применяя построение, указанное в доказательстве теоремы 1.1, мы получили бы схему искомого ассоциативного исчисления. Ясно, что в результате получилось бы нечто весьма громоздкое. А так как проблема явного и возможно более простого задания ассоциативного исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности представляет несомненный интерес, хотя бы в качестве возможной основы для доказательства других теорем невозможности, следует искать другие пути ее решения.

В ближайших параграфах мы пройдем один из таких путей. Он не является очень прямолинейным, однако приводит к удовлетворительному результату, а кроме того интересен и сам по себе.

§ 3. Проблема эквивалентности пустому слову

1. Частным случаем проблемы эквивалентности данному слову в данном ассоциативном исчислении [§ 2.4] является проблема эквивалентности пустому слову в этом исчислении, формулируемая так: построить для данного ассоциативного исчисления $\mathfrak{A}$ нормальный алгорифм, применимый ко всякому слову в алфавите исчисления и аннулирующий те и только те слова в этом алфавите, которые эквивалентны в $\mathfrak{A}$ пустому слову. Мы увидим, что ассоциативное исчисление $\mathfrak{A}$ может быть построено таким образом, что эта проблема окажется неразрешимой.

Чтобы установить этот результат, мы покажем, что всякая проблема эквивалентности какому-либо данному слову C в каком-либо данном ассоциативном исчислении $\mathfrak{C}$ всегда может быть определенным образом сведена к проблеме эквивалентности пустому слову в некотором другом ассоциативном исчислении. Мы докажем следующую теорему.

1.1. *Пусть* $\mathfrak{C}$ *— ассоциативное исчисление в алфавите* Г, C *— слово в этом алфавите,* α *и* β *— отличные друг от друга буквы, не принадлежащие* Г,

$$Д = Г \cup \{\alpha, \beta\}.$$

Построим ассоциативное исчисление $\mathfrak{D}$ *в алфавите* Д, *определяя его системой соотношений, получаемой путем присоединения к определяющей системе исчисления* $\mathfrak{C}$ *соотношения*

(1) $$\alpha C \beta \longleftrightarrow .$$

Тогда для всякого слова P *в алфавите* Г *эквивалентность*

(2) $$\mathfrak{C} : P \amalg C$$

равносильна эквивалентности

(3) $$\mathfrak{D} : \alpha P \beta \amalg \Lambda .$$

Прежде всего легко усмотреть, что эквивалентность (3) имеет место для слова P в Г, коль скоро для него имеет место эквивалентность (2).

В самом деле, так как все соотношения определяющей системы исчисления $\mathfrak{C}$ принадлежат определяющей системе исчисления $\mathfrak{D}$, имеем тогда

(4) $$\mathfrak{D} : P \amalg C,$$

(5) $$\mathfrak{D} : \alpha P \beta \amalg \alpha C \beta \qquad [(4), \S\ 1.6.6],$$

а так как соотношение (1) принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{D}$, имеем

(6) $$\mathfrak{D} : \alpha C \beta \amalg \Lambda .$$

В силу (5) и (6), имеем (3) [§ 1.6.5].

Остается доказать обратное, т. е. что (2) имеет место для слова P в Г, коль скоро имеет место (3). Для этого введем некоторые вспомогательные понятия и обозначения.

Условимся называть *высотой слова* Q число вхождений буквы α в это слово; *высотой ряда слов* $Q_0, \ldots, Q_n$ — наибольшую из высот слов $Q_0, \ldots, Q_n$. Высоту слова Q будем обозначать символом $[Q^{\text{в}}$; высоту ряда слов $\mathfrak{Q}$ — символом $[\mathfrak{Q}^{\text{в}}$. Условимся называть *протяжением ряда слов* $Q_0, \ldots, Q_n$ число тех чисел i, для которых

$$[Q_i^{\text{в}} = [Q_0, \ldots, \ Q_n^{\text{в}}.$$

Протяжение ряда слов $\mathfrak{Q}$ будем обозначать символом $[\mathfrak{Q}^{\text{п}}$.

Очевидно, что высота всякого ряда слов есть натуральное число, а протяжение всякого ряда слов — целое положительное число.

В следующей лемме мы пользуемся терминологией, введенной в § 1.6.

1.2. *Если* $\mathfrak{Q}$ *есть* $\mathfrak{D}$*-ряд, связывающий* V *с* W *и*

(7) $$[V^{\text{в}} < [\mathfrak{Q}^{\text{в}},$$

(8) $$[W^{\text{в}} < [\mathfrak{Q}^{\text{в}},$$

то может быть построен такой $\mathfrak{D}$*-ряд* $\mathfrak{R}$, *связывающий* V *с* W, *что либо*

(9) $$[\mathfrak{R}^{\text{в}} < [\mathfrak{Q}^{\text{в}},$$

либо $[\mathfrak{R}^{\text{в}} = [\mathfrak{Q}^{\text{в}}$ *и* $[\mathfrak{R}^{\text{п}} < [\mathfrak{Q}^{\text{п}}$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{D}$ -ряд $\mathfrak{Q}$ связывает V с W и удовлетворяет условиям (7) и (8); пусть $\mathfrak{Q}$ есть ряд $Q_0, \ldots, Q_n$ $(n \geqslant 0)$. Имеем равенства

(10) $$Q_0 = V,$$

(11) $$Q_n = W,$$

так как $\mathfrak{Q}$ связывает V с W. Положим

(12) $$h = [\mathfrak{Q}^{\mathrm{B}}.$$

По определению высоты ряда найдутся такие числа i, что $[Q_i^{\mathrm{B}} = h$. Все они отличны от нуля и от n, так как

$$[Q_0^{\mathrm{B}} < h \qquad [(7), (10), (12)],$$

(13) $$[Q_n^{\mathrm{B}} < h \qquad [(8), (11), (12)].$$

Пусть j означает наименьшее из этих чисел. Тогда $0 < j < n$ и, так как

(14) $$[Q_i^{\mathrm{B}} \leqslant h \quad (0 \leqslant i \leqslant n) \qquad [(12)],$$

имеем

(15) $$[Q_{j-1}^{\mathrm{B}} < h,$$

в то время как

(16) $$[Q_j^{\mathrm{B}} = h.$$

В силу (13), имеются числа i такие, что $j < i \leqslant n$ и что $[Q_i^{\mathrm{B}} < h$. Пусть k означает наименьшее из этих чисел. Тогда $j < k \leqslant n$,

(17) $$[Q_k^{\mathrm{B}} < h,$$

(18) $$[Q_i^{\mathrm{B}} = h \quad (j \leqslant i < k) \qquad [(14), (16)].$$

Имеем

$$\mathfrak{D} : Q_{j-1} \perp Q_j,$$

так как $\mathfrak{Q}$ есть $\mathfrak{D}$-ряд. Это означает, что Q_j может быть получено из Q_{j-1} в результате подстановки правой или левой части одного из соотношений определяющей системы исчисления $\mathfrak{D}$ вместо некоторого вхождения другой части того же соотношения. Так как

$$[Q_{j-1}^{\mathrm{B}} < [Q_j^{\mathrm{B}} \qquad [(15), (16)],$$

это соотношение не может принадлежать определяющей системе исчисления $\mathfrak{C}$ и действием, переводящим Q_{j-1} в Q_j, является подстановка левой части $\alpha C \beta$ соотношения (1) вместо вхождения правой части этого соот-

ношения, т. е. вместо пустого слова. Таким образом, для некоторых слов R и S в алфавите Д

(19) $$Q_{j-1}=RS,$$

(20) $$Q_j=R\alpha C\beta S.$$

Слова $Q_j,\ldots,Q_{k-1}$, имеющие одинаковую высоту h [(18)], образуют $\mathfrak{D}$-ряд, так как $\mathfrak{Q}$ есть $\mathfrak{D}$-ряд. Имеем

(21) $$\mathfrak{D}: Q_{i-1}\perp Q_i \quad (j<i<k),$$

$$[Q_{i-1}^{\text{в}}=[Q_i^{\text{в}} \quad (j<i<k).$$

А так как подстановка правой или левой части соотношения (1) вместо вхождения левой или соответственно правой части этого соотношения изменяет высоту, Q_i получается из Q_{i-1} в результате действия, соответствующего одному из соотношений определяющей системы исчисления $\mathfrak{C}$ $(j<i<k)$.

Покажем индукцией по i, что каждое из слов Q_i $(j\leqslant i<k)$ может быть представлено в виде $R_i\alpha K_i\beta S_i$, где K_i — слово в Г, R_i и S_i — слова в Д, причем

(22) $$[R_i^{\text{в}}=[R^{\text{в}}.$$

Для $i=j$ это вытекает из (20): следует положить

(23) $$K_j=C,$$

(24) $$R_j=R,$$

(25) $$S_j=S.$$

Допустим, что для некоторого i, удовлетворяющего условиям $j<i<k$, имеем

(26) $$Q_{i-1}=R_{i-1}\alpha K_{i-1}\beta S_{i-1},$$

где K_{i-1} — слово в Г, R_{i-1} и S_{i-1} — слова в Д, причем

(27) $$[R_{i-1}^{\text{в}}=[R^{\text{в}}.$$

Покажем, что тогда

(28) $$Q_i=R_i\alpha K_i\beta S_i,$$

где K_i — слово в Г, R_i и S_i — слова в Д, причем имеет место равенство (22).

Q_i получается из Q_{i-1} в результате подстановки правой или левой части Y одного из соотношений определяющей системы исчисления $\mathfrak{C}$ вместо некоторого вхождения другой части X того же соотношения. X есть слово в алфавите Г, и потому буквы α и β не входят в X. Ввиду (26) здесь применима лемма I. § 4.5.4, согласно которой Q_i имеет один из видов:

(29) $$T\alpha K_{i-1}\beta S_{i-1}$$

(T — результат подстановки Y вместо вхождения слова X в R_{i-1}),

(30) $$R_{i-1}\alpha T\beta S_{i-1}$$

(T — результат подстановки Y вместо вхождения слова X в K_{i-1}),

(31) $$R_{i-1}\alpha K_{i-1}\beta T$$

(T — результат подстановки Y вместо вхождения слова X в S_{i-1}).

Положим

(32) $$R_i = T, \quad K_i = K_{i-1}, \quad S_i = S_{i-1},$$

если Q_i имеет вид (29);

(33) $$R_i = R_{i-1}, \quad K_i = T, \quad S_i = S_{i-1},$$

если Q_i имеет вид (30) и

(34) $$R_i = R_{i-1}, \quad K_i = K_{i-1}, \quad S_i = T,$$

если Q_i имеет вид (31). Тогда во всех случаях будем иметь равенство (28). В этом равенстве K_i либо равно K_{i-1}, либо есть результат подстановки Y вместо вхождения слова X в K_i [(32)—(34), (30)]. Так как Y есть слово в Г, K_i есть, как и K_{i-1}, слово в Г. Аналогичным образом усматриваем, что R_i, S_i суть, как и R_{i-1}, S_{i-1} слова в Д, причем

$$[R_i^{\text{в}} = [R_{i-1}^{\text{в}} = [R^{\text{в}} \qquad [(27)].$$

Тем самым доказано наше утверждение о виде слов Q_i $(j \leqslant i < k)$.

В этом виде каждое из слов Q_i $(j \leqslant i < k)$, очевидно, представляется лишь единственным образом, причем проведенное рассуждение показывает, что при всяком i, удовлетворяющем условиям $j < i < k$, имеет место одно из трех:

а) $\mathfrak{C}_1 : R_{i-1} \perp R_i, \quad K_{i-1} = K_i, \quad S_{i-1} = S_i;$

б) $R_{i-1} = R_i, \quad \mathfrak{C} : K_{i-1} \perp K_i, \quad S_{i-1} = S_i;$

в) $R_{i-1} = R_i, \quad K_{i-1} = K_i, \quad \mathfrak{C}_1 : S_{i-1} \perp S_i,$

где $\mathfrak{C}_1$ — ассоциативное исчисление в алфавите Д, определяемое той же системой соотношений, что $\mathfrak{C}$.

Допустим сначала, что для всякого i, удовлетворяющего условиям $j < i < k$, имеет место случай б). Тогда

(35) $$R_i = R_j = R \quad (j \leqslant i < k) \qquad [(24)],$$

(36) $$S_i = S_j = S \quad (j \leqslant i < k) \qquad [(25)],$$

(37) $$Q_i = R\alpha K_i\beta S \quad (j \leqslant i < k) \qquad [(28), (35), (36)].$$

Имеем

$$\mathfrak{D}: Q_{k-1} \perp Q_k,$$

так как $\mathfrak{Q}$ есть $\mathfrak{D}$-ряд. При этом

$$[Q_k^{\text{в}} < [Q_{k-1}^{\text{в}} \qquad [(17), (18)].$$

Это означает, что Q_k получается из Q_{k-1} в результате подстановки правой части соотношения (3), т. е. пустого слова, вместо некоторого вхождения левой части этого соотношения. Ввиду того, что $\alpha \neq \beta$ и ни α, ни β не входят ни в слово K_{k-1} в алфавите Γ, ни в слово C в этом алфавите, здесь применима лемма I. § 4.5.5, согласно которой Q_k имеет один из видов:

$$T\alpha K_{k-1}\beta S$$

(T — результат подстановки Λ вместо вхождения слова $\alpha C\beta$ в R),

$$RS,$$

$$R\alpha K_{k-1}\beta T$$

(T — результат подстановки Λ вместо вхождения слова $\alpha C\beta$ в S).

Если

$$Q_k = RS, \tag{38}$$

то $Q_k = Q_{j-1}$ [(38), (19)], и потому $Q_0, \ldots, Q_{j-1}, Q_{k+1}, \ldots, Q_n$ есть, как и $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{D}$-ряд, связывающий те же слова, что и $\mathfrak{Q}$, т. е. связывающий V с W. Этот ряд мы и примем за $\mathfrak{R}$.

Ясно, что

$$[\mathfrak{R}^{\text{в}} \leqslant [\mathfrak{Q}^{\text{в}} \tag{39}$$

и что при

$$[\mathfrak{R}^{\text{в}} = [\mathfrak{Q}^{\text{в}} \tag{40}$$

имеем

$$[\mathfrak{R}^{\text{н}} = [\mathfrak{Q}^{\text{н}} - (k-j) \qquad [(18), (12)], \tag{41}$$

$$[\mathfrak{R}^{\text{н}} < [\mathfrak{Q}^{\text{н}} \qquad [(41)]. \tag{42}$$

Таким образом, в этом случае ряд $\mathfrak{R}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Допустим теперь, что

$$Q_k = T\alpha K_{k-1}\beta S, \tag{43}$$

где T есть результат подстановки пустого слова вместо некоторого вхождения слова $\alpha C\beta$ в R. Положим тогда

$$P_{j-1} = TS, \tag{44}$$

$$P_i = T\alpha K_i \beta S \quad (j \leqslant i < k) \tag{45}$$

и примем за $\mathfrak{R}$ ряд $Q_0, \ldots, Q_{j-1}, P_{j-1}, \ldots, P_{k-1}, Q_{k+1}, \ldots, Q_n$. Так как $j > 0$ и

(46) $$P_{k-1} = Q_k \qquad [(45), (43)],$$

ряд $\mathfrak{R}$ связывает (даже при $k = n$) те же слова, что $\mathfrak{Q}$, т. е. он связывает V с W.

Имеем далее

(47) $$\mathfrak{D} : Q_0 \perp Q_1 \perp \ldots \perp Q_{j-1},$$

(48) $$\mathfrak{D} : P_{k-1} \perp Q_{k+1} \perp \ldots \perp Q_n,$$

так как $\mathfrak{Q}$ есть $\mathfrak{D}$-ряд и имеет место равенство (46);

(49) $$\mathfrak{D} : R \perp T,$$

так как T есть результат подстановки правой части соотношения (1) вместо вхождения в R его левой части;

(50) $$\mathfrak{D} : Q_{j-1} \perp P_{j-1} \qquad [(49), (19), (44), \S\ 1.5.3].$$

Имеем также по предположению

$$\mathfrak{C} : K_{i-1} \perp K_i \quad (j < i < k),$$

откуда

(51) $$\mathfrak{D} : K_{i-1} \perp K_i \quad (j < i < k),$$

(52) $$\mathfrak{D} : P_{i-1} \perp P_i \quad (j < i < k) \qquad [(51), (45), \S\ 1.5.3].$$

Наконец, имеем

$$P_j = T\alpha C\beta S \qquad [(45), (23)],$$

откуда, согласно (44),

(53) $$\mathfrak{D} : P_{j-1} \perp P_j.$$

Смежности (47), (50), (53), (52), (48) показывают, что $\mathfrak{R}$ есть $\mathfrak{D}$-ряд.

Сравнивая слова Q_i и P_i при $j \leqslant i < k$ и замечая, что

(54) $$[T^{\mathfrak{B}} < [R^{\mathfrak{B}},$$

усматриваем, что

$$[P_i^{\mathfrak{B}} < [Q_i^{\mathfrak{B}} \qquad [(45), (37), (54)],$$

откуда

(55) $$[P_i^{\mathfrak{B}} < h \quad (j \leqslant i < k) \qquad [(18)].$$

Имеем также

$$[P_{j-1}^{\mathfrak{B}} < [Q_{j-1}^{\mathfrak{B}} \qquad [(44), (19), (54)]$$

(56) $$< h \qquad [(15)].$$

Таким образом, высоты всех слов $P_{j-1}, \ldots, P_{k-1}$ меньше h, т. е. меньше высоты ряда $\mathfrak{Q}$. Следовательно,

$$[\mathfrak{R}^{\mathfrak{B}} \leqslant [\mathfrak{Q}^{\mathfrak{B}}.$$

Так как переход от $\mathfrak{Q}$ к $\mathfrak{R}$ состоит, согласно (46), в замене $k-j$ слов $Q_j, \ldots, Q_{k-1}$ высоты h [(18)] словами $P_{j-1}, \ldots, P_{k-2}$ меньшей высоты [(55), (56)], имеем при $[\mathfrak{R}^{\mathfrak{B}} = [\mathfrak{Q}^{\mathfrak{B}}$ неравенство (42). Это показывает, что ряд $\mathfrak{R}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Совершенно аналогичным образом строится искомый ряд $\mathfrak{R}$ в том случае, когда

$$Q_k = R\alpha K_{k-1}\beta T,$$

где T есть результат подстановки пустого слова вместо некоторого вхождения слова $\alpha C\beta$ в S.

Мы завершили, таким образом, рассмотрение того случая, когда условия б) соблюдаются для всякого i такого, что $j < i < k$.

Допустим теперь, что для некоторых таких i эти условия не все соблюдаются, и обозначим через m наименьшее из этих i. Тогда, согласно доказанному выше, для $i = m$ соблюдаются либо условия а), либо условия в), в то время как для всякого i такого, что $j < i < m$, соблюдаются условия б). Случай, когда при $i = m$ соблюдаются условия а), и случай, когда при $i = m$ соблюдаются условия в), рассматриваются совершенно аналогичным образом. Будет поэтому достаточно провести построение искомого ряда $\mathfrak{R}$ для первого из этих случаев.

Итак, пусть

(57) $$\mathfrak{C}_1 : R_{m-1} \perp R_m,$$

(58) $$K_{m-1} = K_m,$$

(59) $$S_{m-1} = S_m,$$

тогда как для всякого i такого, что $j < i < m$, соблюдаются условия б). При этом m есть некоторое число такое, что $j < m < k$.

Имеем тогда

$$R_i = R_j$$

(60) $$= R \quad (j \leqslant i < m) \qquad [(24)],$$
$$S_i = S_j$$

(61) $$= S \quad (j \leqslant i \leqslant m) \qquad [(59), (25)],$$

(62) $$Q_i = R\alpha K_i \beta S \quad (j \leqslant i < m) \qquad [(28), (60), (61)].$$

Положим

(63) $$P_{j-1} = R_m S,$$

(64) $$P_i = R_m \alpha K_i \beta S \quad (j \leqslant i < m),$$

и примем за $\mathfrak{R}$ ряд $Q_0, \ldots, Q_{j-1}, P_{j-1}, \ldots, P_{m-1}, Q_{m+1}, \ldots, Q_n$. Так как $j > 0$ и $m < k \leqslant n$, он связывает те же слова, что $\mathfrak{Q}$, т. е. связывает V с W.

Имеем

(65) $$\mathfrak{D}: Q_0 \perp Q_1 \perp \ldots \perp Q_{j-1},$$

(66) $$\mathfrak{D}: P_{m-1} \perp Q_{m+1} \perp \ldots \perp Q_n,$$

так как $\mathfrak{Q}$ есть $\mathfrak{D}$-ряд и

$$P_{m-1} = Q_m. \qquad [(64), (58), (61), (28)].$$

Имеем далее

$$\mathfrak{C}: K_{i-1} \perp K_i \quad (j < i < m),$$

откуда

(67) $$\mathfrak{D}: K_{i-1} \perp K_i \quad (j < i < m),$$

(68) $$\mathfrak{D}: P_{i-1} \perp P_i \quad (j < i < m) \quad [(64), (67), \S\ 1.5.3].$$

Имеем также

(69) $$P_j = R_m \alpha C \beta S \qquad [(64), (23)],$$

(70) $$\mathfrak{D}: P_{j-1} \perp P_j \qquad [(63), (69)].$$

Наконец, имеем

(71) $$\mathfrak{C}_1: R \perp R_m \qquad [(57), (60)],$$

(72) $$\mathfrak{D}: R \perp R_m \qquad [(71)]$$

(73) $$\mathfrak{D}: Q_{j-1} \perp P_{j-1} \quad [(72), (19), (63), \S\ 1.5.3].$$

Смежности (65), (73), (70), (68) и (66) показывают, что $\mathfrak{R}$ есть $\mathfrak{D}$-ряд.

Имеем далее

(74) $$[R_m^{\mathrm{B}} = [R^{\mathrm{B}} \qquad [(22)],$$

$$[P_{j-1}^{\mathrm{B}} = [Q_{j-1}^{\mathrm{B}} \qquad [(74), (63), (19)]$$

(75) $$< h \qquad [(15)],$$

$$[P_i^{\mathrm{B}} = [Q_i^{\mathrm{B}} \quad (j \leqslant i < m) \qquad [(74), (64), (62)]$$

(76) $$= h \qquad [(18)].$$

Из сравнения рядов $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{Q}$ видно, что $\mathfrak{R}$ получается из $\mathfrak{Q}$ в результате замены слов $Q_j, \ldots, Q_m$ словами $P_{j-1}, \ldots, P_{m-1}$. Так как слова $Q_j, \ldots, Q_m$ имеют высоту h [(18)], а из слов $P_{j-1}, \ldots, P_{m-1}$ первое слово имеет высоту, меньшую h [(75)], а остальные — высоту h [(76)], имеем неравенство (39), причем в случае равенства (40) имеем

$$[\mathfrak{R}^{\mathrm{II}} = [\mathfrak{Q}^{\mathrm{II}} - 1$$

$$< [\mathfrak{Q}^{\mathrm{II}}.$$

Таким образом, и теперь построенный ряд $\mathfrak{R}$ обладает всеми требуемыми свойствами. Доказательство леммы 1.2 этим завершено.

1.3. *При соблюдении условий леммы* **1.2** *может быть построен* $\mathfrak{D}$*-ряд* $\mathfrak{R}$, *связывающий* V *с* W *и удовлетворяющий условию* **(9)**.

Пусть, в самом деле, соблюдены условия леммы **1.2**. Строим тогда согласно этой лемме $\mathfrak{D}$-ряд $\mathfrak{R}_1$, связывающий V с W и удовлетворяющий либо условию

$$[\mathfrak{R}_1^{\text{в}} < [\mathfrak{Q}^{\text{в}}, \tag{77}$$

либо паре условий

$$[\mathfrak{R}_1^{\text{в}} = [\mathfrak{Q}^{\text{в}}, \tag{78}$$

$$[\mathfrak{R}_1^{\text{п}} < [\mathfrak{Q}^{\text{п}}. \tag{79}$$

Если соблюдено условие **(77)**, то полагаем $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$; ряд $\mathfrak{R}$, очевидно, обладает требуемыми свойствами.

Если же соблюдены условия **(78)** и **(79)**, то применяем лемму **1.2** к словам V, W и ряду $\mathfrak{R}_1$ (в роли $\mathfrak{Q}$). Это возможно, так как

$$[V^{\text{в}} < [\mathfrak{R}_1^{\text{в}} \qquad [(7), (78)],$$

$$[W^{\text{в}} < [\mathfrak{R}_1^{\text{в}} \qquad [(8), (78)].$$

Строим согласно **1.2** $\mathfrak{D}$-ряд $\mathfrak{R}_2$, связывающий V с W и удовлетворяющий либо условию

$$[\mathfrak{R}_2^{\text{п}} < [\mathfrak{R}_1^{\text{в}}, \tag{80}$$

либо условиям

$$[\mathfrak{R}_2^{\text{в}} = [\mathfrak{R}_1^{\text{в}}, \tag{81}$$

$$[\mathfrak{R}_2^{\text{п}} < [\mathfrak{R}_1^{\text{п}}. \tag{82}$$

Если соблюдено условие **(80)**, то полагаем $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_2$; если же соблюдены условия **(81)** и **(82)**, то применяем еще раз лемму **1.2**. Продолжая таким образом действовать дальше, будем последовательно получать $\mathfrak{D}$-ряды $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3, \ldots$, связывающие V с W и такие, что

$$[\mathfrak{Q}^{\text{в}} = [\mathfrak{R}_1^{\text{в}} = [\mathfrak{R}_2^{\text{в}} = \ldots,$$

тогда как

$$[\mathfrak{Q}^{\text{п}} > [\mathfrak{R}_1^{\text{п}} > [\mathfrak{R}_2^{\text{п}} > \ldots$$

Этот процесс, очевидно, должен оборваться (не более, чем после $[\mathfrak{Q}^{\text{п}}$ шагов), а оборваться он может лишь тогда, когда получится $\mathfrak{D}$-ряд, связывающий V с W и имеющий высоту, меньшую высоты ряда $\mathfrak{Q}$. Такой $\mathfrak{D}$-ряд, следовательно, может быть построен, что и требовалось доказать.

1.4. *Если* $\mathfrak{D} : V \parallel W$, *то может быть построен* $\mathfrak{D}$*-ряд* $\mathfrak{R}$, *связывающий* V *с* W *и удовлетворяющий хотя бы одному из неравенств*

$$[V^{\text{в}} \geqslant [\mathfrak{R}^{\text{в}}, \tag{83}$$

$$[W^{\text{в}} \geqslant [\mathfrak{R}^{\text{в}}. \tag{84}$$

В самом деле, пусть $\mathfrak{D}: V \coprod W$. Тогда существует $\mathfrak{D}$-ряд $\mathfrak{Q}$, связывающий V с W.

Если он удовлетворяет условиям (7) и (8), то строим согласно 1.3 $\mathfrak{D}$-ряд $\mathfrak{Q}_1$, связывающий V с W и такой, что $[\mathfrak{Q}_1^{\mathfrak{B}} < [\mathfrak{Q}^{\mathfrak{B}}$. Если

$$[V^{\mathfrak{B}} < [\mathfrak{Q}_1^{\mathfrak{B}}$$

и

$$[W^{\mathfrak{B}} < [\mathfrak{Q}_1^{\mathfrak{B}},$$

то строим согласно 1.3 $\mathfrak{D}$-ряд $\mathfrak{Q}_2$, связывающий V с W и такой, что $[\mathfrak{Q}_2^{\mathfrak{B}} < [\mathfrak{Q}_1^{\mathfrak{B}}$. Этот процесс последовательного построения $\mathfrak{D}$-рядов $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$, связывающих V с W и таких, что

$$[\mathfrak{Q}^{\mathfrak{B}} > [\mathfrak{Q}_1^{\mathfrak{B}} > [\mathfrak{Q}_2^{\mathfrak{B}} > \ldots$$

должен, очевидно, оборваться (не более чем после $[\mathfrak{Q}^{\mathfrak{B}}$ шагов), а это, согласно 1.3, произойдет лишь тогда, когда получится $\mathfrak{D}$-ряд $\mathfrak{Q}_n$, связывающий V с W и такой, что хотя бы одно из неравенств

$$[V^{\mathfrak{B}} < [\mathfrak{Q}_n^{\mathfrak{B}},$$

$$[W^{\mathfrak{B}} < [\mathfrak{Q}_n^{\mathfrak{B}}$$

не соблюдается. Этот ряд $\mathfrak{Q}_n$, очевидно, и может быть взят в качестве $\mathfrak{R}$.

Мы можем теперь закончить доказательство теоремы 1.1.

Допустим, что эквивалентность (3) имеет место для слова P в алфавите Г. Покажем, что тогда имеет место эквивалентность (2).

Так как

$$[\alpha P \beta^{\mathfrak{B}} = 1 \tag{85}$$

и $[\Lambda^{\mathfrak{B}} = 0$, может быть построен согласно 1.4 $\mathfrak{D}$-ряд $Q_0, \ldots, Q_n$, связывающий $\alpha P \beta$ с Λ и удовлетворяющий условию

$$[Q_0, \ldots, Q_n^{\mathfrak{B}} \leqslant 1,$$

т. е. условию

$$[Q_i^{\mathfrak{B}} \leqslant 1 \quad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{86}$$

Имеем

$$Q_0 = \alpha P \beta, \tag{87}$$

$$Q_n = \Lambda, \tag{88}$$

$$[Q_n^{\mathfrak{B}} = 0 \qquad [(88)]. \tag{89}$$

Пусть j означает наименьшее из чисел i, для которых $[Q_i^{\mathrm{P}} = 0$. В силу (89), такие числа существуют и $j \leqslant n$. В силу (85) и (87), $j > 0$. Рассмотрим $\mathfrak{D}$-ряд $Q_0, \ldots, Q_j$, соединяющий $\alpha P \beta$ с Q_j.

По определению числа j имеем

$$[Q_i^{\mathrm{B}} = 1 \quad (0 \leqslant i < j) \qquad [(86)], \tag{90}$$

$$[Q_j^{\mathrm{B}} = 0. \tag{91}$$

Рассуждая далее, как в доказательстве леммы 1.2, убеждаемся, что каждое слово Q_i $(0 \leqslant i < j)$ может быть однозначно представлено в виде $R_i \alpha K_i \beta S_i$, где

$$K_0 = P, \tag{92}$$

где R_i, K_i и S_i суть слова в Г и где при всяком i $(0 < i < j)$ имеем либо $\mathfrak{C} : K_{i-1} \perp K_i$, либо $K_{i-1} = K_i$. Имеем поэтому

$$\mathfrak{C} : K_0 \perp\!\!\!\perp K_{j-1}. \tag{93}$$

С другой стороны, имеем

$$Q_{j-1} = R_{j-1} \alpha K_{j-1} \beta S_{j-1},$$

$$\mathfrak{D} : Q_{j-1} \perp Q_j,$$

откуда, в силу (90) и (91), следует, что

$$K_{j-1} = C. \tag{94}$$

В силу (92)—(94), имеет место эквивалентность (2), что и требовалось доказать.

2. Теоремы § 2.3.1 и 1.1 дают возможность установить следующий результат [5].

2.1. *Может быть построено ассоциативное исчисление* $\mathfrak{D}$, *удовлетворяющее следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над алфавитом исчисления* $\mathfrak{D}$, *аннулирующий те и только те слова в этом алфавите, которые не эквивалентны в* $\mathfrak{D}$ *пустому слову.*

Построим, в самом деле, ассоциативное исчисление $\mathfrak{B}$ над алфавитом $\{d, e\}$ согласно § 2.3.1. Применим к $\mathfrak{B}$ теорему 1.1. Роль $\mathfrak{C}$ пусть играет при этом $\mathfrak{B}$, роль Г — алфавит исчисления $\mathfrak{B}$, роль C — слово *ded* в этом алфавите, роли α и β — какие-нибудь две буквы, не принадлежащие Г. Построим согласно 1.1 ассоциативное исчисление $\mathfrak{D}$ в алфавите Д, равном $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$, таким образом, что эквивалентность 1 (2) будет тогда и только тогда иметь место для какого-нибудь слова P в Г, когда будет иметь место эквивалентность 1 (3). Исчисление $\mathfrak{D}$ будет тогда удовлетворять условию, формулированному в теореме 2.1.

Допустим, в самом деле, что $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над Д, аннулирующий те и только те слова в Д, которые не эквивалентны в $\mathfrak{D}$ пустому слову.

Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{E}$ в алфавите Д со схемой

$$\begin{cases} \beta\xi \to \xi\beta \quad (\xi \in \Gamma) \\ \beta \to \cdot\beta \\ \quad \to \alpha\beta \end{cases}.$$

Ясно, что

(1) $$\mathfrak{E}(P) = \alpha P \beta \quad (P \text{ — слово в } \Gamma).$$

Построим алгорифм $\mathfrak{R}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$:

(2) $$\mathfrak{R} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{E}.$$

$\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над Г [(2), III. § 3.4.2], причем

$$\mathfrak{R}(P) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{E}(P)) \quad (P \text{ — слово в } \Gamma) \quad [(2), \text{ III. § 3.4.3}]$$

$$\simeq \mathfrak{H}(\alpha P \beta) \quad (P \text{ — слово в } \Gamma) \quad [(1)].$$

Следовательно, $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда аннулирует слово P в Г, когда $\mathfrak{H}$ аннулирует слово $\alpha P \beta$, т. е. когда $\alpha P \beta$ не эквивалентно пустому слову в $\mathfrak{D}$. Но, согласно построению исчисления $\mathfrak{D}$, эквивалентность 1 (3) тогда и только тогда не имеет места, когда слово P не эквивалентно *ded* в исчислении $\mathfrak{B}$. Таким образом, $\mathfrak{R}$ аннулирует те и только те слова в Г, которые не эквивалентны *ded* в $\mathfrak{B}$. Такой нормальный алгорифм $\mathfrak{R}$ над Г, однако, невозможен, согласно построению исчисления $\mathfrak{B}$. Следовательно, невозможен и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над Д, аннулирующий те и только те слова в Д, которые не эквивалентны в $\mathfrak{D}$ пустому слову.

Аналогично, с помощью теорем § 2.3.2 и 1.1, устанавливается следующий результат.

2.2. *Может быть построено ассоциативное исчисление* $\mathfrak{D}$, *удовлетворяющее следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над алфавитом исчисления* $\mathfrak{D}$, *применимый ко всякому слову в этом алфавите и аннулирующий те и только те слова в нем, которые эквивалентны в* $\mathfrak{D}$ *пустому слову.*

3. Аналогично тому, как проблему эквивалентности в данном ассоциативном исчислении $\mathfrak{A}$ можно истолковать как проблему тождества в порождаемой им К-системе [§ 1.9], проблему эквивалентности данному слову в исчислении $\mathfrak{A}$ можно истолковать как проблему тождественности данному элементу этой К-системы. В частности, проблему эквивалентности пустому слову в исчислении $\mathfrak{A}$ можно истолковать как проблему тождественности единичному элементу К-системы, порождаемой исчислением $\mathfrak{A}$, т. е. как проблему построения нормального алгорифма, распознающего элементы, тождественные единичному элементу этой К-системы, по словам, представляющим эти элементы. Доказанную только что теорему 2.2 можно в соответствии с этим рассматривать как установление возможности построения К-системы с неразрешимой проблемой тождественности единичному элементу.

§ 4. Исчисления Поста

1. Мы рассмотрим теперь исчисления, введенные в 1943 г. Постом [26] и называемые им «нормальными системами». Термин «исчисление» мы здесь и в дальнейшем будем понимать как разрешение последовательно производить некоторые точно описанные действия над словами в данном алфавите. Ассоциативные исчисления, определенные в § 1, являются частными случаями исчислений вообще. «Нормальные системы» Поста,

которые мы сейчас определим, также являются исчислениями, и мы будем поэтому называть их «нормальными исчислениями Поста».

Пусть A_i, B_i $(1 \leqslant i \leqslant n;\ n \geqslant 0)$ — фиксированные слова в алфавите А. Будем называть *i-тым допустимым действием* переход от слова вида $A_i P$, где P — слово в А, к слову PB_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Всего мы будем иметь, таким образом, n допустимых действий. Разрешение последовательно производить допустимые действия, исходя из какого-нибудь слова в алфавите А, мы будем называть *нормальным исчислением Поста* в алфавите А, определяемым словами A_i и B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Мы будем говорить, что *слово Q выводимо из слова P в нормальном исчислении Поста* $\mathfrak{P}$, если Q либо равно P, либо получается из P в результате последовательно осуществляемых допустимых действий исчисления $\mathfrak{P}$. Для обозначения выводимости мы будем применять знак «$|=$». В дальнейшем запись

$$\mathfrak{P} : P \mid= Q, \tag{1}$$

где $\mathfrak{P}$ — нормальное исчисление Поста, будет означать, что Q выводимо из P в $\mathfrak{P}$. (Смешение этой записи с совершенно аналогичной записью для преобразования слов посредством нормального алгорифма [II. § 3. 6] невозможно, так как запись (1) начинается со знака исчисления Поста, а запись преобразования слов посредством нормального алгорифма — со знака этого алгорифма).

Мы будем говорить, что *слово Q непосредственно выводимо из слова P в нормальном исчислении Поста* $\mathfrak{P}$, если Q получается из P в результате одного допустимого действия. Для обозначения непосредственной выводимости мы будем применять знак «$|-$». В дальнейшем запись

$$\mathfrak{P} : P \mid- Q,$$

где $\mathfrak{P}$ — нормальное исчисление Поста, будет означать, что Q непосредственно выводимо из P в $\mathfrak{P}$.

В нормальном исчислении Поста $\mathfrak{P}$ в алфавите А, определяемом словами A_i, B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, имеем n типов непосредственных выводимостей:

$$\mathfrak{P} : A_i P \mid- PB_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{2}$$

где P — произвольное слово в А. Всякая непосредственная выводимость в $\mathfrak{P}$ принадлежит одному из этих n типов. Задание этих n типов непосредственных выводимостей вместе с заданием алфавита А, очевидно, вполне определяет нормальное исчисление Поста $\mathfrak{P}$. Мы будем поэтому часто говорить о нем как о *нормальном исчислении Поста в алфавите* А *с непосредственными выводимостями* (2).

Следующие утверждения, в которых $\mathfrak{P}$ означает нормальное исчисление Поста в алфавите А, очевидны.

1.1. $\mathfrak{P} : P \mid= P$ *для всякого слова* P *в* А.

1.2. *Если* $\mathfrak{P} : P \mid= Q$ *и* $\mathfrak{P} : Q \mid= R$, *то* $\mathfrak{P} : P \mid= R$.

1.3. *Если* $\mathfrak{P} : P \mid- Q$, *то* $\mathfrak{P} : P \mid= Q$.

1.4. $\mathfrak{P} : P \mid= Q$ *тогда и только тогда, когда может быть построен такой ряд слов* $P_0, \ldots, P_m$ $(m \geqslant 0)$, *что*

$$P_0 = P, \tag{3}$$

$$P_m = Q, \tag{4}$$

$$\mathfrak{P} : P_{i-1} \mid- P_i \quad (0 < i \leqslant m). \tag{5}$$

2. Строго говоря, введенное только что понятие «нормального исчисления Поста» не совсем совпадает с понятием «нормальной системы», введенным самим Постом[26]. Различие состоит в том, что у нас на исходное слово не накладывается никаких ограничений, тогда как у Поста оно выбирается из некоторого данного (конечного) списка слов, в частности, просто фиксируется. Этот список слов должен быть тогда включен, наряду со словами A_i и B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, определяющими допустимые действия исчисления, в систему данных, определяющих исчисление. Исчисления этого типа мы будем называть *нормальными исчислениями Поста с данными исходными словами* (в частности, *с данным исходным словом*).

Пусть $\mathfrak{P}$ — нормальное исчисление Поста (в прежнем смысле) в алфавите A с допустимыми действиями, определяемыми словами A_i и B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; $\mathfrak{P}_1$ — нормальное исчисление Поста в том же алфавите с данными исходными словами $C_1, \ldots, C_k$ и теми же допустимыми действиями. Мы будем тогда говорить, что слово P *выводимо в* $\mathfrak{P}_1$, если оно выводимо в $\mathfrak{P}$ из одного из слов $C_1, \ldots, C_k$.

3. Наряду с нормальными исчислениями Поста является целесообразным рассматривать следующее их видоизменение.

Пусть опять A_i, B_i $(1 \leqslant i \leqslant n;\ n \geqslant 0)$ — фиксированные слова в алфавите A. Будем называть *допустимыми действиями* как переходы от слов вида A_iP (P — слово в A) к словам PB_i (с теми же i), так и обратные переходы. Всего мы будем иметь, таким образом, $2n$ допустимых действий, естественно группирующихся в n пар: i-я пара допустимых действий состоит из переходов от слов вида A_iP к словам PB_i и обратных переходов. Разрешение последовательно производить допустимые действия, исходя из какого-нибудь слова в алфавите A, мы будем называть *обратимым исчислением Поста в* A, *определяемым словами* A_i и B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Мы будем говорить, что слово Q *выводимо из слова* P *в обратимом исчислении Поста* $\mathfrak{P}$, если Q либо равно P, либо получается из P в результате последовательно производимых допустимых действий исчисления $\mathfrak{P}$. Для обозначения выводимости мы будем здесь применять знак «$\underline{\|}$». В дальнейшем запись

$$\mathfrak{P} : P \underline{\|} Q,$$

где $\mathfrak{P}$ — обратимое исчисление Поста, будет означать, что Q выводимо из P в $\mathfrak{P}$.

Мы будем говорить, что слово Q *непосредственно выводимо из слова* P *в обратимом исчислении Поста* $\mathfrak{P}$, если Q получается из P в результате одного допустимого действия. Для обозначения непосредственной выводимости мы будем здесь применять знак «$\underline{\perp}$». В дальнейшем запись

$$\mathfrak{P} : P \underline{\perp} Q,$$

где $\mathfrak{P}$ — обратимое исчисление Поста, будет означать, что Q непосредственно выводимо из P в $\mathfrak{P}$.

В обратимом исчислении Поста $\mathfrak{P}$ в алфавите A, определяемом словами A_i, B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, имеем $2n$ типов непосредственных выводимостей

$$\mathfrak{P} : A_iP \underline{\perp} PB_i, \quad \mathfrak{P} : PB_i \underline{\perp} A_iP \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

где P — произвольное слово в A. Всякая непосредственная выводимость в $\mathfrak{P}$ принадлежит одному из этих $2n$ типов. Задание n из этих типов, а именно

(1) $$\mathfrak{P}: A_i P \perp\!\!\!\perp P B_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

определяет остальные n типов:

$$\mathfrak{P}: P B_i \perp\!\!\!\perp A_i P \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

и вместе с заданием алфавита A вполне определяет исчисление $\mathfrak{P}$. Мы будем поэтому говорить о $\mathfrak{P}$ как об *обратимом исчислении Поста в алфавите* A *с непосредственными выводимостями* (1).

Следующие утверждения, в которых $\mathfrak{P}$ означает обратимое исчисление Поста в алфавите A, очевидны.

3.1. $\mathfrak{P}: P \parallel P$ *для всякого слова* P *в* A.

3.2. *Если* $\mathfrak{P}: P \parallel Q$ *и* $\mathfrak{P}: Q \parallel R$, *то* $\mathfrak{P}: P \parallel R$.

3.3. *Если* $\mathfrak{P}: P \perp\!\!\!\perp Q$, *то* $\mathfrak{P}: P \parallel Q$.

3.4. $\mathfrak{P}: P \parallel Q$ *тогда и только тогда, когда может быть построен такой ряд слов* $P_0, \ldots, P_m$ $(m \geqslant 0)$, *что удовлетворяются условия* 1 (3), 1 (4) *и условия*

$$\mathfrak{P}: P_{i-1} \perp\!\!\!\perp P_i \quad (0 < i \leqslant m).$$

3.5. *Если* $\mathfrak{P}: P \perp\!\!\!\perp Q$, *то* $\mathfrak{P}: Q \perp\!\!\!\perp P$.

3.6. *Если* $\mathfrak{P}: P \parallel Q$, *то* $\mathfrak{P}: Q \parallel P$.

В обратимом исчислении Поста также можно фиксировать исходное слово или потребовать, чтобы оно выбиралось из данного списка слов. Это дает *обратимое исчисление Поста с данными исходными словами* (в частности, *с данным исходным словом*).

Пусть $\mathfrak{P}$ — обратимое исчисление Поста в алфавите A с допустимыми действиями, определяемыми словами A_i и B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; $\mathfrak{P}_1$ — обратимое исчисление Поста в A с данными исходными словами $C_1, \ldots, C_k$ и теми же допустимыми действиями. Мы будем тогда говорить, что слово P *выводимо в* $\mathfrak{P}_1$, если оно выводимо в $\mathfrak{P}$ из одного из слов $C_1, \ldots, C_k$.

4. В связи с введенными типами исчислений возникают следующие нормальные массовые проблемы.

Проблема выводимости в нормальном (обратимом) исчислении Поста с данным исходным словом. Дано нормальное (обратимое) исчисление Поста $\mathfrak{P}$ в алфавите A с данным исходным словом C. Требуется построить нормальный алгорифм над A, применимый ко всем словам в A и аннулирующий те и только те слова в A, которые выводимы в $\mathfrak{P}$.

Мы установим здесь возможность такого построения обратимого исчисления Поста с данным исходным словом, что соответствующая проблема выводимости будет неразрешимой; аналогичное построение нормального исчисления Поста с данным исходным словом с неразрешимой проблемой выводимости — построение, возможность которого была впервые установлена Постом [26], — мы также укажем.

5. В основе построения искомого исчисления будет лежать теорема § 3.2.1, обеспечивающая возможность построения ассоциативного исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности пустому слову. Чтобы использовать эту теорему, нам нужно будет перекинуть некоторый «мост» между ассоциативными исчислениями и обратимыми исчислениями Поста. Роль такого моста будет играть следующая теорема.

5.1. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— ассоциативное исчисление в алфавите* А, *определяемое системой соотношений*

$$\{D_i \longleftrightarrow E_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{1}$$

где D_i *и* E_i *— слова в* А; *пусть* α *— буква, не принадлежащая* А;

$$\text{Б} = \text{А} \cup \{\alpha\}.$$

Построим обратимое исчисление Поста $\mathfrak{P}$ *в алфавите* Б *с непосредственными выводимостями*

$$\mathfrak{P} : D_i P \perp PE_i \quad (P \text{ — слово в Б}, \ 1 \leqslant i \leqslant n), \tag{2}$$

$$\mathfrak{P} : \xi P \perp P\xi \quad (P \text{ — слово в Б}, \ \xi \in \text{А}). \tag{3}$$

Тогда, каковы бы ни были слова Q *и* R *в* А, *для эквивалентности*

$$\mathfrak{A} : Q \perp\!\!\!\perp R \tag{4}$$

необходима и достаточна выводимость

$$\mathfrak{P} : Q\alpha \perp\!\!\!\perp R\alpha. \tag{5}$$

Для доказательства этой теоремы введем некоторые вспомогательные понятия и докажем некоторые леммы. Будем при этом считать условия теоремы **5.1** соблюденными.

5.2. *Если* S *— слово в* А, T *— слово в* Б, *то*

$$\mathfrak{P} : ST \perp\!\!\!\perp TS. \tag{6}$$

В самом деле, при $S = \Lambda$ это верно [**3.1**]. Пусть теперь

$$S = \xi_1 \ldots \xi_k, \tag{7}$$

где ξ_i — буквы алфавита А. Полагая тогда

$$Q_i = \xi_{i+1} \ldots \xi_k T \xi_1 \ldots \xi_i \quad (0 \leqslant i \leqslant k), \tag{8}$$

будем иметь

$$Q_0 = ST \qquad [(8), (7), \text{I. § 3.6 (4)}],$$

$$Q_k = TS \qquad [(8), (7), \text{I. § 3.6 (4)}],$$

$$\mathfrak{P} : Q_{i-1} \perp Q_i \quad (0 < i \leqslant k) \quad [(8), (3), \text{I. § 3.6 (5)}, \text{I. § 3.6 (6)}],$$

откуда следует выводимость (6) [3.4].

5.3. *Если* $\mathfrak{A} : Q \perp R$, *то* $\mathfrak{P} : Q\alpha \perp\!\!\!\perp R\alpha$.

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{A} : Q \perp R$. Тогда Q и R суть слова в А и для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, согласно § **1.5.1**, существуют такие слова S и T, что либо имеют место равенства

$$Q = SD_iT, \tag{9}$$

$$R = SE_iT, \tag{10}$$

либо — равенства

(11) $$Q = SE_i T,$$

(12) $$R = SD_i T.$$

Допустим, что имеют место равенства (9) и (10). Тогда S и T суть слова в А и

(13)
$$\begin{aligned} Q\alpha &= SD_i T\alpha && [(9)],\\ \mathfrak{P}: Q\alpha &\parallel D_i T\alpha S && [(13),\ 5.2]\\ &\perp T\alpha SE_i && [(2)]\\ &\parallel SE_i T\alpha && [5.2,\ 3.6]\\ &= R\alpha && [(10)]. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае

(14) $$\mathfrak{P}: Q\alpha \parallel R\alpha.$$

Если имеют место равенства (11) и (12), то мы аналогичным образом получаем

$$\mathfrak{P}: R\alpha \parallel Q\alpha,$$

откуда опять следует выводимость (14) [3.6].

Эта выводимость, следовательно, имеет место, что и требовалось доказать.

5.4. *Если* $\mathfrak{A}: Q \parallel R$, *то* $\mathfrak{P}: Q\alpha \parallel R\alpha$.

Это следует из § 1.6.1, 5.3 и 3.2.

Условимся теперь называть *специальными словами* слова в Б с одним и только одним вхождением буквы α, т. е. слова вида

(15) $$S\alpha T,$$

где S и T — слова в А.

Условимся называть *проекцией специального слова* (15) слово TS. (Это понятие проекции, очевидно, отличается от понятия проекции слова на алфавит А [II. § 4.14]). Ввиду того, что всякое специальное слово единственным образом представляется в виде (15), проекция специального слова определена однозначно. Будем обозначать проекцию специального слова U символом $[U^{\pi}$.

Имеем, таким образом,

(16) $$[S\alpha T^{\pi} = TS \quad (T \text{ и } S \text{ — слова в А})$$

и, в частности,

(17) $$[Q\alpha^{\pi} = Q \quad (Q \text{ — слово в А}).$$

5.5. *Если* U *— специальное слово и* $\mathfrak{P}: U \perp V$, *то* V *есть специальное слово и*

(18) $$\mathfrak{A}: [U^{\pi} \parallel [V^{\pi}.$$

В самом деле, пусть

$$\mathfrak{P} : U \perp V.$$

Тогда V получается из U в результате одного из допустимых действий исчисления $\mathfrak{P}$. Согласно построению исчисления $\mathfrak{P}$, это означает, что имеет место одно из четырех:

(19) $$U = D_i P,$$

(20) $$V = P E_i$$

для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и некоторого слова P в Б; то же с переменой ролей U и V;

(21) $$U = \xi P,$$

(22) $$V = P \xi$$

для некоторой буквы ξ алфавита А и некоторого слова P в А; то же с переменой ролей U и V.

В первом случае P есть специальное слово, так как U — специальное слово, а D_i — слово в А [(19)]. Имеем, таким образом,

(23) $$P = S \alpha T,$$

где S и T — слова в А. Следовательно,

(24) $$U = D_i S \alpha T \qquad [(19), (23)],$$

(25) $$V = S \alpha T E_i \qquad [(20), (23)].$$

Согласно (25), V есть специальное слово. При этом

(26) $$[U^{\pi} = T D_i S \qquad [(24), (16)],$$

(27) $$[V^{\pi} = T E_i S \qquad [(25), (16)].$$

Принимая во внимание, что соотношение

$$D_i \longleftrightarrow E_i$$

принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{A}$, заключаем из (26) и (27), что

$$\mathfrak{A} : [U^{\pi} \perp [V^{\pi} \qquad [\S\ 1.5.1],$$

и потому

$$\mathfrak{A} : [U^{\pi} \parallel [V^{\pi} \qquad [\S\ 1.6.2].$$

Совершенно аналогичным образом усматриваем, что и во втором случае V есть специальное слово, причем имеет место эквивалентность (18).

В третьем случае P также есть специальное слово, так как U — специальное слово, а ξ — буква алфавита А [(21)]. Пусть опять имеем равенство (23), где S и T — слова в А. Имеем здесь

(28) $$U = \xi S \alpha T \qquad [(21), (23)],$$

(29) $$V = S \alpha T \xi \qquad [(22), (23)].$$

Согласно (29), V есть специальное слово. При этом

$$[U^{\pi} = T\xi S \qquad [(28), (16)]$$
$$= [V^{\pi} \qquad [(29), (16)],$$

откуда опять следует (18) [§ 1.6.3].

Совершенно аналогичным образом усматриваем, что эквивалентность (18) имеет место в четвертом случае.

Таким образом, эта эквивалентность всегда имеет место в условиях леммы, что и требовалось доказать.

5.6. *Если U — специальное слово и $\mathfrak{P} : U \parallel V$, то V есть специальное слово и $\mathfrak{A} : [U^{\pi} \parallel [V^{\pi}$.*

Это следует из 3.4, 5.5 и § 1.6.5.

5.7. *Если $\mathfrak{P} : Q\alpha \parallel R\alpha$, где Q и R — слова в* А, *то $\mathfrak{A} : Q \parallel R$.*

Это следует из 5.6 в силу (17).

Справедливость теоремы 5.1 непосредственно усматривается из лемм 5.4 и 5.7. Эта теорема, таким образом, доказана.

6. Докажем теперь возможность такого построения обратимого исчисления Поста с данным исходным словом, что соответствующая проблема выводимости будет неразрешимой.

6.1. *Может быть построено обратимое исчисление поста $\mathfrak{Q}$ в некотором алфавите* Б *с данным однобуквенным исходным словом α и с непосредственными выводимостями*

$$(1) \qquad A_i P \perp P B_i \quad (P \text{ — слово в Б}, \ 1 \leqslant i \leqslant m)$$

таким образом, что будут соблюдаться следующие условия:

П.1. *Невозможен нормальный алгорифм над* Б, *аннулирующий те и только те слова в* Б, *которые не выводимы в $\mathfrak{Q}$.*

П.2. *α не входит ни в одно из слов $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m$.*

В самом деле, построим ассоциативное исчисление $\mathfrak{A}$ согласно § 3.2.1 таким образом, чтобы не был возможен нормальный алгорифм над его алфавитом, аннулирующий те и только те слова в этом алфавите, которые не эквивалентны в $\mathfrak{A}$ пустому слову. Пусть А — алфавит исчисления $\mathfrak{A}$, α — буква, не принадлежащая А. Исходя из А, $\mathfrak{A}$ и α, построим обратимое исчисление Поста $\mathfrak{P}$ в $A \cup \{\alpha\}$ согласно 5.1. Принимая букву α в качестве исходного слова и оставляя алфавит и допустимые действия без изменения, получим из исчисления $\mathfrak{P}$ обратимое исчисление Поста с данным однобуквенным исходным словом α. Это исчисление обозначим через $\mathfrak{Q}$. Покажем, что оно обладает требуемыми свойствами.

Допустим, в самом деле, что $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над алфавитом $A \cup \{\alpha\}$ исчисления $\mathfrak{Q}$, аннулирующий те и только те слова в $A \cup \{\alpha\}$, которые не выводимы в $\mathfrak{Q}$.

Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ в $A \cup \{\alpha\}$ со схемой

$$\begin{cases} \alpha\xi \to \xi\alpha \ (\xi \in A) \\ \alpha \to \cdot\, \alpha \\ \quad \to \alpha \end{cases}.$$

Как нетрудно видеть,

$$(2) \qquad \mathfrak{B}(R) = R\alpha \quad (R \text{ — слово в А}).$$

Построим алгорифм $\mathfrak{R}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$:

(3) $$\mathfrak{R} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{R}$ есть нормальный алгорифм над А [(3), III. § 3.4.2] и

$$\mathfrak{R}(R) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{B}(R)) \quad (R \text{ — слово в А}) \quad [(3), \text{III. § 3.4.3}]$$
$$\simeq \mathfrak{H}(R\alpha) \quad (R \text{ — слово в А}) \quad [(2)].$$

Поэтому мы тогда и только тогда имеем $\mathfrak{R}(R) = \Lambda$ для какого-нибудь слова R в А, когда $\mathfrak{H}(R\alpha) = \Lambda$; а это имеет место тогда и только тогда, когда $R\alpha$ не выводимо в $\mathfrak{Q}$. Но, согласно построению исчисления $\mathfrak{Q}$, $R\alpha$ тогда и только тогда выводимо в $\mathfrak{Q}$, когда $\mathfrak{P} : \alpha \underline{\parallel} R\alpha$, а это, по построению $\mathfrak{P}$, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A} : \Lambda \underline{\parallel} R.$$

Следовательно, $\mathfrak{R}$ аннулирует те и только те слова в А, которые не эквивалентны в $\mathfrak{A}$ пустому слову. Нормальный алгорифм $\mathfrak{R}$ над А с этим свойством, однако, невозможен.

Невозможен, таким образом, и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над $\text{А} \cup \{\alpha\}$, аннулирующий те и только те слова в $\text{А} \cup \{\alpha\}$, которые не выводимы в $\mathfrak{Q}$.

При этом, согласно построению исчисления $\mathfrak{Q}$, оно определяется непосредственными выводимостями вида

$$\mathfrak{P} : D_i P \perp P E_i \quad (P \text{ — слово в } \text{А} \cup \{\alpha\},\ 1 \leqslant i \leqslant n),$$
$$\mathfrak{P} : \xi P \perp P \xi \quad (P \text{ — слово в } \text{А} \cup \{\alpha\},\ \xi \in \text{А}),$$

где D_i и E_i суть слова в А. Замечая, что слова D_i, E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и ξ $(\xi \in \text{А})$ не содержат α, мы видим, что $\mathfrak{Q}$ определяется непосредственными выводимостями вида (1), где $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_m$ не содержат α.

Аналогично с помощью теорем § 3.2.2 и 5.1 устанавливается следующий результат.

6.2. *Может быть так построено обратимое исчисление Поста с данным однобуквенным исходным словом α, что соответствующая проблема выводимости будет неразрешима. Такое исчисление может быть при этом определено непосредственными выводимостями вида* (1), *где ни одно из слов A_i, B_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ не содержит α.*

7. Результаты, аналогичные 6.1 и 6.2, могут быть получены и для нормальных исчислений Поста с данным исходным словом (ср. [26]). Для этого можно, например, доказать следующую теорему, аналогичную 5.1.

7.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативное исчисление в алфавите* А, *определяемое системой соотношений* 5(1), *где D_i и E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — слова в* А; *пусть α — буква, не принадлежащая* А; $\text{Б} = \text{А} \cup \{\alpha\}$.

Построим нормальное исчисление Поста $\mathfrak{P}$ в алфавите Б *с непосредственными выводимостями*

$$\mathfrak{P} : D_i P \vdash P E_i \quad (P \text{ — слово в Б},\ 1 \leqslant i \leqslant n),$$
$$\mathfrak{P} : E_i P \vdash P D_i \quad (P \text{ — слово в Б},\ 1 \leqslant i \leqslant n),$$
$$\mathfrak{P} : \xi P \vdash P \xi \quad (P \text{ — слово в Б},\ \xi \in \text{Б}).$$

Тогда, каковы бы ни были слова Q *и* R *в* А, *для эквивалентности* 5(4) *необходима и достаточна выводимость*

$$\mathfrak{P}: Q\alpha \models R\alpha.$$

Доказательство теоремы 7.1 может быть построено аналогично доказательству теоремы 5.1. Роль леммы 5.2 играет теперь аналогично доказываемая лемма

7.2. $\mathfrak{P}: ST \models TS$ *для любых слов* S *и* T *в алфавите* Б.

Вместо 5.3 имеем

7.3. *Если* $\mathfrak{A}: Q \perp R$, *то* $\mathfrak{P}: Q\alpha \models R\alpha$.

Как в доказательстве 5.3, здесь приходится рассматривать два случая: случай равенств 5(9) и 5(10) и случай равенств 5(11) и 5(12). Первый случай рассматривается, как в доказательстве леммы 5.3, с той лишь разницей, что вместо знаков «$\perp\!\!\!\perp$» и «$\perp$» мы пишем теперь соответственно знаки «$\models$» и «$\vdash$», а вместо ссылок на 5.2 делаем ссылки на 7.2. Второй случай отличается теперь от первого только переменой ролей слов D_i и E_i.

7.4. *Если* $\mathfrak{A}: Q \perp\!\!\!\perp R$, *то* $\mathfrak{P}: Q\alpha \models R\alpha$.

Это следует из § 1.6.1, 7.3 и 1.2.

Далее в точности, как выше, определяются *специальные слова* и их *проекции*. Доказывается следующая лемма, аналогичная лемме 5.5.

7.5. *Если* U *— специальное слово и* $\mathfrak{P}: U \vdash V$, *то* V *есть специальное слово и имеет место эквивалентность* 5(18).

Доказательство этой леммы отличается от доказательства леммы 5.5 прежде всего тем, что теперь вместо четырех возможных случаев надо рассматривать три: случай равенств 5(19) и 5(20) ($1 \leqslant i \leqslant n$, P — слово в Б); случай равенств

$$U = E_i P,$$

$$V = P D_i$$

($1 \leqslant i \leqslant n$, P — слово в Б); случай равенств 5(21) и 5(22) ($\xi \in$ Б, P — слово в Б). Первый случай трактуется в точности, как первый случай в доказательстве леммы 5.5. Второй случай отличается от первого лишь переменой ролей слов D_i и E_i. Третий случай распадается на два подслучая: $\xi \in$ А и $\xi = \alpha$. Первый подслучай трактуется в точности, как третий случай в доказательстве леммы 5.5, а во втором подслучае имеем

(1) $$U = \alpha P,$$

(2) $$V = P\alpha,$$

где P — слово в А. В силу (2), V есть специальное слово. При этом

$$[U^{\pi} = P \qquad [(1)]$$

$$= [V^{\pi} \qquad [(2)],$$

откуда следует 5(18) [§ 1.6.3]. Тем самым лемма доказана.

Наконец, доказываются следующие леммы, аналогичные 5.6 и 5.7.

7.6. *Если* U *— специальное слово и* $\mathfrak{P}: U \models V$, *то* V *есть специальное слово и* $\mathfrak{A}: [U^{\pi} \perp\!\!\!\perp [V^{\pi}$.

7.7. *Если* $\mathfrak{P}: Q\alpha \models R\alpha$, *где* Q *и* R — *слова в* А, *то* $\mathfrak{A}: Q \Rightarrow R$.

Лемма 7.6 следует из 1.4, 7.5 и § 1.6.5, а лемма 7.7 — из 7.6.

Справедливость теоремы 7.1 непосредственно усматривается из лемм 7.4 и 7.7.

Теоремы § 3.2.1, § 3.2.2 и 7.1 дают возможность получить следующие результаты.

7.8. *Может быть построено нормальное исчисление Поста с однобуквенным данным исходным словом такое, что не будет возможен нормальный алгорифм над алфавитом этого исчисления, аннулирующий те и только те слова в этом алфавите, которые не выводимы в исчислении.*

7.9. Теорема Поста. *Может быть построено такое нормальное исчисление Поста с однобуквенным данным исходным словом, что соответствующая проблема выводимости будет неразрешимой.*

Доказательства этих теорем, аналогичные доказательствам теорем 6.1 и 6.2, мы здесь опускаем.

8. В теоремах 6.1 и 6.2 утверждается возможность такого построения обратимых исчислений Поста с однобуквенным данным исходным словом, что окажутся неразрешимыми некоторые связанные с этими исчислениями алгорифмические проблемы. При фактическом проведении указанных в доказательствах этих теорем построений алфавиты получаемых исчислений оказываются очень обширными. Имея в виду получить возможно более просто формулируемые неразрешимые алгорифмические проблемы, мы займемся сейчас «переводом» полученных исчислений в двухбуквенный алфавит. При этом мы позаботимся о сохранении однобуквенности исходного слова.

Мы воспользуемся для этого видоизмененной операцией перевода слов, определенной в I. § 6.4. Роль В будет теперь играть однобуквенный алфавит $\{\alpha\}$, роль $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — отличные от α буквы алфавита исчисления, построенного согласно теореме 6.1, роль β — произвольная буква, отличная от α. Нашей целью является доказательство следующих теорем.

8.1. *Может быть построено такое обратимое исчисление Поста в алфавите* A_0 *с исходным словом „a“, что не будет возможен нормальный алгорифм над* A_0, *аннулирующий те и только те слова в* A_0, *которые не выводимы в исчислении.*

8.2. *Может быть построено такое обратимое исчисление Поста в алфавите* A_0 *с исходным словом „a“, что соответствующая проблема выводимости будет неразрешимой.*

Мы начинаем с доказательства следующей леммы.

8.3. *Пусть* $\text{В} = \{\alpha\}$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — *буквы, отличные друг от друга и от* α; β — *буква, отличная от* α. *Пусть алфавиты* А *и* Б *определены, как в* I. § 6.4, *т. е.*

$$\text{А} = \{\alpha, \beta\},$$

$$\text{Б} = \{\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_k\}.$$

Пусть $\mathfrak{P}$ — *обратимое исчисление Поста в алфавите* Б *с непосредственными выводимостями* 6 (1), *где ни одно из слов* A_i, B_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *не содержит* α. *Определив и обозначив операцию перевода, как в* I. § 6.4, *построим обратимое исчисление Поста* $\mathfrak{P}_0$ *в* А *с непосредственными выводимостями*

$$\mathfrak{P}_0: [A_i^{\tau} P \Rightarrow P [B_i^{\tau} \quad (P \text{ — слово в А}, \ 1 \leqslant i \leqslant m).$$

Тогда для выводимости какого-нибудь слова R из слова Q в исчислении $\mathfrak{P}$ необходимо и достаточно, чтобы перевод R был выводим в $\mathfrak{P}_0$ из перевода Q.

Доказательство леммы 8.3 будет опираться на ряд других лемм. Во всех этих леммах мы будем считать выполненными все условия леммы 8.3.

8.4. *Если* $\mathfrak{P}: Q \perp R$, *то* $\mathfrak{P}_0: [Q^\tau \perp [R^\tau$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{P}: Q \perp R$. Тогда, согласно определению непосредственной выводимости в $\mathfrak{P}$, имеет место одно из двух: либо для некоторого слова P в Б и некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ имеют место равенства

$$Q = A_i P, \tag{1}$$

$$R = P B_i, \tag{2}$$

либо для некоторого P в Б и некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ имеют место равенства

$$Q = P B_i,$$

$$R = A_i P.$$

Допустим сначала, что имеет место первое. Тогда

$$[Q^\tau = [A_i^\tau [P^\tau \qquad [(1), \text{ I. § 6.2.9}],$$

$$[R^\tau = [P^\tau [B_i^\tau \qquad [(2), \text{ I. § 6.2.9}],$$

откуда следует, что $\mathfrak{P}_0: [Q^\tau \perp [R^\tau$.

Совершенно аналогично и во втором случае доказывается, что $\mathfrak{P}_0: [Q^\tau \perp [R^\tau$.

8.5. *Если* $\mathfrak{P}: Q \perp\!\!\!\perp R$, *то* $\mathfrak{P}_0: [Q^\tau \perp\!\!\!\perp [R^\tau$.

Это следует из 8.4 в силу 3.4.

8.6. *Если* Q *— слово в* Б *и* $\mathfrak{P}_0: [Q^\tau \perp S$, *то может быть указано такое слово* R *в* Б, *что* $[R^\tau = S$ *и* $\mathfrak{P}: Q \perp R$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{P}_0: [Q^\tau \perp S$, где Q — слово в Б. Тогда имеет место одно из двух: либо для некоторого слова T в А и некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ имеют место равенства

$$[Q^\tau = [A_i^\tau T, \tag{3}$$

$$S = T [B_i^\tau, \tag{4}$$

либо для некоторого слова T в А и некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ имеют место равенства

$$[Q^\tau = T [B_i^\tau,$$

$$S = [A_i^\tau T.$$

Рассмотрим первый случай. $[Q^\tau$ есть обобщенная цепь [I. § 6.4.2]. Что же касается $[A_i^\tau$, то это есть цепь, так как A_i не содержит α [I. § 6.4.4]. Следовательно, T есть обобщенная цепь [(3), I. § 5.3.8].

Длины звеньев, входящих в обобщенную цепь $[Q^{\tau}$ меньше $k+3$, так как $[Q^{\tau}$ есть перевод Q [I. § 6.4.3]. Так как T входит в $[Q^{\tau}$ $[(3)]$, длины звеньев, входящих в T, тоже меньше $k+3$. Поэтому обобщенная цепь T есть перевод некоторого слова P в алфавите Б:

(5) $$T=[P^{\tau} \qquad \text{[I. § 6.4.3]}.$$

Имеем

(6) $$[Q^{\tau}=[A_iP^{\tau} \qquad \text{[(3), (5), I. § 6.2.9]},$$

(7) $$S=[PB_i^{\tau} \qquad \text{[(4), (5), I. § 6.2.9]},$$

(8) $$Q=A_iP \qquad \text{[(6), I. § 6.2.5]}.$$

Определяя теперь слово R в Б равенством

(9) $$R=PB_i,$$

будем иметь $[R^{\tau}=S$ [(9), (7)] и $\mathfrak{P}: Q \perp R$ [(8), (9)].

Аналогичным образом строится искомое слово R во втором случае.

8.7. *Если Q и R — слова в* Б, *такие*, что $\mathfrak{P}_0: [Q^{\tau} \amalg [R^{\tau}$, *то* $\mathfrak{P}: Q \amalg R$.

Пусть, в самом деле, Q и R — такие слова в Б, что $\mathfrak{P}_0: [Q^{\tau} \amalg [R^{\tau}$. Тогда, согласно 3.4, может быть построен такой ряд слов $P_0, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$, что

(10) $$P_0=[Q^{\tau},$$

(11) $$P_n=[R^{\tau},$$

(12) $$\mathfrak{P}_0: P_{i-1} \perp P_i \quad (0<i\leqslant n).$$

Положим

(13) $$Q_0=Q.$$

Будем иметь

(14) $$P_0=[Q_0^{\tau} \qquad \text{[(10), (13)]}$$

и при $n>0$

$$\mathfrak{P}_0: [Q_0^{\tau} \perp P_1. \qquad \text{[(12), (14)]}.$$

Отсюда, согласно 8.6, следует существование такого слова Q_1 в Б, что

$$P_1=[Q_1^{\tau},$$

$$\mathfrak{P}: Q_0 \perp Q_1.$$

Продолжая действовать аналогичным образом, получаем ряд слов $Q_0, \ldots, Q_n$ в алфавите Б, удовлетворяющий условиям:

(15) $$P_i=[Q_i^{\tau} \quad (0\leqslant i\leqslant n),$$

(16) $$\mathfrak{P}: Q_{i-1} \perp Q_i \quad (0<i\leqslant n).$$

Имеем

(17) $[Q_n^{\tau} = [R^{\tau}$ [(15), (11)],

(18) $Q_n = R$ [(17), I. § 6.2.5],

(19) $\mathfrak{P} : Q \amalg R$ [(13), (18), (16), 3.4],

что и требовалось доказать.

Лемма 8.3 непосредственно следует из лемм 8.5 и 8.7.

Докажем теперь теорему 8.1.

Будем исходить из построенного согласно теореме 6.1 обратимого исчисления Поста $\mathfrak{Q}$ с однобуквенным исходным словом α. Пусть Б означает алфавит исчисления $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$ — обратимое исчисление Поста в Б с теми же непосредственными выводимостями, но без фиксации исходного слова. $\mathfrak{P}$, как и $\mathfrak{Q}$, определяется непосредственными выводимостями 6(1), где ни одно из слов A_i, B_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ не содержит α. Обозначим через В алфавит $\{\alpha\}$, через $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — буквы алфавита Б, отличные от α; введем букву β, отличную от α, и положим $\mathrm{A} = \{\alpha, \beta\}$. Тогда будут выполнены все условия леммы 8.3 и, согласно этой лемме, может быть построено обратимое исчисление Поста $\mathfrak{P}_0$ в алфавите А, обладающее тем свойством, что $\mathfrak{P} : Q \amalg R$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P}_0 : [Q^{\tau} \amalg [R^{\tau}$. Здесь Q и R означают произвольные слова в Б. Обозначим через $\mathfrak{Q}_0$ обратимое исчисление Поста в А с исходным словом α и с теми же непосредственными выводимостями, что $\mathfrak{P}_0$.

Так как $[\alpha^{\tau} = \alpha$ [I. § 6.4(1)], имеем $\mathfrak{P} : \alpha \amalg R$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P}_0 : \alpha \amalg [R^{\tau}$. Это означает, что R тогда и только тогда выводимо в $\mathfrak{Q}$, когда $[R^{\tau}$ выводимо в $\mathfrak{Q}_0$.

Допустим теперь, что был бы возможен нормальный алгорифм над А, аннулирующий те и только те слова в А, которые не выводимы в $\mathfrak{Q}_0$. Пусть $\mathfrak{H}$ является таким алгорифмом. Построим нормальный алгорифм перевода $\mathfrak{T}$ над Б такой, что

(20) $$\mathfrak{T}(P) = [P^{\tau}$$

для всякого слова P в Б [II. § 4.14(11)], и построим алгорифм $\mathfrak{R}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{H}$:

(21) $$\mathfrak{R} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{T}.$$

$\mathfrak{R}$ есть нормальный алгорифм над Б [(21), III. § 3.4.2], причем

$$\mathfrak{R}(P) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{T}(P)) \quad (P \text{ — слово в Б}) \qquad [(21), \text{III. § 3.4.3}]$$

$$\simeq \mathfrak{H}([P^{\tau}) \quad (P \text{ — слово в Б}) \qquad [(20)].$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{R}$ аннулирует те и только те слова в Б, переводы которых аннулирует $\mathfrak{H}$, т. е. те, переводы которых не выводимы в $\mathfrak{Q}_0$. Эти слова совпадают со словами, не выводимыми в $\mathfrak{Q}$. Таким образом, нормальный алгорифм $\mathfrak{R}$ над Б аннулирует те и только те слова в Б, которые не выводимы в исчислении $\mathfrak{Q}$. Такой алгорифм, однако, невозможен, согласно построению исчисления $\mathfrak{Q}$. Следовательно, невозможен и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над А, аннулирующий те и только те слова в А, которые не выводимы в $\mathfrak{Q}_0$.

Остается теперь перейти от двухбуквенного алфавита A к двухбуквенному алфавиту A_0, заменяя всюду в определяющих непосредственных выводимостях исчисления $\mathfrak{D}_0$ буквы α и β соответственно буквами a и b и исходное слово α исходным словом a. Это дает искомое обратимое исчисление Поста в A_0 с исходным словом a, обладающее требуемым свойством.

Теорема 8.2 может быть доказана аналогично с помощью 6.2 или получена как следствие из 8.1.

Заметим, что таким путем не удается получить аналогичные результаты для нормальных исчислений Поста и самый вопрос о возможности «перевода» теорем 7.8 и 7.9 в двухбуквенный алфавит при сохранении однобуквенности исходного слова остается пока открытым.

§ 5. Исчисление $\mathfrak{S}_0$

1. Будем рассматривать слова в алфавите A_2 [I. § 2.6]. Построим исчисление, имеющее дело с этими словами, в котором допустимыми действиями являются следующие два: переход от произвольного слова вида

(1) $$PdQcRdS\epsilon QT,$$

где Q, R и T — слова в A_0, P и S — слова в A_1, к слову

(2) $$PdQcRdSeTR;$$

обратное действие, т. е. переход от произвольного слова вида (2), где Q, R и T — слова в A_0, P и S — слова в A_1, к слову (1). Это исчисление будем обозначать через $\mathfrak{S}_0$.*

Определим выводимость и непосредственную выводимость в исчислении $\mathfrak{S}_0$ в точности так же, как эти понятия определяются для обратимых исчислений Поста [§ 4.3]. Будем пользоваться прежними обозначениями:

(3) $$\mathfrak{S}_0 : P \amalg Q$$

будет означать, что Q выводимо из P в $\mathfrak{S}_0$;

$$\mathfrak{S}_0 : P \perp Q$$

будет означать, что Q непосредственно выводимо из P в $\mathfrak{S}_0$. Очевидно, что для этих понятий справедливы теоремы § 4.3.1—3.6, в которых надо лишь заменить $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{S}_0$ и A на A_2. Так измененные теоремы § 4.3.1—3.6 мы будем обозначать соответственно § 5.1.1—1.6.

Аналогично характеризации обратимого исчисления Поста половиной общего числа типов его непосредственных выводимостей [§ 4.3] можно охарактеризовать $\mathfrak{S}_0$ как обратимое исчисление в A_2 с непосредственными выводимостями типа

(4) $$\mathfrak{S}_0 : PdQcRdSeQT \perp PdQcRdSeTR$$

(Q, R и T — слова в A_0, P и S — слова в A_1),

* Исчисление $\mathfrak{S}_0$ впервые рассмотрено в заметке [5].

поскольку наличие обратных непосредственных выводимостей вытекает из «обратимости» исчисления, т. е. из свойства, выражаемого утверждением 1.5.

В связи с исчислением $\mathfrak{C}_0$ естественно поставить проблему выводимости в этом исчислении, точно формулируемую следующим образом: построить нормальный алгорифм над алфавитом $A_2 \cup \{*\}$, применимый ко всякому слову вида $P*Q$, где P и Q — слова в A_2, и аннулирующий те и только те слова этого вида, для которых имеет место (3) Мы увидим скоро, что эта проблема неразрешима: искомый нормальный алгорифм невозможен. Таким образом, $\mathfrak{C}_0$ является конкретным и сравнительно простым примером исчисления с неразрешимой проблемой выводимости. В дальнейшем будет, однако, использоваться не сам этот результат, а некоторое его уточнение, к формулировке которого мы сейчас перейдем.

2. Условимся говорить о слове W в алфавите A_2, что оно есть *слово нулевого разряда*, если оно удовлетворяет следующим пяти условиям.

Р. 1. e входит в W один и только один раз.

Р. 2. Всякое вхождение буквы c или d в W предшествует вхождению e в W.

Р. 3. Всякому вхождению буквы c в W предшествует вхождение буквы d в W.

Р. 4. За всяким вхождением буквы c в W следует вхождение буквы d в W.

Р. 5. Между любыми двумя вхождениями буквы c в W имеется хотя бы одно вхождение буквы d в W.

Согласно **Р. 1**, всякое слово нулевого разряда представляется в виде UeV, где U и V не содержат e. Такое представление слова нулевого разряда, очевидно, единственно. Мы докажем следующую теорему.

2.1. *Невозможен нормальный алгорифм над* A_2, *аннулирующий те и только те слова нулевого разряда* UeV, *для которых выводимость*

$$\mathfrak{C}_0 : Uea \perp\!\!\!\perp UeV \tag{1}$$

не имеет места.

Для доказательства рассмотрим произвольное обратимое исчисление Поста $\mathfrak{P}$ в алфавите A_0 с непосредственными выводимостями

$$K_iP \perp PL_i \quad (1 \leqslant i \leqslant s), \tag{2}$$

где K_i, L_i — определенные слова в A_0, P — произвольное слово в A_0. Составим по исчислению $\mathfrak{P}$ слово

$$dK_1cL_1dK_2cL_2 \ldots dK_scL_sd,$$

которое будем называть *изображением исчисления* $\mathfrak{P}$. Изображение всякого обратимого исчисления Поста в A_0 есть, очевидно, слово в A_1, и всякое такое исчисление вполне определяется своим изображением. Условимся обозначать через $\mathfrak{P}^и$ изображение исчисления Поста $\mathfrak{P}$.

Докажем следующую лемму.

2.2. *Если* $\mathfrak{P}$ — *обратимое исчисление Поста в* A_0 *и*

$$\mathfrak{P} : V \perp W, \tag{3}$$

то

(4) $$\mathfrak{C}_0 : \mathfrak{P}^{и} eV \perp \mathfrak{P}^{и} eW.$$

В самом деле, пусть исчисление $\mathfrak{P}$ определяется непосредственными выводимостями (2). Тогда, по определению изображения,

(5) $$\mathfrak{P}^{и} = dK_1 cL_1 \ldots dK_s cL_s d.$$

Допустим, что имеет место (3), и покажем, что тогда имеет место (4).

В силу (3), имеем одно из двух: или

(6) $$V = K_j T,$$

(7) $$W = T L_j$$

для некоторого слова T в A_0 и некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant s)$, или

$$V = T L_j,$$

$$W = K_j T$$

для некоторого T в A_0 и некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Рассмотрим первый случай.

Положим

(8) $$P = dK_1 cL_1 \ldots dK_{j-1} cL_{j-1},$$

(9) $$Q = K_j,$$

(10) $$R = L_j,$$

(11) $$S = K_{j+1} cL_{j+1} d \ldots K_s cL_s d.$$

Тогда Q, R и T суть слова в A_0, а P и S — слова в A_1. Поэтому имеет место непосредственная выводимость 1 (4). При этом

$$PdQcRdSeQT = dK_1 cL_1 \ldots dK_{j-1} cL_{j-1} dK_j cL_j dK_{j+1} cL_{j+1} \ldots K_s cL_s deK_j T \quad [(8)—(11)]$$

$$= \mathfrak{P}^{и} eV \quad [(5), (6)],$$

$$PdQcRdSeTR = dK_1 cL_1 \ldots dK_{j-1} cL_{j-1} dK_j cL_j dK_{j+1} cL_{j+1} \ldots K_s cL_s deTL_j \quad [(8)—(11)]$$

$$= \mathfrak{P}^{и} eW \quad [(5), (7)].$$

Таким образом, $\mathfrak{C}_0 : \mathfrak{P}^{и} eV \perp \mathfrak{P}^{и} eW$.

Совершенно аналогично усматривается непосредственная выводимость (4) во втором случае.

2.3. *Пусть* $\mathfrak{P}$ *— обратимое исчисление Поста в* A_0, V *— слово в* A_0. *Если*

(12) $$\mathfrak{C}_0 : \mathfrak{P}^{и} eV \perp X,$$

то может быть указано такое слово W *в* A_0, *что*

(13) $$\mathfrak{P} : V \perp W,$$

(14) $$X = \mathfrak{P}^{и} e W.$$

В самом деле, пусть опять $\mathfrak{P}$ определяется непосредственными выводимостями (2) так, что имеет место (5). Пусть имеем (12). Тогда, по определению непосредственной выводимости в $\mathfrak{C}_0$, имеем одно из двух: или

(15) $$\mathfrak{P}^{и} e V = PdQcRdSeQT,$$

(16) $$X = PdQcRdSeTR$$

для некоторых слов Q, T, R в A_0 и некоторых слов P, S в A_1, или

$$\mathfrak{P}^{и} e V = PdQcRdSeTR,$$

$$X = PdQcRdSeQT$$

для некоторых слов Q, T, R в A_0 и некоторых слов P, S в A_1.

В первом случае положим

(17) $$W = TR.$$

W есть тогда слово в A_0. Принимая во внимание, что e не входит ни в одно из слов V, Q, T, имеем далее

(18) $$\mathfrak{P}^{и} = PdQcRdS \qquad [(15)],$$

(19) $$V = QT \qquad [(15)].$$

Согласно (18), $PdQ*c*RdS$ есть вхождение буквы c в $\mathfrak{P}^{и}$, а, согласно (5), всякое вхождение c в $\mathfrak{P}^{и}$ имеет вид

$$dK_1cL_1 \ldots dK_{j-1}cL_{j-1}dK_j*c*L_jdK_{j+1}cL_{j+1}d \ldots K_scL_sd \quad (1 \leqslant j \leqslant s).$$

Следовательно, при некотором j $(1 \leqslant j \leqslant s)$

$$PdQ = dK_1cL_1 \ldots dK_{j-1}cL_{j-1}dK_j,$$

$$RdS = L_jdK_{j+1}cL_{j+1}d \ldots K_scL_sd.$$

Принимая во внимание, что ни одно из слов Q, R, K_j, L_j не содержит d, заключаем отсюда, что имеют место равенства (9) и (10). Но из (9) и (19) следует (6), а из (10) и (17) следует (7). Таким образом, имеем (6) и (7), где T — слово в A_0. Следовательно, имеем (13). Наконец, из (16), (18) и (17) следует (14).

Мы доказали, таким образом, что в первом случае, действительно, имеется слово W в A_0, удовлетворяющее условиям (13) и (14). Аналогичным образом может быть указано такое слово во втором случае.

2.4. *Если* $\mathfrak{P}$ — *обратимое исчисление Поста в* A_0, *то выводимость*

(20) $$\mathfrak{P} : V \perp\!\!\!\perp W$$

тогда и только тогда имеет место для слов V *и* W *в* A_0, *когда*

(21) $$\mathfrak{C}_0 : \mathfrak{P}^{и} e V \perp\!\!\!\perp \mathfrak{P}^{и} e W.$$

В самом деле, пусть выводимость (20) имеет место. Тогда, согласно § 4.3.4, 2.2 и 1.4, имеет место (21).

Допустим теперь, что имеет место выводимость (21). Тогда, согласно 1.4, может быть указан такой ряд слов X_0, X_1, ..., X_n ($n \geqslant 0$) в алфавите A_2, что

(22) $$X_0 = \mathfrak{P}^{\mathfrak{n}} e V,$$

(23) $$X_n = \mathfrak{P}^{\mathfrak{n}} e W,$$

(24) $$\mathfrak{C}_0 : X_{i-1} \perp X_i \quad (0 < i \leqslant n).$$

Положим

(25) $$V_0 = V.$$

Тогда

(26) $$X_0 = \mathfrak{P}^{\mathfrak{n}} e V_0 \qquad [(22), (25)]$$

и при $n > 0$ имеем

$$\mathfrak{C}_0 : \mathfrak{P}^{\mathfrak{n}} e V_0 \perp X_1 \qquad [(24), (26)],$$

откуда, согласно 2.3, следует наличие слова V_1 в алфавите A_0 такого, что

$$\mathfrak{P} : V_0 \perp V_1,$$
$$X_1 = \mathfrak{P}^{\mathfrak{n}} e V_1.$$

Рассуждая аналогично дальше, убеждаемся в наличии ряда слов $V_0, \ldots, V_n$ в алфавите A_0 такого, что

(27) $$\mathfrak{P} : V_{i-1} \perp V_i \quad (0 < i \leqslant n),$$

(28) $$X_i = \mathfrak{P}^{\mathfrak{n}} e V_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Имеем

(29) $$X_n = \mathfrak{P}^{\mathfrak{n}} e V_n \qquad [(28)],$$

(30) $$V_n = W \qquad [(29), (23), \text{I. § 3.9.3}].$$

В силу (25), (30) и (27), имеем (20), что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему 2.1.

Построим обратимое исчисление Поста $\mathfrak{Q}_0$ в A_0 с исходным словом a согласно теореме § 4.8.1 таким образом, чтобы не был возможен нормальный алгорифм над A_0, аннулирующий те и только те слова в A_0, которые не выводимы в $\mathfrak{Q}_0$. Пусть $\mathfrak{P}_0$ означает обратимое исчисление Поста в A_0 с теми же непосредственными выводимостями, что $\mathfrak{Q}_0$, но без фиксации исходного слова. Выводимость в $\mathfrak{Q}_0$ равносильна выводимости из a в $\mathfrak{P}_0$ и, значит, невыводимость в $\mathfrak{Q}_0$ равносильна невыводимости из a в $\mathfrak{P}_0$.

Допустим теперь (вопреки доказываемому), что $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над A_2, аннулирующий те и только те слова нулевого разряда UeV, для которых выводимость (1) не имеет места. Построим

нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_{A_2, \mathfrak{P}_0^{и} e}$ [II. § 4.2], перерабатывающий всякое слово V в A_0 в слово $\mathfrak{P}_0^{и} eV$:

$$\mathfrak{A}_{A_2, \mathfrak{P}_0^{и} e}(V) = \mathfrak{P}_0^{и} eV \quad (V \text{ — слово в } A_0). \tag{31}$$

Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{A}_{A_2, \mathfrak{P}_0^{и} e}$ и $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{A}_{A_2, \mathfrak{P}_0^{и} e}. \tag{32}$$

$\mathfrak{K}$ есть нормальный алгорифм над A_0 [(32), III. § 3.4.2] и

$$\mathfrak{K}(V) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{P}_0^{и} eV) \quad (V \text{ — слово в } A_0) \quad [(32), \text{ III. § 3.4.3, (31)}].$$

Поэтому $\mathfrak{K}$ аннулирует те и только те слова V в A_0, для которых

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{P}_0^{и} eV) = \Lambda.$$

Нетрудно видеть, что для всякого слова V в A_0 слово $\mathfrak{P}_0^{и} eV$ удовлетворяет условиям **P. 1—P. 5**, т. е. является словом нулевого разряда. Согласно предположению, $\mathfrak{H}$ аннулирует это слово тогда и только тогда, когда выводимость

$$\mathfrak{C}_0 : \mathfrak{P}_0^{и} ea \parallel \mathfrak{P}_0^{и} eV \tag{33}$$

не имеет места. Выводимость же эта имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P}_0 : a \parallel V$ [2.4] и, значит, не имеет места тогда и только тогда, когда слово V не выводимо из a в $\mathfrak{P}_0$.

Таким образом, нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ над A_0 аннулирует те и только те слова в A_0, которые не выводимы из a в $\mathfrak{P}_0$, т. е. которые не выводимы в $\mathfrak{Q}_0$. Такой алгорифм, однако, невозможен, согласно построению исчисления $\mathfrak{Q}_0$. Наше предположение об алгорифме $\mathfrak{H}$ привело нас к противоречию. Следовательно, невозможен нормальный алгорифм над A_2, аннулирующий те и только те слова нулевого разряда UeV, для которых выводимость (1) не имеет места, что и требовалось доказать.

3. Из теоремы 2.1 легко заключить о неразрешимости проблемы выводимости в исчислении $\mathfrak{C}_0$ [1]. Мы не будем здесь, однако, приводить подробного доказательства соответствующей теоремы невозможности, предоставляя это читателю.

4. Из доказательства теоремы 2.1 очевидно, что она допускает следующее уточнение.

4.1. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом* A_0, *аннулирующий те и только те слова* V *в* A_0, *для которых выводимость* 2 (33) *не имеет места.*

Далее отсюда легко получается следующий результат.

4.2. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом* A_2, *аннулирующий те и только те слова в* A_2, *которые не выводимы в* $\mathfrak{C}_0$ *из слова* $\mathfrak{P}_0^{и} ea$.

5. Докажем еще некоторые леммы, касающиеся исчисления $\mathfrak{C}_0$ и применяемые ниже.

5.1. *Если* $\mathfrak{C}_0 : X \perp Y$, *то буква* e *входит по одному разу в слова* X *и* Y *и левые крылья единственных вхождений буквы* e *в эти слова совпадают.*

Это следует из определения непосредственной выводимости в $\mathfrak{C}_0$.

5.2. *Если* $\mathfrak{C}_0 : X \perp\!\!\!\perp Y$, *то либо* $X = Y$, *либо буква* e *входит по одному разу в слова* X *и* Y *и левые крылья единственных вхождений буквы* e *в эти слова совпадают.*

Это следует из **1.4** и **5.1**.

§ 6. Ассоциативное исчисление $\mathfrak{C}_1$

1. Мы построим сейчас ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности, определяемое фактически выписанной и не очень длинной системой соотношений.

Будем пользоваться алфавитом A_3 [I. § 2.6], состоящим из 13 букв. Будем называть:

букву i *двойником 1-го рода буквы* a,
« j « « « « b,
« k « *2-го* « « a,
« l « « « « b.

Для букв алфавита A_0 мы определили, таким образом, двойники 1-го и 2-го рода, являющиеся буквами алфавита A_3. Условимся обозначать символом $\overline{\xi}$ двойника 1-го рода буквы ξ, символом $\widehat{\xi}$ — двойника 2-го рода буквы ξ.

Двойники 1-го рода букв алфавита A_0 образуют алфавит $\{i, j\}$, который мы условимся обозначать символом $\overline{A}_0$; двойники 2-го рода букв алфавита A_0 образуют алфавит $\{k, l\}$, который мы условимся обозначать символом $\widehat{A}_0$:

$$\overline{A}_0 = \{i, j\},$$
$$\widehat{A}_0 = \{k, l\}.$$

Обозначим еще через A_4 алфавит $\overline{A}_0 \cup \widehat{A}_0 \cup \{f\}$:

$$A_4 = \{f, i, j, k, l\}.$$

Определим теперь ассоциативное исчисление $\mathfrak{C}_1$* в алфавите A_3 следующей сокращенно записанной системой соотношений:

(1)
$$\begin{cases} \zeta\eta \longleftrightarrow \eta\zeta \quad (\zeta \in A_1, \quad \eta \in A_4) \\ \left.\begin{array}{l} e\widehat{\xi} \longleftrightarrow \widehat{\xi}e \\ e\overline{\xi} \longleftrightarrow \overline{\xi}e \\ \xi m \longleftrightarrow \widehat{\xi}m \\ h\xi\overline{\xi} \longleftrightarrow \xi h \\ \xi g\widehat{\xi} \longleftrightarrow g\xi \end{array}\right\} \ (\xi \in A_0) \\ df \longleftrightarrow dh \\ fd \longleftrightarrow gd \\ hc \longleftrightarrow cg \end{cases}$$

* Исчисление $\mathfrak{C}_1$ впервые рассмотрено в заметке [5]. Его определяющая система соотношений обозначена там через C_5.

Первая строка охватывает здесь 20 соотношений, каждая из следующих пяти — по два, а остальные три — по одному. Таким образом, наша система состоит из 33 соотношений.

Об исчислении $\mathfrak{C}_1$ мы и докажем, что для него неразрешима проблема эквивалентности.

2. Введем прежде всего некоторые термины и обозначения.

Условимся называть *двойником 1-го (2-го) рода слова* Q в алфавите A_0 слово, получаемое из Q заменой каждой буквы ее двойником 1-го (2-го) рода. Двойника 1-го рода слова Q будем обозначать символом

$$[Q^{-};$$

двойника 2-го рода слова Q — символом

$$[Q^{\wedge}.$$

Двойник 1-го рода слова в алфавите A_0 есть слово в алфавите $\bar{A}_0$; двойник 2-го рода слова в A_0 есть слово в $\hat{A}_0$. Очевидно, что

(1) $$[\Lambda^{\Delta} = \Lambda,$$

(2) $$[\xi^{\Delta} = \overset{\Delta}{\xi},$$

(3) $$[QR^{\Delta} = [Q^{\Delta}[R^{\Delta} \quad (Q \text{ и } R \text{ — слова в } A_0),$$

(4) $$[[Q^{\smile\Delta} = [[Q^{\Delta\smile} \quad (Q \text{ — слово в } A_0) \qquad [\text{I. § 3.12}],$$

где «Δ» может означать как «—», так и «$\wedge$».

Условимся далее обозначать ссылки на строки системы **1 (1)** номерами этих строк, написанными в виде индексов при знаке «$\perp$». Например

$$\mathfrak{C}_1 : PdfQcRdSeQTm \perp_7 PdhQcRdSeQTm$$

означает ниже, что смежность

$$\mathfrak{C}_1 : PdfQcRdSeQTm \perp PdhQcRdSeQTm$$

имеет место в силу 7-й строки системы **1 (1)**.

Докажем ряд лемм методом индукции [I.§ 3.8].

2.1. *Если* U *— слово в* A_1, $\eta \in A_4$, *то*

(5) $$\mathfrak{C}_1 : \eta U \perp\!\!\!\perp U\eta.$$

При $U = \Lambda$ эквивалентность (5) имеет место [§ **1.6.3**]. Допустим, что она имеет место для некоторого слова U в A_0 и некоторой буквы η алфавита A_4. Покажем, что тогда

$$\mathfrak{C}_1 : \eta\zeta U \perp\!\!\!\perp \zeta U\eta$$

для всякой буквы ζ алфавита A_1.

В самом деле, имеем тогда

$$\mathfrak{C}_1 : \eta\zeta U \perp_1 \zeta\eta U \perp\!\!\!\perp \zeta U\eta \qquad [(5), \text{ § } 1.6.6].$$

Тем самым лемма доказана.

2.2. *Если* Q *— слово в* A_0, U *— слово в* A_1, *то*

$$\mathfrak{C}_1 : [Q^- U \amalg U [Q^-. \tag{6}$$

При $Q = \Lambda$ эквивалентность (6) имеет место [(1), § 1.6.3]. Допустим, что она имеет место для некоторого слова Q в A_0 и некоторого слова U в A_1. Тогда для всякой буквы ξ алфавита A_0 имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 : [Q\xi^- U &= [Q^- \overline{\xi} U && [(3), (2)] \\ &\amalg [Q^- U \overline{\xi} && [2.1, \S\ 1.6.6] \\ &\amalg U [Q^- \overline{\xi} && [(6), \S\ 1.6.6] \\ &= U [Q\xi^- && [(2), (3)], \end{aligned}$$

откуда $\mathfrak{C}_1 : [Q\xi^- U \amalg U [Q\xi^-$, что и оставалось доказать.

2.3. *Если* $\xi \in A_0$ *и* V *— слово в* A_2, *то*

$$\mathfrak{C}_1 : \hat{\xi} V \amalg V \hat{\xi}. \tag{7}$$

При $V = \Lambda$ эквивалентность (7) имеет место [§ 1.6.3]. Допустим, что она имеет место для некоторого слова V в A_2 и некоторой буквы ξ алфавита A_0. Тогда для всякой буквы φ алфавита A_2 имеем

$$\mathfrak{C}_1 : \hat{\xi}\varphi V \perp_1 \varphi \hat{\xi} V,$$

если $\varphi \neq e$ и

$$\mathfrak{C}_1 : \hat{\xi}\varphi V \perp_2 \varphi \hat{\xi} V,$$

если $\varphi = e$. В обоих случаях

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 : \hat{\xi}\varphi V &\perp \varphi \hat{\xi} V \\ &\amalg \varphi V \hat{\zeta} && [(7), \S\ 1.6.6], \end{aligned}$$

откуда $\mathfrak{C}_1 : \hat{\xi}\varphi V \amalg \varphi V \hat{\xi}$, что и оставалось доказать.

2.4. *Если* R *— слово в* A_0, V *— слово в* A_2, *то* $\mathfrak{C}_1 : [R\hat{}V \amalg V [R\hat{}$.

Это доказывается с помощью 2.3 аналогично тому, как лемма 2.2 доказывалась с помощью 2.1.

2.5. *Если* Q *— слово в* A_0, *то*

$$\mathfrak{C}_1 : eQ \amalg [Q^- e. \tag{8}$$

При $Q = \Lambda$ эквивалентность (8) имеет место [(1), § 1.6.3]. Допустим, что она имеет место для некоторого слова Q в A_0. Тогда для всякой буквы ξ алфавита A_0

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 : e\xi Q &\perp_3 \overline{\xi} e Q \\ &\amalg \overline{\xi} [Q^- e && [(8), \S\ 1.6.6] \\ &= [\xi Q^- e && [(2), (3)], \end{aligned}$$

откуда $\mathfrak{C}_1 : e\xi Q \amalg [\xi Q^- e$, что и оставалось доказать.

2.6. *Если* R — *слово в* A_0, *то*

$$\mathfrak{C}_1 : Rm \amalg [[R^{\frown\smile} m. \tag{9}$$

При $R = \Lambda$ эквивалентность (9) имеет место [(1), I. § 3.12 (1), § 1.6.3]. Допустим, что она имеет место для некоторого слова R в A_0. Тогда для всякой буквы ξ алфавита A_0

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_1 : R\xi m &\perp_4 R\hat{\xi} m \\
&\amalg \hat{\xi} Rm && [2.3,\ \S\ 1.6.4,\ \S\ 1.6.6] \\
&\amalg \hat{\xi} [[R^{\frown\smile} m && [(9),\ \S\ 1.6.6] \\
&= [[\xi^{\frown\smile} [[R^{\frown\smile} m && [(2),\ \text{I. }\S\ 3.12\,(2)] \\
&= [[R^{\frown} [\xi^{\frown\smile} m && [\text{I. }\S\ 3.12\,(4)] \\
&= [[R\xi^{\frown\smile} m && [(3)],
\end{aligned}$$

откуда $\mathfrak{C}_1 : R\xi m \amalg [R\xi^{\frown\smile} m$, что и оставалось доказать.

2.7. *Если* Q — *слово в* A_0, *то*

$$\mathfrak{C}_1 : Qh \amalg hQ\,[Q^{-}. \tag{10}$$

При $Q = \Lambda$ эквивалентность (10) имеет место [(1), § 1.6.3]. Допустим, что она имеет место для некоторого слова Q в A_0. Тогда для всякой буквы ξ алфавита A_0

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_1 : Q\xi h &\perp_5 Qh\bar{\xi}\bar{\xi} \\
&\amalg hQ\,[Q^{-}\xi[\bar{\xi} && [(10),\ \S\ 1.6.6,\ (2)] \\
&\amalg hQ\xi\,[Q^{-}\,[\bar{\xi} && [2.2,\ \S\ 1.6.6] \\
&= hQ\xi\,[Q\bar{\xi} && [(3)],
\end{aligned}$$

откуда $\mathfrak{C}_1 : Q\xi h \amalg hQ\xi\,[Q\bar{\xi}$, что и оставалось доказать.

2.8. *Если* R — *слово в* A_0, *то*

$$\mathfrak{C}_1 : gR \amalg Rg\,[[R^{\frown\smile}. \tag{11}$$

При $R = \Lambda$ эквивалентность (11) имеет место [(1), I. § 3.12 (1), § 1.6.3]. Допустим, что она имеет место для некоторого слова R в A_0. Тогда для всякой буквы ξ алфавита A_0

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_1 : g\xi R &\perp_6 \xi g\hat{\xi} R \\
&\amalg \xi g R\hat{\xi} && [2.3,\ \S\ 1.6.6] \\
&\amalg \xi Rg\,[[R^{\frown\smile}\,[[\xi^{\frown\smile} && [(11),\ \S\ 1.6.6,\ (2),\ \text{I. }\S\ 3.12\,(2)] \\
&= \xi Rg\,[[\xi^{\frown}\,[R^{\frown\smile} && [\text{I. }\S\ 3.12\,(4)] \\
&= \xi Rg\,[[\xi R^{\frown\smile} && [(3)],
\end{aligned}$$

откуда $\mathfrak{C}_1 : g\xi R \amalg \xi Rg\,[[\xi R^{\frown\smile}$, что и оставалось доказать.

2.9. *Если* $\mathfrak{C}_0 : V \perp W$, *то* $\mathfrak{C}_1 : fVm \perp\!\!\!\perp fWm$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{C}_0 : V \perp W$. Тогда имеет место одно из двух: или

$$V = PdQcRdSeQT,$$

$$W = PdQcRdSeTR$$

для некоторых слов Q, T, R в A_0 и некоторых слов P, S в A_1, или то же самое с переменой ролей V и W [§ 5.1]. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_1 : fPdQcRdSeQTm &\perp\!\!\!\perp PdfQcRdSeQTm && [2.1,\ \S\ 1.6.6]\\
&\perp_7 PdhQcRdSeQTm\\
&\perp\!\!\!\perp PdhQcRdS[Q^{-}eTm && [2.5,\ \S\ 1.6.6]\\
&\perp\!\!\!\perp PdhQ[Q^{-}cRdSeTm, && [2.2,\ \S\ 1.6.4,\ \S\ 1.6.6]\\
&\perp\!\!\!\perp PdQhcRdSeTm && [2.7,\ \S\ 1.6.4,\ \S\ 1.6.6]\\
&\perp_9 PdQcgRdSeTm\\
&\perp\!\!\!\perp PdQcRg[[R^{\frown\smile}dSeTm && [2.8,\ \S\ 1.6.6]\\
&\perp\!\!\!\perp PdQcRgdSeT[[R^{\frown\smile}m && [(4),\ 2.4,\ \S\ 1.6.6]\\
&\perp\!\!\!\perp PdQcRgdSeTRm && [2.6,\ \S\ 1.6.4,\ \S\ 1.6.6]\\
&\perp_8 PdQcRfdSeTRm\\
&\perp\!\!\!\perp fPdQcRdSeTRm && [2.1,\ \S\ 1.6.4,\ \S\ 1.6.6]],
\end{aligned}$$

откуда $\mathfrak{C}_1 : fVm \perp\!\!\!\perp fWm$ в первом случае и $\mathfrak{C}_1 : fWm \perp\!\!\!\perp fVm$ во втором. В силу § 1.6.4, имеем в обоих случаях $\mathfrak{C}_1 : fVm \perp\!\!\!\perp fWm$, что и требовалось доказать.

2.10. *Если* $\mathfrak{C}_0 : V \perp\!\!\!\perp W$, *то* $\mathfrak{C}_1 : fVm \perp\!\!\!\perp fWm$.

Это следует из § 5.1.4, 2.9 и § 1.6.5.

3. Условимся обозначать символом

$$[Q^{\iota}$$

проекцию слова Q на алфавит $\overline{A}_0$ [II. § 4.14], т. е. слово, получаемое из Q в результате выбрасывания букв, отличных от i и j; символом

$$[Q^{\wp}$$

проекцию слова Q на алфавит $\widehat{A}_0$, т. е. слово, получаемое из Q в результате выбрасывания букв, отличных от k и l; символом

$$[Q^{\omega}$$

проекцию Q на алфавит A_1, т. е. слово, получаемое из Q в результате выбрасывания букв, отличных от a, b, c и d; символом

$$[Q^{\sigma}$$

результат замены в Q буквами a и b двойников этих букв:

(1) $$[Q^{\sigma} = S^{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,\ j,\ k,\ l,\ m}_{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ a,\ b,\ a,\ b,\ m} Q].$$

Следующие равенства непосредственно вытекают из определений

(2) $$[\chi^{\iota} = \begin{cases} \chi & (\chi \in \bar{A}_0) \\ \Lambda & (\chi \in A_3 \setminus \bar{A}_0), \end{cases}$$

(3) $$[\chi^{\rho} = \begin{cases} \chi & (\chi \in \hat{A}_0) \\ \Lambda & (\chi \in A_3 \setminus \hat{A}_0), \end{cases}$$

(4) $$[\chi^{\omega} = \begin{cases} \chi & (\chi \in A_1) \\ \Lambda & (\chi \in A_3 \setminus A_1), \end{cases}$$

(5) $$[\bar{\xi}^{\sigma} = \xi \quad (\xi \in A_0),$$

(6) $$[\hat{\xi}^{\sigma} = \xi \quad (\xi \in A_0).$$

Для любых слов Q и R в A_3 имеем

(7) $$[QR^{\Delta} = [Q^{\Delta}[R^{\Delta},$$

где «Δ» может означать любую из четырех букв ι, ρ, ω, σ [II. § 4.14 (1)].

Докажем, что для любой буквы ζ алфавита A_1 и любой буквы η алфавита A_4 имеет место равенство

(8) $$[\zeta\eta^{\Delta} = [\eta\zeta^{\Delta},$$

где «Δ» означает любую из букв ι, ρ, ω.

В самом деле,

(9) $$[\zeta^{\iota} = \Lambda \quad (\zeta \in A_1) \qquad [(2)],$$

(10) $$[\zeta^{\rho} = \Lambda \quad (\zeta \in A_1) \qquad [(3)],$$

(11) $$[\eta^{\omega} = \Lambda \quad (\eta \in A_4) \qquad [(4)].$$

Поэтому при $\zeta \in A_1$, $\eta \in A_4$ имеем

$$\begin{aligned} [\zeta\eta^{\iota} &= [\zeta^{\iota}[\eta^{\iota} && [(7)] \\ &= [\eta^{\iota} && [(9)] \\ &= [\eta^{\iota}[\zeta^{\iota} && [(9)] \\ &= [\eta\zeta^{\iota} && [(7)]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом с помощью (10) и (11) усматриваем, что

$$[\zeta\eta^{\rho} = [\eta\zeta^{\rho},$$

$$[\zeta\eta^{\omega} = [\eta\zeta^{\omega}.$$

Равенство (8) тем самым доказано. Аналогичным образом усматриваем, что

(12) $$[\zeta\eta^{\{c,d,e\}} = [\eta\zeta^{\{c,d,e\}} \quad (\zeta \in A_1,\ \eta \in A_4).$$

3.1. *Если* $\mathfrak{C}_1 : Q \perp_1 R$, *то* $[Q^\Delta = [R^\Delta$, *где* «Δ» *означает* ι, ρ, ω *или* $\{c, d, e\}$

В самом деле, пусть $\mathfrak{C}_1 : Q \perp_1 R$. Тогда имеются слова S и T в A_3 такие, что либо имеют место равенства

$$Q = S\zeta\eta T, \tag{13}$$

$$R = S\eta\zeta T, \tag{14}$$

где $\zeta \in A_1$, $\eta \in A_4$, либо имеют место равенства

$$Q = S\eta\zeta T,$$

$$R = S\zeta\eta T,$$

где $\zeta \in A_1$, $\eta \in A_4$.

Обозначая через «Δ» ι, ρ, ω или $\{c, d, e\}$, имеем в первом случае

$$\begin{aligned} [Q^\Delta &= [S^\Delta [\zeta\eta^\Delta [T^\Delta && [(13), (7), \text{II. § } 4.14\,(10)] \\ &= [S^\Delta [\eta\zeta^\Delta [T^\Delta && [(8), (12)] \\ &= [R^\Delta && [(7), \text{II. § } 4.14\,(10), (14)]. \end{aligned}$$

Во втором случае дело обстоит аналогичным образом.

4. Условимся называть буквы f, g, h *оперативными буквами*.

Обозначим через A_5 алфавит $A_0 \cup \bar{A}_0 \cup \hat{A}_0$:

$$\begin{aligned} A_5 &= A_0 \cup \bar{A}_0 \cup \hat{A}_0 \\ &= \{a, b, i, j, k, l\}. \end{aligned}$$

Условимся говорить о слове W в алфавите A_3, что оно есть *слово первого разряда*, если оно удовлетворяет условиям **P.1—P.5** [§ 5.2] и следующим условиям.

P.6. Всякое вхождение буквы f, g, h, i или j в W предшествует вхождению буквы e.

P.7. Имеется одно и только одно вхождение оперативной буквы в W.

P.8. Всякое вхождение буквы i, j, k или l в W следует за вхождением оперативной буквы.

P.9. Если h входит в W, то в W входит слово вида dVh, где V — слово в A_0;

P.10. Если g входит в W, то в W входит слово вида gUd, где U — слово в A_5;

P.11. W оканчивается буквой m и содержит только одно вхождение этой буквы.

