

Теория категорий



Gerhard Marx “Upper Permian scene”. Image courtesy of Billy de Klerk and the Albany Museum, Grahamstown.

Оглавление

Оглавление	i
Вступление	v
1 Категории, изоморфизмы	1
2 Другое определение категории	9
3 Функторы	11
4 Конкретные категории	15
5 Диаграммы	19
6 Естественные преобразования	23
7 Топосы вида Set^K	27
8 Терминальные объекты, элементы	35
9 Двойственные категории	41
10 Произведения	47
11 Копроизведения	73
12 Сопряжённые функторы	81
12.1 Основное определение и примеры	81
12.2 Единица и коединица сопряжения	87
12.3 Экспонента. Сохранение произведений и копроизведений	96

12.4	Единственность сопряжённого функтора	102
12.5	Ещё одно определение сопряжённости	105
13	Аксиоматика декартово замкнутых категорий	107
14	Объекты натуральных чисел	113
15	Исчисление высказываний	135
15.1	Интуиционистское исчисление высказываний	135
15.2	Классическое исчисление высказываний	148
15.3	Исчисление секвенций	150
15.4	Специальная форма исчисления высказываний	154
15.5	Бидекартово замкнутые категории	160
15.6	Алгебры Гейтинга	170
16	Мономорфизмы, эпиморфизмы	177
16.1	Мономорфизмы, подобъекты	177
16.2	Эпиморфизмы	195
16.3	Несколько теорем о сопряжённых функторах	200
16.4	Эквивалентность категорий	203
17	Лемма Йонеды	215
17.1	Контравариантная лемма Йонеды	217
17.2	Ковариантная лемма Йонеды	230
18	Уравнители, декартовы квадраты, топосы	247
18.1	Уравнители	247
18.2	Декартовы квадраты	252
18.3	Топосы	271
18.4	Относительные категории	283
19	Монады	297
20	Пределы и копределы	339
20.1	Большой пример	339
20.2	Пределы	354
20.3	Сохранение пределов	369
20.4	Копределы	377

21 Теорема о сопряжённом функторе	389
Заключение	399
Замеченные ошибки	401
Предметный указатель	403
Указатель обозначений	410

Вступление

Автор поставил целью написать учебник теории категорий, доступный мат.логикам и функциональным программистам, в котором не будет ни слова про гомотопии и гомологии. Почти все русскоязычные книги по теории категорий написаны алгебраистами для алгебраистов, в нагрузку к теории категорий в них предлагают изучать гомологическую алгебру. Исключение составляет книга Голдблатта „Топосы“, но она, по мнению автора, как учебник не очень годится (хотя сама по себе интересная). Для чтения книги нужно шапочное знакомство с понятиями „группа“, „свободная группа“ и „гомоморфизм групп“. Если читатель их не знает, советую сначала прочитать популярную книжку Александрова „Введение в теорию групп“.

Символ \Leftrightarrow означает „тогда и только тогда“.

Символ \wedge означает „и“, автор иногда вставляет его между формулами.

Символ \square отмечает конец доказательства.

Глава 1

Категории, изоморфизмы

Категории – это некоторые математические структуры, частными случаями которых являются частично упорядоченные множества, а также полугруппы с единицей (в том числе группы). Во многих случаях категорию удобно представлять как „обобщённое частично упорядоченное множество“, в других случаях как „обобщённую полугруппу с единицей“. Чуть позже мы дадим точные определения этих понятий.

Определение 1.1. Категория K задаётся следующим набором данных:

1. Совокупностью *объектов*, которые мы будем обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, C \dots$
2. Совокупностью *морфизмов*, или *стрелок*, которые мы будем обозначать строчными латинскими буквами $f, g, h \dots$
3. Операциями *dom* и *cod*, которые сопоставляют каждой стрелке f некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (они называются *началом* и *концом* f). Тот факт, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, наглядно изображается так

$$f: A \rightarrow B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B$$

В этом случае говорят, что f – стрелка (или морфизм) из A в B .

4. Операцией *композиции*, которая по каждой паре стрелок f и g , расположенных так

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

(то есть, $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$), выдаёт некоторую стрелку

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

(она называется *композицией* g и f).

5. Операцией id , которая по каждому объекту A выдаёт некоторую стрелку

$$A \xrightarrow{id_A} A$$

(она называется *тождественной* или *единичной стрелкой* объекта A , а также *тождественным* или *единичным морфизмом* объекта A , можно называть эту стрелку и просто *тождеством* объекта A).

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции.

Для любой тройки стрелок f, g, h , расположенных так

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

выполнено равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Свойства тождества.

Для любой стрелки $f: A \rightarrow B$ выполнено равенство $f \circ id_A = f$.

Для любой стрелки $f: A \rightarrow B$ выполнено равенство $id_B \circ f = f$.

Замечание 1.2. Часто вместо id_A пишут 1_A .

Пример 1.3. Категория множеств **Set**. Её объектами являются произвольные множества $A, B, C \dots$, а морфизмами – упорядоченные тройки вида (A, f, B) , где f – функция из A в B (определённая на всех элементах A). Операции dom и cod задаются равенствами:

$$\text{dom}(A, f, B) = A$$

$$\text{cod}(A, f, B) = B$$

Тождественный морфизм id_A есть по определению (A, id_A, A) , где id_A есть тождественная функция из A в A .

Композицией морфизмов (B, g, C) и (A, f, B) будет морфизм $(A, g \circ f, C)$. В принципе, можно было бы определить морфизмы как пары (f, B) , потому что начало однозначно находится по f (это область определения функции f). Но конец надо указывать явно, так как по f он однозначно не находится (множество значений f может быть строго меньше B). Например, функцию, определённую на всех действительных числах и тождественно равную нулю, можно считать действующей во множество натуральных чисел, рациональных чисел или действительных чисел, по желанию.

Соглашение 1.4. Совокупность всех объектов категории K будем обозначать $Ob(K)$. Совокупность всех стрелок категории K будем обозначать $Mor(K)$. Совокупность всех стрелок из A в B в категории K будем обозначать $K(A, B)$.

Замечание 1.5. Часто вместо $K(A, B)$ пишут $Hom_K(A, B)$.

С теоретико-множественной точки зрения совокупность объектов Set (то есть, совокупность всех множеств) не является множеством, она слишком велика. То же относится и к совокупности морфизмов Set .

Определение 1.6. Категория K называется *локально малой*, если $K(A, B)$ является множеством для любых A и B .

Определение 1.7. Категория K называется *малой*, если $Mor(K)$ (то есть, объединение всех $K(A, B)$) является множеством.

Всякая малая категория является локально малой. Обратное неверно. Set является локально малой, но не является малой.

Совокупность объектов $Ob(K)$ малой категории тоже является множеством, потому что объектов „не больше“, чем морфизмов. В самом деле, каждому объекту A соответствует его единичный морфизм id_A , причём разным объектам соответствуют разные единичные морфизмы (из $id_A = id_B$ следует $dom(id_A) = dom(id_B)$, поэтому $A = B$).

Замечание 1.8. Категории приходится делить на „большие“ и „малые“ по техническим причинам, чтобы избежать парадоксов, близких к парадоксу Кантора из теории множеств.

Определение 1.9. *Полугруппа с единицей* – это множество M (будем обозначать его элементы $f, g, h \dots$), на котором задана двухместная операция умножения $g \circ f$ и выделен элемент e (двусторонняя единица), причём для любых элементов f, g, h выполнены равенства:

1. Ассоциативность умножения.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$
2. Свойства двусторонней единицы.

$$f \circ e = f$$

$$e \circ f = f$$

Пример 1.10. Примеры полугрупп с единицей:

1. Любая группа.
2. Множество натуральных чисел с операцией умножения.
3. Множество натуральных чисел с операцией сложения (двусторонней единицей будет 0).
4. Множество слов в некотором алфавите с операцией приписывания (двусторонней единицей будет пустое слово).

Пример 1.11. Любая малая категория \mathbf{K} с единственным объектом (обозначим его A) задаёт некоторую полугруппу с единицей. Элементами этой полугруппы будут стрелки категории (то есть, множество M – это $\text{Mor}(\mathbf{K})$). Любая стрелка $f \in \mathbf{K}(A, A)$, поэтому существует композиция любых двух стрелок, операция композиции ассоциативна и существует двусторонняя единица id_A . Обратное, любую полугруппу с единицей можно превратить в малую категорию с единственным объектом (надо выбрать произвольный объект A и положить $dom(f) = cod(f) = A$ для всех элементов полугруппы).

Определение 1.12. Множество M называется *предупорядоченным*, если на нём задано рефлексивное транзитивное отношение \lesssim (*отношение предпорядка*, или просто *предпорядок*). Это значит, что для любых элементов множества (будем их обозначать $A, B, C \dots$) выполнены следующие условия

1. Рефлексивность.

$$A \lesssim A$$

2. Транзитивность.

$$A \lesssim B \text{ и } B \lesssim C \text{ влечёт } A \lesssim C$$

Если выполнено также свойство антисимметричности

$$A \lesssim B \text{ и } B \lesssim A \text{ влечёт } A = B$$

то множество называется *частично упорядоченным* (а отношение *частичным порядком* и обозначается \leq).

Определение 1.13. Категория \mathbf{K} называется *категорией предпорядка*, если $\mathbf{K}(A, B)$ содержит не больше одной стрелки для любых A и B . Иными словами, если у двух стрелок одинаковое начало и одинаковый конец, то эти стрелки равны.

Пример 1.14. Любая малая категория предпорядка задаёт некоторое предупорядоченное множество. Его элементами будут объекты категории (то есть, множество M – это $\text{Ob}(\mathbf{K})$), а отношение предпорядка задаётся условием

$$A \lesssim B \text{ если и только если существует стрелка из } A \text{ в } B$$

Рефлексивность \lesssim следует из наличия тождественных стрелок id_A , а транзитивность – из наличия композиции стрелок. Наоборот, любое предупорядоченное множество можно превратить в малую категорию предпорядка. Её объектами будут элементы этого множества, надо всего лишь для любых объектов со свойством $A \lesssim B$ произвольным образом выбрать единственную стрелку из A в B . Например, можно считать стрелкой саму упорядоченную пару (A, B) . В этом случае будет

$$id_A = (A, A)$$

$$(B, C) \circ (A, B) = (A, C)$$

Независимо от конкретного выбора стрелок, верны ассоциативность композиции и свойства тождества, потому что любые две стрелки с одинаковым началом и одинаковым концом равны. Например, если $f: A \rightarrow B$, то $f \circ id_A: A \rightarrow B$, поэтому $f \circ id_A = f$.

Определение 1.15. Стрелка $f: A \rightarrow B$ называется *изоморфизмом*, если существует стрелка $g: B \rightarrow A$ со свойствами

$$g \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B$$

Такая стрелка g называется *обратной* к f .

Обратная стрелка может быть только одна. Предположив, что к f есть две обратные стрелки g_1 и g_2 , мы получим

$$g_1 \circ f \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$$

$$g_1 \circ f \circ g_2 = g_1 \circ id_B = g_1$$

поэтому $g_1 = g_2$. Обратную стрелку к f , если она существует, будем обозначать f^{-1} .

Определение 1.16. Объекты A и B называются *изоморфными*, если между ними есть изоморфизм. Это обозначается $A \cong B$.

Упражнение 1.17. Композиция двух изоморфизмов является изоморфизмом. Тожественные стрелки являются изоморфизмами. Стрелка, обратная к изоморфизму, является изоморфизмом. Для любых A и B

1. $A \cong A$
2. $A \cong B$ влечёт $B \cong A$
3. $A \cong B$ и $B \cong C$ влечёт $A \cong C$

Пример 1.18. В Set два множества A и B изоморфны \Leftrightarrow они равно-мощны.

Пример 1.19. Малая категория с одним объектом задаёт группу \Leftrightarrow все её стрелки являются изоморфизмами (то есть, обратимы).

Пример 1.20. Малая категория предпорядка задаёт частичный порядок \Leftrightarrow изоморфные объекты равны.

Действительно, объекты A и B в категории предпорядка изоморфны если и только если существуют стрелки $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow A$, то есть $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$ (равенства $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$ выполняются автоматически, поскольку любые две стрелки с одинаковым началом и одинаковым концом равны).

Глава 2

Другое определение категории

Определение 1.1 является стандартным, но на самом деле обычно мы пользуемся немного другим.

Определение 2.1. На практике категория обычно задаётся следующим набором данных:

1. Совокупностью *объектов*, которые мы будем обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, C \dots$
2. Совокупностью *протоморфизмов*, или *протострелок*, которые мы будем обозначать готическими буквами $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h} \dots$
3. Трёхместным отношением $\mathfrak{f}: A \rightarrow B$ (или $A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B$), которое означает „ \mathfrak{f} можно считать стрелкой из A в B “. По протоморфизму его начало и конец не обязаны определяться однозначно, в этом разница.
4. Операцией *композиции*, которая по каждой паре протострелок \mathfrak{f} и \mathfrak{g} , расположенных так

$$A \xrightarrow{\mathfrak{f}} B \xrightarrow{\mathfrak{g}} C$$

выдаёт некоторую протострелку $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}$ (она называется *композицией* \mathfrak{g} и \mathfrak{f}), причём верно $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}: A \rightarrow C$.

5. Операцией *id*, которая по каждому объекту A выдаёт некоторую протострелку id_A , причём верно $\text{id}_A: A \rightarrow A$.

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции.

Для любой тройки протострелок f, g, h , расположенных так

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

выполнено равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Свойства тождества.

Для любой протострелки $f: A \rightarrow B$ выполнено равенство

$$f \circ \text{id}_A = f.$$

Для любой протострелки $f: A \rightarrow B$ выполнено равенство

$$\text{id}_B \circ f = f.$$

Подчёркиваю, единственное отличие от определения 1.1 в том, что по протоморфизму его начало и конец не обязаны определяться однозначно.

Имея такой набор данных, мы можем построить категорию в смысле определения 1.1. В качестве морфизмов из A в B берутся упорядоченные тройки (A, f, B) , для которых верно $f: A \rightarrow B$. При этом:

$$\text{dom}(A, f, B) = A$$

$$\text{cod}(A, f, B) = B$$

$$\text{id}_A = (A, \text{id}_A, A)$$

$$(B, g, C) \circ (A, f, B) = (A, g \circ f, C)$$

Именно так мы строили категорию Set , протоморфизмами в этом случае были теоретико-множественные функции. В примере 1.14 мы строили категорию по предупорядоченному множеству, в этом случае достаточно взять единственный протоморфизм $*$: $A \rightarrow B$ для всех A и B со свойством $A \lesssim B$.

Замечание 2.2. Слово „протоморфизм“ и определение 2.1 взяты из книги Freyd, Scedrov „Categories, Allegories“.

Глава 3

Функторы

Функторы – это правильные отображения категорий друг в друга. Примерами функторов являются монотонные отображения упорядоченных множеств, а также гомоморфизмы полугрупп с единицей (в том числе гомоморфизмы групп).

Определение 3.1. *Функтор* F из категории \mathbf{K}_1 в категорию \mathbf{K}_2 – это пара отображений (обозначаемых одной буквой)

$$F: \text{Ob}(\mathbf{K}_1) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$$

$$F: \text{Mor}(\mathbf{K}_1) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{K}_2)$$

первое из которых отображает объекты \mathbf{K}_1 в объекты \mathbf{K}_2 , а второе – морфизмы \mathbf{K}_1 в морфизмы \mathbf{K}_2 , причём сохраняются *dom*, *cod*, *id* и композиция. Это значит, что для любых f, g, A, B, C из категории \mathbf{K}_1 выполнено:

1. $f: A \rightarrow B$ влечёт $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$
2. $F(id_A) = id_{F(A)}$
3. $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ влечёт $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Соглашение 3.2. Функторы будем обозначать буквами F, G, H .

Если функтор F действует из категории \mathbf{K}_1 в категорию \mathbf{K}_2 , будем это записывать как $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ или $\mathbf{K}_1 \xrightarrow{F} \mathbf{K}_2$.

Пример 3.3. Если \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 – малые категории с одним объектом каждая, то функторы между ними взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам соответствующих полугрупп с единицей. Функтор $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ переводит единственный объект \mathbf{K}_1 в единственный объект \mathbf{K}_2 , сохраняет композицию стрелок и двустороннюю единицу. Таким образом, отображение $F: \text{Mog}(\mathbf{K}_1) \rightarrow \text{Mog}(\mathbf{K}_2)$ является гомоморфизмом полугрупп с единицей.

Пример 3.4. Если \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 – малые категории предпорядка, то функторы между ними взаимно однозначно соответствуют монотонным отображениям соответствующих предпорядков.

Если $A \lesssim B$, то $F(A) \lesssim F(B)$, поскольку единственная стрелка из A в B переходит в единственную стрелку из $F(A)$ в $F(B)$. Обратное, любое монотонное отображение $\text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ в $\text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ превращается в функтор единственно возможным способом (проверьте детали).

Упражнение 3.5. Проверьте, что функторы переводят изоморфизмы в изоморфизмы и обратные стрелки в обратные.

Определение 3.6. Каждой категории \mathbf{K} сопоставляется *тождественный функтор* $Id_{\mathbf{K}}: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$, действующий так:

$$Id_{\mathbf{K}}(A) = A$$

$$Id_{\mathbf{K}}(f) = f$$

для любых A и f категории \mathbf{K} .

Определение 3.7. Каждой паре функторов F и G , расположенных так

$$\mathbf{K}_1 \xrightarrow{F} \mathbf{K}_2 \xrightarrow{G} \mathbf{K}_3$$

сопоставляется их *композиция* $G \circ F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_3$, которая определяется равенствами:

$$(G \circ F)(A) = G(F(A))$$

$$(G \circ F)(f) = G(F(f))$$

для любых A и f категории \mathbf{K}_1 .

Определение 3.8. Категория *малых категорий* \mathbf{Cat} имеет в качестве объектов все малые категории, а в качестве протоморфизмов – функторы.

Замечание 3.9. Морфизмами будут упорядоченные тройки $(\mathbf{K}_1, F, \mathbf{K}_2)$, где $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$. Здесь ситуация примерно такая, как при построении категории \mathbf{Set} (только хуже) – по функтору (то есть, паре отображений) восстановить категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 в общем случае нельзя, поэтому их надо указывать явно.

Упражнение 3.10. Проверьте, что категория \mathbf{Cat} локально малая.

Замечание 3.11. Попытка образовать категорию всех категорий (не только малых) приводит к парадоксу, близкому к парадоксу Кантора.

Определение 3.12. Функтор $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ называется *изоморфизмом категорий*, если к нему существует (однозначно определённый) обратный функтор $F^{-1}: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_1$ такой, что

$$F \circ F^{-1} = Id_{\mathbf{K}_2}$$

$$F^{-1} \circ F = Id_{\mathbf{K}_1}$$

В этом случае категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 называются *изоморфными* (пишется $\mathbf{K}_1 \cong \mathbf{K}_2$).

Для малых категорий это определение даёт в точности изоморфизм в категории \mathbf{Cat} .

Глава 4

Конкретные категории

Часто встречаются „категории множеств с некоторой дополнительной структурой“. Например, объектами категории \mathbf{Grp} являются произвольные группы, а протоморфизмами – гомоморфизмы групп. Точно так же можно рассматривать категорию линейных пространств и линейных отображений, категорию топологических пространств и непрерывных отображений и т.д. Не обязательно брать такие большие категории. Можно взять несколько (каких угодно) топологических пространств и их непрерывные отображения друг в друга, это будет категория. Не обязательно брать и все отображения. Если взять только сюръективные или только инъективные отображения, всё равно получится категория, потому что композиция сюръективных (инъективных) отображений тоже сюръективна (инъективна) и все тождественные отображения сюръективны (инъективны). Общим для всех таких категорий является наличие „хорошего“ функтора в категорию множеств \mathbf{Set} . Этот функтор по любому объекту (группе, линейному пространству, топологическому пространству и т.д.) выдаёт его множество-носитель.

Определение 4.1. Функтор $G: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ называется *строгим* (по-английски пишут faithful), если для любых A, B, f, g из категории \mathbf{K}_1 верно следующее утверждение

$$f: A \rightarrow B \wedge g: A \rightarrow B \wedge G(f) = G(g) \text{ влечёт } f = g$$

Иными словами, G отображает $\mathbf{K}_1(A, B)$ в $\mathbf{K}_2(G(A), G(B))$ инъективно для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$.

Содержательно, строгость означает, что стрелка f определена однозначно, если мы знаем $\text{dom}(f)$, $\text{cod}(f)$ и $G(f)$.

Определение 4.2. *Конкретная категория* задаётся следующим набором данных:

1. Категория \mathbf{K} .
2. Строгий функтор $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$, этот функтор называется *стирающим* или *забывающим* функтором.

Заметим, что при нашем определении конкретная категория – это не категория, а пара „категория и функтор“.

Все перечисленные выше категории „множеств с дополнительной структурой“ являются конкретными, если в качестве стирающих функторов брать функторы „множества-носителя“. Рассмотрим подробнее категорию \mathbf{Grp} . Любой группе Gr соответствует её множество-носитель $G(Gr)$. Гомоморфизмы групп задаются как отображения множеств-носителей, сохраняющие дополнительную структуру (умножение и двустороннюю единицу). Гомоморфизм полностью определён, если известно соответствующее отображение множеств-носителей, из этого следует строгость G . Композиция гомоморфизмов определяется как композиция соответствующих отображений множеств-носителей, поэтому G является функтором.

Теорема 4.3. *Для любой малой категории \mathbf{K} существует строгий функтор $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$.*

Доказательство. Определим функтор G следующими равенствами:

$$G(A) = \{f \in \text{Mor}(\mathbf{K}) : \text{cod}(f) = A\}$$

$$G(g)(f) = g \circ f$$

Таким образом, каждому объекту A сопоставляется множество $G(A)$ всех стрелок с концом A . Каждой стрелке $g: A \rightarrow B$ сопоставляется функция $G(g): G(A) \rightarrow G(B)$, которая по любому элементу $f \in G(A)$ выдаёт $g \circ f \in G(B)$. Стрелка g однозначно определяется по A и $G(g)$, поскольку $g = G(g)(id_A)$, из этого следует строгость G . \square

В частном случае, когда категория \mathbf{K} задаёт группу (то есть в \mathbf{K} один объект и все стрелки являются изоморфизмами), мы получаем известную *теорему Кэли*: любая группа может быть представлена как группа перестановок некоторого множества (а именно, множества её элементов).

Замечание 4.4. Уже локально малую категорию не всегда можно сделать конкретной (выбрав подходящий функтор в \mathbf{Set}). Но простейший естественный контрпример, приходящий автору на ум, содержит слово „гомотопия“.

Глава 5

Диаграммы

Различные утверждения о категориях удобно представлять с помощью картинок определённого вида, называемых *диаграммами*.

Определение 5.1. *Диаграмма* в категории \mathcal{K} – это ориентированный граф, вершинам которого сопоставлены некоторые объекты \mathcal{K} , а рёбрам – некоторые морфизмы \mathcal{K} .

Определение 5.2. *Путь* в диаграмме называется последовательность стрелок, расположенных так

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} A_n$$

где $n \geq 1$. Каждому пути сопоставим композицию всех входящих в него стрелок $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$.

Диаграмма называется *коммутативной*, если для любых вершин A и B в диаграмме любые два пути из A в B дают равные композиции стрелок.

Пример 5.3. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & C \end{array}$$

означает, что $g \circ f = h$.

Пример 5.4. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{l} & D \end{array}$$

означает, что $g \circ f = l \circ h$.

Пример 5.5. Коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{c} \text{ } \\ \curvearrowright f \\ \text{ } \\ A \end{array}$$

означает, что $f = f \circ f = f \circ f \circ f = \dots$

Упражнение 5.6. Проверьте, что в категориях предпорядка все диаграммы коммутативны.

Пример 5.7. Свойства тождества выражаются следующими коммутативными диаграммами:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ id_A \uparrow & \nearrow f & \\ A & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & B \\ f \nearrow & & \downarrow id_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

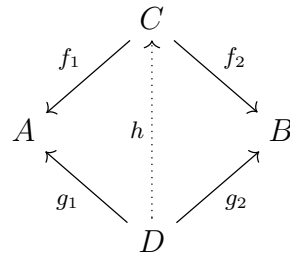
Соглашение 5.8. Если какая-то стрелка в диаграмме выделена пунктиром, это означает „эта стрелка – единственная, которая делает диаграмму коммутативной, находясь в указанном положении“.

Пример 5.9. Диаграмма

$$B \cdots \rightarrow A$$

означает „существует ровно одна стрелка из объекта B в объект A “.

Пример 5.10. Диаграмма



означает „существует единственная стрелка h со свойством $f_1 \circ h = g_1 \wedge f_2 \circ h = g_2$ “.

Замечание 5.11. В главе [16](#) мы немного ослабим определение коммутативности диаграммы.

Глава 6

Естественные преобразования

В этой главе будет мало примеров, но в следующей мы всё наверстаем. Пусть даны две категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , а также два функтора $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ и $G: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$.

Определение 6.1. *Естественным преобразованием τ функтора F в функтор G называется отображение*

$$\tau: \text{Ob}(\mathbf{K}_1) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{K}_2)$$

выдающее по каждому объекту $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ стрелку $\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$, причём для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ и любой стрелки $f: A \rightarrow B$ должна быть коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\tau_B} & G(B) \end{array}$$

В этом случае пишут $\tau: F \rightarrow G$ или $F \xrightarrow{\tau} G$.

Определение 6.2. Каждому функтору $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ сопоставляется *тождественное преобразование $id_F: F \rightarrow F$* , которое по каждому объекту $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ выдаёт стрелку $id_{F(A)}: F(A) \rightarrow F(A)$.

Упражнение 6.3. Проверьте, что id_F является естественным преобразованием, доказав коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{id_{F(A)}} & F(A) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\
 F(B) & \xrightarrow{id_{F(B)}} & F(B)
 \end{array}$$

Определение 6.4. Каждой паре естественных преобразований $\tau: F \rightarrow G$ и $\sigma: G \rightarrow H$ (где F, G, H – функторы из \mathbf{K}_1 в \mathbf{K}_2) сопоставляется их *композиция* $\sigma \circ \tau: F \rightarrow H$, которая по каждому объекту $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ выдаёт стрелку $\sigma_A \circ \tau_A$.

Упражнение 6.5. Проверьте, что $\sigma \circ \tau$ является естественным преобразованием, доказав коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) & \xrightarrow{\sigma_A} & H(A) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\
 F(B) & \xrightarrow{\tau_B} & G(B) & \xrightarrow{\sigma_B} & H(B)
 \end{array}$$

(оба квадрата коммутативны, надо доказать коммутативность внешнего прямоугольника).

Определение 6.6. Пусть \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 – малые категории. *Категорией функторов* $\mathbf{K}_2^{\mathbf{K}_1}$ называется категория, объектами которой являются функторы $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$, а протоморфизмами – естественные преобразования $\tau: F \rightarrow G$.

Пример 6.7. Пусть \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 – малые категории предпорядка. Соответствующие отношения предпорядка на $\text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ и $\text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ обозначим \lesssim_1 и \lesssim_2 . В этом случае $\mathbf{K}_2^{\mathbf{K}_1}$ тоже является малой категорией предпорядка. С точностью до изоморфизма категорий её можно описать так: объектами являются монотонные отображения $\text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ в $\text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ (обозначим их $F, G, H \dots$), при этом порядок $F \lesssim G$ на множестве отображений задаётся условием

$$F \lesssim G \Leftrightarrow \text{для всякого } A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1) \text{ верно } F(A) \lesssim_2 G(A)$$

Действительно, монотонные отображения взаимно однозначно соответствуют функторам. Естественное преобразование $\tau: F \rightarrow G$ должно сопоставлять каждому $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ стрелку $\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$. Такие стрелки существуют (и однозначно определены) \Leftrightarrow для всякого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ верно $F(A) \lesssim_2 G(A)$. Таким образом, между любыми двумя функторами в данном случае может быть не больше одного естественного преобразования.

Упражнение 6.8. Проверьте, что для малых \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 категория $\mathbf{K}_2^{\mathbf{K}_1}$ тоже малая.

Определение 6.9. Естественное преобразование $\tau: F \rightarrow G$ называется *естественным изоморфизмом*, если существует (однозначно определённое) обратное преобразование $\tau^{-1}: G \rightarrow F$, для которого выполнены условия:

$$\tau \circ \tau^{-1} = id_G$$

$$\tau^{-1} \circ \tau = id_F$$

В этом случае функторы F и G называются *естественно изоморфными* или просто *изоморфными* (пишется $F \cong G$).

Упражнение 6.10. Проверьте, что $\tau: F \rightarrow G$ является естественным изоморфизмом \Leftrightarrow для любого A стрелка $\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$ является изоморфизмом.

Глава 7

Топосы вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$

Для „больших“ категорий существование категории функторов очевидно не всегда. Существует ли категория $\mathbf{Set}^{\mathbf{Set}}$? Если да, то она должна быть очень „большой“. Один важный частный случай мы рассмотрим отдельно.

Соглашение 7.1. Мы будем считать, что для любой малой категории \mathbf{K} существует категория $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$. Категорию \mathbf{K} в этой ситуации будем называть *шкалой*.

Упражнение 7.2. Проверьте, что все такие категории $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$ локально малы.

Категории вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$, где \mathbf{K} малая, являются важными примерами так называемых *топосов*. Неформально, топосы – это категории, сильно похожие на \mathbf{Set} . Объекты любого топоса можно воспринимать как некие „обобщённые“ или „нестандартные“ множества.

Пример 7.3. Возьмём в качестве шкалы \mathbf{K} следующую малую категорию предпорядка (на диаграмме показаны все её объекты и все стрелки)

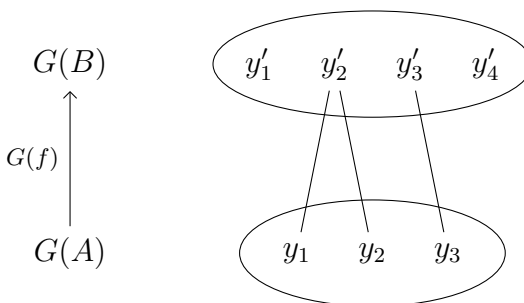
$$\begin{array}{c} id_B \hookrightarrow B \\ \uparrow f \\ id_A \hookrightarrow A \end{array}$$

Шкалу \mathbf{K} будем воспринимать как „время“. Есть два момента времени A и B , причём A предшествует B (поскольку $A \lesssim B$). Функтор

$G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ определяется парой множеств $G(A)$ и $G(B)$, а также функцией между ними $G(f)$.

$$\begin{array}{c} G(B) \\ \uparrow G(f) \\ G(A) \end{array}$$

Например, пусть множество $G(A)$ состоит из трёх элементов $\{y_1, y_2, y_3\}$, множество $G(B)$ состоит из четырёх элементов $\{y'_1, y'_2, y'_3, y'_4\}$, а функция $G(f)$ отображает $G(A)$ в $G(B)$ как показано на картинке:



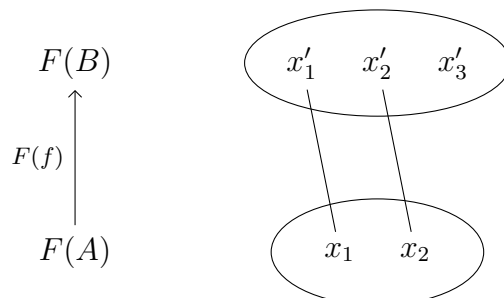
Это значит, что

$$G(f)(y_1) = y'_2$$

$$G(f)(y_2) = y'_2$$

$$G(f)(y_3) = y'_3$$

Содержательно, функтор G – это „множество, меняющееся со временем“. В момент времени A мы видим элементы y_1, y_2, y_3 . В момент времени B выясняется, что y_1 равен y_2 (о чём в момент времени A мы ещё не знали) и эти элементы „слипаются“ в один элемент y'_2 . Элемент y_3 остаётся обособленным и переходит в элемент y'_3 . Вдобавок, появляются два новых элемента y'_1 и y'_4 , о существовании которых в момент времени A мы не знали. Рассмотрим другой функтор $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$, выглядящий так:



Естественное преобразование $\tau: F \rightarrow G$ определяется парой функций

$$\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$$

$$\tau_B: F(B) \rightarrow G(B)$$

для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(B) & \xrightarrow{\tau_B} & G(B) \\ F(f) \uparrow & & \uparrow G(f) \\ F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \end{array}$$

Например, пусть

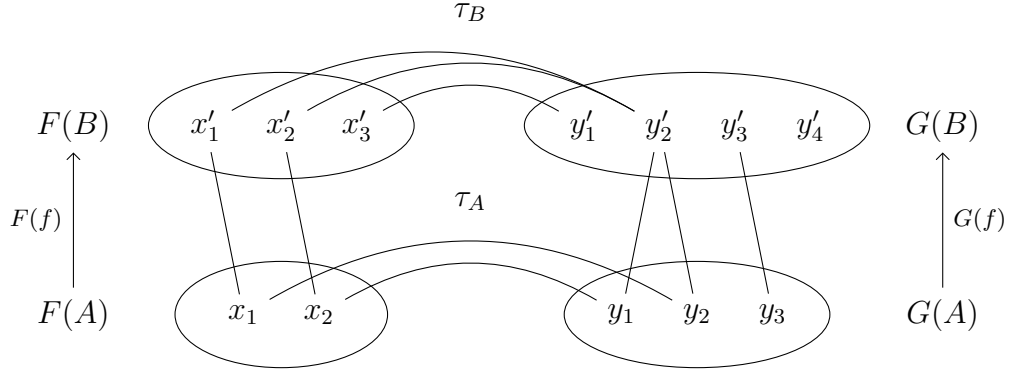
$$\tau_B(x'_1) = y'_2$$

$$\tau_B(x'_2) = y'_2$$

$$\tau_B(x'_3) = y'_1$$

$$\tau_A(x_1) = y_2$$

$$\tau_A(x_2) = y_1$$



Коммутативность диаграммы означает равенство следующих функций

$$\tau_B \circ F(f) = G(f) \circ \tau_A$$

Это значит, что для любого $x \in F(A)$ выполнено равенство

$$\tau_B(F(f)(x)) = G(f)(\tau_A(x))$$

Иными словами

$$F(f)(x) = x' \wedge \tau_B(x') = y' \wedge \tau_A(x) = y \text{ влечёт } G(f)(y) = y'$$

для любых $x \in F(A)$, $x' \in F(B)$, $y \in G(A)$ и $y' \in G(B)$.

Определение 7.4. Пусть M – полугруппа с единицей. Будем называть M -множеством множество-носитель X вместе с заданным на нём действием полугруппы M . Это значит, что для любых $f \in M$ и $x \in X$ определён некоторый элемент $f(x) \in X$, причём выполнены следующие условия:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$e(x) = x$$

для любых $f, g \in M$ и $x \in X$.

Содержательно, каждому элементу f полугруппы M сопоставляется функция из X в X . Эта функция переводит x в $f(x)$. Условия означают, что произведение $g \circ f$ переходит в композицию соответствующих функций, а двусторонняя единица e – в тождественную функцию id_X .

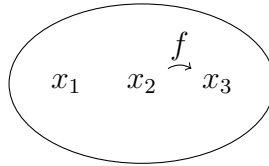
Пример 7.5. Рассмотрим полугруппу с единицей $M = \{e, f\}$, причём $f \circ f = f \neq e$. Рассмотрим M -множество $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, на котором задано такое действие M

$$f(x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = x_3$$

$$f(x_3) = x_3$$

что мы неформально изобразим так



Условие $f \circ f = f$ означает, что $f(f(x)) = f(x)$ для любого $x \in M$.

Определение 7.6. Пусть даны два M -множества с носителями X и Y . *Гомоморфизмом M -множеств* называется функция $t: X \rightarrow Y$, сохраняющая действие. Это значит, что

$$t(f(x)) = f(t(x))$$

для любых $f \in M$ и $x \in X$.

Пример 7.7. Возьмём в качестве шкалы K малую категорию с одним объектом A , обозначим буквой M соответствующую полугруппу с единицей. Таким образом, M – это $\text{Mog}(K)$ с композицией в качестве умножения и двусторонней единицей id_A . Категорию Set^K с точностью до изоморфизма категорий можно описать следующим образом: её объектами являются M -множества, а протострелками – их гомоморфизмы. Действительно, каждый функтор $F: K \rightarrow \text{Set}$ определяется множеством $F(A)$ и отображением $F: \text{Mog}(K) \rightarrow \text{Mog}(\text{Set})$, переводящим каждую стрелку $f: A \rightarrow A$ в стрелку $F(f): F(A) \rightarrow F(A)$. Это отображение задаёт действие M на носителе $F(A)$ по правилу

$$f(x) = F(f)(x)$$

для любых $f \in M$ и $x \in F(A)$. Функтор $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ задаёт действие M на носителе $G(A)$ по правилу

$$f(y) = G(f)(y)$$

для любых $f \in M$ и $y \in G(A)$. Естественное преобразование $\tau: F \rightarrow G$ определяется функцией $\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$, которая является гомоморфизмом M -множеств.

Упражнение 7.8. Проверьте детали, посмотрев на следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \\ F(f) \uparrow & & \uparrow G(f) \\ F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \end{array}$$

Пример 7.9. Возьмём в качестве шкалы \mathbf{K} следующую категорию (на диаграмме показаны все её объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & g & \end{array}$$

Функтор $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ задаётся парой множеств $F(A)$ и $F(B)$ и парой функций между ними

$$\begin{array}{ccc} & F(f) & \\ F(A) & \xrightarrow{\quad} & F(B) \\ & F(g) & \end{array}$$

Как множества, так и функции совершенно произвольны. Оказывается, есть взаимно однозначное соответствие между такими функторами и ориентированными графами. Рассмотрим для примера следующий граф

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ c \downarrow & \searrow e & \downarrow b \\ Z & \xrightarrow{d} & V \end{array}$$

Сопоставим ему функтор следующим образом. В качестве $F(A)$ возьмём множество рёбер $\{a, b, c, d, e\}$. В качестве $F(B)$ возьмём множество вершин $\{X, Y, Z, V\}$. В качестве $F(f)$ и $F(g)$ возьмём функции, сопоставляющие каждому ребру его начало и конец, соответственно. Естественным преобразованиям функторов соответствуют некие „гомоморфизмы графов“, отображающие вершины одного графа в вершины другого, а рёбра в рёбра с сохранением начал и концов. Категорию графов и их гомоморфизмов в дальнейшем будем обозначать **Grph**.

Глава 8

Терминальные объекты, элементы

Определение 8.1. Объект $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ называется *терминальным* в категории \mathcal{K} , если для любого $B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ существует ровно одна стрелка из B в A .

$$B \dashrightarrow A$$

Пример 8.2. В Set терминальными объектами являются одноэлементные множества и только они. Единственная функция из множества B в одноэлементное множество A переводит все элементы B в единственный элемент A .

Теорема 8.3. *Все терминальные объекты изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 – терминальные объекты в некоторой категории. Есть единственная стрелка $f: A_1 \rightarrow A_2$ и единственная стрелка $g: A_2 \rightarrow A_1$.

$$A_1 \xrightarrow{f} A_2 \quad A_2 \xrightarrow{g} A_1$$

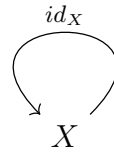
Композиция $g \circ f: A_1 \rightarrow A_1$ должна быть единственной стрелкой из A_1 в A_1 , а композиция $f \circ g: A_2 \rightarrow A_2$ должна быть единственной стрелкой из A_2 в A_2 . Но есть стрелки $id_{A_1}: A_1 \rightarrow A_1$ и $id_{A_2}: A_2 \rightarrow A_2$, поэтому

$$g \circ f = id_{A_1}$$

$$f \circ g = id_{A_2}$$

□

Пример 8.4. В \mathbf{Cat} терминальными объектами являются категории с единственным объектом и единственной (тождественной) стрелкой



Единственный функтор из категории \mathbf{K} в терминальную категорию переводит все объекты \mathbf{K} в единственный объект терминальной категории, а все стрелки \mathbf{K} в единственную стрелку.

Пример 8.5. В категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$ терминальные объекты – это функторы F , для которых множества $F(A)$ одноэлементны при любых $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{K})$, а стрелки $F(f)$ единственно возможные между одноэлементными множествами.

Пример 8.6. Пусть \mathbf{K} – категория предпорядка. Объект A является терминальным $\Leftrightarrow A$ является наибольшим элементом относительно \lesssim . В самом деле, наличие (необходимо единственной в категории предпорядка) стрелки из любого B в A означает, что $B \lesssim A$ для любого $B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{K})$.

Замечание 8.7. Если предпорядок не является частичным порядком, наибольших элементов может быть несколько. Например, отношение $A \lesssim B$, тождественно истинное для любых A и B , является предпорядком, в котором все элементы наибольшие.

Соглашение 8.8. Если предполагается, что в категории выбран какой-то терминальный объект (из всех возможных), будем обозначать его символом 1 . Единственную стрелку из объекта B в 1 будем обозначать $!_B$.

$$B \xrightarrow{!_B} 1$$

Упражнение 8.9. Проверьте, что $!_1 = id_1$.

Упражнение 8.10. Проверьте, что для любой стрелки $f: A \rightarrow B$ выполнено $!_B \circ f = !_A$.

Теорема 8.11. Пусть стрелка $f: A \rightarrow 1$ является изоморфизмом. Тогда объект A тоже терминальный и единственная стрелка из B в A выглядит так $f^{-1} \circ !_B$.

Доказательство. Легко проверить, что $f^{-1} \circ !_B: B \rightarrow A$. Докажем, что это единственная стрелка из B в A . Пусть есть некоторая стрелка $h: B \rightarrow A$. Тогда $f \circ h: B \rightarrow 1$, поэтому

$$f \circ h = !_B$$

следовательно

$$h = f^{-1} \circ !_B$$

□

Следствие 8.12. Любой объект, изоморфный терминальному, сам является терминальным.

Соглашение 8.13. Будем считать, что в \mathbf{Set} выбрано в качестве 1 некоторое одноэлементное множество $\{*\}$ с единственным элементом $*$ (конкретный выбор совершенно не важен).

Определение 8.14. Элементами, или точками объекта B называются стрелки вида $g: 1 \rightarrow B$.

Пример 8.15. В \mathbf{Set} точки множества B взаимно однозначно соответствуют элементам B в обычном теоретико-множественном смысле. Действительно, функция из $\{*\}$ в B однозначно определяется элементом B , в который переходит $*$.

Замечание 8.16. Стрелка $f: A \rightarrow B$ переводит элементы A в элементы B следующим образом: каждый элемент $g: 1 \rightarrow A$ переходит в элемент $f \circ g: 1 \rightarrow B$.

Пример 8.17. Пусть даны два множества A и B , точка $g: \{*\} \rightarrow A$, переводящая $*$ в некоторое $a \in A$ и функция $f: A \rightarrow B$. В этом случае $f \circ g: \{*\} \rightarrow B$ переводит $*$ в $f(a) \in B$. Это показывает, как теоретико-множественное применение функции к аргументу изображается с помощью композиции.

Пример 8.18. В категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$ в качестве 1 выберем функтор $1: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$, для которого $1(A) = \{*\}$ для всех $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{K})$. Пусть дан функтор $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$. Элементы функтора G – это естественные преобразования $\tau: 1 \rightarrow G$. Каждая стрелка (в \mathbf{Set}) $\tau_A: \{*\} \rightarrow G(A)$ выделяет элемент множества $G(A)$. Условия естественности

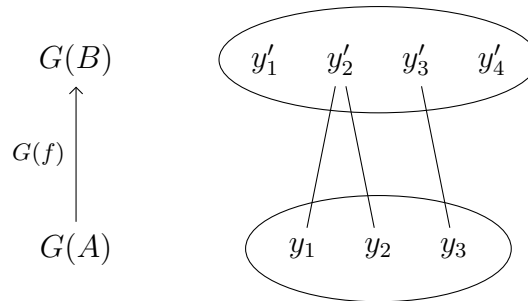
$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{\tau_B} & G(B) \\ \uparrow \tau_{\{*\}} & & \uparrow G(f) \\ \{*\} & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \end{array}$$

означают, что для каждой стрелки $f: A \rightarrow B$ соответствующая функция $G(f): G(A) \rightarrow G(B)$ переводит выделенный элемент множества $G(A)$ в выделенный элемент множества $G(B)$.

Пример 8.19. Рассмотрим категорию $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$ со шкалой \mathbf{K}

$$\begin{array}{c} id_B \hookrightarrow B \\ \uparrow f \\ id_A \hookrightarrow A \end{array}$$

и функтор $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$, имеющий вид



Элементы функтора G – это пары элементов $y \in G(A), y' \in G(B)$ со свойством $G(f)(y) = y'$. В данном случае элементов три, они задаются парами $(y_1, y'_1), (y_2, y'_2)$ и (y_3, y'_3) . Содержательно, точка в данном случае – это „мировая линия точки во времени“.

Замечание 8.20. Естественное преобразование $\tau: F \rightarrow G$ переводит элементы функтора F в элементы функтора G . Элемент $\sigma: 1 \rightarrow F$ переходит в элемент $\tau \circ \sigma: 1 \rightarrow G$. Тут полезно ещё раз посмотреть на картинку на стр. 30.

Пример 8.21. Пусть \mathbf{K} – малая категория с одним объектом A , задающая полугруппу с единицей M . Функтор $1: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ определяет M -множество с носителем $\{*\}$ и действием

$$f(*) = *$$

для всякого $f \in M$. Пусть дан функтор $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$. Он задаёт M -множество с носителем $G(A)$ и действием

$$f(y) = G(f)(y)$$

для любых $f \in M$ и $y \in G(A)$. В этом случае элементы G соответствуют неподвижным элементам $G(A)$, то есть таким $y \in G(A)$, что $G(f)(y) = y$ для всех $f \in M$.