Согласно **P.7**, слова 1-го разряда распадаются на следующие три класса:

f-слова, т. е. слова 1-го разряда, содержащие одно вхождение f и не содержащие g и h;

g-слова, т. е. слова 1-го разряда, содержащие одно вхождение g и не содержащие f и h:

h-слова, т. е. слова 1-го разряда, содержащие одно вхождение h и не содержащие f и g.

Справедливость следующих трех лемм легко усматривается из определений.

4.1. *Всякое f-слово имеет вид PfQeRm и представляется в этом виде единственным образом.*

4.2. *Всякое h-слово имеет вид PdVhQeRm (V — слово в* A_0*) и представляется в этом виде единственным образом.*

4.3. *Всякое g-слово имеет вид PgUdQeRm (U — слово в* A_5*) и представляется в этом виде единственным образом.*

4.4. *Если PfQeRm есть f-слово, то P — слово в* A_1, *Q — слово в* $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$ *и R — слово в* $A_0 \cup \hat{A}_0$.

В самом деле, P не может содержать букву e в силу **P.1**; буквы f, g, h — в силу **P.7**; буквы i, j, k, l — в силу **P.8** и букву m — в силу **P.11**. Q не может содержать букву e в силу **P.1**; буквы f, g, h — в силу **P.7** и букву m — в силу **P.11**. Наконец, R не может содержать букву e в силу **P.1**; буквы c и d — в силу **P.2**; буквы f, g, h, i, j — в силу **P.6** и букву m — в силу **P.11**.

Аналогично доказываются следующие две леммы.

4.5. *Если PdVhQeRm есть h-слово, то P — слово в* A_1, *Q — слово в* $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$ *и R — слово в* $A_0 \cup \hat{A}_0$.

4.6. *Если PgUdQeRm есть g-слово, то P — слово в* A_1, *Q — слово в* $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$ *и R — слово в* $A_0 \cup \hat{A}_0$.

Из сравнения определений слов нулевого и 1-го разрядов легко усматривается справедливость леммы

4.7. *Если W — слово нулевого разряда, то fWm есть слово 1-го разряда.*

5. Определим теперь понятие «образа» слова 1-го разряда.

Образом f-слова $PfQeRm$ будем называть слово $P[Q^{\omega}e[[Q^{\omega}[R^{\omega}[[[QR^{\rho}{}^{\sim}{}^{\sigma}$.

Образом h-слова $PdVhQeRm$, где V — слово в A_0, будем называть слово $PdV\,[Q^{\omega}eV\,[[Q^{\omega}[R^{\omega}[[[QR^{\rho}{}^{\sim}{}^{\sigma}$.

Образом g-слова $PgUdQeRm$, где U — слово в A_5, будем называть слово $P\,[UdQ^{\omega}e\,[[UQ^{\omega}\,[R^{\omega}\,[[[UQR^{\rho}{}^{\sim}{}^{\sigma}\,[U^{\omega}$.

Ввиду 4.1—4.3 это определение образа слова 1-го разряда однозначно: всякое слово 1-го разряда имеет один и только один образ. Образ слова 1-го разряда W будем обозначать символом

$$[W^{\sim}.$$

Имеем по определению

5.1. *Если W — слово 1-го разряда и* $W = PfQeRm$, *то*

$$[W^{\sim} = P\,[Q^{\omega}e\,[[Q^{\omega}\,[R^{\omega}\,[[[QR^{\rho}{}^{\sim}{}^{\sigma}.$$

5.2. *Если W — слово 1-го разряда и* $W = PdVhQeRm$, *где V — слово в* A_0, *то*

$$[W^{\sim} = PdV\,[Q^{\omega}eV\,[[Q^{\omega}\,[R^{\omega}\,[[[QR^{\rho}{}^{\sim}{}^{\sigma}.$$

5.3. *Если W — слово 1-го разряда и* $W = PgUdQeRm$, *где U — слово в* A_5, *то*

$$[W^{\sim} = P\,[UdQ^{\omega}e\,[[UQ^{\omega}\,[R^{\omega}\,[[[UQR^{\rho}{}^{\sim}{}^{\sigma}\,[U^{\omega}.$$

Докажем теперь ряд лемм, касающихся применения к словам 1-го разряда допустимых действий исчисления $\mathfrak{S}_1$.

5.4. *Если* X *— слово 1-го разряда и* $\mathfrak{C}_1 : X \perp_1 Y$, *то* Y *— слово 1-го разряда и* $[X^{\sim} = [Y^{\sim}$.

В самом деле, пусть X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_1 Y$. Тогда Y получается из X в результате подстановки слова $\eta\zeta$ вместо некоторого вхождения слова $\zeta\eta$, где $\zeta \in A_1$ и $\eta \in A_4$, или в результате обратного действия. Иначе говоря, Y получается из X в результате перестановки двух соседних букв, из которых одна принадлежит A_1, а другая A_4.

Такая перестановка не влияет на количество вхождений букв. Поэтому Y, как и X, удовлетворяет условиям **Р. 1** и **Р. 7**.

Имеем далее $[X^{\{c,d,e\}} = [Y^{\{c,d,e\}}$ [**3. 1**], т. е. порядок следования букв c, d, e в словах X и Y один и тот же. Поэтому Y, как и X, удовлетворяет условиям **Р. 2—Р. 5**, касающимся только этого порядка. Легко усматриваем, что Y удовлетворяет условиям **Р. 6**, **Р. 8** и **Р. 11**. Таким образом, Y удовлетворяет условиям **Р. 1—Р. 8** и **Р. 11**.

Если теперь Y не содержит ни h, ни g, то Y есть слово 1-го разряда, так как оставшиеся два условия относятся к случаям, когда одна из этих букв входит в Y. Y есть поэтому f-слово. Рассмотрим сначала этот случай и покажем, что тогда $[X^{\sim} = [Y^{\sim}$.

Так как буквы g и h не входят в Y, они не входят и в X. Поэтому слово 1-го разряда X есть f-слово. Следовательно,

$$X = PfQeRm \tag{1}$$

для некоторого слова P в A_1, некоторого слова Q в $A_1 \cup \bar{A}_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого слова R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ [**4. 1**, **4. 4**].

Допустим теперь для определенности, что Y получается из X в результате подстановки слова $\eta\zeta$ вместо некоторого вхождения слова $\zeta\eta$ ($\zeta \in A_1$, $\eta \in A_4$). Это допущение, очевидно, не ограничивает общности рассуждений, так как f-слова X и Y можно поменять ролями. Рассмотрим порознь два случая: $\eta \neq f$ и $\eta = f$.

а. $\eta \neq f$. В этом случае ни одна из букв f, e, m не входит в слово $\zeta\eta$. Принимая во внимание, что

$$X = PfQeRmS,$$

где $S = \Lambda$ [**(1)**], заключаем поэтому согласно **I. § 4.5.6**, что Y имеет один из видов

$$P_1fQeRm, \tag{2}$$

$$PfQ_1eRm, \tag{3}$$

$$PfQeR_1m, \tag{4}$$

$$PfQeRmS_1, \tag{5}$$

где P_1, Q_1, R_1, S_1 суть соответственно результаты подстановки слова $\eta\zeta$ вместо вхождения слова $\zeta\eta$ в P, Q, R, Λ. Но слово $\zeta\eta$ не входит в Λ и не входит также в слово P в алфавите A_1, так как $\eta\urcorner \in A_1$. Поэтому виды **(2)** и **(5)** невозможны. Таким образом, имеем либо

$$Y = PfQ_1eRm, \tag{6}$$

где Q_1 таково, что

$$\mathfrak{C}_1 : Q \perp_1 Q_1, \tag{7}$$

либо

(8) $$Y = PfQeR_1m,$$

где R_1 таково, что

(9) $$\mathfrak{C}_1 : R \perp_1 R_1.$$

Допустим сперва, что имеют место равенство (6) и смежность (7). Тогда (6) дает для f-слова Y представление типа, рассмотренного в леммах 4.1 и 4.4. Поэтому

(10) $$[Y^{\sim} = P[Q_1^{\omega}e[[Q_1^{\alpha}[R^{\omega}[[[Q_1R^{\beta\sim\alpha} \qquad [5.1],$$

тогда как

(11) $$[X^{\sim} = P[Q^{\omega}e[[Q^{\alpha}[R^{\omega}[[[QR^{\beta\sim\alpha} \qquad [(1), 5.1].$$

Здесь

(12) $$[Q^{\omega} = [Q_1^{\omega} \qquad [(7), 3.1],$$

(13) $$[Q^{\iota} = [Q_1^{\iota} \qquad [(7), 3.1],$$

(14) $$[Q^{\beta} = [Q_1^{\beta} \qquad [(7), 3.1],$$

$$[QR^{\beta} = [Q^{\beta}[R^{\beta} \qquad [3(7)]$$

$$= [Q_1^{\beta}[R^{\beta} \qquad [(14)]$$

(15) $$= [Q_1R^{\beta} \qquad [3(7)].$$

В силу (10)—(13) и (15), имеем

(16) $$[X^{\sim} = [Y^{\sim}.$$

Допустим теперь, что имеют место равенство (8) и смежность (9). Тогда

(17) $$[Y^{\sim} = P[Q^{\omega}e[[Q^{\alpha}[R_1^{\omega}[[[QR_1^{\beta\sim\alpha} \qquad [(8), 5.1],$$

в то время как для $[X^{\sim}$ имеем попрежнему равенство (11). При этом

(18) $$[R^{\omega} = [R_1^{\omega} \qquad [(9), 3.1],$$

(19) $$[R^{\beta} = [R_1^{\beta} \qquad [(9), 3.1],$$

$$[QR^{\beta} = [Q^{\beta}[R^{\beta} \qquad [3(7)]$$

$$= [Q^{\beta}[R_1^{\beta} \qquad [(19)]$$

(20) $$= [QR_1^{\beta} \qquad [3(7)].$$

В силу (11), (17), (18) и (20), имеет место равенство (16).

Таким образом, это равенство соблюдается в случае а.

б. $\eta = f$. В этом случае Y есть результат подстановки слова $f\zeta$ вместо вхождения слова ζf в X. Принимая во внимание, что оперативная буква f входит в X единственный раз, заключаем из равенства (1), что для некоторого слова P_1 имеют место равенства

(21) $$P = P_1\zeta$$
$$X = P_1\zeta f Q e R m,$$
$$Y = P_1 f\zeta Q e R m$$

(22) $$= P_1 f Q_1 e R m,$$

где

(23) $$Q_1 = \zeta Q.$$

Имеем здесь

(24) $$[Y^{\sim} = P_1[Q_1^{\omega} e[[Q_1^{\omega}[R^{\omega}[[[Q_1 R^{\rho\sim\sigma} \qquad [(22),\ 5.1],$$

тогда как для $[X^{\sim}$ имеем попрежнему равенство (11). При этом

$$P[Q^{\omega} = P_1[\zeta^{\omega}[Q^{\omega} \qquad [(21),\ 3(4)]$$

(25) $$= P_1[Q_1^{\omega} \qquad [3(7),\ (23)],$$

$$[Q^{\iota} = [\zeta^{\iota}[Q^{\iota} \qquad [3(2)]$$

(26) $$= [Q_1^{\iota} \qquad [3(7),\ (23)],$$

(27) $$[Q^{\rho} = [Q_1^{\rho} \qquad [3(3),\ 3(7),\ (23)],$$

(28) $$[QR^{\rho} = [Q_1 R^{\rho} \qquad [3(7),\ (27)].$$

В силу (11), (24)—(26) и (28), имеет место равенство (16). Таким образом, это равенство соблюдается и в случае б. Итак, в обоих возможных случаях имеет место (16).

Допустим теперь, что h входит в Y. Тогда h входит и в X. Следовательно, X есть h-слово и, значит,

(29) $$X = PdVhQeRm$$

для некоторого слова P в A_1, некоторого слова Q в $A_1 \cup \overline{\overline{A}}_0 \cup \hat{A}_0$, некоторого слова R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого слова V в A_0 [4.2, 4.5].

Допустим для определенности, что Y получается из X в результате подстановки слова $\gamma\zeta$ вместо некоторого вхождения слова $\zeta\eta$ ($\zeta \in A_1$, $\eta \in A_4$). Рассуждая тогда, как выше в случае а, заключаем, что Y имеет один из видов

(30) $$P_1 hQeRm,$$

(31) $$PdVhQ_1eRm,$$

(32) $$PdVhQeR_1m,$$

(33) $$PdVhQeRmS_1,$$

где P_1, Q_1, R_1, S_1 суть соответственно результаты подстановки слова $\eta\zeta$ вместо вхождения слова $\zeta\eta$ в слова PdV, Q, R, Λ. Но PdV есть слово в алфавите A_1, так как P — слово в A_1, а V — слово в A_0. Слово $\zeta\eta$ не входит в PdV, так как $\eta\urcorner \in A_1$. Слово $\zeta\eta$ не входит также в Λ. Поэтому виды (30) и (33) невозможны. Таким образом, имеем либо

(34) $$Y = PdVhQ_1eRm,$$

где Q_1 удовлетворяет условию (7), либо

(35) $$Y = PdVhQeR_1m,$$

где R_1 удовлетворяет условию (9).

К тому же выводу мы, очевидно, придем и в предположении, что Y получается из X в результате подстановки слова $\zeta\eta$ вместо вхождения слова $\eta\zeta$.

Как в случае равенства (34), так и в случае равенства (35) Y удовлетворяет условию **Р. 9**, так как V есть слово в A_0. Условие **Р. 10** отпадает в применении к Y, так как g не входит в Y. Как установлено выше, Y удовлетворяет условиям **Р. 1—Р. 8** и **Р. 11**. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, h-слово.

Если имеют место равенство (34) и смежность (7), то

(36) $$[Y^{\sim} = PdV\,[Q_1^{\omega}eV\,[[Q_1^{\omega}[R^{\omega}[[[Q_1R^{\rho\sim\sigma} \qquad [(34),\ 5.2],$$

тогда как

(37) $$[X^{\sim} = PdV\,[Q^{\omega}eV\,[[Q^{\omega}[R^{\omega}[[[QR^{\rho\sim\sigma} \qquad [(29),\ 5.2].$$

В этом случае получаем, как на стр. 264, равенства (12)—(15). В силу (36), (37), (12), (13), (15), имеет место равенство (16).

Если же имеют место равенство (35) и смежность (9), то

(38) $$[Y^{\sim} = PdV[Q^{\omega}eV\,[[Q^{\omega}[R_1^{\omega}[[[QR_1^{\rho\sim\sigma} \qquad [(35),\ 5.2],$$

тогда как для $[X^{\sim}$ имеем попрежнему равенство (37). В этом случае получаем, как на стр. 264, равенства (18)—(20). В силу (37), (38), (8), (20), равенство (16) имеет место и в этом случае.

Таким образом, это равенство соблюдается, если h входит в Y.

Допустим, наконец, что g входит в Y.

Тогда g входит и в X. Следовательно, X есть g-слово и, значит,

(39) $$X = PgUdQeRm,$$

где P — слово в A_1, Q — слово в $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$, R — слово в $A_0 \cup \hat{A}_0$, U — слово в A_5 [4.3, 4.6].

Допустим сперва, что Y получается из X в результате подстановки слова $\eta\zeta$ вместо некоторого вхождения слова $\zeta\eta$ ($\zeta \in A_1$, $\eta \in A_4$). Рассуждая, как выше, заключаем, что Y имеет один из видов

(40) $$P_1gUdQeRm,$$

(41) $$PgWeRm,$$

(42) $$PgUdQeR_1m,$$

(43) $$PgUdQeRmS_1,$$

где P_1, W, R_1, S_1 суть соответственно результаты подстановки слова $\eta\zeta$ вместо вхождения слова $\zeta\eta$ в слова P, UdQ, R, Δ. Виды (40) и (43) отпадают, так как $\zeta\eta$ не входит ни в Δ, ни в слово P в алфавите A_1. Таким образом, имеем либо

(44) $$Y = PgWeRm,$$

где W есть результат подстановки слова $\eta\zeta$ вместо вхождения слова $\zeta\eta$ в UdQ, либо

(45) $$Y = PgUdQeR_1m,$$

где R_1 удовлетворяет условию (9).

Рассмотрим первый случай. Имеем тогда

(46) $$UdQ = S\zeta\eta T,$$

(47) $$W = S\eta\zeta T,$$

где S и T суть некоторые слова. В силу (46), слова U и $S\zeta\eta$ суть начала одного и того же слова. Поэтому либо U начинается словом $S\zeta\eta$, либо слово $S\zeta$ начинается словом U [1. § 3.10.9].

Если U начинается словом $S\zeta\eta$, то

(48) $$U = S\zeta\eta V$$

для некоторого слова V и мы имеем

(49) $$T = VdQ \qquad [(46), (48), \text{I. § 3.9.3}],$$

$$W = S\eta\zeta VdQ \qquad [(47), (49)]$$

(50) $$= U_1dQ,$$

где

(51) $$U_1 = S\eta\zeta V.$$

Имеем далее

(52) $$Y = PgU_1dQeRm \qquad [(44), (50)],$$

причем

(53) $$\mathfrak{C}_1 : U \perp_1 U_1 \qquad [(48), (51)].$$

В силу (53), U_1 является, как и U, словом в алфавите A_5. Равенство (52) показывает поэтому, что Y удовлетворяет условию **Р. 10.** Условие **Р.** 9 отпадает в применении к Y, так как h не входит в Y. Как показано выше, Y удовлетворяет условиям **Р. 1—Р. 8** и **Р. 11**. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. Равенство (52)

дает для этого g-слова представление типа, рассмотренного в леммах 4.3 и 4.6. Поэтому

(54) $[Y^{\sim} = P[U_1 dQ^{\omega} e[[U_1 Q^{\iota}[R^{\omega}[[[U_1 QR^{\sim\sigma}[U_1^{\omega}$ [(52), 5.3],

тогда как

(55) $[X^{\sim} = P[UdQ^{\omega} e[[UQ^{\iota}[R^{\omega}[[[UQR^{\rho\sim\sigma}[U^{\omega}$ [(39), 5.3].

Имеем далее

(56) $[U_1^{\omega} = [U^{\omega}$ [(53), 3.1],

(57) $[U_1^{\iota} = [U$ [(53), 3.1],

(58) $[U_1^{\rho} = [U^{\rho}$ [(53), 3.1],

(59) $[U_1 dQ^{\omega} = [UdQ^{\omega}$ [3(7), (56)],

(60) $[U_1 Q^{\iota} = [UQ^{\iota}$ [3(7), (57)],

(61) $[U_1 QR^{\rho} = [UQR^{\rho}$ [3(7), (58)].

Согласно (54)—(56) и (59)—(61), имеем равенство (16).

Допустим теперь, что $S\zeta$ начинается словом U. Заметим прежде всего, что

$$S\zeta \neq U.$$

В самом деле, при $S\zeta = U$ мы имели бы

$$dQ = \eta T \qquad [(46), \text{ I. § 3.9.3}],$$

откуда $d = \eta$, что невозможно, так как $\eta \in A_4$, а $d\urcorner \in A_4$. Следовательно, в рассматриваемом случае S начинается словом U [I. § 3.10.7].

Если

(62) $$S = U,$$

то

(63) $dQ = \zeta\eta T$ [(46), (62), I. § 3.9.3],

(64) $d = \zeta$ [(63)].

(65) $Q = \eta T$ [(63), (64), I. § 3.9.3],

$W = U\eta dT$ [(47), (62), (64)]

(66) $= U_1 dT,$

где

(67) $U_1 = U\eta.$

В силу (39) и (65), буква η входит в g-слово X и потому отлична от f. Эта буква, принадлежащая алфавиту A_4, принадлежит поэтому алфавиту $\bar{A}_0 \cup \hat{A}_0$ и, значит, алфавиту A_5. В силу (67), отсюда следует, что U_1 есть, как и U, слово в A_5. Имеем далее

(68) $$Y = PgU_1dTeRm \qquad [(44), (66)].$$

Следовательно, Y удовлетворяет условию **Р. 10** и, как в только что рассмотренном случае, мы заключаем, что Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. Имеем далее

(69) $$[Y^{\smile} = P[U_1dT^{\omega}e[[U_1T^{\omega}[R^{\omega}[[[U_1TR^{\rho\smile\sigma}[U_1^{\omega} \qquad [(68), 5.3],$$

тогда как для $[X^{\smile}$ имеем попрежнему равенство (55). Так как буква η, принадлежащая алфавиту A_4, не принадлежит A_1, имеем

(70) $$[Q^{\omega} = [T^{\omega} \qquad [(65), 3(7), 3(4)],$$

(71) $$[U^{\omega} = [U_1^{\omega} \qquad [(67), 3(7), 3(4)],$$

(72) $$[UdQ^{\omega} = [U_1dT^{\omega} \qquad [3(7), (70), (71)].$$

Кроме того,

$$UQ = U\eta T \qquad [(65)]$$

(73) $$= U_1T \qquad [(67)].$$

Из равенств (55), (69), (71)—(73) следует равенство (16), которое, таким образом, соблюдается, если имеет место равенство (62).

Пусть теперь $S \neq U$. Тогда

(74) $$S = UV,$$

где $V \neq \Lambda$, и мы имеем

(75) $$dQ = V\zeta\eta T \qquad [(46), (74), \text{I. § 3.9.3}],$$

откуда следует, что слово V начинается буквой d:

(76) $$V = dZ$$

для некоторого слова Z. Имеем

(77) $$Q = Z\zeta\eta T \qquad [(75), (76), \text{I. § 3.9.3}],$$

$$W = UdZ\eta\zeta T \qquad [(47), (74), (76)]$$

(78) $$= UdQ_1,$$

где

(79) $$Q_1 = Z\eta\zeta T;$$

(80) $$Y = PgUdQ_1eRm \qquad [(44), (78)].$$

В силу (80), Y удовлетворяет условию **Р. 10**, так как U — слово в A_5.

Мы заключаем отсюда, как в рассмотренных случаях, что Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. Имеем далее

(81) $$[Y^{\sim} = P[UdQ_1^{\omega}e[[UQ_1^{\omega}[R^{\omega}[[[UQ_1R^{\beta}]^{\sim\sigma}[U^{\omega} \quad [(80),\ 5.3],$$

тогда как для $[X^{\sim}$ имеем (55). При этом, в силу (77) и (79), имеем смежность (7), из которой, согласно 3.1, следуют равенства (12)—(14). Имеем далее

(82) $$[UdQ^{\omega} = [UdQ_1^{\omega} \quad [(12),\ 3(7)],$$

(83) $$[UQ^{\iota} = [UQ_1^{\iota} \quad [(13),\ 3(7)],$$

(84) $$[UQR^{\beta} = [UQ_1R^{\beta} \quad [(14),\ 3(7)].$$

Из равенств (55), (81)—(84) следует равенство (16), которое, таким образом, соблюдается, если $S \neq U$.

Этим доказано, что равенство (16) имеет место и в том случае, когда $S\zeta$ начинается словом U. Таким образом, это равенство соблюдается в нашем первом случае, характеризуемом равенством (44), где W — результат подстановки слова $\eta\zeta$ вместо вхождения слова $\zeta\eta$ в UdQ.

Во втором случае имеем равенство (45) и смежность (9). В силу (45), Y удовлетворяет условию **P. 10** и, значит, является словом 1-го разряда. Следовательно, Y есть g-слово и

(85) $$[Y^{\sim} = P[UdQ^{\omega}e[[UQ^{\omega}[R_1^{\omega}[[[UQR_1^{\beta}]^{\sim\sigma}[U^{\omega} \quad [(45),\ 5.3],$$

тогда как для $[X^{\sim}$ имеем (55). В силу (9), имеем при этом равенства (18), (19) [3.1]. Имеем далее

(86) $$[UQR^{\beta} = [UQR_1^{\beta} \quad [(19),\ 3(7)].$$

В силу (55), (85), (18) и (86), равенство (16) имеет место и в этом случае.

Мы исчерпали, таким образом, тот случай, когда g входит в Y и Y получается из X в результате подстановки слова $\eta\zeta$ вместо некоторого вхождения слова $\zeta\eta$ ($\zeta \in A_1$, $\eta \in A_4$). Мы доказали, что тогда равенство (16) имеет место.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда g входит в Y и Y получается из X в результате подстановки слова $\zeta\eta$ вместо некоторого вхождения слова $\eta\zeta$ ($\zeta \in A_1$, $\eta \in A_4$). Мы усматриваем здесь прежде всего, что либо имеет место равенство (44), где W есть на этот раз результат подстановки слова $\zeta\eta$ вместо вхождения слова $\eta\zeta$ в UdQ, либо имеет место равенство (45), где R_1 удовлетворяет условию (9).

Если имеет место второе, то Y является, как в только что рассмотренном случае, словом 1-го разряда и, значит, g-словом. При этом имеют место равенства (85), (18), (19), (86), (55), и мы убеждаемся в соблюдении равенства (16).

Допустим теперь, что имеет место равенство (44), где W есть результат подстановки слова $\zeta\eta$ вместо вхождения слова $\eta\zeta$ в UdQ. Имеем тогда

(87) $$UdQ = S\eta\zeta T,$$

(88) $$W = S\zeta\eta T,$$

где S и T суть некоторые слова. В силу (87), слова U и $S\eta\zeta$ суть начала одного и того же слова. Поэтому либо U начинается словом $S\eta\zeta$, либо слово $S\eta$ начинается словом U [I. § 3.10.9].

Если U начинается словом $S\eta\zeta$, то, рассуждая, как в аналогичном рассмотренном выше случае (стр. 267), получаем равенство (52), где U_1 есть некоторое слово, удовлетворяющее условию (53). Рассуждая, как выше (стр. 267), убеждаемся, что Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. Как выше, имеем далее равенства (54)—(61). Согласно (54), (55), (59)—(61), имеем равенство (16).

Допустим теперь, что $S\eta$ начинается словом U.

Если

(89) $$S\eta = U,$$

то

$$dQ = \zeta T \qquad [(87), (89), \text{I. § 3.9.3}],$$

откуда следует равенство (64) и равенство

(90) $$Q = T.$$

Имеем далее

$$W = Sd\eta Q \qquad [(88), (64), (90)]$$

(91) $$= SdQ_1,$$

где

(92) $$Q_1 = \eta Q;$$

(93) $$Y = PgSdQ_1eRm \qquad [(44), (91)].$$

В силу (89), S есть, как и U, слово в A_5. Согласно (93), Y удовлетворяет поэтому условию **P. 10** и является, следовательно, словом 1-го разряда. В силу (93), Y есть g-слово. Имеем далее

(94) $$[Y^{\frown} = P[SdQ_1^{\omega}e[[SQ_1^{\omega}[R^{\omega}[[[SQ_1R^{\rho\frown\sigma}[S^{\omega} \qquad [(93), 5.3],$$

тогда как для $[X^{\frown}$ имеем (55). Так как буква η, принадлежащая алфавиту A_4, не принадлежит A_1, имеем

(95) $$[Q^{\omega} = [Q_1^{\omega} \qquad [(92), 3(7), 3(4)],$$

(96) $$[U^{\omega} = [S^{\omega} \qquad [(89), 3(7), 3(4)],$$

(97) $$[UdQ^{\omega} = [SdQ_1^{\omega} \qquad [(95), (96), 3(7)].$$

Кроме того,

$$UQ = S\eta Q \qquad [(89)]$$

(98) $$= SQ_1 \qquad [(92)].$$

Из равенств (55), (94), (96)—(98) следует равенство (16), которое, таким образом, соблюдается, если имеет место равенство (89).

Пусть теперь $S\eta \neq U$. Тогда S начинается словом U [I. § 3.10.7]. Заметим, что $S \neq U$. В самом деле, при $S = U$ мы имели бы

$$dQ = \eta\zeta T \qquad [(87), \text{ I. § 3.9.3}],$$

откуда $d = \eta$, что невозможно, так как $\eta \in A_4$, а $d \neg \in A_4$. Следовательно, U есть собственное начало слова S, т. е. имеем равенство (74), где $V \neq \Lambda$. Поэтому

(99) $$dQ = V\eta\zeta T \qquad [(87), (74), \text{ I. § 3.9.3}],$$

откуда следует, что V начинается буквой d, т. е. что для некоторого слова Z имеет место равенство (76). Имеем

(100) $$Q = Z\eta\zeta T \qquad [(99), (76), \text{ I. § 3.9.3}],$$

$$W = UdZ\zeta\eta T \qquad [(88), (74), (76)]$$

(101) $$= UdQ_1,$$

где

(102) $$Q_1 = Z\zeta\eta T.$$

В силу (44) и (101), имеем далее равенство (80), из которого следует, что Y удовлетворяет условию **P. 10**. Мы заключаем отсюда, как выше, что Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. В силу (80) и 5.3, имеем равенство (81), тогда как для $\lfloor X^{\sim}$ имеем (55). При этом, в силу (100) и (102), имеем смежность (7), из которой, согласно 3.1, следуют равенства (12)—(14). Получаем отсюда равенства (82)—(84). Из равенств (55), (81)—(84) следует равенство (16), которое, таким образом, соблюдается, если $S\eta \neq U$.

Мы исчерпали этим все случаи и доказали нашу лемму.

5.5. *Если X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{S}_1 : X \perp_2 Y$, то Y — слово 1-го разряда и $\lfloor X^{\sim} = \lfloor Y^{\sim}$.*

В самом деле, пусть X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{S}_1 : X \perp_2 Y$. Тогда Y получается из X в результате подстановки слова $\hat{\xi}e$ вместо некоторого вхождения слова $e\hat{\xi}$, где $\xi \in A_0$, или в результате обратного действия. Иначе говоря, Y получается из X в результате перестановки буквы e с соседней буквой, принадлежащей алфавиту $\hat{A}_0$.

Эта перестановка не влияет на количество вхождений букв. Поэтому Y, как и X, удовлетворяет условиям **P. 1** и **P. 7**. Перестановка не меняет также порядок следования букв c, d и e, так как обе переставляемых буквы отличны от c и d. Поэтому Y, как и X, удовлетворяет условиям **P. 2**—**P. 5**. Аналогичным образом усматриваем, что Y удовлетворяет условиям **P. 6**, **P. 8** и **P. 11**. Таким образом, Y удовлетворяет условиям **P. 1**—**P. 8** и **P. 11**.

Если Y не содержит ни g, ни h, то Y есть слово 1-го разряда, так как остальные два условия не относятся к этому случаю. Y есть

тогда f-слово. Рассмотрим сначала этот случай и покажем, что имеет место равенство (16).

Так как g и h не входят в Y, они не входят и в X. Поэтому X есть f-слово и, значит, для некоторого слова P в A_1, некоторого слова Q в $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \widehat{A}_0$ и некоторого слова R в $A_0 \cup \widehat{A}_0$ имеет место (1) [4.1, 4.4].

Допустим для определенности, что Y получается из X в результате подстановки слова $\widehat{\xi}e$ вместо некоторого вхождения слова $e\widehat{\xi}$ ($\xi \subset A_0$). Это допущение, очевидно, не ограничивает общности рассуждений, так как f-слова X и Y можно поменять ролями.

Имеем

(103) $$X = Se\widehat{\xi}T,$$

(104) $$Y = S\widehat{\xi}eT$$

для некоторых слов S и T. Имеем далее

(105) $$S = PfQ \qquad [(1), (103)],$$

(106) $$\widehat{\xi}T = Rm \qquad [(1), (103)].$$

В силу (106), слова T и R непусты, так как $\widehat{\xi} \neq m$. Равенство (106) показывает далее, что T оканчивается буквой m, т. е. что

(107) $$T = R_1 m$$

для некоторого слова R_1. Имеем

(108) $$R = \widehat{\xi}R_1 \qquad [(106), (107), \text{I. § 3.9.4}],$$

$$Y = PfQ\widehat{\xi}eR_1m \qquad [(104), (105), (107)]$$

(109) $$= PfQ_1eR_1m,$$

где

(110) $$Q_1 = Q\widehat{\xi}.$$

Равенство (109) дает для f-слова Y представление типа, рассмотренного в леммах 4.1 и 4.4. Поэтому

(111) $$[Y^{\sim} = P[Q_1^{\omega}e[[Q_1^{\omega}[R_1^{\omega}[[[Q_1R_1^{\omega}{}^{\sim\sigma} \qquad [5.1],$$

тогда как для $[X^{\sim}$ имеем равенство (11) [(1), 5.1].

Буква $\widehat{\xi}$, равная k или l, не принадлежит ни A_1, ни $\overline{A}_0$. Поэтому

(112) $$[Q_1^{\omega} = [Q^{\omega} \qquad [(110), 3(7), 3(4)],$$

(113) $$[R_1^{\omega} = [R^{\omega} \qquad [(108), 3(7), 3(4)],$$

(114) $$[Q_1^{\iota} = [Q^{\iota} \qquad [(110), 3(7), 3(2)].$$

Имеем далее

$$Q_1R_1 = Q\hat{\xi}R_1 \qquad [(110)]$$

$$(115) \qquad = QR \qquad [(108)].$$

Из равенств (11), (111)—(115) следует равенство (16).

Пусть теперь h входит в Y.

Тогда h входит и в X, X есть h-слово, и равенство (29) имеет место для некоторого слова P в A_1, некоторого слова Q в $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$, некоторого слова R в $A_0 \cup A_0$ и некоторого слова V в A_0 [4.2, 4.5].

Допустим сперва, что Y получается из X в результате подстановки слова $\hat{\xi}e$ вместо некоторого вхождения слова $e\hat{\xi}$ ($\hat{\xi} \in A_0$). Тогда для некоторых слов S и T имеют место равенства (103) и (104).

Имеем

$$(116) \qquad S = PdVhQ \qquad [(29), (103)]$$

и равенство (106) [(29), (103)]. Как в рассмотренном случае, заключаем из (106), что для некоторого слова R_1 имеют место равенства (107) и (108). Имеем далее

$$Y = PdVhQ\hat{\xi}eR_1m \qquad [(104), (116), (107)]$$

$$(117) \qquad = PdVhQ_1eR_1m,$$

где Q_1 определяется равенством (110).

Равенство (117) показывает, что Y удовлетворяет условию **P. 9**. Так как буква g, не входящая в X, не входит и в Y, условие **P. 10** не относится к рассматриваемому случаю. Остальным же условиям **P. 1**—**P. 11** слово Y, как выяснено, удовлетворяет. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, h-слово. Равенство (117) дает для этого h-слова представление типа, рассмотренного в леммах 4.2 и 4.5. Поэтому

$$(118) \qquad [Y^{\sim} = PdV\,[Q_1^{\omega}V[[Q_1^{\tau}\,[R_1^{\omega}\,[[[Q_1R_1^{\varrho}]^{\sim\sigma} \qquad [5.2],$$

тогда как для $[X^{\sim}$ имеем (37) [(29), 5.2].

Как в рассмотренном случае, мы убеждаемся в соблюдении равенств (112)—(115), а из равенств (37), (118), (112)—(115) следует равенство (16).

Аналогичным образом обстоит дело, когда h входит в Y и Y получается из X в результате подстановки слова $e\hat{\xi}$ вместо некоторого вхождения слова $\hat{\xi}e$. В этом случае имеем

$$(119) \qquad X = S\hat{\xi}eT,$$

$$(120) \qquad Y = Se\hat{\xi}T$$

для некоторых слов S и T. Далее получаем

$$(121) \qquad S\hat{\xi} = PdVhQ \qquad [(29), (119)],$$

$$(122) \qquad T = Rm \qquad [(29), (119)].$$

Принимая во внимание, что буква $\hat{\xi}$ алфавита $\hat{A}_0$ отлична от h, усматриваем из равенства (121), что $Q \neq \Lambda$ и что Q оканчивается буквой $\hat{\xi}$:

(123) $$Q = Q_1 \hat{\xi}$$

для некоторого слова Q_1. Имеем далее

(124) $$S = PdVhQ_1 \quad [(121), (123), \text{I. § 3.9.4}],$$

(125) $$Y = PdVhQ_1 e\hat{\xi} Rm \quad [(120), (124), (122)].$$

Равенство (125) показывает, что Y удовлетворяет условию **Р. 9**. Отсюда, как в предыдущем случае, заключаем, что Y есть слово 1-го разряда и, значит, h-слово. Слово X получается из Y в результате подстановки слова $\hat{\xi}e$ вместо некоторого вхождения слова $e\hat{\xi}$ [(120), (119)], т. е. так, как в предыдущем случае Y получалось из X. Ввиду этого сделанное в предыдущем случае заключение о соблюдении равенства (16) справедливо сейчас с переменой ролей X и Y, т. е. это равенство соблюдается.

Пусть, наконец, g входит в Y.

Тогда g входит в X, X есть g-слово, и равенство (39) имеет место для некоторого слова P в A_1, некоторого слова Q в $A_1 \cup \bar{A}_0 \cup \hat{A}_0$, некоторого слова R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого слова U в A_5 [4.3, 4.6].

Допустим, что Y получается из X в результате подстановки слова $\hat{\xi}e$ вместо некоторого вхождения слова $e\hat{\xi}$ ($\xi \in A_0$). Тогда для некоторых S и T имеют место равенства (103) и (104). Имеем

(126) $$S = PgUdQ \quad [(39), (103)]$$

и равенство (106) [(39), (103)]. Как в рассмотренных случаях, заключаем, что для некоторого R_1 имеют место равенства (107) и (108). Далее

$$Y = PgUdQ\hat{\xi}eR_1m \quad [(104), (126), (107)]$$

(127) $$= PgUdQ_1eR_1m,$$

где Q_1 определяется равенством (110).

Равенство (127) показывает, что Y удовлетворяет условию **Р. 10**, откуда следует, что Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. Равенство (127) дает для этого g-слова представление типа, рассмотренного в леммах 4.3 и 4.6. Поэтому

(128) $$[Y^{\sim} = P[UdQ_1^{\omega}e[[UQ_1^{\omega}[R_1^{\omega}[[[UQ_1R_1^{\rho\sim\sigma}[U^{\omega} \quad [5.3],$$

тогда как для $[X^{\sim}$ имеем (55) [(39), 5.3].

Как в рассмотренных случаях, убеждаемся в соблюдении равенств (112)—(115). Имеем далее

(129) $$[UdQ_1^{\omega} = [UdQ^{\omega} \quad [(112), 3(7)],$$

(130) $$[UQ_1^{\iota} = [UQ^{\iota} \quad [(114), 3(7)].$$

Из равенств (55), (128), (113), (115), (129) и (130) следует равенство (16).

Аналогичным образом обстоит дело, когда g входит в Y и Y получается из X в результате подстановки слова $e\hat{\xi}$ вместо некоторого вхождения слова $\hat{\xi}e$. В этом случае имеем равенства (119) и (120), где S и T суть некоторые слова. Далее получаем

(131) $$S\hat{\xi} = PgUdQ \qquad [(39), (119)].$$

Принимая во внимание, что буква $\hat{\xi}$ алфавита $\hat{A}_0$ отлична от d, усматриваем из равенства (131), что $Q \neq \Lambda$ и что Q оканчивается буквой $\hat{\xi}$. Имеем, таким образом, равенство (123) для некоторого слова Q_1. Имеем далее

(132) $$S = PgUdQ_1 \qquad [(131), (123), \text{I. § 3.9.4}],$$

(133) $$Y = PgUdQ_1 e\hat{\xi}T \qquad [(120), (132)].$$

Равенство (133) показывает, что Y удовлетворяет условию **P.10**. Отсюда заключаем, что Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. Слово X получается из Y в результате подстановки слова $\hat{\xi}e$ вместо некоторого вхождения слова $e\hat{\xi}$ [(119), (120)], т. е. так, как в предыдущем случае Y получалось из X. Ввиду этого сделанное в предыдущем случае заключение о соблюдении равенства (16) справедливо сейчас с переменой ролей X и Y, т. е. это равенство соблюдается.

Лемма 5.5, таким образом, доказана.

5.6. *Если X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_3 Y$, то Y — слово 1-го разряда и $[X^{\sim} = [Y^{\sim}$.*

В самом деле, пусть X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_3 Y$. Тогда Y получается из X в результате подстановки слова $\overline{\xi}e$ вместо некоторого вхождения слова $e\xi$ ($\xi \in A_0$) или в результате обратной подстановки [1(1)].

Так как буквы ξ и $\overline{\xi}$ отличны от букв e, f, g, h, эти подстановки не меняют числа вхождений букв e, f, g, h. Поэтому Y, как и X, удовлетворяет условиям **P.1** и **P.7**. Так как буквы ξ и $\overline{\xi}$ отличны от букв c, d и e, эти подстановки не меняют порядок следования букв c, d и e. Слово Y удовлетворяет поэтому, как и X, условиям **P.2**—**P.5**. Оно удовлетворяет, как и X, условию **P.11**, так как буквы ξ, $\overline{\xi}$ и e отличны от m. Таким образом, Y удовлетворяет условиям **P.1**—**P.5**, **P.7** и **P.11**.

Допустим теперь, что Y не содержит ни g, ни h.

Тогда X также не содержит этих букв и, значит, является f-словом. Поэтому, для некоторого слова P в A_1, некоторого слова Q в $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого слова R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ имеет место равенство (1) [4.1, 4.4].

Допустим сперва, что Y получается из X в результате подстановки слова $\overline{\xi}e$ вместо некоторого вхождения слова $e\xi$ ($\xi \in A_0$). Тогда

(134) $$X = Se\xi T,$$

(135) $$Y = S\overline{\xi}eT$$

для некоторых S и T.

Имеем равенство (105) [(1), (134)] и равенство

(136) $$\xi T = Rm \qquad [(1), (134)].$$

Так как $\xi \neq m$, равенство (136) показывает, что T непусто и оканчивается буквой m, т. е. что для некоторого R_1 имеет место (107). Имеем

(137) $$R = \xi R_1 \qquad [(136), (107), \text{I. § 3.9.4}],$$

$$Y = PfQ\overline{\xi}eR_1 m \qquad [(135), (105), (107)]$$

(138) $$= PfQ_1 eR_1 m,$$

где

(139) $$Q_1 = Q\overline{\xi}.$$

Принимая во внимание, что P, как слово в A_1, не содержит букв i, j, k, l и что R_1 есть, как и R, слово в $A_0 \cup \hat{A}_0$ [(137)] и потому не содержит букв f, g, h, i, j, заключаем из равенства (138), что Y удовлетворяет условиям **P.6** и **P.8**. Так как условия **P.9** и **P.10** не относятся к рассматриваемому случаю, Y является словом 1-го разряда и, значит, f-словом [(138)]. Равенство (138) дает для этого f-слова представление типа, рассмотренного в леммах 4.1 и 4.4. Поэтому имеем равенство (111) [5.1], тогда как для $[X^{\sim}$ имеем равенство (11) [(1), 5.1].

Далее имеем равенства (112) [(139), 3(7), 3(4)], (14) [(139), 3(7), 3(3)], (19) [(137), 3(7), 3(3)] и равенства

(140) $$[Q_1^{\iota} = [Q^{\iota}\overline{\xi} \qquad [(139), 3(7), 3(2)],$$

(141) $$[R^{\omega} = \xi [R_1^{\omega} \qquad [(137), 3(7), 3(4)],$$

(142) $$[[Q_1^{\iota\sigma} = [[Q^{\iota\sigma}\xi \qquad [(140), 3(7), 3(5)],$$

$$[[Q_1^{\iota\omega} [R_1^{\omega} = [[Q^{\iota\sigma}\xi [R_1^{\omega} \qquad [(142)]$$

(143) $$= [[Q^{\iota\sigma} [R^{\omega} \qquad [(141)],$$

(144) $$[Q_1 R_1^{\varrho} = [QR^{\varrho} \qquad [3(7), (14), (19)].$$

Из равенств (11), (111), (112), (143) и (144) следует равенство (16).

Аналогично обстоит дело, когда Y не содержит ни g, ни h и получается из X в результате подстановки слова $e\xi$ вместо вхождения слова $\overline{\xi}e$ ($\xi \in A_0$). В этом случае имеем

(145) $$X = S\overline{\xi}eT,$$

(146) $$Y = Se\xi T,$$

где S и T суть некоторые слова. Имеем далее

(147) $$S\overline{\xi} = PfQ \qquad [(1), (145)]$$

и равенство (122) [(1), (145)]. Принимая во внимание, что буква $\bar{\xi}$ алфавита $\bar{A}_0$ отлична от f, усматриваем из равенства (147), что Q оканчивается этой буквой:

(148) $$Q = Q_1 \bar{\xi}$$

для некоторого слова Q_1. Получаем

(149) $$S = PfQ_1 \qquad [(147), (148), \text{I. § 3.9.4}],$$

(150) $$Y = PfQ_1 e\xi Rm \qquad [(146), (149), (122)].$$

Принимая во внимание, что P, как слово в A_1, не содержит букв i, j, k, l и что ξR есть, как и R, слово в $A_0 \cup \hat{A}_0$ и потому не содержит букв f, g, h, i, j, усматриваем из равенства (150), что Y удовлетворяет условиям **P.6** и **P.8**. Так как условия **P.9** и **P.10** не относятся к Y, Y есть слово 1-го разряда и, значит, f-слово [(150)]. X получается из Y в результате подстановки слова $\bar{\xi}e$ вместо вхождения слова $e\xi$ [(145), (146)], т. е. так, как в предыдущем случае Y получалось из X. Ввиду этого сделанное в предыдущем случае заключение о соблюдении равенства (16) справедливо и сейчас с переменой ролей X и Y, т. е. это равенство соблюдается.

Пусть теперь h входит в Y.

Тогда h входит и в X и X есть h-слово. Поэтому равенство (29) имеет место для некоторого слова P в A_1, некоторого слова Q в $A_1 \cup \bar{A}_0 \cup \hat{A}_0$, некоторого слова R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого слова V в A_0 [4.2, 4.5].

Пусть Y получается из X в результате подстановки слова $\bar{\xi}e$ вместо некоторого вхождения слова $e\xi$. Тогда для некоторых S и T имеют место равенства (134) и (135). Имеем равенства (116) [(29), (134)] и (136) [(29), (134)]. Из (136) усматриваем, как выше, что для некоторого R_1 имеет место (107). Получаем далее равенство (137) [(136), (107)] и равенства

$$Y = PdVhQ\bar{\xi}eR_1 m \qquad [(135), (116), (107)]$$

(151) $$= PdVhQ_1 eR_1 m,$$

где Q_1 определяется равенством (139).

Здесь PdV есть, как и P, слово в A_1, так как V — слово в A_0; R_1 есть, как и R, слово в $A_0 \cup \hat{A}_0$ [(137)]. Поэтому PdV не содержит букв i, j, k, l, а R_1 — букв f, g, h, i, j. Следовательно, Y удовлетворяет условиям **P.6** и **P.8**. В силу (151), Y удовлетворяет также условию **P.9**, а условие **P.10** не относится к рассматриваемому случаю, так как Y, содержа оперативную букву h, не содержит оперативной буквы g. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, h-слово [(151)]. Равенство (151) дает для Y представление типа, рассмотренного в леммах 4.2 и 4.5. Поэтому имеем равенство (118) [5.2], тогда как для $\lceil X \urcorner$ имеем равенство (37) [(29), 5.2]. Как в рассмотренном случае, мы убеждаемся в соблюдении равенств (112), (143) и (144), а из равенств (37), (118), (112), (143) и (144) следует равенство (16).

Аналогичным образом обстоит дело в случае, когда h входит в Y и Y получается из X в результате подстановки слова $e\xi$ вместо вхожде-

ния слова $\bar{\xi}e$ ($\xi \in A_0$). В этом случае имеем для некоторых S и T равенства (145) и (146). Имеем далее

(152) $$S\bar{\xi} = PdVhQ$$

и равенство (122) [(29), (145)]. Принимая во внимание, что буква $\bar{\xi}$ алфавита $\overline{A}_0$ отлична от h, усматриваем из равенства (152), что Q оканчивается буквой $\bar{\xi}$, т. е. что для некоторого Q_1 соблюдается равенство (148). Получаем

(153) $$S = PdVhQ_1 \qquad [(152), (148), \text{I. § 3. 9. 4}],$$

(154) $$Y = PdVhQ_1 e\xi Rm \qquad [(146), (153), (122)].$$

Принимая во внимание, что буквы i, j, k, l не входят в слово PdV в алфавите A_1 и что ξR есть, как и R, слово в $A_0 \cup \hat{A}_0$ и потому не содержит букв f, g, h, i, j, усматриваем из равенства (154), что Y удовлетворяет условиям **P. 6** и **P. 8**. Из равенства (154) следует также, что Y удовлетворяет условию **P. 9**. Условие **P. 10** не относится к Y, так как g не входит в Y. Таким образом, Y есть слово 1-го разряда и, значит, h-слово [(154)]. X получается из Y в результате подстановки слова $\bar{\xi}e$ вместо вхождения слова $e\xi$ [(145), (146)], т. е. так, как в предыдущем случае Y получалось из X. Ввиду этого сделанное в предыдущем случае заключение о соблюдении равенства (16) справедливо и сейчас с переменой ролей X и Y; т. е. это равенство соблюдается.

Пусть, наконец, g входит в Y.

Тогда g входит и в X и X есть g-слово. Поэтому равенство (39) имеет место для некоторого слова P в A_1, некоторого слова Q в $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$, некоторого слова R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого слова U в A_5 [4. 3, 4. 6].

Пусть Y получается из X в результате подстановки слова $\bar{\xi}e$ вместо некоторого вхождения слова $e\xi$. Тогда для некоторых S и T имеют место равенства (134) и (135). Имеем равенства (126) [(39), (134)] и (136) [(39), (134)]. Из (136) усматриваем, как выше, что для некоторого R_1 имеет место равенство (107). Получаем далее равенство (137) [(136), (107)] и равенства

$$Y = PgUdQ\bar{\xi}R_1 m \qquad [(135), (126), (107)]$$

(155) $$= PgUdQ_1 eR_1 m,$$

где Q_1 определяется равенством (139).

Здесь P, как слово в A_1, не содержит букв i, j, k, l; R_1 есть, как и R, слово в $A_0 \cup \hat{A}_0$ [(137)] и потому не содержит букв f, g, h, i, j. Следовательно, Y удовлетворяет условиям **P. 6** и **P. 8**. В силу (155), Y удовлетворяет также условию **P. 10**, а условие **P. 9** не относится к рассматриваемому случаю, так как Y, содержа оперативную букву g, не содержит оперативной буквы h. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. Равенство (155) дает для Y представление типа, рассмотренного в леммах 4. 3 и 4. 6. Поэтому имеем равенство (128) [5. 3], тогда как для $[X^{\sim}$ имеем (55) [(39), 5. 3]. Как в рас-

смотренных случаях, мы убеждаемся в соблюдении равенств (112), (143) и (144). Имеем далее

(156) $$[UdQ_1^{\omega} = [UdQ^{\omega} \qquad [(112),\ 3(7)],$$

$$[[UQ_1^{\omega}[R_1^{\omega} = [[U^{\omega}[[Q_1^{\omega}[R_1^{\omega} \qquad [3(7)]$$

$$= [[U^{\omega}[[Q^{\omega}[R^{\omega} \qquad [(143)]$$

(157) $$= [[UQ^{\omega}[R^{\omega} \qquad [3(7)],$$

(158) $$[UQ_1R_1^{\varrho} = [UQR^{\varrho} \qquad [(144),\ 3(7)].$$

Из равенств (55), (128), (156)—(158) следует равенство (16).

Аналогичным образом рассматривается случай, когда g входит в Y и Y получается из X в результате подстановки слова $e\xi$ вместо вхождения слова $\bar{\xi}e$ ($\xi \in A_0$). В этом случае имеем для некоторых S и T равенства (145) и (146). Имеем далее

(159) $$S\bar{\xi} = PgUdQ \qquad [(39),\ (145)]$$

и равенство (122) [(39), (145)]. Принимая во внимание, что буква $\bar{\xi}$ алфавита $\overline{A}_0$ отлична от d, усматриваем из равенства (159), что Q оканчивается буквой $\bar{\xi}$, т. е. что для некоторого Q_1 соблюдается равенство (148). Получаем

(160) $$S = PgUdQ_1 \qquad [(159),\ (148),\ \text{I. § 3.9.4}],$$

(161) $$Y = PgUdQ_1 e\xi Rm \qquad [(146),\ (160),\ (122)].$$

Принимая во внимание, что буквы i, j, k, l не входят в слово P в алфавите A_1 и что ξR есть, как и R, слово в $A_0 \cup \hat{A}_0$, не содержащее букв f, g, h, i, j, усматриваем из равенства (161), что Y удовлетворяет условиям **P. 6** и **P. 8**. Из равенства (161) следует также, что Y удовлетворяет условию **P. 10**. Условие **P. 9** не относится к Y, так как h не входит в Y. Таким образом, Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово [(161)]. X получается из Y в результате подстановки слова $\bar{\xi}e$ вместо вхождения слова $e\xi$ [(145), (146)], т. е. так, как в предыдущем случае Y получалось из X. Ввиду этого сделанное в предыдущем случае заключение о соблюдении равенства (16) справедливо сейчас с переменой ролей X и Y, т. е. это равенство соблюдается.

Лемма, таким образом, доказана.

5.7. *Если X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_4 Y$, то Y — слово 1-го разряда и $[X^{\sim} = [Y^{\sim}$.*

В самом деле, пусть X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_4 Y$. Тогда Y получается из X в результате подстановки слова $\hat{\xi}m$ вместо вхождения слова ξm ($\xi \in A_0$) или в результате обратного действия. Как в доказательстве леммы 5.6, убеждаемся в том, что Y удовлетворяет условиям **P. 1—P. 5** и **P. 7**.

Допустим теперь, что Y не содержит ни g, ни h. Тогда X также не содержит этих букв и, значит, является f-словом. Поэтому для

некоторого слова P в A_1, некоторого слова Q в $A_1 \cup \bar{A}_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого слова R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ имеет место равенство (1) [4.1, 4.4].

Допустим, что Y получается из X в результате подстановки слова $\hat{\xi}m$ вместо вхождения слова ξm ($\xi \in A_0$). Тогда

(162) $$X = S\xi mT,$$

(163) $$Y = S\hat{\xi}mT$$

для некоторых S и T. В силу (162) и условия **P. 11** для X, имеем

(164) $$T = \Lambda,$$

откуда

(165) $$X = S\xi m \qquad [(162), (164)],$$

(166) $$Y = S\hat{\xi}m \qquad [(163), (164)].$$

Имеем далее

(167) $$S\xi = PfQeR \qquad [(1), (165), \text{I. § 3.9.4}],$$

откуда, принимая во внимание, что $\xi \neq e$, заключаем, что R оканчивается буквой ξ, т. е. что

(168) $$R = W\xi$$

для некоторого W. Имеем теперь

(169) $$S = PfQeW \qquad [(167), (168), \text{I. § 3.9.4}],$$

$$Y = PfQeW\hat{\xi}m \qquad [(166), (169)]$$

(170) $$= PfQeR_1 m,$$

где

(171) $$R_1 = W\hat{\xi}.$$

Из равенств (168) и (171) следует, что R_1 есть, как и R, слово в алфавите $A_0 \cup \hat{A}_0$. Принимая это во внимание, а также учитывая, что P есть слово в A_1, заключаем из равенства (170), что Y удовлетворяет условиям **P. 6** и **P. 8**. Так как P, Q и R_1 не содержат m, из этого равенства следует также, что Y удовлетворяет условию **P. 11**. Условия **P. 9** и **P. 10** не относятся к рассматриваемому случаю, так как Y не содержит букв g и h. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, f-слово [(170)]. Равенство (170) дает для Y представление типа, рассмотренного в леммах 4.1 и 4.4. Поэтому имеем для $[Y^{\sim}$ равенство (17) [5.1], тогда как для $[X^{\sim}$ имеем равенство (11) [(1), 5.1].

Имеем далее

(172) $[R_1^\omega = [W^\omega$ [(171), 3(7), 3(4)],

$[R^\omega = [W^\omega \xi$ [(168), 3(7), 3(4)]

(173) $= [R_1^\omega \xi$ [(172)],

(174) $[R^p = [W^p$ [(168), 3(7), 3(3)],

$[R_1^p = [W^p \hat{\xi}$ [(171), 3(7), 3(3)]

(175) $= [R^p \hat{\xi}$ [(174)],

$[QR_1^p = [Q^p [R_1^p$ [3(7)]

$= [Q^p [R^p \hat{\xi}$ [(175)]

(176) $= [QR^p \hat{\xi}$ [3(7)],

(177) $[[QR_1^{p\smile} = \hat{\xi} [[QR^{p\smile}$ [(176), I. § 3.12 (4), I. § 3.12 (2)],

(178) $[[[QR_1^{p\smile\sigma} = \xi [[[QR^{p\smile\sigma}$ [(177), 3(7), 3(6)],

$[R_1^\omega [[[QR_1^{p\smile\sigma} = [R_1^\omega \xi [[[QR^{p\smile\sigma}$ [(178)]

(179) $= [R^\omega [[[QR^{p\smile\sigma}$ [(173)].

Из равенств (11), (17) и (179) следует равенство (16).

Аналогичным образом рассматривается случай, когда ни g, ни h не входят в Y и Y получается из X в результате подстановки слова ξm вместо вхождения слова $\hat{\xi} m$ ($\xi \in A_0$). В этом случае

(180) $X = S\hat{\xi} m T$,

(181) $Y = S\xi m T$

для некоторых S и T. В силу (180) и условия **P. 11** для X, имеем равенство (164), откуда

(182) $X = S\hat{\xi} m$ [(180), (164)],

(183) $Y = S\xi m$ [(181), (164)].

Имеем далее

(184) $S\hat{\xi} = PfQeR$ [(1), (182), I. § 3.9.4],

откуда, принимая во внимание, что $\hat{\xi} \neq e$, заключаем, что R оканчивается буквой $\hat{\xi}$, т. е. что

(185) $R = W\hat{\xi}$

для некоторого W. Имеем теперь равенство (169) [(184), (185), I. § 3.9.4] и получаем

(186) $$Y = PfQeW\xi m \qquad [(183), (169)].$$

Из равенства (185) следует, что $W\xi$ есть, как и R, слово в $A_0 \cup \hat{A}_0$. Принимая это во внимание, а также учитывая, что P есть слово в A_1, усматриваем из равенства (186), что Y удовлетворяет условиям **P.6** и **P.8**. Так как P, Q и $W\xi$ не содержат m, из этого равенства следует также, что Y удовлетворяет условию **P.11**. Условия **P.9** и **P.10** не относятся к Y, так как ни g, ни h не входит в Y. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, f-слово [(186)]. X получается из Y так, как в предыдущем случае Y получалось из X — в результате подстановки слова $\hat{\xi}m$ вместо вхождения слова ξm. Поэтому сделанное в предыдущем случае заключение о соблюдении равенства (16) справедливо сейчас с переменой ролей X и Y, т. е. это равенство соблюдается.

Пусть теперь h входит в Y. Тогда h входит в X и, значит, X является h-словом. Поэтому для некоторого слова P в A_1, некоторого слова Q в $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$, некоторого слова R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого слова V в A_0 имеет место равенство (29) [4.2, 4.5].

Допустим, что Y получается из X в результате подстановки слова $\hat{\xi}m$ вместо некоторого вхождения слова ξm ($\xi \subset A_0$). Тогда для некоторых S и T имеют место равенства (162) и (163). Как прежде, получаем отсюда равенства (164)—(166). Имеем далее

(187) $$S\xi = PdVhQeR \qquad [(29), (165), \text{I. § 3.9.4}],$$

откуда заключаем, что R оканчивается буквой ξ, т. е. что (168) имеет место для некоторого W. Имеем

(188) $$S = PdVhQeW \qquad [(187), (168), \text{I. § 3.9.4}],$$

$$Y = PdVhQeW\hat{\xi}m \qquad [(166), (188)]$$

(189) $$= PdVhQeR_1m,$$

где R_1 определяется равенством (171).

Из равенств (168), (171) и (189) заключаем, аналогично предыдущему, что Y удовлетворяет условиям **P.6**, **P.8**, **P.11** и **P.9**. Условие же **P.10** не относится к рассматриваемому случаю, так как g не входит в Y. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, h-слово. Равенство (189) дает для Y представление типа, рассмотренного в леммах 4.2 и 4.5. Поэтому имеем для $[Y^{\sim}$ равенство (38) [5.2], тогда как для $[X^{\sim}$ имеем (37) [(29), 5.2]. Далее, в точности как выше, получаем равенства (172)—(179). Из равенств (37), (38) и (179) следует равенство (16).

Аналогично обстоит дело в случае, когда h входит в Y и Y получается из X в результате подстановки слова ξm вместо вхождения слова $\hat{\xi}m$ ($\xi \in A_0$). Доказательство того, что в этом случае Y есть слово 1-го разряда и что тогда имеет место (16), мы предоставляем читателю.

Пусть, наконец, g входит в Y.

Тогда g входит в X и, значит, X есть g-слово. Поэтому для некоторого P в A_1, некоторого Q в $A_1 \cup \bar{A}_0 \cup \hat{A}_0$, некоторого R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого U в A_5 имеет место равенство (39) [4.3, 4.6].

Допустим, что Y получается из X в результате подстановки слова $\hat{\xi}m$ вместо некоторого вхождения слова ξm ($\xi \in A_r$). Тогда для некоторых S и T имеют место равенства (162) и (163), из которых, как выше, получаем равенства (164)—(166). Имеем

(190) $$S\xi = PgUdQcR \qquad [(39), (165), \text{I. § 3.9.4}],$$

откуда заключаем, что (168) имеет место для некоторого W. Имеем далее

(191) $$S = PgUdQeW \qquad [(190), (168), \text{I. § 3.9.4}]$$

$$Y = PgUdQeW\hat{\xi}m \qquad [(166), (191)]$$

(192) $$= PgUdQcR_1m,$$

где R_1 определяется равенством (171).

Из равенств (168), (171) и (192) усматриваем, аналогично предыдущему, что Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. Равенство (192) дает для Y представление типа, рассматриваемого в леммах 4.3 и 4.6. Поэтому имеем (85) [5.3], тогда как для $[X^{\sim}$ имеем (55) [(39), 5.3]. Далее, в точности как в предыдущих случаях, получаем равенства (172)—(175), после чего получаем

(193) $$[UQR_1^{\rho} = [UQR^{\rho}\hat{\xi} \qquad [3(7), (175)],$$

(194) $$[[UQR_1^{\rho\sim} = \hat{\xi}[[UQR^{\rho\sim} \qquad [(193), \text{I.}\S 3.12(4), \text{I.}\S 3.12(2)],$$

(195) $$[[[UQR_1^{\rho\sim\sigma} = \xi[[[UQR^{\rho\sim\sigma} \qquad [(194), 3(7), 3(6)],$$

(196) $$[R_1^{\omega}[[[UQR_1^{\rho\sim\sigma} = [R^{\omega}[[[UQR^{\rho\sim\sigma} \qquad [(195), (173)].$$

Из равенств (55), (85) и (196) следует равенство (16).

Аналогичным образом рассматривается случай, когда g входит в Y и Y получается из X в результате подстановки слова ξm вместо вхождения слова $\hat{\xi}m$ ($\xi \in A_0$). Доказательство того, что в этом случае Y есть слово 1-го разряда, удовлетворяющее равенству (16), мы предоставляем читателю.

Лемма, таким образом, доказана.

5.8. *Если X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_5 Y$, то Y — слово 1-го разряда и $[X^{\sim} = [Y^{\sim}$.*

В самом деле, пусть X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_5 Y$. Тогда Y получается из X в результате подстановки слова ξh вместо вхождения слова $h\xi\bar{\xi}$ или в результате подстановки слова $h\bar{\xi}\xi$ вместо вхождения слова ξh ($\xi \in A_0$) [1 (1)].

Так как буква h входит по одному разу в слова ξh и $h\bar{\xi}\xi$, а буквы c, d, e, f, g, m совсем не входят в эти слова, Y, как и X, удовлетворяет условиям **P.1—P.5, P.7 и P.11.**

Буква h входит в X, так как в X входит либо $h\xi\bar{\xi}$, либо ξh. Следовательно, X есть h-слово и для некоторого P в A_1, некоторого Q в $A_1 \cup \bar{A}_0 \cup \hat{A}_0$, некоторого R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого V в A_0 имеет место равенство (29) [4.2, 4.5].

Допустим теперь, что Y получается из X в результате подстановки слова ξh вместо вхождения слова $h\xi\bar{\xi}$ ($\xi \in A_0$). Тогда

(197) $$X = Sh\xi\bar{\xi}T,$$

(198) $$Y = S\xi hT$$

для некоторых S и T.

Принимая во внимание, что h входит в X один раз, заключаем, что

(199) $$S = PdV \qquad [(29), (197)],$$

(200) $$\xi\bar{\xi}T = QeRm \qquad [(29), (197)].$$

В силу (200), имеет место одно из двух: слово $\xi\bar{\xi}$ начинается словом Qe или слово Q начинается словом $\xi\bar{\xi}$ [I. § 3.10.9]. Первое, однако, невозможно, так как $e \neq \xi$ и $e \neq \bar{\xi}$. Поэтому Q начинается словом $\xi\bar{\xi}$, т. е.

(201) $$Q = \xi\bar{\xi}Q_1$$

для некоторого слова Q_1.

Имеем далее

(202) $$T = Q_1eRm \qquad [(200), (201), \text{I. § 3.9.3}],$$

$$Y = PdV\xi hQ_1eRm \qquad [(198), (199), (202)]$$

(203) $$= PdV_1hQ_1eRm,$$

где

(204) $$V_1 = V\xi.$$

Согласно (204), V_1 есть, как и V, слово в A_0, откуда следует, что PdV_1 есть, как и P, слово в A_1 и, значит, не содержит букв i, j, k, l. Учитывая, кроме того, что R, как слово в $A_0 \cup \hat{A}_0$, не содержит букв f, g, h, i, j, заключаем из равенства (203), что Y удовлетворяет условиям **P.6** и **P.8**. Из равенства (203) следует также, что Y удовлетворяет условию **P.9**. Условие же **P.10** не относится к делу, так как g не входит в Y. Таким образом, Y есть слово 1-го разряда и, значит, h-слово. Равенство (203) дает для Y представление типа, рассматриваемого в леммах 4.2 и 4.5. Поэтому

(205) $$[Y^{\sim} = PdV_1[Q_1^{\omega}eV_1[[Q_1^{\sigma}[R^{\varpi}[[[Q_1R^{\rho\sim\sigma} \qquad [5.2],$$

тогда как для $[X^{\sim}$ имеем (37) [(29), 5.2].

Имеем далее

(206) $[Q^{\omega}=\xi[Q_1^{\omega}$ [(201), 3(7), 3(4)],

(207) $[Q^{\iota}=\bar{\xi}[Q_1^{\iota}$ [(201), 3(7), 3(2)],

(208) $[Q^{p}=[Q_1^{p}$ [(201), 3(7), 3(3)],

$V_1[Q_1^{\omega}=V\xi[Q_1^{\omega}$ [(204)]

(209) $=V[Q^{\omega}$ [(206)],

(210) $[[Q^{\iota\jmath}=\xi[[Q_1^{\iota\jmath}$ [(207), 3(7), 3(5)],

$V_1[[Q_1^{\iota\jmath}=V\xi[[Q_1^{\iota\jmath}$ [(204)]

(211) $=V[[Q^{\iota\jmath}$ [(210)],

(212) $[Q_1R^{p}=[QR^{p}$ [(208), 3(7)].

Из равенств (37), (205), (209), (211) и (212) следует равенство (16).

Аналогичным образом рассматривается случай, когда Y получается из X в результате подстановки слова $h\xi\bar{\xi}$ вместо вхождения слова ξh ($\xi\in A_0$). В этом случае

(213) $X=S\xi hT,$

(214) $Y=Sh\xi\bar{\xi}T$

для некоторых S и T.

Принимая во внимание, что h входит в X один раз, заключаем, что

(215) $S\xi=PdV$ [(29), (213)],

(216) $T=QeRm$ [(29), (213)].

Принимая во внимание, что $\xi\neq d$, усматриваем из равенства (215), что слово V оканчивается буквой ξ, т. е. что

(217) $V=V_1\xi$

для некоторого V_1. Имеем далее

(218) $S=PdV_1$ [(215), (217), I. § 3.9.4],

(219) $Y=PdV_1h\xi\bar{\xi}QeRm$ [(214), (218), (216)].

Согласно (217), V_1 есть, как и V, слово в A_0, откуда следует, что PdV_1 есть, как и P, слово в A_1 и, значит, не содержит букв i, j, k, l. Учитывая, кроме того, что R, как слово в $A_0\cup\hat{A}_0$, не содержит букв f, g, h, i, j, заключаем из равенства (219), что Y удовлетворяет условиям P.6 и P.8. Из равенства (219) следует также, что Y

удовлетворяет условию **P. 9**. Условие **P. 10** не относится к делу, так как g не входут в Y. Таким образом, Y есть слово 1-го разряда и, значит, h-слово. X получается из Y так, как в предыдущем случае Y получалось из X — посредством подстановки слова ξh вместо некоторого вхождения слова $h\bar{\xi}\bar{\xi}$ [(213), (214)]. Поэтому сделанное в предыдущем случае заключение о соблюдении равенства (16) справедливо и теперь с переменой ролей X и Y, т. е. это равенство соблюдается.

Лемма, таким образом, доказана.

5.9. *Если X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_6 Y$, то Y — слово 1-го разряда и $[X^{\sim} = [Y^{\sim}$.*

В самом деле, пусть X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_6 Y$. Тогда Y получается из X в результате подстановки слова $g\bar{\xi}$ вместо вхождения слова $\xi g\hat{\bar{\xi}}$ или в результате подстановки слова $\xi g\hat{\bar{\xi}}$ вместо вхождения слова $g\bar{\xi}$ $(\xi \in A_0)$ [1 (1)].

Так как буква g входит по одному разу в слова $g\xi$ и $\xi g\hat{\xi}$, а буквы c, d, e, f, h, m совсем не входят в эти слова, Y, как и X, удовлетворяет условиям **P. 1**—**P. 5**, **P. 7** и **P. 11**.

Буква g входит в X, так как в X входит либо $\xi g\hat{\bar{\xi}}$, либо $g\bar{\xi}$. Следовательно, X есть g-слово и для некоторого P в A_1, некоторого Q в $A_1 \cup \bar{A}_0 \cup \hat{A}_0$, некоторого R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого U в A_5 имеет место равенство (39) [4.3, 4.6].

Допустим теперь, что Y получается из X в результате подстановки слова $g\bar{\xi}$ вместо вхождения слова $\xi g\hat{\bar{\xi}}$. Тогда

(220) $$X = S\xi g\hat{\bar{\xi}}T,$$

(221) $$Y = Sg\xi T$$

для некоторых S и T.

Принимая во внимание, что g входит в X один раз, заключаем, что

(222) $$S\xi = P \qquad [(39), (220)],$$

(223) $$\hat{\bar{\xi}}T = UdQeRm \qquad [(39), (220)].$$

Принимая во внимание, что $\hat{\bar{\xi}} \neq d$, заключаем из равенства (223), что U начинается буквой $\hat{\bar{\xi}}$, т. е. что

(224) $$U = \hat{\bar{\xi}}W$$

для некоторого W. Имеем далее

(225) $$T = WdQeRm \quad [(223), (224), \text{I. § 3.9.3}],$$

$$Y = Sg\xi WdQeRm \qquad [(221), (225)]$$

(226) $$= SgU_1dQeRm,$$

где

(227) $$U_1 = \xi W.$$

Согласно (222), S есть, как и P, слово в A_1 и, значит, не содержит букв i, j, k, l. Принимая, кроме того, во внимание, что R не содержит букв f, g, h, i, j, усматриваем из равенства (226), что Y удовлетворяет условиям **P.6** и **P.8**. Согласно (224) и (227), U_1 есть, как и U, слово в A_5. Равенство (226) показывает поэтому, что Y удовлетворяет условию **P.10**. Условие **P.9** не относится к делу, так как Y не содержит букву h. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. Равенство (226) дает для Y представление типа, рассматриваемого в леммах 4.3 и 4.6. Поэтому

(228) $$[Y^{\frown} = S[U_1 dQ^{\omega} e[[U_1 Q^{\iota}[R^{\omega}[[[U_1 QR^{\rho\frown\sigma}[U_1^{\omega} \qquad [(5.3)],$$

тогда как для $[X^{\frown}$ имеем равенство (55) [(39), 5.3].

Имеем далее

(229) $$[U^{\omega} = [W^{\omega} \qquad [(224), 3(7), 3(4)],$$

$$[U_1^{\omega} = \xi[W^{\omega} \qquad [(227), 3(7), 3(4)]$$

(230) $$= \xi[U^{\omega} \qquad [(229)],$$

$$[U_1^{\iota} = [W^{\iota} \qquad [(227), 3(7), 3(2)]$$

(231) $$= [U^{\iota} \qquad [(224), 3(7), 3(2)],$$

(232) $$[U_1^{\rho} = [W^{\rho} \qquad [(227), 3(7), 3(3)],$$

$$[U^{\rho} = \hat{\xi}[W^{\rho} \qquad [(224), 3(7), 3(3)]$$

(233) $$= \hat{\xi}[U_1^{\rho} \qquad [(232)],$$

$$[U_1 dQ^{\omega} = [U_1^{\omega}[dQ^{\omega} \qquad [3(7)]$$

$$= \xi[U^{\omega}[dQ^{\omega} \qquad [(230)]$$

(234) $$= \xi[UdQ^{\omega} \qquad [3(7)],$$

$$S[U_1 dQ^{\omega} = S\xi[UdQ^{\omega} \qquad [(234)]$$

(235) $$= P[UdQ^{\omega} \qquad [(222)],$$

(236) $$[U_1 Q^{\iota} = [UQ^{\iota} \qquad [(231), 3(7)],$$

(237) $$[UQR^{\rho} = \hat{\xi}[U_1 QR^{\rho} \qquad [(233), 3(7)],$$

(238) $$[[UQR^{\rho\frown} = [[U_1 QR^{\rho\frown}\hat{\xi} \qquad [(237), \text{I. § 3.12 (4)}, \text{I. § 3.12 (2)}],$$

(239) $$[[[UQR^{\rho\frown\sigma} = [[[U_1 QR^{\rho\frown\sigma}\xi \qquad [(238), 3(7), 3(6)],$$

$$[[[U_1 QR^{\rho\frown\sigma}[U_1^{\omega} = [[[U_1 QR^{\rho\frown\sigma}\xi[U^{\omega} \qquad [(230)]$$

(240) $$= [[[UQR^{\rho\frown\sigma}[U^{\omega} \qquad [(239)].$$

Из равенств (55), (228), (235), (236) и (240) следует равенство (16).

Аналогичным образом обстоит дело, когда Y получается из X в результате подстановки слова $\xi g\xi\hat{}$ вместо вхождения слова $g\xi$ ($\xi \in A_0$). В этом случае

(241) $$X = Sg\xi T,$$

(242) $$Y = S\xi g\xi\hat{}T$$

для некоторых S и T.

Принимая во внимание, что g входит в X один раз, заключаем, что

(243) $$S = P \qquad [(39), (241)],$$

(244) $$\xi T = UdQeRm \qquad [(39), (241)].$$

Принимая во внимание, что $\xi \neq d$, усматриваем из равенства (244), что U начинается буквой ξ, т. е. что

(245) $$U = \xi W$$

для некоторого W. Имеем далее

(246) $$T = WdQeRm \quad [(244), (245), \text{I. § 3. 9. 3}],$$

(247) $$Y = P\xi g\xi\hat{}WdQeRm \quad [(242), (243), (246)].$$

Здесь $P\xi$ есть, как и P, слово в A_1 и, значит, не содержит букв i, j, k, l; R не содержит букв f, g, h, i, j. Учитывая это, усматриваем из равенства (247), что Y удовлетворяет условиям **Р. 6** и **Р. 8**. Согласно (245), $\xi\hat{}W$ есть, как и U, слово в A_5. Усматриваем поэтому из равенства (247), что Y удовлетворяет условию **Р. 10**. Наконец, условие **Р. 9** не относится к делу, так как h не входит в Y. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. X получается из Y так, как в предыдущем случае Y получалось из X, — посредством подстановки слова $g\xi$ вместо вхождения слова $\xi g\xi\hat{}$ [(241), (242)]. Поэтому сделанное в предыдущем случае заключение о соблюдении равенства (16) справедливо и теперь, с переменой ролей X и Y, т. е. это равенство соблюдается.

Лемма, таким образом, доказана.

5. 10 *Если X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_7 Y$, то Y — слово 1-го разряда и $[X^{\sim} = [Y^{\sim}$.*

В самом деле, пусть X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_7 Y$. Тогда Y получается из X в результате подстановки слова dh вместо вхождения слова df или в результате подстановки слова df вместо вхождения слова dh.

Так как слова df и dh содержат по одному вхождению оперативной буквы, по одному вхождению буквы d и совсем не содержат букв c, e, i, j, k, l, m, слово Y, как и X, удовлетворяет условиям **Р. 1—Р. 8** и **Р. 11**.

Допустим сперва, что Y получается из X в результате подстановки слова dh вместо вхождения слова df.

Тогда X есть f-слово, и поэтому равенство (1) имеет место для некоторого P в A_1, некоторого Q в $A_1 \cup \bar{A}_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ [4.1, 4.4]. С другой стороны,

(248) $$X = SdfT,$$

(249) $$Y = SdhT$$

для некоторых S и T.

Так как f входит в X лишь один раз, имеем

(250) $$Sd = P \qquad [(1), (248)],$$

(251) $$T = QeRm \qquad [(1), (248)],$$

(252) $$Y = SdhQeRm \qquad [(249), (251)].$$

Равенство (252) показывает, что Y удовлетворяет условию **P. 9**: в Y входит слово dh, имеющее вид dVh, где V — слово в A_0. Наконец, условие **P. 10** не имеет отношения к делу, так как Y не содержит оперативной буквы g. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, h-слово. Равенство (252) дает для Y представление типа, рассматриваемого в леммах 4.2 и 4.5 с $V = \Lambda$. Поэтому

$$[Y^{\sim} = Sd[Q^{\omega}e[[Q^{\omega}[R^{\omega}[[[QR^{\omega}{}^{\sim\omega} \qquad [5.2]$$

$$= P[Q^{\omega}e[[Q^{\omega}[R^{\omega}[[[QR^{\omega}{}^{\sim\omega} \qquad [(250)]$$

$$= [X^{\sim} \qquad [(1), 5.1].$$

Допустим теперь, что Y получается из X в результате подстановки слова df вместо вхождения слова dh. Тогда Y содержит f и потому не содержит ни g, ни h, согласно условию **P. 7**, которое, как мы знаем, выполнено для Y. Поэтому, условия **P. 9** и **P. 10** не относятся к делу. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, f-слово. X получается из Y так, как в предыдущем случае Y получалось из X, — посредством подстановки слова dh вместо вхождения слова df. Поэтому сделанное в предыдущем случае заключение о соблюдении равенства (16) справедливо и теперь, с переменой ролей X и Y, т. е. это равенство соблюдается.

Таким образом, в обоих случаях Y есть слово 1-го разряда и $[X^{\sim} = [Y^{\sim}$, что и требовалось доказать.

5.11. *Если X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_8 Y$, то Y — слово 1-го разряда и $[X^{\sim} = [Y^{\sim}$.*

В самом деле, пусть X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_8 Y$. Тогда Y получается из X в результате подстановки слова gd вместо вхождения слова fd или в результате подстановки слова fd вместо вхождения слова gd.

Так как слова fd и gd содержат по одному вхождению оперативной буквы, по одному вхождению буквы d и совсем не содержат букв c, e, i, j, k, l, m, слово Y, как и X, удовлетворяет условиям **P. 1**—**P. 8** и **P. 11**.

Допустим сперва, что Y получается из X в результате подстановки слова gd вместо вхождения слова fd.

Тогда X есть f-слово, и потому равенство (1) имеет место для некоторого P в A_1, некоторого Q в $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$ и некоторого R в $A_0 \cup \hat{A}_0$ [4.1, 4.4]. Вместе с тем

(253) $$X = SfdT,$$

(254) $$Y = SgdT$$

для некоторых S и T.

Так как f входит в X лишь один раз, имеем

(255) $$S = P \qquad [(1), (253)],$$

(256) $$dT = QeRm \qquad [(1), (253)].$$

Из равенства (256) следует, что Q начинается буквой d, т. е. что

(257) $$Q = dQ_1$$

для некоторого Q_1. Имеем далее

(258) $$T = Q_1eRm \qquad [(256), (257), \text{I. § 3.9.3}],$$

(259) $$Y = PgdQ_1eRm \qquad [(254), (255), (258)].$$

Равенство (259) показывает, что Y удовлетворяет условию **P.10**: Y содержит слово gd вида gUd, где U — слово в A_5. Условие **P.9** не относится к делу, так как Y не содержит оперативной буквы h. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово. Равенство (259) дает для Y представление типа, рассматриваемого в леммах 4.3 и 4.6 с $U = \Lambda$. Поэтому

(260) $$[Y^{\sim} = P[dQ_1^{\omega}e[[Q_1^{\omega}[R^{\omega}[[[Q_1R^{\rho\sim}$$ [5.3],

тогда как для $[X^{\sim}$ имеем равенство (11) [(1), 5.1].

Имеем

(261) $$[Q^{\iota} = [Q_1^{\iota} \qquad [(257), 3(7), 3(2)],$$

(262) $$[Q^{\rho} = [Q_1^{\rho} \qquad [(257), 3(7), 3(3)],$$

(263) $$[QR^{\rho} = [Q_1R^{\rho} \qquad [(262), 3(7)].$$

Из равенств (11), (260), (257), (261) и (263) следует равенство (16).

Пусть теперь Y получается из X в результате подстановки слова fd вместо вхождения слова gd. Тогда Y содержит оперативную букву f и потому не содержит оперативных букв g и h.

Условия **P.9** и **P.10** поэтому отпадают в применении к Y. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, f-слово. X получается из Y так, как в предыдущем случае Y получалось из X, — в результате подстановки слова gd вместо вхождения слова fd. Поэтому сделанное в предыдущем случае заключение о соблюдении равенства (16) справедливо сейчас с переменой ролей X и Y, т. е. это равенство соблюдается.

Таким образом, в обоих случаях Y есть слово 1-го разряда и $[X^{\sim} = [Y^{\sim}$, что и требовалось доказать.

5.12. *Если X есть слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_9 Y$, то Y есть слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_0 : [X^{\sim}] \perp [Y^{\sim}]$.*

В самом деле, пусть X — слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp_9 Y$. Тогда Y получается из X в результате подстановки слова cg вместо вхождения слова hc или в результате подстановки слова hc вместо вхождения слова cg.

Так как слова hc и cg содержат по одному вхождению оперативной буквы, по одному вхождению буквы c и совсем не содержат букв d, e, i, j, k, l, m, слово Y удовлетворяет, как и X, условиям **Р. 1**—**Р. 8** и **Р. 11**.

Допустим сперва, что Y получается из X в результате подстановки слова cg вместо вхождения слова hc.

Тогда X есть h-слово, и потому равенство (29) имеет место для некоторого P в A_1, некоторого Q в $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \widehat{A}_0$, некоторого R в $A_0 \cup \widehat{A}$ и некоторого V в A_0 [4.2, 4.5]. Вместе с тем

(264) $$X = ShcT,$$

(265) $$Y = ScgT$$

для некоторых S и T.

Так как h входит в X лишь один раз, имеют место равенство (199) [(29), (264)] и равенство

(266) $$cT = QeRm \qquad [(29), (264)].$$

Из равенства (266) следует, что Q начинается буквой c, т. е. что

(267) $$Q = cW$$

для некоторого W.

Согласно (264), $Sh*c*T$ есть вхождение буквы c в X. Согласно условию **Р. 4** для слова 1-го разряда X, это вхождение предшествует некоторому вхождению буквы d. Поэтому d входит в правое крыло T вхождения $Sh*c*T$. Пусть

$$U*d*Z$$

является первым вхождением буквы d в T. Тогда d не входит в U,

(268) $$T = UdZ,$$

(269) $$X = ShcUdZ \qquad [(264), (268)].$$

Если бы буква c входила в слово U, мы имели бы

$$U = U_1cU_2$$

для некоторых U_1 и U_2, не содержащих d. Отсюда следовало бы, в силу (269), что

$$Sh*c*U_1cU_2dZ$$

и

$$ShcU_1*c*U_2dZ$$

суть два вхождения буквы c в X, между которыми нет вхождений буквы d. Так как это противоречит условию **P. 5** для X, буква c не входит в U.

Имеем далее

(270) $T = WeRm$ [(266), (267), I. § 3. 9. 3].

В силу (268) и (270), слова dZ и eRm суть концы одного и того же слова. При этом слово eRm в алфавите $A_0 \cup \hat{A}_0 \cup \{e, m\}$ не содержит буквы d, не принадлежащей этому алфавиту. Поэтому слово eRm не может оканчиваться словом dZ. Следовательно, слово Z оканчивается словом eRm [I. § 3. 10. 10], т. е.

(271) $Z = Q_1 eRm$

для некоторого Q_1.

Имеем

(272) $T = UdQ_1 eRm$ [(268), (271)],

$Y = PdVcgUdQ_1 eRm$ [(265), (199), (272)]

(273) $= P_1 gUdQ_1 eRm,$

где

(274) $P_1 = PdVc.$

Кроме того,

(275) $W = UdQ_1$ [(270), (272), I. § 3. 9. 4],

(276) $Q = cUdQ_1$ [(267), (275)],

откуда следует, что U есть, как и Q, слово в $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$. Так как U не содержит при этом букв c и d, оно есть даже слово в алфавите $A_0 \cup \overline{A}_0 \cup \hat{A}_0$, т. е. в A_5. Принимая это во внимание, усматриваем из равенства (273), что Y удовлетворяет условию **P. 10**. Условие **P. 9** отпадает в применении к Y, так как h не входит в Y. Следовательно, Y есть слово 1-го разряда и, значит, g-слово [(273)]. Равенство (273) дает для Y представление типа, рассматриваемого в леммах 4. 3 и 4. 6. Поэтому

(277) $[Y^{\sim} = P_1 [UdQ_1^{\omega} e [[UQ_1^{\sigma} [R^{\omega} [[[UQ_1 R^{\rho\sim\sigma} [U^{\omega}$ [5. 3],

тогда как для $[X^{\sim}$ имеем равенство (37) [(29), 5. 2].

Имеем далее

$PdV[Q^{\omega} = PdV[cUdQ_1^{\omega}$ [(276)]

(278) $= PdVc[U^{\omega} d[Q_1^{\omega}$ [3 (7), 3 (4)],

(279) $P_1[UdQ_1^{\omega} = PdVc[U^{\omega} d[Q_1^{\omega}$ [(274), 3 (7), 3 (4)],

$[Q^{\iota} = [U^{\iota}[Q_1^{\iota}$ [(276), 3 (7), 3 (2)]

(280) $= [UQ_1^{\iota}$ [3 (7)],

(281) $[Q^{\rho} = [UQ_1^{\rho}$ [(276), 3 (7), 3 (3)],

(282) $[QR^{\rho} = [UQ_1R^{\rho}$ [(281), 3 (7)],

(283) $[X^{\sim} = PdVc[U^{\omega}d[Q_1^{\omega}eV[[Q^{\iota}[R^{\omega}[[[QR^{\rho\sim}$ [(37), (278)],

(284) $[Y^{\sim} = PdVc[U^{\omega}d[Q_1^{\omega}e[[Q^{\iota}[R^{\omega}[[[QR^{\rho\sim\sigma}[U^{\omega}$

[(277), (279), (280), (282)].

Здесь $[U^{\omega}$ — проекция слова U на алфавит $\{a, b, c, d\}$ — есть слово в алфавите A_0, так как буквы c и d не входят в U. V также есть слово в A_0. P — слово в A_1. $[Q_1^{\omega}$ — также слово в A_1. Наконец,

(285) $[[Q^{\iota\sigma}[R^{\omega}[[[QR^{\rho\sim\sigma}$

является словом в A_0. В самом деле, $[Q^{\iota}$ есть слово в $\bar{A}_0$ и потому $[[Q^{\iota\sigma}$ — слово в A_0; $[R^{\omega}$ есть слово в A_0, так как R — слово в $A_0 \cup \hat{A}_0$; $[QR^{\rho}$ есть слово в $\hat{A}_0$ так же, как и $[[QR^{\rho\sim}$, в силу чего $[[[QR^{\rho\sim\sigma}$ есть слово в A_0. Мы имеем поэтому непосредственную выводимость § 5.1 (4), где роль P играет наше теперешнее слово P, роль Q играет V, роль R — $[U^{\omega}$, роль S — $[Q_1^{\omega}$ и роль T — слово (285). В силу (283) и (284), имеем, следовательно,

(286) $\mathfrak{S}_0 : [X^{\sim} \perp [Y^{\sim}$.

Пусть теперь Y получается из X в результате подстановки слова hc вместо вхождения слова cg. Тогда

(287) $X = ScgT$,

(288) $Y = ShcT$

для некоторых S и T.

Согласно (287), $S*c*gT$ есть вхождение буквы c в X. Так как X удовлетворяет условию **Р. 3**, этому вхождению предшествует вхождение буквы d. Поэтому d входит в S. Пусть

$$P_1*d*V$$

является последним вхождением буквы d в S. Тогда d не входит в слово V и

(289) $S = P_1dV$.

Если бы буква c входила в V, мы имели бы

$$V = V_1cV_2$$

для некоторых V_1 и V_2, не содержащих d. Отсюда следовало бы в силу (287) и (289), что

$$P_1dV_1*c*V_2cgT$$

и

$$P_1dV_1cV_2*c*gT$$

суть два вхождения буквы c в X, между которыми нет вхождений буквы d. Так как это противоречит условию **Р. 5** для X, буква c не входит в V.

Слово 1-го разряда X, содержащее букву g [(287)], является g-словом, и потому имеет место равенство (39), где P — слово в A_1, Q — слово в $A_1 \cup \overline{A}_0 \cup \widehat{A}_0$, R — слово в $A_0 \cup \widehat{A}_0$ и U — слово в A_5 [4.3, 4.6].

Так как g входит в X лишь один раз, имеем

(290) $$T = UdQeRm \qquad [(39), (287)],$$

$$P = Sc \qquad [(39), (287)]$$

(291) $$= P_1dVc \qquad [(289)],$$

(292) $$Y = P_1dVhcUdQeRm \quad [(288), (289), (290)].$$

В силу (291), V есть, как и P, слово в A_1. А так как V не содержит букв c и d, это есть слово в A_0. Равенство (292) показывает поэтому, что Y удовлетворяет условию **Р. 9**; условие же **Р. 10** в применении к Y отпадает, так как g не входит в Y. Отсюда следует, что Y есть слово 1-го разряда и, значит, h-слово. X получается из Y так, как в предыдущем случае Y получалось из X, — путем подстановки слова cg вместо вхождения слова hc [(287), (288)]. Поэтому сделанное в предыдущем случае заключение о непосредственной выводимости (286) справедливо теперь с переменой ролей X и Y, т. е. имеем

$$\mathfrak{C}_0 : [Y^{\sim} \perp [X^{\sim},$$

откуда следует непосредственная выводимость (286) [§ 5.1.5].

Таким образом, в обоих случаях Y есть слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_0 : [X^{\sim} \perp [Y^{\sim}$, что и требовалось доказать.

5.13. *Если X есть слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \perp Y$, то Y есть слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_0 : [X^{\sim} \parallel [Y^{\sim}$.*

Это следует из лемм 5.4—5.12 в силу § 5.1.1 и § 5.1.3.

5.14. *Если X есть слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_1 : X \parallel Y$, то Y есть слово 1-го разряда и $\mathfrak{C}_0 : [X^{\sim} \parallel [Y^{\sim}$.*

Это следует из леммы 5.13 в силу § 1.6.1 и § 5.1.2.

5.15. *Если W — слово нулевого разряда, то fWm есть слово 1-го разряда и*

(293) $$[fWm^{\sim} = W.$$

В самом деле, пусть W есть слово нулевого разряда. Тогда W есть слово в A_2, удовлетворяющее условиям **Р. 1—Р. 5**. fWm есть поэтому слово в $\{a, b, c, d, e, f, m\}$ и, значит, в A_3. fWm, очевидно, удовлетворяет условиям **Р. 1—Р. 5**, так как W им удовлетворяет. fWm удовлетворяет условию **Р. 7**, так как Wm не содержит оперативных букв; fWm удовлетворяет условию **Р. 11**, так как fW не содержит m. Условиям **Р. 6** и **Р. 8** слово fWm удовлетворяет очевидным образом, так как буквы g, h, i, j, k, l не входят в fWm, а единственное вхождение $*f*Wm$ буквы f в это слово, очевидно, предшествует вхождению

буквы e в это слово. Наконец, условия **P. 9** и **P. 10** отпадают в применении к слову fWm, так как оно не содержит ни g, ни h. Следовательно, fWm есть слово 1-го разряда и, значит, f-слово.

Чтобы получить для fWm представление типа, рассматриваемого в леммах 4.1 и 4.4, представим слово W в виде QeR, что, как мы знаем, возможно [§ 5.2]. Имеем

(294)
$$W = QeR,$$
$$fWm = fQeRm \qquad [(294)]$$
$$= PfQeRm,$$

где $P = \Lambda$. Поэтому

(295)
$$[fWm^{\sim} = [Q^{\omega}e[[Q^{\iota_2}[R^{\omega}[[[QR^{\rho\sim\sigma} \qquad [5.1].$$

Здесь Q, R и QR суть слова в A_1, в силу чего

(296)
$$[Q^{\omega} = Q,$$

(297)
$$[Q^{\iota} = \Lambda,$$

(298)
$$[QR^{\rho} = \Lambda,$$

(299)
$$[R^{\omega} = R.$$

Из равенств (295)—(299) следует, что

$$[fWm^{\sim} = QeR$$
$$= W \qquad [(294)].$$

Имеем, таким образом, равенство (293), что и требовалось доказать.

5.16. *Если V и W — слова нулевого разряда и $\mathfrak{C}_1 : fVm \amalg fWm$, то $\mathfrak{C}_0 : V \amalg W$.*

В самом деле, пусть V и W суть такие слова нулевого разряда, что $\mathfrak{C}_1 : fVm \amalg fWm$. Тогда, согласно 5.15, fVm и fWm — слова 1-го разряда и

$$[fVm^{\sim} = V,$$
$$[fWm^{\sim} = W.$$

С другой стороны, имеем тогда $\mathfrak{C}_0 : [fVm^{\sim} \amalg [fWm^{\sim}$ [5.14]. Следовательно, $\mathfrak{C}_0 : V \amalg W$, что и требовалось доказать.

5.17. *Если V и W — слова нулевого разряда, то $\mathfrak{C}_0 : V \amalg W$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C}_1 : fVm \amalg fWm$.*

Это следует из лемм 2.10 и 5.16.

6. Доказанная только что лемма **5.17** дает возможность перейти от теорем невозможности, касающихся исчисления $\mathfrak{C}_0$, к теоремам невозможности, касающимся ассоциативного исчисления $\mathfrak{C}_1$. Мы получаем таким образом следующие результаты.

6.1. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом $A_3 \cup \{*\}$, аннулирующий те и только те слова вида $X * Y$ (X, Y — слова в A_3), для которых эквивалентность*

(1)
$$\mathfrak{C}_1 : X \amalg Y$$

не имеет места.

6.2. *Проблема эквивалентности для исчисления* $\mathfrak{E}_1$ *неразрешима.* Докажем сначала теорему 6.1.

Допустим, что $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над $A_3 \cup \{*\}$, аннулирующий те и только те слова вида $X*Y$ (X, Y — слова в A_3), для которых эквивалентность (1) не имеет места.

Построим алгорифмы

(2) $$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}^f_{A_3} \qquad [\text{II. § 4.7}],$$

(3) $$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{I}_{A_1, e} \qquad [\text{II. § 4.10}],$$

(4) $$\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{C}^{eam*f}_{A_3 \cup \{*\}} \qquad [\text{II. § 4.7}],$$

(5) $$\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{A}_{A_2, \Lambda} \qquad [\text{II. § 4.2}],$$

(6) $$\mathfrak{B}_5 = \mathfrak{C}^m_{A_3} \qquad [\text{II. § 4.7}].$$

Это — нормальные алгорифмы соответственно в алфавитах A_3, A_2, $A_3 \cup \{*\}$, A_2, A_3 [II. § 4.2, II. § 4.7, II. § 4.10], причем

(7) $$\mathfrak{B}_1(W) = f \quad (W \text{ — слово в } A_2) \qquad [(2), \text{II. § 4.7}],$$

(8) $$\mathfrak{B}_2(UeV) = U \quad (U, V \text{ — слова в } A_1) \qquad [(3), \text{II. § 4.10.5}],$$

(9) $$\mathfrak{B}_3(W) = eam*f \quad (W \text{ — слово в } A_2) \qquad [(4), \text{II. § 4.7}],$$

(10) $$\mathfrak{B}_4(W) = W \quad (W \text{ — слово в } A_2) \qquad [(5), \text{II. § 4.2}],$$

(11) $$\mathfrak{B}_5(W) = m \quad (W \text{ — слово в } A_2) \qquad [(6), \text{II. § 4.7}]$$

Применим к алгорифмам $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_5$ теорему III. § 4.4.2, согласно которой построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над объединением $A_3 \cup \{*\}$ алфавитов алгорифмов $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_5$, что

(12) $$\mathfrak{C}(X) \simeq \mathfrak{B}_1(X)\mathfrak{B}_2(X)\mathfrak{B}_3(X)\mathfrak{B}_4(X)\mathfrak{B}_5(X) \quad (X \text{ — слово в } A_2).$$

Для произвольных слов U и V в A_1 имеем

(13) $$\mathfrak{B}_1(UeV)\mathfrak{B}_2(UeV)\mathfrak{B}_3(UeV)\mathfrak{B}_4(UeV)\mathfrak{B}_5(UeV) = fUeam*fUeVm \qquad [(7)—(11)].$$

Следовательно,

(14) $$\mathfrak{C}(UeV) = fUeam*fUeVm \quad (U, V \text{ — слова в } A_1) \qquad [(12), (13)].$$

Построим теперь алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{H}$:

(15) $$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{C}.$$

$\mathfrak{K}$ есть нормальный алгорифм над A_2, как и $\mathfrak{C}$ [(15), III. § 3.4.2], и для слов U и V в A_1,

$$\mathfrak{K}(UeV) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{C}(UeV)) \qquad [(15), \text{III. § 3.4.3}]$$

(16) $$\simeq \mathfrak{H}(fUeam*fUeVm) \qquad [(14)].$$

В силу (16), $\mathfrak{R}$ аннулирует те и только те слова нулевого разряда UeV, для которых

$$\mathfrak{H}(fUeam * fUeVm) = \Lambda,$$

а эти слова, согласно предположению об $\mathfrak{H}$, суть те и только те слова нулевого разряда UeV, для которых эквивалентность

(17) $$\mathfrak{C}_1 : fUeam \coprod fUeVm$$

не имеет места.

Как нетрудно далее видеть, слово Uea является словом нулевого разряда, если UeV есть слово нулевого разряда. Поэтому к словам Uea и UeV применима лемма 5.17, коль скоро UeV есть слово нулевого разряда.

Согласно этой лемме, эквивалентность (17) тогда и только тогда имеет место для слова нулевого разряда UeV, когда

(18) $$\mathfrak{C}_0 : Uea \coprod UeV.$$

Следовательно, $\mathfrak{R}$ аннулирует те и только те слова нулевого разряда UeV, для которых выводимость (18) не имеет места. Нормальный алгорифм $\mathfrak{R}$ над A_2 с этим свойством, однако, невозможен [§ 5.2.1]. Невозможен, стало быть, и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над $A_3 \cup \{*\}$, аннулирующий те и только те слова $X * Y$ (X, Y — слова в A_3), для которых эквивалентность (1) не имеет места, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4.2 не представляет теперь труда. Можно получить 4.2 как следствие из 4.1, аналогично получению теоремы V. § 1.4.3 из теоремы V. § 1.4.1.

§ 7. Ассоциативное исчисление $\mathfrak{C}_2$

1. Пользуясь теоремой § 5.4.1 вместо теоремы § 5.2.1, можно уточнить теорему § 6.6.2 о неразрешимости проблемы эквивалентности в исчислении $\mathfrak{C}_1$, доказав, что для этого исчисления неразрешима даже проблема эквивалентности слову $f\mathfrak{P}_0^n eam$. Мы затрудняемся, однако, в явном виде написать это слово ввиду его большой длины. Сейчас мы покажем, что путем небольшого изменения можно получить из исчисления $\mathfrak{C}_1$ новое ассоциативное исчисление $\mathfrak{C}_2$ с неразрешимой проблемой эквивалентности коротенькому слову $feam$, причем это новое исчисление будет, как и $\mathfrak{C}_1$, определяться фактически выписанной и не очень длинной системой соотношений. А именно, мы добавим к системе соотношений § 6.1 (1), определяющей $\mathfrak{C}_1$, 4 новых соотношения

$$\zeta feam \longleftrightarrow feam \quad (\zeta \in A_1),$$

что дает систему 37 соотношений

$$(1)\qquad \begin{cases} \zeta\eta \longleftrightarrow \eta\zeta \quad (\zeta \in A_1,\ \eta \in A_4) \\ \left.\begin{array}{l} e\hat{\xi} \longleftrightarrow \hat{\xi}e \\ e\xi \longleftrightarrow \bar{\xi}e \\ \xi m \longleftrightarrow \hat{\xi}m \\ h\xi\bar{\xi} \longleftrightarrow \xi h \\ \xi g\hat{\xi} \longleftrightarrow g\xi \end{array}\right\} (\xi \in A_0) \\ df \longleftrightarrow dh \\ fd \longleftrightarrow gd \\ hc \longleftrightarrow cg \\ \zeta feam \longleftrightarrow feam \quad (\zeta \in A_1). \end{cases}$$

Ассоциативное исчисление в прежнем алфавите A_3, определяемое системой соотношений (1), мы и обозначим через $\mathfrak{C}_2$.

Как в § 6, условимся обозначать численными индексами при знаке «$\perp$» указания на строки системы (1). Теперь эти индексы будут принимать значения 1,..., 10.

2. Следующие 3 леммы очевидны.

2.1. *Если* $\mathfrak{C}_1 : X \perp Y$, *то* $\mathfrak{C}_2 : X \perp Y$.

2.2. *Если* $\mathfrak{C}_2 : X \perp Y$, *то либо* $\mathfrak{C}_1 : X \perp Y$, *либо* $\mathfrak{C}_2 : X \perp_{10} Y$.

2.3. *Если* $\mathfrak{C}_2 : X \perp_{10} Y$, *то слово feam входит как в* X, *так и в* Y.

Из леммы 2.1, в силу § 1.6.1, следует лемма

2.4. *Если* $\mathfrak{C}_1 : X \parallel Y$, *то* $\mathfrak{C}_2 : X \parallel Y$.

Докажем следующую лемму.

2.5. *Если слово feam входит в* Y *и* $\mathfrak{C}_2 : X \parallel Y$, *то может быть указано слово* Z, *также содержащее вхождение слова feam и такое, что* $\mathfrak{C}_1 : X \parallel Z$.

В самом деле, пусть слово *feam* входит в Y и $\mathfrak{C}_2 : X \parallel Y$. Тогда, согласно § 1.6.1, имеется такой ряд слов $X_0, \ldots, X_n$ $(n \geqslant 0)$, что

$$(1)\qquad X_0 = X,$$

$$(2)\qquad X_n = Y,$$

$$(3)\qquad \mathfrak{C}_2 : X_{s-1} \perp X_s \quad (1 \leqslant s \leqslant n).$$

В силу (2), слово *feam* входит в X_n. Пусть r означает наименьшее из чисел s, для которых слово *feam* входит в X_s. Тогда слово *feam* не входит в X_{s-1} при $0 < s \leqslant r$, откуда, согласно 2.3, следует, что ни для одного из таких s не может иметь место смежность

$$\mathfrak{C}_2 : X_{s-1} \perp_{10} X_s.$$

Отсюда следует, что

$$(4)\qquad \mathfrak{C}_1 : X_{s-1} \perp X_s \quad (0 < s \leqslant r) \qquad [(3),\ 2.2].$$

Положим

$$(5)\qquad Z = X_r.$$

Тогда Z есть искомое слово.

Действительно, слово *feam* входит в Z, согласно определению числа r, и $\mathfrak{C}_1 : X \amalg Z$ в силу (1), (5) и (4).

2.6. *Для всякого слова* U *в* A_1

(6) $$\mathfrak{C}_2 : Ufeam \amalg feam.$$

В самом деле, эквивалентность (6), очевидно, имеет место при $U = \Lambda$. Допустим, что она имеет место для некоторого слова U в A_1, и покажем, что тогда для всякой буквы ζ алфавита A_1

(7) $$\mathfrak{C}_2 : U\zeta feam \amalg feam.$$

Имеем, действительно,

$$\mathfrak{C}_2 : U\zeta feam \perp_{10} Ufeam$$

$$\amalg feam \qquad [(6)],$$

откуда следует (7). Следовательно, эквивалентность (6) имеет место для всякого слова U в A_1, что и требовалось доказать.

2.7. *Для всякого слова* U *в* A_1

$$\mathfrak{C}_2 : fUeam \amalg feam.$$

В самом деле, если U есть слово в A_1, то

$$\mathfrak{C}_2 : fUeam \amalg Ufeam \qquad [\S\ 6.2.1,\ 2.4,\ \S\ 1.6.6]$$

$$\amalg feam \qquad [2.6].$$

2.8. *Если* UeV *есть слово нулевого разряда и*

(8) $$\mathfrak{C}_2 : fUeVm \amalg feam,$$

то

(9) $$\mathfrak{C}_0 : UeV \amalg Uea.$$

В самом деле, пусть выполнены условия этой леммы. Тогда, согласно 2.5, имеется слово Z, содержащее вхождение слова *feam* и такое, что

(10) $$\mathfrak{C}_1 : fUeVm \amalg Z.$$

$fUeVm$ есть слово 1-го разряда [§ 6.5.15] и

(11) $$[fUeVm^{\sim} = UeV \qquad [\S\ 6.5.15].$$

Z также есть слово 1-го разряда [(10), § 6.5.14] и

(12) $$\mathfrak{C}_0 : UeV \amalg [Z^{\sim} \qquad [(10),\ \S\ 6.5.14,\ (11)].$$

feam входит в Z, т. е.

(13) $$Z = XfeamY$$

для некоторых X и Y.

(14) $$Y = \Lambda,$$

так как слово 1-го разряда Z удовлетворяет условию **Р. 11**. Таким образом,

(15) $Z = Xfeam$ [(13), (14)].

Z есть, поэтому, f-слово и равенство (15) дает для Z представление типа, рассматриваемого в леммах § 6.4.1 и § 6.4.4 (при $Q = \Lambda$). Отсюда следует, что X есть слово в A_1 [§ 6.4.4] и что

(16) $[Z^{\frown} = Xea$ [§ 6.5.1].

Следовательно,

(17) $\mathfrak{C}_0 : UeV \parallel Xea$ [(12), (16)],

(18) $U = X$ [(17), § 5.5.2].

В силу (17) и (18) имеет место выводимость (9), что и требовалось доказать.

2.9. *Если UeV есть слово нулевого разряда и имеет место выводимость* (9), *то имеет место эквивалентность* (8).

В самом деле, мы имеем тогда

(19) $\mathfrak{C}_1 : fUeVm \parallel fUeam$ [(9), § 6.2.10],

(20) $\mathfrak{C}_2 : fUeVm \parallel fUeam$ [(19), 2.4].

Здесь U — слово в A_1, так как слово нулевого разряда UeV удовлетворяет условию **Р. 1**. Поэтому

(21) $\mathfrak{C}_2 : fUeam \parallel feam$ [2.7].

Из эквивалентностей (20) и (21) следует эквивалентность (8).

2.10. *Если UeV есть слово нулевого разряда, то выводимость* (9) *имеет место тогда и только тогда, когда имеет место эквивалентность* (8).

Это следует из лемм 2.8 и 2.9.

3. Докажем теперь следующую теорему.

3.1. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом A_3, аннулирующий те и только те слова в A_3, которые не эквивалентны в исчислении $\mathfrak{C}_2$ слову feam.*

В самом деле, построим нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ в алфавите A_3 со схемой

$$\begin{cases} m\xi \to \xi m \quad (\xi \in A_2) \\ m \to \cdot m \\ \quad \to fm. \end{cases}$$

Как нетрудно видеть, имеем

(1) $\mathfrak{B}(W) = fWm$

для всякого слова W в алфавите A_2.

Допустим, что имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над A_3, аннулирующий те и только те слова в A_3, которые не эквивалентны в $\mathfrak{C}_2$ слову *feam*.

Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$:

(2) $$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{K}$ есть нормальный алгорифм над A_2 [(2), III. § 3.4.2] и

$$\mathfrak{K}(W) \simeq \mathfrak{H}(fWm) \quad (W \text{ — слово в } A_2) \qquad [(2), \text{III. § 3.4.3, (1)}],$$

откуда следует, что $\mathfrak{K}$ аннулирует те и только те слова нулевого разряда UeV, для которых

$$\mathfrak{H}(fUeVm) = \Lambda.$$

Согласно предположению об $\mathfrak{H}$, это суть те и только те слова нулевого разряда UeV, для которых не имеет места эквивалентность 2 (8). Согласно лемме 2.10 заключаем, что нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ над A_2 аннулирует те и только те слова нулевого разряда UeV, для которых не имеет места выводимость 2 (9). Такой алгорифм, однако, невозможен [§ 5.2.1]. Следовательно, невозможен и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над A_3, аннулирующий те и только те слова в A_3, которые не эквивалентны в $\mathfrak{S}_2$ слову $feam$.

Пользуясь неоднократно примененным методом, получаем, как следствие из теоремы 3.1, следующий результат.