Упражнение 8.22. Проверьте детали, посмотрев на коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \\ \uparrow \text{!}_{\{*\}} & & \uparrow G(f) \\ \{*\} & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \end{array}$$

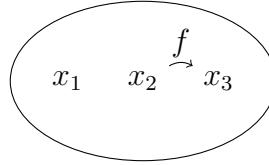
Пример 8.23. Рассмотрим полугруппу с единицей $M = \{e, f\}$, причём $f \circ f = f \neq e$. Рассмотрим M -множество $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, на котором задано такое действие M

$$f(x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = x_3$$

$$f(x_3) = x_3$$

что мы неформально изобразим так



С категорной точки зрения элементами M -множества X будут x_1, x_3 (неподвижные точки функции f), но не x_2 .

Пример 8.24. В категории графов Set^K над шкалой K (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

терминальный объект 1 имеет вид



(это граф с одной вершиной и одним ребром, которое необходимо должно быть петлёй). Точка графа – это пара (V, r) , где V – вершина графа, а r – петля, то есть ребро из V в V .

Пример 8.25. В категории групп Grp терминальным объектом 1 будет группа из одного единичного элемента $\{e\}$. Тут мы видим неприятную ситуацию – в каждой группе Gr с категорной точки зрения есть только один элемент. Действительно, есть ровно один гомоморфизм из $\{e\}$ в Gr (переводящий e в единичный элемент группы Gr). Таким образом, элементы множества-носителя группы Gr не соответствуют её категорным элементам. Тем не менее, определение 8.14 удобно и мы будем им пользоваться.

Глава 9

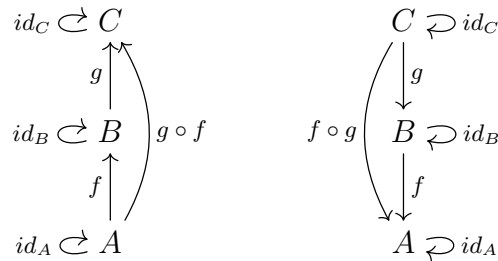
Двойственные категории

Для каждой категории K мы определим двойственную категорию K^{op} , в которой те же объекты, а стрелки формально обращены в противоположную сторону. Это значит, что стрелка из A в B в K считается стрелкой из B в A в K^{op} .

Определение 9.1. Для данной категории K двойственная категория K^{op} задаётся следующим набором данных:

1. Объекты $A, B, C \dots$ в K^{op} те же, что в K .
2. Стрелки $f, g, h \dots$ в K^{op} те же, что в K .
3. $f: B \rightarrow A$ в K^{op} в том и только том случае, если $f: A \rightarrow B$ в K .
4. Композиция $f \circ g$ в K^{op} по определению равна композиции $g \circ f$ в K (обратите внимание на разный порядок множителей).
5. Тожественные стрелки id_A в K^{op} те же, что в K .

Пример 9.2. Слева некоторая категория K , справа K^{op} (показаны все стрелки)



Замечание 9.3. Операции dom и cod в K^{op} соответствуют cod и dom в категории K .

Упражнение 9.4. Проверьте, что $(K^{op})^{op} = K$ (это не просто изоморфизм категорий, а точное совпадение).

Упражнение 9.5. Проверьте, что изоморфизмы в K остаются изоморфизмами в K^{op} .

Каждому понятию теории категорий соответствует некоторое двойственное понятие, которое получается, если „сделать то же самое в двойственной категории“. Например, двойственным к понятию „терминальный объект“ является понятие „начальный объект“.

Определение 9.6. Объект $A \in Ob(K)$ называется *начальным объектом* в категории K , если для любого $B \in Ob(K)$ существует ровно одна стрелка из A в B .

$$A \dashrightarrow B$$

Упражнение 9.7. Проверьте, что объект A является начальным в $K \Leftrightarrow$ объект A является терминальным в K^{op} .

Пример 9.8. В Set есть единственный начальный объект, это пустое множество \emptyset . Из \emptyset в любое множество B есть ровно одна функция – с пустым графиком.

Пример 9.9. В любой категории вида Set^K есть единственный начальный объект – это функтор F , для которого множество $F(A)$ пустое при любом $A \in Ob(K)$, а стрелки $F(f)$ единственно возможные между пустыми множествами.

Упражнение 9.10. Проверьте, что в категории предпорядка объект A является начальным $\Leftrightarrow A$ является наименьшим элементом относительно предпорядка \lesssim .

Упражнение 9.11. Проверьте, что в Set^{op} много начальных объектов и только один терминальный.

Упражнение 9.12. В категории групп начальный объект совпадает с терминальным (это группа из одного единичного элемента $\{e\}$).

Соглашение 9.13. Если предполагается, что в категории выбран некоторый начальный объект (из всех возможных), будем обозначать его символом 0 . Единственную стрелку из объекта 0 в B будем обозначать $\square_B: 0 \rightarrow B$.

$$0 \xrightarrow{\square_B} B$$

Теорема 9.14. Все начальные объекты изоморфны между собой.

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 – начальные объекты в некоторой категории. Есть единственная стрелка $f: A_1 \rightarrow A_2$ и единственная стрелка $g: A_2 \rightarrow A_1$.

$$A_1 \xrightarrow{f} A_2 \quad A_2 \xrightarrow{g} A_1$$

Композиция $g \circ f: A_1 \rightarrow A_1$ должна быть единственной стрелкой из A_1 в A_1 , а композиция $f \circ g: A_2 \rightarrow A_2$ должна быть единственной стрелкой из A_2 в A_2 . Но есть стрелки $id_{A_1}: A_1 \rightarrow A_1$ и $id_{A_2}: A_2 \rightarrow A_2$, поэтому

$$g \circ f = id_{A_1}$$

$$f \circ g = id_{A_2}$$

□

Дадим другое доказательство этой теоремы.

Доказательство. Начальные объекты в \mathbf{K} – это терминальные объекты в \mathbf{K}^{op} . Мы знаем, что все терминальные объекты изоморфны. Изоморфизмы в \mathbf{K} те же, что в \mathbf{K}^{op} . Следовательно, все начальные объекты изоморфны. □

Второе доказательство является примером применения так называемого *принципа двойственности*. Для каждого утверждения в языке теории категорий можно формально написать двойственное утверждение, заменив *dom* на *cod*, *cod* на *dom* и все композиции $g \circ f$ на $f \circ g$. Например, двойственным к утверждению „все терминальные объекты изоморфны“ будет утверждение „все начальные объекты изоморфны“.

Теорема 9.15. (*Принцип двойственности*). Если некоторое утверждение, записанное в теоретико-категорном языке, верно для всех категорий, то и двойственное к нему утверждение верно для всех категорий.

Доказательство. Если утверждение верно для некоторой категории \mathcal{K} , то двойственное утверждение верно для категории \mathcal{K}^{op} . Если утверждение верно для всех категорий \mathcal{K} , то двойственное утверждение верно для всех категорий вида \mathcal{K}^{op} (то есть, двойственных к чему-нибудь). Но любая категория двойственна к чему-нибудь в силу равенства $\mathcal{K} = (\mathcal{K}^{\text{op}})^{\text{op}}$. \square

Конечно, это не строгая формулировка и не строгое доказательство, не будем пытаться его формализовать (хотя это не особенно трудно). Подробное изложение можно найти в книге Маклейна „Категории для работающего математика“.

Упражнение 9.16. Пусть стрелка $f: A \rightarrow 0$ является изоморфизмом. Докажите, что объект A начальный и единственная стрелка из A в B выглядит так $\square_B \circ f$.

Следствие 9.17. *Объект, изоморфный начальному, сам является начальным.*

Следующее определение обобщает такое наблюдение: монотонное отображение упорядоченных множеств остаётся монотонным, если оба множества „перевернуть вверх ногами“.

Определение 9.18. Каждому функтору $F: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ поставим в соответствие функтор $F^{\text{op}}: \mathcal{K}_1^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{K}_2^{\text{op}}$, который действует на объектах и на стрелках точно так же, как F . Иными словами, F и F^{op} совпадают как протоморфизмы категорий, но у них разные начала и концы.

Упражнение 9.19. Проверьте, что F^{op} является функтором (то есть, сохраняет композицию, тождественные стрелки, *dom* и *cod*).

В старых книгах по теории категорий то, что мы называем функтором, называли *ковариантным функтором*. Использовали также понятие *контравариантный функтор*.

Определение 9.20. *Контравариантный функтор* F из категории \mathbf{K}_1 в категорию \mathbf{K}_2 – это пара отображений (обозначаемых одной буквой)

$$F: \text{Ob}(\mathbf{K}_1) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$$

$$F: \text{Mor}(\mathbf{K}_1) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{K}_2)$$

первое из которых отображает объекты \mathbf{K}_1 в объекты \mathbf{K}_2 , а второе – морфизмы \mathbf{K}_1 в морфизмы \mathbf{K}_2 , причём для любых f, g, A, B, C из категории \mathbf{K}_1 выполнено:

1. $f: A \rightarrow B$ влечёт $F(f): F(B) \rightarrow F(A)$
2. $F(id_A) = id_{F(A)}$
3. $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ влечёт $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

Упражнение 9.21. Проверьте, что контравариантные функторы из \mathbf{K}_1 в \mathbf{K}_2 взаимно однозначно соответствуют обычным (ковариантным) функторам из \mathbf{K}_1 в \mathbf{K}_2^{op} .

Упражнение 9.22. Проверьте, что контравариантные функторы из \mathbf{K}_1 в \mathbf{K}_2 взаимно однозначно соответствуют обычным (ковариантным) функторам из \mathbf{K}_1^{op} в \mathbf{K}_2 .

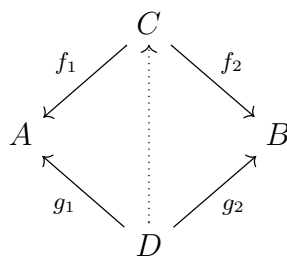
Глава 10

Произведения

Определение 10.1. *Произведение* двух объектов A и B в категории \mathcal{K} задаётся следующим набором данных:

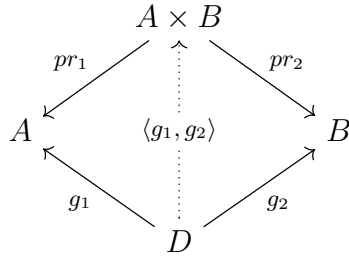
1. Объектом $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$.
2. Упорядоченной парой стрелок $f_1: C \rightarrow A$ и $f_2: C \rightarrow B$, эти стрелки называются *первой проекцией* и *второй проекцией*.

При этом требуется, чтобы для любого объекта $D \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ и любой упорядоченной пары стрелок $g_1: D \rightarrow A$ и $g_2: D \rightarrow B$ существовала единственная стрелка из D в C , делающая коммутативной следующую диаграмму



Читатель, возможно, уже почувствовал, что все определения в теории категорий даются „с точностью до изоморфизма“. Это некоторый общий принцип, который можно строго доказать (формализовав язык теории категорий), но мы не будем. В частности, у пары объектов A и B может быть много произведений, но все они изоморфны между собой (мы это докажем).

Соглашение 10.2. Если предполагается, что для двух объектов A и B выбрано некоторое произведение (из всех возможных), объект произведения будем обозначать $A \times B$, а проекции $pr_1^{A \times B}$ и $pr_2^{A \times B}$. Если A и B ясны из контекста, будем обозначать проекции просто pr_1 и pr_2 . Будем обозначать $\langle g_1, g_2 \rangle$ единственную стрелку, делающую коммутативной диаграмму



Мы видим, что

$$pr_1 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_1$$

$$pr_2 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_2$$

$pr_1 \circ f = g_1 \wedge pr_2 \circ f = g_2$ влечёт $f = \langle g_1, g_2 \rangle$
для любой стрелки $f: D \rightarrow A \times B$

Пример 10.3. Произведением множеств A и B в **Set** является декартово произведение $A \times B$, то есть множество упорядоченных пар вида (a, b) , где $a \in A, b \in B$. Здесь круглые скобки обозначают обычную теоретико-множественную упорядоченную пару (например, по Куратовскому). Проекции определяются так

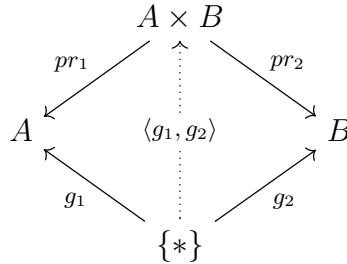
$$pr_1(a, b) = a$$

$$pr_2(a, b) = b$$

Функция $\langle g_1, g_2 \rangle: D \rightarrow A \times B$ определяется равенством

$$\langle g_1, g_2 \rangle(x) = (g_1(x), g_2(x))$$

для любого $x \in D$. Разберёмся, что будет, если в качестве множества D взять $\{*\}$.



Стрелка $g_1: \{*\} \rightarrow A$ задаёт некоторый элемент A . Стрелка $g_2: \{*\} \rightarrow B$ задаёт некоторый элемент B . Диаграмма утверждает, что существует единственный элемент $A \times B$ (это $\langle g_1, g_2 \rangle$), первая проекция которого равна g_1 , а вторая проекция равна g_2 .

$$pr_1 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_1$$

$$pr_2 \circ \langle g_1, g_2 \rangle = g_2$$

Тут следует ещё раз посмотреть пример 8.17. Если g_1 переводит $*$ в некоторое $a \in A$, а g_2 переводит $*$ в некоторое $b \in B$, то $\langle g_1, g_2 \rangle$ переводит $*$ в упорядоченную пару (a, b) . Таким образом, точки $A \times B$ взаимно однозначно соответствуют парам „точка A и точка B “.

Замечание 10.4. Стрелки вида $f: A \times B \rightarrow C$ в \mathbf{Set} соответствуют функциям от двух аргументов $f(a, b)$, где $a \in A$, $b \in B$.

Упражнение 10.5. Произведением двух групп Gr_1 и Gr_2 в \mathbf{Grp} будет множество пар вида (x, y) , где x – элемент носителя Gr_1 , y – элемент носителя Gr_2 ; с двусторонней единицей (e, e) и умножением

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2)$$

Проекциями будут гомоморфизмы $pr_1: Gr_1 \times Gr_2 \rightarrow Gr_1$ и $pr_2: Gr_1 \times Gr_2 \rightarrow Gr_2$, действующие так

$$pr_1(x, y) = x$$

$$pr_2(x, y) = y$$

Определение 10.6. Произведением категорий \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 называется категория $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$, заданная следующим образом:

1. Объектами $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$ являются пары (A, B) , где
 $A \in \text{Ob}(\mathcal{K}_1)$
 $B \in \text{Ob}(\mathcal{K}_2)$
2. Морфизмами из (A_1, B_1) в (A_2, B_2) являются пары (f, g) , где
 $f \in \mathcal{K}_1(A_1, A_2)$
 $g \in \mathcal{K}_2(B_1, B_2)$
3. Композицией морфизмов
 $(f_1, g_1): (A_1, B_1) \rightarrow (A_2, B_2)$ и
 $(f_2, g_2): (A_2, B_2) \rightarrow (A_3, B_3)$
является морфизм
 $(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1): (A_1, B_1) \rightarrow (A_3, B_3)$
Иными словами,
 $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$
4. Тождеством объекта (A, B) является стрелка (id_A, id_B)

Проекциями будут функторы $pr_1: \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{K}_1$ и $pr_2: \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{K}_2$, действующие так

$$pr_1(A, B) = A$$

$$pr_1(f, g) = f$$

$$pr_2(A, B) = B$$

$$pr_2(f, g) = g$$

Упражнение 10.7. Проверьте, что это определение даёт произведение в Cat .

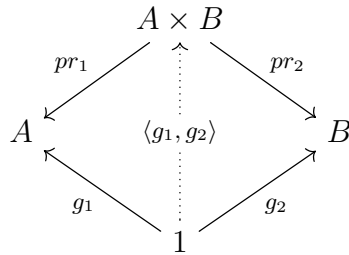
Упражнение 10.8. Проверьте, что категория $\text{Set} \times \text{Set}$ изоморфна категории $\text{Set}^{\mathcal{K}}$, где шкала \mathcal{K} имеет следующий вид (два объекта, стрелки только тождественные)

$$id_A \curvearrowright A \quad B \curvearrowleft id_B$$

Замечание 10.9. Категории, в которых все стрелки тождественные, называются *дискретными*.

Упражнение 10.10. В категории предпорядка произведение $A \times B$ – это пересечение $A \sqcap B$, то есть наибольший (относительно \lesssim) объект C со свойством $C \lesssim A \wedge C \lesssim B$.

Замечание 10.11. Диаграмма

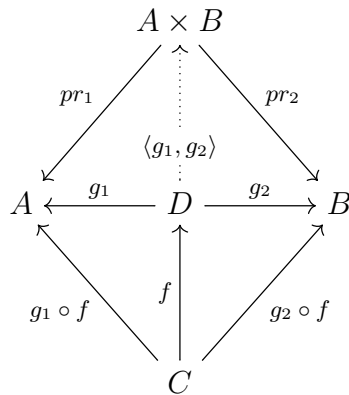


(внизу терминальный объект) однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет произведение в категории **Set**. В произвольных категориях это не так. Например, в категории групп **Grp** для любой группы A есть ровно одна стрелка из 1 в A (см. пример 8.25), поэтому такая „упрощённая“ диаграмма вообще не налагает ограничений на $A \times B$.

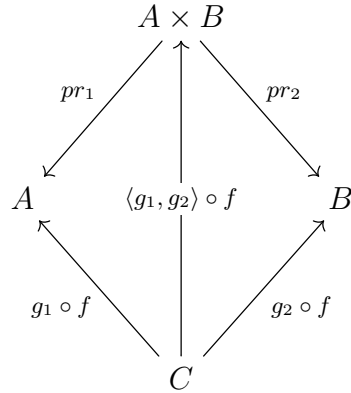
Докажем несколько свойств произведений.

Теорема 10.12. $\langle g_1, g_2 \rangle \circ f = \langle g_1 \circ f, g_2 \circ f \rangle$ если обе части равенства определены.

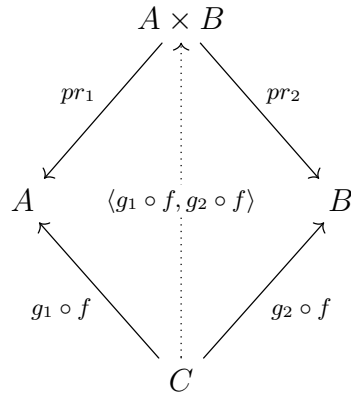
Доказательство. Начнём с коммутативной диаграммы



Удалив объект D и стрелки g_1, g_2 , получим коммутативную диаграмму



По определению произведения, стрелка в центре диаграммы единственно возможная

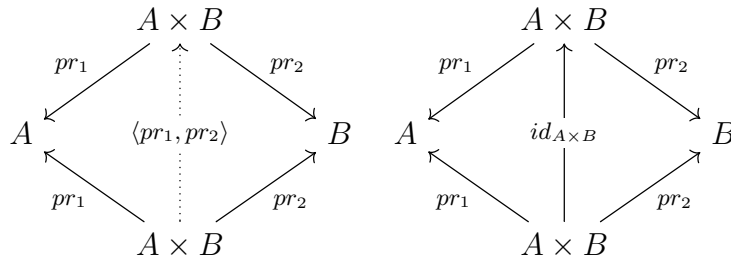


поэтому $\langle g_1, g_2 \rangle \circ f = \langle g_1 \circ f, g_2 \circ f \rangle$

□

Теорема 10.13. $\langle pr_1^{A \times B}, pr_2^{A \times B} \rangle = id_{A \times B}$

Доказательство. Сравниваем диаграммы



□

Упражнение 10.14. $\langle pr_1 \circ f, pr_2 \circ f \rangle = f$ если левая часть равенства определена.

Определение 10.15. Для двух стрелок $f: A \rightarrow C$ и $g: B \rightarrow D$ их произведение $f \times g: A \times B \rightarrow C \times D$ определяется следующим равенством

$$f \times g = \langle f \circ pr_1, g \circ pr_2 \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ pr_1 \uparrow & & \uparrow pr_1 \\ A \times B & \xrightarrow{f \times g} & C \times D \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow pr_2 \\ B & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

Пример 10.16. В Set произведением $f \times g$ будет функция, действующая так

$$(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$$

для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Теорема 10.17. $id_A \times id_B = id_{A \times B}$

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id_A} & A \\ pr_1 \uparrow & & \uparrow pr_1 \\ A \times B & \xrightarrow{id_{A \times B}} & A \times B \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow pr_2 \\ B & \xrightarrow{id_B} & B \end{array}$$

Можно также сделать подсчёт

$$id_A \times id_B = \langle id_A \circ pr_1, id_B \circ pr_2 \rangle = \langle pr_1, pr_2 \rangle = id_{A \times B}$$

□

Теорема 10.18. $(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) = (g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2)$
если обе части равенства определены.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccccc}
 A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 \\
 \uparrow pr_1 & & \uparrow pr_1 & & \uparrow pr_1 \\
 A_1 \times A_2 & \xrightarrow{f_1 \times f_2} & B_1 \times B_2 & \xrightarrow{g_1 \times g_2} & C_1 \times C_2 \\
 \downarrow pr_2 & & \downarrow pr_2 & & \downarrow pr_2 \\
 A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2
 \end{array}$$

Заметим, что правая часть равенства может быть определена, а левая нет (если $B_1 \times B_2$ не существует). □

Упражнение 10.19. Если $A_1 \cong A_2$ и $B_1 \cong B_2$, то $A_1 \times B_1 \cong A_2 \times B_2$.

Теорема 10.20. $(g_1 \times g_2) \circ \langle f_1, f_2 \rangle = \langle g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2 \rangle$
если обе части равенства определены.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 \\
 & \nearrow f_1 & \uparrow pr_1 & & \uparrow pr_1 \\
 A & \xrightarrow{\langle f_1, f_2 \rangle} & B_1 \times B_2 & \xrightarrow{g_1 \times g_2} & C_1 \times C_2 \\
 & \searrow f_2 & \downarrow pr_2 & & \downarrow pr_2 \\
 & & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2
 \end{array}$$

Заметим, что правая часть равенства может быть определена, а левая нет (если $B_1 \times B_2$ не существует). □

Упражнение 10.21. В топосах вида $\text{Set}^{\mathbf{K}}$ произведением функторов F и G является функтор $F \times G$, определённый следующими равенствами:

$$(F \times G)(A) = F(A) \times G(A)$$

$$(F \times G)(f) = F(f) \times G(f)$$

Проекциями $pr_1: F \times G \rightarrow F$ и $pr_2: F \times G \rightarrow G$ будут естественные преобразования с компонентами:

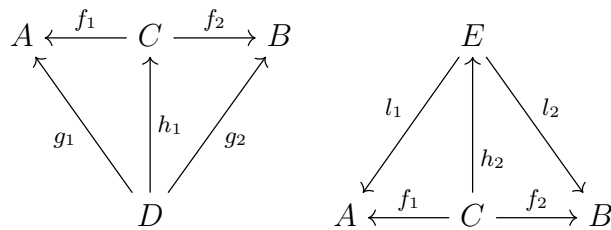
$$pr_1: F(A) \times G(A) \rightarrow F(A)$$

$$pr_2: F(A) \times G(A) \rightarrow G(A)$$

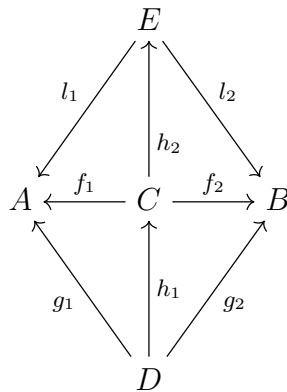
Для естественных преобразований $\tau: H \rightarrow F$ и $\sigma: H \rightarrow G$ стрелкой $\langle \tau, \sigma \rangle$ будет естественное преобразование с компонентами

$$\langle \tau_A, \sigma_A \rangle: H(A) \rightarrow F(A) \times G(A)$$

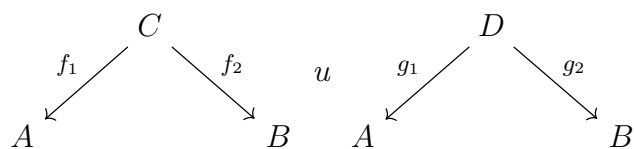
Упражнение 10.22. Если коммутативны диаграммы



то коммутативна диаграмма

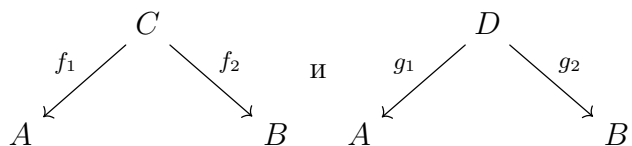


Теорема 10.23. Если есть два произведения A и B

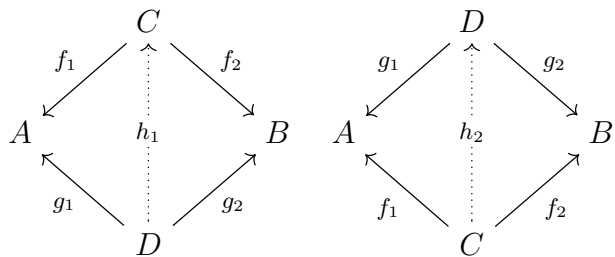


то $C \cong D$.

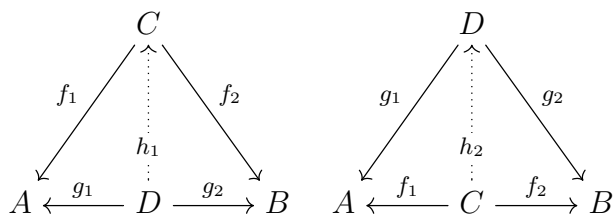
Доказательство. Пусть у объектов A и B есть два произведения



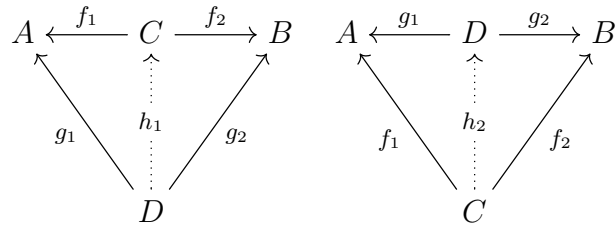
По определению произведения, должны существовать стрелки $h_1: D \rightarrow C$ и $h_2: C \rightarrow D$, делающие коммутативными следующие диаграммы



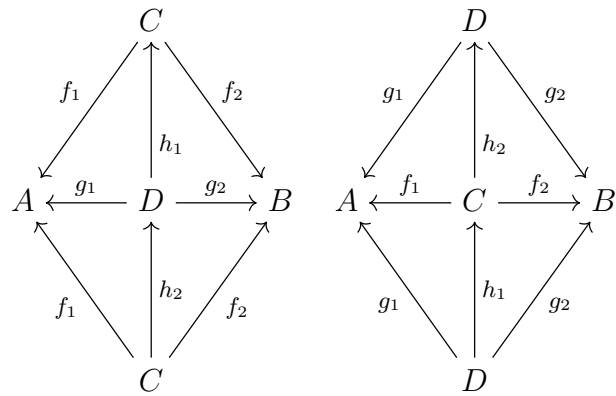
Перерисуем эти диаграммы так



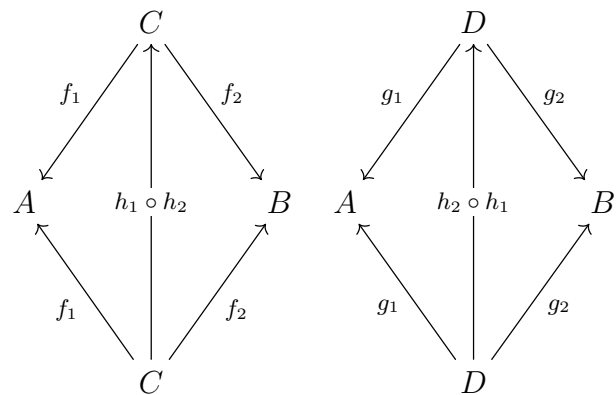
и ещё вот так



Из них можно составить коммутативные диаграммы

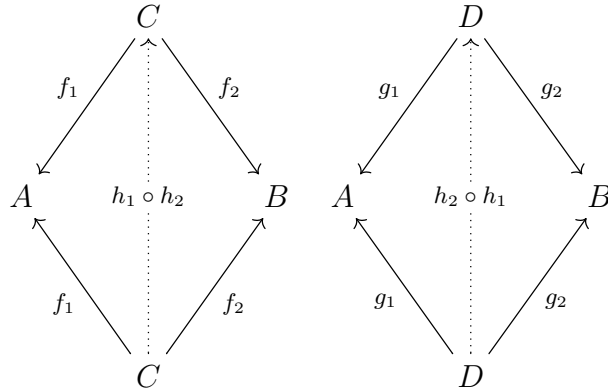


Уберём лишнее и получим коммутативные диаграммы



По определению произведения, стрелки в центре этих диаграмм един-

СТВЕННО ВОЗМОЖНЫЕ

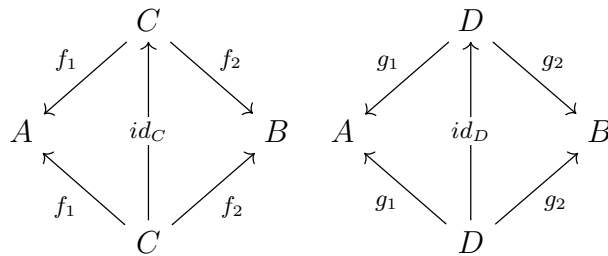


Из этого следует, что

$$h_1 \circ h_2 = id_C$$

$$h_2 \circ h_1 = id_D$$

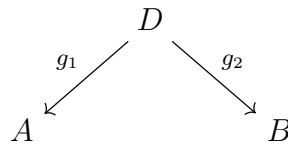
поскольку следующие диаграммы тоже коммутативны.



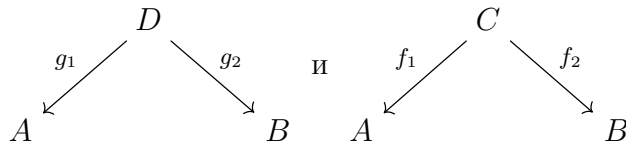
□

Дадим другое доказательство этой теоремы.

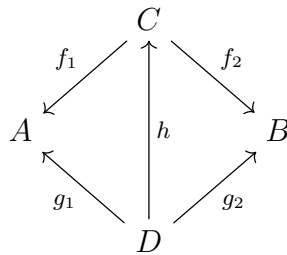
Доказательство. Для данных объектов A и B категории \mathbf{K} определим новую категорию \mathbf{K}_1 , объектами которой являются „вилки“ следующего вида



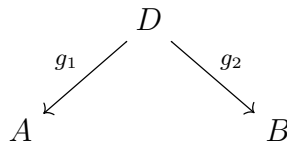
Морфизмом между „вилками“



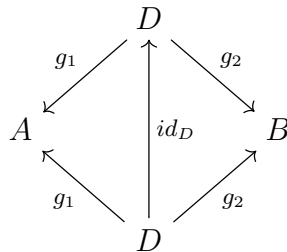
по определению будет любая стрелка $h: D \rightarrow C$, делающая коммутативной следующую диаграмму



Композицией морфизмов $h_2 \circ h_1$ в \mathbf{K}_1 по определению будет их композиция $h_2 \circ h_1$ в категории \mathbf{K} . Тут надо посмотреть упражнение 10.22 и понять, почему композиция морфизмов в \mathbf{K}_1 является морфизмом в \mathbf{K}_1 . Тожественным морфизмом для вилки

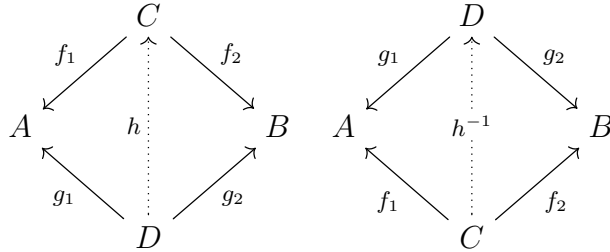


по определению будет id_D .



Поскольку композиция и единичные стрелки в \mathbf{K}_1 такие же, как в \mathbf{K} , любой изоморфизм в \mathbf{K}_1 будет изоморфизмом в \mathbf{K} . Произведение A и B

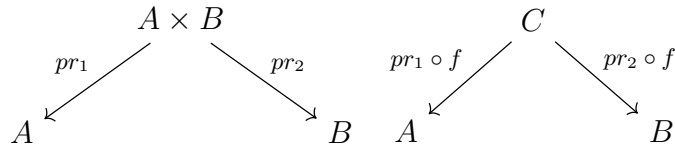
является терминальным объектом в \mathbf{K}_1 (именно это утверждает определение произведения). Но все терминальные объекты изоморфны и изоморфизмы между ними единственно возможные (теорема 8.3). Поэтому существует изоморфизм $h: D \rightarrow C$, для которого коммутативны следующие диаграммы



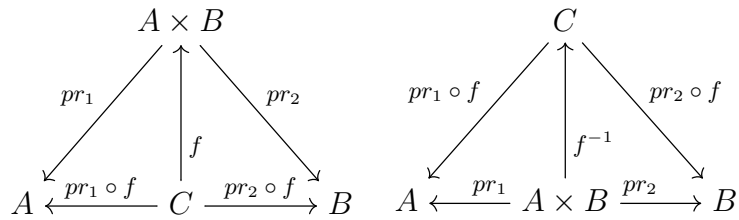
□

Теорема 10.24. Если стрелка $f: C \rightarrow A \times B$ является изоморфизмом, то C является произведением A и B с проекциями $pr_1^{A \times B} \circ f$ и $pr_2^{A \times B} \circ f$.

Доказательство. Рассмотрим категорию вилок \mathbf{K}_1 , как при доказательстве предыдущей теоремы. Рассмотрим две вилки



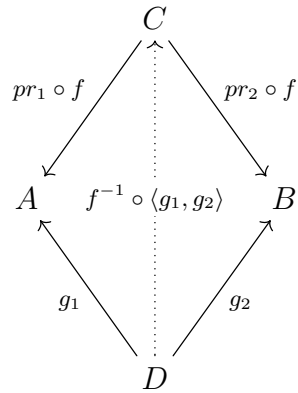
Они изоморфны в \mathbf{K}_1 , поскольку следующие диаграммы коммутативны



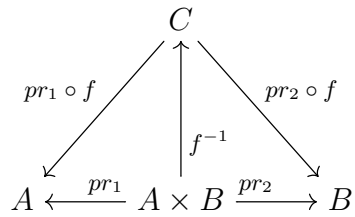
(это значит, что f и f^{-1} являются морфизмами в \mathbf{K}_1). Далее вспоминаем, что произведение является терминальным объектом в \mathbf{K}_1 и объект, изоморфный терминальному, сам является терминальным (теорема 8.11). □

Другое доказательство (прямое).

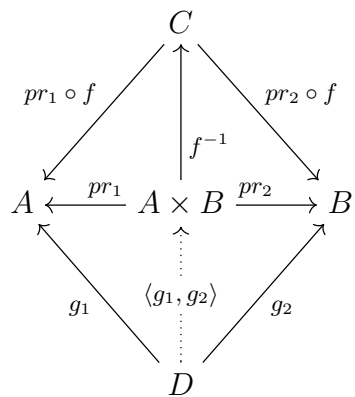
Доказательство. Будем доказывать коммутативность следующей диаграммы (на ней видно, как устроены проекции и новая пара)



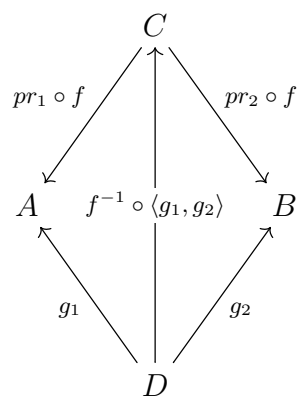
Коммутативна следующая диаграмма:



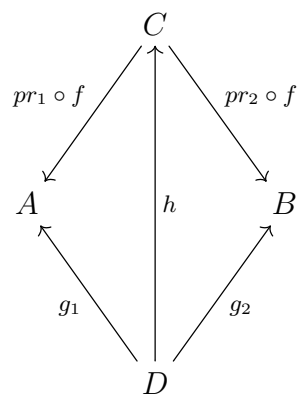
Добавим кое-что снизу и получим коммутативную диаграмму



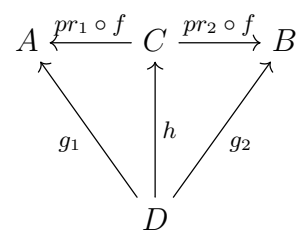
Уберём лишнее и получим коммутативную диаграмму



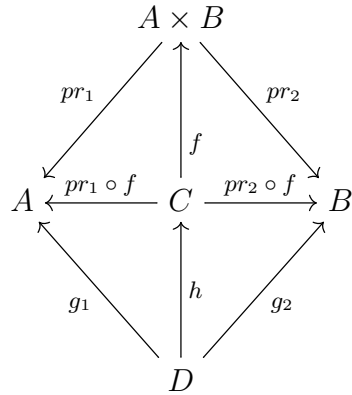
Осталось доказать единственность. Предположим, что для некоторой стрелки $h: D \rightarrow C$ коммутативна диаграмма



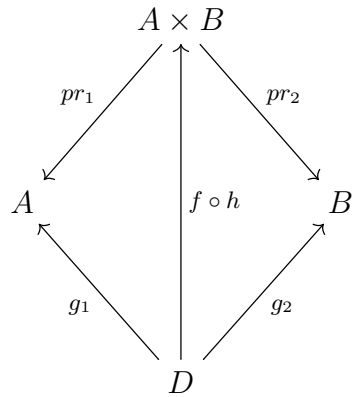
Перерисуем её так



Надстроим сверху и получим коммутативную диаграмму



Уберём лишнее



Из коммутативности этой диаграммы следует, что

$$f \circ h = \langle g_1, g_2 \rangle$$

поэтому

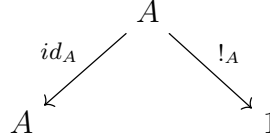
$$h = f^{-1} \circ \langle g_1, g_2 \rangle$$

□

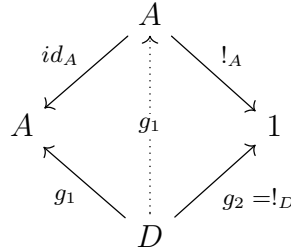
Замечание 10.25. Произведение в \mathbf{Set} тоже определено только с точностью до изоморфизма (с теоретико-категорной точки зрения). Произведением конечных множеств с мощностями m и n будет любое множество мощностью $m \times n$ с подходящими проекциями. Какими именно проекциями – смотрите предыдущую теорему.

Теорема 10.26. Произведение A и 1 существует всегда, причём $A \times 1 \cong A$.

Доказательство. В качестве произведения A и 1 работает следующая вилка



потому что



□

Замечание 10.27. При любом выборе произведения A и 1 изоморфизм $A \times 1 \cong A$ выглядит так:

$$pr_1: A \times 1 \rightarrow A$$

$$\langle id_A, !_A \rangle: A \rightarrow A \times 1$$

Действительно, $!_A \circ pr_1^{A \times 1} = pr_2^{A \times 1}$ (обе эти стрелки из $A \times 1$ в 1), поэтому

$$\langle id_A, !_A \rangle \circ pr_1 = \langle id_A \circ pr_1, !_A \circ pr_1 \rangle = \langle pr_1, pr_2 \rangle = id_{A \times 1}$$

$$pr_1 \circ \langle id_A, !_A \rangle = id_A$$

Упражнение 10.28. Пусть в категории \mathbf{K} есть терминальный объект и выбрано некоторое произведение A и 1 для любого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Рассмотрим следующий функтор $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$

$$F(A) = A \times 1$$

$$F(f) = f \times id_1$$

Проверьте, что изоморфизмы из замечания 10.27 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau: F \rightarrow Id_{\mathcal{K}}$$

$$\tau^{-1}: Id_{\mathcal{K}} \rightarrow F$$

посмотрев на следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A \times 1 & \xrightarrow{pr_1} & A \\ f \times id_1 \downarrow & & \downarrow f \\ B \times 1 & \xrightarrow{pr_1} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\langle id_A, !_A \rangle} & A \times 1 \\ f \downarrow & & \downarrow f \times id_1 \\ B & \xrightarrow{\langle id_B, !_B \rangle} & B \times 1 \end{array}$$

Замечание 10.29. В таких случаях обычно говорят „изоморфизмы естественны по A “. Это нестрогое выражение означает „некоторые два функтора естественно изоморфны“, причём функторы предлагается угадать.

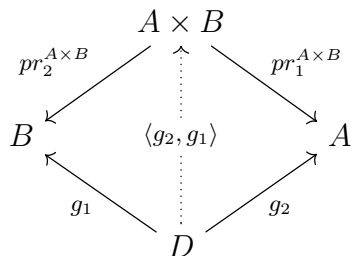
Замечание 10.30. Изоморфизм $A \times 0 \cong 0$, верный в \mathbf{Set} и во всех топосах, в общем случае неверен. Контрпример – категория групп \mathbf{Grp} , в которой начальный объект совпадает с терминальным (это группа из одного единичного элемента $\{e\}$), поэтому $A \times 0 \cong A \times 1 \cong A$.

Теорема 10.31. Если существует произведение A и B , то существует и произведение B и A , причём $A \times B \cong B \times A$.

Доказательство. В качестве произведения B и A работает следующая вилка

$$\begin{array}{ccc} & A \times B & \\ pr_2^{A \times B} \swarrow & & \searrow pr_1^{A \times B} \\ B & & A \end{array}$$

потому что



□

Замечание 10.32. Изоморфизм $A \times B \cong B \times A$ выглядит так:

$$\langle pr_2, pr_1 \rangle: A \times B \rightarrow B \times A$$

$$\langle pr_2, pr_1 \rangle: B \times A \rightarrow A \times B$$

Упражнение 10.33. Проверьте, что эти стрелки обратны друг к другу.

Определение 10.34. Категория называется *категорией с произведениями пар объектов*, если в ней есть произведение любой пары объектов.

Замечание 10.35. На практике обычно предполагается, что для любой пары объектов выбрано некоторое произведение из всех возможных. Строго говоря, в этом случае надо говорить о *категории с выбранными произведениями пар объектов*. При наличии аксиомы выбора разница, конечно, невелика, но иногда приходится работать без аксиомы выбора по чисто техническим причинам.

Упражнение 10.36. Пусть \mathbf{K} – категория с выбранными произведениями пар объектов. Рассмотрим следующие функторы $F: \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ и $G: \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$

$$F(A, B) = A \times B$$

$$F(f, g) = f \times g$$

$$G(A, B) = B \times A$$

$$G(f, g) = g \times f$$

Проверьте, что изоморфизмы из замечания 10.32 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau: F \rightarrow G$$

$$\tau^{-1}: G \rightarrow F$$

посмотрев на следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\langle pr_2, pr_1 \rangle} & B \times A \\ f \times g \downarrow & & \downarrow g \times f \\ C \times D & \xrightarrow{\langle pr_2, pr_1 \rangle} & D \times C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B \times A & \xrightarrow{\langle pr_2, pr_1 \rangle} & A \times B \\ g \times f \downarrow & & \downarrow f \times g \\ D \times C & \xrightarrow{\langle pr_2, pr_1 \rangle} & C \times D \end{array}$$

Замечание 10.37. В таких случаях обычно нестрого говорят „изоморфизмы 10.32 естественны по A и B “.

Определение 10.38. Пусть дано некоторое множество I и некоторое семейство объектов $\{A_i \mid i \in I\}$, где $A_i \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. *Конусом* будем называть любой объект $C \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ вместе с произвольным набором стрелок $f_i: C \rightarrow A_i$, индексированных элементами I . *Морфизмом между конусами* (D, g) и (C, f) будем называть любую стрелку $h: D \rightarrow C$, делающую коммутативной все диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \uparrow & \searrow f_i & \\ h & & A_i \\ \downarrow & \nearrow g_i & \\ D & & \end{array}$$

для всех $i \in I$.

Определение 10.39. *Произведением семейства объектов* $\{A_i \mid i \in I\}$ называется терминальный объект в категории конусов.

Соглашение 10.40. Произведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $\prod_{i \in I} A_i$ с проекциями $pr_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$ и единственной стрелкой $\langle g_i \rangle_{i \in I}$ для любого семейства стрелок $\{g_i: D \rightarrow A_i \mid i \in I\}$, делающей коммутативными все диаграммы следующего вида

$$\begin{array}{ccc}
 & \prod_{i \in I} A_i & \\
 & \uparrow & \searrow pr_i \\
 \langle g_i \rangle_{i \in I} & & A_i \\
 & \downarrow & \nearrow g_i \\
 & D &
 \end{array}$$

для всех $i \in I$.

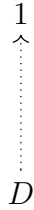
Соглашение 10.41. Если множество I конечно (возьмём для ясности $I = \{1, 2, \dots, n\}$), произведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ с проекциями $pr_i: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow A_i$ и стрелками $\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$, делающими коммутативными соответствующие диаграммы.