3.2. *Проблема эквивалентности слову feam в ассоциативном исчислении $\mathfrak{S}_2$ неразрешима.*

§ 8. Нормальные исчисления Поста $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$

1. Применяя к ассоциативному исчислению $\mathfrak{S}_2$ построение, указанное в теореме § 4.7.1, получаем нормальное исчисление Поста $\mathfrak{S}_3$ в алфавите

$$A_0 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$$

со следующими непосредственными выводимостями:

(1) $\mathfrak{S}_3 : \zeta\eta P \vdash P\eta\zeta \quad (\zeta \in A_1,\ \eta \in A_4)$,

(2) $\mathfrak{S}_3 : e\hat{\xi}P \vdash P\hat{\xi}e$

(3) $\mathfrak{S}_3 : e\xi P \vdash P\xi e$

(4) $\mathfrak{S}_3 : \xi mP \vdash P\hat{\xi}m$ $\quad (\xi \in A_0)$,

(5) $\mathfrak{S}_3 : h\xi\xi P \vdash P\xi h$

(6) $\mathfrak{S}_3 : \xi g\hat{\xi}P \vdash Pg\xi$

(7) $\mathfrak{S}_3 : dfP \vdash Pdh$,

(8) $\mathfrak{S}_3 : fdP \vdash Pgd$,

(9) $\mathfrak{S}_3 : hcP \vdash Pcg$,

(10) $\mathfrak{S}_3 : \zeta feamP \vdash Pfeam \quad (\zeta \in A_1)$,

(11) $\mathfrak{S}_3 : \eta\zeta P \vdash P\zeta\eta \quad (\zeta \in A_1,\ \eta \in A_4)$,

(12) $\mathfrak{C}_3 : \hat{\xi} e P \vdash P e \hat{\xi}$

(13) $\mathfrak{C}_3 : \bar{\xi} e P \vdash P e \xi$

(14) $\mathfrak{C}_3 : \hat{\xi} m P \vdash P \xi m$

(15) $\mathfrak{C}_3 : \xi h P \vdash P h \xi \bar{\xi}$

(16) $\mathfrak{C}_3 : g \xi P \vdash P \zeta g \hat{\xi}$

$(\xi \in A_0)$,

(17) $\mathfrak{C}_3 : dhP \vdash Pdf$,

(18) $\mathfrak{C}_3 : gdP \vdash Pfd$,

(19) $\mathfrak{C}_3 : cgP \vdash Phc$,

(20) $\mathfrak{C}_3 : featP \vdash P \zeta feat \quad (\zeta \in A_1)$,

(21) $\mathfrak{C}_3 : \varphi P \vdash P \varphi \quad (\varphi \in A_6)$,

где P означает произвольное слово в A_6.

Как нетрудно подсчитать, система непосредственных выводимостей, определяющая $\mathfrak{C}_3$, состоит из 88 непосредственных выводимостей.

Из теоремы § 4.7.1 вытекает следующий результат.

1.1. *Каковы бы ни были слова Q и R в A_3, для эквивалентности их в $\mathfrak{C}_2$ необходима и достаточна выводимость*

$$\mathfrak{C}_3 : Qn \vdash Rn$$

Как следствие отсюда имеем

1.2. *Слово W в A_3 тогда и только тогда эквивалентно в $\mathfrak{C}_2$ слову feat, когда слово Wn выводимо в $\mathfrak{C}_3$ из слова featn.*

Обозначим через $\mathfrak{C}_4$ нормальное исчисление Поста в A_3 с непосредственными выводимостями (1)—(21) и с данным исходным словом *featn*. Согласно 1.2, имеем тогда следующий результат.

1.3. *Слово W в A_3 тогда и только тогда эквивалентно в $\mathfrak{C}_2$ слову feat, когда слово Wn выводимо в $\mathfrak{C}_4$.*

2. Пользуясь тем, что нормальный алгорифм в A_6 со схемой

$$\begin{cases} n\xi \to \xi n & (\xi \in A_3) \\ n \to \cdot\, n \\ \to n \end{cases}$$

перерабатывает всякое слово W в алфавите A_3 в слово Wn, и действуя согласно неоднократно примененному методу, мы получаем с помощью теорем 1.3 и § 7.3.1 следующий результат.

2.1. *Невозможен нормальный алгорифм над A_6, аннулирующий те и только те слова в A_6, которые не выводимы в $\mathfrak{C}_4$.*

Отсюда легко получить далее теорему

2.2. *Проблема выводимости для исчисления $\mathfrak{C}_4$ неразрешима.*

Исчисление $\mathfrak{C}_4$ является, таким образом, конкретным и не очень сложным примером нормального исчисления Поста с данным исходным словом и с неразрешимой проблемой выводимости.

§ 9. Комбинаторная проблема Поста

1. Пусть A — произвольный алфавит, α и β — различные между собой буквы, не принадлежащие A.

Будем пользоваться буквой α для записи пар слов в A; пару слов P и Q в A будем записывать в виде

$$P\alpha Q.$$

Будем пользоваться буквой β для записи систем пар слов в A; систему таких пар $P_1, \ldots, P_s$ будем записывать в виде

$$P_1\beta P_2\beta \ldots P_s\beta.$$

Пару слов в A мы будем, таким образом, записывать в виде слова в алфавите $A \cup \{\alpha\}$; систему пар слов в A — в виде слова в $A \cup \{\alpha, \beta\}$.

Пусть A_r, B_r $(r = 1, \ldots, s)$ — слова в A. Будем говорить, что система пар этих слов

$$A_1\alpha B_1\beta \ldots A_s\alpha B_s\beta$$

сочетаема, если

$$A_{r_1} \ldots A_{r_t} = B_{r_1} \ldots B_{r_t} \tag{1}$$

для некоторого целого положительного t и некоторых t чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, s$.

Во всяком непустом алфавите A существуют как сочетаемые, так и не сочетаемые системы пар слов. Например, если $\gamma \in A$, то система

$$\gamma\alpha\gamma\beta$$

сочетаема, а система

$$\gamma\alpha\gamma\gamma\beta$$

не сочетаема.

В связи с понятием сочетаемости возникает следующая массовая проблема.

Для данного алфавита A указать единый общий конструктивный метод, позволяющий распознавать для любой системы пар слов в A сочетаема ли она.

Эта проблема была формулирована Постом [27]. Ее можно следующим образом уточнить как нормальную массовую проблему.

Для данного алфавита A и данных букв α и β, применяемых для записи систем пар слов в A, построить нормальный алгорифм над алфавитом $A \cup \{\alpha, \beta\}$, применимый ко всякой системе пар слов в A и аннулирующий такую систему тогда и только тогда, когда она сочетаема.

Эту проблему мы будем называть *комбинаторной проблемой Поста для алфавита* A или *общей проблемой сочетаемости для* A.

Можно также при исследовании сочетаемости систем пар слов в A ограничиться рассмотрением систем, состоящих из данного фиксированного числа пар. Это ведет к постановке следующей нормальной массовой проблемы.

Для данного алфавита A, данных букв α и β, применяемых для записи систем пар слов в A, и данного целого положительного числа s построить нормальный алгорифм над $A \cup \{\alpha, \beta\}$, применимый ко всякой системе s пар слов в A и аннулирующий такую систему тогда и только тогда, когда она сочетаема.

Эту проблему будем называть *ограниченной проблемой сочетаемости для алфавита* A *и числа* s.

Мы покажем в этом параграфе, что даже ограниченная проблема сочетаемости для алфавита A и числа s неразрешима, коль скоро A содержит более одной буквы, а $s \geqslant 90$. Тем более неразрешима общая проблема сочетаемости для всякого алфавита, содержащего более одной буквы — результат Поста [27].

2. Доказательства этих результатов будут основаны на применении идей Поста [27] к исчислению $\mathfrak{C}_3$. Мы воспользуемся при этом некоторыми особенностями исчисления $\mathfrak{C}_3$, делающими излишним первый этап рассуждений Поста.

Представим систему непосредственных выводимостей § 8.1 (1)—§ 8.1 (21) исчисления $\mathfrak{C}_3$ в виде

(1) $$\mathfrak{C}_3 : C_r P \vdash P D_r \quad (1 \leqslant r \leqslant 88;\ P \text{ — слово в A}),$$

где

$$C_1 = af,$$

$$D_1 = fa,$$

$$\ldots\ldots$$

(2) $$C_{88} = n,$$

(3) $$D_{88} = n.$$

В дальнейшем мы используем равенства (2) и (3), а также следующие свойства C_r и D_r.

2.1. *При* $(1 \leqslant r \leqslant 87)$ *буква* n *не входит ни в слово* C_r, *ни в слово* D_r.

2.2. *Все слова* C_r *и* D_r *непусты.*

Что все это действительно так, легко убедиться, просматривая систему непосредственных выводимостей § 8.1 (1)—§ 8.1 (21).

Докажем теперь некоторые леммы.

2.3. *Если* $\mathfrak{C}_3 : X \models Y$, *то*

(4) $$X D_{r_1} \ldots D_{r_t} = C_{r_1} \ldots C_{r_t} Y$$

для некоторого $t \geqslant 0$ *и некоторых чисел* $r_1, \ldots, r_t$ *из ряда* $1, \ldots, 88$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{C}_3 : X \models Y$. Тогда, согласно § 4.1.4, имеется такой ряд слов $X_0, \ldots, X_t$ $(t \geqslant 0)$, что

(5) $$X_0 = X,$$

(6) $$X_t = Y,$$

(7) $$\mathfrak{C}_3 : X_{q-1} \vdash X_q \quad (0 < q \leqslant t).$$

Каждая из непосредственных выводимостей (7) имеет один из видов (1), т. е. при всяком q из ряда $1,\ldots,t$ найдутся слово P_q и число r_q из ряда $1,\ldots,88$ такие, что

(8) $$X_{q-1}=C_{rq}P_q,$$

(9) $$X_q=P_qD_{r_q}.$$

Покажем, что

(10) $$XD_{r_1}\ldots D_{rq}=C_{r_1}\ldots C_{rq}X_q \quad (0\leqslant q\leqslant t).$$

При $q=0$ равенство (10) имеет место [I. § 3. 6. (4), (5)]. Допустим, что оно имеет место при $q=p-1$, где p есть число из ряда $1,\ldots,t$. Имеем тогда

(11) $$XD_{r_1}\ldots D_{r_{p-1}}=C_{r_1}\ldots C_{r_{p-1}}X_{p-1},$$

$$XD_{r_1}\ldots D_{r_p}=C_{r_1}\ldots C_{r_{p-1}}X_{p-1}D_{r_p} \qquad [(11),\ \text{I. § 3.6 (5)}]$$

$$=C_{r_1}\ldots C_{r_{p-1}}C_{r_p}P_pD_{r_p} \qquad [(8)]$$

$$=C_{r_1}\ldots C_{r_p}X_{r_p} \qquad [\text{I. § 3.6 (5), (9)}],$$

и, следовательно, равенство (10) имеет место при $q=p$. Этим доказано, что равенство (10) действительно соблюдается при $0\leqslant q\leqslant t$. В частности, оно верно при $q=t$, т. е.

$$XD_{r_1}\ldots D_{r_t}=C_{r_1}\ldots C_{r_t}X_t$$

$$=C_{r_1}\ldots C_{r_t}Y \qquad [(6)].$$

Таким образом, равенство (4) действительно имеет место для выбранных нами t и $r_1,\ldots,r_t$, что и требовалось доказать.

2.4. *Пусть X и Y — слова в алфавите A_8, причем буква n входит в X. Если для некоторого натурального числа t и некоторых чисел $r_1,\ldots,r_t$ из ряда $1,\ldots,88$ имеет место равенство (4), то $\mathfrak{C}_3: X\models Y$.*

В самом деле, пусть это равенство имеет место для некоторого числа t и некоторых $r_1,\ldots,r_t$ из ряда $1,\ldots,88$. Положим

(12) $$R_q=XD_{r_1}\ldots D_{r_{q-1}} \quad (0<q\leqslant t),$$

(13) $$S_q=C_{r_1}\ldots C_{r_q} \quad (0\leqslant q\leqslant t).$$

Обозначим через u число вхождений буквы n в X; через v_q — число ее вхождений в R_q; через u_q — число тех чисел p из ряда $1,\ldots,q-1$, для которых

$$r_p=88$$

$(1\leqslant q\leqslant t+1)$.

Имеем

(14) $$v_q=u+u_q \quad (0<q\leqslant t) \qquad [(12), (3), 2.1]$$

и вместе с тем усматриваем, что u_q есть число вхождений буквы n в слово S_{q-1} [(13), (2), 2.1]. В силу (14), $v_q > u_q$, так как, по предположению, $u > 0$. Поэтому слово S_{q-1} не может начинаться словом R_q $(0 < q \leqslant t)$. Если для некоторого q имеем $r_q \neq 88$, то, по определению чисел u_q и u_{q+1}, имеем

(15) $$u_{q+1} = u_q,$$

(16) $$v_q > u_{q+1} \qquad [(14), (15)],$$

откуда аналогичным образом заключаем, что и S_q не может начинаться словом R_q. Но слова S_q и R_q суть начала одного и того же слова $(0 < q \leqslant t)$ [(4), (12), (13)]. Поэтому одно из слов S_q, R_q есть начало другого [I. § 3.10.3]. Следовательно, R_q начинается словом S_q, если $r_q \neq 88$. Если же $r_q = 88$, то

(17) $$S_q = S_{q-1} n \qquad [(13), \text{I. § 3.6 (5)}, (2)]$$

и, следовательно, слова R_q и $S_{q-1}n$ являются началами одного и того же слова. Отсюда, принимая во внимание, что R_q не есть начало S_{q-1}, заключаем, что $S_{q-1}n$ есть начало R_q [I. § 3.10.9]. Таким образом, R_q и в этом случае начинается словом S_q [(17)].

Мы доказали тем самым, что R_q начинается словом S_q при $0 < q \leqslant t$, т. е., что

(18) $$R_q = S_q P_q \quad (0 < q \leqslant t)$$

для некоторых слов $P_1, \ldots, P_t$.

Положим

(19) $$X_0 = X,$$

(20) $$X_q = P_q D_{r_q} \quad (0 < q \leqslant t).$$

При $1 < q \leqslant t$ имеем

$$R_q = R_{q-1} D_{r_{q-1}} \qquad [(12), \text{I. § 3.6 (5)}]$$

$$= S_{q-1} P_{q-1} D_{r_{q-1}} \qquad [(18)]$$

(21) $$= S_{q-1} X_{q-1} \qquad [(20)];$$

имеем

(22) $$R_1 = X_0 \qquad [(12), \text{I. § 3.6 (4)}, (19)];$$

при $0 < q \leqslant t$ имеем

(23) $$S_q = S_{q-1} C_{r_q} \qquad [(13), \text{I. § 3.6 (5)}],$$

(24) $$R_q = S_{q-1} C_{r_q} P_q \qquad [(18), (23)].$$

Сопоставляя при $1<q\leqslant t$ равенства (21) и (24), получаем согласно I. § 3.9.3

$$X_{q-1}=C_{r_q}P_q. \tag{25}$$

Равенство (25) верно и при $q=1$ [(22), (24), (13), I. § 3.6(4)].
Из равенств (20) и (25) следует, что

$$\mathfrak{C}_3: X_{q-1}\vdash X_q \quad (0<q\leqslant t). \tag{26}$$

Имеем, кроме того,

$$X_t=P_tD_{r_t} \qquad [(20)], \tag{27}$$

$$S_tX_t=R_tD_{r_t} \qquad [(27), (18)]$$

$$=XD_{r_1}\ldots D_{r_t} \qquad [(12), \text{I. § 3.6(5)}]$$

$$=S_tY \qquad [(4), (13)], \tag{28}$$

$$X_t=Y \qquad [(28), \text{I. § 3.9.3}]. \tag{29}$$

В силу (19), (26) и (29), имеем $\mathfrak{C}_3: X\models Y$, что и требовалось доказать.

2.5. *Пусть X и Y — слова в A_6, причем буква n входит в X. Тогда для выводимости Y из X в исчислении $\mathfrak{C}_3$ необходимо и достаточно, чтобы равенство* (4) *соблюдалось для некоторого натурального числа t и некоторых чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда* $1, \ldots, 88$.

Это следует из лемм 2.3 и 2.4.

Принимая далее во внимание, что выводимость в исчислении $\mathfrak{C}_4$ равносильна выводимости в исчислении $\mathfrak{C}_3$ из слова *featn*, содержащего n, получаем следующую лемму.

2.6. *Слово Y тогда и только тогда выводимо в исчислении $\mathfrak{C}_4$, когда*

$$featn\,D_{r_1}\ldots D_{r_t}=C_{r_1}\ldots C_{r_t}Y \tag{30}$$

для некоторого натурального числа t и некоторых чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$.

3. Из теоремы § 8.2.1 и леммы 2.6 вытекает следующая теорема.

3.1. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом A_6, аннулирующий те и только те слова Y в A_6, для которых равенство* 2 (30) *не удовлетворяется ни при каком выборе натурального числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$.*

Подчеркиваем, что в отличие от определения сочетаемости здесь допускается равенство числа t нулю.

4. От теоремы 3.1 можно теперь перейти к проблеме сочетаемости. Для этого расширим алфавит введением новой буквы o, что дает алфавит

$$A_7=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o\}.$$

Определим для слов в A_6 следующие две операции *левого* и *правого разбавления*: левое разбавление — замена всякой буквы ξ словом $o\xi$,

т. е. вставка буквы o слева от каждой буквы; правое разбавление — замена всякой буквы ξ словом ξo, т. е. вставка буквы o справа от каждой буквы. Результат левого разбавления слова P будем обозначать символом $[P^{\triangleleft}$, результат правого разбавления слова P — символом $[P^{\triangleright}$. Согласно определениям

(1) $$[P^{\triangleleft} = S^{a,\ldots,n}_{oa,\ldots,on} P\Big|,$$

(2) $$[P^{\triangleright} = S^{a,\ldots,n}_{ao,\ldots,no} P\Big|$$

для всякого слова P в A_6.

Для всяких слов P и Q в A_6 имеем

(3) $$[PQ^{\triangleleft} = [P^{\triangleleft}\,[Q^{\triangleleft} \qquad [(1), \text{II. § 4.14 (1)}],$$

(4) $$[PQ^{\triangleright} = [P^{\triangleright}\,[Q^{\triangleright} \qquad [(2), \text{II. § 4.14 (1)}].$$

Очевидно, кроме того, что для всякого слова P в A_6

(5) $$[P^{\triangleleft} o = o\,[P^{\triangleright}.$$

Слово P, очевидно, может быть однозначно восстановлено по слову $[P^{\triangleright}$. Для этого надо лишь отбросить все буквы, стоящие на четных местах. Отсюда вытекает справедливость следующей леммы

4.1. *Если* $[P^{\triangleright} = [Q^{\triangleright}$, *то* $P = Q$.

Положим

(6) $$E_r = [C_r^{\triangleright}$$

(7) $$F_r = [D_r^{\triangleleft}$$ $\Big\}\ (1 \leqslant r \leqslant 88),$

(8) $$E_{89} = oo,$$

(9) $$F_{89} = o\,[featmn^{\triangleleft} = oofoeoaomon \qquad [(1)],$$

(10) $$F_{90} = oo.$$

Условимся применять для записи систем пар слов в алфавите A_7 буквы x и y, не принадлежащие A_7, в роли α и β [1].

Докажем следующую лемму.

4.2. *Если имеет место равенство* 2 (30), *то система пар слов*

(11) $$E_1 x F_1 y \ldots E_{90} x F_{90} y,$$

где

(12) $$E_{90} = [Y^{\triangleright} o,$$

сочетаема.

В самом деле, тогда

$$E_{89} E_{r_1} \ldots E_{r_i} E_{90} = oo\,[C_{r_1}^{\triangleright} \ldots [C_{r_i}^{\triangleright}\,[Y^{\triangleright} o \qquad [(8), (6), (12)]$$

$$= oo\,[C_{r_1} \ldots C_{r_i} Y^{\triangleright} o \qquad [(4)]$$

$$= o[C_{r_1} \ldots C_{r_t} Y^{\triangleleft} oo \qquad [(5)]$$

$$= o[feamn D_{r_1} \ldots D_{r_t}^{\triangleleft} oo \qquad [2\,(30)]$$

$$= o[feamn^{\triangleleft} [D_{r_1}^{\triangleleft} \ldots [D_{r_t}^{\triangleleft} oo \qquad [(3)]$$

$$= F_{89} F_{r_1} \ldots F_{r_t} F_{90} \qquad [(9),\ (7),\ (10)]$$

и, следовательно,

(13) $$E_{s_1} \ldots E_{s_u} = F_{s_1} \ldots F_{s_u},$$

где

(14) $$u = t + 2,$$

$$s_1 = 89,$$

$$s_q = r_{q-1} \quad (1 < q < u),$$

$$s_u = 90.$$

Так как здесь $u > 0$, равенство (13) показывает, что система (11) сочетаема.

Докажем теперь обратное утверждение.

4.3. *Если Y — непустое слово в A_6 и система пар* **(11)**, *где E_{90} определяется равенством* **(12)**, *сочетаема, то для некоторого натурального числа t и некоторых чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$ имеет место равенство* **2 (30)**.

В самом деле, пусть выполнены условия этой леммы. Тогда для некоторого положительного числа u и некоторых чисел $s_1, \ldots, s_u$ имеет место равенство **(13)**.

Так как слова C_r и D_r непусты [2.2], слова E_s и F_s также непусты [(6)—(10), (12)]. Слова E_s при этом оканчиваются буквой o [(6), (8), (12)], а слова F_s начинаются этой буквой [(7), (9), (10)].

С другой стороны, так как C_r $(1 \leqslant r \leqslant 88)$ и Y — непустые слова в алфавите A_6, слова E_s при $s \neq 89$ начинаются буквой этого алфавита [(6), (12)]; так как D_r $(1 \leqslant r \leqslant 88)$ и $feamn$ — непустые слова в A_6, слова F_s при $s \neq 90$ оканчиваются буквой алфавита A_6 [(7), (9)].

В силу **(13)**, первые буквы непустых слов E_{s_1} и F_{s_1} совпадают, равно как и последние буквы слов E_{s_u} и F_{s_u}. Так как все F_s начинаются буквой o, а все E_s оканчиваются ею, E_{s_1}, стало быть, начинается этой буквой, а F_{s_u} оканчивается ею. Отсюда следует, согласно только что сказанному, что

(15) $$s_1 = 89,$$

(16) $$s_u = 90.$$

Имеем поэтому $u \neq 1$, т. е.

(17) $$u \geqslant 2.$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда числа 89 и 90 не встречаются среди чисел $s_2, \ldots, s_{u-1}$, т. е. когда каждое s_q $(1 < q < u)$ есть одно из чисел ряда $1, \ldots, 88$. Полагая в этом случае

(18) $$t = u - 2,$$

(19) $$r_q = s_{q+1} \quad (1 \leqslant q \leqslant t),$$

будем иметь

$$t \geqslant 0 \qquad [(17), (18)],$$

$$oo[C_{r_1} \ldots C_{r_t} Y^{\triangleright} o = E_{89} E_{r_1} \ldots E_{r_t} E_{90} \qquad [(4), (8), (6), (12)]$$

$$= E_{s_1} E_{s_2} \ldots E_{s_{u-1}} E_{s_u} \qquad [(15), (19), (18), (16)]$$

$$= F_{s_1} F_{s_2} \ldots F_{s_{u-1}} F_{s_u} \qquad [(13)]$$

$$= F_{89} F_{r_1} \ldots F_{r_t} F_{90} \qquad [(15), (19), (18), (16)]$$

$$= o[feamn D_{r_1} \ldots D_{r_t}^{\triangleleft} oo \qquad [(9), (7), (10), (3)]$$

(20) $$= oo[feamn D_{r_1} \ldots D_{r_t}^{\triangleright} o \qquad [(5)]$$

$$[C_{r_1} \ldots C_{r_t} Y^{\triangleright} = [feamn D_{r_1} \ldots D_{r_t}^{\triangleright} \quad [(20), \text{I.}\S 3.9.3, \text{I.}\S 3.9.4],$$

откуда, согласно лемме 4.1, вытекает равенство 2(30).

Допустим теперь, что хотя бы одно из чисел 89 и 90 встречается среди чисел $s_2, \ldots, s_{u-1}$. Пусть тогда v означает наименьшее из чисел $2, \ldots, u-1$ такое, что $s_v = 89$ или $s_v = 90$. Имеем

(21) $$s_q \leqslant 88 \quad (2 \leqslant q < v).$$

Рассмотрим слова

(22) $$E_{s_1} \ldots E_{s_v}$$

и

(23) $$F_{s_1} \ldots F_{s_v}.$$

В силу (13), они суть начала одного и того же слова, откуда следует, что одно из них начинается другим [I. § 3.10.3].

Допустим, что

(24) $$s_v = 89.$$

Тогда

$$E_{s_1} \ldots E_{s_v} = oo[C_{s_2}^{\triangleright} \ldots [C_{s_{v-1}}^{\triangleright} oo \qquad [(15), (8), (21), (6), (24)]$$

(25) $$= oo[C_{s_2} \ldots C_{s_{v-1}}^{\triangleright} oo \qquad [(4)],$$

$$F_{s_1} \ldots F_{s_v} = o[feamn^{\triangleleft}[D_{s_2}^{\triangleleft} \ldots [D_{s_{v-1}}^{\triangleleft} o[feamn^{\triangleleft} \quad [(15), (9), (21), (7), (24)]$$

(26) $$= o[feamn D_{s_2} \ldots D_{s_{v-1}}^{\triangleleft} oofoeaomon \qquad [(3), (1)].$$

Принимая во внимание, что слово $[C_{s_2} \ldots C_{s_{v-1}}^{\triangleright}$ либо пусто (при $v = 2$), либо оканчивается буквой o (при $v > 2$) [(2)], усматриваем, что в слово $E_{s_1} \ldots E_{s_v}$ входит слово ooo [(25)]. В силу (26), ooo не входит, однако,

в $F_{s_1}\ldots F_{s_v}$, так как $[feamn\,D_{s_2}\ldots D^{\triangleleft}_{s_{v-1}}$ — результат левого разбавления непустого слова в алфавите A_6 оканчивается буквой этого алфавита и не содержит вхождений слова oo [(1)]. Поэтому слово (23) не начинается словом (22). С другой стороны, в слово (23) входит, согласно (26), слово вида ξoof, где ξ есть буква алфавита A_6 (а именно последняя буква слова $feamn\,D_{s_2}\ldots D_{s_{v-1}}$). Но никакое слово этого вида не входит в слово (22), так как, согласно (25), слово (22) либо равно $oooo$, либо имеет вид $oo\xi_1o\xi_2o\ldots\xi_woooo$, где ξ_p суть буквы алфавита A_6 [(2)]. Поэтому и слово (22) не начинается словом (23).

Равенство (24), таким образом, невозможно и, следовательно,

(27) $$s_v=90.$$

Имеем поэтому

$$E_{s_1}\ldots E_{s_v}=oo\,[C^{\triangleright}_{s_2}\ldots[C^{\triangleright}_{s_{v-1}}[Y^{\triangleright}o \quad [(15),\ (8),\ (21),\ (6),\ (27),\ (12)]$$

(28) $$=oo\,[C_{s_2}\ldots C_{s_{v-1}}Y^{\triangleright}o \quad [(4)],$$

$$F_{s_1}\ldots F_{s_v}=o\,[feamn^{\triangleleft}[D^{\triangleleft}_{s_2}\ldots[D^{\triangleleft}_{s_{v-1}}oo \quad [(15),(9),(21),(7),(27),(10)]$$

$$=o\,[feamn\,D_{s_2}\ldots D^{\triangleleft}_{s_{v-1}}oo \quad [(3)]$$

(29) $$=oo\,[feamn\,D_{s_2}\ldots D^{\triangleright}_{s_{v-1}}o \quad [(5)].$$

Принимая во внимание, что одно из слов (22) и (23) начинается другим, усматриваем из равенств (28) и (29), что одно из слов

(30) $$[C_{s_2}\ldots C_{s_{v-1}}Y^{\triangleright}o,$$

(31) $$[feamn\,D_{s_2}\ldots D^{\triangleright}_{s_{v-1}}o$$

начинается другим [I. § 3.10.11]. Ввиду того, что слова $C_{s_2}\ldots C_{s_{v-1}}Y^{\triangleright}$ и $feamn\,D_{s_2}\ldots D_{s_{v-1}}$ непусты, каждое из слов (30) и (31) оканчивается словом oo [(2)]. Вместе с тем ни одно из слов $[C_{s_2}\ldots C_{s_{v-1}}Y^{\triangleright}$ и $[feamn\,D_{s_2}\ldots D^{\triangleright}_{s_{v-1}}$ не содержит вхождений слова oo [(2)]. Поэтому слово (30) не входит в слово

(32) $$[feamn\,D_{s_2}\ldots D^{\triangleright}_{s_{v-1}},$$

а слово (31) не входит в слово

(33) $$[C_{s_2}\ldots C_{s_{v-1}}Y^{\triangleright}.$$

Между тем, если бы слова (30) и (31) были различны, то в силу того, что одно из них начинается другим, либо слово (32) начиналось бы словом (30), либо слово (33) — словом (31) [I. § 3.10.7]. Следовательно, слова (30) и (31) равны:

(34) $$[feamn\,D_{s_2}\ldots D^{\triangleright}_{s_{v-1}}o=[C_{s_2}\ldots C_{s_{v-1}}Y^{\triangleright}o,$$

откуда

(35) $$feamn\,D_{s_2}\ldots D_{s_{v-1}}=C_{s_2}\ldots C_{s_{v-1}}Y \quad [(34),\ \text{I. § 3.9.4, 4.1}].$$

Равенство (35) может быть переписано в виде 2 (30), где

$$t=v-2,$$
$$r_q=s_{q+1} \quad (1\leqslant q\leqslant t).$$

Лемма, таким образом, доказана.

4.4. *Если Y непустое слово в A_6, то система пар* (11), *где E_{90} определяется равенством* (12), *тогда и только тогда сочетаема, когда для некоторого числа t и некоторых чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда* $1, \ldots, 88$ *соблюдается равенство* 2 (30).

Это следует из лемм 4.2 и 4.3.

5. Положим

$$A_8 = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n,\ o,\ x,\ y\}.$$

Опираясь на результаты 3.1 и 4.4, докажем следующую теорему.

5.1. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом A_8, аннулирующий те и только те системы 90 пар слов в алфавите A_7, которые не сочетаемы.*

Построим прежде всего нормальные алгорифмы

(1) $$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}_{A_8}^{E_1 x F_1 y \ldots E_{89} x F_{89} y}$$ [II. § 4.7],

(2) $$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{K}_{A_7, a_0, \ldots, n_0}^{A_6, a, \ldots, n}$$ [II. § 4.14],

(3) $$\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{C}_{A_8}^{o x F_{90} y}$$ [II. § 4.7].

$\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_3$ суть нормальные алгорифмы в A_8, причем

(4) $\mathfrak{B}_1(P) = E_1 x F_1 y \ldots E_{89} x F_{89} y$ (P — слово в A_8) [(1), II. § 4.7],

(5) $\mathfrak{B}_3(P) = o x F_{90} y$ (P — слово в A_8) [(3), II. § 4.7];

$\mathfrak{B}_2$ — нормальный алгорифм над A_7 и

(6) $\mathfrak{B}_2(P) = [P^{\triangleright}$ (P — слово в A_6) [(2), II. § 4.14 (3), 4 (2)].

$\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$ суть, таким образом, нормальные алгорифмы над A_6. Применим к ним теорему III. § 4.4.1, согласно которой построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над A_6, что

(7) $$\mathfrak{C}(Y) \simeq \mathfrak{B}_1(Y)\,\mathfrak{B}_2(Y)\,\mathfrak{B}_3(Y) \quad (Y \text{ — слово в } A_6).$$

Имеем

$$\mathfrak{C}(Y) = E_1 x F_1 y \ldots E_{89} x F_{89} y\,[Y^{\triangleright} o x F_{90} y \quad [(7), (4), (5), (6)]$$

(8) $$= E_1 x F_1 y \ldots E_{90} x F_{90} y \quad (Y \text{ — слово в } A_6),$$

где E_{90} определяется равенством 4 (12).

Допустим теперь, вопреки доказываемому, что имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над A_8, аннулирующий те и только те системы 90 пар слов в A_7, которые не сочетаемы. Построим алгорифм $\mathfrak{K}_0$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{H}$:

(9) $$\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{C}.$$

$\mathfrak{K}_0$ есть нормальный алгорифм над A_6 [(9), III. § 3.4.2], причем

$$\mathfrak{K}_0(Y) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{C}(Y)) \quad [(9), \text{III. § 3.4.3}]$$

(10) $$\simeq \mathfrak{H}(E_1 x F_1 y \ldots E_{90} x F_{90} y) \quad (Y \text{ — слово в } A_6) \quad [(8)],$$

где E_{90} определяется равенством 4 (12).

В силу (10), алгорифм $\mathfrak{R}_0$ тогда и только тогда аннулирует слово Y в A_6, когда $\mathfrak{H}$ аннулирует систему пар $E_1 x F_1 y \ldots E_{90} x F_{90} y$, т. е. когда эта система не сочетаема.

Построим, наконец, нормальный алгорифм $\mathfrak{R}$ над A_6 согласно теореме разветвления III. § 5.1.1 таким образом, что

$$(11)\qquad \mathfrak{R}(Y) \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}_{A_6, \Lambda}(Y) & (Y \text{ — слово в } A_6,\ \mathfrak{A}_{A_6, \Lambda}(Y) = \Lambda) \\ \mathfrak{R}_0(Y) & (Y \text{ — слово в } A_6,\ \mathfrak{A}_{A_6, \Lambda}(Y) \neq \Lambda). \end{cases}$$

Здесь $\mathfrak{A}_{A_6, \Lambda}$ — тождественный алгорифм в алфавите A_6 [II. § 4.2]:

$$(12)\qquad \mathfrak{A}_{A_6, \Lambda}(Y) = Y \quad (Y \text{ — слово в } A_6).$$

Согласно (11) и (12),

$$\mathfrak{R}(\Lambda) = \Lambda$$

и

$$\mathfrak{R}(Y) \simeq \mathfrak{R}_0(Y)$$

для всякого непустого слова Y в A_6. Следовательно, $\mathfrak{R}$ аннулирует пустое слово, а также те и только те непустые слова в A_6, которые аннулирует $\mathfrak{R}_0$.

Но непустые слова в A_6, аннулируемые алгорифмом $\mathfrak{R}_0$, это, согласно выясненному выше, суть непустые слова Y в A_6, для которых система $E_1 x F_1 y \ldots E_{90} x F_{90} y$ с E_{90}, равным $[Y \triangleright o$, не сочетаема. Согласно 4.4, это — те и только те непустые слова Y в A_6, для которых ни при каком выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$ не соблюдается равенство 2 (30).

Это равенство не может быть соблюдено и при $Y = \Lambda$, так как тогда, в силу 2 (2), 2 (3) и 2.1, число вхождений буквы n в левую часть равенства 2 (30) было бы на единицу больше числа ее вхождений в его правую часть, как бы ни выбирались числа t, $r_1, \ldots, r_t$.

Следовательно, нормальный алгорифм $\mathfrak{R}$ над A_6 аннулирует те и только те слова Y в A_6, для которых равенство 2 (30) не соблюдается ни при каком выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$. Такой алгорифм, однако, невозможен [3.1]. Невозможен поэтому и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над A_8, аннулирующий те и только те системы 90 пар слов в A_7, которые не сочетаемы, что и требовалось доказать.

Основываясь на теореме 5.1 и пользуясь методом, уже неоднократно примененным в аналогичных случаях, получаем следующий результат.

5.2. *Ограниченная проблема сочетаемости для алфавита* A_7 *и числа 90 неразрешима.*

Здесь легко далее перейти от пятнадцатибуквенного алфавита A_7 к двухбуквенному алфавиту A_0. Для этого можно воспользоваться методом переводов, уже сослужившим нам службу при подобных переходах.

Определим переводы слов в алфавите A_8 согласно I. § 6.1 и I. § 6.2, причем роль В будет играть алфавит $\{x, y\}$, роль $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — буквы $a, b, \ldots, o$ алфавита A_7, роль α и β — буквы a и b. Роль А будет, следовательно, играть алфавит $\{a, b, x, y\}$, роль Б — алфавит A_8. Будем иметь

$$(13)\qquad \begin{cases} [a^{\tau} = aba \\ [b^{\tau} = ab^2a \\ \dots \\ [o^{\tau} = ab^{15}a \\ [x^{\tau} = x \\ [y^{\tau} = y. \end{cases}$$

В силу (13), верны следующие утверждения.

5.3. *Перевод всякого слова в алфавите* A_7 *есть слово в алфавите* A_0.

5.4. *Перевод всякой системы* s *пар слов в алфавите* A_7 *есть система* s *пар слов в алфавите* A_0.

Докажем следующую лемму.

5.5. *Для того, чтобы система пар слов в алфавите* A_7 *была сочетаемой системой, необходимо и достаточно, чтобы ее перевод был сочетаемой системой.*

Рассмотрим, в самом деле, какую-нибудь систему s пар слов

$$(14)\qquad A_1xB_1y\dots A_sxB_sy$$

в алфавите A_7. Ее переводом является система s пар слов

$$(15)\qquad [A_1^{\tau}x[B_1^{\tau}y\dots[A_s^{\tau}x[B_s^{\tau}y$$

в алфавите A_0. Равенство **1 (1)**, согласно **I. § 6.2.5**, равносильно равенству

$$[A_{r_1}\dots A_{r_t}^{\tau} = [B_{r_1}\dots B_{r_t}^{\tau},$$

а последнее, в силу **I. § 6.2.9**, — равенству

$$[A_{r_1}^{\tau}\dots[A_{r_t}^{\tau} = [B_{r_1}^{\tau}\dots[B_{r_t}^{\tau}.$$

Поэтому система пар слов (14) тогда и только тогда сочетаема, когда сочетаем ее перевод (15), что и требовалось доказать.

Докажем теперь следующую теорему.

5.6. *Ограниченная проблема сочетаемости для алфавита* A_0 *и числа 90 неразрешима.*

Обозначим попрежнему через $\mathfrak{T}$ алгорифм перевода, перерабатывающий всякое слово в алфавите A_8 в перевод этого слова [**II. § 4.14 (11)**].

Допустим вопреки доказываемому, что $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над $\{a, b, x, y\}$, применимый ко всякой системе 90 пар слов в A_0 и аннулирующий такую систему тогда и только тогда, когда она сочетаема. Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{H}$:

$$(16)\qquad \mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{T}.$$

$\mathfrak{K}$ есть нормальный алгорифм над A_8 [**(16), III. § 3.4.2**] и

$$(17)\ \mathfrak{K}(S) \simeq \mathfrak{H}([S^{\tau}) \quad (S \text{ — слово в } A_8) \quad [\textbf{(16), III. § 3.4.3, II. § 4.14 (11)}].$$

В силу применимости алгорифма $\mathfrak{H}$ ко всякой системе 90 пар слов в A_0 и условного равенства (17), алгорифм $\mathfrak{K}$ применим ко всякой системе 90 пар слов в A_7 [5.4]. Если S есть система 90 пар слов в A_7, то $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда аннулирует S, когда $\mathfrak{H}$ аннулирует $[S^\tau$ [(17)]. Но $[S^\tau$ есть система 90 пар слов в A_0 [5.4] и $\mathfrak{H}$ аннулирует $[S^\tau$ тогда и только тогда, когда эта система сочетаема, т. е. когда сочетаема система S [5.5]. Таким образом, нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ над A_8, применимый ко всякой системе 90 пар слов в A_7, аннулирует те и только те из этих систем, которые сочетаемы. Такой алгорифм, однако, невозможен [5.2]. Поэтому невозможен и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над $\{a, b, x, y\}$, применимый ко всякой системе 90 пар слов в A_0 и аннулирующий такую систему тогда и только тогда, когда она сочетаема. Иначе говоря, неразрешима проблема сочетаемости для алфавита A_0 и числа 90, что и требовалось доказать.

Перейдем, наконец, от алфавита A_0 и числа 90 к любому алфавиту, содержащему более одной буквы, и любому числу, большему или равному 90.

Возможность замены числа 90 в теореме **5.6** любым большим числом усматривается из того, что в нормальном исчислении Поста $\mathfrak{C}_3$, лежащем в основе доказательства теоремы **5.6**, можно, без всякого изменения этого исчисления по существу, добавить сколько угодно «новых» непосредственных выводимостей

$$C_rP \vdash PD_r \quad (89 \leqslant r \leqslant s-2),$$

где $s > 90$ и где

$$\left.\begin{aligned} C_r &= C_1 \\ D_r &= D_1 \end{aligned}\right\} \ (89 \leqslant r \leqslant s-2).$$

Возможность замены алфавита A_0 любым расширением этого алфавита усматривается из того, что всякая система пар слов в A_0 является системой пар слов в любом расширении алфавита A_0. Возможность перехода от расширений алфавита A_0 к любым алфавитам, содержащим более одной буквы, очевидна. Мы получаем, таким образом, следующий результат.

5.7. *Если алфавит* A *содержит более одной буквы, а* $s \geqslant 90$, *то ограниченная проблема сочетаемости для* A *и* s *неразрешима.*

Отсюда непосредственно вытекает следующая теорема Поста [27].

5.8. *Для всякого алфавита, содержащего более одной буквы, не разрешима общая проблема сочетаемости.*

6. Из результатов этого параграфа нам понадобится теорема **3.1**. Мы и ее «переведем» в алфавит A_0, воспользовавшись для этого прежней операцией перевода [5] (применяемой теперь лишь к словам в A_8). Положим

(1) $$A = [featmn^\tau$$
$$= ab^6a^2b^5a^2ba^2a^{13}a^2b^{14}a \qquad [5\ (13)],$$

(2) $$G_r = [C_r^\tau$$

(3) $$H_r = [D_r^\tau \quad (1 \leqslant r \leqslant 88).$$

A, G_r, H_r $(1 \leqslant r \leqslant 88)$ являются, очевидно, словами в A_0. Докажем следующую теорему.

6.1. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом* A_0, *аннулирующий те и только те слова* X *в* A_0, *для которых равенство*

$$AH_{r_1}\ldots H_{r_t}=G_{r_1}\ldots G_{r_t}X \tag{4}$$

не соблюдается ни при каком выборе числа t *и чисел* $r_1,\ldots, r_t$ *из ряда* $1,\ldots, 88$.

Допустим, вопреки доказываемому, что $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над A_0, аннулирующий те и только те слова X в A_0, для которых равенство (4) не соблюдается ни при каком допустимом выборе чисел t и $r_1,\ldots, r_t$.

Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{K}=\mathfrak{H}\circ\mathfrak{T}. \tag{5}$$

$\mathfrak{K}$ — нормальный алгорифм над A_6 [(5), III. § 3.4.2] и $\mathfrak{K}(Y)\simeq\mathfrak{H}([Y^{\tau}]$ (Y — слово в A_6) [(5), III. § 3.4.3, II. § 4.14(11)]. Поэтому $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда аннулирует слово Y в A_6, когда $\mathfrak{H}$ аннулирует его перевод, а это имеет место тогда и только тогда, когда равенство

$$AH_{r_1}\ldots H_{r_t}=G_{r_1}\ldots G_{r_t}[Y^{\tau} \tag{6}$$

не соблюдается ни при каком выборе числа t и чисел $r_1,\ldots, r_t$ из ряда $1,\ldots, 88$. Но равенство (6), согласно (1), (3), (2) и I. § 6.2.9, равносильно равенству

$$[\mathit{feamn}D_{r_1}\ldots D_{r_t}^{\tau}=[C_{r_1}\ldots C_{r_t}Y^{\tau},$$

а последнее равносильно 2(30) [I. § 6.2.5]. Следовательно, нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ над A_6 аннулирует те и только те слова Y в A_6, для которых равенство 2(30) не имеет места ни при каком выборе числа t и чисел $r_1,\ldots, r_t$ из ряда $1,\ldots, 88$. Такой алгорифм, однако, невозможен [3.1]. Поэтому невозможен и нормальный алгорифм над A_0, аннулирующий те и только те слова в A_0, для которых равенство (4) не соблюдается ни при каком выборе числа t и чисел $r_1,\ldots, r_t$ из ряда $1,\ldots, 88$.

§ 10. Проблема представимости матриц

1. Пусть $U_1,\ldots, U_q$ — матрицы порядка n. Будем говорить о матрице U того же порядка, что она *представима через* $U_1,\ldots, U_q$, если для некоторого целого положительного числа t и целых чисел $r_1,\ldots, r_t$ из ряда $1,\ldots, q$ имеет место равенство

$$U=U_{r_1}\times\ldots\times U_{r_t}. \tag{1}$$

В связи с этим понятием возникают следующие массовые проблемы.

Общая проблема представимости. Дано целое положительное число n; требуется указать единый общий конструктивный метод, посредством которого можно было бы узнавать для любой системы матриц U, $U_1,\ldots, U_q$ порядка n, представима ли матрица U через матрицы $U_1,\ldots, U_q$.

Частная проблема представимости. Даны матрицы $U_1, \ldots, U_q$ порядка n; требуется указать единый общий конструктивный метод, посредством которого можно было бы узнавать для любой матрицы U того же порядка, представима ли она через $U_1, \ldots, U_q$.

В общей проблеме представимости задается число n. Всякому значению числа n соответствует своя массовая проблема.

В частной проблеме представимости задается система матриц $U_1, \ldots, U_q$ одного и того же порядка. Всякому выбору такой системы соответствует своя массовая проблема.

Эти проблемы могут быть уточнены как нормальные массовые проблемы. Для такого рода уточнения постановки частной проблемы представимости необходимо избрать определенный способ записи матриц в виде слов в некотором алфавите. Один такой способ был описан в III. § 8.1. Его мы и будем придерживаться.

Для уточнения постановки общей проблемы представимости необходим определенный способ записи систем матриц в виде слов в некотором алфавите. Мы расширим для этого алфавит матриц M [I. § 2.6] введением новой буквы «&», что дает алфавит матричных систем

$$\mathrm{M_C} = \{1, —, *, \square, \&\}.$$

Систему матриц $U_1, \ldots, U_q$, записанных в виде слов в M, мы будем записывать в виде слова

$$U_1\&\ldots\&U_q$$

в алфавите $\mathrm{M_C}$.

Мы можем теперь следующим образом поставить проблемы представимости матриц как нормальные массовые проблемы.

Общая проблема представимости. Дано целое положительное число n; требуется построить нормальный алгорифм над алфавитом $\mathrm{M_C}$, применимый ко всякой системе

$$U\&U_1\&\ldots\&U_q \tag{2}$$

матриц порядка n и аннулирующий такую систему тогда и только тогда, когда матрица U представима через $U_1, \ldots, U_q$.

Частная проблема представимости. Даны матрицы $U_1, \ldots, U_q$ порядка n; требуется построить нормальный алгорифм, применимый ко всякой матрице порядка n и аннулирующий такую матрицу тогда и только тогда, когда она представима через матрицы $U_1, \ldots, U_q$.

Мы покажем в этом параграфе, что общая проблема представимости неразрешима при всяком n, большем или равном 6. Более того, мы покажем, что при всяком таком n может быть так построена система матриц $U_1, \ldots, U_q$ порядка n, что соответствующая ей частная проблема представимости будет неразрешима.

2. Установим прежде всего некоторые свойства алгорифма $\mathfrak{M}$, построенного согласно III. § 8.6.1.

2.1. *Для всяких слов* $P_1, \ldots, P_t$ $(t > 0)$ *в алфавите* $\mathrm{A_0}$

$$\mathfrak{M}(P_1 \ldots P_t) = \mathfrak{M}(P_1) \times \ldots \times \mathfrak{M}(P_t).$$

Это доказывается индукцией по t на основе III. § 8.6 (4).

2.2. *Для всяких букв* $\xi_1, \ldots, \xi_t$ $(t > 0)$ *алфавита* $\mathrm{A_0}$

$$\mathfrak{M}(\xi_1 \ldots \xi_t) = A_{r_1} \times \ldots \times A_{r_t},$$

где

$$r_p = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_p = a \\ 2, & \text{если } \xi_p = b. \end{cases}$$

Это следует из 2.1 в силу III. § 8.6 (2) и III. § 8.6 (3).

2.3. *Если P — непустое слово в* A_0, *то матрица* $\mathfrak{M}(P)$ *представима через* A_1 *и* A_2.

Это следует из 2.2.

Пусть $M_1 * M_2$ и $N_1 * N_2$ — пары целых чисел. Условимся говорить, что первая пара *больше* второй, если

$$\begin{matrix} M_1 \geqslant N_1, \\ M_2 \geqslant N_2 \end{matrix}$$

и пары $M_1 * M_2$, $N_1 * N_2$ неодинаковы.

Очевидно, невозможно, чтобы пара $M_1 * M_2$ была больше пары $N_1 * N_2$ и вместе с тем пара $N_1 * N_2$ была больше пары $M_1 * M_2$.

Условимся говорить о матрице 2-го порядка $N_{11} * N_{12} \square N_{21} * N_{22}$, что она *высокая*, если ее первая строка $N_{11} * N_{12}$ больше второй ее строки; что она *низкая*, если вторая ее строка больше первой строки.

В силу предыдущего замечания, матрица 2-го порядка не может быть высокой и вместе с тем низкой.

2.4. *Если N — положительная унимодулярная матрица, то матрица $A_1 \times N$ высокая, а матрица $A_2 \times N$ низкая.*

В самом деле, пусть для N имеем равенство III. § 8.5 (1), где N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22} — целые числа. Так как N — положительная матрица, N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22} неотрицательны. Так как N унимодулярна, невозможно, чтобы оба числа N_{11} и N_{12} равнялись нулю.

Для матрицы $A_1 \times N$ имеем равенство III. § 8.5 (2). Так как $N_{11} \geqslant 0$ и $N_{12} \geqslant 0$, имеем

$$N_{11} + N_{21} \geqslant N_{21}, \tag{1}$$

$$N_{12} + N_{22} \geqslant N_{22}. \tag{2}$$

Так как одно, по крайней мере, из чисел N_{11} и N_{12} отлично от нуля, строки матрицы $A_1 \times N$ не совпадают. В силу (1) и (2) первая из них больше второй, т. е. матрица $A_1 \times N$ высокая.

Аналогично доказывается, что матрица $A_2 \times N$ низкая.

2.5. *Если слово P в алфавите* A_0 *начинается буквой a, то матрица* $\mathfrak{M}(P)$ *высокая, а если это слово начинается буквой b, то матрица* $\mathfrak{M}(P)$ *низкая.*

В самом деле, пусть слово P в алфавите A_0 начинается буквой a, т. е.

$$P = aP_1 \tag{3}$$

для некоторого слова P_1 в A_0. Тогда

$$\mathfrak{M}(P) = \mathfrak{M}(a) \times \mathfrak{M}(P_1) \qquad [(3), \text{III. § 8.6 (4)}]$$

$$= A_1 \times \mathfrak{M}(P_1) \qquad [\text{III. § 8.6 (2)}],$$

причем $\mathfrak{M}(P_1)$ есть положительная унимодулярная матрица [III. § 8.6.1]. Поэтому матрица $\mathfrak{M}(P)$ высокая [2.4].

Аналогичным образом доказывается, что матрица $\mathfrak{M}(P)$ низкая, если P начинается буквой b.

2.6. *Если слова P и Q в алфавите A_0 таковы, что*

$$\mathfrak{M}(P)=\mathfrak{M}(Q), \tag{4}$$

то либо

$$P=Q=\Lambda, \tag{5}$$

либо слова P и Q оба непусты и начинаются одной и той же буквой.

В самом деле, пусть равенство (4) имеет место для слов P и Q в A_0.

Если $P=\Lambda$, то $\mathfrak{M}(Q)=\mathfrak{M}(P)=I_2$ [(4), III. § 8.6(1)] и, так как матрица I_2, очевидно, не является ни высокой, ни низкой, слово Q не может начинаться ни буквой a, ни буквой b [2.5], т. е. оно пусто. Аналогичным образом усматривается, что $P=\Lambda$, коль скоро $Q=\Lambda$. Таким образом, либо имеют место оба равенства (5), либо оба слова P, Q непусты. В последнем случае они должны начинаться одной и той же буквой, так как иначе, в силу (4), матрица $\mathfrak{M}(P)$ была бы одновременно высокой и низкой [2.5], что невозможно.

2.7. *Если слова P и Q в A_0 таковы, что имеет место равенство* (4), *то*

$$P=Q.$$

В самом деле, пусть равенство (4) имеет место для слов P и Q в A_0.

Обозначим через R наибольшее общее начало слов P и Q [I. § 3.11.3]. Имеем

$$P=RS, \tag{6}$$

$$Q=RT \tag{7}$$

для некоторых слов S и T, взаимно простых слева [I. § 3.11.4]. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}(R)\times\mathfrak{M}(S)&=\mathfrak{M}(RS) && \text{[III. § 8.6(4)]}\\
&=\mathfrak{M}(P) && \text{[(6)]}\\
&=\mathfrak{M}(Q) && \text{[(4)]}\\
&=\mathfrak{M}(RT) && \text{[(7)]}\\
&=\mathfrak{M}(R)\times\mathfrak{M}(T) && \text{[III. § 8.6(4)]}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Здесь матрица $\mathfrak{M}(R)$ унимодулярна [III. § 8.6.1] и потому имеет обратную матрицу. Умножая обе части равенства (8) на $\mathfrak{M}(R)^{-1}$, получаем

$$\mathfrak{M}(S)=\mathfrak{M}(T),$$

откуда следует, что либо

$$S = T = \Lambda, \tag{9}$$

либо слова S и T начинаются одной и той же буквой [2.6]. Последнее, однако, исключено, так как слова S и T взаимно просты слева [I. § 3.11.1]. Следовательно, имеем (9) и

$$P = R \qquad [(6), (9)]$$
$$= Q \qquad [(7), (9)],$$

что и требовалось доказать.

3. Положим теперь в обозначениях § 9.6

$$B = \mathfrak{M}(A), \tag{1}$$
$$K_r = \mathfrak{M}(G_r) \tag{2}$$
$$L_r = \mathfrak{M}(H_r) \tag{3}$$
$$(1 \leqslant r \leqslant 88)$$

и докажем следующую лемму.

3.1. *Если X есть слово в A_0, то равенство* § 9.6 (4) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$B \times L_{r_1} \times \ldots \times L_{r_t} = K_{r_1} \times \ldots \times K_{r_t} \times \mathfrak{M}(X). \tag{4}$$

В самом деле, равенство § 9.6 (4), в силу 2.7, равносильно равенству

$$\mathfrak{M}(AH_{r_1} \ldots H_{r_t}) = \mathfrak{M}(G_{r_1} \ldots G_{r_t} X),$$

а последнее, согласно 2.1, (1), (2) и (3), равносильно (4).

Следующая лемма непосредственно вытекает из 3.1.

3.2. *Если X есть слово в A_0, то для того, чтобы равенство* § 9.6 (4) *не соблюдалось ни при каком выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$ необходимо и достаточно, чтобы ни при каком выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$ не соблюдалось равенство* (4).

Докажем теперь следующую лемму.

3.3. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом* M, *аннулирующий те и только те положительные унимодулярные матрицы Y 2-го порядка, для которых равенство*

$$B \times L_{r_1} \times \ldots \times L_{r_t} = K_{r_1} \times \ldots \times K_{r_t} \times Y \tag{5}$$

не соблюдается ни при каком выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$.