Пример 10.42. Произведение трёх объектов определяется следующей коммутативной диаграммой

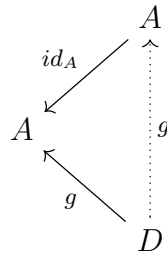
$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times B \times C & & \\
 & \swarrow pr_1 & \uparrow & \searrow pr_3 & \\
 A & & B & & C \\
 & \swarrow g_1 & \uparrow \langle g_1, g_2, g_3 \rangle & \searrow g_3 & \\
 & & D & &
 \end{array}$$

Упражнение 10.43. В Set , Cat , Grp и категориях вида Set^K , где K – малая, существуют произведения любых множеств объектов (как конечных, так и бесконечных).

Пример 10.44. Произведение пустого семейства объектов – это терминальный объект.



Пример 10.45. Произведение семейства, состоящего из одного объекта A – это, например, объект A с единственной проекцией $id_A: A \rightarrow A$



Теперь мы докажем, что произведение конечного числа объектов можно строить с помощью произведения пар следующим способом $((\dots (A_1 \times A_2) \times \dots) \times A_n)$.

Теорема 10.46. Если в категории \mathcal{K} есть терминальный объект и произведение любой пары объектов, то в \mathcal{K} есть произведение любого конечного семейства объектов.

Доказательство. (по индукции). Пусть уже построено произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Определим $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}$ как $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}$ с набором проекций

$$pr_1 = pr_1^{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

$$pr_2 = pr_2^{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

...

$$pr_n = pr_n^{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} \circ pr_1^{(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

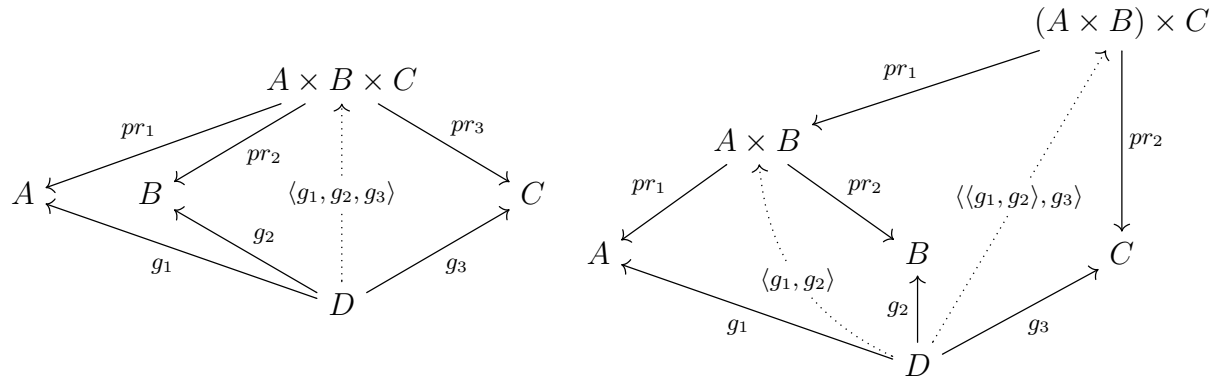
$$pr_{n+1} = pr_2^{(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}}$$

Стрелка $\langle g_1, g_2, \dots, g_n, g_{n+1} \rangle$ задаётся следующим равенством

$$\langle g_1, g_2, \dots, g_n, g_{n+1} \rangle = \langle \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle, g_{n+1} \rangle$$

□

Пример 10.47.



$$pr_1^{A \times B \times C} = pr_1^{A \times B} \circ pr_1^{(A \times B) \times C}$$

$$pr_2^{A \times B \times C} = pr_2^{A \times B} \circ pr_1^{(A \times B) \times C}$$

$$pr_3^{A \times B \times C} = pr_2^{(A \times B) \times C}$$

$$\langle g_1, g_2, g_3 \rangle = \langle \langle g_1, g_2 \rangle, g_3 \rangle$$

Упражнение 10.48. Проверьте, что эта конструкция действительно даёт произведение трёх объектов A, B, C .

Можно строить произведение конечного числа объектов и таким способом $(A_1 \times (\dots \times (A_{n-1} \times A_n) \dots))$. Порядок расстановки скобок не важен в силу следующей теоремы.

Теорема 10.49. Если существуют оба произведения $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$, то $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$

Доказательство. Изоморфизмы выглядят так

$$\langle pr_1 \circ pr_1, \langle pr_2 \circ pr_1, pr_2 \rangle \rangle: (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$$

$$\langle \langle pr_1, pr_1 \circ pr_2 \rangle, pr_2 \circ pr_2 \rangle: A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$$

□

Упражнение 10.50. Можете показать, что эти стрелки обратны друг к другу.

Замечание 10.51. Проще показать, что $A \times (B \times C)$ с подходящими проекциями тоже является произведением трёх объектов A, B, C , а все произведения изоморфны, как терминальные объекты в соответствующей категории конусов.

Упражнение 10.52. (Для трудолюбивых людей). Пусть \mathbf{K} – категория с выбранными произведениями пар объектов. Рассмотрим следующие функторы $F: \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ и $G: \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$

$$F(A, B, C) = (A \times B) \times C$$

$$F(f, g, h) = (f \times g) \times h$$

$$G(A, B, C) = A \times (B \times C)$$

$$G(f, g, h) = f \times (g \times h)$$

Проверьте, что изоморфизмы из доказательства теоремы 10.49 являются компонентами естественных изоморфизмов

$$\tau: F \rightarrow G$$

$$\tau^{-1}: G \rightarrow F$$

Определение 10.53. Категория называется *категорией с конечными произведениями*, если в ней есть терминальный объект и произведение любой пары объектов. Равносильное условие: в категории есть произведение любого конечного семейства объектов.

Замечание 10.54. На практике обычно предполагается, что для любого конечного семейства объектов выбрано некоторое произведение из всех возможных. Строго говоря, в этом случае надо говорить о *категории с выбранными конечными произведениями*.

Пример 10.55. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория, в которой есть произведение некоторой пары объектов A и B . Верны следующие изоморфизмы

$$\mathbf{K}(D, A \times B) \cong \mathbf{K}(D, A) \times \mathbf{K}(D, B) \quad \text{для любого } D \in \text{Ob}(\mathbf{K})$$

(это изоморфизмы в \mathbf{Set}). Каждой стрелке $f: D \rightarrow A \times B$ соответствует пара стрелок $pr_1 \circ f: D \rightarrow A$ и $pr_2 \circ f: D \rightarrow B$, а каждой паре стрелок $g_1: D \rightarrow A$ и $g_2: D \rightarrow B$ соответствует стрелка $\langle g_1, g_2 \rangle: D \rightarrow A \times B$.

Замечание 10.56. О терминологии. По-английски стрелку вида $f \times g$ называют “product map”, а стрелку вида $\langle f, g \rangle$ называют как попало или никак. По-русски в некоторых книгах стрелку $\langle f, g \rangle$ явно неудачно называют „произведением“, для стрелки $f \times g$ в этом случае приходится придумывать странные названия. В принципе, в силу примера 10.55 стрелку вида $\langle f, g \rangle$ можно называть просто „упорядоченной парой“, хотя она и отличается в \mathbf{Set} от упорядоченной пары по Куратовскому.

Глава 11

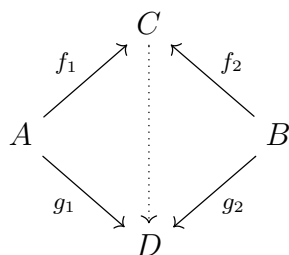
Копроизведения

Копроизведение – это произведение в двойственной категории.

Определение 11.1. Копроизведение двух объектов A и B в категории \mathcal{K} задаётся следующим набором данных:

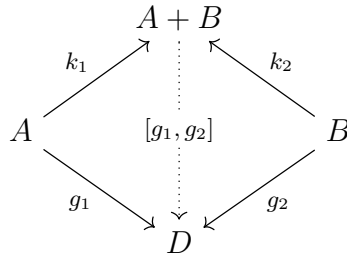
1. Объектом $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$.
2. Упорядоченной парой стрелок $f_1: A \rightarrow C$ и $f_2: B \rightarrow C$, эти стрелки называются *первой копроекцией* и *второй копроекцией*.

При этом требуется, чтобы для любого объекта $D \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ и любой упорядоченной пары стрелок $g_1: A \rightarrow D$ и $g_2: B \rightarrow D$ существовала единственная стрелка из C в D , делающая коммутативной следующую диаграмму



Упражнение 11.2. Копроизведения определены с точностью до изоморфизма.

Соглашение 11.3. Если предполагается, что для двух объектов A и B выбрано некоторое копроизведение (из всех возможных), объект копроизведения будем обозначать $A + B$, а копроекции k_1^{A+B} и k_2^{A+B} . Если A и B ясны из контекста, будем обозначать копроекции просто k_1 и k_2 . Будем обозначать $[g_1, g_2]$ единственную стрелку, делающую коммутативной диаграмму



Мы видим, что

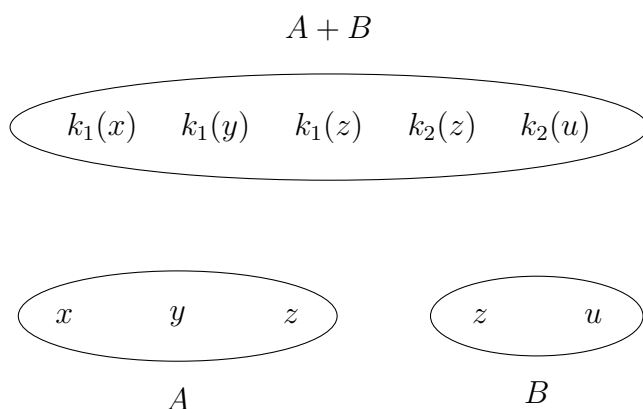
$$[g_1, g_2] \circ k_1 = g_1$$

$$[g_1, g_2] \circ k_2 = g_2$$

$f \circ k_1 = g_1 \wedge f \circ k_2 = g_2$ влечёт $f = [g_1, g_2]$
для любой стрелки $f: A + B \rightarrow D$.

Пример 11.4. В \mathbf{Set} копроизведение множеств A и B – это их дизъюнктное объединение $A + B$, то есть объединение непересекающихся изоморфных копий A и B (если A и B не пересекаются, можно взять просто объединение). Стрелки $k_1: A \rightarrow A + B$ и $k_2: B \rightarrow A + B$ – это вложения A в $A + B$ и B в $A + B$ соответственно.

Пример 11.5.



Упражнение 11.6. Разберитесь, как устроена стрелка $[g_1, g_2]$ в \mathbf{Set} . Она определяется некоторым „разбором случаев“.

Пример 11.7. В категории предпорядка копроизведение $A + B$ – это объединение $A \sqcup B$, то есть наименьший (относительно \lesssim) объект C со свойством $A \lesssim C \wedge B \lesssim C$.

Упражнение 11.8. В категории \mathbf{Cat} копроизведение $\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$ – это дизъюнктное объединение изоморфных копий категорий \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 со множеством объектов $\text{Ob}(\mathbf{K}_1) + \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ и множеством морфизмов $\text{Mor}(\mathbf{K}_1) + \text{Mor}(\mathbf{K}_2)$. Если картинку 9.2 воспринимать как единую категорию, то это будет $\mathbf{K} + \mathbf{K}^{\text{op}}$, надо только переименовать объекты и стрелки, чтобы они не повторялись два раза.

Замечание 11.9. В категории групп копроизведение существует, но устроено сложнее, чем можно подумать (и я не хочу его описывать). Если взять просто дизъюнктное объединение, как умножать элементы из разных частей?

Упражнение 11.10. $f \circ [g_1, g_2] = [f \circ g_1, f \circ g_2]$
если обе части равенства определены.

Упражнение 11.11. $[k_1^{A+B}, k_2^{A+B}] = id_{A+B}$

Упражнение 11.12. $[f \circ k_1, f \circ k_2] = f$
если левая часть равенства определена.

Определение 11.13. Для двух стрелок $f: C \rightarrow A$ и $g: D \rightarrow B$ их *копроизведение* $f + g: C + D \rightarrow A + B$ определяется следующим равенством

$$f + g = [k_1 \circ f, k_2 \circ g]$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f} & C \\ k_1 \downarrow & & \downarrow k_1 \\ A + B & \xleftarrow{f + g} & C + D \\ k_2 \uparrow & & \uparrow k_2 \\ B & \xleftarrow{g} & D \end{array}$$

Упражнение 11.14. $id_A + id_B = id_{A+B}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{id_A} & A \\ k_1 \downarrow & & \downarrow k_1 \\ A + B & \xleftarrow{id_{A+B}} & A + B \\ k_2 \uparrow & & \uparrow k_2 \\ B & \xleftarrow{id_B} & B \end{array}$$

Упражнение 11.15. $(f_1 + f_2) \circ (g_1 + g_2) = (f_1 \circ g_1) + (f_2 \circ g_2)$ если обе части равенства определены.

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xleftarrow{f_1} & B_1 & \xleftarrow{g_1} & C_1 \\ k_1 \downarrow & & k_1 \downarrow & & \downarrow k_1 \\ A_1 + A_2 & \xleftarrow{f_1 + f_2} & B_1 + B_2 & \xleftarrow{g_1 + g_2} & C_1 + C_2 \\ k_2 \uparrow & & k_2 \uparrow & & \uparrow k_2 \\ A_2 & \xleftarrow{f_2} & B_2 & \xleftarrow{g_2} & C_2 \end{array}$$

Упражнение 11.16. $[f_1, f_2] \circ (g_1 + g_2) = [f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2]$
если обе части равенства определены.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B_1 & \xleftarrow{g_1} & C_1 \\
 & \swarrow f_1 & \downarrow k_1 & & \downarrow k_1 \\
 A & \xleftarrow{[f_1, f_2]} & B_1 + B_2 & \xleftarrow{g_1 + g_2} & C_1 + C_2 \\
 & \nwarrow f_2 & \uparrow k_1 & & \uparrow k_2 \\
 & & B_2 & \xleftarrow{g_2} & C_2
 \end{array}$$

Пример 11.17. В топосах вида Set^K копроизведением функторов F и G является функтор $F + G$, определённый следующими равенствами:

$$(F + G)(A) = F(A) + G(A)$$

$$(F + G)(f) = F(f) + G(f)$$

Копроекции $k_1: F \rightarrow F + G$ и $k_2: G \rightarrow F + G$ будут естественные преобразования с компонентами:

$$k_1: F(A) \rightarrow F(A) + G(A)$$

$$k_2: G(A) \rightarrow F(A) + G(A)$$

Для естественных преобразований $\tau: F \rightarrow H$ и $\sigma: G \rightarrow H$ стрелкой $[\tau, \sigma]$ будет естественное преобразование с компонентами

$$[\tau_A, \sigma_A]: F(A) + G(A) \rightarrow H(A)$$

Упражнение 11.18. Проверьте детали.

Упражнение 11.19. Копроизведение A и 0 существует всегда, причём $A + 0 \cong A$.

Упражнение 11.20. Если существует копроизведение A и B , то существует и копроизведение B и A , причём $A + B \cong B + A$.

Определение 11.21. Пусть дано некоторое множество I и некоторое семейство объектов $\{A_i \mid i \in I\}$, где $A_i \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. *Коконусом* будем называть любой объект $C \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ вместе с произвольным набором стрелок $f_i: A_i \rightarrow C$, индексированных элементами I . *Морфизмом между коконусами* (C, f) и (D, g) будем называть любую стрелку $h: C \rightarrow D$, делающую коммутативной все диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \downarrow h & \swarrow f_i & \\ & A_i & \\ & \swarrow g_i & \\ D & & \end{array}$$

для всех $i \in I$.

Определение 11.22. *Копроизведением семейства объектов* $\{A_i \mid i \in I\}$ называется начальный объект в категории коконусов.

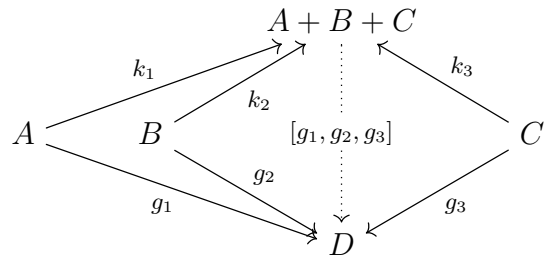
Соглашение 11.23. Копроизведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $\sum_{i \in I} A_i$ с копроекциями $k_i: A_i \rightarrow \sum_{i \in I} A_i$ и единственной стрелкой $[g_i]_{i \in I}$ для любого семейства стрелок $\{g_i: A_i \rightarrow D \mid i \in I\}$, делающей коммутативными все диаграммы следующего вида

$$\begin{array}{ccc} \sum_i A_i & & \\ \downarrow [g_i]_{i \in I} & \swarrow k_i & \\ & A_i & \\ & \swarrow g_i & \\ D & & \end{array}$$

для всех $i \in I$.

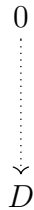
Соглашение 11.24. Если множество I конечно (возьмём для ясности $I = \{1, 2, \dots, n\}$), копроизведение семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ будем обозначать $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ с копроекциями $k_i: A_i \rightarrow A_1 + A_2 + \dots + A_n$ и стрелками $[g_1, g_2, \dots, g_n]$, делающими коммутативными соответствующие диаграммы.

Пример 11.25. Копроизведение трёх объектов определяется следующей коммутативной диаграммой

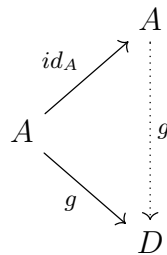


Упражнение 11.26. В Set , Cat и категориях вида Set^K , где K – малая, существуют копроизведения любых множеств объектов (как конечных, так и бесконечных).

Пример 11.27. Копроизведение пустого семейства объектов – это начальный объект.



Пример 11.28. Копроизведение семейства, состоящего из одного объекта A – это, например, объект A с единственной копроекцией $id_A: A \rightarrow A$



Упражнение 11.29. Если в категории K есть начальный объект и копроизведение любой пары объектов, то в K есть копроизведение любого конечного семейства объектов.

Упражнение 11.30. Если существуют оба копроизведения $(A+B)+C$ и $A+(B+C)$, то $(A+B)+C \cong A+(B+C)$

Замечание 11.31. Изоморфизм $A \times (B+C) \cong (A \times B) + (A \times C)$, верный в \mathbf{Set} и во всех топосах, в общем случае неверен. Контрпример – категория \mathbf{Set}^{op} , поскольку в \mathbf{Set} неверен двойственный изоморфизм $A + (B \times C) \cong (A+B) \times (A+C)$. Можно найти гораздо „меньший“ контрпример среди упорядоченных множеств (любая не дистрибутивная решётка).

Пример 11.32. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория, в которой есть копроизведение некоторой пары объектов A и B . Тогда

$$\mathbf{K}(A+B, D) \cong \mathbf{K}(A, D) \times \mathbf{K}(B, D) \quad \text{для любого } D \in \text{Ob}(\mathbf{K}).$$

(это изоморфизмы в \mathbf{Set}). Каждой стрелке $f: A+B \rightarrow D$ соответствует пара стрелок $f \circ k_1: A \rightarrow D$ и $f \circ k_2: B \rightarrow D$, а каждой паре стрелок $g_1: A \rightarrow D$ и $g_2: B \rightarrow D$ соответствует стрелка $[g_1, g_2]: A+B \rightarrow D$.

Глава 12

Сопряжённые функторы

12.1 Основное определение и примеры

Если воспринимать категории как „обобщённые упорядоченные множества“, а функторы как „обобщённые монотонные отображения“, то сопряжённость – это „обобщённое соответствие Галуа“. Это пояснение для тех, кто знает, что такое соответствие Галуа, а кто не знает, может о нём не беспокоиться.

Определение 12.1. Пусть даны две категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , а также два функтора между ними

$$\mathbf{K}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbf{K}_2$$

Чтобы удобнее различать, будем обозначать объекты категории \mathbf{K}_1 буквами A, B, C , а объекты категории \mathbf{K}_2 буквами X, Y, Z . Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если для любых $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ и $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ есть взаимно однозначное соответствие между стрелками вида $g: A \rightarrow G(X)$ и стрелками вида $f: F(A) \rightarrow X$, в некотором смысле „естественное“ по A и X .

Говоря строже, для любых $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ и $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ есть отображения

$$\Phi_{A,X}: \mathbf{K}_1(A, G(X)) \rightarrow \mathbf{K}_2(F(A), X)$$

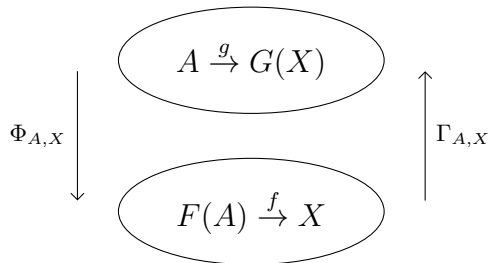
$$\Gamma_{A,X}: \mathbf{K}_2(F(A), X) \rightarrow \mathbf{K}_1(A, G(X))$$

(обычно мы будем писать просто Φ и Γ , без индексов), взаимно обратные и естественные в смысле следующих равенств

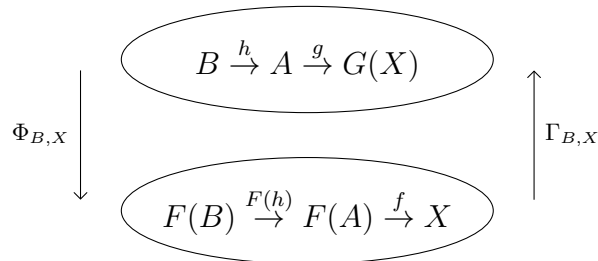
- $\Gamma(\Phi(g)) = g$
- $\Phi(\Gamma(f)) = f$
- $\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$
- $\Gamma(h \circ f) = G(h) \circ \Gamma(f)$

для любых подходящих f, g, h (ниже есть поясняющая картинка). Функтор F в этом случае называется *левым сопряжённым*, а функтор G *правым сопряжённым*. Говорят также, что F *сопряжён слева* к G , а G *сопряжён справа* к F .

Замечание 12.2. Можно попытаться проиллюстрировать условия естественности следующими неформальными картинками. Если стрелки g и f соответствуют друг другу при сопряжении



то соответствуют друг другу также стрелки $g \circ h$ и $f \circ F(h)$



и стрелки $G(h) \circ g$ и $h \circ f$

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{⌞} & \\
 \Phi_{A,Y} \downarrow & & \uparrow \Gamma_{A,Y} \\
 & \text{⌝} & \\
 A \xrightarrow{g} G(X) \xrightarrow{G(h)} G(Y) & & \\
 & \text{⌞} & \\
 & & F(A) \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h} Y \\
 & \text{⌝} &
 \end{array}$$

Теорема 12.3. Для сопряжённых функторов верны следующие равенства

- $\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$
- $\Gamma(f \circ F(h)) = \Gamma(f) \circ h$

Доказательство. Чтобы доказать равенство

$$\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$$

применим к обеим частям Γ и получим равносильное равенство (поскольку Γ взаимно однозначно)

$$G(h) \circ g = \Gamma(h \circ \Phi(g))$$

которое действительно верно, потому что

$$\Gamma(h \circ \Phi(g)) = G(h) \circ \Gamma(\Phi(g)) = G(h) \circ g$$

Чтобы доказать равенство

$$\Gamma(f \circ F(h)) = \Gamma(f) \circ h$$

применим к обеим частям Φ и получим равносильное равенство (поскольку Φ взаимно однозначно)

$$f \circ F(h) = \Phi(\Gamma(f) \circ h)$$

которое действительно верно, потому что

$$\Phi(\Gamma(f) \circ h) = \Phi(\Gamma(f)) \circ F(h) = f \circ F(h)$$

□

Пример 12.4. Пусть функторы F и G взаимно обратные, то есть

$$G \circ F = Id_{\mathcal{K}_1}$$

$$F \circ G = Id_{\mathcal{K}_2}$$

В этом случае $F \dashv G$. Стрелке $f: F(A) \rightarrow X$ соответствует стрелка $G(f): A \rightarrow G(X)$, а стрелке g соответствует стрелка $F(g)$. В этом случае также $G \dashv F$, поскольку взаимная обратность – отношение симметричное.

Пример 12.5. Пусть \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 – частично упорядоченные множества, а F и G – монотонные отображения. В этом случае сопряжённость $F \dashv G$ означает выполнение следующего условия

$$F(A) \leq X \Leftrightarrow A \leq G(X)$$

Это один из вариантов определения соответствия Галуа.

Пример 12.6. Пусть M и N – некоторые множества, а $f: M \rightarrow N$ некоторая функция. Пусть $\mathcal{P}(M)$ и $\mathcal{P}(N)$ – множества подмножеств M и N , упорядоченные по включению. Рассмотрим две монотонные функции

$$\mathcal{P}(M) \begin{array}{c} \xrightarrow{\exists_f} \\ \xleftarrow{f^*} \end{array} \mathcal{P}(N)$$

\exists_f переводит любое подмножество M в его образ при отображении f , а f^* переводит любое подмножество N в его прообраз относительно f . Если $A \subseteq M$ и $X \subseteq N$, то

$$\exists_f(A) \subseteq X \Leftrightarrow A \subseteq f^*(X)$$

(образ A является подмножеством $X \Leftrightarrow A$ является подмножеством прообраза X), поэтому $\exists_f \dashv f^*$

Замечание 12.7. Обозначения \exists_f и f^* могут показаться странными, но это некоторый стандарт в категорной логике.

Пример 12.8. Рассмотрим категорию \mathbf{Cat} и категорию графов \mathbf{Grph} . Каждой малой категории можно сопоставить граф, вершинами которого будут объекты категории, а рёбрами – морфизмы. Тем самым задан „стирающий“ функтор $G: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Grph}$. Этот функтор строгий (говорят, что \mathbf{Cat} является *конкретной над* \mathbf{Grph}). Он как бы забывает, как делать композицию и какие стрелки являются единичными, оставляя только dom и cod . К функтору G есть левый сопряжённый $F: \mathbf{Grph} \rightarrow \mathbf{Cat}$, который по графу A выдаёт категорию $F(A)$, свободно порождённую этим графом. Объектами категории будут вершины графа, а морфизмами из вершины V в вершину V' – конечные последовательности рёбер вида $(r_n, r_{n-1}, \dots, r_1)$, где $n \geq 1$ и рёбра расположены цепочкой $V \xrightarrow{r_1} V_1 \xrightarrow{r_2} \dots \xrightarrow{r_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{r_n} V'$ (допускается, чтобы некоторые из вершин цепочки совпадали, цепочка может „петлять“). Каждую такую последовательность можно воспринимать как „формальную композицию“ $r_n \circ r_{n-1} \circ \dots \circ r_1$. Кроме того, для каждой вершины V формально добавляется новая стрелка id_V . Удобно использовать в качестве всех id_V последовательность длины ноль (и работать с ней как с протоморфизмом), в этом случае композиция в категории $F(A)$ будет просто присоединением последовательностей друг к другу. Если A – граф и X – малая категория, то каждый морфизм графов $g \in \mathbf{Grph}(A, G(X))$ взаимно однозначно определяет функтор $f \in \mathbf{Cat}(F(A), X)$, действующий на объектах и стрелках категории $F(A)$ так

$$f(V) = g(V)$$

$$f(r_n, r_{n-1}, \dots, r_1) = g(r_n) \circ g(r_{n-1}) \circ \dots \circ g(r_1)$$

$$f(id_V) = id_{g(V)}$$

Упражнение 12.9. Пусть дан набор категорий и функторов, расположенных так

$$\mathbf{K}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xleftarrow{G_1} \end{array} \mathbf{K}_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{F_2} \\ \xleftarrow{G_2} \end{array} \mathbf{K}_3$$

Пусть $F_1 \dashv G_1$ и $F_2 \dashv G_2$. Проверьте, что $F_2 \circ F_1 \dashv G_1 \circ G_2$

Упражнение 12.10. Если $F \dashv G$, то $G^{\text{op}} \dashv F^{\text{op}}$

$$\mathbb{K}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbb{K}_2$$

$$\mathbb{K}_2^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{G^{\text{op}}} \\ \xleftarrow{F^{\text{op}}} \end{array} \mathbb{K}_1^{\text{op}}$$

Это упражнение позволяет нам применять к сопряжённости принцип двойственности. Любому верному утверждению о левых сопряжённых функторах соответствует двойственное верное утверждение о правых сопряжённых функторах, и наоборот. Мы уже видели пример такой двойственности при доказательстве теоремы [12.3](#) (где второе равенство двойственно первому).

12.2 Единица и коединица сопряжения

Определение 12.11. Положим по определению

- $\eta_A = \Gamma(id_{F(A)})$
- $\varepsilon_X = \Phi(id_{G(X)})$

Заметим, что

$$\eta_A: A \rightarrow G(F(A))$$

$$\varepsilon_X: F(G(X)) \rightarrow X$$

Упражнение 12.12. Для сопряжённых функторов

$$\text{Grph} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \text{Cat}$$

из примера 12.8 стрелка $\eta_A: A \rightarrow G(F(A))$ является вложением графа A в граф $G(F(A))$.

Теорема 12.13. Верны следующие равенства

- $\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$
- $\Phi(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$

для любых $f: F(A) \rightarrow X$ и $g: A \rightarrow G(X)$

Доказательство.

$$\Gamma(f) = \Gamma(f \circ id_{F(A)}) = G(f) \circ \Gamma(id_{F(A)}) = G(f) \circ \eta_A$$

$$\Phi(g) = \Phi(id_{G(X)} \circ g) = \Phi(id_{G(X)}) \circ F(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$$

□

Теорема 12.14. Стрелки $\eta_A: A \rightarrow G(F(A))$ и $\varepsilon_X: F(G(X)) \rightarrow X$ являются компонентами естественных преобразований.

Доказательство. Разберём случай η . Надо доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) \\ h \downarrow & & \downarrow G(F(h)) \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & G(F(B)) \end{array}$$

для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K}_1)$ и любой стрелки $h: A \rightarrow B$. Равенство

$$\eta_B \circ h = G(F(h)) \circ \eta_A$$

в силу предыдущей теоремы равносильно

$$\eta_B \circ h = \Gamma(F(h))$$

И это действительно правда, потому что

$$\eta_B \circ h = \Gamma(id_{F(B)}) \circ h = \Gamma(id_{F(B)} \circ F(h)) = \Gamma(F(h))$$

(второе равенство по теореме 12.3).

В случае ε надо доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F(G(X)) & \xrightarrow{\varepsilon_X} & X \\ F(G(h)) \downarrow & & \downarrow h \\ F(G(Y)) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \end{array}$$

для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{K}_2)$ и любой стрелки $h: X \rightarrow Y$. Доказательство совершенно симметрично предыдущему (принцип двойственности). \square

Определение 12.15. *Единицей сопряжения* будем называть естественное преобразование $\eta: Id_{\mathcal{K}_1} \rightarrow G \circ F$ с компонентами $\eta_A = \Gamma(id_{F(A)})$.

Коединицей сопряжения будем называть естественное преобразование $\varepsilon: F \circ G \rightarrow Id_{\mathcal{K}_2}$ с компонентами $\varepsilon_X = \Phi(id_{G(X)})$.

Теорема 12.16. Пусть $F \dashv G$. Тогда коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\
 & \searrow g & \downarrow G(f) & & \downarrow f \\
 & & G(X) & & X
 \end{array}$$

для любых $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$, $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ и любой стрелки $g: A \rightarrow G(X)$. Это значит, для любой стрелки $g: A \rightarrow G(X)$ есть ровно одна стрелка $f: F(A) \rightarrow X$ такая, что $g = G(f) \circ \eta_A$.

Доказательство. Должно быть

$$f = \Phi(g)$$

потому что

$$g = G(f) \circ \eta_A = \Gamma(f)$$

(второе равенство по теореме 12.13). \square

По принципу двойственности немедленно получаем такой результат.

Теорема 12.17. Пусть $F \dashv G$. Тогда коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & & F(A) & & A \\
 & \swarrow f & \downarrow F(g) & & \downarrow g \\
 X & \xleftarrow{\varepsilon_X} & F(G(X)) & & G(X)
 \end{array}$$

для любых $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$, $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ и любой стрелки $f: F(A) \rightarrow X$. Это значит, для любой стрелки $f: F(A) \rightarrow X$ есть ровно одна стрелка $g: A \rightarrow G(X)$ такая, что $f = \varepsilon_X \circ F(g)$.

Есть несколько определений сопряжённости (равносильных исходному), которые используют η или ε в качестве основных понятий.

Определение 12.18. Пусть даны две категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , а также два функтора между ними

$$\mathbf{K}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbf{K}_2$$

Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть естественное преобразование $\eta: Id_{\mathbf{K}_1} \rightarrow G \circ F$ такое, что для любых $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$, $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ и любой стрелки $g: A \rightarrow G(X)$ существует ровно одна стрелка $f: F(A) \rightarrow X$ со свойством $g = G(f) \circ \eta_A$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\ & \searrow g & \downarrow G(f) & & \downarrow f \\ & & G(X) & & X \end{array}$$

Замечание 12.19. Если единственную стрелку f обозначать $\Phi(g)$, диаграмма примет вид

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\ & \searrow g & \downarrow G(\Phi(g)) & & \downarrow \Phi(g) \\ & & G(X) & & X \end{array}$$

Теорема 12.20. *Определение 12.18* равносильно исходному определению сопряжённости (определению 12.1).

Доказательство. Из определения 12.1 следует определение 12.18 в силу теорем 12.14 и 12.16. В обратную сторону, пусть коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\ & \searrow g & \downarrow G(\Phi(g)) & & \downarrow \Phi(g) \\ & & G(X) & & X \end{array}$$

Положим по определению $\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$ и докажем равенства

- $\Gamma(\Phi(g)) = g$

- $\Phi(\Gamma(f)) = f$
- $\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$
- $\Gamma(h \circ f) = G(h) \circ \Gamma(f)$

Первое равенство непосредственно видно по диаграмме, поскольку

$$\Gamma(\Phi(g)) = G(\Phi(g)) \circ \eta_A = g$$

Четвёртое равенство доказывается так

$$\Gamma(h \circ f) = G(h \circ f) \circ \eta_A = G(h) \circ G(f) \circ \eta_A = G(h) \circ \Gamma(f)$$

Третье равенство доказывается сравнением диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\eta_B} & G(F(B)) & & F(B) \\
 & \searrow^{g \circ h} & \downarrow G(\Phi(g \circ h)) & & \downarrow \Phi(g \circ h) \\
 & & G(X) & & X
 \end{array}$$

с диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\eta_B} & G(F(B)) & & F(B) \\
 h \downarrow & & \downarrow G(F(h)) & & \downarrow F(h) \\
 A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\
 & \searrow^g & \downarrow G(\Phi(g)) & & \downarrow \Phi(g) \\
 & & G(X) & & X
 \end{array}$$

Наконец, чтобы доказать второе равенство, для заданной стрелки f возьмём в качестве g стрелку $\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$ и сравним коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\
 & \searrow^{G(f) \circ \eta_A} & \downarrow G(f) & & \downarrow f \\
 & & G(X) & & X
 \end{array}$$

с диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) \\
 \searrow^{G(f) \circ \eta_A} & & \downarrow G(\Phi(G(f) \circ \eta_A)) \\
 & & G(X)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & F(A) \\
 & & \downarrow \Phi(G(f) \circ \eta_A) \\
 & & X
 \end{array}$$

□

Упражнение 12.21. Пусть \mathbf{Grp} – категория групп. Рассмотрим стирающий функтор $G: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, выдающий по каждой группе её множество носитель, а также функтор $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$, выдающий по множеству A свободную группу со множеством образующих A .

$$\mathbf{Set} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbf{Grp}$$

Покажите, что $F \dashv G$, если в качестве стрелки $\eta_A: A \rightarrow G(F(A))$ брать вложение множества образующих A во множество всех элементов свободной группы $F(A)$.

Чтобы задать сопряжённость, не обязательно предполагать заранее, что F является функтором, достаточно знать его действие на объектах.

Теорема 12.22. Пусть даны две категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , а также функтор $G: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_1$ и отображение $F: \mathbf{Ob}(\mathbf{K}_1) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathbf{K}_2)$. Пусть для каждого $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{K}_1)$ задана стрелка $\eta_A: A \rightarrow G(F(A))$ такая, что для любого $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{K}_2)$ и любой стрелки $g: A \rightarrow G(X)$ существует ровно одна стрелка $f: F(A) \rightarrow X$ со свойством $g = G(f) \circ \eta_A$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) \\
 \searrow^g & & \downarrow G(f) \\
 & & G(X)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & F(A) \\
 & & \downarrow f \\
 & & X
 \end{array}$$

Тогда есть ровно один способ определить действие F на стрелках, при котором F становится функтором, а набор стрелок η_A – естественным преобразованием.

Доказательство. Чтобы η было естественным преобразованием, должна быть коммутативна следующая диаграмма для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ и любой стрелки $h: A \rightarrow B$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) \\ h \downarrow & & \downarrow G(F(h)) \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & G(F(B)) \end{array}$$

Но существует ровно одна стрелка $f: F(A) \rightarrow F(B)$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & F(A) \\ h \downarrow & & \downarrow G(f) & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & G(F(B)) & F(B) \end{array}$$

Чтобы это было яснее, перерисуем её так

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & F(A) \\ & \searrow \eta_B \circ h & \downarrow G(f) & \downarrow f \\ & & G(F(B)) & F(B) \end{array}$$

Эту единственную стрелку f и возьмём в качестве $F(h)$. Свойства функтора

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

$$F(h_2 \circ h_1) = F(h_2) \circ F(h_1)$$

следуют из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & F(A) \\ id_A \downarrow & & \downarrow G(id_{F(A)}) & \downarrow id_{F(A)} \\ A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & F(A) \end{array}$$

и диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow G(f_1) & & \downarrow f_1 \\
 B & \xrightarrow{\eta_B} & G(F(B)) & & F(B) \\
 \downarrow h_2 & & \downarrow G(f_2) & & \downarrow f_2 \\
 C & \xrightarrow{\eta_C} & G(F(C)) & & F(C)
 \end{array}$$

□

Ещё одно определение сопряжённости использует ε в качестве основного понятия.

Определение 12.23. Пусть даны две категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , а также два функтора между ними

$$\mathbf{K}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbf{K}_2$$

Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть естественное преобразование $\varepsilon: F \circ G \rightarrow Id_{\mathbf{K}_2}$ такое, что для любых $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$, $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ и любой стрелки $f: F(A) \rightarrow X$ существует ровно одна стрелка $g: A \rightarrow G(X)$ со свойством $f = \varepsilon_X \circ F(g)$

$$\begin{array}{ccc}
 & F(A) & A \\
 & \swarrow f & \downarrow g \\
 X & \xleftarrow{\varepsilon_X} F(G(X)) & G(X)
 \end{array}$$

Замечание 12.24. Если единственную стрелку g обозначать $\Gamma(f)$, диаграмма примет вид

$$\begin{array}{ccc}
 & F(A) & A \\
 & \swarrow f & \downarrow \Gamma(f) \\
 X & \xleftarrow{\varepsilon_X} F(G(X)) & G(X)
 \end{array}$$

Упражнение 12.25. Проверьте, что определение 12.23 равносильно определению 12.1 (примените принцип двойственности).

Чтобы задать сопряжённость, не обязательно предполагать заранее, что G является функтором, достаточно знать его действие на объектах.

Теорема 12.26. Пусть даны две категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , а также функтор $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ и отображение $G: \text{Ob}(\mathbf{K}_2) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$. Пусть для каждого $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ задана стрелка $\varepsilon_X: F(G(X)) \rightarrow X$ такая, что для любого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ и любой стрелки $f: F(A) \rightarrow X$ существует ровно одна стрелка $g: A \rightarrow G(X)$ со свойством $f = \varepsilon_X \circ F(g)$

$$\begin{array}{ccc}
 & F(A) & A \\
 & \swarrow f & \vdots g \\
 & F(G(X)) & G(X) \\
 X & \longleftarrow \varepsilon_X &
 \end{array}$$

Тогда есть ровно один способ определить действие G на стрелках, при котором G становится функтором, а набор стрелок ε_X – естественным преобразованием.

Доказательство. Применяем принцип двойственности к теореме 12.22. □

12.3 Экспонента. Сохранение произведений и копроизведений

Определение 12.27. Пусть \mathcal{K} – категория с произведениями пар объектов. *Экспонентой* объектов A и B называется объект B^A (определённый с точностью до изоморфизма) вместе с некоторой стрелкой $ev_{A,B}: B^A \times A \rightarrow B$ такой, что для любых $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ и $f: C \times A \rightarrow B$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & C \times A & C \\
 & \swarrow f & \downarrow g \\
 B & \xleftarrow{ev_{A,B}} B^A \times A & B^A
 \end{array}$$

Это значит, что есть единственная стрелка $g: C \rightarrow B^A$ такая, что $f = ev_{A,B} \circ (g \times id_A)$. Стрелку $ev_{A,B}$ часто называют *отображением вычисления*, нижние индексы при ней не пишут, если они ясны из контекста.

Замечание 12.28. Единственную стрелку g в этом случае традиционно обозначают $\Lambda(f)$

$$\begin{array}{ccc}
 & C \times A & C \\
 & \swarrow f & \downarrow \Lambda(f) \\
 B & \xleftarrow{ev_{A,B}} B^A \times A & B^A
 \end{array}$$

Пример 12.29. В Set объект B^A – это множество всех функций из A в B , а ev и $\Lambda(f)$ определяются следующими равенствами

$$ev(h, a) = h(a)$$

$$\Lambda(f)(c)(a) = f(c, a)$$

где h – элемент B^A (то есть, функция из A в B), f – функция из $C \times A$ в B , $a \in A$, $c \in C$.

Определение 12.30. Категория называется *декартово замкнутой*, если в ней есть терминальный объект и для любой пары объектов существуют произведение и экспонента. В дальнейшем, говоря о какой-либо декартово замкнутой категории, мы всегда будем предполагать, что в ней выбраны некоторое произведение и некоторая экспонента (из всех возможных) для любой пары объектов.

Упражнение 12.31. Пусть дана декартово замкнутая категория \mathbf{K} и некоторый объект $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Определим два функтора $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ и $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$

$$F(C) = C \times A$$

$$F(h) = h \times id_A$$

$$G(B) = B^A$$

$$G(h) = \Lambda(h \circ ev)$$

Покажите, что $F \dashv G$.

Замечание 12.32. Для краткости можно обозначать эти функторы $(-) \times A$ и $(-)^A$.

Упражнение 12.33. Покажите, что элементы экспоненты (то есть, стрелки вида $g: 1 \rightarrow B^A$) взаимно однозначно соответствуют стрелкам из A в B .

Упражнение 12.34. \mathbf{Cat} является декартово замкнутой категорией (мы уже строили экспоненты в \mathbf{Cat} под названием „категории функторов“).

Упражнение 12.35. Категория всех частично упорядоченных множеств и их монотонных отображений является декартово замкнутой.

Замечание 12.36. Все категории вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$, где \mathbf{K} малая, являются декартово замкнутыми, но построить в них экспоненту мы в данный момент не сможем, построим позже.

Теорема 12.37. *Правые сопряжённые функторы сохраняют терминальные объекты. Точнее, если $F \dashv G$, то $G(1)$ является терминальным объектом.*

Доказательство. Надо доказать, что для любого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ существует единственная стрелка из A в $G(1)$. Это стрелка

$$A \xrightarrow{\Gamma(\uparrow_{F(A)})} G(1)$$

соответствующая при сопряжении единственной стрелке

$$F(A) \xrightarrow{\uparrow_{F(A)}} 1$$

□

Теорема 12.38. *Правые сопряжённые функторы сохраняют произведения пар. Точнее, если $F \dashv G$ и существует произведение $X \times Y$ с проекциями pr_1 и pr_2 , то $G(X \times Y)$ с проекциями $G(pr_1)$ и $G(pr_2)$ является произведением $G(X)$ и $G(Y)$.*

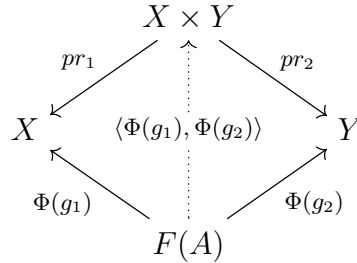
Доказательство. Необходимо доказать коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & G(X \times Y) & \\
 G(pr_1) \swarrow & \uparrow & \searrow G(pr_2) \\
 G(X) & & G(Y) \\
 g_1 \swarrow & & \searrow g_2 \\
 & A &
 \end{array}$$

В качестве единственной стрелки возьмём $\Gamma(\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle)$

$$\begin{array}{ccc}
 & G(X \times Y) & \\
 G(pr_1) \swarrow & \uparrow & \searrow G(pr_2) \\
 G(X) & \Gamma(\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle) & G(Y) \\
 g_1 \swarrow & & \searrow g_2 \\
 & A &
 \end{array}$$

соответствующую при сопряжении стрелке $\langle \Phi(g_1), \Phi(g_2) \rangle$



□

Упражнение 12.39. Проверьте детали.

Теорема 12.40. Правые сопряжённые функторы сохраняют произведения любых множеств объектов (не только конечных, но и бесконечных). Точнее, если $F \dashv G$ и существует произведение $\prod_{i \in I} X_i$ с проекциями pr_i , то $G(\prod_{i \in I} X_i)$ с проекциями $G(pr_i)$ является произведением семейства объектов $\{G(X_i) \mid i \in I\}$.

Упражнение 12.41. Докажите.

Упражнение 12.42. Множество-носитель произведения любого семейства групп является произведением их множеств-носителей.

В силу принципа двойственности немедленно получаем следующие теоремы.

Теорема 12.43. Левые сопряжённые функторы сохраняют начальные объекты. Точнее, если $F \dashv G$, то $F(0)$ является начальным объектом.

Теорема 12.44. Левые сопряжённые функторы сохраняют копроизведения пар. Точнее, если $F \dashv G$ и существует копроизведение $A + B$ с копоекциями k_1 и k_2 , то $F(A + B)$ с копоекциями $F(k_1)$ и $F(k_2)$ является копроизведением $F(A)$ и $F(B)$.

Теорема 12.45. Левые сопряжённые функторы сохраняют копроизведения любых множеств объектов (не только конечных, но и бесконечных). Точнее, если $F \dashv G$ и существует копроизведение $\sum_{i \in I} A_i$ с копоекциями k_i , то $F(\sum_{i \in I} A_i)$ с копоекциями $F(k_i)$ является копроизведением семейства объектов $\{F(A_i) \mid i \in I\}$.

Пример 12.46. Глядя на пример 12.6, мы видим, что образ объединения любого семейства множеств равен объединению их образов. А также, прообраз пересечения любого семейства множеств равен пересечению их прообразов. На самом деле, при взятии прообраза сохраняются не только пересечения, но и объединения. Это связано с тем, что функтор f^* имеет также и правый сопряжённый $f^* \dashv \forall_f$ и полная картина выглядит так

$$\mathcal{P}(M) \begin{array}{c} \xrightarrow{\exists_f} \\ \xleftarrow{f^*} \end{array} \mathcal{P}(N) \begin{array}{c} \xrightarrow{f^*} \\ \xleftarrow{\forall_f} \end{array} \mathcal{P}(M)$$

где $\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$. Монотонное отображение \forall_f переводит всякое подмножество $A \subseteq M$ в подмножество N , заданное так

$$\forall_f(A) = \{y \in N \mid f^*(\{y\}) \subseteq A\}$$

Если использовать кванторы и логические связки, можно выписать такие определения

$$\exists_f(A) = \{y \in N \mid \exists x \in M(x \in A \wedge f(x) = y)\}$$

$$\forall_f(A) = \{y \in N \mid \forall x \in M(f(x) = y \Rightarrow x \in A)\}$$

Упражнение 12.47. В декартово замкнутых категориях верны следующие изоморфизмы

$$A \times 0 \cong 0$$

$$A \times (B + C) \cong A \times B + A \times C$$

$$A \times (\sum_{i \in I} B_i) \cong \sum_{i \in I} A \times B_i$$

$$1^A \cong 1$$

$$(B \times C)^A \cong B^A \times C^A$$

$$(\prod_{i \in I} B_i)^A \cong \prod_{i \in I} B_i^A$$

Упражнение 12.48. Пусть \mathcal{K} – декартово замкнутая категория, $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$. Определим функтор $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^{\text{op}}$

$$F(B) = A^B$$

$$F(h) = \Lambda(\text{ev} \circ (\text{id}_{A^C} \times h))$$

где $h: B \rightarrow C$. Проверьте, что $F \dashv F^{\text{op}}$, посмотрев на следующие изоморфизмы

$$\mathbb{K}^{\text{op}}(A^B, C) \cong \mathbb{K}(C, A^B) \cong \mathbb{K}(C \times B, A) \cong \mathbb{K}(B \times C, A) \cong \mathbb{K}(B, A^C)$$

Упражнение 12.49. В декартово замкнутых категориях верны следующие изоморфизмы

$$A^0 \cong 1$$

$$A^{B+C} \cong A^B \times A^C$$

$$A^{\sum_{i \in I} B_i} \cong \prod_{i \in I} A^{B_i}$$

Упражнение 12.50. Попытайтесь доказать следующие изоморфизмы

$$A^1 \cong A$$

$$A^{B \times C} \cong (A^C)^B$$

Упражнение 12.51. Если в декартово замкнутой категории с начальным объектом верно $0 \cong 1$, то эта категория вырожденная, то есть все её объекты изоморфны терминальному. Указание: рассмотрите объекты A^0 и A^1 .

Упражнение 12.52. Категория групп не является декартово замкнутой.

12.4 Единственность сопряжённого функтора

Теорема 12.53. *Если $F_1 \dashv G$ и $F_2 \dashv G$, то $F_1 \cong F_2$. Иными словами, левый сопряжённый функтор к заданному функтору G , если он существует, определён однозначно с точностью до естественного изоморфизма.*

Доказательство. Возьмём некоторый объект $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$. Рассмотрим категорию \mathbf{K}_A , объектами которой являются стрелки вида $g: A \rightarrow G(X)$, а морфизмом между объектами $g_1: A \rightarrow G(Z)$ и $g_2: A \rightarrow G(X)$ будет любая стрелка $h: Z \rightarrow X$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1} & G(Z) \\ & \searrow g_2 & \downarrow G(h) \\ & & G(X) \end{array} \quad \begin{array}{c} Z \\ \downarrow h \\ X \end{array}$$

Пусть $F_1 \dashv G$ и $F_2 \dashv G$. Единицу первого сопряжения обозначим η , где $\eta_A: A \rightarrow G(F_1(A))$, а единицу второго сопряжения обозначим η' , где $\eta'_A: A \rightarrow G(F_2(A))$. Стрелки η_A и η'_A обе являются начальными объектами категории \mathbf{K}_A , все начальные объекты изоморфны, поэтому существует изоморфизм $i_A: F_1(A) \rightarrow F_2(A)$, делающий коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F_1(A)) \\ & \searrow \eta'_A & \downarrow G(i_A) \\ & & G(F_2(A)) \end{array} \quad \begin{array}{c} F_1(A) \\ \downarrow i_A \\ F_2(A) \end{array}$$

и обратный к нему $i_A^{-1}: F_2(A) \rightarrow F_1(A)$, делающий коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta'_A} & G(F_2(A)) \\ & \searrow \eta_A & \downarrow G(i_A^{-1}) \\ & & G(F_1(A)) \end{array} \quad \begin{array}{c} F_2(A) \\ \downarrow i_A^{-1} \\ F_1(A) \end{array}$$

Остаётся проверить, что стрелки i_A и i_A^{-1} являются компонентами естественных изоморфизмов

$$i: F_1 \rightarrow F_2$$

$$i^{-1}: F_2 \rightarrow F_1$$

Естественность i означает коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{i_A} & F_2(A) \\ F_1(h) \downarrow & & \downarrow F_2(h) \\ F_1(B) & \xrightarrow{i_B} & F_2(B) \end{array}$$

для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ и любой стрелки $h: A \rightarrow B$. Коммутативность этой диаграммы означает равенство

$$F_2(h) \circ i_A = i_B \circ F_1(h)$$

Это равенство доказывается сравнением коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & G(F_1(A)) & F_1(A) \\ & \nearrow \eta_A & \downarrow i_A \\ A & \xrightarrow{\eta'_A} & G(F_2(A)) & F_2(A) \\ h \downarrow & & \downarrow G(F_2(h)) & \downarrow F_2(h) \\ B & \xrightarrow{\eta'_B} & G(F_2(B)) & F_2(B) \end{array}$$

с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F_1(A)) & F_1(A) \\ h \downarrow & & \downarrow G(F_1(h)) & \downarrow F_1(h) \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & G(F_1(B)) & F_1(B) \\ & \searrow \eta'_B & \downarrow G(i_B) & \downarrow i_B \\ & & G(F_2(B)) & F_2(B) \end{array}$$

Стрелки в правых частях диаграмм должны совпадать, поскольку

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F_1(A)) & & F_1(A) \\
 & \searrow^{\eta'_B \circ h} & \vdots \scriptstyle G(f) & & \vdots \scriptstyle f \\
 & & G(F_2(B)) & & F_2(B)
 \end{array}$$

Естественность i^{-1} доказывается аналогично (но лучше сослаться на упражнение 6.10). \square

Упражнение 12.54. Покажите, что правый сопряжённый функтор к заданному функтору F , если он существует, определён однозначно с точностью до естественного изоморфизма.

Замечание 12.55. Я чуть-чуть упростил определение (и обозначение) категории \mathbf{K}_A , недостающие подробности можно посмотреть в определении 21.2.

12.5 Ещё одно определение сопряжённости

Приведём ещё одно определение сопряжённости, которое встречается в некоторых книгах.

Определение 12.56. Пусть даны две категории \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 , а также два функтора между ними

$$\mathcal{K}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{K}_2$$

Говорят, что функторы F и G *сопряжены* и пишут $F \dashv G$, если есть два естественных преобразования $\eta: Id_{\mathcal{K}_1} \rightarrow G \circ F$ и $\varepsilon: F \circ G \rightarrow Id_{\mathcal{K}_2}$, для которых коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(\eta_A)} & F(G(F(A))) \\ & \searrow id_{F(A)} & \downarrow \varepsilon_{F(A)} \\ & & F(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{\eta_{G(X)}} & G(F(G(X))) \\ & \searrow id_{G(X)} & \downarrow G(\varepsilon_X) \\ & & G(X) \end{array}$$

для любых $A \in \text{Ob}(\mathcal{K}_1)$ и $X \in \text{Ob}(\mathcal{K}_2)$.

Замечание 12.57. Если обозначить через $F\eta$ естественное преобразование с компонентами $F(\eta_A)$, через εF естественное преобразование с компонентами $\varepsilon_{F(A)}$, через ηG естественное преобразование с компонентами $\eta_{G(X)}$ и через $G\varepsilon$ естественное преобразование с компонентами $G(\varepsilon_X)$, диаграммы становится легче запомнить

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & F \circ G \circ F \\ & \searrow id_F & \downarrow \varepsilon F \\ & & F \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\eta^G} & G \circ F \circ G \\
 & \searrow id_G & \downarrow G\varepsilon \\
 & & G
 \end{array}$$

Теорема 12.58. *Определение 12.56 эквивалентно определению 12.1.*

Доказательство. Пусть $F \dashv G$ в смысле определения 12.1. Тогда

$$\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = \Phi(\eta_A) = \Phi(\Gamma(id_{F(A)})) = id_{F(A)}$$

$$G(\varepsilon_X) \circ \eta_{G(X)} = \Gamma(\varepsilon_X) = \Gamma(\Phi(id_{G(X)})) = id_{G(X)}$$

поэтому $F \dashv G$ в смысле определения 12.56. Полезно также посмотреть на следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & F(A) & A \\
 id_{FA} \swarrow & \downarrow F(\eta_A) & \downarrow \eta_A \\
 F(A) & \xleftarrow{\varepsilon_{F(A)}} F(G(F(A))) & G(F(A))
 \end{array}$$

и ещё вот эту

$$\begin{array}{ccc}
 G(X) & \xrightarrow{\eta_{G(X)}} G(F(G(X))) & F(G(X)) \\
 id_{G(X)} \searrow & \downarrow G(\varepsilon_X) & \downarrow \varepsilon_X \\
 & G(X) & X
 \end{array}$$

В обратную сторону, если $F \dashv G$ в смысле определения 12.56, полагаем по определению

$$\Gamma(f) = G(f) \circ \eta_A$$

$$\Phi(g) = \varepsilon_X \circ F(g)$$

и доказываем равенства из определения 12.1 в качестве упражнения. \square

Глава 13

Эквациональная аксиоматика декартово замкнутых категорий

„Эквациональная“ значит „заданная равенствами“. В Таблице 13.1 выписан некоторый набор равенств, выполненных в любой декартово замкнутой категории. Стараясь сделать нагляднее, я их записал в виде „правил вывода“. Например, второе правило читается так: если $f: C \rightarrow A$ и $g: C \rightarrow B$, то $pr_1 \circ \langle f, g \rangle = f$. Как обычно, мы не пишем буквенные индексы при pr_1, pr_2, ev и Λ , если они ясны из контекста.

Теорема 13.1. *Категория является декартово замкнутой в том и только том случае, если в ней выполнены равенства, показанные в Таблице 13.1. Иными словами, декартово замкнутая категория задаётся следующим набором данных (помимо перечисленных в определении 1.1):*

- Объект 1 и для любого объекта A стрелка $!_A: A \rightarrow 1$.
- Для любых объектов A и B некоторый объект $A \times B$ и стрелки $pr_1: A \times B \rightarrow A$ и $pr_2: A \times B \rightarrow B$.
- Для любых стрелок $f: C \rightarrow A$ и $g: C \rightarrow B$ стрелка $\langle f, g \rangle: C \rightarrow A \times B$.
- Для любых объектов A и B объект B^A и стрелка $ev: B^A \times A \rightarrow B$.
- Для любой стрелки $f: C \times A \rightarrow B$ стрелка $\Lambda(f): C \rightarrow B^A$.

Таблица 13.1: Аксиоматика декартово замкнутых категорий

1	$\frac{f: A \rightarrow 1}{f = !_A}$
2	$\frac{f: C \rightarrow A \quad g: C \rightarrow B}{pr_1 \circ \langle f, g \rangle = f}$
3	$\frac{f: C \rightarrow A \quad g: C \rightarrow B}{pr_2 \circ \langle f, g \rangle = g}$
4	$\frac{h: C \rightarrow A \times B}{h = \langle pr_1 \circ h, pr_2 \circ h \rangle}$
5	$\frac{f: C \times A \rightarrow B}{f = ev \circ (\Lambda(f) \times id_A)}$
6	$\frac{g: C \rightarrow B^A}{g = \Lambda(ev \circ (g \times id_A))}$

При этом должны выполняться равенства, показанные в Таблице 13.1.

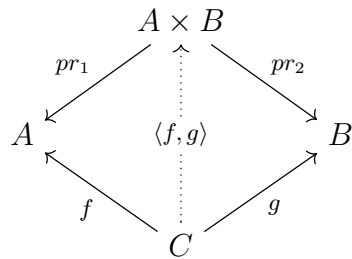
Доказательство. Предположим, что в категории выполняются равенства с Таблицы 13.1 и покажем, что такая категория декартово замкнута. Ясно, что объект 1 будет терминальным

$$A \xrightarrow{!_A} 1$$

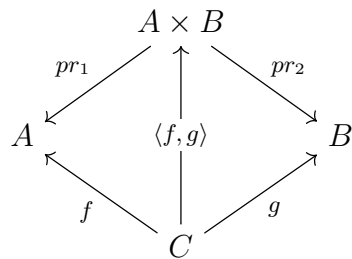
(единственность стрелки следует из равенства 1).

Докажем, что $A \times B$ с проекциями $pr_1: A \times B \rightarrow A$ и $pr_2: A \times B \rightarrow B$

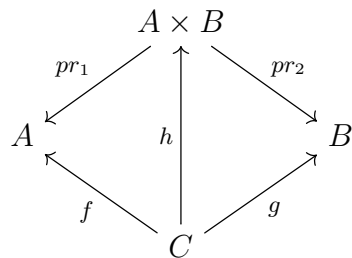
будет произведением A и B , что выражается диаграммой



Из равенств 2 и 3 следует коммутативность диаграммы



Чтобы доказать единственность стрелки $\langle f, g \rangle$, предположим, что некоторая стрелка $h: C \rightarrow A \times B$ делает коммутативной диаграмму



и докажем, что $h = \langle f, g \rangle$. Из диаграммы видно, что

$$pr_1 \circ h = f$$

$$pr_2 \circ h = g$$

В силу равенства 4

$$h = \langle pr_1 \circ h, pr_2 \circ h \rangle \text{ и поэтому } h = \langle f, g \rangle$$

Докажем, что B^A со стрелкой $ev: B^A \times A \rightarrow B$ является экспонентой A и B , что выражается диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & C \times A & C \\ & \swarrow f & \downarrow \Lambda(f) \\ B & \xleftarrow{ev} B^A \times A & B^A \end{array}$$

Из равенства 5 следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & C \times A & \\ & \swarrow f & \downarrow \Lambda(f) \times id_A \\ B & \xleftarrow{ev} B^A \times A & \end{array}$$

Чтобы доказать единственность стрелки $\Lambda(f)$, предположим, что некоторая стрелка $g: C \rightarrow B^A$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & C \times A & \\ & \swarrow f & \downarrow g \times id_A \\ B & \xleftarrow{ev} B^A \times A & \end{array}$$

и докажем, что $g = \Lambda(f)$. Из диаграммы видно, что

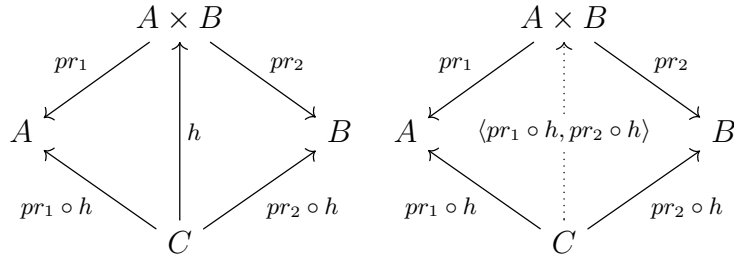
$$ev \circ (g \times id_A) = f$$

В силу равенства 6

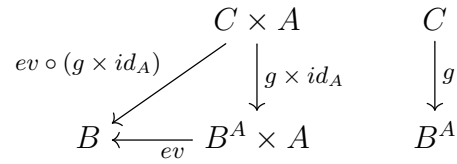
$$g = \Lambda(ev \circ (g \times id_A)) \text{ и поэтому } g = \Lambda(f)$$

В обратную сторону, покажем, что в декартово замкнутой категории выполнены равенства с Таблицы 13.1. Равенства 1,2,3 и 5 следуют из

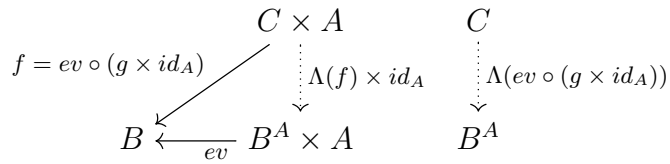
определений терминального объекта, произведения и экспоненты (достаточно взглянуть на определяющие диаграммы). Равенство 4 доказывается сравнением коммутативных диаграмм



Равенство 6 доказывается сравнением коммутативной диаграммы



с коммутативной диаграммой



□

Замечание 13.2. Для сопряжённых функторов $(-) \times A$ и $(-)^A$ из упражнения 12.31 соответствующие Γ и Φ действуют так

$$\Gamma(f) = \Lambda(f)$$

$$\Phi(g) = ev \circ (g \times id_A)$$

и равенства 5 и 6 с Таблицы 13.1 выражают их взаимную обратность.

Замечание 13.3. Аксиоматика, представленная в Таблице 13.1, не единственно возможная. Равенство 1 можно заменить на пару равенств

$$\frac{f: A \rightarrow B}{!_B \circ f = !_A}$$

$$!_1 = id_1$$

Равенство 4 можно заменить на пару равенств

$$\frac{h: D \rightarrow C \quad f: C \rightarrow A \quad g: C \rightarrow B}{\langle f, g \rangle \circ h = \langle f \circ h, g \circ h \rangle}$$

$$\langle pr_1^{A \times B}, pr_2^{A \times B} \rangle = id_{A \times B}$$

С равенствами 5 и 6 тоже можно мудрить, но оставим это до главы про лямбда-исчисление, если я её когда-нибудь напишу.

Глава 14

Объекты натуральных чисел

В этой главе мы дадим определение натуральных чисел на теоретико-категорном языке.

Определение 14.1. Пусть \mathbf{K} – декартово замкнутая категория. *Объектом натуральных чисел* в категории \mathbf{K} называется объект $N \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ вместе с парой морфизмов $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{S} N$ таких, что для любого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ и любой пары морфизмов $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$ коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & N & \xrightarrow{S} & N \\ & \nearrow 0 & \vdots & & \vdots \\ 1 & & h & & h \\ & \searrow a & \downarrow & & \downarrow \\ & & A & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

то есть существует единственная стрелка h такая, что

$$h \circ 0 = a$$

$$h \circ S = f \circ h$$

Пример 14.2. В Set объект натуральных чисел – это множество натуральных чисел \mathbb{N} вместе с элементом $0 \in \mathbb{N}$, который задаёт стрелку $\{*\} \xrightarrow{0} \mathbb{N}$, а также функцией прибавления единицы $S(n) = n + 1$, которая задаёт стрелку $\mathbb{N} \xrightarrow{S} \mathbb{N}$, итого получаем $\{*\} \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xrightarrow{S} \mathbb{N}$. Если заданы

произвольное множество A , элемент $a \in A$ и функция $A \xrightarrow{f} A$, мы можем определить функцию $h: \mathbb{N} \rightarrow A$, удовлетворяющую следующим равенствам

$$h(0) = a$$

$$h(n+1) = f(h(n)) \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

Таким образом, $h(n) = f(f(\dots f(a)\dots))$, где f применяется n раз. Существование и единственность такой функции h , полученной итерацией (многократным применением), следуют из принципа математической индукции. Второе равенство можно переписать так

$$h(S(n)) = f(h(n)) \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

или ещё лучше

$$h \circ S = f \circ h$$

Теорема 14.3. *Объект натуральных чисел, если он существует, определён однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную категорию \mathbf{K}_1 , объектами которой являются пары стрелок (или диаграммы) вида

$1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$. Морфизмом между диаграммами $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$ и $1 \xrightarrow{b} B \xrightarrow{g} B$ по определению будет любая стрелка h , делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & & & f \\ & & & & \longrightarrow \\ & & & & A \\ & a \nearrow & & \downarrow h & \\ 1 & & & & A \\ & \searrow b & & \downarrow h & \\ & & & & B \\ & & & & \longrightarrow \\ & & & & B \\ & & & & g \end{array}$$

Объект натуральных чисел является начальным объектом в \mathbf{K}_1 . □

Пример 14.4. В топосах вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$ объекты натуральных чисел устроены просто – это функторы $N: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$, тождественно равные \mathbb{N}

$$N(A) = \mathbb{N}$$

$$N(f) = id_{\mathbb{N}}$$

для всех $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, $f \in \text{Mor}(\mathbf{K})$.

Естественное преобразование $0: 1 \rightarrow N$ имеет компоненты

$$0(A) = 0: \{*\} \rightarrow \mathbb{N}$$

его естественность выражается коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} B & & \{*\} & \xrightarrow{0} & \mathbb{N} \\ f \uparrow & & id_{\{*\}} \uparrow & & \uparrow id_{\mathbb{N}} \\ A & & \{*\} & \xrightarrow{0} & \mathbb{N} \end{array}$$

Естественное преобразование $S: N \rightarrow N$ имеет компоненты

$$S(A) = S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

его естественность выражается коммутативной диаграммой

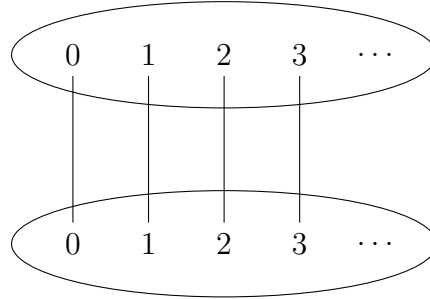
$$\begin{array}{ccccc} B & & \mathbb{N} & \xrightarrow{S} & \mathbb{N} \\ f \uparrow & & id_{\mathbb{N}} \uparrow & & \uparrow id_{\mathbb{N}} \\ A & & \mathbb{N} & \xrightarrow{S} & \mathbb{N} \end{array}$$

все естественные преобразования $h: N \rightarrow A$, полученные итерацией, тоже строятся покомпонентно.

Пример 14.5. В категории $\text{Set}^{\mathbf{K}}$, где \mathbf{K} – изображённая ниже категория частичного порядка

$$\begin{array}{c} id_B \hookrightarrow B \\ \uparrow f \\ id_A \hookrightarrow A \end{array}$$

объектом натуральных чисел будет следующее „множество, меняющееся со временем“ (точнее, не меняющееся)



Элементом $0: 1 \rightarrow N$ будет пара $(0, 0)$ („мировая линия нуля“). Стрелкой $S: N \rightarrow N$ будет отображение, сдвигающее всю картинку на одну позицию вправо.

Пример 14.6. Если K – малая категория с одним объектом (задающая полугруппу с единицей), объектом натуральных чисел в \mathbf{Set}^K будет множество \mathbb{N} с тривиальным действием полугруппы (все элементы полугруппы переходят в $id_{\mathbb{N}}$, все натуральные числа являются неподвижными точками).

Пример 14.7. В категории графов \mathbf{Grph} объектом натуральных чисел будет граф N из бесконечного числа вершин, перенумерованных натуральными числами, к каждой из которых приделана петля



Элементом $0: 1 \rightarrow N$ будет точка графа



Стрелкой $S: N \rightarrow N$ будет отображение графа N в себя, сдвигающее всю картинку на одну позицию вправо.

Определение 14.8. Стрелкой предшествования называется стрелка $p: N \rightarrow N$, делающая коммутативными следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow 0 & \downarrow p \\ 1 & & N \\ & \searrow 0 & \\ & & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{S} & N \\ & \searrow id_N & \downarrow p \\ & & N \end{array}$$

Таким образом

$$p \circ 0 = 0$$

$$p \circ S = id_N$$

В \mathbf{Set} это функция, вычитающая единицу из любого числа, кроме нуля

$$p(0) = 0$$

$$p(S(n)) = n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

Теорема 14.9. В каждой категории с объектом натуральных чисел существует единственная стрелка предшествования.

Доказательство. Сначала построим такую стрелку в \mathbf{Set} , используя некоторую итерацию. Будем определять пару функций $h_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и $h_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ одновременной рекурсией

$$h_1(0) = 0$$

$$h_2(0) = 0$$

$$h_1(n+1) = h_1(n) + 1$$

$$h_2(n+1) = h_1(n) \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

Перепишем эти равенства, используя S

$$h_1(0) = 0$$

$$h_2(0) = 0$$

$$h_1(S(n)) = S(h_1(n))$$

$$h_2(S(n)) = h_1(n) \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

Посмотрев на первое и третье равенства, легко доказать по индукции, что

$$h_1(n) = n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

Но тогда функция h_2 и есть p (надо посмотреть на второе и четвёртое равенства).

Переходим к общему случаю. Определим стрелку $h: N \rightarrow N \times N$ следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 & N & \xrightarrow{S} & N \\
 \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \nearrow & \downarrow h & & \downarrow h \\
 \langle 0, 0 \rangle \searrow & N \times N & \xrightarrow{\langle S \circ pr_1, pr_1 \rangle} & N \times N
 \end{array}$$

Содержательно говоря

$$h = \langle h_1, h_2 \rangle$$

$$h_1 = pr_1 \circ h$$

$$h_2 = pr_2 \circ h$$

Функция $\langle S \circ pr_1, pr_1 \rangle$ в **Set** переводит пару (n, m) в пару $(S(n), n)$. Пара $h(n)$ есть результат применения этой функции n раз к паре $(0, 0)$.

$$h(0) = (0, 0)$$

$$h(1) = (1, 0)$$

$$h(2) = (2, 1)$$

и так далее. Возвращаемся от **Set** к общему случаю. Докажем, что

$$pr_1 \circ h = id_N$$

Из коммутативности диаграммы следует, что

$$1. \quad h \circ 0 = \langle 0, 0 \rangle \quad (\text{коммутативность треугольника})$$

$$2. \quad h \circ S = \langle S \circ pr_1, pr_1 \rangle \circ h \quad (\text{коммутативность прямоугольника})$$

Из этого легко получить

$$pr_1 \circ h \circ 0 = 0$$

$$pr_1 \circ h \circ S = S \circ pr_1 \circ h$$

Но стрелка id_N удовлетворяет тем же условиям, что и $pr_1 \circ h$, поэтому $pr_1 \circ h = id_N$. Тут надо поглядеть на диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & N & \xrightarrow{S} & N \\
 0 \nearrow & \vdots & & \vdots \\
 1 & & pr_1 \circ h & \\
 0 \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & N & \xrightarrow{S} & N
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & N & \xrightarrow{S} & N \\
 0 \nearrow & \vdots & & \vdots \\
 1 & & id_N & \\
 0 \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & N & \xrightarrow{S} & N
 \end{array}$$

Из равенств 1 и 2 легко выводится

$$pr_2 \circ h \circ 0 = 0$$

$$pr_2 \circ h \circ S = pr_1 \circ h = id_N$$

и стрелка $pr_2 \circ h$ удовлетворяет тем условиям, которых мы требуем от стрелки предшествования. Мы доказали существование стрелки предшествования, надо ещё доказать единственность. Это легко. Допустим, у нас есть стрелка $p: N \rightarrow N$, для которой верно

$$p \circ 0 = 0$$

$$p \circ S = id_N$$

Тогда стрелка $\langle id_N, p \rangle$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & N & \xrightarrow{S} & N \\
 0 \nearrow & \vdots & & \vdots \\
 1 & \langle id_N, p \rangle & & \langle id_N, p \rangle \\
 \searrow \langle 0, 0 \rangle & \downarrow & & \downarrow \\
 & N \times N & \xrightarrow{\langle S \circ pr_1, pr_1 \rangle} & N \times N
 \end{array}$$

Такая стрелка единственна и p по ней однозначно находится (как вторая проекция пары). \square

Соглашение 14.10. Будем обозначать $0_A: A \rightarrow N$ композицию $0 \circ !_A$

$$A \xrightarrow{!_A} 1 \xrightarrow{0} N$$

В \mathbf{Set} это функция из A в \mathbb{N} , тождественно равная нулю.

Упражнение 14.11.

$$0_B \circ f = 0_A \quad \text{для } f: A \rightarrow B$$

$$0 = 0_1$$

До сих пор мы не использовали декартову замкнутость в полную силу, нам были нужны только терминальный объект и произведение. Экспонента нужна, чтобы доказать теорему 14.12. Прежде, чем её сформулировать, посмотрим, как мы определяем функцию сложения $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Один из возможных способов такой (рекурсия по первому аргументу)

$$0 + n = n$$

$$S(n) + m = S(n + m) \quad \text{для любых } n, m \in \mathbb{N}$$

Определяющая её диаграмма в **Set** выглядит так

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{S \times id_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
 \langle 0_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle \nearrow & \vdots & + & \vdots \\
 \mathbb{N} & & & \\
 \searrow id_{\mathbb{N}} & \mathbb{N} & \xrightarrow{S} & \mathbb{N}
 \end{array}$$

Функция $\langle 0_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle$ отображает $n \in \mathbb{N}$ в пару $(0, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Функция $S \times id_{\mathbb{N}}$ отображает пару $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в пару $(S(n), m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Рассмотрим более общий случай. Пусть даны множества A и B , а также функции $g: A \rightarrow B$ и $f: B \rightarrow B$. Мы можем определить функцию $j: \mathbb{N} \times A \rightarrow B$ следующими равенствами

$$j(0, a) = g(a)$$

$$j(S(n), a) = f(j(n, a)) \quad \text{для любых } n \in \mathbb{N}, a \in A$$

Таким образом, $j(n, a) = f(f(\dots f(g(a)) \dots))$, где f применяется n раз.

Теорема 14.12. В декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел коммутативны следующие диаграммы (для любых A, B, g, f)

$$\begin{array}{ccc}
 & N \times A & \xrightarrow{S \times id_A} & N \times A \\
 \langle 0_A, id_A \rangle \nearrow & \vdots & j & \vdots \\
 A & & & \\
 \searrow g & B & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Доказательство. Напомню, что с объектом A связаны два сопряжённых функтора $F \dashv G$, определяемые так

$$F(C) = C \times A$$

$$F(f) = f \times id_A$$

$$G(B) = B^A$$

$$G(f) = \Lambda(f \circ ev)$$

Преобразования Γ и Φ , связанные с этим сопряжением, действуют так

$$\Gamma(f) = \Lambda(f) \quad \text{для любого } f: C \times A \rightarrow B$$

$$\Phi(g) = ev \circ (g \times id_A) \quad \text{для любого } g: C \rightarrow B^A$$

и для них выполнены равенства (для любых подходящих f, g, h)

$$\Lambda(\Phi(g)) = g$$

$$\Phi(\Lambda(f)) = f$$

$$\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$$

$$\Lambda(h \circ f) = G(h) \circ \Lambda(f)$$

$$\Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$$

$$\Lambda(f \circ F(h)) = \Lambda(f) \circ h$$

Переходим собственно к доказательству. Возьмём следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & N & \xrightarrow{S} N \\
 \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \nearrow & \vdots & \downarrow k \\
 & B^A & \xrightarrow{f^A} B^A \\
 \nwarrow \Gamma g^\top & & \downarrow k
 \end{array}$$

на которой использованы (стандартные) сокращения

$$\Gamma g^\top = \Lambda(g \circ pr_2) \quad (\text{потому что } 1 \times A \xrightarrow{pr_2} A \xrightarrow{g} B)$$

$$f^A = G(f) = \Lambda(f \circ ev) \quad (\text{потому что } B^A \times A \xrightarrow{ev} B \xrightarrow{f} B)$$

Коммутативность треугольника и квадрата означает следующее

$$k \circ 0 = \Lambda(g \circ pr_2)$$

$$k \circ S = G(f) \circ k$$

Положим $j = \Phi(k)$ и докажем коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & N \times A & \xrightarrow{S \times id_A} & N \times A \\
 \langle 0_A, id_A \rangle \nearrow & \vdots & & \vdots \\
 A & \Phi(k) & & \Phi(k) \\
 \searrow g & \downarrow & \xrightarrow{f} & \downarrow \\
 & B & & B
 \end{array}$$

Доказательство не содержит глубоких идей и состоит в трудолюбивых вычислениях, поэтому я докажу только коммутативность левого треугольника. Начнём с равенства

$$k \circ 0 = \Lambda(g \circ pr_2)$$

Применим к обеим частям Φ

$$\Phi(k \circ 0) = \Phi(\Lambda(g \circ pr_2))$$

$$\Phi(k) \circ F(0) = g \circ pr_2$$

$$\Phi(k) \circ (0 \times id_A) = g \circ pr_2$$

Умножим обе части справа на $\langle !_A, id_A \rangle$ (это изоморфизм A и $1 \times A$)

$$\Phi(k) \circ (0 \times id_A) \circ \langle !_A, id_A \rangle = g \circ pr_2 \circ \langle !_A, id_A \rangle$$

и вычислим

$$\Phi(k) \circ \langle 0 \circ !_A, id_A \rangle = g$$

Получили коммутативность треугольника. Осталось доказать ещё три равенства (коммутативность прямоугольника и два равенства, из которых следует единственность). \square

Упражнение 14.13. В \mathbf{Set} стрелка вида f^A – это отображение $f \circ$ (умножение слева на f).

Следствие 14.14. В декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел коммутативны также следующие диаграммы (для любых A, B, g, f)

$$\begin{array}{ccc}
 & A \times N & \xrightarrow{id_A \times S} & A \times N \\
 \langle id_A, 0_A \rangle \nearrow & \vdots & & \vdots \\
 A & \downarrow j & & \downarrow j \\
 & B & \xrightarrow{f} & B \\
 \searrow g & & &
 \end{array}$$

Это легко вывести из предыдущей теоремы, поскольку $A \times N \cong N \times A$.

Замечание 14.15. Коммутативность таких диаграмм удобно брать за определение объекта натуральных чисел, если в категории нет экспонент (а только терминальный объект и произведения пар объектов). Например, это позволяет нам определять сложение привычным способом (рекурсия по второму аргументу)

$$n + 0 = n$$

$$n + S(m) = S(n + m) \quad \text{для любых } n, m \in \mathbb{N}$$

Определяющая диаграмма в **Set** выглядит так

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{id_{\mathbb{N}} \times S} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
 \langle id_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}} \rangle \nearrow & \vdots & & \vdots \\
 \mathbb{N} & \downarrow + & & \downarrow + \\
 & \mathbb{N} & \xrightarrow{S} & \mathbb{N} \\
 \searrow id_{\mathbb{N}} & & &
 \end{array}$$

Мы можем точно так же определить сложение в любой категории с объектом натуральных чисел.

Определение 14.16. Сложением называется стрелка $+: N \times N \rightarrow N$, определяемая следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 & N \times N & \xrightarrow{id_N \times S} & N \times N \\
 \langle id_N, 0_N \rangle \nearrow & \vdots & & \vdots \\
 N & & + & & + \\
 \searrow id_N & \downarrow & & \downarrow & \\
 & N & \xrightarrow{S} & N &
 \end{array}$$

Таким образом, сложение – единственная стрелка, удовлетворяющая следующим равенствам

$$+ \circ \langle id_N, 0_N \rangle = id_N$$

$$+ \circ (id_N \times S) = S \circ +$$

Упражнение 14.17.

$$+ \circ \langle f, 0_A \rangle = f \quad \text{для любого } f: A \rightarrow N$$

$$+ \circ \langle f, 0 \rangle = f \quad \text{для любого } f: 1 \rightarrow N$$

$$+ \circ \langle f, S \circ g \rangle = S \circ + \circ \langle f, g \rangle \quad \text{для любых } f: A \rightarrow N, g: A \rightarrow N$$

Сложение обладает обычными свойствами, некоторые из них мы сейчас докажем.

Теорема 14.18. В любой категории с объектом натуральных чисел коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & N \times N & \\
 & \uparrow & \searrow + \\
 \langle 0_N, id_N \rangle & & N \\
 & \downarrow & \nearrow id_N \\
 & N &
 \end{array}$$

В Set она выражает равенство

$$0 + n = n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}$$

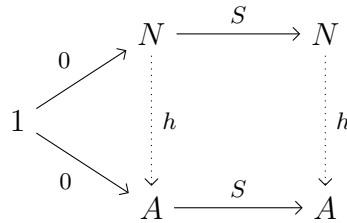
Доказательство. В \mathbf{Set} мы доказываем это по индукции. Сначала выпишем равенства

$$1. \quad 0 + 0 = 0$$

$$2. \quad 0 + S(n) = S(0 + n)$$

оба равенства по определению сложения. Первое равенство даёт базис индукции. Второе равенство показывает, что $0 + S(n) = S(n)$, если $0 + n = n$, это шаг индукции.

В общем случае мы действуем так. По определению объекта натуральных чисел



Таким образом, существует единственная стрелка h , удовлетворяющая равенствам

$$h \circ 0 = 0$$

$$h \circ S = S \circ h$$

Дальше надо показать, что стрелки $+ \circ \langle 0_N, id_N \rangle$ и id_N обе удовлетворяют этим равенствам и поэтому совпадают. Для id_N это очевидно, а для стрелки $+ \circ \langle 0_N, id_N \rangle$ проверяется вычислением, повторяющим 1 и 2 выше

$$1. \quad + \circ \langle 0_N, id_N \rangle \circ 0 = + \circ \langle 0_N \circ 0, id_N \circ 0 \rangle = + \circ \langle 0, 0 \rangle = 0$$

$$2. \quad + \circ \langle 0_N, id_N \rangle \circ S = + \circ \langle 0_N \circ S, id_N \circ S \rangle = + \circ \langle 0_N, S \rangle = S \circ + \circ \langle 0_N, id_N \rangle$$

□

Теорема 14.19. (Ассоциативность сложения). В любой категории с объектом натуральных чисел коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 N \times N \times N & \xrightarrow{\langle pr_1, + \circ \langle pr_2, pr_3 \rangle \rangle} & N \times N \\
 \downarrow \langle + \circ \langle pr_1, pr_2 \rangle, pr_3 \rangle & & \downarrow + \\
 N \times N & \xrightarrow{+} & N
 \end{array}$$

Доказательство. В \mathbf{Set} эта диаграмма выражает равенство

$$(n + m) + l = n + (m + l) \quad \text{для любых } n, m, l \in \mathbb{N}$$

В \mathbf{Set} мы это доказываем индукцией по l .

1. $(n + m) + 0 = n + m$
2. $n + (m + 0) = n + m$
3. $(n + m) + S(l) = S((n + m) + l)$
4. $n + (m + S(l)) = n + S(m + l) = S(n + (m + l))$

Первые две строчки доказывают, что $(n + m) + 0 = n + (m + 0)$, это базис индукции.

Последние две строчки доказывают, что $(n + m) + S(l) = n + (m + S(l))$, если $(n + m) + l = n + (m + l)$, это шаг индукции.

В общем случае мы действуем так. По следствию 14.14 существует стрелка j , делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 (N \times N) \times N & \xrightarrow{id_{N \times N} \times S} & (N \times N) \times N \\
 \uparrow \langle id_{N \times N}, 0_{N \times N} \rangle & & \downarrow j \\
 N \times N & & N \\
 \downarrow + & & \downarrow j \\
 N & \xrightarrow{S} & N
 \end{array}$$

Поскольку $(N \times N) \times N \cong N \times N \times N$, перепишем эту диаграмму так

$$\begin{array}{ccc}
 N \times N \times N & \xrightarrow{\langle pr_1, pr_2, S \circ pr_3 \rangle} & N \times N \times N \\
 \langle pr_1, pr_2, 0_{N \times N} \rangle \nearrow & & \downarrow j \\
 N \times N & & N \\
 + \searrow & & \downarrow j \\
 N & \xrightarrow{S} & N
 \end{array}$$

Таким образом, существует единственная стрелка j , удовлетворяющая равенствам

$$j \circ \langle pr_1, pr_2, 0_{N \times N} \rangle = +$$

$$j \circ \langle pr_1, pr_2, S \circ pr_3 \rangle = S \circ j$$

Дальше надо показать, что стрелки

$$+ \circ \langle + \circ \langle pr_1, pr_2 \rangle, pr_3 \rangle : N \times N \times N \rightarrow N$$

$$+ \circ \langle pr_1, + \circ \langle pr_2, pr_3 \rangle \rangle : N \times N \times N \rightarrow N$$

обе удовлетворяют этим равенствам (и поэтому совпадают). Доказательство заключается в трудолюбивом вычислении, повторяющем доказательство равенств 1,2,3,4 выше. \square

Замечание 14.20. Мы видим, что язык теории категорий очень хорош, чтобы давать определения, но неудобен для сложных доказательств. Главная причина этого – отсутствие связанных переменных. То, что в обычной математической записи выглядит так

$$\forall x(f(g(x)) = h(x))$$

на языке теории категорий выглядит так

$$f \circ g = h$$

Для людей, знакомых с комбинаторами: язык теории категорий – это некоторое исчисление комбинаторов.

Упражнение 14.21. Докажите коммутативность сложения (хотя бы в \mathbf{Set})

$$\begin{array}{ccc}
 N \times N & & \\
 \uparrow & \searrow + & \\
 \langle pr_2, pr_1 \rangle & & N \\
 \downarrow & \nearrow + & \\
 N \times N & &
 \end{array}$$

Определение 14.22. Рассмотрим некоторый весьма общий способ определения функций, который называется *примитивной рекурсией*. Если заданы множества A, B и функции $g: A \rightarrow B$ и $f: A \times \mathbb{N} \times B \rightarrow B$, мы можем определить функцию $h: A \times \mathbb{N} \rightarrow B$ следующими равенствами

$$h(a, 0) = g(a)$$

$$h(a, S(n)) = f(a, n, h(a, n)) \quad \text{для любых } a \in A, n \in \mathbb{N}$$

Пример 14.23. Операция умножения натуральных чисел определяется в \mathbf{Set} , например, следующими равенствами

$$n \times 0 = 0$$

$$n \times S(m) = n + n \times m \quad \text{для всех } n, m \in \mathbb{N}$$

Это пример определения по примитивной рекурсии. Функции $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ здесь такие

$$g(n) = 0$$

$$f(n, m, l) = n + l \quad \text{для всех } n, m, l \in \mathbb{N}$$

Заметим, что в этом примере функция f от m явно не зависит, эта переменная, как говорят, фиктивная.

Теорема 14.24. (Теорема о примитивной рекурсии). В категории \mathbf{Set} объектом натуральных чисел для любых объектов A, B и стрелок $g: A \rightarrow B$ и $f: A \times \mathbb{N} \times B \rightarrow B$ существует единственная стрелка $h: A \times \mathbb{N} \rightarrow B$, для которой коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & A \times N & \\
 \langle id_A, 0_A \rangle \nearrow & \downarrow h & \\
 A & & B \\
 \searrow g & & \\
 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A \times N & \xrightarrow{id_A \times S} & A \times N \\
 \downarrow \langle pr_1, pr_2, h \rangle & & \downarrow h \\
 A \times N \times B & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Доказательство. По следствию 14.14 существует стрелка j , делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & A \times N & \xrightarrow{id \times S} & A \times N \\
 \langle id, 0_A \rangle \nearrow & \downarrow j & & \downarrow j \\
 A & & & \\
 \searrow \langle id_A, 0_A, g \rangle & \downarrow & \xrightarrow{\langle pr_1, S \circ pr_2, f \rangle} & \downarrow \\
 & A \times N \times B & & A \times N \times B
 \end{array}$$

Сначала покажем, что это значит в \mathbf{Set} . В \mathbf{Set} стрелка $\langle pr_1, S \circ pr_2, f \rangle$ переводит тройку (a, n, b) в тройку $(a, S(n), f(a, n, b))$. Далее выписываем равенство

$$j(a, 0) = (a, 0, g(a)) \quad (\text{коммутативность треугольника})$$

и если обозначить $j(a, n) = (j_1(a, n), j_2(a, n), j_3(a, n)) \in A \times \mathbb{N} \times B$, то

$$j_1(a, 0) = a$$

$$j_2(a, 0) = 0$$

$$j_3(a, 0) = g(a)$$

а из коммутативности прямоугольника следует

$$j_1(a, S(n)) = j_1(a, n) \quad \text{и по индукции } j_1(a, n) = a$$

$$j_2(a, S(n)) = S(j_2(a, n)) \quad \text{и по индукции } j_2(a, n) = n$$

$$j_3(a, S(n)) = f(j_1(a, n), j_2(a, n), j_3(a, n)) = f(a, n, j_3(a, n))$$

и j_3 есть нужная нам стрелка h .