Допустим, в самом деле, что $\mathfrak{H}$ есть такой алгорифм. Построим тогда алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{M}. \tag{6}$$

$\mathfrak{K}$ — нормальный алгорифм над A_0, как и $\mathfrak{M}$ [(6), III. § 3.4.2].

$$\mathfrak{K}(X) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{M}(X)) \quad (X \text{ — слово в } A_0) \qquad [(6), \text{III. § 3.4.3}],$$

откуда следует, что $\mathfrak{K}$ аннулирует те и только те слова X в A_0, для которых

(7) $$\mathfrak{H}(\mathfrak{M}(X)) = \Lambda.$$

Но для всякого слова X в A_0, $\mathfrak{M}(X)$ есть положительная унимодулярная матрица 2-го порядка [**III.** § 8.6.1]. Поэтому, согласно предположению об алгорифме $\mathfrak{H}$, равенство (7) имеет место тогда и только тогда, когда равенство (4) не соблюдается ни при каком выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$. Следовательно, $\mathfrak{K}$ аннулирует те и только те слова в A_0, для которых равенство § 9.6 (4) не соблюдается ни при каком выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$ [3.2]. Такой нормальный алгорифм над A_0, однако, невозможен [§ 9.6.1]. Поэтому невозможен и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над A_0, аннулирующий те и только те положительные унимодулярные матрицы Y 2-го порядка, для которых равенство (5) не соблюдается ни при каком выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$.

4. Нам понадобится теперь следующее легко устанавливаемое свойство прямого сложения матриц.

4.1. *Если M_1 и M_2 — матрицы порядка m, а N_1 и N_2 — матрицы порядка n, то*

$$(M_1 \dotplus N_1) \times (M_2 \dotplus N_2) = (M_1 \times M_2) \dotplus (N_1 \times N_2).$$

Индукцией по числу k отсюда выводится более общая теорема:

4.2. *Если $M_1, \ldots, M_k$ — матрицы порядка m, а $N_1, \ldots, N_k$ — матрицы порядка n, то*

$$(M_1 \dotplus N_1) \times \ldots \times (M_k \dotplus N_k) = (M_1 \times \ldots \times M_k) \dotplus (N_1 \times \ldots \times N_k).$$

Из определения прямой суммы матриц вытекает следующая лемма.

4.3. *Если M_1 и M_2 — матрицы одинакового порядка и*

$$M_1 \dotplus N_1 = M_2 \dotplus N_2,$$

то

$$M_1 = M_2,$$

$$N_1 = N_2.$$

5. Положим

(1) $$X_r = L_r \dotplus K_r \quad (1 \leqslant r \leqslant 88),$$

(2) $$C = B \dotplus I_2,$$

(3) $$B_1 = A_1 \dotplus A_1,$$

(4) $$B_2 = A_2 \dotplus A_2.$$

Все так определенные матрицы X_r $(1 \leqslant r \leqslant 88)$, C, B_1, B_2 суть, очевидно, матрицы 4-го порядка.

Докажем следующую лемму.

5.1. *Равенство* 3 (5) *тогда и только тогда имеет место для матрицы 2-го порядка Y, числа t $(t \geqslant 0)$ и чисел $r_1, \ldots, r_t$, когда матрица 4-го порядка*

(5) $$C \times X_{r_1} \times \ldots \times X_{r_t} \times (I_2 \dotplus Y)$$

представима через матрицы B_1 и B_2.

Имеем прежде всего

$$C \times X_{r_1} \times \ldots \times X_{r_t} \times (I_2 + Y)$$

$$= (B + I_2) \times (L_{r_1} + K_{r_1}) \times \ldots \times (L_{r_t} + K_{r_t}) \times (I_2 + Y) \quad [(2), (1)]$$

$$= (B \times L_{r_1} \times \ldots \times L_{r_t}) + (K_{r_1} \times \ldots \times K_{r_t} \times Y) \quad [4.2]. \tag{6}$$

Допустим теперь, что равенство 3(5) имеет место. Тогда

$$C \times X_{r_1} \times \ldots \times X_{r_t} \times (I_2 + Y)$$

$$= (B \times L_{r_1} \times \ldots \times L_{r_t}) + (B \times L_{r_1} \times \ldots \times L_{r_t}) \quad [(6), 3(5)]$$

$$= Z + Z, \tag{7}$$

где

$$Z = B \times L_{r_1} \times \ldots \times L_{r_t}$$

$$= \mathfrak{M}(AH_{r_1} \ldots H_{r_t}) \quad [3(1), 3(3), 2.1]. \tag{8}$$

Так как слово $AH_{r_1} \ldots H_{r_t}$ непусто [§ 9.6(1)], матрица Z представима через A_1 и A_2 [(8), 2.3], т. е.

$$Z = A_{q_1} \times \ldots \times A_{q_s}, \tag{9}$$

где $q_p = 1$ или 2 $(1 \leqslant p \leqslant s)$, $s > 0$.

Имеем

$$C \times X_{r_1} \times \ldots \times X_{r_t} \times (I_2 + Y) = (A_{q_1} \times \ldots \times A_{q_s}) + (A_{q_1} \times \ldots \times A_{q_s}) \quad [(7), (9)]$$

$$= (A_{q_1} + A_{q_1}) \times \ldots \times (A_{q_s} + A_{q_s}) \quad [4.2]$$

$$= B_{q_1} \times \ldots \times B_{q_s} \quad [(3), (4)],$$

что и показывает, что матрица (5) представима через B_1 и B_2.

Допустим теперь, что матрица (5) представима через B_1 и B_2. Тогда для некоторого положительного s и некоторых $q_1, \ldots, q_s$ равных 1 или 2, имеем

$$C \times X_{r_1} \times \ldots \times X_{r_t} \times (I_2 + Y) = B_{q_1} \times \ldots \times B_{q_s}$$

$$= (A_{q_1} \times \ldots \times A_{q_s}) + (A_{q_1} \times \ldots \times A_{q_s})$$

$$[(3), (4), 4.2]$$

$$= Z + Z, \tag{10}$$

где Z определяется равенством (9). Сравнивая равенства (6) и (10), заключаем, согласно 4.3, что

$$B \times L_{r_1} \times \ldots \times L_{r_t} = Z,$$

$$K_{r_1} \times \ldots \times K_{r_t} \times Y = Z,$$

откуда следует равенство 3(5).

Лемма 5.1, таким образом, доказана.

Матрицы B, K_r, L_r $(1 \leqslant r \leqslant 88)$ унимодулярны [3(1), 3(2), 3(3), III. § 8.6.1]. Принимая во внимание, что прямая сумма двух унимодулярных матриц есть унимодулярная матрица, заключаем отсюда, что матрицы C и X_r $(1 \leqslant r \leqslant 88)$ унимодулярны [(2), (1)]. Существуют поэтому обратные им матрицы C^{-1}, X_r^{-1} $(1 \leqslant r \leqslant 88)$.

Докажем следующую лемму.

5.2. *Пусть Y — матрица 2-го порядка. Для того, чтобы равенство* 3(5) *не соблюдалось ни при каком выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда* $1, \ldots, 88$, *необходимо и достаточно, чтобы ни при каком выборе числа t, положительного числа s, чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда* $1, \ldots, 88$ *и чисел $q_1, \ldots, q_s$, равных* 1 *или* 2, *не соблюдалось равенство*

$$I_2 + Y = X_{r_t}^{-1} \times \ldots \times X_{r_1}^{-1} \times C^{-1} \times B_{q_1} \times \ldots \times B_{q_s}. \tag{11}$$

В самом деле, согласно 5.1, равенство 3(5) тогда и только тогда соблюдается при определенном выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$, когда при том же выборе чисел t, $r_1, \ldots, r_t$ могут быть так подобраны положительное число s и числа $q_1, \ldots, q_s$, равные 1 или 2, что

$$C \times X_{r_1} \times \ldots \times X_{r_t} \times (I_2 + Y) = B_{q_1} \times \ldots \times B_{q_s}. \tag{12}$$

Ввиду существования матриц C^{-1}, $X_{r_1}^{-1}, \ldots, X_{r_t}^{-1}$ равенство (11) равносильно равенству (12) и потому лемма 5.2 верна.

Основываясь на леммах 3.3 и 5.2, докажем следующую лемму.

5.3. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом* M, *аннулирующий те и только те матрицы 4-го порядка, которые не могут быть представлены в виде*

$$X_{r_t}^{-1} \times \ldots \times X_{r_1}^{-1} \times C^{-1} \times B_{q_1} \times \ldots \times B_{q_s}, \tag{13}$$

где $t \geqslant 0$, $s > 0$, $r_1, \ldots, r_t$ — числа из ряда $1, \ldots, 88$, *а $q_1, \ldots, q_s$ равны* 1 *или* 2.

В самом деле, допустим, что $\mathfrak{H}$ есть такой алгорифм. Воспользуемся тогда нормальным алгорифмом $\mathfrak{A}$ над M, перерабатывающим всякую матрицу 2-го порядка Y в матрицу $I_2 + Y$ [III. § 8.3].

Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{A}. \tag{14}$$

$\mathfrak{K}$ есть нормальный алгорифм над M [(14), III. § 3.4.2], и для любой матрицы 2-го порядка Y

$$\mathfrak{K}(Y) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{A}(Y)) \qquad \text{[(14), III. § 3.4.3]}$$
$$\simeq \mathfrak{H}(I_2 + Y),$$

откуда следует, что $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда аннулирует матрицу 2-го порядка Y, когда $\mathfrak{H}$ аннулирует матрицу 4-го порядка $I_2 + Y$.

Последнее же имеет место тогда и только тогда, когда матрица $I_2 + Y$ не может быть представлена в виде (13), т. е. когда ни при каком выборе числа t, положительного числа s, чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$ и чисел $q_1, \ldots, q_s$, равных 1 или 2, не имеет место равенство (11). Согласно 5.2, отсюда следует, что $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда аннулирует матрицу 2-го порядка Y, когда равенство 3 (5) не соблюдается ни при каком выборе числа t и чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, \ldots, 88$. Такой нормальный алгорифм $\mathfrak{R}$ над алфавитом M, однако, невозможен [3.3]. Невозможен поэтому и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над M, аннулирующий те и только те матрицы 4-го порядка, которые не могут быть представлены в виде (13), что и требовалось доказать.

6. Мы перейдем теперь к подготовке последнего шага — перехода от леммы 5.3 к построению матриц 6-го порядка $U_1, \ldots, U_{91}$, для системы которых будет неразрешима частная проблема представимости. Прежде всего введем матрицы 2-го порядка

(1) $$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(2) $$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(3) $$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

(4) $$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Как нетрудно видеть,

(5) $$E_i^2 = E_i \quad (i = 1, 2) \qquad [(1), (2)],$$

откуда

(6) $$E_i^s = E_i \quad (i = 1, 2;\ s = 1, 2, \ldots).$$

Имеем далее

(7) $$E_1 \times E_2 = E_2 \times E_1 = O_{22} \qquad [(1), (2)].$$

Для любой матрицы

(8) $$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

имеем

(9) $$E_1 \times N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [(1), (8)],$$

(10) $$E_2 \times N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \qquad [(2), (8)],$$

(11) $$N \times E_1 = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ N_{21} & 0 \end{bmatrix} \qquad [(1), (8)],$$

(12) $$N \times E_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{bmatrix} \qquad [(2), (8)].$$

Согласно (3), (4), (6), (10) и (11),

(13) $$E_2^t \times G \times E_1^s = F \quad (t = 0, 1, 2, \ldots; \ s = 1, 2, \ldots).$$

7. Условимся обозначать через $[U^\Delta$ общий наибольший делитель коэффициентов матрицы U.

Имеем

(1) $$[F^\Delta = [G^\Delta = 2.$$

Условимся, как обычно, выражать формулой

$$N|M$$

делимость числа M на число N.

7.1. *Для любых двух матриц U и V одного и того же порядка*

$$[U^\Delta \times [V^\Delta | [U \times V^\Delta.$$

В самом деле, все коэффициенты матрицы U делятся на $[U^\Delta$, а все коэффициенты матрицы V — на $[V^\Delta$. Отсюда следует, что произведение любого коэффициента матрицы U на любой коэффициент матрицы V делится на $[U^\Delta \times [V^\Delta$. А так как коэффициенты матрицы $U \times V$ суть суммы таких произведений, они также все делятся на $[U^\Delta \times [V^\Delta$. Поэтому и их общий наибольший делитель $[U \times V^\Delta$ делится на $[U^\Delta \times [V^\Delta$, что и требовалось доказать.

7.2. *Для любых матриц $U_1, \ldots, U_q$ $(q \geqslant 1)$ одного и того же порядка*

$$[U_1^\Delta \times \ldots \times [U_q^\Delta | [U_1 \times \ldots \times U_q^\Delta.$$

При $q = 1$ это очевидно. Для произвольного q это легко доказывается с помощью 7.1 индукцией по q.

8. Положим теперь

(1) $$V_r = \begin{cases} X_r^{-1} & (1 \leqslant r \leqslant 88) \\ C^{-1} & (r = 89) \\ B_{r-89} & (r = 90, 91), \end{cases}$$

(2) $$W_r = \begin{cases} E_2 & (1 \leqslant r \leqslant 88) \\ G & (r = 89) \\ E_1 & (r = 90, 91). \end{cases}$$

Все V_r $(1 \leqslant r \leqslant 91)$ суть матрицы 4-го порядка; все W_r — матрицы 2-го порядка.

Положим

(3) $$U_r = V_r + W_r \quad (1 \leqslant r \leqslant 91).$$

и покажем, что для построенной так системы матриц 6-го порядка $U_1, \ldots, U_{91}$ проблема представимости неразрешима. Докажем для этого следующую лемму

8.1. *Матрица 4-го порядка Z тогда и только тогда может быть представлена в виде* 5 (13) *$(t \geqslant 0; \ s > 0; \ r_1, \ldots, r_t$ — числа из ряда*

1,..., 88; $q_1,\ldots, q_s$ *равны 1 или 2), когда матрица 6-го порядка* $Z \dotplus F$ *представима через* $U_1,\ldots, U_{91}$.

В самом деле, пусть

(4) $$Z = X_{r_t}^{-1} \times \ldots \times X_{r_1}^{-1} \times C^{-1} \times B_{q_1} \times \ldots \times B_{q_s},$$

где $t \geqslant 0$, $s > 0$, $r_1,\ldots, r_t$ — числа из ряда 1,..., 88 и где $q_1,\ldots, q_s$ равны 1 или 2. Тогда

(5) $$Z = V_{r_t} \times \ldots \times V_{r_1} \times V_{89} \times V_{89+q_1} \times \ldots \times V_{89+q_s} \qquad [(4), (1)]$$

и вместе с тем

(6) $$F = W_{r_t} \times \ldots \times W_{r_1} \times W_{89} \times W_{89+q_1} \times \ldots \times W_{89+q_s} \qquad [6\,(13), (2)].$$

Поэтому

$$Z \dotplus F = U_{r_t} \times \ldots \times U_{r_1} \times U_{89} \times U_{89+q_1} \times \ldots \times U_{89+q_s} \qquad [(5), (6), 4.2, (3)]$$

и, значит, матрица $Z \dotplus F$ представима через $U_1,\ldots, U_{91}$.

Обратно, допустим, что матрица 4-го порядка Z такова, что матрица $Z \dotplus F$ представима через $U_1,\ldots, U_{91}$, и покажем, что тогда матрица Z может быть представлена в виде 5 (13).

Имеем

(7) $$Z \dotplus F = U_{h_1} \times \ldots \times U_{h_w}$$

для некоторого положительного числа w и некоторых чисел $h_1,\ldots, h_w$ из ряда 1,..., 91. Отсюда

(8) $$Z \dotplus F = (V_{h_1} \times \ldots \times V_{h_w}) \dotplus (W_{h_1} \times \ldots \times W_{h_w}) \qquad [(7), (3), 4.2],$$

(9) $$Z = V_{h_1} \times \ldots \times V_{h_w}, \qquad [(8), 4.3],$$

(10) $$F = W_{h_1} \times \ldots \times W_{h_w} \qquad [(8), 4.3].$$

В силу 6 (5) и 6 (7), лишь матрицы E_1, E_2 и O_{22} представимы через E_1 и E_2. Матрица F, следовательно, не представима через E_1 и E_2 [6 (3)], т. е. не представима через матрицы $W_1,\ldots, W_{88}$, W_{90}, W_{91} [(2)]. Отсюда, в силу (10), заключаем, что среди чисел $h_1,\ldots, h_w$ встречается число 89, т. е. что

(11) $$h_j = 89$$

для некоторого j.

Существует не более одного числа j, удовлетворяющего условию (11), так как

$$[W_{h_1}^{\Delta} \times \ldots \times [W_{h_w}^{\Delta} | 2 \qquad [(10), 7.2, 7\,(1)],$$

а при соблюдении условия (11)

$$[W_{h_j}^{\Delta} = 2 \qquad [(2), 7\,(1)].$$

Таким образом, равенство (11) соблюдается для одного и только одного числа j. Имеем

(12) $W_{h_j}=G$ [(11), (2)],

тогда как

(13) $W_{h_i}=E_1$ или E_2 $(i\neq j)$ [(2)].

Если бы существовали числа i и k такие, что

(14) $W_{h_i}=E_1$,

(15) $W_{h_k}=E_2$,

(16) $i<j$,

(17) $k<j$,

то, в силу (13), нашлись бы и числа i, k, удовлетворяющие условиям (14)—(17) и такие, что

(18) $|i-k|=1$.

Мы имели бы тогда

$$W_{h_1}\times\ldots\times W_{h_w}=O_{22}$$

вопреки (10). Следовательно, чисел i и k, удовлетворяющих условиям (14)—(17), не существует и, значит, все матрицы W_{h_i}, где $i<j$, равны друг другу (если такие матрицы имеются, т. е. если $j>1$).

Аналогичным образом усматриваем, что равны друг другу все матрицы W_{h_i}, где $i>j$ (если имеются такие матрицы, т. е. если $j<w$).

Мы видим далее, что не может существовать чисел i, меньших j и таких, что $W_{h_i}=E_1$. Иначе мы имели бы, согласно доказанному, $W_{h_1}=E_1$ и потому матрица F имела бы вид $E_1\times N$ [(10)], что невозможно [6 (9), 6 (3)]. Аналогичным образом не может быть чисел i, больших j и таких, что $W_{h_i}=E_2$. Следовательно,

(19) $W_{h_i}=E_2$ $(1\leqslant i<j)$,

(20) $W_{h_i}=E_1$ $(j<i\leqslant w)$.

В силу (12), (19) и (20), правая часть равенства (10) равна одной из матриц G, $G\times E_1$, $E_2\times G$, $E_2\times G\times E_1$, сообразно тому, имеем ли мы $1=j=w$, $1=j<w$, $1<j=w$ или $1<j<w$. Но из этих четырех матриц лишь вторая и четвертая равны F [6 (4), 6 (3), 6 (11), 6 (10)]. Следовательно,

(21) $j<w$.

Положим

(22) $t=j-1$,

(23) $s=w-j$.

Имеем

(24) $t\geqslant 0$ [(22)],

(25) $s>0$ [(21), (23)],

(26) $j=t+1$ [(22)],

(27) $w=s+t+1$ [(23), (26)],

(28) $W_{h_i}=\begin{cases} E_2 \ (1\leqslant i\leqslant t) & [(19), (22)] \\ E_1 \ (t+1<i\leqslant t+1+s) & [(20), (26), (27)], \end{cases}$

(29) $1\leqslant h_i\leqslant 88 \quad (1\leqslant i\leqslant t)$ [(28), (2)],

(30) $h_i=90$ или $91 \ (t+1<i\leqslant t+1+s)$ [(28), (2)],

(31) $h_{t+1}=89$ [(11), (26)].

Положим

(32) $r_i=h_{t+1-i} \quad (1\leqslant i\leqslant t)$,

(33) $q_i=h_{t+1+i}-89 \quad (1\leqslant i\leqslant s)$.

Имеем

(34) $1\leqslant r_i\leqslant 88 \quad (1\leqslant i\leqslant t)$ [(32), (29)],

(35) $q_i=1$ или $2 \quad (1\leqslant i\leqslant s)$ [(33), (30)],

$V_{h_i}=V_{r_{t+1-i}} \quad (1\leqslant i\leqslant t)$ [(32)]

(36) $=X^{-1}_{r_{t+1-i}}$ [(34), (1)],

$V_{h_{t+1}}=V_{89}$ [(31)]

(37) $=C^{-1}$ [(1)],

$V_{h_i}=V_{89+q_{i-t-1}} \quad (t+1<i\leqslant t+1+s)$ [(33)]

(38) $=B_{q_{i-t-1}} \quad (t+1<i\leqslant t+1+s)$ [(35), (1)].

В силу (36)—(38) и (27), равенство (9) переписывается в виде (4). Следовательно, матрица Z представляется в виде 5 (13), где $t, s, r_1, \ldots, r_t, q_1, \ldots, q_s$ удовлетворяют условиям (24), (25), (34), (35), что и требовалось доказать.

Докажем теперь следующую теорему.

8.2. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом* М, *аннулирующий те и только те матрицы 6-го порядка, которые не представимы через* $U_1, \ldots, U_{91}$.

В самом деле, допустим, вопреки доказываемому, что $\mathfrak{H}$ — нормальный алгорифм над М, аннулирующий те и только те матрицы 6-го порядка, которые не представимы через $U_1, \ldots, U_{91}$. Воспользуемся нормальным алгорифмом $\mathfrak{B}$ над М, перерабатывающим всякую матрицу 4-го порядка Z в матрицу $Z+F$ [III. § 8.3]:

(39) $\mathfrak{B}(Z)=Z+F$ (Z — матрица 4-го порядка).

Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$:

(40) $\mathfrak{K}=\mathfrak{H}\circ\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{K}$ — нормальный алгорифм над М [(40), III. § 3.4.2] и

$\mathfrak{K}(Z)\simeq\mathfrak{H}(Z+F)$ (Z — матрица 4-го порядка) [(40), III. § 3.4.3, (39)].

Отсюда следует, что $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда аннулирует матрицу 4-го порядка Z, когда $\mathfrak{H}$ аннулирует матрицу $Z \dotplus F$. Последнее же имеет место тогда и только тогда, когда матрица $Z \dotplus F$ не представима через $U_1, \ldots, U_{91}$. Согласно 8.1 заключаем отсюда, что $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда аннулирует матрицу 4-го порядка Z, когда эта матрица не может быть представлена в виде 5(13), где $t \geqslant 0$, $s > 0$, $r_1, \ldots, r_t$ — числа из ряда $1, \ldots, 88$, а $q_1, \ldots, q_s$ равны 1 или 2. Такой нормальный алгорифм $\mathfrak{R}$, однако, невозможен [5.3]. Невозможен поэтому и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над М, аннулирующий те и только те матрицы 6-го порядка, которые не представимы через $U_1, \ldots, U_{91}$, что и требовалось доказать.

Пользуясь методом, неоднократно примененным в подобных случаях, получаем, как следствие из 8.2, теорему

8.3. *Частная проблема представимости, соответствующая построенной системе матриц $U_1, \ldots, U_{91}$, неразрешима.*

9. Нетрудно перейти в теоремах 8.2 и 8.3 от системы матриц 6-го порядка $U_1, \ldots, U_{91}$ к системе того же числа матриц произвольного порядка, большего 6. Для этого можно, например, основываться на следующей лемме.

9.1. *Пусть m — произвольное положительное число. Для того, чтобы матрица 6-го порядка U была представима через матрицы $U_1, \ldots, U_{91}$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $U \dotplus O_{m,m}$ была представима через матрицы $U_1 \dotplus O_{m,m}, \ldots, U_{91} \dotplus O_{m,m}$ порядка $m+6$.*

Справедливость этой леммы непосредственно следует из того, что равенство 1(1), в силу 4.2 и 4.3, равносильно равенству

$$U \dotplus O_{m,m} = (U_{r_1} \dotplus O_{m,m}) \times \ldots \times (U_{r_t} \dotplus O_{m,m}).$$

Пользуясь нормальным алгорифмом, перерабатывающим всякую матрицу 6-го порядка U в матрицу $U \dotplus O_{m,m}$ порядка $m+6$ $(m > 0)$, легко, с помощью теорем 8.2, 8.3 и леммы 9.1, доказать следующие теоремы.

9.2. *При всяком n, большем или равном 6, могут быть так построены матрицы $U_1^{(n)}, \ldots, U_{91}^{(n)}$ порядка n, что не будет возможен нормальный алгорифм над* М, *аннулирующий те и только те матрицы порядка n, которые не представимы через $U_1^{(n)}, \ldots, U_{91}^{(n)}$.*

9.3. *При всяком n, большем или равном 6, могут быть так построены матрицы $U_1^{(n)}, \ldots, U_{91}^{(n)}$ порядка n, что частная проблема представимости, соответствующая системе этих матриц, окажется неразрешимой.*

10. Переходя, наконец, к общей проблеме представимости, докажем следующую теорему.

10.1. *Ни при каком $n \geqslant 6$ невозможен нормальный алгорифм над* $\mathrm{M_C}$, *аннулирующий те и только те системы* 1(2) *матриц порядка n, для которых матрица U не представима через $U_1, \ldots, U_q$.*

В самом деле, пусть $n \geqslant 6$. Построим матрицы $U_1^{(n)}, \ldots, U_{91}^{(n)}$ порядка n согласно 9.2. Положим

$$V = \& U_1^{(n)} \& \ldots \& U_{91}^{(n)} \tag{1}$$

и построим алгорифм $\mathfrak{B}_{\mathrm{M_C}, V}$ [II. § 4.4]. $\mathfrak{B}_{\mathrm{M_C}, V}$ — нормальный алгорифм над $\mathrm{M_C}$, причем

(2) $$\mathfrak{B}_{M_C,V}(U) = U\&U_1^{(n)}\&\ldots\&U_{91}^{(n)}$$

для всякой матрицы U порядка n [II. § 4. 4. 5, (1)].

Допустим, вопреки доказываемому, что $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над M_C, аннулирующий произвольную систему 1 (2) матриц n-го порядка тогда и только тогда, когда матрица U не представима через $U_1^{(n)}, \ldots, U_{91}^{(n)}$.

Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{B}_{M_C,V}$ и $\mathfrak{H}$:

(3) $$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{B}_{M_C,V}.$$

$\mathfrak{K}$ — нормальный алгорифм над M_C [(3), III. § 3. 4. 2] и, значит, над М. Для всякой матрицы U порядка n имеем

$$\mathfrak{K}(U) \simeq \mathfrak{H}(U\&U_1^{(n)}\&\ldots\&U_{91}^{(n)}) \qquad [(3), \text{III. § 3. 4. 3, (2)}],$$

откуда следует, что $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда аннулирует матрицу n-го порядка U, когда $\mathfrak{H}$ аннулирует систему

$$U\&U_1^{(n)}\&\ldots\&U_{91}^{(n)}.$$

Последнее же имеет место тогда и только тогда, когда матрица U не представима через матрицы $U_1^{(n)}, \ldots, U_{91}^{(n)}$. Таким образом, нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ над М аннулирует те и только те матрицы n-го порядка, которые не представимы через $U_1^{(n)}, \ldots, U_{91}^{(n)}$. Такой алгорифм, однако, невозможен согласно построению матриц $U_1^{(n)}, \ldots, U_{91}^{(n)}$. Поэтому невозможен и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над M_C, аннулирующий те и только те системы 1 (2) матриц n-го порядка, для которых матрица U не представима через $U_1, \ldots, U_q$. Теорема 10. 1 тем самым доказана.

Аналогичным образом с помощью теоремы 9. 3 доказывается теорема

10. 2. *При $n \geqslant 6$, общая проблема представимости, соответствующая числу n, неразрешима.*

Эта теорема может быть также легко получена как следствие из 10. 1.

§ 11. Проблемы распознавания свойств ассоциативных исчислений

1. Мы вернемся теперь к ассоциативным исчислениям. Поскольку других исчислений мы здесь не станем рассматривать, будем называть их просто «исчислениями».

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — исчисления в алфавитах А и Б соответственно. Будем говорить о нормальном алгорифме $\mathfrak{C}$ над алфавитом А $\cup$ Б, что он есть *гомоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{B}$*, если он удовлетворяет следующим условиям.

Г. 1. $\mathfrak{C}$ перерабатывает всякое слово в алфавите А в некоторое слово в алфавите Б.

Г. 2. $\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(P) \parallel \mathfrak{C}(Q)$, коль скоро $\mathfrak{A} : P \parallel Q$.

Г. 3. $\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(PQ) \parallel \mathfrak{C}(P)\,\mathfrak{C}(Q)$ для всяких слов P и Q в А.

Следующая теорема легко доказывается.

1.1. *Если* $\mathfrak{C}$ *— гомоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *в исчисление* $\mathfrak{B}$, *а* $\mathfrak{D}$ *— гомоморфизм исчисления* $\mathfrak{B}$ *в исчисление* $\mathfrak{E}$, *то нормальная композиция этих гомоморфизмов* $\mathfrak{D} \circ \mathfrak{C}$ *есть гомоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *в исчисление* $\mathfrak{E}$.

В самом деле, пусть выполнены условия этой теоремы и пусть А, Б, Е означают, соответственно, алфавиты исчислений $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$. Положим

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{D} \circ \mathfrak{C} \tag{1}$$

и покажем, что $\mathfrak{F}$ есть гомоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{F}$ — нормальный алгорифм над объединением алфавитов алгорифмов $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{C}$ [(1), III. § 3.4.2], а так как $\mathfrak{C}$ есть алгорифм над А, а $\mathfrak{D}$ — алгорифм над Е, $\mathfrak{F}$ есть нормальный алгорифм над А $\cup$ Е.

Пусть P — слово в алфавите А. Тогда $\mathfrak{C}(P)$ есть слово в Б [Г.1 $\mathfrak{C}$]* и $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}(P))$ есть слово в Е [Г.1 $\mathfrak{D}$]. Но

$$\mathfrak{F}(P) \simeq \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(P)) \quad (P \text{ — слово в А}) \quad [(1),\ \text{III. § 3.4.3}]. \tag{2}$$

Таким образом, $\mathfrak{F}$ перерабатывает всякое слово в алфавите А в некоторое слово в алфавите Е, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию **Г.1**.

Пусть P и Q — такие слова в А, что

$$\mathfrak{A} : P \amalg Q. \tag{3}$$

Тогда

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(P) \amalg \mathfrak{C}(Q) \qquad [(3),\ \text{Г.2 } \mathfrak{C}], \tag{4}$$

$$\mathfrak{E} : \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(P)) \amalg \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(Q)) \qquad [(4),\ \text{Г.2 } \mathfrak{D}], \tag{5}$$

$$\mathfrak{E} : \mathfrak{F}(P) \amalg \mathfrak{F}(Q) \qquad [(5),\ (2)].$$

Таким образом, $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию **Г.2**.

Пусть, наконец, P и Q — произвольные слова в А. Тогда

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(PQ) \amalg \mathfrak{C}(P)\,\mathfrak{C}(Q) \qquad [\text{Г.3 } \mathfrak{C}], \tag{6}$$

$$\mathfrak{E} : \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(PQ)) \amalg \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(P)\,\mathfrak{C}(Q)) \qquad [(6),\ \text{Г.2 } \mathfrak{D}]. \tag{7}$$

Здесь $\mathfrak{C}(P)$ и $\mathfrak{C}(Q)$ — слова в Б [Г.1 $\mathfrak{C}$]. Поэтому

$$\mathfrak{E} : \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(P)\,\mathfrak{C}(Q)) \amalg \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(P))\,\mathfrak{D}(\mathfrak{C}(Q)) \qquad [\text{Г.3 } \mathfrak{D}]. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\mathfrak{E} : \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(PQ)) \amalg \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(P))\,\mathfrak{D}(\mathfrak{C}(Q)) \qquad [(7),\ (8),\ \S 1.6.5], \tag{9}$$

$$\mathfrak{E} : \mathfrak{F}(PQ) \amalg \mathfrak{F}(P)\,\mathfrak{F}(Q) \qquad [(9),\ (2)].$$

Таким образом, $\mathfrak{C}$ удовлетворяет условию **Г.3**, что и требовалось доказать.

2. Пусть $\mathfrak{C}$ есть гомоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ в алфавите А в исчисление $\mathfrak{B}$ в алфавите Б. Будем говорить, что $\mathfrak{C}$ есть *изоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *в исчисление* $\mathfrak{B}$, если удовлетворяется условие

Г.4. $\mathfrak{A} : P \amalg Q$, коль скоро P и Q суть такие слова в А, что $\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(P) \amalg \mathfrak{C}(Q)$.

---

* При ссылках на условия **Г.1**, **Г.2**, **Г.3**, **Г.4** и **Г.5** мы указываем алгорифмы, удовлетворяющие этим условиям.

2.1. *Если* $\mathfrak{C}$ — *изоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *в исчисление* $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{D}$ — *изоморфизм исчисления* $\mathfrak{B}$ *в исчисление* $\mathfrak{E}$, *то* $\mathfrak{D} \circ \mathfrak{C}$ *есть изоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *в исчисление* $\mathfrak{E}$.

В самом деле, пусть выполнены условия этой теоремы и пусть А, Б, Е означают соответственно алфавиты исчислений $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$, а алгорифм $\mathfrak{F}$ определяется условием 1 (1). Покажем, что $\mathfrak{F}$ есть изоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{E}$.

Так как $\mathfrak{C}$ есть гомоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{D}$ есть гомоморфизм исчисления $\mathfrak{B}$ в исчисление $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ есть гомоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{E}$ [1 (1), 1.1], причем имеет место 1 (2) [1 (1), III. § 3.4.3]. Остается доказать, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию Г.4.

Пусть P и Q — такие слова в А, что

(1) $$\mathfrak{E} : \mathfrak{F}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{F}(Q).$$

Имеем тогда

(2) $$\mathfrak{E} : \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(P)) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(Q)) \qquad [(1), 1(2)],$$

(3) $$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{C}(Q) \qquad [(2), \text{Г.4 } \mathfrak{D}],$$

$$\mathfrak{A} : P \perp\!\!\!\perp Q \qquad [(3), \text{Г.4 } \mathfrak{C}],$$

что и требовалось доказать.

3. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — исчисления соответственно в алфавитах А и Б; $\mathfrak{C}$ — гомоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{B}$. Будем говорить, что $\mathfrak{C}$ есть *гомоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *на исчисление* $\mathfrak{B}$, если удовлетворяется условие

Г.5. Имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{G}$ над А ∪ Б, перерабатывающий всякое слово в алфавите Б в некоторое слово в алфавите А и такой, что

(1) $$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(Q)) \perp\!\!\!\perp Q \quad (Q \text{ — слово в Б}).$$

3.1. *Если* $\mathfrak{C}$ — *гомоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *на исчисление* $\mathfrak{B}$, *а* $\mathfrak{D}$ — *гомоморфизм исчисления* $\mathfrak{B}$ *на исчисление* $\mathfrak{E}$, *то* $\mathfrak{D} \circ \mathfrak{C}$ *есть гомоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *на исчисление* $\mathfrak{E}$.

В самом деле, пусть выполнены условия этой теоремы и пусть А, Б, Е означают соответственно алфавиты исчислений $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$. Определим алгорифм $\mathfrak{F}$ равенством 1 (1) и покажем, что $\mathfrak{F}$ есть гомоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ на исчисление $\mathfrak{E}$.

Так как $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ являются соответственно гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ и гомоморфизмом $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ есть гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{E}$ [1 (1), 1.1], причем имеет место 1 (2).

Имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{G}$ над А ∪ Б, перерабатывающий всякое слово в алфавите Б в некоторое слово в алфавите А и удовлетворяющий условию (1) [Г.5 $\mathfrak{C}$]; имеется также нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над Б ∪ Е, перерабатывающий всякое слово в алфавите Е в некоторое слово в алфавите Б и удовлетворяющий условию

(2) $$\mathfrak{E} : \mathfrak{D}(\mathfrak{H}(R)) \perp\!\!\!\perp R \quad (R \text{ — слово в Е}) \qquad [\text{Г.5 } \mathfrak{D}].$$

Построим нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$:

(3) $$\mathfrak{K} = \mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}.$$

$\mathfrak{K}$ — нормальный алгорифм над объединением алфавитов $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ [(3), III. § 3.4.2] и, значит, над А $\cup$ Е.

Если R — слово в Е, то $\mathfrak{H}(R)$ есть слово в Б и $\mathfrak{G}(\mathfrak{H}(R))$ — слово в А. Так как

(4) $$\mathfrak{K}(R) \simeq \mathfrak{G}(\mathfrak{H}(R)) \quad (R \text{ — слово в Е}) \quad [(3), \text{III. § 3.4.3}],$$

мы видим, что $\mathfrak{K}$ перерабатывает всякое слово в алфавите Е в некоторое слово в алфавите А.

Пусть R — слово в Е. $\mathfrak{H}(R)$ есть слово в Б, и потому

(5) $$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(\mathfrak{H}(R))) \amalg \mathfrak{H}(R) \qquad [(1)],$$

(6) $$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(\mathfrak{K}(R)) \amalg \mathfrak{H}(R) \qquad [(5), (4)],$$

$$\mathfrak{E} : \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(\mathfrak{K}(R))) \amalg \mathfrak{D}(\mathfrak{H}(R)) \qquad [(6), \Gamma.2\ \mathfrak{D}]$$

(7) $$\amalg R \qquad [(2)],$$

$$\mathfrak{E} : \mathfrak{F}(\mathfrak{K}(R)) \amalg R \qquad [(7), 1(2)].$$

Следовательно, $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию Г.5, что и требовалось доказать.

3.2. *Если* $\mathfrak{C}$ *— гомоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *на исчисление* $\mathfrak{B}$, *то*

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(\Lambda) \amalg \Lambda.$$

В самом деле, пусть $\mathfrak{C}$ есть гомоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ в алфавите А на исчисление $\mathfrak{B}$ в алфавите Б. Тогда, согласно Г.5, имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{G}$, перерабатывающий всякое слово в алфавите Б в некоторое слово в алфавите А и удовлетворяющий условию (1). В частности

(8) $$\mathfrak{B} : \Lambda \amalg \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(\Lambda)) \qquad [(1), \S\ 1.6.4],$$

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(\Lambda) \amalg \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(\Lambda))\,\mathfrak{C}(\Lambda) \qquad [(8), \S\ 1.6.6, 1.\ \S\ 3.6\,(2)]$$

$$\amalg \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(\Lambda)) \qquad [\Gamma.3\ \mathfrak{C}, \S\ 1.6.4, 1.\ \S\ 3.6\,(2)]$$

$$\amalg \Lambda \qquad [(1)],$$

откуда следует доказываемое.

4. Под *изоморфизмом исчисления* $\mathfrak{A}$ *на исчисление* $\mathfrak{B}$ мы понимаем гомоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ на исчисление $\mathfrak{B}$, являющийся вместе с тем изоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Иначе говоря, изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ мы определяем как гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, удовлетворяющий условиям Г.4 и Г.5.

Следующая теорема вытекает из 2.1 и 3.1.

4.1. *Если* $\mathfrak{C}$ *— изоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *на исчисление* $\mathfrak{B}$, *а* $\mathfrak{D}$ *— изоморфизм исчисления* $\mathfrak{B}$ *на исчисление* $\mathfrak{E}$, *то* $\mathfrak{D} \circ \mathfrak{C}$ *есть изоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *на исчисление* $\mathfrak{E}$.

Следующая теорема очевидна.

4.2. *Если* $\mathfrak{A}$ *— исчисление в алфавите* А, *то тождественный алгорифм* $\mathfrak{A}_{A,A}$ [II. § 4.2] *есть изоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *на самого себя.*

4.3. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *— исчисления в алфавитах* А *и* Б *соответственно;* $\mathfrak{C}$ *— изоморфизм исчисления* $\mathfrak{A}$ *на исчисление* $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{G}$ *— нормальный алгорифм над* А $\cup$ Б, *перерабатывающий всякое слово в алфавите* Б *в слово*

в алфавите А *и удовлетворяющий условию* 3 (1). *Тогда* $\mathfrak{G}$ *есть изоморфизм исчисления* $\mathfrak{B}$ *на исчисление* $\mathfrak{A}$.

В самом деле, $\mathfrak{G}$ удовлетворяет тогда условию **Г. 1** (с заменой А на Б и Б на А).

Если

(1) $$\mathfrak{B} : P \amalg Q,$$

то P и Q суть слова в Б, $\mathfrak{G}(P)$ и $\mathfrak{G}(Q)$ — слова в А и потому

(2) $$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(P)) \amalg P \qquad [3\,(1)],$$

(3) $$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(Q)) \amalg Q \qquad [3\,(1)],$$

(4) $$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(P)) \amalg \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(Q)) \quad [(2), (1), (3), \S\ 1.6.4, \S\ 1.6.5],$$

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{G}(P) \amalg \mathfrak{G}(Q) \qquad [(4), \text{Г. 4 } \mathfrak{C}].$$

Следовательно, $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию **Г. 2.**

Для произвольных слов P и Q в Б имеем

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(PQ)) \amalg PQ \qquad [3\,(1)]$$

$$\amalg \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(P))\,\mathfrak{C}(\mathfrak{G}(Q)) \qquad [3\,(1), \S\ 1.6.4, \S\ 1.6.7]$$

(5) $$\amalg \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(P)\,\mathfrak{G}(Q)) \qquad [\text{Г. 3 } \mathfrak{C}, \S\ 1.6.4],$$

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{G}(PQ) \amalg \mathfrak{G}(P)\,\mathfrak{G}(Q) \qquad [(5), \text{Г. 4 } \mathfrak{C}].$$

Следовательно, $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию **Г. 3.**

$\mathfrak{G}$ является, таким образом, гомоморфизмом исчисления $\mathfrak{B}$ в исчисление $\mathfrak{A}$.

Для произвольного слова Q в А $\mathfrak{C}(Q)$ есть слово в Б, и потому

(6) $$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(\mathfrak{C}(Q))) \amalg \mathfrak{C}(Q) \qquad [3\,(1)],$$

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{G}(\mathfrak{C}(Q)) \amalg Q \qquad [(6), \text{Г. 4 } \mathfrak{C}].$$

Принимая во внимание, что $\mathfrak{C}$ — нормальный алгорифм над А $\cup$ Б, перерабатывающий всякое слово в алфавите А в некоторое слово в алфавите Б, усматриваем отсюда, что $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию **Г. 5** ($\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{G}$ поменялись здесь ролями).

Пусть, наконец, P и Q — такие слова в Б, что

(7) $$\mathfrak{A} : \mathfrak{G}(P) \amalg \mathfrak{G}(Q).$$

Тогда

$$\mathfrak{C} : P \amalg \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(P)) \qquad [3\,(1), \S\ 1.6.4]$$

$$\amalg \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(Q)) \qquad [(7), \text{Г. 2 } \mathfrak{C}]$$

$$\amalg Q \qquad [3\,(1)].$$

Это показывает, что $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию **Г. 4.**

Следовательно, $\mathfrak{G}$ есть изоморфизм исчисления $\mathfrak{B}$ на исчисление $\mathfrak{A}$, что и требовалось доказать.

5. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — исчисления. Будем говорить, что *исчисление* $\mathfrak{A}$ *включаемо в исчисление* $\mathfrak{B}$, если имеется изоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{B}$; будем говорить, что *исчисление* $\mathfrak{A}$ *изоморфно исчислению* $\mathfrak{B}$, если имеется изоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ на исчисление $\mathfrak{B}$.

5.1. *Если исчисление* $\mathfrak{A}$ *включаемо в исчисление* $\mathfrak{B}$, *а исчисление* $\mathfrak{B}$ *включаемо в исчисление* $\mathfrak{C}$, *то исчисление* $\mathfrak{A}$ *включаемо в исчисление* $\mathfrak{C}$.

Это следует из теоремы **2.1.**

5.2. *Если исчисление* $\mathfrak{A}$ *изоморфно исчислению* $\mathfrak{B}$, *то* $\mathfrak{A}$ *включаемо в* $\mathfrak{B}$.

Чтобы усмотреть это, достаточно принять во внимание, что всякий изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ является и изоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

5.3. *Всякое исчисление изоморфно самому себе.*

Это следует из теоремы **4.2.**

5.4. *Если исчисление* $\mathfrak{A}$ *изоморфно исчислению* $\mathfrak{B}$, *а исчисление* $\mathfrak{B}$ *изоморфно исчислению* $\mathfrak{C}$, *то* $\mathfrak{A}$ *изоморфно* $\mathfrak{C}$.

Это следует из теоремы **4.1.**

5.5. *Если исчисление* $\mathfrak{A}$ *изоморфно исчислению* $\mathfrak{B}$, *то* $\mathfrak{B}$ *изоморфно* $\mathfrak{A}$.

В самом деле, пусть исчисление $\mathfrak{A}$ изоморфно исчислению $\mathfrak{B}$. Пусть А и Б — алфавиты этих исчислений. Тогда имеется изоморфизм $\mathfrak{C}$ исчисления $\mathfrak{A}$ на исчисление $\mathfrak{B}$. Он удовлетворяет условию **Г. 5**, согласно которому имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{G}$ над $А \cup Б$, перерабатывающий всякое слово в алфавите Б в слово в алфавите А и удовлетворяющий условию **3(1)**. $\mathfrak{G}$ есть изоморфизм исчисления $\mathfrak{B}$ на исчисление $\mathfrak{A}$ [4.3]. Следовательно, $\mathfrak{B}$ изоморфно $\mathfrak{A}$, что и требовалось доказать.

5.6. *Пусть* А — *произвольный алфавит,* n — *положительное число. Тогда всякое исчисление в алфавите из* n *букв изоморфно некоторому исчислению в алфавите, не имеющем с* А *общих букв и также состоящем из* n *букв.*

В самом деле, рассмотрим какое-нибудь исчисление $\mathfrak{B}$ в алфавите Б из n букв. Построим алфавит $\bar{Б}$, также содержащий n букв и не имеющий общих букв с А. Установим между алфавитами Б и $\bar{Б}$ определенное взаимно-однозначное соответствие. Букву, соответствующую букве ξ алфавита Б, будем называть двойником буквы ξ. Заменяя в определяющей системе соотношений исчисления Б каждую букву ее двойником, получим систему соотношений в алфавите $\bar{Б}$. Эта система соотношений определяет некоторое исчисление $\bar{\mathfrak{B}}$ в алфавите $\bar{Б}$. Легко убедиться, что $\bar{\mathfrak{B}}$ является искомым исчислением.

6. Пусть И означает какое-нибудь свойство исчислений. Будем говорить, что И *инвариантно*, если всякое исчисление, изоморфное исчислению со свойством И, само обладает им; будем говорить, что И *наследственно*, если всякое исчисление, включаемое в исчисление со свойством И, само обладает им.

6.1. *Всякое наследственное свойство инвариантно.*

Это следует из предложения **5.2.**

Приведем некоторые примеры наследственных свойств.

Будем говорить об исчислении $\mathfrak{A}$ в алфавите А, что оно *единично*, если всякие два слова в алфавите А эквивалентны в $\mathfrak{A}$, т. е. если соблюдается условие

(1) $\qquad \mathfrak{A} : P \amalg Q \quad (P, Q$ — слова в А$).$

6.2. *Единичность — наследственное свойство.*

В самом деле, пусть исчисление $\mathfrak{A}$ включаемо в единичное исчисление $\mathfrak{B}$. Тогда имеется изоморфизм $\mathfrak{C}$ исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{B}$. Пусть А и Б означают соответственно алфавиты исчислений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Для любых двух слов R и S в А, $\mathfrak{C}(R)$ и $\mathfrak{C}(S)$ суть слова в Б [Г. 1 $\mathfrak{C}$] и потому, в силу единичности исчисления $\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(R) \parallel \mathfrak{C}(S),$$

откуда

$$\mathfrak{A} : R \parallel S \qquad [\text{Г. 4 } \mathfrak{C}].$$

Этим доказано, что $\mathfrak{A}$ единично. Таким образом, всякое исчисление, включаемое в единичное исчисление, само единично, что и требовалось доказать.

6.3. *Единичное исчисление включаемо во всякое исчисление.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ — единичное исчисление в алфавите А; $\mathfrak{B}$ — произвольное исчисление в алфавите Б. Покажем, что $\mathfrak{A}$ включаемо в $\mathfrak{B}$.

Для этого воспользуемся алгорифмом $\mathfrak{C}_{А \cup Б}$ [II. § 4.7], перерабатывающем всякое слово в алфавите $А \cup Б$ в пустое слово. Покажем, что этот нормальный алгорифм в $А \cup Б$ есть изоморфизм исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{B}$, т. е. что он удовлетворяет условиям Г. 1, Г. 2, Г. 3 и Г. 4.

Соблюдение условия Г. 1 видно из того, что

$$\mathfrak{C}_{А \cup Б}(P) = \Lambda \quad (P \text{ — слово в А}). \tag{2}$$

Отсюда же следует, в силу I. § 3.6 (2) и § 1.6.3, что соблюдается условие Г. 3. Соблюдение условия Г. 2 вытекает из (2) в силу § 1.6.3. Наконец, соблюдение условия Г. 4 непосредственно следует из условия единичности исчисления $\mathfrak{A}$.

Таким образом, $\mathfrak{C}_{А \cup Б}$ есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, что и требовалось доказать.

6.4. *Всякое единичное исчисление изоморфно всякому другому единичному исчислению.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — единичные исчисления соответственно в алфавитах А и Б. Покажем, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\mathfrak{B}$.

Для этого опять воспользуемся алгорифмом $\mathfrak{C}_{А \cup Б}$. Согласно доказательству леммы 6.3, этот алгорифм есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$. Покажем, что теперь он является даже изоморфизмом $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{B}$. Для этого надо лишь доказать, что он удовлетворяет условию Г. 5.

Возьмем в качестве $\mathfrak{G}$ тот же алгорифм $\mathfrak{C}_{А \cup Б}$. Имеем

$$\mathfrak{G}(Q) = \Lambda \quad (Q \text{ — слово в Б}) \qquad [\text{II. § 4.7}]. \tag{3}$$

$$\mathfrak{C}_{А \cup Б}(\mathfrak{G}(Q)) = \Lambda \quad (Q \text{ — слово в Б}) \qquad [(3), (2)].$$

Принимая во внимание, что $\mathfrak{B}$ — единичное исчисление, заключаем отсюда, что имеет место эквивалентность 3 (1). Так как $\mathfrak{G}$ перерабатывает всякое слово в алфавите Б в некоторое слово в алфавите А [(3)], $\mathfrak{C}_{А \cup Б}$ удовлетворяет условию Г. 5, что и требовалось доказать.

Следующая лемма непосредственно следует из лемм 6.2, 6.1 и 6.4.

6.5. *Если* $\mathfrak{A}$ *— единичное исчисление, то для единичности исчисления* $\mathfrak{B}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{B}$ *было изоморфно* $\mathfrak{A}$.

Будем говорить об исчислении $\mathfrak{A}$ в алфавите A, что оно *конечно*, если имеются такие слова $A_1, \ldots, A_n$ в A (n — положительное число), что всякое слово в A эквивалентно в $\mathfrak{A}$ одному из них.

Ниже мы докажем, что конечность есть наследственное свойство. Предварительно установим некоторые необходимые и достаточные условия конечности исчисления.

Будем говорить о слове в алфавите исчисления $\mathfrak{A}$, что оно *сокращаемо в* $\mathfrak{A}$, если оно эквивалентно в $\mathfrak{A}$ слову меньшей длины.

6.6. *Если слово* P *сокращаемо в* $\mathfrak{A}$, *то, каково бы ни было слово* Q *в алфавите исчисления* $\mathfrak{A}$, *слова* PQ *и* QP *сокращаемы в* $\mathfrak{A}$.

Это следует из § **1.6.6**.

6.7. *Если число* m *таково, что всякое слово длины* m *в алфавите* A *исчисления* $\mathfrak{A}$ *сокращаемо в* $\mathfrak{A}$, *то и всякое слово длины, большей* m, *в алфавите* A *сокращаемо в* $\mathfrak{A}$.

Это следует из **6.6** в силу I. § **3.9.1**.

6.8. *Для того, чтобы исчисление* $\mathfrak{A}$ *в алфавите* A *было конечным, достаточно, чтобы имелось такое число* m, *что всякое слово в* A *длины* m *было сокращаемо в* $\mathfrak{A}$.

В самом деле, пусть всякое слово в A длины m сокращаемо в $\mathfrak{A}$. Тогда и всякое слово длины, большей m, сокращаемо в $\mathfrak{A}$ [6.7].

Исходя из произвольного слова P_0 в A, будем последовательно строить слова P_1, $P_2, \ldots$ следующим образом. Если $[P_0^{\partial} \geqslant m$, то P_0 сокращаемо. Соответственно этому берем P_1 таким образом, что

$$\mathfrak{A} : P_0 \amalg P_1,$$

$$[P_0^{\partial} > [P_1^{\partial}. \tag{4}$$

Если и $[P_1^{\partial} \geqslant m$, то P_1 сокращаемо. Берем тогда P_2 таким образом, что

$$\mathfrak{A} : P_1 \amalg P_2,$$

$$[P_1^{\partial} > [P_2^{\partial}. \tag{5}$$

Так продолжаем до тех пор, пока не придем к некоторому слову P_k в A, такому, что

$$[P_k^{\partial} < m.$$

Рано или поздно это случится ввиду (4), (5) и т. д.

Будем иметь

$$\mathfrak{A} : P_0 \amalg P_1 \amalg \ldots \amalg P_k, \tag{6}$$

$$\mathfrak{A} : P_0 \amalg P_k \qquad [(6), \S\ 1.6.5].$$

Это показывает, что всякое слово в A эквивалентно в $\mathfrak{A}$ некоторому слову длины, меньшей m. Так как слов в A длины, меньшей m, имеется лишь конечное число и все они могут быть переписаны, $\mathfrak{A}$ конечно, что и требовалось доказать.

Будем говорить об исчислении $\mathfrak{A}$ в алфавите A, что оно *ограничено*, если имеется положительное число n, такое, что соблюдается следую-

щее условие: для всякого ряда $P_0, \ldots, P_n$, состоящего из $n+1$ слов в алфавите A, могут быть так указаны числа i и j, что

$$0 \leqslant i < j \leqslant n \tag{7}$$

и что

$$\mathfrak{A} : P_i \amalg P_j. \tag{8}$$

6.9. *Всякое конечное исчисление ограничено.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ — конечное исчисление в алфавите A. Тогда имеются слова $A_1, \ldots, A_n$ в A такие, что всякое слово в алфавите A эквивалентно в исчислении $\mathfrak{A}$ одному из них. Рассмотрим какой-нибудь ряд $P_0, \ldots, P_n$, состоящий из $n+1$ слов в A. Для каждого числа h из ряда $0, \ldots, n$ имеется число k_h из ряда $1, \ldots, n$ такое, что

$$\mathfrak{A} : P_h \amalg A_{k_h} \quad (0 \leqslant h \leqslant n). \tag{9}$$

Так как различных чисел k_h не более n, а ряд $0, \ldots, n$ состоит из $n+1$ чисел, найдутся числа i и j, удовлетворяющие условию (7) и такие, что

$$k_i = k_j. \tag{10}$$

Для этих чисел будем иметь

$$\mathfrak{A} : P_i \amalg A_{k_j} \qquad [(9), (10)], \tag{11}$$

$$\mathfrak{A} : P_j \amalg A_{k_j} \qquad [(9)]. \tag{12}$$

В силу (11) и (12), имеет место эквивалентность (8) [§ 1.6.4, § 1.6.5], что и требовалось доказать.

6.10. *Если исчисление* $\mathfrak{A}$ *в алфавите* A *ограничено, то может быть указано такое число* m, *что всякое слово длины* m *в алфавите* A *будет сокращаемо в* $\mathfrak{A}$.