Теперь общий случай. На категорном языке выписанные выше равенства выглядят так

$$j \circ \langle id, 0_A \rangle = \langle id_A, 0_A, g \rangle \quad (\text{коммутативность треугольника})$$

$$j \circ (id \times S) = \langle pr_1, S \circ pr_2, f \rangle \circ j \quad (\text{коммутативность прямоугольника})$$

и поэтому

$$pr_1 \circ j \circ \langle id, 0_A \rangle = id_A$$

$$pr_2 \circ j \circ \langle id, 0_A \rangle = 0_A$$

$$pr_3 \circ j \circ \langle id, 0_A \rangle = g$$

$$pr_1 \circ j \circ (id \times S) = pr_1 \circ j \quad \text{и по индукции } pr_1 \circ j = pr_1^{A \times N}$$

$$pr_2 \circ j \circ (id \times S) = S \circ pr_2 \circ j \quad \text{и по индукции } pr_2 \circ j = pr_2^{A \times N}$$

$$pr_3 \circ j \circ (id \times S) = f \circ \langle pr_1 \circ j, pr_2 \circ j, pr_3 \circ j \rangle = f \circ \langle pr_1^{A \times N}, pr_2^{A \times N}, pr_3 \circ j \rangle$$

Требуемая стрелка h есть композиция $pr_3 \circ j$, индукция же заключается в сравнении между собой сначала этих двух диаграмм

$$\begin{array}{ccccc} & & A \times N & \xrightarrow{id \times S} & A \times N \\ & \nearrow \langle id, 0_A \rangle & \vdots & & \vdots \\ A & & \downarrow pr_1 \circ j & & \downarrow pr_1 \circ j \\ & \searrow id & A & \xrightarrow{id} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & A \times N & \xrightarrow{id \times S} & A \times N \\ & \nearrow \langle id, 0_A \rangle & \vdots & & \vdots \\ A & & \downarrow pr_1^{A \times N} & & \downarrow pr_1^{A \times N} \\ & \searrow id & A & \xrightarrow{id} & A \end{array}$$

а ПОТОМ ВОТ ЭТИХ ДВУХ

$$\begin{array}{ccc}
 & A \times N & \xrightarrow{id \times S} & A \times N \\
 \langle id, 0_A \rangle \nearrow & \vdots & & \vdots \\
 A & & pr_2 \circ j & & pr_2 \circ j \\
 \searrow 0_A & \downarrow & & \downarrow & \\
 & N & \xrightarrow{S} & N &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & A \times N & \xrightarrow{id \times S} & A \times N \\
 \langle id, 0_A \rangle \nearrow & \vdots & & \vdots \\
 A & & pr_2^{A \times N} & & pr_2^{A \times N} \\
 \searrow 0_A & \downarrow & & \downarrow & \\
 & N & \xrightarrow{S} & N &
 \end{array}$$

Принцип автора – не скрывать никакой правды, даже неприятной:) \square

Определение 14.25. Умножением называется единственная стрелка $\times : N \times N \rightarrow N$, делающая коммутативными следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 \langle id_N, 0_N \rangle \nearrow & N \times N & \\
 N & \downarrow \times & \\
 \searrow 0_N & N &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 N \times N & \xrightarrow{id_N \times S} & N \times N \\
 \langle pr_1, \times \rangle \downarrow & & \downarrow \times \\
 N \times N & \xrightarrow{+} & N
 \end{array}$$

Такая стрелка существует в любой категории с объектом натуральных чисел, что выводится из теоремы о примитивной рекурсии с помощью следующего трюка („добавления фиктивной переменной“): надо требовать коммутативности таких диаграмм (изменения только во второй диаграмме)

$$\begin{array}{ccc}
 \langle id_N, 0_N \rangle \nearrow & N \times N & \\
 N & \downarrow \times & \\
 \searrow 0_N & N &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 N \times N & \xrightarrow{id_N \times S} & N \times N \\
 \langle pr_1, pr_2, \times \rangle \downarrow & & \downarrow \times \\
 N \times N \times N & \xrightarrow{+ \circ \langle pr_1, pr_3 \rangle} & N
 \end{array}$$

Упражнение 14.26. Попробуйте доказать существование стрелки умножения, не используя теорему о примитивной рекурсии.

Упражнение 14.27. Докажите (хотя бы в **Set**), что умножение ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно относительно сложения.

Замечание 14.28. Способ определять функцию предшествования с помощью итерации придумал Клини, сидя под наркозом у зубного врача. Наркоз тогда делали закисью азота (веселящим газом). Когда он показал решение Чёрчу, тот сказал „Но тогда мы можем определить любую вычислимую функцию!“ (имелось в виду, определить в лямбда-исчислении). В этот момент родился тезис Чёрча. История взята из статьи Барендрегта к юбилею Чёрча: Varendregt “The impact of the lambda calculus”.

Глава 15

Исчисление высказываний

Предупреждение. Мне кажется, что я в этой главе ничего не придумывал, а скопировал из прочитанного. Но где я всё это читал, могу и не вспомнить. Где вспомню, буду давать ссылки.

15.1 Интуиционистское исчисление высказываний

Определение 15.1. Пусть у нас есть некий набор исходных, или *атомарных высказываний* $P, Q, R \dots$ (наподобие $2 \times 2 = 4$, $1 < 0$ и т. п., они не обязаны все быть верными).

Высказывания, или *формулы* строятся из атомарных $P, Q, R \dots$, а также символов \top (*истина*) и \perp (*ложь*) с помощью *логических связок* \wedge (*конъюнкция*), \vee (*дизъюнкция*), \Rightarrow (*импликация*), \neg (*отрицание*), \Leftrightarrow (*логическая равносильность, или логическая эквивалентность*).

Произвольные формулы будем обозначать буквами $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$. Таким образом

- $P, Q, R \dots$ являются формулами;
- \top, \perp являются формулами;
- $(\neg\alpha)$ („неверно α “) является формулой, если α является формулой;

- $(\alpha \wedge \beta)$ („ α и β “), $(\alpha \Rightarrow \beta)$ („если α , то β “), $(\alpha \vee \beta)$ („ α или β “), $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ („ α равносильно β “) являются формулами, если α и β являются формулами;
- других формул нет.

Предполагается, что символы \top, \perp не содержатся среди $P, Q, R \dots$

Пример 15.2. Пример формулы

$$((((\neg Q) \Leftrightarrow \perp) \wedge P) \Rightarrow R)$$

Соглашение 15.3. Чтобы уменьшить число скобок, введём следующие соглашения

- Внешние скобки никогда не пишутся;
- Скобки вокруг $\neg\alpha$ никогда не пишутся;
- Связки \wedge, \vee связывают сильнее, чем $\Rightarrow, \Leftrightarrow$. Это значит, например, что формулу вида $((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\gamma \vee \delta))$ будем записывать как $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma \vee \delta$

Формула из примера 15.2 теперь выглядит так

$$(\neg Q \Leftrightarrow \perp) \wedge P \Rightarrow R$$

Сначала мы рассмотрим исчисление *натурального вывода*, в котором почти нет аксиом, но много правил вывода. Для каждой логической связки есть, грубо говоря, два правила вывода — одно позволяет вводить эту логическую связку, а второе от неё избавляться. Для связки \wedge соответствующие правила называются $\wedge I$ (от слова introduction) и $\wedge E$ (elimination).

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} (\wedge I) \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} (\wedge E_1) \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} (\wedge E_2)$$

Мы видим, что их три, но считается, что правило $\wedge E$ присутствует в двух вариантах. На самом деле, это скорее ещё не правила, а некие схемы правил, поскольку сами символы α, β не являются формулами,

вместо них надо подставлять произвольные формулы и получать правила. Если вместо α подставить $P \Rightarrow Q$, а вместо β подставить R , мы получим один из примеров правила $\wedge I$

$$\frac{P \Rightarrow Q \quad R}{(P \Rightarrow Q) \wedge R}$$

Пример 15.4.

$$\frac{\frac{P \wedge Q^{(1)}}{Q} \wedge E_2 \quad \frac{P \wedge Q^{(1)}}{P} \wedge E_1}{Q \wedge P} \wedge I$$

Это пример натурального вывода. Из посылки (гипотезы, допущения) $P \wedge Q$ мы вывели формулу $Q \wedge P$. По техническим причинам (которые скоро станут ясны) посылка помечена верхним индексом ⁽¹⁾. Справа от каждой черты указано название применённого правила вывода. Практически удобнее записывать натуральные выводы не в виде деревьев, а в виде таблиц Фитча

1	$P \wedge Q$	
2	Q	$\wedge E_2, 1$
3	P	$\wedge E_1, 1$
4	$Q \wedge P$	$\wedge I, 2, 3$

В первой строке записана посылка. Каждая следующая строка получена из предыдущих с помощью одного из правил вывода, справа указано название правила и номера строк, к которым оно применялось.

Правила вывода для импликации выглядят сложнее

$$\frac{\begin{array}{c} [\alpha] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta} (\Rightarrow I) \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} (\Rightarrow E, MP)$$

В посылке правила $\Rightarrow I$ стоит не формула, а некоторый вывод формулы β из гипотезы α . Правило утверждает следующее: если мы можем

вывести β из α , мы можем считать доказанной импликацию $\alpha \Rightarrow \beta$. Гипотеза α при этом, как говорят, *закрывается* и полученный вывод формулы $\alpha \Rightarrow \beta$ от этой гипотезы уже не зависит, что изображается заключением α в квадратные скобки.

Правило $\Rightarrow E$, оно же Modus ponens (MP), утверждает следующее: если мы доказали $\alpha \Rightarrow \beta$ и доказали α , мы можем считать доказанной β .

Пример 15.5. Вывод формулы $P \wedge Q \Rightarrow P$

$$\frac{\frac{P \wedge Q^{(1)}}{P} \wedge E_1}{P \wedge Q \Rightarrow P} \Rightarrow I, (1)$$

Нижняя строка получена применением правила $\Rightarrow I$

$$\frac{\begin{array}{c} [P \wedge Q] \\ \vdots \\ P \end{array}}{P \wedge Q \Rightarrow P} \Rightarrow I$$

При этом посылка $P \wedge Q$ закрывается и окончательный вывод от этой посылки уже не зависит, что мы будем отмечать указанием её номера в том месте, где она закрылась (а квадратных скобок ставить не будем)

$$\frac{\begin{array}{c} P \wedge Q^{(1)} \\ \vdots \\ P \end{array}}{P \wedge Q \Rightarrow P} \Rightarrow I, (1)$$

В виде таблицы Фитча соответствующий вывод удобно записывать так

$$\begin{array}{l|l} 1 & P \wedge Q \\ 2 & P \quad \wedge E_1, 1 \\ 3 & P \wedge Q \Rightarrow P \quad \Rightarrow I, 1-2 \end{array}$$

справа от $\Rightarrow I$ стоит указание на подвывод, занимающий строки 1–2.

Пример 15.6. Вывод формулы $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$

1	P							
2	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 1em;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">2</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; border-bottom: 1px solid black;">Q</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">3</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$P \wedge Q$</td> <td style="padding-left: 10px;">$\wedge I, 1, 2$</td> </tr> </table>	2	Q		3	$P \wedge Q$	$\wedge I, 1, 2$	
2	Q							
3	$P \wedge Q$	$\wedge I, 1, 2$						
4	$Q \Rightarrow (P \wedge Q)$	$\Rightarrow I, 2-3$						
5	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$	$\Rightarrow I, 1-4$						

и в виде дерева

$$\frac{\frac{\frac{P^{(1)} \quad Q^{(2)}}{P \wedge Q} \wedge I}{Q \Rightarrow P \wedge Q} \Rightarrow I, (2)}{P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)} \Rightarrow I, (1)$$

Две посылки закрываются по очереди.

Пример 15.7. Вывод формулы $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$

1	$(P \Rightarrow Q) \wedge P$	
2	$P \Rightarrow Q$	$\wedge E_1, 1$
3	P	$\wedge E_2, 1$
4	Q	$MP, 2, 3$
5	$(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$	$\Rightarrow I, 1-4$

и в виде дерева

$$\frac{\frac{\frac{(P \Rightarrow Q) \wedge P^{(1)}}{P \Rightarrow Q} \wedge E_1 \quad \frac{\frac{(P \Rightarrow Q) \wedge P^{(1)}}{P} \wedge E_2}{Q} MP}{(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q} \Rightarrow I, (1)}$$

Пример 15.8. Вывод формулы $P \Rightarrow P$

$$\begin{array}{l} 1 \quad \begin{array}{|l} P \\ \hline \end{array} \\ 2 \quad P \Rightarrow P \quad \Rightarrow \text{I, 1-1} \end{array}$$

Здесь под номером 1 стоит вывод из одной строки, посылка которого является его же заключением. В виде дерева то же самое выглядит так

$$\frac{P^{(1)}}{P \Rightarrow P} \Rightarrow \text{I, (1)}$$

Пример 15.9. Вывод формулы $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

$$\begin{array}{l} 1 \quad \begin{array}{|l} P \\ \hline \end{array} \\ 2 \quad \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} Q \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ 3 \quad \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} P \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \text{R, 1} \\ 4 \quad \begin{array}{|l} Q \Rightarrow P \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \text{I, 2-3} \\ 5 \quad P \Rightarrow (Q \Rightarrow P) \quad \Rightarrow \text{I, 1-4} \end{array}$$

Здесь в строке 3 посылка P просто переписана, что отмечается буквой R (reiteration или repeat). В виде дерева выглядит корявее, посылка Q вообще не видна

$$\frac{\frac{P^{(1)}}{Q \Rightarrow P} \Rightarrow \text{I}}{P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)} \Rightarrow \text{I, (1)}$$

Пример 15.10. Вывод $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

1	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$															
2	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$P \Rightarrow Q$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">P</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$Q \Rightarrow R$</td> <td style="padding-left: 10px;">MP, 1, 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td style="padding-left: 10px;">MP, 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">R</td> <td style="padding-left: 10px;">MP, 4, 5</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$P \Rightarrow R$</td> <td style="padding-left: 10px;">\RightarrowI, 3–6</td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	$P \Rightarrow Q$		<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">P</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$Q \Rightarrow R$</td> <td style="padding-left: 10px;">MP, 1, 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td style="padding-left: 10px;">MP, 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">R</td> <td style="padding-left: 10px;">MP, 4, 5</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$P \Rightarrow R$</td> <td style="padding-left: 10px;">\RightarrowI, 3–6</td> </tr> </table>	P		$Q \Rightarrow R$	MP, 1, 3	Q	MP, 2, 3	R	MP, 4, 5	$P \Rightarrow R$	\Rightarrow I, 3–6		
$P \Rightarrow Q$																
<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">P</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$Q \Rightarrow R$</td> <td style="padding-left: 10px;">MP, 1, 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td style="padding-left: 10px;">MP, 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">R</td> <td style="padding-left: 10px;">MP, 4, 5</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$P \Rightarrow R$</td> <td style="padding-left: 10px;">\RightarrowI, 3–6</td> </tr> </table>	P		$Q \Rightarrow R$	MP, 1, 3	Q	MP, 2, 3	R	MP, 4, 5	$P \Rightarrow R$	\Rightarrow I, 3–6						
P																
$Q \Rightarrow R$	MP, 1, 3															
Q	MP, 2, 3															
R	MP, 4, 5															
$P \Rightarrow R$	\Rightarrow I, 3–6															
3																
4																
5																
6																
7																
8	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	\Rightarrow I, 2–7														
9	$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$	\Rightarrow I, 1–8														

Пример 15.11. Неверный вывод произвольной формулы P

1	P	
2	P	R, 1

Для вывода строки 2 нельзя использовать строку 1, поскольку она находится во вложенном подвыводе и зависит от введённых в нём посылок.

Замечание 15.12. Данное изложение ставит целью научить практической работе. Строгое определение натурального вывода в форме деревьев можно найти во многих учебниках математической логики. Надо понимать следующие вещи: натуральный вывод строится, начиная с гипотез, с помощью правил вывода. Некоторые гипотезы по ходу дела могут закрываться. Доказать формулу – значит дать её вывод, в котором все гипотезы закрыты. Строгое определение таблиц Фитча можно найти, например, в статье Geuvers, Nederpelt “Rewriting for Fitch style natural deductions”. Там же есть некоторые результаты, интересные логикам (устранение сечения на языке таблиц Фитча). Нетрудно найти и книгу самого Фитча (хотя в отвратительном качестве) Fitch “Elements of Combinatory Logic”.

Таблица 15.1: Интуиционистское исчисление высказываний, натуральный вывод.

$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} (\wedge I)$	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} (\wedge E_1) \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} (\wedge E_2)$
$\frac{\begin{array}{c} [\alpha] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta} (\Rightarrow I)$	$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} (\Rightarrow E, MP)$
$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} (\vee I_1) \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} (\vee I_2)$	$\frac{\begin{array}{c} [\alpha] \quad [\beta] \\ \vdots \quad \vdots \\ \alpha \vee \beta \quad \gamma \quad \gamma \end{array}}{\gamma} (\vee E)$
$\frac{\begin{array}{c} [\alpha] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \alpha} (\neg I)$	$\frac{\neg \alpha \quad \alpha}{\perp} (\neg E)$
$\top (\top I)$	$\frac{\perp}{\alpha} (\perp E)$
$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \alpha}{\alpha \Leftrightarrow \beta} (\Leftrightarrow I)$	$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta} (\Leftrightarrow E_1) \quad \frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha} (\Leftrightarrow E_2)$

Определение 15.13. *Интуиционистское исчисление высказываний* в форме натурального вывода задаётся правилами, приведёнными в Таблице 15.1.

- Правило $\neg I$ (*правило приведения к абсурду*) утверждает „Если из α выводится ложь, можно считать доказанным, что α неверно (то есть, верно $\neg\alpha$)“. Посылка α при этом закрывается, полученный вывод формулы $\neg\alpha$ от неё уже не зависит.
- Правило $\neg E$ утверждает „Если мы доказали противоречие (то есть какую-то формулу вместе с её отрицанием), мы фактически доказали ложь“.
- Правило $\top I$ является аксиомой, то есть правилом с нулевым числом посылок. Оно утверждает, что формулу \top можно считать доказанной всегда.
- Правило $\perp E$ утверждает „Если мы доказали ложь, можно считать доказанным что угодно (уже как бы всё равно)“.
- Правил $\top E$ и $\perp I$ нет.
- Правило $\vee E$ можно назвать *правилом разбора случаев*. Оно утверждает, что если доказано $\alpha \vee \beta$, причём из α можно вывести γ и из β можно вывести γ , то γ можно считать доказанным. Посылки α и β после применения этого правила закрываются.

Пример 15.14. Вывод формулы $P \vee Q \Rightarrow Q \vee P$

1	$P \vee Q$	
2	P	
3	$Q \vee P$	$\vee I_2, 2$
4	Q	
5	$Q \vee P$	$\vee I_1, 4$
6	$Q \vee P$	$\vee E, 1, 2-3, 4-5$
7	$P \vee Q \Rightarrow Q \vee P$	$\Rightarrow I, 1-6$

и в виде дерева

$$\frac{\frac{P \vee Q^{(1)} \quad \frac{P^{(2)}}{Q \vee P} \vee I_2 \quad \frac{Q^{(3)}}{Q \vee P} \vee I_1}{Q \vee P} \vee E, (2), (3)}{P \vee Q \Rightarrow Q \vee P} \Rightarrow I, (1)$$

Пример 15.15. Вывод формулы $P \Rightarrow \top$

$$\begin{array}{l} 1 \quad | \quad P \\ \quad | \quad \hline 2 \quad | \quad \top \quad \top I \\ 3 \quad P \Rightarrow \top \quad \Rightarrow I, 1-2 \end{array}$$

и в виде дерева (посылку не видно, вывод начинается с аксиомы $\top I$)

$$\frac{\top}{P \Rightarrow \top} \Rightarrow I$$

Пример 15.16. Вывод формулы $\neg\neg(P \vee \neg P)$

$$\begin{array}{l} 1 \quad | \quad \neg(P \vee \neg P) \\ \quad | \quad \hline 2 \quad | \quad | \quad P \\ \quad | \quad | \quad \hline 3 \quad | \quad | \quad P \vee \neg P \quad \vee I_1, 2 \\ 4 \quad | \quad | \quad \perp \quad \neg E, 1, 3 \\ 5 \quad | \quad \neg P \quad \neg I, 2-4 \\ 6 \quad | \quad P \vee \neg P \quad \vee I_2, 5 \\ 7 \quad | \quad \perp \quad \neg E, 1, 6 \\ 8 \quad \neg\neg(P \vee \neg P) \quad \neg I, 1-7 \end{array}$$

Упражнение 15.17. Докажите следующие формулы.

1. $P \Rightarrow P$

2. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

3. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

4. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

5. $P \Leftrightarrow P \wedge P$

6. $P \Leftrightarrow P \vee P$

7. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

8. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

9. $(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$ (ассоциативность конъюнкции)

10. $(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$ (ассоциативность дизъюнкции)

11. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

12. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

13. $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

14. $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

15. $P \wedge \neg P \Leftrightarrow \perp$

16. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

17. $\neg P \Leftrightarrow (P \Rightarrow \perp)$

18. $\top \Leftrightarrow (\perp \Rightarrow \perp)$

19. $\neg \top \Leftrightarrow \perp$

20. $\neg \perp \Leftrightarrow \top$

21. $P \Rightarrow \top$

22. $\perp \Rightarrow P$

23. $\top \wedge P \Leftrightarrow P$

24. $(P \wedge Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$

$$25. (P \Rightarrow Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$$

$$26. (P \vee Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$

$$27. \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

$$28. \neg P \vee \neg Q \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

$$29. (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

$$30. (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q)$$

$$31. \neg\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q)$$

$$32. \neg\neg(P \vee \neg P)$$

$$33. \neg\neg(\neg\neg P \Rightarrow P)$$

$$34. P \Rightarrow \neg\neg P$$

$$35. \neg\neg\neg P \Leftrightarrow \neg P$$

$$36. P \wedge \neg P \Rightarrow Q$$

$$37. P \vee \neg P \Rightarrow (\neg\neg P \Rightarrow P)$$

Замечание 15.18. Кто читал мой черновик, я там неправильно выписал формулы 11 и 12 из предыдущего упражнения. Утешает, что никто из знакомых логиков ошибки не заметил:)

Замечание 15.19. Наш набор логических связок является избыточным. Можно ограничиться $\Rightarrow, \wedge, \vee, \perp$, а остальные связки вводить как сокращения

- $\alpha \Leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$
- $\neg\alpha \Leftrightarrow (\alpha \Rightarrow \perp)$
- $\top \Leftrightarrow (\perp \Rightarrow \perp)$

где знак \Leftrightarrow означает „является сокращением для“. При таком подходе правила для этих связок становятся *выводимыми правилами*, поясним это на примере. Правила $\neg I$ и $\neg E$ переходят в

$$\frac{[\alpha] \quad \vdots \quad \perp}{\alpha \Rightarrow \perp} \quad \frac{\alpha \Rightarrow \perp \quad \alpha}{\perp}$$

заклучения этих правил действительно выводимы из их посылок.

Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции позволяет нам писать формулы следующего вида

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$$

$$\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$$

экономя скобки. Можно ввести следующие удобные правила вывода

$$\frac{\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n}{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n} (\wedge I) \quad \frac{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n}{\alpha_j} (\wedge E_j)$$

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n} (\vee I_j) \quad \frac{[\alpha_1] \quad \vdots \quad \gamma \quad \dots \quad [\alpha_n] \quad \vdots \quad \gamma}{\gamma} (\vee E)$$

где $n \geq 2$, $1 \leq j \leq n$. Например, правила для \wedge при $n = 3$ выглядят так

$$\frac{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3} (\wedge I) \quad \frac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}{\alpha_1} \quad \frac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}{\alpha_2} \quad \frac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}{\alpha_3} (\wedge E)$$

Эти правила тоже выводимы, если понимать многократные конъюнкции и дизъюнкции как сокращения

- $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \Leftrightarrow (\dots ((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \dots) \wedge \alpha_n)$
- $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n \Leftrightarrow (\dots ((\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \dots) \vee \alpha_n)$

15.2 Классическое исчисление высказываний

Определение 15.20. *Классическое исчисление высказываний* получается из интуиционистского одним из трёх равносильных способов

- Добавлением бесконечного набора аксиом $\alpha \vee \neg\alpha$ (*закон исключённого третьего*, для каждой формулы α своя аксиома)
- Добавлением бесконечного набора аксиом $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$ (*закон двойного отрицания*)
- Добавлением нового правила вывода

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} (\neg\neg\text{E})$$

Замечание 15.21. Доказательства, использующие правило $\neg\neg\text{E}$, называют *доказательствами от противного*.

Замечание 15.22. Бесконечный набор аксиом, построенных по общей схеме (вроде $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$) логики так и называют *схемой аксиом*. Набор правил вывода, построенных по общей схеме (вроде $\neg\neg\text{E}$) обычно называют просто правилом вывода. Ну, что делать.

Пример 15.23. Допустим, мы добавили схему аксиом $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$. Выведем закон исключённого третьего (точнее, некоторый его пример)

1	$\neg(P \vee \neg P)$	
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;">P</div>	
3	$P \vee \neg P$	$\vee I_1, 2$
4	\perp	$\neg E, 1, 3$
5	$\neg P$	$\neg I, 2-4$
6	$P \vee \neg P$	$\vee I_2, 5$
7	\perp	$\neg E, 1, 6$
8	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	$\neg I, 1-7$
9	$\neg\neg(P \vee \neg P) \Rightarrow P \vee \neg P$	аксиома
10	$P \vee \neg P$	MP, 9, 8

Упражнение 15.24. Докажите следующие формулы, используя правило $\neg\neg E$

1. $P \vee \neg P$
2. $\neg\neg P \Rightarrow P$
3. $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$
4. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
5. $(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

Интуиционистское исчисление для нас главное. Везде, где мы будем говорить о выводах и выводимости, будет иметься в виду выводимость в интуиционистских, а не классических исчислениях, если специально не оговорено обратное.

15.3 Исчисление секвенций

Натуральные выводы удобны для практического выписывания доказательств, но их довольно трудно изучать. Поэтому вводятся различные *исчисления секвенций*. В этих исчислениях выводы устроены проще (но длиннее).

Определение 15.25. *Секвенцией* называется выражение вида

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$$

где формулы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называются *посылками секвенции* (*гипотезами, допущениями*), а формула β *заключением секвенции*. Допускаются также секвенции с нулевым числом посылок, они выглядят так

$$\vdash \beta$$

Содержательно, секвенция $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$ означает „из гипотез $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ можно вывести β “, а секвенция $\vdash \beta$ означает „можно доказать β без всяких допущений“. Мы часто будем обозначать секвенцию так

$$\Gamma \vdash \beta$$

где Γ – конечный (возможно, пустой) список формул, такие списки будем называть *контекстами*. Предупреждение: одна и та же формула может входить в контекст несколько раз. Например, список формул $P, P, Q \vee \neg Q$ является контекстом.

Определение 15.26. *Интуиционистское исчисление высказываний* в форме исчисления секвенций показано в Таблице 15.2. В этом исчислении выводятся секвенции. Есть новая схема аксиом (ax), новое правило вывода (weak, *правило ослабления*) и знакомые нам правила введения и удаления логических связок, записанные в секвенциальной форме (я только не стал выписывать правила для \Leftrightarrow).

Таблица 15.2: Интуиционистское исчисление высказываний, исчисление секвенций.

$\Gamma, \alpha \vdash \alpha$ (ax)	$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma, \beta \vdash \alpha}$ (weak)
$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}$ (\wedge I)	$\frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha}$ (\wedge E ₁) $\frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \beta}$ (\wedge E ₂)
$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta}$ (\Rightarrow I)	$\frac{\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}$ (\Rightarrow E, MP)
$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$ (\vee I ₁) $\frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$ (\vee I ₂)	$\frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}$ (\vee E)
$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \alpha}$ (\neg I)	$\frac{\Gamma \vdash \neg \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \perp}$ (\neg E)
$\Gamma \vdash \top$ (\top I)	$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}$ (\perp E)

Пример 15.27. Вывод формулы $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{P \vdash P \text{ ax}}{P, Q \vdash P} \text{ weak} \quad \frac{P, Q \vdash Q \text{ ax}}{P, Q \vdash P \wedge Q} \wedge \text{I} \\
 \frac{P, Q \vdash P \wedge Q}{P \vdash Q \Rightarrow P \wedge Q} \Rightarrow \text{I} \\
 \frac{P \vdash Q \Rightarrow P \wedge Q}{\vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)} \Rightarrow \text{I}
 \end{array}$$

Вывод начинается с аксиом $P \vdash P$ и $P, Q \vdash Q$. Если сравнить с таблицей Фитча

$$\begin{array}{l|l}
 1 & P \\
 \hline
 2 & | Q \\
 & \hline
 3 & | P \wedge Q \quad \wedge I, 1, 2 \\
 & | \\
 4 & | Q \Rightarrow (P \wedge Q) \quad \Rightarrow I, 2-3 \\
 & | \\
 5 & P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q) \quad \Rightarrow I, 1-4
 \end{array}$$

можно понять принцип построения секвенциального вывода. К каждой строке таблицы Фитча припишем слева список (контекст) из всех гипотез, не закрытых к этому моменту

$$\begin{array}{l}
 1 \quad P \vdash P \\
 2 \quad P, Q \vdash Q \\
 3 \quad P, Q \vdash P \wedge Q \\
 4 \quad P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q) \\
 5 \quad \vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)
 \end{array}$$

и расположим строки в виде дерева. Аксиомы, с которых начинается секвенциальный вывод, соответствуют введению гипотез в натуральном выводе, правило $\Rightarrow I$ удаляет (закрывает) одну гипотезу из контекста. Таким образом, в секвенциальном исчислении вывод строится, начинается с аксиом, с помощью правил вывода. Никаких номеров закрываемых посылок указывать не надо (все посылки, не закрытые к данному моменту, явно указаны в контексте). В принципе, можно и секвенциальные выводы записывать в виде таблиц, хотя обычно так не делают (я встречал исключения):

1	$P \vdash P$	ax
2	$P, Q \vdash P$	weak, 1
3	$P, Q \vdash Q$	ax
4	$P, Q \vdash P \wedge Q$	\wedge I, 2, 3
5	$P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$	\Rightarrow I, 4
6	$\vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$	\Rightarrow I, 5

Замечание 15.28. Часто (в силу традиции) контексты определяют как списки формул без повторений или даже конечные множества формул (неупорядоченные). Это очень неестественно с категорной точки зрения, как мы скоро увидим. К тому же просто усложняет выводы. Например, мы можем вывести формулу $P \Rightarrow (P \Rightarrow P)$ простым способом

$$\frac{\frac{P, P \vdash P}{P \vdash P \Rightarrow P} \Rightarrow \text{I}}{\vdash P \Rightarrow (P \Rightarrow P)} \Rightarrow \text{I}$$

если же разрешены только контексты без повторений, придётся лишний раз использовать правило ослабления

$$\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{\vdash P \Rightarrow P} \Rightarrow \text{I}}{P \vdash P \Rightarrow P} \text{weak}}{\vdash P \Rightarrow (P \Rightarrow P)} \Rightarrow \text{I}$$

Замечание 15.29. Равносильность этого исчисления традиционным (с неупорядоченными контекстами без повторений) сравнительно просто вывести из теорем следующего раздела. Теперь вопрос, где я всё это взял? Мне кажется, такую или близкую формализацию логики я видел в литературе по теории типов Мартин-Лёфа (вряд ли я сам её придумал).

Таблица 15.3: Интуиционистское исчисление высказываний, специальная форма.

$\alpha \vdash \alpha$ (id)	$\frac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$ (cut)
$\frac{\gamma \vdash \alpha \quad \gamma \vdash \beta}{\gamma \vdash \alpha \wedge \beta}$ (\wedge I)	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ (\wedge E ₁) $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$ (\wedge E ₂)
$\frac{\gamma \wedge \alpha \vdash \beta}{\gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta}$ (\Rightarrow I)	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha \vdash \beta$ (\Rightarrow E)
$\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ (\vee I ₁) $\beta \vdash \alpha \vee \beta$ (\vee I ₂)	$\frac{\alpha \vdash \gamma \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vee \beta \vdash \gamma}$ (\vee E)
$\alpha \vdash \top$ (\top I)	$\perp \vdash \alpha$ (\perp E)

15.4 Специальная форма исчисления высказываний

Мы формализуем интуиционистское исчисление высказываний в некоторой специальной форме, которая позволит нам установить тесную связь логики и теории категорий.

Определение 15.30. Ещё одна формализация интуиционистского исчисления высказываний приведена в Таблице 15.3 (будем, пожалуй, называть её *специальной формой исчисления высказываний*). В этом исчислении выводятся только секвенции простейшего вида

$$\alpha \vdash \beta$$

(посылка ровно одна). Схема аксиом id и правило cut (*правило сечения*) выражают рефлексивность и транзитивность выводимости. Есть две схемы аксиом $\wedge E$ и две схемы аксиом $\vee I$, правило $\Rightarrow E$ тоже становится схемой аксиом.

Связь этого исчисления с обычным исчислением секвенций выражают следующие две теоремы.

Теорема 15.31. *Если в специальном исчислении с Таблицы 15.3 выводится секвенция $\alpha \vdash \beta$, то она выводится и в обычном исчислении секвенций (Таблица 15.2).*

Доказательство. Достаточно доказать, что все аксиомы и правила с Таблицы 15.3 выводимы в исчислении секвенций. Рассмотрим для примера правило cut

$$\frac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma} \text{ (cut)}$$

Покажем, что его заключение выводится из его посылок в исчислении секвенций. Из $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \gamma$ мы можем вывести $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$ и $\vdash \beta \Rightarrow \gamma$

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\vdash \alpha \Rightarrow \beta} \Rightarrow I \quad \frac{\beta \vdash \gamma}{\vdash \beta \Rightarrow \gamma} \Rightarrow I$$

Затем найдём натуральный вывод формулы γ из посылки α , считая $\alpha \Rightarrow \beta$ и $\beta \Rightarrow \gamma$ уже доказанными

1	$\alpha \Rightarrow \beta$	
2	$\beta \Rightarrow \gamma$	
3	α	
4	β	MP, 1, 3
5	γ	MP, 2, 4

и в виде дерева

$$\frac{\frac{\frac{[\beta]}{\vdots} \gamma}{\beta \Rightarrow \gamma} \Rightarrow \text{I}}{\gamma} \quad \frac{\frac{\frac{[\alpha]}{\vdots} \beta}{\alpha \Rightarrow \beta} \Rightarrow \text{I} \quad \alpha^{(1)}}{\beta} \text{MP}}{\gamma} \text{MP}$$

Приписываем слева к каждой строке посылки, не закрытые к данному моменту, причём первые две строки считаем не гипотезами, а доказанными теоремами (и приписываем к ним пустой контекст)

- 1 $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$
- 2 $\vdash \beta \Rightarrow \gamma$
- 3 $\alpha \vdash \alpha$
- 4 $\alpha \vdash \beta$
- 5 $\alpha \vdash \gamma$

и получаем секвенциальный вывод

- 1 $\alpha \vdash \beta$
- 2 $\beta \vdash \gamma$
- 3 $\alpha \vdash \alpha$ ax
- 4 $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$ $\Rightarrow \text{I}, 1$
- 5 $\vdash \beta \Rightarrow \gamma$ $\Rightarrow \text{I}, 2$
- 6 $\alpha \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ weak, 4
- 7 $\alpha \vdash \beta \Rightarrow \gamma$ weak, 5
- 8 $\alpha \vdash \beta$ MP, 6, 3
- 9 $\alpha \vdash \gamma$ MP, 7, 8

и в виде дерева

$$\frac{\frac{\frac{\beta \vdash \gamma}{\vdash \beta \Rightarrow \gamma} \Rightarrow \text{I}}{\alpha \vdash \beta \Rightarrow \gamma} \text{weak}}{\alpha \vdash \gamma} \text{MP} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\alpha \vdash \beta}{\vdash \alpha \Rightarrow \beta} \Rightarrow \text{I}}{\alpha \vdash \alpha \Rightarrow \beta} \text{weak}}{\alpha \vdash \beta} \text{MP}}{\alpha \vdash \alpha \text{ ax}} \text{MP}$$

И так же проверяются все остальные правила (некоторые проще). \square

Теорема 15.32. *Если в исчислении секвенций (Таблица 15.2) выводится секвенция $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$, то в исчислении с Таблицы 15.3 выводится секвенция $\top \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \vdash \beta$.*

Замечание: если контекст непустой, выводимость $\top \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \vdash \beta$ равносильна выводимости $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \vdash \beta$, но первый вариант технически удобнее, поскольку применим и к пустым контекстам (из $\vdash \beta$ получается $\top \vdash \beta$).

Доказательство. Достаточно доказать, что все аксиомы и правила исчисления секвенций становятся выводимыми в исчислении с Таблицы 15.3, если заменить все секвенции $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$ на $\top \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \vdash \beta$.

Замечание: правила $\neg \text{I}$ и $\neg \text{E}$ проверять не надо, $\neg \alpha$ понимается как сокращение для $\alpha \Rightarrow \perp$.

Рассмотрим правило ослабления

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma, \beta \vdash \alpha} \text{(weak)}$$

Если $\Gamma = \alpha_1, \dots, \alpha_n$, то это правило переходит в следующее

$$\frac{\top \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \vdash \alpha}{\top \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \beta \vdash \alpha}$$

Обозначим для краткости $\top \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ через γ , тогда правило будет выглядеть так

$$\frac{\gamma \vdash \alpha}{\gamma \wedge \beta \vdash \alpha}$$

и его заключение действительно выводится из посылки следующим образом

$$\frac{\gamma \wedge \beta \vdash \gamma \quad (\wedge E_1) \quad \gamma \vdash \alpha}{\gamma \wedge \beta \vdash \alpha} \text{ cut}$$

Выводимость остальных правил тоже проверяется легко, за единственным (зато действительно трудным) исключением правила $\vee E$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \delta \quad \Gamma, \beta \vdash \delta}{\Gamma \vdash \delta} (\vee E)$$

Сопоставим контексту Γ формулу γ так же, как мы делали выше. Правило примет вид

$$\frac{\gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \gamma \wedge \alpha \vdash \delta \quad \gamma \wedge \beta \vdash \delta}{\gamma \vdash \delta}$$

Вывод заключения этого правила из его посылок занимает всю следующую страницу. Между прочим, он примерно соответствует построению изоморфизма $(A + B) \times C \cong C \times A + C \times B$ в декартово замкнутых категориях, но это (возможно) станет ясным только после прочтения следующего раздела этой главы.

Замечание (для тех, кто будет разбираться): подвыводы 5-10 и 11-16 полностью симметричны друг другу. \square

Замечание 15.33. „Специальное исчисление“ взято из книги Lambek, Scott “Introduction to Higher Order Categorical Logic”.

1	$\gamma \vdash \alpha \vee \beta$	
2	$\gamma \wedge \alpha \vdash \delta$	
3	$\gamma \wedge \beta \vdash \delta$	
4	$(\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta) \vdash \delta$	$\vee E, 2, 3$
5	$\alpha \wedge \gamma \vdash \gamma$	$\wedge E_2$
6	$\alpha \wedge \gamma \vdash \alpha$	$\wedge E_1$
7	$\alpha \wedge \gamma \vdash \gamma \wedge \alpha$	$\wedge I, 5, 6$
8	$\gamma \wedge \alpha \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\vee I_1$
9	$\alpha \wedge \gamma \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	cut, 7, 8
10	$\alpha \vdash \gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\Rightarrow I, 9$
11	$\beta \wedge \gamma \vdash \gamma$	$\wedge E_2$
12	$\beta \wedge \gamma \vdash \beta$	$\wedge E_1$
13	$\beta \wedge \gamma \vdash \gamma \wedge \beta$	$\wedge I, 11, 12$
14	$\gamma \wedge \beta \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\vee I_2$
15	$\beta \wedge \gamma \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	cut, 13, 14
16	$\beta \vdash \gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\Rightarrow I, 15$
17	$\alpha \vee \beta \vdash \gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\vee E, 10, 16$
18	$\gamma \vdash \gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	cut, 1, 17
19	$\gamma \vdash \gamma$	id
20	$\gamma \vdash (\gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)) \wedge \gamma$	$\wedge I, 18, 19$
21	$(\gamma \Rightarrow (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)) \wedge \gamma \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	$\Rightarrow E$
22	$\gamma \vdash (\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)$	cut, 20, 21
23	$\gamma \vdash \delta$	cut, 22, 4

15.5 Бидеккартово замкнутые категории

Определение 15.34. Будем называть категорию *бидеккартово замкнутой* (bicartesian closed), если она декартово замкнута и имеет конечные копроизведения. Иными словами, категория бидеккартово замкнута, если в ней есть терминальный объект, произведения пар объектов, начальный объект, копроизведения пар объектов и экспоненты. В дальнейшем, говоря о таких категориях, мы всегда будем предполагать, что для любой пары объектов выбраны некоторые произведения, копроизведения и экспонента, а также выбраны некоторые начальный и терминальный объект (из всех возможных).

Теорема 15.35. Категория является бидеккартово замкнутой в том и только том случае, если в ней выполнены равенства, показанные в Таблице 15.4. Иными словами, бидеккартово замкнутая категория задаётся следующим набором данных (помимо перечисленных в определении 1.1):

- Объект 1 и для любого объекта A стрелка $!_A: A \rightarrow 1$.
- Для любых объектов A и B некоторый объект $A \times B$ и стрелки $pr_1^{A \times B}: A \times B \rightarrow A$ и $pr_2^{A \times B}: A \times B \rightarrow B$.
- Для любых стрелок $f: C \rightarrow A$ и $g: C \rightarrow B$ стрелка $\langle f, g \rangle: C \rightarrow A \times B$.
- Для любых объектов A и B некоторый объект B^A и стрелка $ev_{A,B}: B^A \times A \rightarrow B$.
- Для любой стрелки $f: C \times A \rightarrow B$ стрелка $\Lambda(f): C \rightarrow B^A$.
- Объект 0 и для любого объекта A стрелка $\square_A: 0 \rightarrow A$.
- Для любых объектов A и B некоторый объект $A + B$ и стрелки $k_1^{A+B}: A \rightarrow A + B$ и $k_2^{A+B}: B \rightarrow A + B$.
- Для любых стрелок $f: A \rightarrow C$ и $g: B \rightarrow C$ стрелка $[f, g]: A + B \rightarrow C$.

При этом должны выполняться равенства, показанные в Таблице 15.4.

Таблица 15.4: Аксиоматика бидекартово замкнутых категорий.

1	$\frac{f: A \rightarrow 1}{f = !_A}$
2	$\frac{f: C \rightarrow A \quad g: C \rightarrow B}{pr_1 \circ \langle f, g \rangle = f}$
3	$\frac{f: C \rightarrow A \quad g: C \rightarrow B}{pr_2 \circ \langle f, g \rangle = g}$
4	$\frac{h: C \rightarrow A \times B}{h = \langle pr_1 \circ h, pr_2 \circ h \rangle}$
5	$\frac{f: C \times A \rightarrow B}{f = ev \circ (\Lambda(f) \times id_A)}$
6	$\frac{g: C \rightarrow B^A}{g = \Lambda(ev \circ (g \times id_A))}$
7	$\frac{f: 0 \rightarrow A}{f = \square_A}$
8	$\frac{f: A \rightarrow C \quad g: B \rightarrow C}{[f, g] \circ k_1 = f}$
9	$\frac{f: A \rightarrow C \quad g: B \rightarrow C}{[f, g] \circ k_2 = g}$
10	$\frac{h: A + B \rightarrow C}{h = [h \circ k_1, h \circ k_2]}$

Доказательство. Основная часть уже доказана (Теорема 13.1), а остаток предлагаю доказать желающим в качестве упражнения. \square

Определение 15.36. Категория \mathbf{BiCCC} имеет в качестве объектов малые бидекартново замкнутые категории, а протоморфизмы – это функторы, сохраняющие структуру. Точнее, функтор $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ является протоморфизмом, если

- $F(1) = 1$
- $F(0) = 0$
- $F(A \times B) = F(A) \times F(B)$
- $F(pr_1^{A \times B}) = pr_1^{F(A) \times F(B)}$
- $F(pr_2^{A \times B}) = pr_2^{F(A) \times F(B)}$
- $F(A + B) = F(A) + F(B)$
- $F(k_1^{A+B}) = k_1^{F(A)+F(B)}$
- $F(k_2^{A+B}) = k_2^{F(A)+F(B)}$
- $F(B^A) = F(B)^{F(A)}$
- $F(ev_{A,B}) = ev_{F(A),F(B)}$

для любых $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{K}_1)$.

Упражнение 15.37. Проверьте, что такие функторы сохраняют также операции $\langle f, g \rangle$, $[f, g]$, $\Lambda(f)$ и стрелки $!_A$, \square_A .

Теорема 15.38. Возьмём функтор $\mathbf{Ob}: \mathbf{BiCCC} \rightarrow \mathbf{Set}$, который по каждой \mathbf{K} выдаёт множество её объектов $\mathbf{Ob}(\mathbf{K})$. У этого функтора есть левый сопряжённый $\mathbf{Free} \dashv \mathbf{Ob}$

$$\mathbf{Set} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{Free}} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathbf{BiCCC} \\ \mathbf{Ob}$$

Доказательство. Пусть дано некоторое множество $M = \{P, Q, R, \dots\}$. В качестве $\text{Free}(M)$ возьмём свободную бидекартово замкнутую категорию со множеством образующих M , которую сейчас и определим. Объектами $\text{Free}(M)$ будут формулы, построенные из атомарных высказываний P, Q, R, \dots согласно определению 15.1. Содержательно, в этой категории $\alpha \wedge \beta$ будет произведением $\alpha \times \beta$, $\alpha \vee \beta$ будет копроизведением $\alpha + \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$ будет экспонентой β^α , \top будет 1, \perp будет 0.