В самом деле, фиксируем тогда положительное число n согласно определению ограниченности таким образом, чтобы для всякого ряда $P_0, \ldots, P_n$, состоящего из $n+1$ слов в A, могли быть указаны числа i и j, удовлетворяющие условиям (7) и (8). Будем рассматривать только такие ряды $P_0, \ldots, P_n$ слов в A, для которых

$$[P_i = i \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Таких рядов имеется конечное число, и можно составить полный их список. Для каждого ряда $P_0, \ldots, P_n$ из этого списка возьмем числа i и j, удовлетворяющие условиям (7) и (8). О слове P_j будем говорить, что оно *выделено* из ряда $P_0, \ldots, P_n$. Будем говорить о слове P в A, что оно *приводимо*, если оно выделено из одного из наших рядов. В противном случае будем говорить, что слово P *неприводимо*. Очевидно, что всякое приводимое слово эквивалентно в $\mathfrak{A}$ слову меньшей длины. Ясно также, что может быть составлен полный список приводимых слов.

Покажем теперь, что среди чисел $0, \ldots, n$ имеется число m такое, что все слова длины m в алфавите A приводимы. Действительно,

испытаем на приводимость, т. е. на принадлежность списку приводимых слов, сначала все слова длины 0 в А, затем все слова длины 1 в А и т. д., наконец, все слова длины n в алфавите А. Если бы в результате этих испытаний мы нашли для всякого числа m из ряда $0, \ldots, n$ неприводимое слово Q_m длины m, то слова $Q_0, \ldots, Q_n$ образовали бы один из рассматриваемых нами рядов $n+1$ слов в А. Слово, выделенное из этого ряда, было бы, однако, приводимым вопреки построению ряда. Таким образом, наше испытание должно дать нам число m такое, что все слова длины m в алфавите А приводимы и потому сокращаемы в $\mathfrak{A}$. Такое число m может быть указано, что и требовалось доказать.

Из лемм 6.8—6.10 вытекает следующий результат.

6.11. *Исчисление тогда и только тогда конечно, когда оно ограничено.*

Отметим, что мы доказали этот результат конструктивно, не прибегая к таким средствам, как закон исключенного третьего и т. п. Доказательство конечности всякого ограниченного исчисления с помощью лемм **6.10** и **6.8** дает способ нахождения слов $A_1, \ldots, A_n$ в алфавите А ограниченного исчисления $\mathfrak{A}$, таких, что всякое слово в А эквивалентно в исчислении $\mathfrak{A}$ одному из слов $A_1, \ldots, A_n$.

Докажем теперь наследственность свойства ограниченности.

6.12. *Ограниченность исчислений есть наследственное свойство.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{B}$ — ограниченное исчисление в алфавите Б; $\mathfrak{A}$ — исчисление в алфавите А, включаемое в $\mathfrak{B}$. Покажем, что $\mathfrak{A}$ ограничено.

Имеется изоморфизм $\mathfrak{C}$ исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{B}$. Это — нормальный алгорифм в алфавите А $\cup$ Б, удовлетворяющий условиям **Г. 1**—**Г. 4**.

Так как $\mathfrak{B}$ ограничено, имеется положительное число n, такое, что для всякого ряда $Q_0, \ldots, Q_n$ слов в алфавите Б могут быть указаны числа i и j, удовлетворяющие условию (7) и условию

$$\mathfrak{B} : Q_i \amalg Q_j.$$

Рассмотрим какой-нибудь ряд $P_0, \ldots, P_n$ слов в алфавите А. В силу **Г. 1** $\mathfrak{C}$,

$$\mathfrak{C}(P_0), \ldots, \mathfrak{C}(P_n)$$

есть ряд слов в алфавите Б. Поэтому согласно выбору числа n могут быть указаны числа i и j, удовлетворяющие условию (7) и условию

(13) $$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(P_i) \amalg \mathfrak{C}(P_j).$$

Взяв так числа i и j, будем иметь эквивалентность (8) [(13), **Г.4** $\mathfrak{C}$].

Таким образом, для всякого ряда $P_0, \ldots, P_n$ слов в алфавите А могут быть указаны числа i и j, удовлетворяющие условиям (7) и (8). Это означает, что исчисление $\mathfrak{A}$ ограничено, что и требовалось доказать.

Из предложений **6.11** и **6.12** вытекает следующий результат.

6.13. *Конечность исчислений есть наследственное свойство.*

Будем говорить об исчислении $\mathfrak{A}$ в алфавите А, что оно ***полугрупповое***, если оно удовлетворяет следующим условиям.

П. 1. $\mathfrak{A} : P \Vert Q$, коль скоро $\mathfrak{A} : RP \Vert RQ$.

П. 2. $\mathfrak{A} : P \Vert\!\!\!\!- Q$, коль скоро $\mathfrak{A} : PR \Vert\!\!\!\!- QR$.

Здесь P, Q, R означают произвольные слова в А.

6.14. *Полугрупповость исчислений есть наследственное свойство.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{B}$ — полугрупповое исчисление в алфавите Б, а $\mathfrak{A}$ — исчисление в алфавите А, включаемое в $\mathfrak{B}$. Покажем, что $\mathfrak{A}$ — полугрупповое исчисление.

Имеется изоморфизм $\mathfrak{C}$ исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{B}$. Он удовлетворяет условиям **Г. 1**—**Г. 4**.

Пусть

$$\mathfrak{A} : RP \Vert\!\!\!\!- RQ \tag{14}$$

для некоторых слов P, Q, R в А. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} : \mathfrak{C}(R)\,\mathfrak{C}(P) &\Vert\!\!\!\!- \mathfrak{C}(RP) && [\text{Г. 3 } \mathfrak{C},\ \S\ 1.6.4] \\ &\Vert\!\!\!\!- \mathfrak{C}(RQ) && [(14),\ \text{Г. 2 } \mathfrak{C}] \\ &\Vert\!\!\!\!- \mathfrak{C}(R)\,\mathfrak{C}(Q) && [\text{Г. 3 } \mathfrak{C}]. \end{aligned}$$

Так как полугрупповое исчисление $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию **П. 1**, заключаем отсюда, что

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(P) \Vert\!\!\!\!- \mathfrak{C}(R), \tag{15}$$

$$\mathfrak{A} : P \Vert\!\!\!\!- Q \qquad [(15),\ \text{Г. 4 } \mathfrak{C}].$$

Мы доказали, таким образом, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию **П. 1**.

Аналогично доказывается, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию **П. 2**. Следовательно, $\mathfrak{A}$ — полугрупповое исчисление, что и требовалось доказать.

Будем говорить об исчислении $\mathfrak{A}$ в алфавите А, что оно *групповое*, если имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над А, перерабатывающий всякое слово в алфавите А в слово в этом же алфавите и такой, что

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{F}(P)\,P \Vert\!\!\!\!- \Lambda, \tag{16}$$

$$\mathfrak{A} : P\,\mathfrak{F}(P) \Vert\!\!\!\!- \Lambda \tag{17}$$

для всякого слова P в А.

Групповость исчислений не является наследственным свойством. Действительно, исчисление в алфавите A_0, определяемое системой соотношений

$$\begin{cases} ab \longleftrightarrow \\ ba \longleftrightarrow, \end{cases}$$

является, как нетрудно видеть, групповым, а включаемое в него исчисление в алфавите $\{a\}$, определяемое пустой системой соотношений, не является групповым.

6.15. *Групповость есть инвариантное свойство исчислений.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{B}$ — групповое исчисление в алфавите Б; $\mathfrak{A}$ — исчисление в алфавите А, изоморфное $\mathfrak{B}$. Покажем, что $\mathfrak{A}$ есть групповое исчисление.

Имеется изоморфизм $\mathfrak{C}$ исчисления $\mathfrak{A}$ на исчисление $\mathfrak{B}$. Это — нормальный алгорифм над А $\cup$ Б, удовлетворяющий условиям **Г. 1**—**Г. 5**.

Так как исчисление $\mathfrak{B}$ групповое, имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над Б, перерабатывающий всякое слово в алфавите Б в слово в этом же алфавите и такой, что

(18) $$\mathfrak{B}:\mathfrak{H}(Q)\,Q \Vert \Lambda,$$
$$\mathfrak{B}:Q\,\mathfrak{H}(Q) \Vert \Lambda.$$

В силу **Г. 5**, имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{G}$ над А $\cup$ Б, перерабатывающий всякое слово в алфавите Б в некоторое слово в алфавите А и удовлетворяющий условию 3 (1).

Построим алгорифм $\mathfrak{F}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$:

(19) $$\mathfrak{F}=\mathfrak{G}\circ\mathfrak{H}\circ\mathfrak{C}.$$

$\mathfrak{F}$ — нормальный алгорифм над А $\cup$ Б [(19), III. § 3.5.2] и, значит, над А. Для всякого слова P в А

(20) $$\mathfrak{F}(P)\simeq\mathfrak{G}(\mathfrak{H}(\mathfrak{C}(P))) \qquad [(19),\ \text{III. § 3.5.3}].$$

Если P есть слово в А, то $\mathfrak{C}(P)$ — слово в Б [Г. 1], $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}(P))$ — слово в Б и $\mathfrak{G}(\mathfrak{H}(\mathfrak{C}(P)))$ — слово в А. В силу (20), отсюда следует, что алгорифм $\mathfrak{F}$ перерабатывает всякое слово в алфавите А в слово в этом же алфавите, причем

(21) $$\mathfrak{F}(P)=\mathfrak{G}(\mathfrak{H}(\mathfrak{C}(P))) \quad (P\text{ — слово в А}).$$

Имеем далее для любого слова P в А

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}:\mathfrak{C}(\mathfrak{F}(P)\,P) &\Vert \mathfrak{C}(\mathfrak{F}(P))\,\mathfrak{C}(P) && [\text{Г. 3 }\mathfrak{C}]\\
&=\mathfrak{C}(\mathfrak{G}(\mathfrak{H}(\mathfrak{C}(P))))\,\mathfrak{C}(P) && [(21)]\\
&\Vert \mathfrak{H}(\mathfrak{C}(P))\,\mathfrak{C}(P) && [3\,(1),\ \text{§ 1.6.6}]\\
&\Vert \Lambda && [(18)]\\
&\Vert \mathfrak{C}(\Lambda) && [3.2,\ \text{§ 1.6.4}],
\end{aligned}$$

откуда, в силу **Г. 4**, следует эквивалентность (16).

Аналогичным образом устанавливается эквивалентность (17).

Следовательно, $\mathfrak{A}$ есть групповое исчисление, что и требовалось доказать.

6.16. *Всякое групповое исчисление есть полугрупповое исчисление.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ — групповое исчисление в алфавите А. Тогда имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над А, перерабатывающий всякое слово в алфавите А в слово в этом же алфавите и такой, что эквивалентности (16) и (17) имеют место для всякого слова P в А.

Если для каких-нибудь слов P, Q, R в А имеем

(22) $$\mathfrak{A}:RP \Vert RQ,$$

то

$$\mathfrak{A}:P \Vert \mathfrak{F}(R)\,RP \qquad [(16),\ \text{§ 1.6.4, § 1.6.6}]$$

$$\mathfrak{Z}(R)\,RQ \qquad [(22),\ \S\ 1.6.6]$$

$$Q \qquad [(16),\ \S\ 1.6.6].$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию **П. 1.**

Аналогично усматривается, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию **П. 2.**

Следовательно, $\mathfrak{A}$ — полугрупповое исчисление, что и требовалось доказать.

6.17. *Всякое исчисление, включаемое в групповое исчисление, есть полугрупповое исчисление.*

Это следует из **6.16** и **6.14.**

6.18. *Включаемость исчисления в групповое исчисление есть наследственное свойство.*

Это следует из **5.1.**

6.19. *Исчисление в алфавите* $\{a\}$, *определяемое пустой системой соотношений, не конечно.*

В самом деле, в этом исчислении всякое слово в алфавите $\{a\}$ эквивалентно лишь самому себе, откуда следует, что условие конечности исчисления не соблюдается.

6.20. *Исчисление в алфавите* $\{a\}$, *определяемое системой соотношений*

$$\{aa \longleftrightarrow a,$$

не есть полугрупповое исчисление.

В самом деле, в этом исчислении слова aa и a эквивалентны, тогда как слова a и Λ, очевидно, не эквивалентны.

Будем говорить об исчислении $\mathfrak{A}$ в алфавите А, что оно *разрешимо*, если имеется нормальный алгорифм над $A \cup \{*\}$, аннулирующий те и только те слова вида $P*Q$ (P, Q — слова в А), для которых эквивалентность

$$\mathfrak{A} : P \amalg Q \tag{23}$$

не имеет места.

6.21. *Разрешимость исчислений есть наследственное свойство.*

В самом деле, пусть исчисление $\mathfrak{A}$ в алфавите А включаемо в разрешимое исчисление $\mathfrak{B}$ в алфавите Б. Покажем, что $\mathfrak{A}$ разрешимо.

Имеется изоморфизм $\mathfrak{C}$ исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{B}$. Он является нормальным алгорифмом над $A \cup Б$, удовлетворяющим условиям **Г. 1—Г. 4.** В силу **Г. 2** и **Г. 4**, эквивалентность (23) тогда и только тогда имеет место для слов P и Q в А, когда

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{C}(P) \amalg \mathfrak{C}(Q).$$

Предполагая, что звездочка не есть буква алфавита $A \cup Б$, построим алгорифмы

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{A,*} \qquad [\text{II. } \S\ 4.10], \tag{24}$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{A,*} \qquad [\text{II. } \S\ 4.10]. \tag{25}$$

Это — нормальные алгорифмы в $A \cup \{*\}$ [II. § 4.10], причем для слов P и Q в А

(26) $\mathfrak{I}(P*Q)=P$ [(24), II. § 4.10.5],

(27) $\mathfrak{G}(P*Q)=Q$ [(25), II. § 4.10.6].

Построим алгорифмы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ как нормальные композиции алгорифмов $\mathfrak{I}$ и соответственно $\mathfrak{G}$ с алгорифмом $\mathfrak{C}$:

(28) $\mathfrak{D}=\mathfrak{C}\circ\mathfrak{I}$,

(29) $\mathfrak{E}=\mathfrak{C}\circ\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ — нормальные алгорифмы над $А\cup Б\cup\{*\}$ [(28), (29), III. § 3.4.2] и

(30) $\mathfrak{D}(P*Q)=\mathfrak{C}(P)$ [(28), III. § 3.4.3, (26), Г.1 $\mathfrak{C}$],

(31) $\mathfrak{E}(P*Q)=\mathfrak{C}(Q)$ [(29), III. § 3.4.3, (27), Г.1 $\mathfrak{C}$].

Применяя к алгорифмам $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ теорему объединения III. § 4.1.1, построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над $А\cup Б\cup\{*\}$, что

(32) $\mathfrak{F}(R)\simeq\mathfrak{D}(R)*\mathfrak{E}(R)$ (R — слово в $А\cup Б\cup\{*\}$).

Имеем

(33) $\mathfrak{F}(P*Q)=\mathfrak{C}(P)*\mathfrak{C}(Q)$ (P, Q — слова в А) [(30), (31), (32)].

По предположению, исчисление $\mathfrak{B}$ разрешимо. Это значит, что имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ над $Б\cup\{*\}$, аннулирующий слово $R*S$ (R, S — слова в Б) тогда и только тогда, когда эквивалентность $\mathfrak{B}: R \amalg S$ не имеет места.

Построим алгорифм $\mathfrak{H}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{K}$:

(34) $\mathfrak{H}=\mathfrak{K}\circ\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{H}$ — нормальный алгорифм над $А\cup Б\cup\{*\}$ [(34), III. § 3.4.2] и, значит, над $А\cup\{*\}$. Для всяких слов P и Q в А имеем

$$\mathfrak{H}(P*Q)\simeq\mathfrak{K}(\mathfrak{C}(P)*\mathfrak{C}(Q)) \quad [(34),\ \text{III. § 3.4.3},\ (33)],$$

откуда следует, что $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда аннулирует слово $P*Q$, когда $\mathfrak{K}$ аннулирует слово $\mathfrak{C}(P)*\mathfrak{C}(Q)$. Последнее же имеет место тогда и только тогда, когда эквивалентность $\mathfrak{B}: \mathfrak{C}(P) \amalg \mathfrak{C}(Q)$ не имеет места, т. е. когда не имеет места эквивалентность (23). Таким образом, $\mathfrak{H}$ есть нормальный алгорифм над $А\cup\{*\}$, аннулирующий слово вида $P*Q$ (P, Q — слова в А) тогда и только тогда, когда эквивалентность (23) не имеет места. Следовательно, $\mathfrak{A}$ разрешимо, что и требовалось доказать.

7. С точки зрения алгебры инвариантные свойства исчислений представляют интерес в первую очередь. Алгебраист будет склонен проводить по отношению к исчислениям абстракцию отождествления, отождествляя изоморфные исчисления, считая их лишь различными способами задания одной и той же «абстрактной ассоциативной системы». При такой установке неинвариантные свойства исчислений не представляют

особого интереса, будучи не свойствами самих абстрактных ассоциативных систем, а лишь свойствами способов их задания. Учитывая, однако, что способ задания абстрактных ассоциативных систем посредством исчислений является ценным, алгебраист поставит вопрос об общих методах распознавания инвариантных свойств абстрактных ассоциативных систем, задаваемых этим способом.

Этому вопросу соответствует следующая постановка нормальной массовой проблемы.

Пусть И — некоторое инвариантное свойство исчислений, А — некоторый алфавит. Условимся о следующем способе записи систем соотношений в А. Введем буквы α и β, не принадлежащие А и различные. Будем записывать всякую систему соотношений в А в виде слова в $A \cup \{\alpha, \beta\}$, получаемого путем выписывания друг за другом слов, возникающих из соотношений системы в результате подстановки буквы α вместо двойной стрелки и приписывания справа буквы β. Запись определяющей системы соотношений исчисления $\mathfrak{A}$ в А будем обозначать через $\mathfrak{A}^3$.

Требуется построить нормальный алгорифм над $A \cup \{\alpha, \beta\}$, применимый к записи $\mathfrak{A}^3$ всякого исчисления $\mathfrak{A}$ в А и аннулирующий $\mathfrak{A}^3$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ обладает свойством И.

Эту нормальную массовую проблему мы будем называть *проблемой распознавания свойства* И *для алфавита* А.

Мы докажем неразрешимость этой проблемы при некоторых весьма общих условиях, налагаемых на И и А. А именно мы докажем следующую теорему.

7.1. *Пусть* И — *инвариантное свойство исчислений. Если имеется как исчисление с этим свойством, так и исчисление, не включаемое ни в какое исчисление с этим свойством, то может быть указан алфавит, для которого проблема распознавания свойства* И *неразрешима (в том смысле, что искомый в этой проблеме алгорифм невозможен). Если при этом алфавит исчисления со свойством* И *состоит из n букв, то для всякого алфавита с числом букв, большим или равным* $n+4$, *проблема распознавания свойства* И *неразрешима. Если же, в частности, имеется единичное исчисление со свойством* И, *то для всякого алфавита с числом букв, большим или равным* 4, *проблема распознавания свойства* И *неразрешима.*

8. Введем прежде всего следующие вспомогательные понятия.

Будем говорить о соотношении, что оно *регулярно*, если обе его части непусты. Будем говорить об исчислении, что оно *регулярно*, если все соотношения его определяющей системы регулярны.

8.1. *Всякое регулярное исчисление включаемо в исчисление в алфавите* A_0.

Рассмотрим, в самом деле, произвольное регулярное исчисление $\mathfrak{B}$ в алфавите Б. Покажем, что оно включаемо в некоторое исчисление в алфавите A_0.

С этой целью воспользуемся операцией перевода слов в алфавите Б, определенной в **I. § 6.1** и **I. § 6.2**. Роль В будет при этом играть пустой алфавит, роль $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — буквы алфавита Б, роль α и β — a и, соответственно, b. Роль алфавита А будет поэтому играть алфавит A_0 [**I. § 2.6**], а роль Б — наш теперешний алфавит Б. Перевод слова P в алфавите Б будем попрежнему обозначать через $[P]$.

Переводом соотношения $P \longleftrightarrow Q$ в алфавите Б будем называть соотношение

$$[P^{\tau} \longleftrightarrow [Q^{\tau}$$

в алфавите A_0. Заменяя каждое соотношение определяющей системы исчисления $\mathfrak{B}$ переводом этого соотношения, получим некоторую систему соотношений в A_0. Эта система соотношений определяет некоторое исчисление $\mathfrak{A}$ в A_0. Наша теорема будет доказана, если мы покажем, что $\mathfrak{B}$ включаемо в $\mathfrak{A}$.

Докажем для этого некоторые леммы.

8.2. *Если* $\mathfrak{B}: P \perp Q$, *то* $\mathfrak{A}: [P^{\tau} \perp [Q^{\tau}$.

В самом деле, тогда имеются такие слова R, S, T, U, что имеют место равенства § 1.5(1), § 1.5(2) и что хотя бы одно из соотношений § 1.5(3), § 1.5(4) принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{B}$ [§ 1.5.1]. Имеем

(1) $$[P^{\tau} = [R^{\tau}[T^{\tau}[S^{\tau} \qquad [\S\ 1.5(1),\ \text{I.}\S 6.2.10],$$

(2) $$[Q^{\tau} = [R^{\tau}[U^{\tau}[S^{\tau} \qquad [\S\ 1.5(2),\ \text{I.}\S 6.2.10].$$

Переводами соотношений § 1.5(3) и § 1.5(4) являются соотношения

$$[T^{\tau} \longleftrightarrow [U^{\tau},$$

$$[U^{\tau} \longleftrightarrow [T^{\tau},$$

и одно из них принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{A}$. Следовательно,

$$\mathfrak{A}: [P^{\tau} \longleftrightarrow [Q^{\tau} \qquad [(1),\ (2),\ \S\ 1.5.1],$$

что и требовалось доказать.

8.3. *Если* $\mathfrak{B}: P \perp\!\!\!\perp Q$, *то* $\mathfrak{A}: [P^{\tau} \perp\!\!\!\perp [Q^{\tau}$.

Это следует из 8.2 в силу § 1.6.1.

8.4. *Если* P *— слово в* Б *и* $\mathfrak{A}: [P^{\tau} \perp V$, *то имеется такое слово* Q, *что*

(3) $$\mathfrak{B}: P \perp Q,$$

(4) $$V = [Q^{\tau}.$$

В самом деле, тогда имеются такие слова W, X, Y, Z, что имеют место равенства

(5) $$[P^{\tau} = WYZ,$$

(6) $$V = WXZ$$

и что одно из соотношений

(7) $$Y \longleftrightarrow X,$$

(8) $$X \longleftrightarrow Y$$

принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{A}$ [§ 1.5.1]. Пусть это будет соотношение (7). Оно является тогда переводом некоторого соотношения

(9) $$T \longleftrightarrow U,$$

принадлежащего определяющей системе исчисления $\mathfrak{B}$. Имеем

(10) $$Y = [T^{\tau},$$

(11) $$X = [U^{\tau}.$$

В силу регулярности исчисления $\mathfrak{B}$, $T \neq \Lambda$. В силу (5) и (10)

$$W * [T^{\tau} * Z$$

есть вхождение перевода непустого слова T в перевод слова P. Это вхождение является, следовательно, переводом некоторого вхождения

$$R * T * S$$

слова T в P [I. § 6.3.3]. Имеем поэтому

(12) $$P = RTS,$$

(13) $$W = [R^{\tau}.$$

(14) $$Z = [S^{\tau},$$

$$V = [R^{\tau}[U^{\tau}[S^{\tau} \qquad [(6), (13), (11), (14)]$$

$$= [RUS^{\tau} \qquad [\text{I. § 6.2.10}]$$

$$= [Q^{\tau},$$

где

(15) $$Q = RUS.$$

Так как соотношение (9) принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{B}$, имеем смежность (3) [(12), (15), § 1.5.1].

Мы предполагали при этом, что соотношение (7) принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{A}$. Совершенно аналогично обстоит дело, когда ей принадлежит соотношение (8). И в этом случае можно указать слово Q, удовлетворяющее условиям (3) и (4).

Лемма, таким образом, доказана.

8.5. *Если слова Q и P в* Б *таковы, что* $\mathfrak{A} : [P^{\tau} \parallel [Q^{\tau}$, *то* $\mathfrak{B} : P \parallel Q$.

В самом деле, тогда имеется такой ряд слов $V_0, \ldots, V_n$ $(n \geqslant 0)$, что

(16) $$\mathfrak{A} : V_0 \perp \ldots \perp V_n,$$

(17) $$V_0 = [P^{\tau},$$

(18) $$V_n = [Q^{\tau}.$$

Если $n = 0$, то $[P^{\tau} = [Q^{\tau}$ [(17), (18)], откуда $P = Q$ [I. § 6.2.5] и $\mathfrak{B} : P \parallel Q$ [§ 1.6.3].

Если же $n > 0$, то $\mathfrak{A} : [P^{\tau} \perp V_1$ [(16), (17)], откуда, согласно 8.4, следует возможность указания такого слова P_1, что

(19) $$\mathfrak{B} : P \perp P_1,$$

(20) $$V_1 = [P_1^{\tau}.$$

В силу (19), P_1 есть слово в Б. Если $n>1$, то аналогичным образом $\mathfrak{A}:[P_1^{\tau}\perp V_2$ [(16), (20)], откуда следует возможность указания такого слова P_2, что

$$\mathfrak{B}:P_1\perp P_2,$$

$$V_2=[P_2^{\tau}.$$

Продолжая это рассуждение и полагая еще $P_0=P$, получаем ряд слов $P_0,\ldots,P_n$, удовлетворяющий условиям § 1.6(2) (с заменой $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$), § 1.6(3) и такой, что

$$V_i=[P_i^{\tau}\quad(0\leqslant i\leqslant n). \tag{21}$$

Имеем

$$[P_n^{\tau}=[Q^{\tau}\qquad[(18),\ (21)],$$

откуда $P_n=Q$ [I. § 6.2.5]. Таким образом, ряд слов $P_0,\ldots,P_n$ удовлетворяет и условию § 1.6(4). Следовательно, $\mathfrak{B}:P\coprod Q$ [§ 1.6.1], что и требовалось доказать.

Воспользуемся теперь алгорифмом перевода $\mathfrak{T}$. Это в данном случае есть нормальный алгорифм над $A_0\cup$ Б, применимый ко всякому слову в Б и удовлетворяющий условию II. § 4.14(11).

Теорема 8.1 будет доказана, если мы покажем, что $\mathfrak{T}$ есть изоморфизм исчисления $\mathfrak{B}$ в исчисление $\mathfrak{A}$, т. е. что $\mathfrak{T}$ удовлетворяет условиям Г.1—Г.4 (с переменой ролей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$).

$\mathfrak{T}$ перерабатывает всякое слово P в алфавите Б в слово $[P^{\tau}$ в алфавите A_0 [II. § 4.14(11)]. Следовательно, $\mathfrak{T}$ удовлетворяет условию Г.1.

$\mathfrak{T}$ удовлетворяет условию Г.2 в силу 8.3 и II. § 4.14(11).

$\mathfrak{T}$ удовлетворяет условию Г.3 в силу I. § 6.2.9, § 1.6.3 и II. § 4.14(11).

$\mathfrak{T}$ удовлетворяет условию Г.4 в силу 8.5 и II. § 4.14(11).

Следовательно, $\mathfrak{T}$ есть изоморфизм $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$, что и требовалось доказать.

8.6. *Всякое исчисление включаемо в регулярное исчисление.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное исчисление в алфавите А. Введем букву α, не принадлежащую А. Присоединяя ее к А, получим алфавит

$$\text{Б}=\text{А}\cup\{\alpha\}. \tag{22}$$

Воспользуемся алгорифмами $\mathfrak{A}_{\text{Б},\Lambda}$ [II. § 4.2] и $\mathfrak{C}_{\text{Б}}^{\alpha}$ [II. § 4.7] Это — нормальные алгорифмы в Б, причем

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_{\text{Б},\Lambda}(P)&=P\\ \mathfrak{C}_{\text{Б}}^{\alpha}(P)&=\alpha\end{aligned}\right\}\ (P\text{ — слово в Б}).\qquad[\text{II. § 4.2, II. § 4.7}]. \tag{23, 24}$$

Применяя к ним теорему разветвления III. § 5.1.1, построим такой нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над Б, что

$$\mathfrak{D}(P)\simeq\begin{cases}\mathfrak{C}_{\text{Б}}^{\alpha}(P) & (P\text{ — слово в Б, }\mathfrak{A}_{\text{Б},\Lambda}(P)=\Lambda)\\ \mathfrak{A}_{\text{Б},\Lambda}(P) & (P\text{ — слово в Б, }\mathfrak{A}_{\text{Б},\Lambda}(P)\neq\Lambda).\end{cases} \tag{25}$$

Пусть исчисление $\mathfrak{A}$ определяется системой соотношений

$$\{A_i \longleftrightarrow B_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{26}$$

где A_i и B_i — слова в А.

Согласно (25), (23), (24), имеем

$$\mathfrak{D}(P) = \begin{cases} \alpha & (P = \Lambda) \\ P & (P — \text{слово в Б}, \ P \neq \Lambda). \end{cases} \tag{27}$$

$\mathfrak{D}(P)$ является поэтому непустым словом в Б, каково бы ни было слово P в А. Следовательно, каждое из соотношений $\mathfrak{D}(A_i) \longleftrightarrow \mathfrak{D}(B_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ есть регулярное соотношение в Б. Соотношения видов

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\xi \longleftrightarrow \xi \quad (28) \\ \xi\alpha \longleftrightarrow \xi \quad (29) \end{array}\right\} (\xi \in \text{Б}),$$

очевидно, также являются регулярными соотношениями в Б. Определим исчисление $\mathfrak{B}$ в алфавите Б системой регулярных соотношений в Б

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}(A_i) \longleftrightarrow \mathfrak{D}(B_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \\ \left.\begin{array}{l} \alpha\xi \longleftrightarrow \xi \\ \xi\alpha \longleftrightarrow \xi \end{array}\right\} (\xi \in \text{Б}). \end{array}\right. \tag{30}$$

$\mathfrak{B}$ — регулярное исчисление. Покажем, что $\mathfrak{A}$ включаемо в $\mathfrak{B}$. Для этого покажем, что $\mathfrak{D}$ есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, т. е. что $\mathfrak{D}$ есть нормальный алгорифм над А $\cup$ Б, удовлетворяющий условиям Г. 1—Г. 4.

$\mathfrak{D}$ есть нормальный алгорифм над А $\cup$ Б, так как $\mathfrak{D}$ нормальный алгорифм над Б и А $\subset$ Б [(22)].

$\mathfrak{D}$ удовлетворяет условию Г. 1 в силу (27).

Чтобы доказать, что $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условиям Г. 2, Г. 3 и Г. 4, докажем некоторые леммы.

8.7. *Если P и Q — слова в* Б *и* $PQ \neq \Lambda$, *то* $\mathfrak{B} : P\alpha Q \perp PQ$.

Это следует из присутствия в определяющей системе соотношений исчисления $\mathfrak{B}$ соотношений (28) и (29).

8.8. *Если P и Q — слова в* А, *то*

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{D}(PQ) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(P)\,\mathfrak{D}(Q). \tag{31}$$

В самом деле, если $P = \Lambda$, то

$$\mathfrak{D}(P) = \alpha \qquad [(27)], \tag{32}$$

а так как $\mathfrak{D}(Q)$ — непустое слово в Б, имеем

$$\mathfrak{B} : \alpha\mathfrak{D}(Q) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(Q) \qquad [8.7,\ \S\ 1.6.2]. \tag{33}$$

Следовательно, в этом случае имеет место эквивалентность (31) [(33), (32), § 1.6.4, I. § 3.6 (2)].

Аналогичным образом устанавливается эквивалентность (31) при $Q = \Lambda$.

Если же $P \neq \Lambda$ и $Q \neq \Lambda$, то $PQ \neq \Lambda$ и

$$\mathfrak{D}(PQ) = PQ \qquad [(27)]$$

$$= \mathfrak{D}(P)\,\mathfrak{D}(Q) \qquad [(27)],$$

откуда (31) следует согласно § 1.6.3.

Лемма 8.8 показывает, что $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условию Г. 3.

8.9. *Если* P, Q, R — *слова в* А, *то*

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{D}(PQR) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(P)\,\mathfrak{D}(Q)\,\mathfrak{D}(R).$$

В самом деле, тогда

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{D}(PQR) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(PQ)\,\mathfrak{D}(R) \qquad [8.8]$$

$$\perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(P)\,\mathfrak{D}(Q)\,\mathfrak{D}(R) \qquad [8.8,\ \S\ 1.6.6].$$

8.10. *Если* $\mathfrak{A} : P \perp Q$, *то* $\mathfrak{B} : \mathfrak{D}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(Q)$.

В самом деле, тогда имеются такие слова R, S, T, U, что имеют место равенства § 1.5(1), § 1.5(2) и что одно из соотношений § 1.5(3), § 1.5(4) принадлежит определяющей системе (26) исчисления $\mathfrak{A}$ [§ 1.5.1]. Для определенности предположим, что соотношение § 1.5(3) принадлежит ей, т. е. что

(34) $$T = A_i,$$

(35) $$U = B_i$$

для некоторого i из ряда $1, \ldots, n$. Имеем

(36) $$P = RA_iS \qquad [\S\ 1.5(1),\ (34)],$$

(37) $$Q = RB_iS \qquad [\S\ 1.5(2),\ (35)],$$

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{D}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(R)\,\mathfrak{D}(A_i)\,\mathfrak{D}(S) \qquad [(36),\ 8.9]$$

$$\perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(R)\,\mathfrak{D}(B_i)\,\mathfrak{D}(S) \qquad [(30)]$$

$$\perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(Q) \qquad [(37),\ 8.9,\ \S\ 1.6.4].$$

Следовательно, $\mathfrak{B} : \mathfrak{D}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(Q)$, что и требовалось доказать.

8.11. *Если* $\mathfrak{A} : P \perp\!\!\!\perp Q$, *то* $\mathfrak{B} : \mathfrak{D}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(Q)$.

Это следует из 8.10 в силу § 1.6.1 и § 1.6.5.

Лемма 8.11 показывает, что $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условию Г. 2.

Остается показать, что $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условию Г. 4.

Для этого воспользуемся нормальным алгорифмом $\mathfrak{C}_{\text{Б},\alpha}$, применимым ко всякому слову в Б и перерабатывающим всякое такое слово P в слово, получаемое из P опусканием всех α [II. § 4.7]. Ясно, что $\mathfrak{C}_{\text{Б},\alpha}$ перерабатывает всякое слово в алфавите Б в слово в алфавите А. В силу (27)

(38) $$\mathfrak{C}_{\text{Б},\alpha}(\mathfrak{D}(P)) = P \quad (P \text{ — слово в А}).$$

Имеем, очевидно,

(39) $$\mathfrak{C}_{\text{Б},\alpha}(PQR) = \mathfrak{C}_{\text{Б},\alpha}(P)\,\mathfrak{C}_{\text{Б},\alpha}(Q)\,\mathfrak{C}_{\text{Б},\alpha}(R) \quad (P, Q \text{ — слова в Б}).$$

8.12. *Если* $\mathfrak{B} : P \perp\!\!\!\perp Q$, *то* $\mathfrak{A} : \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(Q)$.

В самом деле, тогда имеются такие слова R, S, T, U, что имеют место равенства § 1.5(1), § 1.5(2) и что одно из соотношений § 1.5(3), § 1.5(4) принадлежит определяющей системе (30) исчисления $\mathfrak{B}$ [§ 1.5.1]. Не ограничивая этим общности рассуждений, предположим, что соотношение § 1.5(3) принадлежит системе (30). Тогда имеет место одно из трех:

(40) $$T = \mathfrak{D}(A_j),$$

(41) $$U = \mathfrak{D}(B_j)$$

для некоторого j из ряда $1, \ldots, n$;

(42) $$T = \alpha\xi,$$

(43) $$U = \xi$$

для некоторой буквы ξ алфавита Б;

(44) $$T = \xi\alpha,$$

(45) $$U = \xi$$

для некоторой буквы ξ алфавита Б.

Рассмотрим 1-й случай — случай равенств (40) и (41). Имеем тогда

(46) $$P = R\mathfrak{D}(A_j)\,S$$ [§ 1.5(1), (40)].

(47) $$Q = R\mathfrak{D}(B_j)\,S$$ [§ 1.5(2), (41)],

(48) $$\mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(P) = \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(R)\,A_j\,\mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(S)$$ [(46), (39), (38)],

(49) $$\mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(Q) = \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(R)\,B_j\,\mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(S)$$ [(47), (39), (38)]

и, так как соотношение $A_j \longleftrightarrow B_j$ принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(P)$ и $\mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(Q)$ суть слова в алфавите А этого исчисления, имеем

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(Q)$$ [(48), (49), § 1.5.1],

откуда

(50) $$\mathfrak{A} : \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(Q)$$ [§ 1.6.2].

Во 2-м случае

(51) $$P = R\alpha\xi S$$ [§ 1.5(1), (42)],

(52) $$Q = R\xi S$$ [§ 1.5(2), (43)],

$$\mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(P) = \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(Q)$$ [(51), (52)],

откуда, в силу § 1.6.3, вытекает эквивалентность (50).

Аналогичным образом устанавливается эта эквивалентность в 3-м случае. Следовательно, она имеет место, что и требовалось доказать.

8.13. *Если* $\mathfrak{B} : P \perp\!\!\!\perp Q$, *то* $\mathfrak{A} : \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{G}_{\text{Б},\alpha}(Q)$.

Это следует из 8.12 в силу § 1.6.1 и § 1.6.5.

Покажем теперь, что $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условию Г. 4.

Пусть, в самом деле, P и Q — такие слова в А, что $\mathfrak{B} : \mathfrak{D}(P) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{D}(Q)$. Тогда

(53) $\mathfrak{A} : \mathfrak{G}_{Б,\alpha}(\mathfrak{D}(P)) \perp\!\!\!\perp \mathfrak{G}_{Б,\alpha}(\mathfrak{D}(Q))$ [8.13],

$\mathfrak{A} : P \perp\!\!\!\perp Q$ [(53), (38)],

что и требовалось доказать.

Из теорем 8.6 и 8.1, в силу 5.1, вытекает следующая теорема.

8.14. *Всякое исчисление включаемо в исчисление в алфавите* $А_0$.

9. Будем говорить об исчислении $\mathfrak{B}$, что оно есть *расширение исчисления* $\mathfrak{A}$, если алфавит исчисления $\mathfrak{B}$ есть расширение алфавита исчисления $\mathfrak{A}$ и всякое соотношение, принадлежащее определяющей системе исчисления $\mathfrak{A}$, принадлежит и определяющей системе исчисления $\mathfrak{B}$.

9.1. *Если исчисление* $\mathfrak{B}$ *есть расширение исчисления* $\mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{B} : P \perp Q$, *коль скоро* $\mathfrak{A} : P \perp Q$.

Это непосредственно следует из определений расширения исчисления и смежности [§ 1.5].

9.2. *Если исчисление* $\mathfrak{B}$ *есть расширение исчисления* $\mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{B} : P \perp\!\!\!\perp Q$, *коль скоро* $\mathfrak{A} : P \perp\!\!\!\perp Q$.

Это следует из 9.1 в силу § 1.6.1.

10. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — исчисления в алфавитах А и Б, не имеющих общих букв. Объединяя определяющие системы соотношений этих исчислений, получаем систему соотношений в алфавите А $\cup$ Б. Она определяет некоторое исчисление в алфавите А $\cup$ Б. Мы будем называть это исчисление *свободным произведением исчислений* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ и обозначать символом

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}.$$

Таким образом, свободное произведение исчислений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ определено тогда и только тогда, когда алфавиты этих исчислений не имеют общих букв; оно является тогда исчислением в объединении этих алфавитов.

10.1. *Если алфавиты исчислений* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *не имеют общих букв, то* $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ *есть расширение каждого из исчислений* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$.

Это следует из определений расширения исчисления и свободного произведения исчислений.

10.2. *Если алфавиты исчислений* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *не имеют общих букв и* $\mathfrak{A} : P \perp\!\!\!\perp Q$, *то* $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} : P \perp\!\!\!\perp Q$.

Это следует из 10.1 и 9.2.

10.3. *Если алфавиты исчислений* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *не имеют общих букв, то каждое из них включаемо в исчисление* $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

В самом деле, пусть алфавиты А и Б исчислений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не имеют общих букв. Тогда существует свободное произведение $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ этих исчислений. Покажем, что $\mathfrak{A}$ включаемо в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Для этого покажем, что алгорифм $\mathfrak{A}_{А \cup Б, \Lambda}$ [II. § 4.2] является изоморфизмом исчисления $\mathfrak{A}$ в исчисление $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

$\mathfrak{A}_{А \cup Б, \Lambda}$ есть нормальный алгорифм над алфавитом А $\cup$ А $\cup$ Б, т. е. над А $\cup$ Б [II. § 4.2], причем

(1) $\mathfrak{A}_{А \cup Б, \Lambda}(P) = P$

для всякого слова P в А [II. § 4.2]. Покажем, что $\mathfrak{A}_{А \cup Б, \Lambda}$ удовлетворяет условиям Г. 1—Г. 4 (с заменой $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ и Б на А $\cup$ Б).

Соблюдение условия Г.1 непосредственно следует из (1); соблюдение условия Г.3 — из (1) и § 1.6.3. В силу 10.2 и (1), алгорифм $\mathfrak{A}_{A \cup Б, \Lambda}$ удовлетворяет условию Г.2. Остается показать, что он удовлетворяет условию Г.4.

Для этого воспользуемся операцией проектирования из А ∪ Б на А [II. § 4.14], состоящей в выбрасывании букв алфавита Б. В согласии с прежними обозначениями [II. § 4.14] будем обозначать через $[P^{A}$ проекцию слова P на алфавит А. Докажем следующую лемму.

10.4. *Если* $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} : P \perp\!\!\!\perp Q$, *то* $\mathfrak{A} : [P^{A} \perp\!\!\!\perp [Q^{A}$.

В самом деле, тогда имеются такие слова R, S, T, U в А ∪ Б, что имеют место равенства § 1.5(1), § 1.5(2) и что одно из соотношений § 1.5(3), § 1.5(4) принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Не ограничивая этим общности рассуждений, будем считать, что соотношение § 1.5(3) принадлежит этой системе. Тогда оно принадлежит либо определяющей системе исчисления $\mathfrak{A}$, либо определяющей системе исчисления $\mathfrak{B}$.

В первом случае T и U суть слова в А и, значит,

(2) $[T^{A} = T$,

(3) $[U^{A} = U$,

(4) $[P^{A} = [R^{A} T [S^{A}$ [§ 1.5(1), II.§4.14(10), (2)],

(5) $[Q^{A} = [R^{A} U [S^{A}$ [§ 1.5(2), II.§4.14(10), (3)],

(6) $\mathfrak{A} : [P^{A} \perp [Q^{A}$ [(4), (5), § 1.5.1],

(7) $\mathfrak{A} : [P^{A} \perp\!\!\!\perp [Q^{A}$ [(6), § 1.6.2].

Во втором случае T и U суть слова в Б, и потому

(8) $[T^{A} = \Lambda$,

(9) $[U^{A} = \Lambda$,

$[P^{A} = [R^{A} [S^{A}$ [§ 1.5(1), II.§4.14(10), (8)]

$= [Q^{A}$ [§ 1.5(2), II.§4.14(10), (9)],

откуда также следует эквивалентность (7) [§ 1.6.3].

Эта эквивалентность, таким образом, имеет место, что и требовалось доказать.

10.5. *Если* $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} : P \perp\!\!\!\perp Q$, *то* $\mathfrak{A} : [P^{A} \perp\!\!\!\perp [Q^{A}$.

Это следует из 10.4 в силу § 1.6.1 и § 1.6.5.

В силу 10.5 и (1), алгорифм $\mathfrak{A}_{A \cup Б, \Lambda}$ удовлетворяет условию Г.4. Мы доказали, таким образом, что исчисление $\mathfrak{A}$ включаемо в исчисление $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Совершенно аналогичным образом устанавливается, что $\mathfrak{B}$ включаемо в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

10.6. *Если алфавиты исчислений* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *не имеют общих букв и* $\mathfrak{B}$ *есть единичное исчисление, то исчисление* $\mathfrak{A}$ *изоморфно исчислению* $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

В самом деле, пусть алфавиты А и Б исчислений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не имеют общих букв и $\mathfrak{B}$ есть единичное исчисление. Тогда существует свободное произведение $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ этих исчислений. Покажем, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Для этого покажем, что алгорифм $\mathfrak{A}_{A \cup Б, \Lambda}$ [II. § 4.2] является изоморфизмом исчисления $\mathfrak{A}$ на исчисление $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

Из доказательства теоремы 10.3 усматриваем, что $\mathfrak{A}_{A \cup Б, \Lambda}$ есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Чтобы убедиться в том, что $\mathfrak{A}_{A \cup Б, \Lambda}$ есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, надо лишь доказать, что $\mathfrak{A}_{A \cup Б, \Lambda}$ удовлетворяет условию Г.5 (с заменой $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ и Б на А $\cup$ Б) [4].

Для этого воспользуемся операцией проектирования из А $\cup$ Б на А [II. § 4.14] и докажем некоторые леммы.

10.7. *Для всякого слова P в* А $\cup$ Б *может быть построен такой ряд слов $P_0, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$, что*

$$P_0 = P,$$

$$P_n = [P^{\text{А}}$$

и что всякое слово P_i $(0 < i \leqslant n)$ получается из P_{i-1} в результате однократного выбрасывания буквы алфавита Б, *т. е. в результате подстановки пустого слова вместо вхождения буквы алфавита* Б.

Это непосредственно следует из определения проекции слова.

10.8. *Если P — слово в* А $\cup$ Б, *а Q — результат подстановки пустого слова вместо вхождения буквы алфавита* Б *в P, то*

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} : P \Vdash Q. \tag{10}$$

В самом деле, тогда имеются такие слова R, S и такая буква ξ алфавита Б, что

$$P = R\xi S, \tag{11}$$

$$Q = RS. \tag{12}$$

Имеем

$$\mathfrak{B} : \xi \Vdash \Lambda, \tag{13}$$

так как исчисление $\mathfrak{B}$ единичное. Лемма 10.2, очевидно, имеет место и с переменой ролей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. В силу (13), имеем поэтому

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} : \xi \Vdash \Lambda. \tag{14}$$

R и S суть слова в А $\cup$ Б, так как P — слово в А $\cup$ Б [(11)].

Поэтому

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} : R\xi S \Vdash RS \qquad [(14), \S\ 1{:}6.6],$$

что, в силу (11) и (12), совпадает с эквивалентностью (10).

10.9. $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} : P \Vdash [P^{\text{А}}$ *(P — слово в* А $\cup$ Б).

Это следует из 10.7 и 10.8.

Как известно, имеется нормальный алгорифм $\mathfrak{R}$ над А $\cup$ Б, перерабатывающий всякое слово в алфавите А $\cup$ Б в проекцию этого слова на алфавит А:

$$\mathfrak{R}(P) = [P^{\text{А}} \quad (P \text{ — слово в А} \cup \text{Б}) \qquad \text{[II. § 4.14]}. \tag{15}$$

В силу 10.9, (15) и (1)

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} : \mathfrak{A}_{А \cup Б,\, \Lambda}(\mathfrak{K}(P)) \coprod P \quad (P \text{ — слово в } А \cup Б).$$

Принимая во внимание, что $\mathfrak{K}$ перерабатывает всякое слово P в алфавите $А \cup Б$ в слово $[P^{А}$ в алфавите А, усматриваем отсюда, что $\mathfrak{A}_{А \cup Б,\, \Lambda}$ удовлетворяет условию **Г. 5**.

Теорема **10.6**, таким образом, доказана.

10.10. *Если имеется исчисление, не включаемое ни в какое исчисление со свойством* И, *то может быть построено неразрешимое исчисление в алфавите* $А_0$, *также не включаемое ни в какое исчисление со свойством* И.

В самом деле, пусть дано исчисление $\mathfrak{A}$, не включаемое ни в какое исчисление со свойством И. Построим исчисление $\mathfrak{B}$, изоморфное $\mathfrak{A}$, в алфавите, не содержащем букв *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, *l*, *m* [5.6]. Построим исчисление $\mathfrak{C}$ как свободное произведение исчислений $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}_1$ [§ 6]:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C}_1. \tag{16}$$

Это возможно, так как алфавиты исчислений $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}_1$ не имеют общих букв. Построим исчисление $\mathfrak{D}$ в алфавите $А_0$ таким образом, чтобы $\mathfrak{C}$ было включаемо в $\mathfrak{D}$ [8.14]. Покажем, что $\mathfrak{D}$ является искомым неразрешимым исчислением в $А_0$, не включаемым ни в какое исчисление со свойством И.

$\mathfrak{C}_1$ включаемо в $\mathfrak{C}$ [(16), 10.3], а $\mathfrak{C}$ — в $\mathfrak{D}$. Следовательно, $\mathfrak{C}_1$ включаемо в $\mathfrak{D}$ [5.1]. Если бы $\mathfrak{D}$ было разрешимым, то и $\mathfrak{C}_1$ было бы разрешимым [6.21] вопреки § 6.6.1. Следовательно, $\mathfrak{D}$ неразрешимо.

$\mathfrak{A}$ изоморфно $\mathfrak{B}$ и, следовательно, включаемо в $\mathfrak{B}$ [5.2]. $\mathfrak{B}$ включаемо в $\mathfrak{C}$ [(16), 10.3], а $\mathfrak{C}$ — в $\mathfrak{D}$. Следовательно, $\mathfrak{A}$ включаемо в $\mathfrak{D}$ [5.1]. Если бы $\mathfrak{D}$ было включаемо в какое-нибудь исчисление со свойством И, то и $\mathfrak{A}$ было бы включаемо в это исчисление [5.1] вопреки предположению. Следовательно, $\mathfrak{D}$ не включаемо ни в какое исчисление со свойством И, что и требовалось доказать.

11. Приступим теперь к доказательству теоремы **7.1**.

Пусть И — инвариантное свойство исчислений, и пусть имеется как исчисление со свойством И, так и исчисление, не включаемое ни в какое исчисление с этим свойством. Построим неразрешимое исчисление $\mathfrak{C}$ в алфавите $А_0$, не включаемое ни в какое исчисление со свойством И [10.10].

Пусть G — какое-нибудь слово в $А_0$. Присоединяя к определяющей системе соотношений исчисления $\mathfrak{C}$ соотношение

$$cGd \longleftrightarrow, \tag{1}$$

получим (зависящую от выбора слова G) систему соотношений в алфавите $А_1$. Она определяет некоторое зависящее от G исчисление $\mathfrak{C}_G$ в алфавите $А_1$. Выясним некоторые свойства этого исчисления.

$\mathfrak{C}_G$ возникает из $\mathfrak{C}$ в результате конструкции, указанной в теореме § 3.1.1. Роль Г играет теперь алфавит $А_0$, роль α и β — буквы *c* и *d*, роль C — слово G, роль $\mathfrak{C}$ — наше теперешнее исчисление $\mathfrak{C}$. Роль соотношения § 3.1 (1) играет поэтому наше соотношение (1), роль

Д — алфавит A_1, а роль $\mathfrak{D}$ — исчисление $\mathfrak{C}_G$. Мы можем поэтому применить к $\mathfrak{C}_G$ результаты § 3, установленные для исчисления $\mathfrak{D}$. В частности, лемма § 3.1.4 формулируется теперь так.

11.1. *Если* $\mathfrak{C}_G : V \parallel W$, *то может быть построен* $\mathfrak{C}_G$*-ряд* $\mathfrak{R}$, *связывающий* V *с* W *и удовлетворяющий хотя бы одному из неравенств* § 3.1 (83), § 3.1 (84).

Условимся говорить о числе i, что оно есть *вершина ряда слов* $Q_0, \ldots, Q_m$, если имеются такие числа j и k, что

$$0 \leqslant j < i < k \leqslant m, \tag{2}$$

$$[Q_j^{\text{в}} < [Q_i^{\text{в}}, \tag{3}$$

$$[Q_k^{\text{в}} < [Q_i^{\text{в}}. \tag{4}$$

Если ряд слов $Q_0, \ldots, Q_m$ имеет вершины, то наибольшую из высот слов Q_i, соответствующих вершинам i ряда $Q_0, \ldots, Q_m$, будем называть *вершинной высотой ряда* $Q_0, \ldots, Q_m$. Вершинную высоту ряда $\mathfrak{Q}$ будем обозначать символом $[\mathfrak{Q}^{\cdot}$.

Из определения вершинной высоты непосредственно следует, что

$$[\mathfrak{Q}^{\cdot} \leqslant [\mathfrak{Q}^{\text{в}},$$

если $\mathfrak{Q}$ есть ряд слов с вершинами.

Если ряд слов $Q_0, \ldots, Q_m$ имеет вершины, то число тех вершин i этого ряда, для которых

$$[Q_i^{\text{в}} = [Q_0, \ldots, Q_m^{\cdot},$$

будем называть *вершинным протяжением ряда* $Q_0, \ldots, Q_m$. Вершинное протяжение ряда $\mathfrak{Q}$ будем обозначать через $[\mathfrak{Q}'$.

11.2. *Если* $\mathfrak{Q}$ *есть* $\mathfrak{C}_G$*-ряд с вершинами, связывающий* V *с* W, *то может быть построен* $\mathfrak{C}_G$*-ряд* $\mathfrak{R}$, *также связывающий* V *с* W *и либо не имеющий вершин, либо такой, что*

$$[\mathfrak{R}^{\cdot} < [\mathfrak{Q}^{\cdot}, \tag{5}$$

либо такой, что

$$[\mathfrak{R}^{\cdot} = [\mathfrak{Q}^{\cdot}$$

и

$$[\mathfrak{R}' < [\mathfrak{Q}'. \tag{6}$$

В самом деле, пусть $\mathfrak{Q}$ есть ряд $Q_0, \ldots, Q_m$. По предположению, $\mathfrak{Q}$ имеет вершины и, значит, имеет определенную вершинную высоту. Обозначим ее через h:

$$[\mathfrak{Q}^{\cdot} = h. \tag{7}$$

По определению вершинной высоты, $\mathfrak{Q}$ имеет вершины высоты h. Найдем наименьшее из чисел, являющихся вершинами ряда $\mathfrak{Q}$ с высотой h. Пусть это будет число i. Будем тогда иметь

$$[Q_i^{\text{в}} = h. \tag{8}$$

Согласно определению вершины, могут быть найдены числа j и k, удовлетворяющие условиям (2)—(4). В силу (2), $j<k$, и можно рассматривать ряд слов $Q_j, \ldots, Q_k$, связывающий Q_j с Q_k. Он является $\mathfrak{C}_G$-рядом, так как весь ряд $Q_0, \ldots, Q_m$ есть $\mathfrak{C}_G$-ряд. Поэтому

$$\mathfrak{C}_G : Q_j \perp\!\!\!\perp Q_k,$$

и, следовательно, согласно 11.1, может быть построен $\mathfrak{C}_G$-ряд $\mathfrak{S}$, связывающий Q_j с Q_k и удовлетворяющий одному из условий

(9) $$[\mathfrak{S}^{\mathfrak{B}} \leqslant [Q_j^{\mathfrak{B}},$$

(10) $$[\mathfrak{S}^{\mathfrak{B}} \leqslant [Q_k^{\mathfrak{B}}.$$

Имеем

(11) $$[\mathfrak{S}^{\mathfrak{B}} < h,$$

что следует, как из (9), (3), (8), так и из (10), (4), (8).

Пусть $\mathfrak{S}$ есть ряд $S_0, \ldots, S_p$. Тогда

(12) $$S_0 = Q_j,$$

(13) $$S_p = Q_k,$$

(14) $$\mathfrak{C}_G : S_{t-1} \perp S_t \quad (0 < t \leqslant p).$$

Положим

(15) $$R_t = \begin{cases} Q_t & (0 \leqslant t \leqslant j) \\ S_{t-j} & (j \leqslant t \leqslant j+p) \\ Q_{t-j-p+k} & (j+p \leqslant t \leqslant j+p+m-k). \end{cases}$$

В силу (12) и (13), это построение слов R_t однозначно при $0 \leqslant t \leqslant j+p+m-k$. Ряд слов $R_0, \ldots, R_q$, где

(16) $$q = j+p+m-k,$$

обозначим через $\mathfrak{R}$. Покажем, что $\mathfrak{R}$ есть искомый ряд слов.

Имеем

(17) $$\mathfrak{C}_G : Q_{t-1} \perp Q_t \quad (0 \leqslant t \leqslant m),$$

так как $\mathfrak{Q}$ есть $\mathfrak{C}_G$-ряд;

(18) $$Q_0 = V,$$

(19) $$Q_m = W,$$

так как $\mathfrak{Q}$ связывает V с W. Поэтому

$$\mathfrak{C}_G : R_{t-1} \perp R_t \quad (0 < t \leqslant q) \quad [(15), (16), (17), (14)],$$

$$R_0 = V \quad [(15), (18)],$$

$$R_q = W \quad [(15), (16), (19)].$$

Следовательно, $\mathfrak{R}$ есть $\mathfrak{E}_G$-ряд, связывающий V с W.
Имеем

(20) $$[S_t^{\mathfrak{B}} < h \quad (0 \leqslant t \leqslant p) \qquad [(11)],$$

(21) $$[R_t^{\mathfrak{B}} < h \quad (j \leqslant t \leqslant j+p) \qquad [(15), (20)].$$

Рассмотрим какую-нибудь вершину r ряда $\mathfrak{R}$ такую, что

(22) $$[R_r^{\mathfrak{B}} \geqslant h.$$

В силу (21) и (22), имеем либо $r < j$, либо $r > j+p$. Так как r — вершина ряда $\mathfrak{R}$, имеются числа u и v такие, что

(23) $$0 \leqslant u < r < v \leqslant q,$$

(24) $$[R_u^{\mathfrak{B}} < [R_r^{\mathfrak{B}},$$

(25) $$[R_v^{\mathfrak{B}} < [R_r^{\mathfrak{B}}.$$

Если $r < j$, то $u < j$ [(23)], и потому

(26) $$R_r = Q_r \qquad [(15)],$$

(27) $$R_u = Q_u \qquad [(15)],$$

$$[Q_u^{\mathfrak{B}} < [Q_r^{\mathfrak{B}} \qquad [(24), (26), (27)].$$

Кроме того, тогда

$$[Q_j^{\mathfrak{B}} < [Q_r^{\mathfrak{B}} \qquad [(3), (8), (22), (26)],$$

$$0 \leqslant u < r < j \leqslant m \qquad [(23), (2)].$$

Следовательно, r является тогда вершиной ряда $\mathfrak{Q}$. Поэтому

(28) $$[Q_r^{\mathfrak{B}} \leqslant h \qquad [(7)],$$

(29) $$[R_r^{\mathfrak{B}} = h \qquad [(28), (26), (22)].$$

Если $r > j+p$, то $v > j+p$ [(23)], и потому

(30) $$R_r = Q_{r-j-p+k} \qquad [(15)],$$

(31) $$R_v = Q_{v-j-p+k} \qquad [(15)],$$

$$[Q_{v-j-p+k}^{\mathfrak{B}} < [Q_{r-j-p+k}^{\mathfrak{B}} \qquad [(25), (30), (31)].$$

Кроме того, тогда

$$[Q_k^{\mathfrak{B}} < [Q_{r-j-p+k}^{\mathfrak{B}} \qquad [(4), (8), (22), (30)],$$

$$0 \leqslant k < r-j-p+k < v-j-p+k \leqslant m \qquad [(2), (23), (16)].$$

Следовательно, число $r-j-p+k$ есть тогда вершина ряда $\mathfrak{Q}$. Поэтому

(32) $$[Q^{\mathfrak{B}}_{r-j-p+k} \leqslant h \qquad [(7)],$$

и мы опять имеем равенство (29) [(32), (30), (22)].

Таким образом, равенство (29) соблюдается для всякой вершины r ряда $\mathfrak{R}$, удовлетворяющей условию (22). Следовательно,

(33) $$[\mathfrak{R}^{\cdot} \leqslant h,$$

т. е.

$$[\mathfrak{R}^{\cdot} \leqslant [\mathfrak{Q}^{\cdot} \qquad [(33), (7)],$$

если только ряд $\mathfrak{R}$ имеет вершины.

Допустим теперь, что $\mathfrak{R}$ имеет вершины и что

$$[\mathfrak{R}^{\cdot} = [\mathfrak{Q}^{\cdot},$$

т. е. что

(34) $$[\mathfrak{R}^{\cdot} = h.$$

Наша лемма будет доказана, если мы при этих условиях установим неравенство (6).

Согласно предыдущему, вершины r ряда $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие условию (29), распадаются на 2 класса: те, для которых $r < j$, и те, для которых $r > j + p$. Каждая из вершин r 1-го класса является вершиной ряда $\mathfrak{Q}$, причем для нее соблюдается условие (26); каждая из вершин r 2-го класса такова, что $r - j - p + k$ есть вершина ряда $\mathfrak{Q}$, причем здесь соблюдается условие (30). В силу этих условий

(35) $$[Q^{\mathfrak{B}}_{r} = h$$

для вершин r ряда $\mathfrak{R}$ 1-го класса [(26), (29)];

$$[Q^{\mathfrak{B}}_{r-j-p+k} = h$$

для вершин r ряда $\mathfrak{R}$ 2-го класса [(30), (29)]. Поэтому вершин 1-го класса имеется не более, чем вершин r ряда $\mathfrak{Q}$, удовлетворяющих условию $r < j$ и условию (35); вершин 2-го класса имеется не более, чем вершин t ряда $\mathfrak{Q}$, удовлетворяющих условию $t > k$ и условию

$$[Q^{\mathfrak{B}}_{t} = h.$$

Так как $j < k$, никакое число не может быть меньше чем j и вместе с тем больше чем k и, значит, общее число вершин r ряда $\mathfrak{R}$, удовлетворяющих условию (29), не больше, чем общее число вершин r ряда $\mathfrak{Q}$, удовлетворяющих условию (35) и одному из условий: $r < j$ и $r > k$. Ряд $\mathfrak{Q}$ имеет, однако, вершину r, удовлетворяющую условию (35) и не удовлетворяющую ни одному из условий $r < j$ и $r > k$, — вершину i [(8), (2)]. Следовательно, число вершин r ряда $\mathfrak{R}$, удовлетворяющих условию (29), меньше числа вершин ряда $\mathfrak{Q}$, удовлетворяющих условию (35). В силу (7) и (34), это выражается неравенством (6), которое, таким образом, доказано.

11.3. *Если* $\mathfrak{D}$ *есть* $\mathfrak{C}_G$*-ряд с вершинами, связывающий* V *с* W, *то может быть построен* $\mathfrak{C}_G$*-ряд* $\mathfrak{R}$, *также связывающий* V *с* W *и либо не имеющий вершин, либо удовлетворяющий условию* (5).

Это доказывается на основе леммы **11.2** аналогично тому, как лемма § 3.1.3 доказывалась на основе § 3.1.2.

11.4. *Если* $\mathfrak{C}_G : V \amalg W$, *то может быть построен* $\mathfrak{C}_G$*-ряд без вершин, связывающий* V *с* W.

Это доказывается на основе **11.3** аналогично тому, как лемма § 3.1.4 доказывалась на основе § 3.1.3.

11.5. *Если* $\mathfrak{C}_G : V \amalg W$ *и* $[V^{\text{в}} = 0$, *то может быть построен* $\mathfrak{C}_G$*-ряд* $V_0, \ldots, V_m$ $(m \geqslant 0)$, *связывающий* V *с* W *и такой, что*

$$[V^{\text{в}}_{r-1} \leqslant [V^{\text{в}}_r \quad (0 < r \leqslant m). \tag{36}$$

В самом деле, построим тогда $\mathfrak{C}_G$-ряд $V_0, \ldots, V_m$ $(m \geqslant 0)$, связывающий V с W и не имеющий вершин [**11.4**]. Если для какого-нибудь r из ряда $1, \ldots, m$ мы имели бы

$$[V^{\text{в}}_{r-1} > [V^{\text{в}}_r, \tag{37}$$

то мы имели бы также

$$[V^{\text{в}}_{r-1} > 0. \tag{38}$$

Так как ряд $V_0, \ldots, V_m$ связывает V с W и $[V^{\text{в}} = 0$, мы имели бы, кроме того,

$$[V^{\text{в}}_0 = 0, \tag{39}$$

$$0 < r-1 < r \leqslant m \qquad [(38), (39)], \tag{40}$$

$$[V^{\text{в}}_0 < [V^{\text{в}}_{r-1} \qquad [(38), (39)]. \tag{41}$$

В силу (40), (41) и (37) число $r-1$ было бы тогда вершиной ряда $V_0, \ldots, V_m$, что невозможно. Следовательно, неравенство (37) не соблюдается ни для какого r из ряда $1, \ldots, m$, и мы имеем неравенство (36), что и требовалось доказать.

Условимся теперь говорить о слове Q в алфавите A_0, что оно *отграничено в слове* P, если слово cQd входит в P.

Условимся говорить о слове P в алфавите A_1, что оно *правильно*, если всякое слово, отграниченное в нем, эквивалентно слову G в исчислении $\mathfrak{C}$.

11.6. *Пусть* P *— правильное слово,* $\mathfrak{C}_G : P \perp Q$ *и* $[P^{\text{в}} \leqslant [Q^{\text{в}}$. *Тогда* Q *правильно.*

В самом деле, тогда имеются такие слова R, S, T, U, что соблюдаются равенства § 1.5(1), § 1.5(2) и что одно из соотношений § 1.5(3), § 1.5(4) принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{C}_G$. [§ 1.5.1]. Это соотношение, согласно построению исчисления $\mathfrak{C}_G$, либо принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{C}$, либо есть соотношение (1), соответственно чему мы ниже отдельно рассматриваем два случая.

а. Одно из соотношений § 1.5(3), § 1.5(4) принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{C}$. Для определенности предположим, что этой системе принадлежит соотношение § 1.5(3). T и U являются тогда словами в A_0, так как $\mathfrak{C}$ — исчисление в A_0. P есть результат подстановки слова T вместо вхождения слова U в Q [§ 1.5(1), § 1.5(2)].

Допустим, что слово V отграничено в Q. Покажем, что оно тогда эквивалентно G в $\mathfrak{C}$.

Слово cVd входит в Q, т. е.

(42) $$Q = XcVdY$$

для некоторых слов X и Y. Принимая во внимание, что ни буква c, ни буква d не входит в слово U, заключаем отсюда согласно I. § 4.5.4, что P имеет один из видов

(43) $$X_1cVdY,$$

(44) $$XcV_1dY,$$

(45) $$XcVdY_1,$$

где X_1, Y_1, V_1 суть соответственно результаты подстановки слова T вместо вхождения слова U в слова X, Y, V. Слово V, отграниченное в Q, является при этом словом в алфавите A_0.

Если P имеет вид (43) или (45), то V отграничено в P и потому эквивалентно G в $\mathfrak{C}$, так как P, по предположению, правильно.

Если же P имеет вид (44), то V_1 отграничено в P и, кроме того,

(46) $$\mathfrak{C} : V \perp V_1,$$

так как V — слово в A_0, а V_1 есть результат подстановки левой части соотношения § 1.5(3) вместо вхождения в слово V правой части этого соотношения. Так как V_1 отграничено в P, а P правильно, имеем

(47) $$\mathfrak{C} : V_1 \perp\!\!\!\perp G.$$

Следовательно, и в этом случае

(48) $$\mathfrak{C} : V \perp\!\!\!\perp G \quad [(46), \S\ 1.6.2, (47), \S\ 1.6.5].$$

Мы доказали, таким образом, что всякое слово, отграниченное в Q, эквивалентно слову G в $\mathfrak{C}$, т. е. что Q правильно. Предполагали мы при этом, что соотношение § 1.5(3) принадлежит определяющей системе исчисления $\mathfrak{C}$. К тому же заключению мы пришли бы, очевидно, предположив, что этой системе принадлежит соотношение § 1.5(4). Таким образом, в рассматриваемом случае слово Q правильно.

б. Одним из соотношений § 1.5(3), § 1.5(4) является соотношение (1). Принимая во внимание, что, согласно предположению, $[P^B \leqslant [Q^B$ и что левая часть соотношения (1) содержит c, а правая не содержит, усматриваем, что в этом случае соотношение § 1.5(4) совпадает с (1), т. е. что

(49) $$T = \Lambda,$$

(50) $$U = cGd.$$

Поэтому

(51) $$P = RS \qquad [\S\ 1.5(1), (49)],$$

(52) $$Q = RcGdS \qquad [\S\ 1.5(2), (50)].$$

Допустим опять, что слово V отграничено в Q. Покажем, что тогда имеет место эквивалентность (48).

Имеем опять равенство (42), где X и Y суть некоторые слова. Согласно (51) и (52), P есть результат подстановки пустого слова вместо вхождения слова cGd в Q. Принимая во внимание, что слово V, отграниченное в Q, есть слово в алфавите A_0 и, значит, как и слово G, не содержит букв c и d, усматриваем, что здесь применима лемма I. § 4. 5. 5, согласно которой P имеет один из видов

$$X_1cVdY,$$

$$XcVdY_1,$$

если только $V \neq G$. При этом X_1 и Y_1 суть соответственно результаты подстановки пустого слова вместо вхождений слова cGd в X и Y. Следовательно, V отграничено в P, если $V \neq G$. Так как P правильно, отсюда следует, что при $V \neq G$ имеет место эквивалентность (48). Но эта эквивалентность имеет место и при $V = G$ [§ 1.6.3].

Эта эквивалентность соблюдается, таким образом, для всякого слова V, отграниченного в Q, т. е. Q правильно, что и требовалось доказать.

11.7. *Всякое слово, эквивалентное в исчислении* $\mathfrak{C}_G$ *слову в алфавите* A_0, *правильно.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{C}_G : V \amalg W$, где V — слово в A_0. Покажем, что тогда W правильно.

Так как $[V^B = 0$, может быть построен $\mathfrak{C}_G$-ряд $V_0, \ldots, V_m$, связывающий V с W и удовлетворяющий условию (36) [11.5]. Имеем

$$V_0 = V, \tag{53}$$

$$V_m = W, \tag{54}$$

и так как c не входит в V, ни одно слово не отграничено в V, т. е. в V_0 [(53)]. Слово V_0 поэтому правильно. Так как $V_0, \ldots, V_m$ есть $\mathfrak{C}_G$-ряд, имеем

$$\mathfrak{C}_G : V_{r-1} \perp V_r \quad (0 < r \leqslant m). \tag{55}$$

Отсюда, пользуясь леммой 11.6, заключаем посредством индукции по r, что каждое из слов V_r $(0 \leqslant r \leqslant m)$ правильно [(36), (55)]. В частности V_m, т. е. W [(54)], правильно, что и требовалось доказать.

Пусть теперь H означает, как и G, произвольное слово в алфавите A_0. Присоединяя к определяющей системе соотношений исчисления $\mathfrak{C}_G$ четыре соотношения

$$\xi cHd \longleftrightarrow cHd \quad (\xi \in A_1), \tag{56}$$

получим (зависящую от выбора слов G и H) систему соотношений в алфавите A_1. Она определяет некоторое зависящее от G и H исчисление $\mathfrak{C}_{G,H}$ в алфавите A_1. Докажем некоторые леммы об этом исчислении.

11.8. $\mathfrak{C}_{G,H}$ *есть расширение исчисления* $\mathfrak{C}$.

Это следует из определений исчислений $\mathfrak{C}_G$ и $\mathfrak{C}_{G,H}$.

11.9. *Если*

$$\mathfrak{C} : G \amalg H, \tag{57}$$

то исчисление $\mathfrak{C}_{G,H}$ *единичное.*

Имеем опять равенство (42), где X и Y суть некоторые слова. Согласно (51) и (52), P есть результат подстановки пустого слова вместо вхождения слова cGd в Q. Принимая во внимание, что слово V, отграниченное в Q, есть слово в алфавите A_0 и, значит, как и слово G, не содержит букв c и d, усматриваем, что здесь применима лемма I. § 4. 5. 5, согласно которой P имеет один из видов

$$X_1cVdY,$$

$$XcVdY_1,$$

если только $V \neq G$. При этом X_1 и Y_1 суть соответственно результаты подстановки пустого слова вместо вхождений слова cGd в X и Y. Следовательно, V отграничено в P, если $V \neq G$. Так как P правильно, отсюда следует, что при $V \neq G$ имеет место эквивалентность (48). Но эта эквивалентность имеет место и при $V = G$ [§ 1.6.3].

Эта эквивалентность соблюдается, таким образом, для всякого слова V, отграниченного в Q, т. е. Q правильно, что и требовалось доказать.

11.7. *Всякое слово, эквивалентное в исчислении* $\mathfrak{C}_G$ *слову в алфавите* A_0, *правильно.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{C}_G : V \amalg W$, где V — слово в A_0. Покажем, что тогда W правильно.

Так как $[V^s = 0$, может быть построен $\mathfrak{C}_G$-ряд $V_0, \ldots, V_m$, связывающий V с W и удовлетворяющий условию (36) [11.5]. Имеем

$$V_0 = V, \tag{53}$$

$$V_m = W, \tag{54}$$

и так как c не входит в V, ни одно слово не отграничено в V, т. е. в V_0 [(53)]. Слово V_0 поэтому правильно. Так как $V_0, \ldots, V_m$ есть $\mathfrak{C}_G$-ряд, имеем

$$\mathfrak{C}_G : V_{r-1} \perp V_r \quad (0 < r \leqslant m). \tag{55}$$

Отсюда, пользуясь леммой 11.6, заключаем посредством индукции по r, что каждое из слов V_r $(0 \leqslant r \leqslant m)$ правильно [(36), (55)]. В частности V_m, т. е. W [(54)], правильно, что и требовалось доказать.

Пусть теперь H означает, как и G, произвольное слово в алфавите A_0. Присоединяя к определяющей системе соотношений исчисления $\mathfrak{C}_G$ четыре соотношения

$$\xi cHd \longleftrightarrow cHd \quad (\xi \in A_1), \tag{56}$$

получим (зависящую от выбора слов G и H) систему соотношений в алфавите A_1. Она определяет некоторое зависящее от G и H исчисление $\mathfrak{C}_{G,H}$ в алфавите A_1. Докажем некоторые леммы об этом исчислении.

11.8. $\mathfrak{C}_{G,H}$ *есть расширение исчисления* $\mathfrak{C}$.

Это следует из определений исчислений $\mathfrak{C}_G$ и $\mathfrak{C}_{G,H}$.

11.9. *Если*

$$\mathfrak{C} : G \amalg H, \tag{57}$$

то исчисление $\mathfrak{C}_{G,H}$ *единичное.*

В самом деле, тогда

(58) $\mathfrak{C}_{G,H} : G \amalg H$ [(57), 11.8, 9.2],

а так как соотношения (1) и (56) принадлежат определяющей системе исчисления $\mathfrak{C}_{G,H}$, имеем для любой буквы ξ алфавита A_1

$$\mathfrak{C}_{G,H} : \xi \amalg \xi cGd \qquad [\S\ 1.6.2]$$
$$\amalg \xi cHd \qquad [(58),\ \S\ 1.6.6]$$
$$\amalg cHd \qquad [\S\ 1.6.2]$$
$$\amalg cGd \qquad [(58),\ \S\ 1.6.6]$$
$$\amalg \Lambda \qquad [\S\ 1.6.2].$$

Таким образом,

(59) $\mathfrak{C}_{G,H} : \xi \amalg \Lambda \quad (\xi \in A_1)$,

откуда следует, что всякое слово в A_1 эквивалентно в $\mathfrak{C}_{G,H}$ пустому слову [(59), § 1.6.7, § 1.6.3]. Поэтому

$$\mathfrak{C}_{G,H} : P \amalg Q \quad (P,\ Q \text{ — слова в } A_1) \quad [\S\ 1.6.4,\ \S\ 1.6.5],$$

и, так как A_1 есть алфавит исчисления $\mathfrak{C}_{G,H}$, $\mathfrak{C}_{G,H}$ есть единичное исчисление, что и требовалось доказать.

11.10. *Если эквивалентность* (57) *не имеет места и*

$$\mathfrak{C}_{G,H} : V \amalg W,$$

где V *и* W *суть слова в* A_0, *то*

(60) $\mathfrak{C} : V \amalg W$.

В самом деле, тогда имеется $\mathfrak{C}_{G,H}$-ряд $V_0, \ldots, V_m$, связывающий V с W. Имеем равенства (53), (54) и смежности

(61) $\mathfrak{C}_{G,H} : V_{r-1} \perp V_r \quad (0 < r \leqslant m)$.

Покажем, что все слова $V_0, \ldots, V_m$ правильны.

Так как c не входит в V, т. е. в V_0 [(53)], ни одно слово не отграничено в V_0 и потому V_0 правильно. Допустим, что установлена правильность слов $V_0, \ldots, V_{j-1}$, где j — одно из чисел $1, \ldots, m$. Покажем, что тогда V_j правильно.

Пусть t — одно из чисел $1, \ldots, j$. Тогда слово V_{t-1} правильно, и потому слово H, которое по предположению, не эквивалентно G в $\mathfrak{C}$, не отграничено в V_{t-1}. Это значит, что в V_{t-1} не входит слово cHd. Следовательно, в V_{t-1} не входят ни левые, ни правые части соотношений (56), и потому допустимые в $\mathfrak{C}_{G,H}$ действия, соответствующие этим соотношениям, не применимы к V_{t-1}. Но именно эти действия отличают исчисление $\mathfrak{C}_{G,H}$ от $\mathfrak{C}_G$: все остальные, допустимые в $\mathfrak{C}_{G,H}$ действия, допустимы и в $\mathfrak{C}_G$, согласно построению исчислений $\mathfrak{C}_{G,H}$ и $\mathfrak{C}_G$. Принимая во внимание, что V_t получается из V_{t-1} в результате действия, допустимого в $\mathfrak{C}_{G,H}$ [(61)], заключаем, что V_t получается из V_{t-1} в результате действия, допустимого в $\mathfrak{C}_G$, т. е. что

$$\mathfrak{C}_G : V_{t-1} \perp V_t.$$

Здесь t — любое из чисел $1, \ldots, j$. Следовательно, $V_0, \ldots, V_j$ есть $\mathfrak{C}_G$-ряд. В силу (53), он связывает V с V_j. Поэтому

$$\mathfrak{C}_G : V \perp\!\!\!\perp V_j, \tag{62}$$

и так как V — слово в A_0, V_j правильно [11.7].

Этим доказана правильность каждого из слов $V_0, \ldots, V_m$. Проведенное только что рассуждение, приведшее к эквивалентности (62), применимо поэтому при $j = m$, и мы имеем

$$\mathfrak{C}_G : V \perp\!\!\!\perp V_m, \tag{63}$$

т. е.

$$\mathfrak{C}_G : V \perp\!\!\!\perp W \qquad [(63), (54)]. \tag{64}$$

Здесь V и W — слова в A_0 и, значит,

$$[V^{\text{в}} = 0, \tag{65}$$

$$[W^{\text{в}} = 0. \tag{66}$$

В силу (64)—(66) и 11.1, может быть построен $\mathfrak{C}_G$-ряд $W_0, \ldots, W_p$, связывающий V с W и такой, что

$$[W_0, \ldots, W_p^{\text{в}} = 0. \tag{67}$$

Покажем, что этот ряд есть $\mathfrak{C}$-ряд. Пусть s — одно из чисел $1, \ldots, p$. В силу (67)

$$[W_{s-1}^{\text{в}} = 0,$$

$$[W_s^{\text{п}} = 0,$$

т. е. c не входит ни в W_{s-1}, ни в W_s. Поэтому W_s не может получаться из W_{s-1} в результате одного из действий, соответствующих соотношению (1). С другой стороны,

$$\mathfrak{C}_G : W_{s-1} \perp W_s,$$

так как $W_0, \ldots, W_p$ есть $\mathfrak{C}_G$-ряд. Согласно построению исчисления $\mathfrak{C}_G$ отсюда следует, что W_s получается из W_{s-1} в результате подстановки одной из частей некоторого соотношения, принадлежащего определяющей системе исчисления $\mathfrak{C}$, вместо вхождения другой части этого соотношения. Так как такие подстановки переводят слова в алфавите A_0 в слова в этом же алфавите, а слово W_0, равное V, есть слово в A_0, все слова W_s $(0 \leqslant s \leqslant p)$ суть слова в A_0 и мы имеем

$$\mathfrak{C} : W_{s-1} \perp W_s \quad (0 < s \leqslant p),$$

т. е. $W_0, \ldots, W_p$ есть $\mathfrak{C}$-ряд. Так как этот ряд связывает V с W, имеет место эквивалентность (60), что и требовалось доказать.

11.11. *Если эквивалентность* (57) *не имеет места, то исчисление* $\mathfrak{C}$ *включаемо в исчисление* $\mathfrak{C}_{G,H}$.

Допустим, в самом деле, что эквивалентность (57) не имеет места. Покажем, что тогда тождественный алгорифм $\mathfrak{A}_{A_1, \Delta}$ [II. § 4.2] есть изоморфизм исчисления $\mathfrak{C}$ в исчисление $\mathfrak{C}_{G,H}$.

$\mathfrak{A}_{A_1, \Delta}$ есть нормальный алгорифм над $A_0 \cup A_1$, т. е. над A_1 [II. § 4.2], перерабатывающий всякое слово в алфавите A_0 в это же слово:

$$\mathfrak{A}_{A_1, \Delta}(P) = P \quad (P \text{ — слово в } A_0). \tag{68}$$

Покажем, что он удовлетворяет условиям Г.1—Г.4 с заменой $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, А и Б соответственно на $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_{G,H}$, A_0 и A_1.

Так как $A_0 \subset A_1$, условие Г.1 соблюдается [(68)]. Условие Г.3 также соблюдается [(68), § 1.6.3]. Соблюдение условия Г.2 вытекает из 11.8, 9.2 и (68). Наконец, соблюдение условия Г.4 следует из 11.10 и (68).

Таким образом, $\mathfrak{A}_{A_1, \Delta}$ есть изоморфизм исчисления $\mathfrak{C}$ в исчисление $\mathfrak{C}_{G,H}$. Следовательно, $\mathfrak{C}$ включаемо в $\mathfrak{C}_{G,H}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ есть исчисление со свойством И в алфавите из n букв. Построим исчисление $\mathfrak{B}$, изоморфное $\mathfrak{A}$, в алфавите, не имеющем общих букв с A_1 и также состоящем из n букв [5.6].

Построим исчисление $\mathfrak{D}_{G,H}$ как свободное произведение исчислений $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}_{G,H}$:

$$\mathfrak{D}_{G,H} = \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C}_{G,H}. \tag{69}$$

Это допустимо, так как алфавиты исчислений $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}_{G,H}$ не имеют общих букв.

11.12. *Если имеет место эквивалентность* (57), *то исчисление* $\mathfrak{D}_{G,H}$ *обладает свойством* И.

В самом деле, тогда исчисление $\mathfrak{C}_{G,H}$ единичное [11.9], и потому $\mathfrak{D}_{G,H}$ изоморфно $\mathfrak{B}$ [(69), 10.6]. А так как $\mathfrak{B}$ изоморфно $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{D}_{G,H}$ изоморфно $\mathfrak{A}$ и, значит, как и $\mathfrak{A}$, обладает инвариантным свойством И, что и требовалось доказать.

11.13. *Если эквивалентность* (57) *не имеет места, то исчисление* $\mathfrak{D}_{G,H}$ *не обладает свойством* И.

В самом деле, тогда $\mathfrak{C}$ включаемо в $\mathfrak{C}_{G,H}$ [11.11], а так как $\mathfrak{C}_{G,H}$ включаемо в $\mathfrak{D}_{G,H}$ [(69), 10.3], $\mathfrak{C}$ включаемо в $\mathfrak{D}_{G,H}$ [5.1]. Но $\mathfrak{C}$, по построению, не включаемо ни в какое исчисление со свойством И. Следовательно, $\mathfrak{D}_{G,H}$ в этом случае не обладает свойством И, что и требовалось доказать.

11.14. *Исчисление* $\mathfrak{D}_{G,H}$ *тогда и только тогда не обладает свойством* И, *когда эквивалентность* (57) *не имеет места.*

Это следует из лемм 11.12 и 11.13.

Пусть теперь Б означает алфавит исчисления $\mathfrak{B}$, и пусть $Д = Б \cup A_1$. Алфавит Д состоит из $n+4$ букв, и $\mathfrak{D}_{G,H}$ есть исчисление в этом алфавите, каковы бы ни были слова G и H в A_0 [(69)].

Для записи систем соотношений в алфавите Д введем отличные друг от друга и не принадлежащие Д буквы α и β. Запись произвольной системы соотношений в алфавите Д будем строить, как указано выше [7].

Обозначим через B запись определяющей системы исчисления $\mathfrak{B}$, через C — запись определяющей системы исчисления $\mathfrak{C}$.

11.15. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{D}^3_{G,H} = BCcGd\alpha\beta acHd\alpha cHd\beta bcHd\alpha cHd\beta ccHd\alpha cHd\beta dcHd\alpha cHd\beta$$
$$(G, H — слова\ в\ A_0).$$

Это следует из построения исчисления $\mathfrak{D}_{G,H}$ и определения записи системы соотношений.

11.16. *Может быть построен нормальный алгорифм над алфавитом* $Д \cup \{\alpha, \beta, *\}$, *перерабатывающий всякое слово* $G*H$ (G *и* H — *слова в* A_0) *в запись определяющей системы исчисления* $\mathfrak{D}_{G,H}$.

Для построения такого алгорифма воспользуемся нормальными алгорифмами $\mathfrak{C}_E^{BCc}$, $\mathfrak{C}_E^{d\alpha\beta ac}$, $\mathfrak{C}_E^{d\alpha c}$, $\mathfrak{C}_E^{d_1 bc}$, $\mathfrak{C}_E^{d_1^2 cc}$, $\mathfrak{C}_E^{d_1^3 dc}$, $\mathfrak{C}_E^{d\beta}$ [II. § 4.7], $\mathfrak{Z}_{A_0,*}$, $\mathfrak{G}_{A_0,*}$ [II. § 4.10], где

$$E = Д \cup \{\alpha, \beta, *\}.$$

Применяя к ним теорему объединения III. § 4.4.2, построим нормальный алгорифм $\mathfrak{E}$ над Ь такой, что

$$(70)\quad \mathfrak{E}(P) \simeq \mathfrak{C}_E^{BCc}(P)\,\mathfrak{Z}_{A_0,*}(P)\,\mathfrak{C}_E^{d\alpha\beta ac}(P)\,\mathfrak{G}_{A_0,*}(P)\,\mathfrak{C}_E^{d\alpha c}(P)\,\mathfrak{G}_{A_0,*}(P)\,\mathfrak{C}_E^{d\beta bc}(P)$$
$$\mathfrak{G}_{A_0,*}(P)\,\mathfrak{C}_E^{d\alpha c}(P)\,\mathfrak{G}_{A_0,*}(P)\,\mathfrak{C}_E^{d_1^2 cc}(P)\,\mathfrak{G}_{A_0,*}(P)\,\mathfrak{C}_E^{d\alpha c}(P)\,\mathfrak{G}_{A_0,*}(P)$$
$$\mathfrak{C}_E^{d_1^3 dc}(P)\,\mathfrak{G}_{A_0,*}(P)\,\mathfrak{C}_E^{d\alpha c}(P)\,\mathfrak{G}_{A_0,*}(P)\,\mathfrak{C}_E^{d\beta}(P) \quad (P — слово\ в\ E).$$

Имеем

$$(71)\quad \mathfrak{E}(G*H) = \mathfrak{D}^3_{G,H} \quad (G, H — слова\ в\ A_0)$$

[(70), II. § 4.7, II. § 4.10.5, II. § 4.10.6, 11.15],

т. е. алгорифм $\mathfrak{E}$ является искомым.

11.17. *Невозможен нормальный алгорифм над алфавитом* $Д \cup \{\alpha, \beta\}$, *тогда и только тогда аннулирующий запись определяющей системы какого-либо исчисления в* Д, *когда это исчисление не обладает свойством* И.

Допустим, в самом деле, что $\mathfrak{H}$ есть такой алгорифм. Построим алгорифм $\mathfrak{E}$ над $Д \cup \{\alpha, \beta, *\}$ согласно 11.16 таким образом, чтобы равенство (71) соблюдалось для любых слов G и H в A_0. Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$:

$$(72)\quad \mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{E}.$$

$\mathfrak{K}$ — нормальный алгорифм над $Д \cup \{\alpha, \beta, *\}$ [(72), III. § 3.4.2] и, значит, над $A_0 \cup \{*\}$. Для любых слов G и H в A_0 имеем

$$\mathfrak{K}(G*H) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{E}(G*H)) \qquad [(72), III. § 3.4.3]$$
$$\simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{D}^3_{G,H}) \qquad [(71)].$$

Поэтому $\mathfrak{K}$ аннулирует слово $G*H$ (G и H — слова в A_0) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}$ аннулирует $\mathfrak{D}^3_{G,H}$, т. е. когда исчисление $\mathfrak{D}_{G,H}$ не обладает свойством И. Последнее же имеет место тогда и только тогда, когда эквивалентность (57) не имеет места [11.14]. Следовательно, $\mathfrak{K}$ аннулирует те и только те слова вида $G*H$ (G и H — слова в A_0), для которых эквивалентность (57) не имеет места. Такой алгорифм, однако, невозможен, так как исчисление $\mathfrak{E}$, по построению, неразре-

шимо. Поэтому невозможен и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$ над $Д \cup \{\alpha, \beta\}$, аннулирующий те и только те записи систем соотношений в Д, которые являются записями определяющих систем исчислений, не обладающих свойством И, что и требовалось доказать.

11.18. *Проблема распознавания свойства* И *для алфавита* Д *неразрешима.*

Это легко доказывается на основе **11.17** аналогично тому, как теорема **V. § 1.4.3** доказывалась на основе теоремы **V. § 1.4.1.**

Очевидна возможность перехода от алфавита Д к любому алфавиту, содержащему столько же букв.

11.19. *Для всякого алфавита, содержащего* $n+4$ *буквы, проблема распознавания свойства* И *неразрешима.*

Подробное проведение доказательства этой леммы мы предоставляем читателю.

Легко далее перейти к любому алфавиту, содержащему большее число букв.

11.20. *Для всякого алфавита с числом букв, большим или равным* $n+4$, *проблема распознавания свойства* И *неразрешима.*

Доказательство этой леммы можно провести следующим образом. Для алфавитов из $n+4$ букв неразрешимость проблемы распознавания свойства И уже установлена [**11.19**]. Рассмотрим какой-нибудь алфавит Г с числом букв, большим чем $n+4$. Выделим из него алфавит $\overline{Д}$, состоящий из $n+4$ букв. Построим исчисление $\mathfrak{Z}$ в алфавите $Г \setminus \overline{Д}$, определяемое системой соотношений

$$\{\xi \longleftrightarrow (\xi \in Г \setminus \overline{Д}).$$

Как нетрудно видеть, оно единичное. Для всякого исчисления $\mathfrak{X}$ в $\overline{Д}$ можно образовать свободное произведение $\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Z}$, изоморфное $\mathfrak{X}$ [**10.6**] и являющееся исчислением в Г. При этом легко построить нормальный алгорифм, перерабатывающий запись определяющей системы всякого исчисления $\mathfrak{X}$ в $\overline{Д}$ в запись определяющей системы исчисления $\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Z}$. Это дает возможность свести проблему распознавания свойства И для $\overline{Д}$ к проблеме распознавания И для Г и тем самым, в силу **11.19**, доказать неразрешимость последней.

Установив, при сделанных выше предположениях относительно И, лемму **11.20**, мы доказали справедливость 1-го и 2-го утверждений теоремы **7.1**. Остается доказать справедливость ее последнего утверждения, относящегося к случаю, когда имеется единичное исчисление со свойством И.

В этом случае, в силу **6.4**, всякое единичное исчисление обладает свойством И, и потому из леммы **11.9** вытекает следующая лемма, аналогичная лемме **11.12**.

11.21. *Если имеет место эквивалентность* (**57**), *то исчисление* $\mathfrak{C}_{G,H}$ *обладает свойством* И.

В лемме **11.13** также возможна замена буквы $\mathfrak{D}$ буквой $\mathfrak{C}$.

11.22. *Если эквивалентность* (**57**) *не имеет места, то исчисление* $\mathfrak{C}_{G,H}$ *не обладает свойством* И.

В самом деле, тогда $\mathfrak{C}$ включаемо в $\mathfrak{C}_{G,H}$ [**11.11**], но не включаемо ни в какое исчисление со свойством И. Следовательно, $\mathfrak{C}_{G,H}$ не обладает свойством И, что и требовалось доказать.

Эти леммы показывают, что в рассматриваемом случае роль исчисления $\mathfrak{D}_{G,H}$ в алфавите Д может взять на себя исчисление $\mathfrak{C}_{G,H}$

в четырехбуквенном алфавите A_1. Дальнейшие леммы 11.14—11.20 оказываются, как легко убедиться, также справедливыми с соответствующими заменами: с заменой $\mathfrak{D}_{G,H}$ на $\mathfrak{C}_{G,H}$, Д на A_1, B на Λ и $n+4$ на 4. Мы устанавливаем таким образом справедливость 3-го утверждения теоремы 7.1, что завершает ее доказательство.

12. В применении к наследственным свойствам теорема 7.1 может быть значительно упрощена. Допустим, в самом деле, что И — наследственное свойство исчислений и что имеется как исчисление $\mathfrak{A}$ со свойством И, так и исчисление $\mathfrak{B}$ без него. Тогда единичное исчисление в алфавите $\{a\}$, определяемое системой соотношений

$$\{a \longleftrightarrow,$$

включаемо в $\mathfrak{A}$ [6.3] и потому в силу наследственности свойства И обладает этим свойством. С другой стороны, исчисление $\mathfrak{B}$, не обладающее свойством И, не включаемо ни в какое исчисление с этим свойством, опять-таки в силу наследственности И. Следовательно, выполнены условия 3-го утверждения теоремы 7.1, и это утверждение применимо. Мы получаем, таким образом, следующую теорему.

12.1. *Пусть* И — *наследственное свойство исчислений. Если имеется как исчисление со свойством* И, *так и исчисление без него, то для всякого алфавита с числом букв, большим или равным четырем, проблема распознавания свойства* И *неразрешима.*

13. Теорема 12.1 может быть применена к ряду наследственных свойств, рассмотренных выше. Это дает следующие результаты.

13.1. *Для всякого алфавита, содержащего более трех букв неразрешима проблема распознавания единичности.*

13.2. *Для всякого алфавита, содержащего более трех букв, неразрешима проблема распознавания конечности.*

13.3. *Для всякого алфавита, содержащего более трех букв, неразрешима проблема распознавания полугрупповости.*

13.4. *Для всякого алфавита, содержащего более трех букв, неразрешима проблема распознавания включаемости в групповое исчисление.*

13.5. *Для всякого алфавита, содержащего более трех букв, неразрешима проблема распознавания разрешимости.*

В самом деле, пять свойств исчислений, о которых идет здесь речь, наследственны [6.2, 6.13, 6.14, 6.18, 6.21]. Всякое единичное исчисление, как легко видеть, обладает всеми этими свойствами. С другой стороны, имеется не конечное исчисление [6.19], которое не единично; имеется не полугрупповое исчисление [6.20], и оно не включаемо в групповое исчисление [6.17]; наконец, имеется неразрешимое исчисление [§ 2.4.4]. Следовательно, теорема 12.1 применима к каждому из рассматриваемых пяти свойств. Ее применение и дает теоремы 13.1—13.5.

14. К групповости исчислений теорема 12.1 не применима, так как групповость не есть наследственное свойство. Тем не менее и для групповости имеем результат, аналогичный теоремам 13.1—13.5.

14.1. *Для всякого алфавита, содержащего более трех букв, неразрешима проблема распознавания групповости.*

В самом деле, всякое единичное исчисление является, как нетрудно видеть, групповым. С другой стороны, имеется исчисление, не включаемое ни в какое групповое исчисление [6.20, 6.17]. Следовательно, к групповости применимо третье утверждение теоремы 7.1, которое и дает теорему 14.1.

15. В заключение рассмотрим проблему изоморфии исчислений, состоящую в разыскании алгорифма, позволяющего распознавать изоморфию любых двух исчислений в данных алфавитах. Эта проблема может быть следующим образом поставлена как нормальная массовая проблема.

Пусть А и Б — произвольные алфавиты; α, β, γ — отличные друг от друга буквы, не принадлежащие А $\cup$ Б. Будем пользоваться буквами α и β для записи систем соотношений в А $\cup$ Б, как указано выше [7]. Буквой γ будем пользоваться для записи пар слов в А $\cup$ Б $\cup \{\alpha, \beta\}$, записывая пару слов P и Q в А $\cup$ Б $\cup \{\alpha, \beta\}$ в виде слова $P\gamma Q$ в А $\cup$ Б $\cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Требуется построить нормальный алгорифм над А $\cup$ Б $\cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$, применимый ко всякому слову вида $\mathfrak{A}^3\gamma\mathfrak{B}^3$ ($\mathfrak{A}$ — исчисление в А, $\mathfrak{B}$ — исчисление в Б) и аннулирующий такое слово тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ изоморфно $\mathfrak{B}$.

Эту проблему будем называть *проблемой изоморфии для алфавитов* А *и* Б.

Докажем следующую теорему.

15.1. *Если хотя бы один из алфавитов* А, Б *содержит более трех букв, то проблема изоморфии для этих алфавитов неразрешима.*

В самом деле, допустим для определенности, что Б содержит более трех букв. Построим единичное исчисление $\mathfrak{A}$ в А, определяемое системой соотношений

$$\{\xi \longleftrightarrow \quad (\xi \in \text{А}).$$

Согласно **6.5**, исчисление $\mathfrak{B}$ в Б тогда и только тогда единично, когда $\mathfrak{A}$ изоморфно $\mathfrak{B}$.

Воспользуемся нормальным алгорифмом $\mathfrak{A}_{\text{В}, A\gamma}$ [II. § 4.2], где

$$\text{В} = \text{А} \cup \text{Б} \cup \{\alpha, \beta, \gamma\},$$

$$A = \mathfrak{A}^3. \tag{1}$$

Полагая для упрощения письма $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_{\text{В}, A\gamma}$, имеем

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3) = \mathfrak{A}^3\gamma\mathfrak{B}^3 \tag{2}$$

для всякого исчисления $\mathfrak{B}$ в Б [(1), I. § 4.2].

Допустим теперь, что вопреки доказываемому $\mathfrak{H}$ есть алгорифм, искомый в проблеме изоморфии для А и Б, т. е. нормальный алгорифм над В, применимый ко всякому слову вида $\mathfrak{X}^3\gamma\mathfrak{Y}^3$ ($\mathfrak{X}$ — исчисление в А, $\mathfrak{Y}$ — исчисление в Б) и аннулирующий такое слово тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$ изоморфно $\mathfrak{Y}$.

Построим алгорифм $\mathfrak{K}$ как нормальную композицию алгорифмов $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{C}. \tag{3}$$

$\mathfrak{K}$ — нормальный алгорифм над В [(3), III. § 3.4.2] и, значит, над Б $\cup \{\alpha, \beta\}$. Имеем

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{B}^3) \simeq \mathfrak{H}(\mathfrak{A}^3\gamma\mathfrak{B}^3) \tag{4}$$

для любого исчисления $\mathfrak{B}$ в Б [(3), III. § 3.4.3, (2)]. Поэтому $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда аннулирует запись определяющей системы исчис-

ления $\mathfrak{B}$ в Б, когда $\mathfrak{H}$ аннулирует слово $\mathfrak{A}^3\gamma\mathfrak{B}^3$. Последнее же имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ изоморфно $\mathfrak{B}$, т. е. когда $\mathfrak{B}$ единичное исчисление. Следовательно, $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда аннулирует запись определяющей системы какого-нибудь исчисления в Б, когда это исчисление единично. При этом, в силу применимости алгорифма $\mathfrak{H}$ к любому слову вида $\mathfrak{X}^3\gamma\mathfrak{Y}^3$ ($\mathfrak{X}$ — исчисление в А, $\mathfrak{Y}$ — исчисление в Б) алгорифм $\mathfrak{K}$ применим к записи определяющей системы любого исчисления в Б (4). Однако нормальный алгорифм $\mathfrak{K}$ над Б $\cup$ $\{\alpha, \beta\}$ с этими свойствами невозможен, так как проблема распознавания единичности для Б неразрешима [13.1]. Поэтому невозможен и нормальный алгорифм $\mathfrak{H}$, искомый в проблеме изоморфии для А и Б, что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В главе VI мы установили неразрешимость ряда нормальных массовых проблем. Каждая из них является уточнением некоторой естественно возникающей массовой проблемы, имеющей дело с неточным понятием алгорифма. Если принять принцип нормализации [II. § 5], то и эту последнюю, очевидно, также придется признать неразрешимой. Принимая этот принцип, мы, таким образом, должны будем согласиться с тем, что в математике естественно возникают неразрешимые массовые проблемы.

Каково же теоретико-познавательное и методологическое значение этого вывода? Какие установки вытекают из него для дальнейшего развития математики?

2. При рассмотрении этих вопросов следует все время помнить о том, что сделанный вывод касается только *массовых* проблем. Эти проблемы по своему характеру в корне отличаются от проблем единичных, обычно подразумеваемых, когда говорят просто о «математических проблемах». В то время как единичная проблема представляет собою вопрос, на который имеет смысл отвечать только «да» или «нет», массовая проблема соответствует целому классу таких вопросов и состоит в разыскании «алгорифма», т. е. по существу единого общего конструктивного метода, позволяющего решить любой из вопросов этого класса. В этом смысле массовую проблему можно рассматривать как своего рода результат объединения многих единичных проблем, как требование решить все эти проблемы одним ударом. Поэтому неразрешимость массовой проблемы никоим образом не означает наличия неразрешимых проблем среди объединяемых ею единичных проблем. Означает эта неразрешимость лишь то, что невозможен единый общий конструктивный метод, успешно применимый к решению любой из этих единичных проблем — лишь то, что решить в этом смысле одним ударом все эти проблемы невозможно.

Таким образом, из наличия неразрешимых массовых проблем вовсе не следует наличие неразрешимых единичных проблем, т. е. наличие осмысленных математических вопросов, требующих ответа «да» или «нет» и, однако, таких, что такой ответ принципиально не может быть найден. Никакая «непознаваемость» этого рода не вытекает из наличия неразрешимых массовых проблем.

3. Наличие неразрешимых массовых проблем означает, однако, что даже в таких сравнительно узких областях математики, как теория ассоциативных исчислений, теория целочисленных матриц, невозможна полная передача исследовательских функций машине, что процесс познания в этих областях не может быть до конца автоматизирован. В самом деле, всякая математическая машина может быть рассматри-

ваема как приспособление для осуществления того или иного алгорифма. Если невозможен алгорифм, решающий любую единичную задачу данного класса, то невозможна поэтому и машина, решающая всякую такую задачу.

Это в корне опровергает распространенные в зарубежной, особенно в американской, литературе сказки о машинах, способных решать любую задачу, об автоматах заменяющих ученого.* Не только любую задачу вообще, но даже задачу об эквивалентности в исчислении $\mathfrak{C}_1$ [VI. § 6] для любых двух слов в алфавите этого исчисления не способен решить никакой автомат. Поэтому исследовательские, познавательные функции в математике (как и во всякой другой науке) никогда не будут переданы машинам, способным лишь помочь человеку, но не способным его заменить.

4. Из наличия неразрешимых массовых проблем вытекает еще один практически важный для математиков вывод.

Массовые проблемы вообще интересуют математиков и часто ставятся ими. Это и понятно, так как решение всякой достаточно общей и хорошо поставленной массовой проблемы обычно сопровождается значительным проникновением в исследуемую область. Математик стремится поэтому решить поставленную массовую проблему.

Он, однако, должен теперь считаться с тем, что эта проблема может оказаться неразрешимой. Поэтому, его усилия должны прилагаться в двух противоположных направлениях: с одной стороны — на поиски решения поставленной массовой проблемы; с другой — на доказательство невозможности ее решения. Если работа в одном из этих направлений увенчается успехом, вопрос будет исчерпан: либо проблема будет решена, либо будет доказана ее неразрешимость.

Так обстоит дело со многими до сих пор не решенными массовыми математическими проблемами: проблемой гомеоморфии трехмерных многообразий, проблемой изотопии узлов, проблемой существования решения системы неопределенных уравнений (10-я проблема Гильберта), проблемой изоморфии теории групп. Для всех этих проблем можно ожидать как решения, так и доказательства невозможности решения.

---

* См., например [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Детловс В. К. Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции. Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 3, стр. 249—252.
2. Мальцев А. И. О включении ассоциативных систем в группы. Матем. сборник, 1939, т. 6 (48), № 2, стр. 331—336.
3. Марков А. А. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем. Докл. АН СССР, 1947, т. 55, № 7, стр. 587—590.
4. Марков А. А. О некоторых неразрешимых проблемах, касающихся матриц. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 6, стр. 539—542.
5. Марков А. А. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем. II. Докл. АН СССР, 1947, т. 58, № 3, стр. 353—356.
6. Марков А. А. Невозможность некоторых алгоритмов в теории ассоциативных систем. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 1, стр. 19—20.
7. Марков А. А. Невозможность алгорифмов распознавания некоторых свойств ассоциативных систем. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 6, стр. 953—956.
8. Марков А. А. Об одной неразрешимой проблеме, касающейся матриц. Докл. АН СССР, 1951, т. 78, № 6, стр. 1089—1092.
9. Марков А. А. Теория алгорифмов. Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 1951, т. 38, стр. 176—189.
10. Марков А. А. О неразрешимых алгорифмических проблемах. Матем. сборник, 1952, т. 31 (73), № 1, стр. 34—42.
11. Нагорный Н. М. К усилению теоремы приведения теории нормальных алгорифмов. Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 3, стр. 341—342.
12. Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества. Докл. АН СССР, 1952, т. 85, № 4, стр. 709—712.
13. Berkeley E. C. Giant brains or machines that think. New-York, 1950.
14. Church A. A set of postulates for the foundation of logic. Ann. of Math., 1932 (2), v. 33, pp. 346—366.
15. Church A. An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math., 1936, v. 58, pp. 345—363.
16. Church A. A note on the Entscheidungsproblem. J. Symb. Logic, 1936, v. 1, pp. 40—41; pp. 101—102.
17. Church A. The calculi of λ-conversion. Ann. of Math. Studies, 1941, № 6.
18. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatsh. Math. Phys., 1931, Bd. 38, SS. 349—360.
19. Hilbert D. und P. Bernays. Grundlagen der Mathematik. Bd. I. Berlin, 1934.
20. Kalmar L. Another proof of the Markov—Post theorem. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1952, t. 3, f. 1—2, pp. 1—25.
21. Kleene S. C. General recursive functions of natural numbers. Math. Ann., 1936, Bd. 112, pp. 727—742.
22. Kleene S. C. λ-definability and recursiveness. Duke Math. J., 1936, v. 2, pp. 340—353.
23. Kleene S. C. Recursive predicates and quantifiers. Trans. Amer. Math. Soc., 1943, v. 53, pp. 41—73.
24. Peter R. Rekursive Funktionen. Budapest, 1951.
25. Post E. L. Finite combinatory processes — Formulation 1. J. Symb. Logic, 1936, v. 1, pp. 103—105.
26. Post E. L. Formal reduction of the general combinatorial decision problem. Amer. J. Math., 1943, v. 65, № 2, pp. 197—215.
27. Post E. L. A variant of a recursively unsolvable problem. Bull. Amer. Math. Soc., 1946, v. 52, № 4, pp. 264—268.

28. Post E. L. Recursive unsolvability of a problem of Thue. J. Symb. Logic, 1947, v. 12, pp. 1—11.
29. Rosser J. B. A mathematical logic without variables. Ann. of Math., 1935 (2), v. 36, pp. 127—150; Duke Math. J., 1935, v. 1, pp. 328—355.
30. Thue A. Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln. Videnskapsselskapets Skrifter. I. Mat. Naturv. Kl., 1914, № 10.
31. Turing A. M. On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London Math. Soc., 1937 (2), v. 42, pp. 230—265; (2), v. 43, p. 544.
32. Turing A. M. Computability and λ-definability. J. Symb. Logic, 1937, v. 2, pp. 153—163.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
24	7 снизу	$=\xi_n^{\cdot}\cdots\xi_1$	$=\xi_n\cdots\xi_1$
24	10 снизу	$[\Delta^{\smile}$	$[\Lambda^{\smile}$
31	12 снизу	$K_j\,(i\neq j).$	$K_i\,(i\neq j).$
31	7 снизу	l_j	l_i
38	1 сверху	$=\lambda$	$=\Lambda$
46	13 снизу	$\neq\lambda$	$\neq\Lambda$
91	15 сверху	$\vdash($	$\models($
112	10—11 сверху	обычная	простая
123	1 снизу	$\mathfrak{B},$	$\mathfrak{B}_1,$
125	6 снизу	$\mathfrak{N}^{\mathrm{A}}\bigcup_{\{\alpha\},\,\Lambda,\,\alpha\,\Lambda}$	$\mathfrak{N}_{\mathrm{AU}\{\alpha\},\,\Lambda,\,\alpha,\,\Lambda}$
133	2 снизу	m^0	m_0
137	20 снизу	$\beta P={}_nR_n$	$\beta P_n=R_n$
166	18 сверху	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{G}$
181	1 снизу	(7)	(17)
274	8 сверху	$\mathrm{A}_0\hat{\bigcup}\mathrm{A}_0$	$\mathrm{A}_0\bigcup\hat{\mathrm{A}}_0$
298	17 снизу	**4. 2**	**6. 2**
298	16 снизу	**4. 2**	**6. 2**
298	16 снизу	**4. 1**	**6. 1**
306	4 сверху	C_{rq}	C_{r_q}
306	7 сверху	$XD_{r_1}\ldots D_{rq}=C_{r_1}\ldots C_{rq}X_q$	$XD_{r_1}\ldots D_{r_q}=C_{r_1}\ldots C_{r_q}X_q$
307	8 снизу	$D_{r_{q-1}}$	$D_{r_{q-1}}$
311	7 сверху	$F_{s_{u-1}}$	$F_{s_{u-1}}$
321	10 снизу	L_{rt}	L_{r_t}
338	4 сверху	$\mathrm{A}_1,\ \ldots,\ \mathrm{A}_n$	$A_1,\ \ldots,\ A_n$