Определим множество *термов* следующим образом

- $id_\alpha, !_\alpha, \square_\alpha, pr_1^{\alpha \wedge \beta}, pr_2^{\alpha \wedge \beta}, k_1^{\alpha \vee \beta}, k_2^{\alpha \vee \beta}, ev_{\alpha, \beta}$ являются термами (для любых α, β);
- $f \circ g$ является термом, если f и g являются термами;
- $\langle f, g \rangle$ является термом, если f и g являются термами;
- $[f, g]$ является термом, если f и g являются термами;
- $\Lambda(f)$ является термом, если f является термом;
- других термов нет.

Термы – это как бы названия стрелок. Далеко не все термы правильно построены. Например, терм $\square_\beta \circ !_\alpha$ не обозначает никакой стрелки, поскольку по смыслу должно быть $!_\alpha: \alpha \rightarrow \top$ и $\square_\beta: \perp \rightarrow \beta$, поэтому композицию брать нельзя (конец первой стрелки не совпадает с началом второй).

Множество *правильно построенных термов* задаётся правилами, выписанными в Таблице 15.5. С помощью этих правил выводятся выражения вида $f: \alpha \rightarrow \beta$, которые можно читать „ f является правильно построенным термом, обозначающим стрелку из α в β “.

Пример: терм $\langle pr_2^{P \wedge Q}, pr_1^{P \wedge Q} \rangle$ правильно построен, потому что

$$\frac{pr_2^{P \wedge Q}: P \wedge Q \rightarrow Q \quad pr_1^{P \wedge Q}: P \wedge Q \rightarrow P}{\langle pr_2^{P \wedge Q}, pr_1^{P \wedge Q} \rangle: P \wedge Q \rightarrow Q \wedge P}$$

Заметим, что правила с Таблицы 15.5 точно соответствуют правилам специального исчисления секвенций (Таблица 15.3). Это значит, что правильно построенные термы взаимно однозначно соответствуют выводам в специальном исчислении секвенций. Терм $\langle pr_2^{P \wedge Q}, pr_1^{P \wedge Q} \rangle$ соответствует выводу

Таблица 15.5: Правильно построенные термы.

$id_\alpha: \alpha \rightarrow \alpha$	$\frac{f: \alpha \rightarrow \beta \quad g: \beta \rightarrow \gamma}{g \circ f: \alpha \rightarrow \gamma}$
$\frac{f: \gamma \rightarrow \alpha \quad g: \gamma \rightarrow \beta}{\langle f, g \rangle: \gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta}$	$pr_1^{\alpha \wedge \beta}: \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ $pr_2^{\alpha \wedge \beta}: \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
$\frac{f: \gamma \wedge \alpha \rightarrow \beta}{\Lambda(f): \gamma \rightarrow \alpha \Rightarrow \beta}$	$ev_{\alpha, \beta}: (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha \rightarrow \beta$
$k_1^{\alpha \vee \beta}: \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ $k_2^{\alpha \vee \beta}: \beta \rightarrow \alpha \vee \beta$	$\frac{f: \alpha \rightarrow \gamma \quad g: \beta \rightarrow \gamma}{[f, g]: \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma}$
$!_\alpha: \alpha \rightarrow \top$	$\Box_\alpha: \perp \rightarrow \alpha$

$$\frac{P \wedge Q \vdash Q (\wedge E_2) \quad P \wedge Q \vdash P (\wedge E_1)}{P \wedge Q \vdash Q \wedge P} \wedge I$$

Содержательно, мы сейчас само исчисление высказываний превращаем в категорию. Формулы становятся объектами, а стрелки из α в β – это выводы секвенции $\alpha \vdash \beta$.

На множестве правильно построенных термов определим отношение эквивалентности $f \equiv g$ как наименьшее отношение, которое

- рефлексивно;
- симметрично;
- транзитивно;
- если $f_1 \equiv f_2$ и $g_1 \equiv g_2$, то $f_1 \circ g_1 \equiv f_2 \circ g_2$ (если композиции правильно построены);

- если $f_1 \equiv f_2$ и $g_1 \equiv g_2$, то $\langle f_1, g_1 \rangle \equiv \langle f_2, g_2 \rangle$ (если пары правильно построены);
- если $f_1 \equiv f_2$ и $g_1 \equiv g_2$, то $[f_1, g_1] \equiv [f_2, g_2]$ (если пары правильно построены);
- если $f \equiv g$, то $\Lambda(f) \equiv \Lambda(g)$ (если эти термы правильно построены);
- содержит все равенства вида $f \circ id_\alpha = f$, где $f: \alpha \rightarrow \beta$ (это значит, что $f \circ id_\alpha \equiv f$, если $f: \alpha \rightarrow \beta$);
- содержит все равенства вида $id_\beta \circ f = f$, где $f: \alpha \rightarrow \beta$;
- содержит все равенства вида $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, где $h: \alpha \rightarrow \beta, g: \beta \rightarrow \gamma, f: \gamma \rightarrow \delta$;
- содержит все равенства с Таблицы 15.4.

Морфизмами категории $\text{Free}(M)$ будут правильно построенные термы с точностью до отношения эквивалентности \equiv (или классы эквивалентности правильно построенных термов, если так понятнее).

Каждому множеству M сопоставим функцию

$$\eta_M: M \rightarrow \text{Ob}(\text{Free}(M))$$

которая вкладывает множество $M = \{P, Q, R, \dots\}$ во множество формул, построенных из P, Q, R, \dots (поскольку $M \subset \text{Ob}(\text{Free}(M))$)

Пусть дана некоторая малая бидекарттово замкнутая категория \mathbf{K} и некоторая функция $g: M \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{K})$. Докажем, что существует единственный функтор $F: \text{Free}(M) \rightarrow \mathbf{K}$, сохраняющий структуру в смысле Определения 15.36 и делающий коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\eta_M} & \text{Ob}(\text{Free}(M)) & & \text{Free}(M) \\
 & \searrow g & \downarrow \text{Ob}(F) & & \downarrow F \\
 & & \text{Ob}(\mathbf{K}) & & \mathbf{K}
 \end{array}$$

Здесь $\text{Ob}(F)$ – это просто „объектная половина“ функтора F (функтор – это пара отображений, обозначаемых одной буквой), поэтому напомним вместо $\text{Ob}(F)$ просто F

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\eta_M} & \text{Ob}(\text{Free}(M)) & & \text{Free}(M) \\
 & \searrow g & \downarrow F & & \downarrow F \\
 & & \text{Ob}(\mathbb{K}) & & \mathbb{K}
 \end{array}$$

Действительно, зная значения функтора F на объектах $P, Q, R \dots$ (они равны $g(P), g(Q), g(R) \dots$), мы однозначно восстанавливаем его значения на всех объектах $\text{Free}(M)$, поскольку все они построены из $P, Q, R \dots$ и \top, \perp с помощью операций $\wedge, \vee, \Rightarrow$. Например,

- $F(P \wedge Q) = F(P) \times F(Q)$
- $F(P \vee Q) = F(P) + F(Q)$
- $F(P \Rightarrow \perp) = F(\perp)^{F(P)} = 0^{F(P)}$

Точно так же однозначно определены значения F на всех стрелках категории $\text{Free}(M)$, достаточно посмотреть на определение термина. Эквивалентность термов в точности отражает равенства, которые должны быть выполнены в любой бидеккартово замкнутой категории, поэтому функтор $F: \text{Free}(M) \rightarrow \mathbb{K}$ переводит эквивалентные термы $f \equiv g$ в одну и ту же стрелку категории \mathbb{K} . \square

Замечание 15.39. В доказательстве никак не используется малость \mathbb{K} , поэтому фактически мы доказали следующий более сильный результат. Пусть даны множество M и бидеккартово замкнутая категория \mathbb{K} (не обязательно малая). Есть взаимно однозначное соответствие между отображениями $g: M \rightarrow \text{Ob}(\mathbb{K})$ и функторами $F: \text{Free}(M) \rightarrow \mathbb{K}$, сохраняющими структуру бидеккартово замкнутой категории, это соответствие выражается диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\eta_M} & \text{Ob}(\text{Free}(M)) & & \text{Free}(M) \\
 & \searrow g & \downarrow F & & \downarrow F \\
 & & \text{Ob}(\mathbb{K}) & & \mathbb{K}
 \end{array}$$

При определении ВиССС мы брали только малые категории, чтобы избежать парадоксов (иначе возникают вопросы вроде „является ли ВиССС

объектом самой себя?“) К сожалению, хорошего способа бороться с парадоксами не придумано, поэтому приходится вводить такие ограничения.

Определение 15.40. Пусть фиксированы множество атомарных высказываний M и бидекатово замкнутая категория \mathbf{K} . *Интерпретациями интуиционистского исчисления высказываний* будем называть функторы $F: \text{Free}(M) \rightarrow \mathbf{K}$, сохраняющие структуру в смысле Определения 15.36. Формулу α будем называть *истинной при интерпретации F* , если у объекта $F(\alpha)$ есть хотя бы один элемент.

Пример 15.41. Возьмём некоторое множество M и бидекатово замкнутую категорию \mathbf{Set} . Пусть дано некоторое отображение $g: M \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{Set})$, которое сопоставляет всем $P, Q, R \dots \in M$ некоторые множества $g(P), g(Q), g(R) \dots$. Продолжим его до функтора $F: \text{Free}(M) \rightarrow \mathbf{Set}$

- $F(P) = g(P); F(Q) = g(Q); F(R) = g(R) \dots$
- $F(\alpha \wedge \beta) = F(\alpha) \times F(\beta)$
- $F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$
- $F(\alpha \Rightarrow \beta) = F(B)^{F(A)}$
- $F(\top) = \{*\}$
- $F(\perp) = \emptyset$

и на термах соответственно. Будем воспринимать элементы множества $F(\alpha)$ как некие „конструкции, подтверждающие истинность α “. Формула α истинна при интерпретации F , если есть подтверждающая её конструкция (то есть $F(\alpha)$ непусто).

Конструкция, подтверждающая формулу $\alpha \wedge \beta$ – это пара конструкций (a, b) , где a подтверждает α , b подтверждает β , поэтому должно быть $F(\alpha \wedge \beta) = F(\alpha) \times F(\beta)$.

Конструкция, подтверждающие формулу $\alpha \vee \beta$ – это или конструкция, подтверждающая α , или конструкция, подтверждающая β , причём мы хотим распознавать по конструкции, что именно она подтверждает, поэтому берём дизъюнктивное объединение $F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$.

Конструкция, подтверждающая формулу $\alpha \Rightarrow \beta$ – это функция, которая по любой конструкции, подтверждающей α , выдаёт конструкцию, подтверждающую β , поэтому $F(\alpha \Rightarrow \beta) = F(\beta)^{F(\alpha)}$.

Конструкций, подтверждающих \perp , нет, поэтому $F(\perp) = \emptyset$.

Теорема 15.42. *Все формулы, выводимые в интуиционистском исчислении высказываний, истинны при любой интерпретации $F: \text{Free}(M) \rightarrow \mathbf{K}$.*

Доказательство. Каждому выводу секвенции вида $\alpha \vdash \beta$ соответствует правильно построенный терм $f: \alpha \rightarrow \beta$, он переходит в стрелку $F(f): F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$. Если выводима формула α (то есть, секвенция $\top \vdash \alpha$), то выводу соответствует терм $f: \top \rightarrow \alpha$, который переходит в стрелку $F(f): 1 \rightarrow F(\alpha)$, то есть в элемент $F(\alpha)$. \square

Содержательно, вывод формулы α – это „конструкция, подтверждающая α “ в самом чистом виде, при интерпретации он переходит в некоторую „конкретную конструкцию“.

Замечание 15.43. При интерпретациях в \mathbf{Set} оказывается верным также и закон исключённого третьего:

$$F(\alpha \vee \neg \alpha) = F(\alpha \vee (\alpha \Rightarrow \perp)) = F(\alpha) + \emptyset^{F(\alpha)}$$

Множество $F(\alpha) + \emptyset^{F(\alpha)}$ всегда непусто. Действительно, если непусто $F(\alpha)$, то непусто и $F(\alpha) + \emptyset^{F(\alpha)}$. Если же $F(\alpha) = \emptyset$, то $F(\alpha) + \emptyset^{F(\alpha)} = \emptyset + \emptyset^0 \cong \emptyset + 1$

Замечание 15.44. Бидекартново замкнутые категории излагаю в основном по книге Lambek, Scott “Introduction to higher order categorical logic”. Название „бидекартново замкнутая категория“ буквально перевёл с английского “bicartesian closed category”. Где я взял такое определение интерпретации, не помню, но вряд ли сам придумал. Под это определение подходит как рекурсивная реализуемость Клини, так и модели Крипке (о которых в следующем разделе). В.Н.Крупский просит объяснить, почему у термов именно такие индексы. Например, у $ev_{A,B}$ индексы A, B , а у $pr_1^{A \times B}$ почему-то $A \times B$? На самом деле, можно с тем же успехом писать $pr_1^{A,B}$, а также и $pr_{A,B}^1$, если хочется. Оформление – дело вкуса. Главное, индексов должно быть достаточно, чтобы делать

грамматический разбор. Например, по терму $\langle pr_2^{P \times Q}, pr_1^{P \times Q} \rangle$ однозначно восстанавливаются его начало и конец, а также начала и концы всех его подтермов

$$\frac{pr_2^{P \times Q} : P \times Q \rightarrow Q \quad pr_1^{P \times Q} : P \times Q \rightarrow P}{\langle pr_2^{P \times Q}, pr_1^{P \times Q} \rangle : P \times Q \rightarrow Q \times P}$$

Тут можно доказать некоторую „теорему об однозначном грамматическом разборе“, но не хочется.

15.6 Алгебры Гейтинга

Алгебра Гейтинга – это частично упорядоченное множество, которое является бидекартово замкнутым, если его рассматривать как категорию.

Определение 15.45. Частично упорядоченное множество (\mathcal{H}, \leq) называется *алгеброй Гейтинга*, если в нём

- есть наибольший элемент \top
- есть наименьший элемент \perp
- есть пересечение $x \wedge y$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$
- есть объединение $x \vee y$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$
- есть элемент $x \Rightarrow y$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$, для которого $z \wedge x \leq y$ если и только если $z \leq (x \Rightarrow y)$ (для любого $z \in \mathcal{H}$)

Элемент $x \Rightarrow y$ называется *относительным псевдодополнением* от x к y , но мы постараемся обойтись без этого названия.

Замечание 15.46. Если \mathcal{H} воспринимать как категорию, в которой есть не больше одной стрелки между любыми x и y , то $x \wedge y$ становится произведением $x \times y$, а $x \Rightarrow y$ экспонентой y^x . Определение $x \Rightarrow y$ утверждает „есть стрелка (единственная) из $z \times x$ в y если и только если есть стрелка (единственная) из z в $x \Rightarrow y$ “.

Пример 15.47. Пусть даны множество атомарных высказываний M и алгебра Гейтинга \mathcal{H} . Интерпретация исчисления высказываний в \mathcal{H} однозначно задаётся функцией (произвольной) $g: M \rightarrow \mathcal{H}$, которая сопоставляет всем атомарным высказываниям элементы алгебры Гейтинга (будем называть эту функцию *оценкой*). На произвольные формулы интерпретация распространяется ожидаемым образом

- $F(P) = g(P)$ для всех $P \in M$
- $F(\alpha \wedge \beta) = F(\alpha) \wedge F(\beta)$

- $F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) \vee F(\beta)$
- $F(\alpha \Rightarrow \beta) = F(\alpha) \Rightarrow F(\beta)$
- $F(\top) = \top$
- $F(\perp) = \perp$

Получаем функтор $F: \text{Free}(M) \rightarrow \mathcal{H}$. Все выводы секвенции $\alpha \vdash \beta$ переходят в одну и ту же единственную стрелку $F(\alpha) \leq F(\beta)$. Формула α истинна при интерпретации F если и только если $\top \leq F(\alpha)$, что равносильно $F(\alpha) = \top$.

Следующая теорема даёт способ получать много алгебр Гейтинга.

Определение 15.48. Пусть \mathbf{K} – малая категория, будем называть её *шкалой*. На множестве $\text{Ob}(\mathbf{K})$ определим предпорядок

$$A \lesssim B \text{ если и только если есть стрелка } f: A \rightarrow B$$

где $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Множество объектов $X \subseteq \text{Ob}(\mathbf{K})$ будем называть *коидеалом*, если

$$A \in X \wedge A \lesssim B \Rightarrow B \in X \text{ для любых } A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$$

Пример 15.49. Пусть \mathbf{K} – следующая категория (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{array}{c} B \\ \uparrow f \\ A \end{array}$$

У неё три коидеала: \emptyset , $\{B\}$, $\{A, B\}$. Коидеал в данном простом случае (категория предпорядка) – это множество объектов, содержащее вместе с каждым объектом все объекты, лежащие выше него.

Теорема 15.50. Для любой малой категории \mathbf{K} множество (\mathcal{H}, \subseteq) всех коидеалов, упорядоченное по включению, является алгеброй Гейтинга.

Доказательство. Наибольшим элементом алгебры \mathcal{H} будет коидеал $\text{Ob}(\mathbf{K})$, наименьшим – коидеал \emptyset . Пересечение и объединение двух (и даже любого числа) коидеалов являются коидеалами. Если X, Y – коидеалы, их экспонента определяется так

$$(X \Rightarrow Y) = \cup\{Z \in \mathcal{H} \mid Z \cap X \subseteq Y\}$$

(объединение всех коидеалов Z таких, что $Z \cap X \subseteq Y$). Действительно, из $Z \cap X \subseteq Y$ следует $Z \subseteq (X \Rightarrow Y)$ по определению. В обратную сторону, пусть $Z \subseteq (X \Rightarrow Y)$. Тогда

$$\begin{aligned} Z \cap X &\subseteq (X \Rightarrow Y) \cap X = (\cup\{Z \in \mathcal{H} \mid Z \cap X \subseteq Y\}) \cap X = \\ &= \cup\{Z \cap X \mid Z \in \mathcal{H} \wedge (Z \cap X \subseteq Y)\} \subseteq Y \end{aligned}$$

(второе равенство по дистрибутивности). Итого получаем

$$Z \cap X \subseteq Y \text{ если и только если } Z \subseteq (X \Rightarrow Y)$$

□

Пример 15.51. Пусть \mathbf{K} – следующая категория (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$\begin{array}{c} B \\ \uparrow f \\ A \end{array}$$

У неё три коидеала: \emptyset , $\{B\}$, $\{A, B\}$. Возьмём исчисление высказываний $\text{Free}(\{P\})$, построенное на множестве атомарных высказываний $\{P\}$ (атомарное высказывание только одно, все формулы строятся из P, \top, \perp с помощью $\wedge, \vee, \Rightarrow$). Сопоставим высказыванию P коидеал $\{B\}$, это однозначно определяет интерпретацию $F: \text{Free}(\{P\}) \rightarrow \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{B\}, \{A, B\}\}$

- $F(P) = \{B\}$
- $F(\alpha \wedge \beta) = F(\alpha) \cap F(\beta)$
- $F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) \cup F(\beta)$

- $F(\alpha \Rightarrow \beta) = F(A) \Rightarrow F(B)$
- $F(\top) = \{A, B\}$
- $F(\perp) = \emptyset$
- $F(\neg\alpha) = F(\alpha \Rightarrow \perp) = F(\alpha) \Rightarrow \emptyset$

Формула α истинна при этой интерпретации, если $F(\alpha) = \top = \{A, B\}$. Легко проверить, что $(\{B\} \Rightarrow \emptyset) = \emptyset$, поэтому

$$F(P \vee \neg P) = F(P) \cup F(\neg P) = \{B\} \cup (\{B\} \Rightarrow \emptyset) = \{B\} \neq \{A, B\}$$

поэтому формула $P \vee \neg P$ не является истинной при этой интерпретации. Мы получили интерпретацию интуиционистского исчисления высказываний, в которой неверен закон исключённого третьего.

Если дана шкала \mathbf{K} и соответствующая ей алгебра коидеалов \mathcal{H} , оценку $g: M \rightarrow \mathcal{H}$ удобно задавать в виде отношения между объектами шкалы и атомарными высказываниями.

Определение 15.52. Пусть даны множество M и малая категория \mathbf{K} , соответствующую алгебру коидеалов будем обозначать \mathcal{H} . Отношение $A \Vdash P$ между объектами \mathbf{K} и элементами M будем называть *отношением вынуждения* (и говорить *объект A вынуждает формулу P*), если

$$A \Vdash P \wedge A \lesssim B \Rightarrow B \Vdash P \text{ для всех } A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K}), P \in M$$

Для любого $P \in M$ множество $\{A \in \text{Ob}(\mathbf{K}) \mid A \Vdash P\}$ является коидеалом. Таким образом, отношение вынуждения задаёт оценку $g: M \rightarrow \mathcal{H}$

$$g(P) = \{A \in \text{Ob}(\mathbf{K}) \mid A \Vdash P\}$$

В обратную сторону, по заданной оценке g мы можем построить отношение вынуждения

$$A \Vdash P \text{ если и только если } A \in g(P)$$

Пример 15.53. Оценка из Примера 15.51 задаётся отношением вынуждения

$$B \Vdash P$$

$$A \nVdash P$$

Содержательно, формула P не является истинной в момент времени A , но становится истинной в момент времени B . Определение вынуждения гарантирует, что истинность формул со временем не пропадает (формула, истинная в данный момент времени, остаётся истинной и в будущем).

Продолжение оценки $g: M \rightarrow \mathcal{H}$ до интерпретации $F: \text{Free}(M) \rightarrow \mathcal{H}$ тоже можно описать с помощью отношения вынуждения.

Теорема 15.54. Пусть даны множество M и малая категория \mathbf{K} , соответствующую алгебру коидеалов будем обозначать \mathcal{H} . Пусть задано отношение вынуждения \Vdash , соответствующую оценку обозначим $g: M \rightarrow \mathcal{H}$. Продолжим отношение вынуждения на все формулы (и будем писать $A \Vdash \alpha$) следующим способом

- $A \Vdash P$ уже определено для всех $P \in M$
- $A \Vdash \alpha \wedge \beta$ если и только если $A \Vdash \alpha$ и $A \Vdash \beta$
- $A \Vdash \alpha \vee \beta$ если и только если $A \Vdash \alpha$ или $A \Vdash \beta$
- $A \Vdash \top$ верно при любом A
- $A \Vdash \perp$ неверно при любом A
- $A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$ если и только если для всякого B такого, что $A \lesssim B$ и $B \Vdash \alpha$, верно $B \Vdash \beta$
- $A \Vdash \neg \alpha$ если и только если для всякого B такого, что $A \lesssim B$, неверно $B \Vdash \alpha$

Здесь $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Тогда интерпретация $F: \text{Free}(M) \rightarrow \mathcal{H}$, продолжающая оценку g на все формулы, задаётся так

$$F(\alpha) = \{A \in \text{Ob}(\mathbf{K}) \mid A \Vdash \alpha\}$$

Доказательство. Определение $A \Vdash \neg\alpha$ приведено для удобства, оно следует из определения для $A \Vdash \alpha \Rightarrow \perp$. Реально надо доказать следующие равенства

- $\{A \mid A \Vdash \alpha \wedge \beta\} = \{A \mid A \Vdash \alpha\} \cap \{A \mid A \Vdash \beta\}$
- $\{A \mid A \Vdash \alpha \vee \beta\} = \{A \mid A \Vdash \alpha\} \cup \{A \mid A \Vdash \beta\}$
- $\{A \mid A \Vdash \top\} = \text{Ob}(\mathbf{K})$
- $\{A \mid A \Vdash \perp\} = \emptyset$
- $\{A \mid A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta\} = \{A \mid A \Vdash \alpha\} \Rightarrow \{A \mid A \Vdash \beta\}$

Все равенства, кроме последнего, непосредственно видны из определения вынуждения. Чтобы доказать последнее равенство, проверим, что для любого коидеала Z

$$Z \cap \{A \mid A \Vdash \alpha\} \subseteq \{A \mid A \Vdash \beta\} \quad \text{равносильно} \quad Z \subseteq \{A \mid A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta\}$$

Слева направо. Предположим, что $Z \cap \{A \mid A \Vdash \alpha\} \subseteq \{A \mid A \Vdash \beta\}$. Это значит, что для любого $B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, если $B \in Z$ и $B \Vdash \alpha$, то $B \Vdash \beta$. Докажем, что $Z \subseteq \{A \mid A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta\}$. Пусть $A \in Z$. Надо доказать $A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Это означает, что для любого $B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, если $A \lesssim B$ и $B \Vdash \alpha$, то $B \Vdash \beta$. Действительно, если $A \in Z$ и $A \lesssim B$, то $B \in Z$ (поскольку Z – коидеал), а из $B \in Z$ и $B \Vdash \alpha$ следует $B \Vdash \beta$ в силу исходного предположения.

Справа налево. Предположим, что $Z \subseteq \{A \mid A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta\}$. Это значит, что для любого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, если $A \in Z$, то $A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Докажем, что $Z \cap \{A \mid A \Vdash \alpha\} \subseteq \{A \mid A \Vdash \beta\}$. Пусть $A \in Z$ и $A \Vdash \alpha$. Надо доказать $A \Vdash \beta$. Из $A \in Z$ в силу исходного предположения следует $A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Это означает, что для любого $B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, если $A \lesssim B$ и $B \Vdash \alpha$, то $B \Vdash \beta$. Поскольку $A \lesssim A$ и $A \Vdash \alpha$, получаем $A \Vdash \beta$.

Наконец, надо ещё проверить, что $\{A \mid A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta\}$ является коидеалом. Мне кажется, это видно из определения (или становится ясно после минутного раздумья). Собственно, определение $A \Vdash \alpha \Rightarrow \beta$ выбрано таким, потому что при простом определении коидеал не получится. \square

Замечание 15.55. Заметим, что из $A \Vdash \alpha$ и $A \lesssim B$ следует $B \Vdash \alpha$ для любой формулы α и любых $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$.

Пример 15.56. Вернёмся опять к Примеру 15.51. Оценка задаётся отношением вынуждения

$$B \Vdash P$$

$$A \not\Vdash P$$

Легко проверить, что

$$B \not\Vdash \neg P$$

$$A \not\Vdash \neg P$$

и поэтому

$$B \Vdash P \vee \neg P$$

$$A \not\Vdash P \vee \neg P$$

Формула истинна, если она вынуждается всеми объектами, поэтому формула $P \vee \neg P$ не является истинной при этой интерпретации. Но она и не совсем ложна, поскольку алгебра Гейтинга данной шкалы трёхзначная, кроме истины $\{A, B\}$ и лжи \emptyset в ней есть промежуточное значение истинности $\{B\}$, это значение и принимает формула $P \vee \neg P$.

Замечание 15.57. Если шкала \mathbf{K} – частично упорядоченное множество (как в предыдущем примере), такие интерпретации исчисления высказываний называются *моделями Крипке*.

Замечание 15.58. В этом разделе точно не выдумал ничего, все определения и результаты хорошо известны.

Глава 16

Мономорфизмы, эпиморфизмы

16.1 Мономорфизмы, подобъекты

Определение 16.1. Стрелка $f: A \rightarrow B$ называется *мономорфизмом*, или *мономорфной стрелкой*, если для любого объекта C и любых двух стрелок $g_1, g_2: C \rightarrow A$ из равенства $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует равенство $g_1 = g_2$.

Соглашение 16.2. Тот факт, что стрелка $f: A \rightarrow B$ является мономорфизмом, будем изображать так $f: A \rightarrowtail B$

Замечание 16.3. Равенство $f \circ g_1 = f \circ g_2$ хотелось бы выразить такой коммутативной диаграммой

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

Но по нашему определению коммутативности, коммутативность такой диаграммы означает также, что $g_1 = g_2$ (два пути с одинаковым началом и концом дают одинаковые стрелки). В данном случае нетрудно исправить дело, нарисовав такую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g_1} & A \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

но в дальнейшем нам встретятся более сложные случаи и мы сейчас введём более удобное определение коммутативности.

Определение 16.4. Диаграмма называется *коммутативной*, если для любых вершин A и B в диаграмме любые два пути из A в B дают равные композиции стрелок, *если хотя бы один из путей содержит не меньше двух стрелок*. При таком (более слабом) определении коммутативность следующей диаграммы

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

означает $f \circ g_1 = f \circ g_2$ и не требует равенства $g_1 = g_2$.

Таким образом, для мономорфизма f из коммутативности диаграммы

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

следует равенство $g_1 = g_2$.

Пример 16.5. В \mathbf{Set} стрелка $f: A \rightarrow B$ является мономорфизмом если и только если она инъективна, то есть

$$\forall x, y \in A (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

Действительно, пусть f – мономорфизм. Рассмотрим диаграмму

$$\{*\} \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \xrightarrow{y} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

Из равенства $f \circ x = f \circ y$ следует $x = y$, это как раз и значит

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \text{ на теоретико-множественном языке.}$$

В обратную сторону, пусть функция f инъективна. Рассмотрим диаграмму

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

Её коммутативность означает

$$\forall x \in C (f(g_1(x)) = f(g_2(x)))$$

В силу инъективности f из этого следует

$$\forall x \in C (g_1(x) = g_2(x))$$

поэтому $g_1 = g_2$. Таким образом, f является мономорфизмом.

Упражнение 16.6. Тожественные стрелки являются мономорфизмами. Композиция двух мономорфизмов является мономорфизмом.

Упражнение 16.7. В категориях предпорядка все стрелки являются мономорфизмами.

Упражнение 16.8. Любая стрелка из терминального объекта $f: 1 \rightarrow A$ является мономорфизмом.

Определение 16.9. Стрелка $f: A \rightarrow B$ называется *обратимой слева*, если существует стрелка $g: B \rightarrow A$ такая, что $g \circ f = id_A$.

Упражнение 16.10. Любая стрелка, обратимая слева (в частности, любой изоморфизм), является мономорфизмом. Обратное неверно: в категориях частичного порядка все стрелки мономорфны, но только тождественные обратимы слева.

Упражнение 16.11. Стрелка $S: N \rightarrow N$ является мономорфизмом.

Упражнение 16.12. Если композиция $f \circ h$ является мономорфизмом, то h является мономорфизмом.

Упражнение 16.13. Если стрелка f мономорфна, то мономорфны и все стрелки вида $\langle f, g \rangle$, а также $\langle g, f \rangle$.

Упражнение 16.14. Если стрелки f и g мономорфны, то и стрелка $f \times g$ мономорфна.

Пример 16.15. Пусть \mathbf{K} – конкретная категория со стирающим функтором $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$. Стрелка $f: A \rightarrow B$ мономорфна, если мономорфна функция $G(f): G(A) \rightarrow G(B)$ между множествами-носителями. Часто это выражают словами „строгие функторы отражают мономорфизмы“. Действительно, из $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует

$$G(f) \circ G(g_1) = G(f) \circ G(g_2)$$

далее $G(g_1) = G(g_2)$ вследствие мономорфности $G(f)$ и $g_1 = g_2$ вследствие строгости функтора G .

Обратное верно не всегда! Бывают случаи, когда стрелка f мономорфна, а $G(f)$ нет, хотя контрпример придумать трудно. Приведу редкий контрпример, взятый из книги Freyd, Scedrov “Categories, Allegories”. Возьмём категорию линейно упорядоченных полей, включая вырожденное поле из одного элемента, в котором $0 = 1$. Морфизмами этой категории будут отображения, сохраняющие порядок, ноль, единицу, сложение и умножение. Стрелка из поля действительных чисел \mathbb{R} в одноэлементное поле будет мономорфизмом, хотя отображение множеств-носителей не инъективно. Мономорфизмом она будет потому, что для любого упорядоченного поля C есть не больше одного морфизма в \mathbb{R} (есть такой алгебраический результат), поэтому любые две стрелки $g_1, g_2: C \rightarrow \mathbb{R}$ равны безо всяких дополнительных условий.

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} \mathbb{R} \xrightarrow{f} B$$

Тем не менее, обычно в конкретных категориях мономорфны в точности те стрелки, для которых мономорфны соответствующие отображения множеств-носителей. Это связано со следующей теоремой.

Теорема 16.16. *Правые сопряжённые функторы сохраняют мономорфизмы. Точнее, если $F \dashv G$ и $h: A \rightarrow B$, то $G(h): G(A) \rightarrow G(B)$.*

Доказательство. Пусть h – мономорфизм. Предположим, что $G(h) \circ g_1 = G(h) \circ g_2$

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} G(A) \xrightarrow{G(h)} G(B)$$

Тогда $h \circ \Phi(g_1) = h \circ \Phi(g_2)$

$$F(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{\Phi(g_1)} \\ \xrightarrow{\Phi(g_2)} \end{array} A \xrightarrow{h} B$$

Сокращая на h , получаем $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$ и поэтому $g_1 = g_2$. □

Пример 16.17. Если $f: A \rightarrow B$, то $f^C: A^C \rightarrow B^C$

(где $f^C = \Lambda(f \circ ev)$, потому что $A^C \times C \xrightarrow{ev} A \xrightarrow{f} B$)

В \mathbf{Set} стрелка f^C – это умножение слева на f

$$f \circ: \mathbf{Set}(C, A) \rightarrow \mathbf{Set}(C, B)$$

Если f – мономорфизм, то и отображение $f \circ$ является мономорфизмом, поскольку переводит две разные стрелки $g_1, g_2: C \rightarrow A$ в две разные стрелки $f \circ g_1$ и $f \circ g_2: C \rightarrow B$.

Пример 16.18. В категориях групп, колец, упорядоченных множеств (с монотонными отображениями в качестве морфизмов), топологических пространств стрелка является мономорфизмом если и только если мономорфно соответствующее отображение множеств-носителей. Во всех этих случаях стирающий функтор G сохраняет мономорфизмы, поскольку к нему есть левый сопряжённый F , который выдаёт по множеству A

1. Свободную группу со множеством образующих A ;
2. Свободное кольцо со множеством образующих A ;
3. Множество A с дискретным порядком (все элементы попарно несравнимы);
4. Множество A с дискретной топологией.

По той же причине стирающие функторы во всех этих случаях сохраняют произведения.

С понятием „мономорфизм“ тесно связано понятие „разделяющий объект“.

Определение 16.19. Пусть дана категория \mathcal{K} . Объект $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ называется *разделяющим*, если для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ и любых двух стрелок $g_1, g_2: A \rightarrow B$ таких, что $g_1 \neq g_2$ существует стрелка $h: C \rightarrow A$, для которой $g_1 \circ h \neq g_2 \circ h$.

Иными словами, если для любой стрелки $h: C \rightarrow A$ выполнено равенство $g_1 \circ h = g_2 \circ h$

$$C \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} B$$

то выполнено равенство $g_1 = g_2$.

Замечание 16.20. Коммутативность диаграммы

$$C \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} B$$

означает, что $g_1 \circ h = g_2 \circ h$. При этом g_1 и g_2 не обязаны быть равны между собой (хотя могут быть и равны, это не запрещено).

Пример 16.21. В Set терминальный объект $\{*\}$ является разделяющим. Если две функции g_1 и g_2 совпадают на любом аргументе x

$$\{*\} \xrightarrow{x} A \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} B$$

то $g_1 = g_2$. Иными словами, если $g_1 \neq g_2$, то найдётся элемент x , на котором они отличаются $g_1 \circ x \neq g_2 \circ x$. Иногда это выражают словами „в Set достаточно элементов“ или „в Set достаточно точек“.

Замечание 16.22. Разделяющие объекты не обязаны все быть изоморфны между собой! В Set любое непустое множество является разделяющим объектом (проверьте). Объект, изоморфный разделяющему, конечно, сам является разделяющим.

Пример 16.23. В категории групп Grp терминальный объект $\{e\}$ не является разделяющим, поскольку стрелок из терминального объекта

очень мало (для каждой группы X ровно один морфизм из $\{e\}$ в X). Зато любая свободная группа с непустым множеством образующих будет разделяющим объектом. Рассмотрим сопряжение $F \dashv G$

$$\text{Set} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \text{Grp}$$

где G – стирающий функтор, а F – функтор, выдающий свободную группу по множеству образующих. Рассмотрим для примера группу $F(1)$. Это свободная группа с одной образующей, обозначим её z .

$$F(1) = \{\dots z^{-3}, z^{-2}, z^{-1}, e, z, z^2, z^3 \dots\}$$

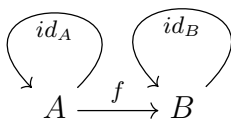
где умножение задано правилом $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$ ($n, m \in \mathbb{Z}$)

На самом деле эта группа изоморфна группе целых чисел по сложению, но нам это не важно. В силу сопряжённости, для любой группы X стрелки вида $f: F(1) \rightarrow X$ взаимно однозначно соответствуют стрелкам вида $g: 1 \rightarrow G(X)$, то есть элементам носителя X . Действительно, гомоморфизм $f: F(1) \rightarrow X$ однозначно определяется элементом $G(X)$, в который переходит z . Используя тот факт, что 1 является разделяющим объектом в Set , легко показать, что $F(1)$ является разделяющим объектом в Grp .

Упражнение 16.24. Если $F \dashv G$ и функтор G строгий, то F переводит разделяющие объекты в разделяющие.

Упражнение 16.25. Пусть C – разделяющий объект. Стрелка $f: A \rightarrow B$ будет мономорфизмом если и только если для любых двух стрелок $g_1, g_2: C \rightarrow A$ из равенства $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует равенство $g_1 = g_2$.

Пример 16.26. В Cat разделяющим объектом является следующая категория K



Заметим, что функторы вида $H: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}_1$ соответствуют стрелкам \mathbf{K}_1 . Пусть даны два функтора $G_1, G_2: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$, причём $G_1 \neq G_2$. Это значит что $G_1(A) \neq G_2(A)$ для какого-то $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ или $G_1(f) \neq G_2(f)$ для какого-то $f \in \text{Mor}(\mathbf{K}_1)$. Первый случай сводится ко второму. Это связано с тем, что если G_1 и G_2 различаются на объекте A , то они различаются и на стрелке id_A . Действительно, из

$$G_1(id_A) = G_2(id_A)$$

следует

$$id_{G_1(A)} = id_{G_2(A)}$$

поэтому

$$G_1(A) = G_2(A)$$

Пусть $G_1(f) \neq G_2(f)$. Определим функтор $H: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}_1$

$$H(A) = \text{dom}(f)$$

$$H(B) = \text{cod}(f)$$

$$H(f) = f$$

Легко видеть, что $G_1 \circ H \neq G_2 \circ H$, поэтому изображённая выше категория \mathbf{K} является разделяющим объектом в \mathbf{Cat} .

Иногда разделяющего объекта нет, но некоторое множество объектов является „коллективным разделяющим“.

Определение 16.27. *Разделяющим множеством* объектов некоторой категории \mathbf{K} называется такое множество $I \subseteq \text{Ob}(\mathbf{K})$, что для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ и любых двух стрелок $g_1, g_2: A \rightarrow B$ таких, что $g_1 \neq g_2$ существует объект $C \in I$ и стрелка $h: C \rightarrow A$, для которой $g_1 \circ h \neq g_2 \circ h$. Иными словами, если для любого объекта $C \in I$ и любой стрелки $h: C \rightarrow A$ выполнено равенство $g_1 \circ h = g_2 \circ h$

$$C \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} B$$

то выполнено равенство $g_1 = g_2$.

Пример 16.28. В категории графов \mathbf{Grph} есть разделяющее множество, состоящее из двух графов

$$A$$

(граф с одной вершиной и без рёбер) и

$$A \xrightarrow{f} B$$

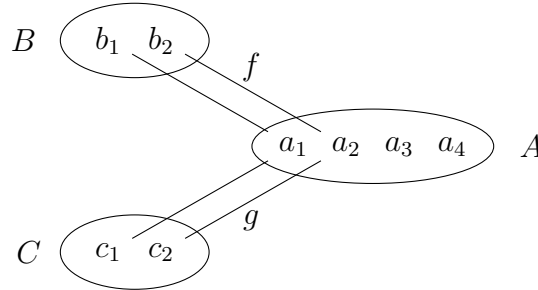
(граф с двумя вершинами и одним ребром). Морфизмы из первого графа в некоторый граф F соответствуют вершинам F , а морфизмы из второго графа в F соответствуют рёбрам F . Если даны два графа F и G , а также два морфизма графов $\tau, \sigma: F \rightarrow G$, причём $\tau \neq \sigma$, эти морфизмы различаются на какой-то вершине графа F или на каком-то ребре.

Упражнение 16.29. Вспомните определение категории графов и проверьте детали.

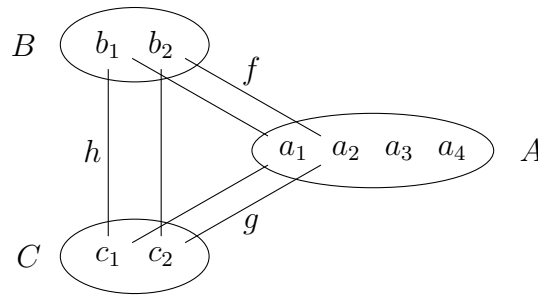
Упражнение 16.30. Пусть I – разделяющее множество. Стрелка $f: A \rightarrow B$ будет мономорфизмом если и только если для любого объекта $C \in I$ и для любых двух стрелок $g_1, g_2: C \rightarrow A$ из равенства $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует равенство $g_1 = g_2$.

Замечание 16.31. Я перевёл выражения “separator” и “separating set” как „разделяющий объект“ и „разделяющее множество“, посоветовавшись с коллективным разумом в сообществе живого журнала category-theory.livejournal.com, идея принадлежит юзеру nivanuch. По-русски иногда говорят „образующий объект“, но это выражение имеет и другое значение, причём только это другое значение находит google. По-английски также пишут “generator” и “generating family”.

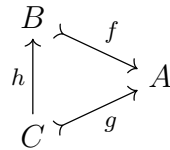
Пример 16.32. В \mathbf{Set} каждый мономорфизм $f: B \rightarrow A$ задаёт подмножество A (множество значений функции f). Разные мономорфизмы могут задавать одно и то же подмножество, как показывает следующий пример



Здесь функции $f: B \rightarrow A$ и $g: C \rightarrow A$ задают одно и то же подмножество A (а именно, $\{a_1, a_2\}$). В этом случае существует изоморфизм $h: C \rightarrow B$ такой, что $f \circ h = g$



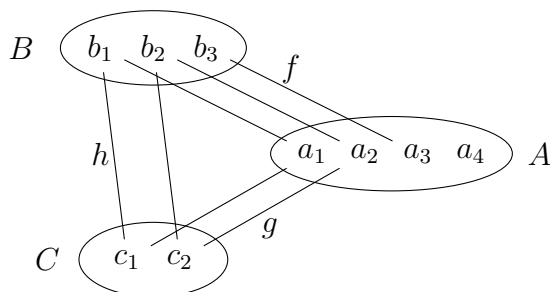
Определение 16.33. В произвольной категории \mathcal{K} на множестве всех мономорфизмов с концом A определим предпорядок следующим способом: для стрелок $f: B \rightarrow A$ и $g: C \rightarrow A$ положим $g \lesssim f$ если и только если найдётся стрелка $h: C \rightarrow B$ такая, что $f \circ h = g$



Такая стрелка h может быть только одна (поскольку f – мономорфизм), поэтому получается предпорядок. Заметим также, что стрелка h сама является мономорфизмом по упражнению 16.12.

Если $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$, будем писать $f \simeq g$

Пример 16.34. На картинке изображены три множества A, B, C и три мономорфизма $f: B \rightarrow A, g: C \rightarrow A, h: C \rightarrow B$.



Мы видим, что f отображает B на подмножество $\{a_1, a_2, a_3\}$, а g отображает C на подмножество $\{a_1, a_2\}$, предпорядок на мономорфизмах соответствует порядку по включению между подмножествами.

Теорема 16.35. Пусть $f: B \rightarrow A, g: C \rightarrow A$. Тогда $f \simeq g$ если и только если существует (единственный) изоморфизм $h: C \rightarrow B$ такой, что $f \circ h = g$.

Доказательство. Если $g \lesssim f$, то для некоторой (единственной) стрелки h будет $f \circ h = g$. Если к тому же $f \lesssim g$, то для некоторой стрелки h' будет $g \circ h' = f$. Получаем

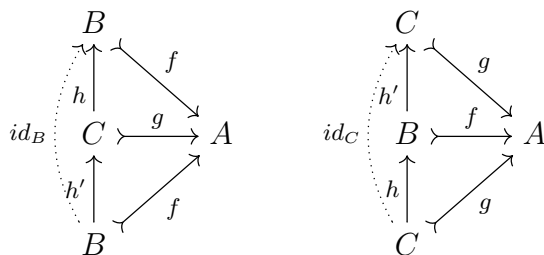
$$f \circ h \circ h' = g \circ h' = f = f \circ id$$

$$g \circ h' \circ h = f \circ h = g = g \circ id$$

и сокращаем слева на мономорфизмы f и g

$$h \circ h' = id$$

$$h' \circ h = id$$



□

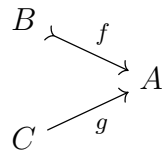
Определение 16.36. *Подобъектами* объекта A будем называть мономорфизмы с концом A с точностью до отношения \simeq (или классы эквивалентности мономорфизмов, если так понятнее). Каждый мономорфизм f задаёт некоторый подобъект, который будем обозначать $[f]$. Совокупность всех подобъектов объекта A будем обозначать $\text{Sub}(A)$. Предпорядок \lesssim между мономорфизмами превращается в порядок между подобъектами, этот порядок будем обозначать $[f] \subseteq [g]$.

Упражнение 16.37. У каждого объекта A есть наибольший подобъект, задаваемый мономорфизмом $id_A: A \rightarrow A$

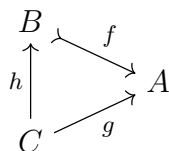
Замечание 16.38. Определение подобъектов как классов эквивалентности мономорфизмов создаёт теоретико-множественные проблемы. Например, в Set почти все такие классы эквивалентности очень „большие“ и не являются множествами. В Set и во многих других категориях есть другой выход: можно естественным способом выбрать из каждого класса эквивалентности некоторый *канонический подобъект*. Если в Set задано некоторое подмножество $B \subseteq A$, мы можем определить функцию вложения $f: B \rightarrow A$ как $f = \{(b, b) \mid b \in B\}$ и этот мономорфизм будет каноническим представителем для данного подмножества.

Соглашение 16.39. Мы будем говорить „ B является подобъектом A “, если мономорфизм $f: B \rightarrow A$ ясен из контекста.

Соглашение 16.40. Пусть даны две стрелки с концом A



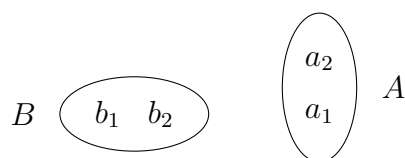
причём f является мономорфизмом (а g не обязательно). Будем говорить, что g *пропускается через f* , если существует (единственная) стрелка $h: C \rightarrow B$, делающая коммутативной следующую диаграмму



В \mathbf{Set} это означает, что функция $g: C \rightarrow A$ принимает все свои значения в подмножестве $B \subseteq A$. Функция h – это функция g , если воспринимать её как функцию из C в B .

Пример 16.41. В категории групп \mathbf{Grp} подобъекты соответствуют подгруппам. Подгруппа группы X – это подмножество носителя X , содержащее групповую единицу e и замкнутое относительно умножения и взятия обратного элемента. Такое подмножество задаёт некоторый мономорфизм $f: Y \rightarrow X$ (вложение). Верно и обратное, образ любого мономорфизма будет подгруппой.

Пример 16.42. Рассмотрим категорию частично упорядоченных множеств \mathbf{Poset} . Объектами \mathbf{Poset} являются частично упорядоченные множества, а морфизмами – монотонные отображения. Рассмотрим два частично упорядоченных множества: дискретное двоеточие B (два элемента b_1, b_2 , несравнимых между собой) и связное двоеточие A (два элемента a_1, a_2 , причём $a_1 < a_2$)



Отображение $f: B \rightarrow A$, определённое равенствами

$$f(b_1) = a_1$$

$$f(b_2) = a_2$$

является монотонным мономорфизмом. С категорной точки зрения дискретное двоеточие является подобъектом связного. Но нам это не нравится, мы хотим, чтобы подобъектами были подмножества с унаследованным порядком, а в данном случае это не так. Такая же проблема и в категории топологических пространств. В книге Adamek, Herrlich,

Strecker “The Joy of Cats” на странице 134 дано определение „хороших“ подобъектов в конкретных категориях, оно существенно использует стирающий функтор.

Определение 16.43. Функтор $F: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ называется *вложением*, или *вложением категорий*, если он строгий и инъективен на $\text{Ob}(\mathcal{K}_1)$ (переводит разные объекты в разные). Равносильное определение: функтор F является вложением, если он инъективен на $\text{Mor}(\mathcal{K}_1)$.

Упражнение 16.44. Проверьте равносильность.

Чуть позже мы докажем, что мономорфизмы в Cat – это в точности вложения, сейчас же определим канонические подобъекты.

Определение 16.45. Категория \mathcal{K}_1 называется *подкатегорией* категории \mathcal{K}_2 , если выполнены следующие условия

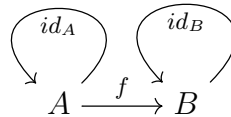
1. $\text{Ob}(\mathcal{K}_1) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{K}_2)$
2. $\mathcal{K}_1(A, B) \subseteq \mathcal{K}_2(A, B)$ для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K}_1)$
3. $f \circ g$ в \mathcal{K}_1 совпадает с $f \circ g$ в \mathcal{K}_2 для любых $f, g \in \text{Mor}(\mathcal{K}_1)$
4. id_A в \mathcal{K}_1 совпадает с id_A в \mathcal{K}_2 для любого $A \in \text{Ob}(\mathcal{K}_1)$

С каждой подкатегорией связан её функтор вложения $F: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$, действующий так

$$F(A) = A \quad \text{для любого } A \in \text{Ob}(\mathcal{K}_1)$$

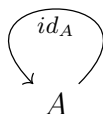
$$F(f) = f \quad \text{для любого } f \in \text{Mor}(\mathcal{K}_1)$$

Пример 16.46. Следующая категория \mathcal{K}

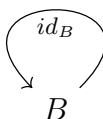


имеет пять подкатегорий.

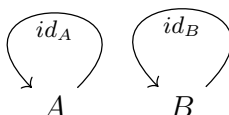
Первая



Вторая



Третья



А также вся категория \mathbf{K} и ещё пустая подкатегория без объектов и без стрелок.

Теорема 16.47. *Мономорфизмы в \mathbf{Cat} – это в точности вложения.*

Доказательство. Пусть категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 малые, а функтор $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ является вложением. По определению вложения инъективны обе функции

$$F: \text{Ob}(\mathbf{K}_1) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$$

$$F: \text{Mor}(\mathbf{K}_1) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{K}_2)$$

Равенство $F \circ G_1 = F \circ G_2$

$$\mathbf{K}_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{G_1} \\ \xrightarrow{G_2} \end{array} \mathbf{K}_1 \xrightarrow{F} \mathbf{K}_2$$

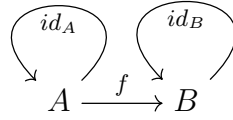
означает пару равенств

$$F \circ G_1 = F \circ G_2 \quad (\text{отображения из } \text{Ob}(\mathbf{K}_3) \text{ в } \text{Ob}(\mathbf{K}_2))$$

$$F \circ G_1 = F \circ G_2 \quad (\text{отображения из } \text{Mor}(\mathbf{K}_3) \text{ в } \text{Mor}(\mathbf{K}_2))$$

Сокращая оба равенства на F , получаем $G_1 = G_2$, поэтому F является мономорфизмом в \mathbf{Cat} .

В обратную сторону, пусть функтор $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ является мономорфизмом в \mathbf{Cat} . Докажем, что он инъективен на $\text{Mor}(\mathbf{K}_1)$ и поэтому является вложением. Предположим, что это не так. Тогда существуют две стрелки $f_1, f_2 \in \text{Mor}(\mathbf{K}_1)$ такие, что $f_1 \neq f_2$, но $F(f_1) = F(f_2)$. Возьмём категорию \mathbf{K} , которая является разделяющим объектом в \mathbf{Cat}



и определим два функтора $G_1, G_2: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}_1$

$$G_1(A) = \text{dom}(f_1)$$

$$G_1(B) = \text{cod}(f_1)$$

$$G_1(f) = f_1$$

$$G_2(A) = \text{dom}(f_2)$$

$$G_2(B) = \text{cod}(f_2)$$

$$G_2(f) = f_2$$

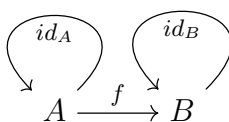
Легко проверить, что $F \circ G_1 = F \circ G_2$, но $G_1 \neq G_2$, что противоречит мономорфности F . \square

Определение 16.48. Функтор $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ называется *полным*, если для всякой стрелки вида $f: F(A) \rightarrow F(B)$ найдётся такая стрелка $g: A \rightarrow B$, что $f = F(g)$. Иными словами, F отображает $\mathbf{K}_1(A, B)$ на $\mathbf{K}_2(F(A), F(B))$ сюръективно для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$.

Замечание 16.49. Если функтор $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ строгий и полный, то F отображает $\mathbf{K}_1(A, B)$ на $\mathbf{K}_2(F(A), F(B))$ взаимно однозначно для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$.

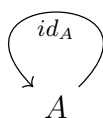
Определение 16.50. Категория \mathbf{K}_1 называется *полной подкатегорией* категории \mathbf{K}_2 , если она является подкатегорией и функтор вложения полный. Иными словами, $\mathbf{K}_1(A, B) = \mathbf{K}_2(A, B)$ для любых $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$.

Пример 16.51. Следующая категория \mathcal{K}

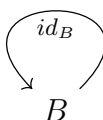


имеет четыре полные подкатегории.

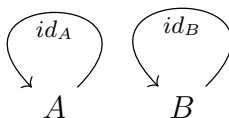
Первая



Вторая



А также вся категория \mathcal{K} и ещё пустая подкатегория без объектов и без стрелок. Следующая подкатегория полной не является



Определение 16.52. Говорят, что функтор F *отражает изоморфизмы*, если он их „сохраняет в сторону прообраза“. Это значит, что для любой стрелки f , если $F(f)$ является изоморфизмом, то и f является изоморфизмом.

Теорема 16.53. *Любой строгий и полный функтор отражает изоморфизмы.*

Доказательство. Пусть функтор $F: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ строгий и полный. Возьмём произвольную стрелку $f: A \rightarrow B$ в категории \mathcal{K}_1 . Предположим, что $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ является изоморфизмом. Возьмём обратную стрелку $F(f)^{-1}: F(B) \rightarrow F(A)$. Она является образом некоторой стрелки $g: B \rightarrow A$ в силу полноты функтора F .

$$F(f)^{-1} = F(g)$$

Докажем, что $g = f^{-1}$, то есть

$$g \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B$$

Действительно

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = F(f)^{-1} \circ F(f) = id_{F(A)} = F(id_A)$$

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(f)^{-1} = id_{F(B)} = F(id_B)$$

и в силу строгости F должно быть

$$g \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B$$

□

Следствие 16.54. *Если объекты A и B изоморфны в категории \mathbf{K} , то они изоморфны и в любой полной подкатегории, которой они оба принадлежат (функтор вложения строгий и полный, поэтому отражает изоморфизмы).*

16.2 Эпиморфизмы

Эпиморфизмы – это мономорфизмы в двойственной категории.

Соглашение 16.55. Выберем в \mathbf{Set} некоторое множество из двух элементов $\Omega = \{\top, \perp\}$ (конкретный выбор совершенно не важен), его элементы будем называть *истиной* и *ложью*, а само множество – *множеством значений истинности*. Стрелки вида $g: B \rightarrow \Omega$ взаимно однозначно соответствуют подмножествам B . Каждой такой стрелке соответствует подмножество $\{y \in B \mid g(y) = \top\}$. И наоборот, подмножеству $B' \subseteq B$ соответствует стрелка, принимающая значение \top на всех элементах подмножества B' и значение \perp на остальных, эта стрелка называется *характеристической стрелкой* подмножества B' .

Определение 16.56. Стрелка $f: A \rightarrow B$ называется *эпиморфизмом*, или *эпиморфной стрелкой*, если для любого объекта C и любых двух стрелок $g_1, g_2: B \rightarrow C$ из равенства $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует равенство $g_1 = g_2$.

Соглашение 16.57. Тот факт, что стрелка $f: A \rightarrow B$ является эпиморфизмом, будем выражать так $f: A \twoheadrightarrow B$

Таким образом, для эпиморфизма f из $g_1 \circ f = g_2 \circ f$

$$A \xrightarrow{f} \twoheadrightarrow B \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} C$$

следует равенство $g_1 = g_2$.

Пример 16.58. В \mathbf{Set} стрелка $f: A \rightarrow B$ является эпиморфизмом если и только если она сюръективна, то есть

$$\forall y \in B \exists x \in A (f(x) = y)$$

Действительно, пусть функция f сюръективна. Рассмотрим диаграмму

$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} C$$

Её коммутативность означает, что

$$\forall x \in A (g_1(f(x)) = g_2(f(x)))$$

Но всякий элемент $y \in B$ имеет вид $f(x)$ для некоторого $x \in A$, поэтому

$$\forall y \in B (g_1(y) = g_2(y))$$

и поэтому $g_1 = g_2$. Таким образом, f является эпиморфизмом.

В обратную сторону, пусть f не является сюръекцией. Это значит, существует элемент $y \in B$ такой, что

$$\forall x \in A (f(x) \neq y)$$

Докажем, что f – не эпиморфизм. Возьмём два подмножества B

$$B' = \{y\}$$

$$B'' = \emptyset$$

и соответствующие им характеристические функции $g_1, g_2: B \rightarrow \{\top, \perp\}$ (функция g_2 тождественно равна \perp на всех элементах B , а функция g_1 принимает значение \top только на y). Мы видим, что $g_1 \circ f = g_2 \circ f$

$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} \{\top, \perp\}$$

Но $g_1 \neq g_2$, поэтому f не является эпиморфизмом. Таким образом, всякий эпиморфизм является сюръекцией.

Упражнение 16.59. Тождественные стрелки являются эпиморфизмами. Композиция двух эпиморфизмов является эпиморфизмом.

Упражнение 16.60. В категориях предпорядка все стрелки являются эпиморфизмами.

Упражнение 16.61. Любая стрелка в начальный объект $f: A \rightarrow 0$ является эпиморфизмом.

Определение 16.62. Стрелка $f: A \rightarrow B$ называется *обратимой справа*, или *ретракцией*, если существует стрелка $g: B \rightarrow A$ такая, что $f \circ g = id_B$.

Упражнение 16.63. Любая стрелка, обратимая справа (в частности, любой изоморфизм), является эпиморфизмом. Обратное неверно: в категориях частичного порядка все стрелки эпиморфны, но только тождественные обратимы справа.

Упражнение 16.64. Стрелка $p: N \rightarrow N$ является эпиморфизмом.

Замечание 16.65. В \mathbf{Set} все эпиморфизмы обратимы справа, но чтобы это доказать, нужна аксиома выбора. Если есть сюръекция $f: A \twoheadrightarrow B$, можно построить $g: B \rightarrow A$ такую, что $f \circ g = id_B$, то есть

$$f(g(y)) = y \text{ для всех } y \in B$$

Функция g по каждому $y \in B$ будет выдавать некоторое $x \in A$ со свойством $f(x) = y$, такое x существует, потому что f – сюръекция.

Упражнение 16.66. Если композиция $h \circ f$ является эпиморфизмом, то и h является эпиморфизмом.

Упражнение 16.67. Если стрелка f эпиморфна, то эпиморфны и все стрелки вида $[f, g]$, а также $[g, f]$.

Упражнение 16.68. Если стрелки f и g эпиморфны, то и стрелка $f+g$ эпиморфна.

Пример 16.69. Пусть \mathbf{K} – конкретная категория со стирающим функтором $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$. Стрелка $f: A \rightarrow B$ эпиморфна, если эпиморфна функция $G(f): G(A) \rightarrow G(B)$ между множествами-носителями. Часто это выражают словами „строгие функторы отражают эпиморфизмы“. Действительно, из $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует

$$G(g_1) \circ G(f) = G(g_2) \circ G(f)$$

далее $G(g_1) = G(g_2)$ вследствие эпиморфности $G(f)$ и $g_1 = g_2$ вследствие строгости функтора G .

Обратное верно не всегда! Бывают случаи, когда стрелка f эпиморфна, а $G(f)$ нет. Контрпримеры можно найти в любом учебнике по теории категорий и я не хочу их переписывать. Чтобы что-то понять, надо прочитать минимум два учебника.

Упражнение 16.70. Левые сопряжённые функторы сохраняют эпиморфизмы. Точнее, если $F \dashv G$ и $h: A \twoheadrightarrow B$, то $F(h): F(A) \twoheadrightarrow F(B)$.

Пример 16.71. В декартово замкнутой категории, если $h: A \twoheadrightarrow B$, то $h \times id_C: A \times C \twoheadrightarrow B \times C$.

Потому что функтор $(-) \times C$ является левым сопряжённым (к экспоненте).

Замечание 16.72. В \mathbf{Set} , если стрелка является мономорфизмом и эпиморфизмом одновременно, она является изоморфизмом. В произвольных категориях это не так. В категориях частичного порядка все стрелки мономорфны и эпиморфны, но только тождественные являются изоморфизмами.

Упражнение 16.73. Мономорфизм, обратимый справа (это более сильное свойство, чем эпиморфность), является изоморфизмом. Эпиморфизм, обратимый слева (это более сильное свойство, чем мономорфность), является изоморфизмом.

Замечание 16.74. Во многих категориях эпиморфизмы с началом A (то есть, стрелки вида $f: A \twoheadrightarrow B$) соответствуют тому, что алгебраисты называют *факторобъектами* A . На множестве таких эпиморфизмов определим отношение эквивалентности следующим способом: для стрелок $f: A \twoheadrightarrow B$ и $g: A \twoheadrightarrow C$ положим $f \simeq g$ если и только если найдётся изоморфизм $h: B \rightarrow C$ такой, что $h \circ f = g$

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xleftarrow{f} & A \\
 \downarrow h & & \swarrow g \\
 C & \xleftarrow{g} &
 \end{array}$$

В категории групп \mathbf{Grp} отображение группы A на любую факторгруппу B будет эпиморфизмом и факторгруппы однозначно соответствуют эпиморфизмам (с точностью до эквивалентности \simeq). Тем не менее, во многих категориях определять факторобъекты как эпиморфизмы нельзя и вопрос непростой. В качестве контрпримера годится Пример 16.42, определённое там отображение является также и эпиморфизмом в категории \mathbf{Poset} , но связное двоеточие неестественно считать факторобъектом дискретного. Опять же, для конкретных категорий удаётся дать

хорошее определение факторобъекта, которое существенно использует стирающий функтор, его можно найти в книге Adamek, Herrlich, Strecker “The Joy of Cats” на странице 136.

16.3 Несколько теорем о сопряжённых функторах

Здесь, по замыслу, должен быть раздел о рефлексивных подкатегориях, но пока нет силы воли его написать. Выложу теоремы, для которых выписал доказательства. При первом чтении можно пропустить.

Теорема 16.75. Пусть $F \dashv G$. Функтор G строгий если и только если коединица ε состоит из эпиморфизмов.

Доказательство. Пусть функтор G строгий. Докажем, что все стрелки ε_X эпиморфны. Предположим, что коммутативна следующая диаграмма

$$F(G(X)) \xrightarrow{\varepsilon_X} X \begin{array}{c} \xrightarrow{h_1} \\ \xrightarrow{h_2} \end{array} Y$$

Покажем, что $h_1 = h_2$. Применим к диаграмме преобразование G и получим коммутативную диаграмму

$$G(X) \xrightarrow{id_{G(X)}} G(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{G(h_1)} \\ \xrightarrow{G(h_2)} \end{array} G(Y)$$

Её коммутативность означает, что $G(h_1) \circ id = G(h_2) \circ id$, поэтому $G(h_1) = G(h_2)$ и наконец $h_1 = h_2$ в силу строгости G . Таким образом, на ε_X можно сокращать, эта стрелка является эпиморфизмом.

В обратную сторону, пусть все стрелки ε_X эпиморфны. Докажем, что функтор G строгий. Пусть $G(h_1) = G(h_2)$, где $h_1, h_2: X \rightarrow Y$. Тогда коммутативна диаграмма

$$G(X) \xrightarrow{id_{G(X)}} G(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{G(h_1)} \\ \xrightarrow{G(h_2)} \end{array} G(Y)$$

Применим к ней преобразование F и получим

$$F(G(X)) \xrightarrow{\varepsilon_X} X \begin{array}{c} \xrightarrow{h_1} \\ \xrightarrow{h_2} \end{array} Y$$

Сокращаем на ε_X и получаем $h_1 = h_2$. \square

Теорема 16.76. Пусть $F \dashv G$. Функтор G полный если и только если коединица ε состоит из обратимых слева стрелок (это более сильное свойство, чем мономорфность).

Доказательство. Пусть для любой стрелки $\varepsilon_X: F(G(X)) \rightarrow X$ есть такая стрелка $\varepsilon'_X: X \rightarrow F(G(X))$, что

$$\varepsilon'_X \circ \varepsilon_X = id_{F(G(X))}$$

Покажем, что функтор G полный. Надо доказать, что каждая стрелка $g: G(X) \rightarrow G(Y)$ имеет вид $g = G(h)$ для некоторой $h: X \rightarrow Y$. Положим $h = \Phi(g) \circ \varepsilon'_X$

$$X \xrightarrow{\varepsilon'_X} F(G(X)) \xrightarrow{\Phi(g)} Y$$

Из свойств сопряжённости легко вывести $G(h) = \Gamma(h \circ \varepsilon_X)$
Действительно

$$\Gamma(h \circ \varepsilon_X) = G(h) \circ \Gamma(\varepsilon_X) = G(h) \circ id = G(h)$$

Поэтому

$$G(h) = \Gamma(h \circ \varepsilon_X) = \Gamma(\Phi(g) \circ \varepsilon'_X \circ \varepsilon_X) = \Gamma(\Phi(g)) = g$$

В другую сторону, пусть функтор G полный. Покажем, что для каждой стрелки $\varepsilon_X: F(G(X)) \rightarrow X$ есть такая стрелка $\varepsilon'_X: X \rightarrow F(G(X))$, что

$$\varepsilon'_X \circ \varepsilon_X = id_{F(G(X))}$$

Рассмотрим стрелку $\eta_{G(X)}: G(X) \rightarrow G(F(G(X)))$ В силу полноты функтора G должна существовать стрелка $h: X \rightarrow F(G(X))$ такая, что $\eta_{G(X)} = G(h)$. Положим $\varepsilon'_X = h$, тогда

$$\eta_{G(X)} = G(\varepsilon'_X) = \Gamma(\varepsilon'_X \circ \varepsilon_X)$$

потому что $G(h) = \Gamma(h \circ \varepsilon_X)$ Применив Φ , получаем

$$id_{F(G(X))} = \varepsilon'_X \circ \varepsilon_X$$

□

Следствие 16.77. Пусть $F \dashv G$. Функтор G строгий и полный если и только если коединица ε состоит из изоморфизмов.

Применяя принцип двойственности, получаем следующее.

Теорема 16.78. Пусть $F \dashv G$. Функтор F строгий если и только если единица η состоит из мономорфизмов.

Теорема 16.79. Пусть $F \dashv G$. Функтор F полный если и только если единица η состоит из обратимых справа стрелок (это более сильное свойство, чем эпиморфность).

Следствие 16.80. Пусть $F \dashv G$. Функтор F строгий и полный если и только если единица η состоит из изоморфизмов.

Замечание 16.81. Не уверен, что эти теоремы нам понадобятся, но это классика. Если придумаю хороший не алгебраический пример, потом здесь вставлю.

16.4 Эквивалентность категорий

Уважаемые люди мне говорили, что понятие эквивалентности категорий является фундаментальным и излагать его надо в начале книги. Но я придерживаюсь принципа „не вводить понятия задолго до того, как они становятся нужны“ и до сих пор понятие эквивалентности категорий не понадобилось ни разу! К тому же, материал технически трудный. Тем не менее, игнорировать его больше нельзя и в данном месте его удобно изложить. Идея в том, что изоморфизм категорий – не совсем то отношение эквивалентности категорий, которое реально нужно, оно слишком жёсткое и мы введём менее ограничительное отношение.

Пример 16.82. Пусть K_1 – категория предупорядоченных множеств и их монотонных отображений друг в друга, K_2 – категория малых категорий предпорядка и функторов между ними. Рассмотрим два функтора

$$G: K_2 \rightarrow K_1$$

$$F: K_1 \rightarrow K_2$$

которые определим так. Функтор G сопоставляет каждой малой категории предпорядка K множество её объектов $\text{Ob}(K)$, на котором задан предпорядок

$$A \lesssim B \Leftrightarrow \text{существует стрелка из } A \text{ в } B$$

Функтор F сопоставляет предупорядоченному множеству (M, \lesssim) категорию, объектами которой являются элементы M , а стрелка между A и B берётся ровно одна, если $A \lesssim B$, для определённости можно считать такой стрелкой саму пару (A, B) .

Функторы F и G не являются взаимно обратными и не устанавливают изоморфизм категорий K_1 и K_2 . Проблема в том, что разные категории предпорядка могут порождать одно и то же предупорядоченное множество. Рассмотрим две категории

$$\begin{array}{ccc} id_B \hookrightarrow B & & id_B \hookrightarrow B \\ & \uparrow f & & \uparrow g \\ id_A \hookrightarrow A & & id_A \hookrightarrow A \end{array}$$

они изоморфны между собой и отличаются только названием единственной стрелки из A в B . Им соответствует одно и то же предпорядоченное множество $\{A, B\}$, в котором $A \lesssim B$. Таким образом, функтор G переводит две разные (хотя изоморфные) категории предпорядка в одно и тоже предпорядоченное множество, поэтому он не может быть обратимым. Категория K_2 получается из K_1 некоторым „раздуванием“, каждый объект категории K_1 присутствует в K_2 во многих изоморфных копиях.

Пример 16.83. Пусть K_1 – категория полугрупп с единицей и их гомоморфизмов друг в друга, K_2 – категория малых категорий с одним объектом и функторов между ними. Рассмотрим два функтора

$$G: K_2 \rightarrow K_1$$

$$F: K_1 \rightarrow K_2$$

которые определим так. Функтор G сопоставляет каждой малой категории K с одним объектом полугруппу её морфизмов $\text{Mor}(K)$. Функтор F сопоставляет каждой полугруппе с единицей (M, \circ, e) категорию с одним объектом (всё равно каким, для определённости обозначим его A), а стрелками из A в A будут элементы M с композицией \circ и тождественной стрелкой $id_A = e$.

Функторы F и G не являются взаимно обратными и не устанавливают изоморфизм категорий K_1 и K_2 . Проблема в том, что разные категории с одним объектом могут порождать одну и ту же полугруппу с единицей, если они отличаются только названием единственного объекта (такие категории, конечно, изоморфны между собой). Ситуация здесь такая же, как в предыдущем примере.

Пример 16.84. Пусть K_1 – категория множеств и частичных (не обязательно всюду определённых) функций между ними.

Пусть K_2 – категория множеств с отмеченной точкой. Её объекты – пары (A, a) , где A – непустое множество, $a \in A$. Морфизмом (точнее, протоморфизмом) между (A, a) и (B, b) является любая функция $f: A \rightarrow B$, для которой $f(a) = b$. Таким образом, морфизмы – это функции, переводящие отмеченный элемент в отмеченный. Рассмотрим два функтора

$$F: K_1 \rightarrow K_2$$

$$G: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_1$$

F по множеству A выдаёт дизъюнктное объединение $A + \{*\}$, то есть к множеству A добавляется новый элемент $*$, который будет отмеченным и играет роль „неопределённого“ или “зацикленного” элемента. По частичной функции $f: A \rightarrow B$ этот функтор выдаёт функцию $F(f)$, которая принимает значение $*$ там, где f не определена.

$$F(A) = A + \{*\}$$

$$F(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \text{ определена;} \\ *, & \text{если } f(x) \text{ не определена или } x = * \end{cases}$$

где $x \in A + \{*\}$.

G по множеству с отмеченной точкой (A, a) выдаёт $A - \{a\}$ (выбрасывает отмеченную точку). По морфизму f из (A, a) в (B, b) этот функтор выдаёт частичную функцию $G(f)$, которая не определена там, где f принимает значение b .

$$G(A, a) = A - \{a\}$$

$$G(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \neq b; \\ \text{не определено,} & \text{если } f(x) = b \end{cases}$$

где $x \in A - \{a\}$.

Функторы F и G не являются взаимно обратными и не устанавливают изоморфизм категорий \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 . Множества $\{0, 1, 2, 5\}$ с отмеченной точкой 5 и $\{0, 1, 2, 6\}$ с отмеченной точкой 6 функтор G отображает в одно и то же множество $\{0, 1, 2\}$. Опять же, в категории множеств с отмеченной точкой эти объекты изоморфны.

Упражнение 16.85. Проверьте, что во всех трёх примерах выполнены естественные изоморфизмы

$$G \circ F \cong Id_{\mathbf{K}_1}$$

$$F \circ G \cong Id_{\mathbf{K}_2}$$

Определение 16.86. Будем говорить, что функтор $F: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ имеет *представительный образ*, если для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{K}_2)$ существует $A \in \text{Ob}(\mathcal{K}_1)$ такой, что $F(A) \cong X$. Иными словами, всякий объект категории \mathcal{K}_2 изоморфен объекту вида $F(A)$.

Определение 16.87. Функтор $F: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ называется *функтором эквивалентности*, если он строгий, полный и имеет представительный образ. Категории \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 *эквивалентны*, если существует функтор эквивалентности $F: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$.

Упражнение 16.88. Проверьте, что во всех приведённых выше примерах функторы F и G являются функторами эквивалентности.

Упражнение 16.89. Любой тождественный функтор $Id_{\mathcal{K}}$ является функтором эквивалентности.

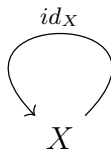
Любой функтор-изоморфизм является функтором эквивалентности (поэтому изоморфные категории эквивалентны).

Композиция функторов эквивалентности является функтором эквивалентности.

Замечание 16.90. Из этого следует, что отношение эквивалентности категорий рефлексивно и транзитивно, но симметричность придётся доказывать с использованием аксиомы выбора, что мы и сделаем чуть позже.

Пример 16.91. Пусть в категории \mathcal{K} есть полная подкатегория \mathcal{K}' такая, что каждый объект K изоморфен некоторому объекту K' . Тогда функтор вложения устанавливает эквивалентность \mathcal{K}' и \mathcal{K} .

Замечание 16.92. Малая категория может быть эквивалентна „большой“. Рассмотрим категорию всех одноэлементных множеств и функций между ними (между любыми двумя одноэлементными множествами функция ровно одна). Это большая категория, потому что одноэлементных множеств очень много (элемент может быть чем угодно). Но она эквивалентна категории с одним объектом и одной стрелкой



Теорема 16.93. Следующие утверждения равносильны:

- 1) Существует функтор эквивалентности $F: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$;
- 2) Существуют функторы

$$F: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$$

$$G: \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{K}_1$$

такие, что

$$G \circ F \cong Id_{\mathcal{K}_1}$$

$$F \circ G \cong Id_{\mathcal{K}_2}$$

Доказательство. Из (2) следует (1):

Пусть выполнено условие (2). Функтор F имеет представительный образ, поскольку

$$X \cong F(G(X)) \text{ для каждого } X \in \text{Ob}(\mathcal{K}_2)$$

Докажем строгость F . Естественный изоморфизм между $G \circ F$ и $Id_{\mathcal{K}_1}$ обозначим τ

$$\tau: G \circ F \rightarrow Id_{\mathcal{K}_1}$$

Для любой стрелки $g: A \rightarrow B$ коммутативен следующий квадрат (ввиду естественности τ)

$$\begin{array}{ccc} G(F(A)) & \xrightarrow{\tau_A} & A \\ G(F(g)) \downarrow & & \downarrow g \\ G(F(B)) & \xrightarrow{\tau_B} & B \end{array}$$

Поэтому $g = \tau_B \circ G(F(g)) \circ \tau_A^{-1}$. Таким образом, по стрелке $F(g)$ мы можем однозначно найти g , поэтому функтор F строгий.

Симметричным рассуждением, используя изоморфизм $F \circ G \cong Id_{\mathcal{K}_2}$, можно показать, что G строгий. Докажем, наконец, что F полон. Пусть дана стрелка вида $f: F(A) \rightarrow F(B)$. Надо найти стрелку $g: A \rightarrow B$ такую, что $F(g) = f$. В силу строгости G достаточно найти

$g: A \rightarrow B$ со свойством $G(F(g)) = G(f)$.

Положим $g = \tau_B \circ G(f) \circ \tau_A^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} G(F(A)) & \xrightarrow{\tau_A} & A \\ G(f) \downarrow & & \downarrow g \\ G(F(B)) & \xrightarrow{\tau_B} & B \end{array}$$

Сравнивая с коммутативным квадратом выше, получаем

$$G(F(g)) = G(f) \quad (\text{обе стрелки равны } \tau_B^{-1} \circ g \circ \tau_A)$$

В обратную сторону, из (1) следует (2):

Пусть дан функтор эквивалентности $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$.

Для каждого $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ существует $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ такой, что $F(A) \cong X$.

Выберем для каждого X некоторый A с таким свойством, положим $G(X) = A$, а соответствующий изоморфизм обозначим ε_X

$$\varepsilon_X: F(G(X)) \rightarrow X$$

Определим действие G на стрелках. Для каждой стрелки $f: X \rightarrow Y$ есть ровно одна стрелка $g: G(X) \rightarrow G(Y)$, делающая коммутативной следующую диаграмму, положим $G(f) = g$

$$\begin{array}{ccc} G(X) & & F(G(X)) \xrightarrow{\varepsilon_X} X \\ \downarrow g & & \downarrow F(g) \quad \downarrow f \\ G(Y) & & F(G(Y)) \xrightarrow{\varepsilon_Y} Y \end{array}$$

Действительно, $F(g)$ по f определяется однозначно

$$F(g) = \varepsilon_Y^{-1} \circ f \circ \varepsilon_X$$

затем используем строгость и полноту F , чтобы найти g .

Изоморфизм $Id_{\mathbf{K}_1} \cong F \circ G$ доказывается так. Для каждого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ определим изоморфизм $\eta_A: A \rightarrow F(G(A))$ как единственную стрелку, делающую коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & F(A) & A \\
 & \swarrow id_{F(A)} & \downarrow \eta_A \\
 & F(G(F(A))) & G(F(A)) \\
 & \xleftarrow{\varepsilon_{F(A)}} & \\
 F(A) & &
 \end{array}$$

Действительно, коммутативность треугольника означает, что

$$\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = id$$

поэтому $F(\eta_A)$ определено однозначно

$$F(\eta_A) = \varepsilon_{F(A)}^{-1}$$

и является изоморфизмом. В силу строгости и полноты F по $F(\eta_A)$ однозначно находится η_A и тоже является изоморфизмом (строгий полный функтор отражает изоморфизмы).

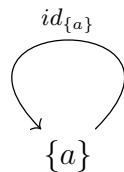
Желающие могут проверить, что получилась сопряжённость $F \dashv G$. Таким образом, к каждому функтору эквивалентности есть правый сопряжённый. Левый сопряжённый тоже есть, конструкция двойственная (надо взять $F^{\text{op}}: \mathbf{K}_1^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{K}_2^{\text{op}}$, построить к нему правый сопряжённый и перевернуть), выписана явно в книге Маклейна. \square

Определение 16.94. Будем называть категорию \mathbf{K}' *скелетной*, если из $A \cong B$ следует $A = B$ для любых двух объектов $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K}')$.

Пример 16.95. Скелетные предпорядки – это частичные порядки.

Определение 16.96. *Скелет* категории \mathbf{K} – это её полная скелетная подкатегория \mathbf{K}' такая, что каждый объект K изоморфен некоторому объекту K' . Содержательно, объекты K распадаются на классы изоморфных между собой (по отношению $A \cong B$) и скелет – это полная подкатегория, содержащая по одному объекту из каждого класса. Из аксиомы выбора следует, что у всякой категории есть скелет. Скелетов у данной категории может быть много, но все они изоморфны между собой.

Пример 16.97. Скелетом категории одноэлементных множеств будет любая категория следующего вида



где $\{a\}$ – произвольное одноэлементное множество.

Упражнение 16.98.

1. Если скелетные категории эквивалентны, то они изоморфны;
2. Категория эквивалентна любому своему скелету;
3. Все скелеты данной категории изоморфны между собой;
4. Категории эквивалентны если и только если их скелеты изоморфны.

Замечание 16.99. В книге Freyd, Scedrov “Categories, Allegories” дано другое (равносильное) определение эквивалентности, которое имеет два преимущества:

1. Отражает суть дела;
2. Хорошо работает без аксиомы выбора.

К сожалению, часть терминологии Фрейда и Щедрова отличается от общепринятой. Определения строгого функтора (faithful functor) и вложения (embedding), которые они дают, не равносильны общепринятым. Я попытался перевести их определение эквивалентности на привычный язык и сейчас его изложу. **ВСЬ ТЕКСТ ДО КОНЦА РАЗДЕЛА, ВОЗМОЖНО, ЯВЛЯЕТСЯ ГРАФОМАНИЕЙ АВТОРА, ФРЕЙД И ЩЕДРОВ ЗА НЕГО НЕ ОТВЕЧАЮТ.**

Определение 16.100. Будем называть категорию K' *раздуванием* категории K (у Фрейда и Щедрова inflation), если существует функтор $F: K' \rightarrow K$, строгий, полный и сюръективный на объектах (это значит, что отображение $F: \text{Ob}(K') \rightarrow \text{Ob}(K)$ сюръективно).

Замечание 16.101. Содержательно, категория K' получена из категории K размножением некоторых объектов K во многих изоморфных копиях. Если для объектов $A, B \in \text{Ob}(K')$ верно $F(A) = F(B)$, то $A \cong B$, поскольку строгий полный функтор F отражает изоморфизмы. Категория K' определяется (с точностью до изоморфизма категорий) своим классом объектов $\text{Ob}(K')$ и сюръективным отображением $F: \text{Ob}(K') \rightarrow \text{Ob}(K)$. Действительно, стрелки $K'(A, B)$ взаимно однозначно соответствуют стрелкам $K(F(A), F(B))$ в силу строгости и полноты F .

Определение 16.102. Будем называть категории K_1 и K_2 *эквивалентными*, если у них есть общее раздувание.

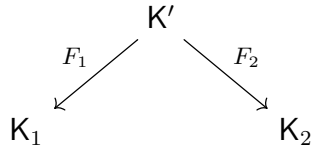
Замечание 16.103. Из этого определения видно, что отношение эквивалентности рефлексивно и симметрично, но транзитивность не очевидна. Транзитивность доказывать не буду, чтобы у заинтересованных людей был стимул почитать книгу Фрейда и Щедрова.

Теорема 16.104. Следующие утверждения равносильны:

- 1) У категорий K_1 и K_2 есть общее раздувание;
- 2) Существует функтор эквивалентности $F: K_1 \rightarrow K_2$.

Доказательство. Из (1) следует (2):

Пусть K' – общее раздувание K_1 и K_2



Построим сначала функтор эквивалентности $G: K_1 \rightarrow K'$, он будет обладать свойством

$$F_1 \circ G = \text{Id}_{K_1}$$

Для каждого $X \in \text{Ob}(K_1)$ существует $A \in \text{Ob}(K')$ такой, что $F_1(A) = X$ (поскольку F_1 сюръективен на объектах). Выберем для каждого X некоторый A с таким свойством и положим $G(X) = A$. Таким образом

$$F_1(G(X)) = X \text{ для каждого } X \in \text{Ob}(K_1)$$

Определим действие G на стрелках. В силу строгости и полноты F_1 для каждой стрелки $f: X \rightarrow Y$, то есть $f: F_1(G(X)) \rightarrow F_1(G(Y))$ существует ровно одна стрелка $g: G(X) \rightarrow G(Y)$ со свойством $F_1(g) = f$. Положим $G(f) = g$. Таким образом

$$F_1(G(f)) = f \text{ для каждого } f \in \text{Mor}(\mathbb{K}_1)$$

Докажем, что G строгий и полный. Действительно, для каждой стрелки $g: G(X) \rightarrow G(Y)$ есть ровно одна стрелка $f: X \rightarrow Y$ со свойством $G(f) = g$, а именно $f = F_1(g)$. Потому что в силу строгости F_1 следующие равенства равносильны

$$G(f) = g$$

$$F_1(G(f)) = F_1(g)$$

$$f = F_1(g)$$

Докажем, что G имеет представительный образ. Действительно

$$F_1(G(F_1(A))) = F_1(A)$$

и строгий полный функтор F_1 отражает изоморфизмы, поэтому

$$G(F_1(A)) \cong A \text{ для каждого } A \in \text{Ob}(\mathbb{K}')$$

Мы построили функтор эквивалентности $G: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}'$. Функтор F_2 тоже является функтором эквивалентности и композиция функторов эквивалентности $F_2 \circ G: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ является функтором эквивалентности.

Из (2) следует (1):

Пусть дан функтор эквивалентности $F: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$.

Рассмотрим следующую категорию \mathbb{K}' . Объектами \mathbb{K}' будут тройки вида (A, h, X) , где $A \in \text{Ob}(\mathbb{K}_1)$, $X \in \text{Ob}(\mathbb{K}_2)$, а стрелка $h: F(A) \rightarrow X$ является изоморфизмом. Морфизмами (точнее, протоморфизмами) между объектами (A_1, h_1, X_1) и (A_2, h_2, X_2) будут пары стрелок (g, f) , где $g: A_1 \rightarrow A_2$, $f: X_1 \rightarrow X_2$ и следующий квадрат коммутативен

$$\begin{array}{ccc}
 F(A_1) & \xrightarrow{h_1} & X_1 \\
 F(g) \downarrow & & \downarrow f \\
 F(A_2) & \xrightarrow{h_2} & X_2
 \end{array}$$

Заметим, что в любом морфизме (f, g) стрелки f и g однозначно определяют друг друга

$$f = h_2 \circ F(g) \circ h_1^{-1}$$

$$F(g) = h_2^{-1} \circ f \circ h_1$$

и по $F(g)$ однозначно находится g в силу полноты и строгости F . Категория \mathbf{K}' будет общим раздуванием \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{K}' & \\
 F_1 \swarrow & & \searrow F_2 \\
 \mathbf{K}_1 & & \mathbf{K}_2
 \end{array}$$

Функтор F_1 отображает объект (A, h, X) в A и стрелку (g, f) в g .

Функтор F_2 отображает объект (A, h, X) в X и стрелку (g, f) в f .

F_1 строгий и полный. Морфизмы $(g, f): (A_1, h_1, X_1) \rightarrow (A_2, h_2, X_2)$ взаимно однозначно соответствуют морфизмам $g: A_1 \rightarrow A_2$, поскольку f однозначно находится по g .

F_2 строгий и полный. Морфизмы $(g, f): (A_1, h_1, X_1) \rightarrow (A_2, h_2, X_2)$ взаимно однозначно соответствуют морфизмам $f: X_1 \rightarrow X_2$, поскольку g однозначно находится по f .

F_1 сюръективен на объектах, поскольку $A = F_1(A, id_{F(A)}, F(A))$.

F_2 сюръективен на объектах, поскольку каждый X изоморфен некоторому $F(A)$, обозначим соответствующий изоморфизм $h: F(A) \rightarrow X$ и получим $X = F_2(A, h, X)$. \square

Глава 17

Лемма Йонеды

Определение 17.1. Пусть \mathcal{K} – локально малая категория. Определим функтор $\text{Hom}_{\mathcal{K}}: \mathcal{K}^{\text{op}} \times \mathcal{K} \rightarrow \text{Set}$ следующим образом

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}}(A', A) = \mathcal{K}(A', A)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}}(f_1, f_2)(h) = f_2 \circ h \circ f_1$$

для любых $A', A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$, $f_1 \in \mathcal{K}(B', A')$, $f_2 \in \mathcal{K}(A, B)$, $h \in \mathcal{K}(A', A)$.

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{h} & A \\ f_1 \uparrow & & \downarrow f_2 \\ B' & \xrightarrow{f_2 \circ h \circ f_1} & B \end{array}$$

Заметим, что $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(f_1, f_2): \mathcal{K}(A', A) \rightarrow \mathcal{K}(B', B)$.

Таким образом, по паре объектов (A', A) функтор $\text{Hom}_{\mathcal{K}}$ выдаёт множество $\mathcal{K}(A', A)$ всех стрелок из A' в A . По паре стрелок вида

$$f_1: B' \rightarrow A'$$

$$f_2: A \rightarrow B$$

этот функтор выдаёт функцию из множества $\mathcal{K}(A', A)$ во множество $\mathcal{K}(B', B)$, которая любую стрелку $h \in \mathcal{K}(A', A)$ умножает слева на f_2 и справа на f_1 , получается $f_2 \circ h \circ f_1$.

Фиксируя первый или второй аргумент у функтора Hom , можно получить важные функторы от одного аргумента, которые мы и будем изучать в этой главе.

Замечание 17.2. На практике обычно встречаются только локально малые категории. Тем не менее, нетрудно придумать пример категории, которая не будет локально малой. Возьмём совокупность всех множеств с операцией объединения \cup . Операция ассоциативна, поэтому получается „очень большая полугруппа с единицей“ (единицей будет \emptyset). Если рассматривать её как категорию с одним объектом, она не будет локально малой (объект один, а стрелки из него в него – это все множества, их очень много).

17.1 Контравариантная лемма Йонеды

Определение 17.3. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория. Для каждого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ определим следующий функтор $H_A: \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$

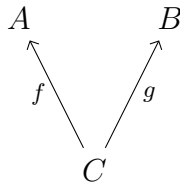
$$H_A(D) = \mathbf{K}(D, A)$$

$$H_A(f)(g) = g \circ f \quad (\text{умножение справа на } f)$$

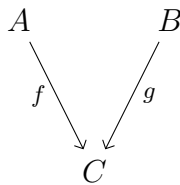
где $D \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, $f \in \mathbf{K}(C, D)$, $g \in H_A(D)$ (то есть $g \in \mathbf{K}(D, A)$).

$$\begin{array}{ccc} D & & \mathbf{K}(D, A) \\ \uparrow f & & \circ f \downarrow = H_A(f) \\ C & & \mathbf{K}(C, A) \end{array}$$

Пример 17.4. Пусть \mathbf{K} – категория частичного порядка, имеющая следующий вид (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)



Двойственная категория \mathbf{K}^{op} имеет вид (тождественные стрелки не показаны)



Функтор вида $F: \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ задаётся тройкой множеств и парой функций

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & & F(B) \\
 & \searrow^{F(f)} & \swarrow_{F(g)} \\
 & & F(C)
 \end{array}$$

Функтор H_A имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
 \{id_A\} & & \emptyset \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & \{f\}
 \end{array}$$

где функции единственно возможные, потому что все множества на диаграмме пустые или одноэлементные.

Функтор H_B имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & & \{id_B\} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & \{g\}
 \end{array}$$

Функтор H_C имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & & \emptyset \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & \{id_C\}
 \end{array}$$

Пример 17.5. Пусть \mathcal{K} – следующая категория (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Функтор $H_A: \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$

$$\{id_A\} \xleftarrow[H_A(g)]{H_A(f)} \emptyset$$

Функтор $H_B: \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$

$$\{f, g\} \xleftarrow[H_B(g)]{H_B(f)} \{id_B\}$$

Определение 17.6. Функтор $F: \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ называется *представимым*, если для некоторого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ выполнен изоморфизм

$$F \cong H_A$$

В этом случае объект A называют *представляющим объектом* функтора F , а сам изоморфизм – *представлением* функтора F . Функторы H_A иногда называют *основными представимыми контравариантными функторами*.

Пример 17.7. Пусть \mathbf{K} – некоторая категория. Пусть функтор $F: \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ сопоставляет каждому объекту \mathbf{K} одноэлементное множество $\{*\}$. Если в \mathbf{K} есть терминальный объект 1 , то F представим и представляющим объектом будет 1 , поскольку

$$F(D) = \{*\} \cong \mathbf{K}(D, 1) = H_1(D)$$

Естественность этого изоморфизма выражается диаграммой

$$\begin{array}{ccc} D & F(D) & \xrightarrow{\cong} H_1(D) \\ f \uparrow & F(f) \downarrow & \downarrow H_1(f) \\ C & F(C) & \xrightarrow{\cong} H_1(C) \end{array}$$

которая становится понятнее, если нарисовать её так

$$\begin{array}{ccc}
 D & \{*\} & \xrightarrow{\cong} \mathbf{K}(D, 1) \\
 \uparrow f & \downarrow id_{\{*\}} & \downarrow \circ f \\
 C & \{*\} & \xrightarrow{\cong} \mathbf{K}(C, 1)
 \end{array}$$

Умножение справа на f переводит единственный элемент $\mathbf{K}(D, 1)$ в единственный элемент $\mathbf{K}(C, 1)$.

$$!_D \circ f = !_C$$

Проверить естественность обратного изоморфизма не надо, она выполнена автоматически в силу Упражнения 6.10.

Пример 17.8. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория, в которой есть произведение некоторой пары объектов A и B . Верны следующие изоморфизмы

$$\mathbf{K}(D, A \times B) \cong \mathbf{K}(D, A) \times \mathbf{K}(D, B) \quad \text{для любого } D \in \text{Ob}(\mathbf{K})$$

(это изоморфизмы в \mathbf{Set}). Каждой стрелке $h: D \rightarrow A \times B$ соответствует пара стрелок $pr_1 \circ h: D \rightarrow A$ и $pr_2 \circ h: D \rightarrow B$, а каждой паре стрелок $g_1: D \rightarrow A$ и $g_2: D \rightarrow B$ соответствует стрелка $\langle g_1, g_2 \rangle: D \rightarrow A \times B$.

Упражнение 17.9. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория, $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Если существует произведение A и B , то представим функтор $H_A \times H_B: \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Представляющим объектом будет $A \times B$.

$$\begin{aligned}
 (H_A \times H_B)(D) &= H_A(D) \times H_B(D) = \mathbf{K}(D, A) \times \mathbf{K}(D, B) \cong \\
 &\cong \mathbf{K}(D, A \times B) = H_{A \times B}(D)
 \end{aligned}$$

где изоморфизм описан в предыдущем примере. Естественность этого изоморфизма выражается следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 D & H_{A \times B}(D) & \xrightarrow{\cong} H_A(D) \times H_B(D) \\
 \uparrow f & \downarrow H_{A \times B}(f) & \downarrow H_A(f) \times H_B(f) \\
 C & H_{A \times B}(C) & \xrightarrow{\cong} H_A(C) \times H_B(C)
 \end{array}$$

которая, возможно, станет понятнее, если нарисовать её так

$$\begin{array}{ccc}
 D & \mathbf{K}(D, A \times B) & \xrightarrow{\cong} \mathbf{K}(D, A) \times \mathbf{K}(D, B) \\
 \uparrow f & \downarrow \circ f & \downarrow (\circ f) \times (\circ f) \\
 C & \mathbf{K}(C, A \times B) & \xrightarrow{\cong} \mathbf{K}(C, A) \times \mathbf{K}(C, B)
 \end{array}$$

Далее мы будем интересоваться естественными преобразованиями вида $\tau: H_A \rightarrow F$. Оказывается, каждое такое преобразование однозначно определяется своей компонентой $\tau_A: H_A(A) \rightarrow F(A)$ и, более того, даже единственным элементом $\tau_A(id_A) \in F(A)$.

Пример 17.10. Возьмём в качестве \mathbf{K} следующую категорию частичного порядка (по несущественным причинам A сверху, B снизу)

$$\begin{array}{c}
 id_A \hookrightarrow A \\
 \uparrow f \\
 id_B \hookrightarrow B
 \end{array}$$

Естественные преобразования $\tau: H_A \rightarrow F$ выглядят так

$$\begin{array}{ccc}
 A & \{id_A\} & \xrightarrow{\tau_A} F(A) \\
 \uparrow f & \vdots & \downarrow F(f) \\
 B & \{f\} & \xrightarrow{\tau_B} F(B)
 \end{array}$$

Стрелка τ_A – функция из одноэлементного множества $\{id_A\}$ в $F(A)$, она однозначно определяется элементом $\tau_A(id_A) \in F(A)$.

Стрелка τ_B однозначно определяется элементом $\tau_B(f) = F(f)(\tau_A(id_A))$, то есть опять же элементом $\tau_A(id_A)$.

Соглашение 17.11. Совокупность всех естественных преобразований функтора F в функтор G будем обозначать $\text{Nat}(F, G)$.

Теорема 17.12. (Контравариантная лемма Йонеды). Пусть \mathbf{K} – локально малая категория, $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, $F: \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Существует взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями из H_A в F и элементами множества $F(A)$. Точнее, есть изоморфизм в \mathbf{Set}

$$\text{Nat}(H_A, F) \cong F(A)$$

Доказательство. Каждому естественному преобразованию $\tau: H_A \rightarrow F$ поставим в соответствие элемент $\tau_A(id_A) \in F(A)$.

Каждому элементу $a \in F(A)$ поставим в соответствие естественное преобразование $\check{a}: H_A \rightarrow F$, определённое так

$$\check{a}_B(f) = F(f)(a)$$

где $f \in H_A(B)$, то есть $f \in \mathbb{K}(B, A)$.

Докажем взаимную обратность этих отображений. Пусть дано естественное преобразование $\tau: H_A \rightarrow F$. Из его естественности следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_A(A) & \xrightarrow{\tau_A} & F(A) & & A \\ H_A(f) \downarrow & & \downarrow F(f) & & \uparrow f \\ H_A(B) & \xrightarrow{\tau_B} & F(B) & & B \end{array}$$

то есть

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(A, A) & \xrightarrow{\tau_A} & F(A) & & A \\ H_A(f) \downarrow & & \downarrow F(f) & & \uparrow f \\ \mathbb{K}(B, A) & \xrightarrow{\tau_B} & F(B) & & B \end{array}$$

для любого $B \in \text{Ob}(\mathbb{K})$ и любой стрелки $f: B \rightarrow A$. Это значит, что

$$\tau_B \circ H_A(f) = F(f) \circ \tau_A$$

поэтому для любой стрелки $g \in \mathbb{K}(A, A)$ будет верно

$$\tau_B(H_A(f)(g)) = F(f)(\tau_A(g))$$

$$\tau_B(g \circ f) = F(f)(\tau_A(g))$$

Взяв в качестве g стрелку id_A , получаем

$$\tau_B(f) = F(f)(\tau_A(id_A)) = \check{a}_B(f) \quad \text{для } a = \tau_A(id_A)$$

поэтому

$$\tau = \check{a} \quad \text{для } a = \tau_A(id_A)$$

В обратную сторону, пусть $a \in F(A)$. Тогда

$$\check{a}_A(id_A) = F(id_A)(a) = id_{F(A)}(a) = a$$

Надо ещё доказать, что \check{a} является естественным преобразованием для любого $a \in F(A)$, то есть коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_A(D) & \xrightarrow{\check{a}_D} & F(D) & D \\ H_A(f) \downarrow & & \downarrow F(f) & \uparrow f \\ H_A(C) & \xrightarrow{\check{a}_C} & F(C) & C \end{array}$$

или лучше так

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(D, A) & \xrightarrow{\check{a}_D} & F(D) & D \\ H_A(f) \downarrow & & \downarrow F(f) & \uparrow f \\ \mathbb{K}(C, A) & \xrightarrow{\check{a}_C} & F(C) & C \end{array}$$

для любых $C, D \in \text{Ob}(\mathbb{K})$ и любой стрелки $f: C \rightarrow D$. Её коммутативность означает, что

$$\check{a}_C \circ H_A(f) = F(f) \circ \check{a}_D$$

Это значит, для каждой стрелки $g \in \mathbb{K}(D, A)$ должно быть верно

$$\check{a}_C(H_A(f)(g)) = F(f)(\check{a}_D(g))$$

то есть

$$\check{a}_C(g \circ f) = F(f)(\check{a}_D(g))$$

И это действительно так, потому что

$$\begin{aligned} \check{a}_C(g \circ f) &= F(g \circ f)(a) = (F(f) \circ F(g))(a) = F(f)(F(g)(a)) = \\ &= F(f)(\check{a}_D(g)) \end{aligned}$$

□

Определение 17.13. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория, $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Каждой стрелке $f: A \rightarrow B$ сопоставим естественное преобразование $H_f: H_A \rightarrow H_B$ с компонентами $H_f(D): H_A(D) \rightarrow H_B(D)$

$$H_f(D)(g) = f \circ g \quad (\text{умножение слева на } f)$$

где $g \in H_A(D)$, то есть $g \in \mathbf{K}(D, A)$.

Естественность H_f выражается следующей диаграммой

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \\ H_A(D) & \xrightarrow{H_f(D)} & H_B(D) & D \\ H_A(h) \downarrow & & \downarrow H_B(h) & \uparrow h \\ H_A(C) & \xrightarrow{H_f(C)} & H_B(C) & C \end{array}$$

которая, возможно, станет понятнее, если перерисовать её так

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \\ \mathbf{K}(D, A) & \xrightarrow{f \circ} & \mathbf{K}(D, B) & D \\ \circ h \downarrow & & \downarrow \circ h & \uparrow h \\ \mathbf{K}(C, A) & \xrightarrow{f \circ} & \mathbf{K}(C, B) & C \end{array}$$

и выражает она ассоциативность композиции „для любого $g \in \mathbf{K}(D, A)$ верно $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ “.

Теорема 17.14. $H_A \cong H_B$ если и только если $A \cong B$ (первый изоморфизм – естественный изоморфизм функторов, второй в \mathbf{K})

Доказательство. По лемме Йонеды, есть взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями вида $\tau: H_A \rightarrow H_B$ и

элементами $H_B(A)$, то есть стрелками $f \in \mathcal{K}(A, B)$.

$$\text{Nat}(H_A, H_B) \cong H_B(A) = \mathcal{K}(A, B)$$

А именно, стрелке $f \in \mathcal{K}(A, B)$ соответствует естественное преобразование $H_f: H_A \rightarrow H_B$ (умножение слева на f). Легко проверить, что при этом соответствии композиции стрелок $f_1 \circ f_2$ соответствует композиция естественных преобразований $H_{f_1} \circ H_{f_2}$ (в том же порядке), а тождественным стрелкам – тождественные преобразования. Из этого следует, что изоморфизмам соответствуют изоморфизмы. \square

Пример 17.15. С помощью теоремы 17.14 можно доказывать некоторые изоморфизмы в локально малых категориях. Например, пусть \mathcal{K} – локально малая декартово замкнутая категория. Покажем, что

$$A^1 \cong A$$

Достаточно показать, что

$$H_{A^1} \cong H_A$$

И действительно,

$$H_{A^1}(D) = \mathcal{K}(D, A^1) \cong \mathcal{K}(D \times 1, A) \cong \mathcal{K}(D, A) = H_A(D)$$

Конечно, надо ещё проверить естественность выписанных изоморфизмов, но мы не будем (хотя надо).

Пример 17.16. Пусть \mathcal{K} – локально малая декартово замкнутая категория. Покажем, что

$$A^{B \times C} \cong (A^C)^B$$

Достаточно показать, что

$$H_{A^{B \times C}} \cong H_{(A^C)^B}$$

И действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(D, A^{B \times C}) &\cong \mathcal{K}(D \times (B \times C), A) \cong \mathcal{K}((D \times B) \times C, A) \cong \\ &\cong \mathcal{K}(D \times B, A^C) \cong \mathcal{K}(D, (A^C)^B) \end{aligned}$$

Упражнение 17.17. В локально малой категории существует произведение объектов A и B если и только если функтор $H_A \times H_B$ представим. Иными словами, объект C вместе с подходящей парой проекций является произведением A и B если и только если существует изоморфизм

$$\mathcal{K}(D, C) \cong \mathcal{K}(D, A) \times \mathcal{K}(D, B)$$

естественный по D . Чтобы получить пару проекций, надо подставить C вместо D

$$\mathcal{K}(C, C) \cong \mathcal{K}(C, A) \times \mathcal{K}(C, B)$$

и в левой части взять id_C , справа получится пара проекций.

Упражнение 17.18. Пусть даны категория \mathcal{K} и функтор $F: \mathcal{K}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Есть взаимно однозначное соответствие между представлениями функтора F (естественными изоморфизмами вида $\tau: H_A \rightarrow F$) и парами $A \in \text{Ob}(\mathcal{K}), a \in F(A)$, обладающими следующим свойством универсальности: для любой пары $B \in \text{Ob}(\mathcal{K}), b \in F(B)$ есть ровно одна стрелка $f: B \rightarrow A$ такая, что $F(f)(a) = b$.

Для функтора $H_A \times H_B$ пара, задающая представление, состоит из объекта $A \times B$ и элемента (пары проекций)

$$(pr_1, pr_2) \in (H_A \times H_B)(A \times B) = \mathcal{K}(A \times B, A) \times \mathcal{K}(A \times B, B)$$

Упражнение 17.19. Пусть \mathcal{K} – локально малая категория с произведениями пар объектов. У объектов $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ существует экспонента B^A если и только если представим функтор $\mathcal{K}(- \times A, B)$. Иными словами, объект C вместе с подходящей стрелкой ev является экспонентой B^A если и только если существует изоморфизм

$$\mathcal{K}(D, C) \cong \mathcal{K}(D \times A, B)$$

естественный по D . Чтобы получить ev , надо подставить C вместо D

$$\mathcal{K}(C, C) \cong \mathcal{K}(C \times A, B)$$

и в левой части взять id_C , справа получится ev . Следующие два упражнения обобщают этот пример.

Упражнение 17.20. Пусть даны две локально малые категории \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 , а также два функтора между ними

$$\mathcal{K}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{K}_2$$

причём $F \dashv G$. Для заданного $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ определим функтор $H_X \circ F: \mathbf{K}_1^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ следующими равенствами

$$(H_X \circ F)(D) = H_X(F(D)) = \mathbf{K}_2(F(D), X)$$

$$(H_X \circ F)(h)(f) = f \circ F(h)$$

где $f \in \mathbf{K}_2(F(D), X)$, а $h \in \mathbf{K}_1(C, D)$ (чуть ниже есть картинка). Функтор $H_X \circ F$ представим, представляющим объектом будет $G(X)$, поскольку

$$(H_X \circ F)(D) = \mathbf{K}_2(F(D), X) \cong \mathbf{K}_1(D, G(X)) = H_{G(X)}(D)$$

Естественность этого изоморфизма следует из свойств естественности Φ и Γ в определении сопряжённости. Проверьте это, посмотрев на диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_2(F(D), X) & \xrightarrow{\Gamma_{D,X}} & \mathbf{K}_1(D, G(X)) & & D \\ & \downarrow \circ F(h) & \downarrow \circ h & & \uparrow h \\ \mathbf{K}_2(F(C), X) & \xrightarrow{\Gamma_{C,X}} & \mathbf{K}_2(C, G(X)) & & C \end{array}$$

и соответствующее ей равенство

$$\Gamma_{C,X}(f \circ F(h)) = \Gamma_{D,X}(f) \circ h$$

Чтобы понять связь с предыдущим упражнением, возьмите в качестве F и G функторы $(-)\times A$ и $(-)^A$.

Упражнение 17.21. Пусть даны локально малые категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , а также функтор $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$. Функтор F имеет правый сопряжённый если и только если функторы вида $H_X \circ F: \mathbf{K}_1^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ представимы для всех $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$.

Остаток раздела посвящён следующему результату: любую малую категорию \mathbf{K} можно вложить в топос (а именно, в топос $\text{Set}^{\mathbf{K}^{\text{op}}}$) в качестве полной подкатегории, при этом вложении сохраняются терминальные объекты, произведения, экспоненты и мономорфизмы.

Определение 17.22. Пусть \mathbf{K} – малая категория. Вложением Йонеды или функтором Йонеды называется функтор $Y_{\mathbf{K}}: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{K}^{\text{op}}}$, действующий так

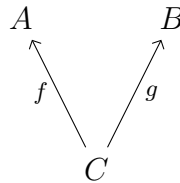
$$Y_{\mathbf{K}}(A) = H_A$$

$$Y_{\mathbf{K}}(f) = H_f$$

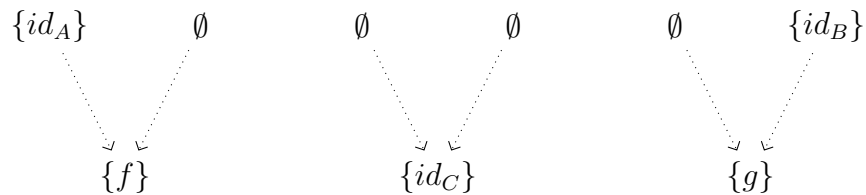
для любых $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, $f \in \text{Mor}(\mathbf{K})$. Мы будем писать просто Y , без индекса, если категория \mathbf{K} ясна из контекста.

Упражнение 17.23. Докажите, что функтор Йонеды является полным вложением.

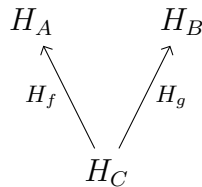
Пример 17.24. Пусть \mathbf{K} – категория частичного порядка, имеющая следующий вид (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)



Функторы $H_A, H_C, H_B: \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ имеют вид (H_C в середине)



и легко проверить, что есть единственное естественное преобразование из H_C в H_A , а также единственное естественное преобразование из H_C в H_B , поэтому получаем полную подкатегорию $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}^{\text{op}}}$, изоморфную \mathbf{K}



(тождественные стрелки не показаны).

Теорема 17.25. *Функтор Йонеды сохраняет терминальные объекты.*

Доказательство.

$$Y(1) = H_1$$

$$H_1(D) = K(D, 1) \cong \{*\} \quad \text{для любого } D \in \text{Ob}(K) = \text{Ob}(K^{\text{op}})$$

Мы видим, что $Y(1)$ является терминальным объектом в $\text{Set}^{K^{\text{op}}}$ \square

Теорема 17.26. *Функтор Йонеды сохраняет произведения пар объектов.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$Y(A \times B) \cong Y(A) \times Y(B)$$

Действительно

$$Y(A \times B) = H_{A \times B}$$

$$Y(A) = H_A$$

$$Y(B) = H_B$$

Функтор $H_{A \times B}$ естественно изоморфен функтору $H_A \times H_B$ (Упражнение 17.9). \square

Теорема 17.27. *Функтор Йонеды сохраняет произведения любых множеств объектов, как конечных, так и бесконечных.*

Упражнение 17.28. Докажите.

Сохранение экспонент и мономорфизмов функтором Йонеды желающим предлагаю доказать самостоятельно, но только после прочтения следующего раздела, где описано, как устроены мономорфизмы и экспоненты в категориях вида Set^K (попробовать, конечно, можно и сейчас).

17.2 Ковариантная лемма Йонеды

Определение 17.29. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория. Для каждого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ определим следующий функтор $H^A: \mathbf{K} \rightarrow \text{Set}$

$$H^A(D) = \mathbf{K}(A, D)$$

$$H^A(f)(g) = f \circ g \quad (\text{умножение слева на } f)$$

где $D \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, $f \in \mathbf{K}(C, D)$, $g \in H^A(C)$ (то есть $g \in \mathbf{K}(A, C)$).

$$\begin{array}{ccc} D & & \mathbf{K}(A, D) \\ \uparrow f & & \uparrow f \circ = H^A(f) \\ C & & \mathbf{K}(A, C) \end{array}$$

Пример 17.30. Пусть \mathbf{K} – следующая категория (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Функтор $H^A: \mathbf{K} \rightarrow \text{Set}$

$$\{id_A\} \begin{array}{c} \xrightarrow{H^A(f)} \\ \xrightarrow{H^A(g)} \end{array} \{f, g\}$$

Функтор $H^B: \mathbf{K} \rightarrow \text{Set}$

$$\emptyset \xrightarrow[H^B(g)]{H^B(f)} \{id_B\}$$

Пример 17.31. Пусть \mathbf{K} – малая категория с единственным объектом A . Она задаёт полугруппу с единицей $M = \text{Mor}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}(A, A)$. Тогда функтор H^A есть множество M , на котором действует полугруппа M левым умножением (то есть, элемент $x \in M$ под действием $f \in M$ переходит в $f \circ x \in M$).

Определение 17.32. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория. Функтор $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ называется *представимым*, если для некоторого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ выполнен изоморфизм

$$F \cong H^A$$

В этом случае объект A называют *представляющим объектом* функтора F , а сам изоморфизм – *представлением* функтора F . Функторы H^A иногда называют *основными представимыми ковариантными функторами*.

Замечание 17.33. Это определение представимости эквивалентно старому. Если функтор $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ представим в новом смысле, то он же представим в старом смысле, если рассматривать его как функтор $F: (\mathbf{K}^{\text{op}})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, причём представляющий объект тот же самый (H^A в категории \mathbf{K} становится H_A в \mathbf{K}^{op}).

Пример 17.34. Пусть \mathbf{K} – некоторая категория. Пусть функтор $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ сопоставляет каждому объекту \mathbf{K} одноэлементное множество $\{*\}$. Если в \mathbf{K} есть начальный объект 0 , то F представим и представляющим объектом будет 0 , поскольку

$$F(D) = \{*\} \cong \mathbf{K}(0, D) = H^0(D)$$

Естественность этого изоморфизма выражается диаграммой

$$\begin{array}{ccc} D & F(D) & \xrightarrow{\cong} & H^0(D) \\ f \uparrow & F(f) \uparrow & & \uparrow H^0(f) \\ C & F(C) & \xrightarrow{\cong} & H^0(C) \end{array}$$

которая становится понятнее, если нарисовать её так

$$\begin{array}{ccc} D & \{*\} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{K}(0, D) \\ f \uparrow & id_{\{*\}} \uparrow & & \uparrow f \circ \\ C & \{*\} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{K}(0, C) \end{array}$$

Умножение слева на f переводит единственный элемент $\mathbf{K}(0, C)$ в единственный элемент $\mathbf{K}(0, D)$.

$$f \circ \square_C = \square_D$$

Проверять естественность обратного изоморфизма не надо в силу Упражнения 6.10.

Пример 17.35. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория, в которой есть копроизведение некоторой пары объектов A и B . Тогда

$$\mathbf{K}(A + B, D) \cong \mathbf{K}(A, D) \times \mathbf{K}(B, D) \quad \text{для любого } D \in \text{Ob}(\mathbf{K}).$$

(это изоморфизмы в \mathbf{Set}). Каждой стрелке $h: A + B \rightarrow D$ соответствует пара стрелок $h \circ k_1: A \rightarrow D$ и $h \circ k_2: B \rightarrow D$, а каждой паре стрелок $g_1: A \rightarrow D$ и $g_2: B \rightarrow D$ соответствует стрелка $[g_1, g_2]: A + B \rightarrow D$.

Упражнение 17.36. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория, $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Если существует копроизведение A и B , то представим функтор $H^A \times H^B: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$. Представляющим объектом будет $A + B$.

$$\begin{aligned} (H^A \times H^B)(D) &= H^A(D) \times H^B(D) = \mathbf{K}(A, D) \times \mathbf{K}(B, D) \cong \\ &\cong \mathbf{K}(A + B, D) = H^{A+B}(D) \end{aligned}$$

где изоморфизм описан в предыдущем примере. Естественность этого изоморфизма выражается следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} D & H^{A+B}(D) & \xrightarrow{\cong} & H^A(D) \times H^B(D) \\ f \uparrow & H^{A+B}(f) \uparrow & & \uparrow H^A(f) \times H^B(f) \\ C & H^{A+B}(C) & \xrightarrow{\cong} & H^A(C) \times H^B(C) \end{array}$$

которая, возможно, станет понятнее, если перерисовать её так

$$\begin{array}{ccc} D & \mathbf{K}(A + B, D) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{K}(A, D) \times \mathbf{K}(B, D) \\ f \uparrow & f \circ \uparrow & & \uparrow (f \circ) \times (f \circ) \\ C & \mathbf{K}(A + B, C) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{K}(A, C) \times \mathbf{K}(B, C) \end{array}$$

Далее мы будем интересоваться естественными преобразованиями вида $\tau: H^A \rightarrow F$. Оказывается, каждое такое преобразование однозначно определяется своей компонентой $\tau_A: H^A(A) \rightarrow F(A)$ и, более того, даже единственным элементом $\tau_A(id_A) \in F(A)$.

Пример 17.37. Возьмём в качестве \mathbf{K} категорию частичного порядка

$$\begin{array}{c} id_B \hookrightarrow B \\ \uparrow f \\ id_A \hookrightarrow A \end{array}$$

Естественные преобразования $\tau: H^B \rightarrow F$ выглядят так

$$\begin{array}{ccc} B & \{id_B\} & \xrightarrow{\tau_B} F(B) \\ f \uparrow & \uparrow \text{---} & \uparrow F(f) \\ A & \emptyset & \xrightarrow{\text{---}} F(A) \end{array}$$

каждое такое преобразование задаётся единственной функцией τ_B из одноэлементного множества $\{id_B\}$ в $F(B)$, а она определяется элементом $\tau_B(id_B) \in F(B)$.

Естественные преобразования $\tau: H^A \rightarrow F$ выглядят так

$$\begin{array}{ccc} B & \{f\} & \xrightarrow{\tau_B} F(B) \\ f \uparrow & \uparrow \text{---} & \uparrow F(f) \\ A & \{id_A\} & \xrightarrow{\tau_A} F(A) \end{array}$$

Стрелка τ_A однозначно определяется элементом $\tau_A(id_A) \in F(A)$.

Стрелка τ_B однозначно определяется элементом $\tau_B(f) = F(f)(\tau_A(id_A))$, то есть опять же элементом $F(A)$.

Теорема 17.38. (Ковариантная лемма Йонеды). Пусть \mathbf{K} – локально малая категория, $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, $F: \mathbf{K} \rightarrow \text{Set}$. Существует взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями из H^A в F и элементами множества $F(A)$. Точнее, есть изоморфизм в Set

$$\text{Nat}(H^A, F) \cong F(A)$$

Доказательство. Применяем принцип двойственности к доказательству контравариантной леммы Йонеды. \square

Определение 17.39. Пусть \mathbf{K} – локально малая категория, $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Каждой стрелке $f: A \rightarrow B$ сопоставим естественное преобразование $H^f: H^B \rightarrow H^A$ с компонентами $H^f(D): H^B(D) \rightarrow H^A(D)$

$$H^f(D)(g) = g \circ f \quad (\text{умножение справа на } f)$$

где $g \in H^B(D)$. Естественность H^f выражается следующей диаграммой

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{f} & A \\ \\ H^B(D) & \xrightarrow{H^f(D)} & H^A(D) & D \\ \uparrow H^B(h) & & \uparrow H^A(h) & \uparrow h \\ H^B(C) & \xrightarrow{H^f(C)} & H^A(C) & C \end{array}$$

которая, возможно, станет понятнее, если перерисовать её так

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{f} & A \\ \\ \mathbf{K}(B, D) & \xrightarrow{\circ f} & \mathbf{K}(A, D) & D \\ \uparrow h \circ & & \uparrow h \circ & \uparrow h \\ \mathbf{K}(B, C) & \xrightarrow{\circ f} & \mathbf{K}(A, C) & C \end{array}$$

и выражает она ассоциативность композиции „для любого $g \in \mathbf{K}(B, C)$ верно $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ “.

Теорема 17.40. $H^A \cong H^B$ если и только если $A \cong B$ (первый изоморфизм – естественный изоморфизм функторов, второй в \mathbf{K})

Доказательство. По лемме Йонеды, есть взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями вида $\tau: H^B \rightarrow H^A$ и элементами $H^A(B)$, то есть стрелками $f \in \mathbf{K}(A, B)$.

$$\mathrm{Nat}(H^B, H^A) \cong H^A(B) = \mathbf{K}(A, B)$$

А именно, стрелке $f \in \mathbf{K}(A, B)$ соответствует естественное преобразование $H^f: H^B \rightarrow H^A$ (умножение справа на f). Легко проверить, что при этом соответствии композиции стрелок $f_1 \circ f_2$ соответствует композиция естественных преобразований $H^{f_2} \circ H^{f_1}$ (в обратном порядке), а тождественным стрелкам – тождественные преобразования. Из этого следует, что изоморфизмам соответствуют изоморфизмы. \square

Пример 17.41. С помощью теоремы 17.40 можно доказывать некоторые изоморфизмы в локально малых категориях. Например, пусть \mathbf{K} – локально малая декартово замкнутая категория с начальным объектом. Докажем, что

$$A \times 0 \cong 0$$

Достаточно доказать, что

$$H^{A \times 0} \cong H^0$$

И действительно,

$$\begin{aligned} H^{A \times 0}(D) &= \mathbf{K}(A \times 0, D) \cong \mathbf{K}(0 \times A, D) \cong \mathbf{K}(0, D^A) \cong 1 \cong \mathbf{K}(0, D) = \\ &= H^0(D) \end{aligned}$$

Здесь 1 – терминальный объект в \mathbf{Set} . Конечно, надо ещё проверить естественность выписанных изоморфизмов, но мы не будем (хотя надо).

Пример 17.42. Пусть \mathbf{K} – локально малая декартово замкнутая категория с копроизведениями. Проверим, что

$$(A + B) \times C \cong A \times C + B \times C$$

Достаточно показать, что

$$H^{(A+B) \times C} \cong H^{A \times C + B \times C}$$

И действительно,

$$\begin{aligned} \mathsf{K}((A + B) \times C, D) &\cong \mathsf{K}(A + B, D^C) \cong \mathsf{K}(A, D^C) \times \mathsf{K}(B, D^C) \cong \\ &\cong \mathsf{K}(A \times C, D) \times \mathsf{K}(B \times C, D) \cong \mathsf{K}(A \times C + B \times C, D) \end{aligned}$$

Упражнение 17.43. В локально малой категории существует копроизведение объектов A и B если и только если функтор $H^A \times H^B$ представим. Иными словами, объект C вместе с подходящей парой копроекций является копроизведением A и B если и только если существует изоморфизм

$$\mathsf{K}(C, D) \cong \mathsf{K}(A, D) \times \mathsf{K}(B, D)$$

естественный по D . Чтобы получить пару копроекций, надо подставить C вместо D

$$\mathsf{K}(C, C) \cong \mathsf{K}(A, C) \times \mathsf{K}(B, C)$$

и в левой части взять id_C , справа получится пара копроекций.

Упражнение 17.44. Пусть даны категория K и функтор $F: \mathsf{K} \rightarrow \mathsf{Set}$. Есть взаимно однозначное соответствие между представлениями функтора F (естественными изоморфизмами вида $\tau: H^A \rightarrow F$) и парами $A \in \mathsf{Ob}(\mathsf{K}), a \in F(A)$, обладающими следующим свойством универсальности: для любой пары $B \in \mathsf{Ob}(\mathsf{K}), b \in F(B)$ есть ровно одна стрелка $f: A \rightarrow B$ такая, что $F(f)(a) = b$.

Для функтора $H^A \times H^B$ пара, задающая представление, состоит из объекта $A + B$ и элемента (пары копроекций)

$$(k_1, k_2) \in (H^A \times H^B)(A + B) = \mathsf{K}(A, A + B) \times \mathsf{K}(B, A + B)$$

Замечание 17.45. Теоретико-категорные определения произведений и копроизведений совершенно симметричны (двойственны) друг другу. Если давать определения на языке представимых функторов, симметрия пропадает

$$\mathsf{K}(D, A \times B) \cong \mathsf{K}(D, A) \times \mathsf{K}(D, B)$$

$$\mathsf{K}(A + B, D) \cong \mathsf{K}(A, D) \times \mathsf{K}(B, D)$$

Можно восстановить её, если переписать второй изоморфизм как изоморфизм не в Set , а в Set^{op}

$$\mathsf{K}(A + B, D) \cong \mathsf{K}(A, D) + \mathsf{K}(B, D)$$

(в правой части копроизведение в \mathbf{Set}^{op} , оно же произведение в \mathbf{Set}). Но такая запись нам неудобна, поскольку \mathbf{Set} для нас гораздо важнее, чем \mathbf{Set}^{op} . Категория \mathbf{Set} резко асимметрична и на \mathbf{Set}^{op} похожа очень мало.

Упражнение 17.46. Пусть даны две локально малые категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , а также два функтора между ними

$$\mathbf{K}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbf{K}_2$$

причём $F \dashv G$. Для заданного $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ определим функтор $H^A \circ G: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{Set}$ следующими равенствами

$$(H^A \circ G)(X) = H^A(G(X)) = \mathbf{K}_1(A, G(X))$$

$$(H^A \circ G)(h)(g) = G(h) \circ g$$

где $g \in \mathbf{K}_1(A, G(X))$, а $h: X \rightarrow Y$ (чуть ниже есть картинка). Функтор $H^A \circ G$ представим, представляющим объектом будет $F(A)$, поскольку

$$(H^A \circ G)(X) = \mathbf{K}_1(A, G(X)) \cong \mathbf{K}_2(F(A), X) = H^{F(A)}(X)$$

Естественность этого изоморфизма следует из свойств естественности Φ и Γ в определении сопряжённости. Проверьте это, посмотрев на диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_1(A, G(Y)) & \xrightarrow{\Phi_{A,Y}} & \mathbf{K}_2(F(A), Y) & & Y \\ \uparrow G(h) \circ & & \uparrow h \circ & & \uparrow h \\ \mathbf{K}_1(A, G(X)) & \xrightarrow{\Phi_{A,X}} & \mathbf{K}_2(F(A), X) & & X \end{array}$$

и соответствующее ей равенство

$$\Phi_{A,Y}(G(h) \circ g) = h \circ \Phi_{A,X}(g)$$

Упражнение 17.47. Пусть даны локально малые категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , а также функтор $G: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_1$. Функтор G имеет левый сопряжённый если и только если функторы вида $H^A \circ G: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{Set}$ представимы для всех $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$.

Дальше мы опишем, как устроены мономорфизмы в категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$.

Пример 17.48. В категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$, где \mathbf{K} малая, терминальный объект обычно не является разделяющим. Например, для \mathbf{K} из примера 17.37 естественных преобразований $\tau: H^B \rightarrow F$ в общем случае много, но в H^B вообще нет точек, чтобы их различать! Стрелка $\rho: 1 \rightarrow H^B$ задаётся парой (a, b) , где $a \in H^B(A)$, $b \in H^B(B)$. Таких пар нет, поскольку $H^B(A)$ пусто. Тем не менее, можно найти разделяющее множество объектов.

Теорема 17.49. Пусть \mathbf{K} малая. Множество $\{H^A \mid A \in \text{Ob}(\mathbf{K})\}$ является разделяющим множеством в $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$.

Доказательство. Пусть даны два функтора $F, G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ и два естественных преобразования $\tau, \sigma: F \rightarrow G$, причём $\tau \neq \sigma$. Для некоторого объекта $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ должно быть $\tau_A \neq \sigma_A$. Поэтому для некоторого элемента $a \in F(A)$ должно быть $\tau_A(a) \neq \sigma_A(a)$. Возьмём естественное преобразование $\check{\alpha}: H^A \rightarrow F$ такое, что

$$\check{\alpha}_A(id_A) = a$$

оно существует по лемме Йонеды. Далее

$$(\tau_A \circ \check{\alpha}_A)(id_A) = \tau_A(\check{\alpha}_A(id_A)) = \tau_A(a)$$

$$(\sigma_A \circ \check{\alpha}_A)(id_A) = \sigma_A(\check{\alpha}_A(id_A)) = \sigma_A(a)$$

Мы видим, что $(\tau_A \circ \check{\alpha}_A)(id_A) \neq (\sigma_A \circ \check{\alpha}_A)(id_A)$ и поэтому

$$\tau \circ \check{\alpha} \neq \sigma \circ \check{\alpha}$$

□

Упражнение 17.50. Пусть \mathcal{K} – следующая категория (показаны все объекты и все стрелки, кроме тождественных)

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Мы знаем, что функторы $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ взаимно однозначно соответствуют графам. Проверьте, что функторы H^A и H^B имеют следующий вид, если их изобразить как графы

$$f \xrightarrow{id_A} g$$

$$id_B$$

Эти два графа составляют разделяющее множество в категории графов (Пример 16.28).

Замечание 17.51. Двойственным образом, множество $\{H_A \mid A \in \text{Ob}(\mathcal{K})\}$ является разделяющим множеством в $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}^{\text{op}}}$. Желаящие в этом месте могут доказать, что функтор Йонеды сохраняет мономорфизмы (доказательство несложное, но громоздкое).

Теорема 17.52. Пусть даны малая категория \mathcal{K} , функторы $F, G: \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ и естественное преобразование $\tau: F \rightarrow G$. Тогда τ является мономорфизмом в $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}}$ если и только если стрелки τ_A являются мономорфизмами в \mathbf{Set} для каждого $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$.

Доказательство. Импликацию справа налево (если все τ_A мономорфны, то τ мономорфно) легко понять самостоятельно. Докажем импликацию слева направо. Пусть $\tau: F \rightarrow G$ является мономорфизмом. Докажем, что $\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$ является мономорфизмом при любом $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$. Предположим, что это не так. Тогда существуют два элемента $x, y \in F(A)$ такие, что $x \neq y$, но $\tau_A(x) = \tau_A(y)$. Возьмём два естественных преобразования $\check{x}, \check{y}: H^A \rightarrow F$ такие, что

$$\check{x}_A(id_A) = x$$

$$\check{y}_A(id_A) = y$$

они существуют по лемме Йонеды. Далее

$$(\tau_A \circ \check{x}_A)(id_A) = \tau_A(\check{x}(id_A)) = \tau_A(x)$$

$$(\tau_A \circ \check{y}_A)(id_A) = \tau_A(\check{y}(id_A)) = \tau_A(y)$$

и поскольку $\tau_A(x) = \tau_A(y)$, мы получаем (опять же по лемме Йонеды)

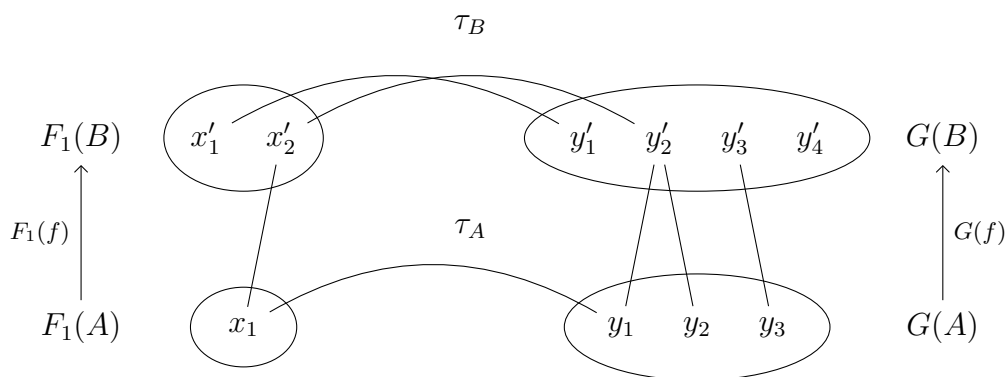
$$\tau \circ \check{x} = \tau \circ \check{y}$$

Но $\check{x} \neq \check{y}$ и мы получили противоречие с тем, что τ является мономорфизмом. \square

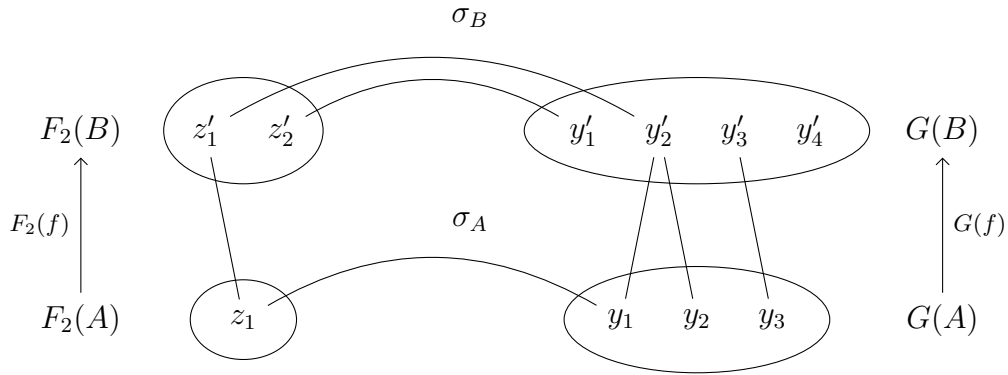
Пример 17.53. Рассмотрим категорию \mathbf{Set}^K над шкалой K

$$\begin{array}{c} id_B \hookrightarrow B \\ \uparrow f \\ id_A \hookrightarrow A \end{array}$$

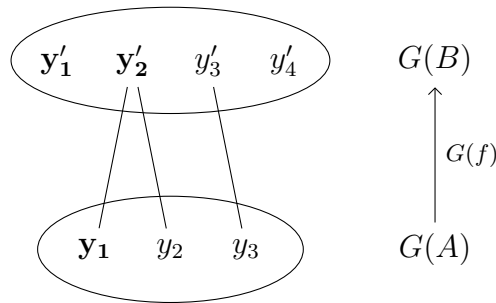
Ниже показан некоторый мономорфизм $\tau: F_1 \hookrightarrow G$



и ещё один мономорфизм $\sigma: F_2 \hookrightarrow G$



которые задают один и тот же подобъект (выделен жирным)



Поскольку y_1 принадлежит подобъекту в момент времени A , то и y'_2 (в который переходит y_1 под действием $G(f)$) должен принадлежать подобъекту в момент времени B . В правильно построенном подобъекте с течением времени ничего не пропадает (а добавляться может).

Терминальный объект в этой категории \mathbf{Set}^K выглядит так



У него три подобъекта

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \{*\} & \{*\} \\
 \uparrow \cdots & \uparrow \cdots & \uparrow \cdots \\
 \emptyset & \emptyset & \{*\}
 \end{array}$$

и они соответствуют трём коидеалам шкалы: $\emptyset, \{B\}, \{A, B\}$.

Упражнение 17.54. Пусть \mathcal{K} – малая категория. Коидеалы \mathcal{K} взаимно однозначно соответствуют подобъектам 1 в $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}}$.

Замечание 17.55. Смысл этого такой. В достаточно хороших категориях (в категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}}$ и вообще в топосах) подобъекты терминального объекта образуют алгебру Гейтинга. Эта алгебра Гейтинга является как бы „внутренней логикой“ данного топоса. Например, в \mathbf{Set} у 1 два подобъекта и логика, соответственно, двузначная. К этой теме мы ещё вернёмся.

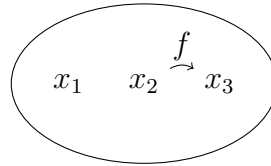
Пример 17.56. Рассмотрим полугруппу с единицей $M = \{e, f\}$, причём $f \circ f = f \neq e$. Рассмотрим M -множество $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, на котором задано такое действие M

$$f(x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = x_3$$

$$f(x_3) = x_3$$

что мы неформально изобразим так



Условие $f \circ f = f$ означает, что $f(f(x)) = f(x)$ для любого $x \in M$. У этого M -множества 6 подобъектов, которые задаются следующими подмножествами: $\emptyset; \{x_1\}; \{x_3\}; \{x_1, x_3\}; \{x_2, x_3\}; \{x_1, x_2, x_3\}$. Подмножества $\{x_2\}$ и $\{x_1, x_2\}$ не задают подобъектов, поскольку элемент x_2 из них „выскакивает“ под действием f . Правильно построенный подобъект вместе с каждым своим элементом носителя должен содержать всё, что из него получается под действием полугруппы.

Замечание 17.57. Конструкция, двойственная к вложению Йонеды, выглядит так. Для малой категории \mathbf{K} , если сопоставить каждому объекту $A \in \mathbf{K}$ функтор $H^A: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$, а каждой стрелке $f: A \rightarrow B$ естественное преобразование $H^f: H^B \rightarrow H^A$, мы получим функтор из \mathbf{K}^{op} в $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$ (из \mathbf{K}^{op} , потому что меняется направление стрелок). Этот функтор является полным вложением \mathbf{K}^{op} в $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$. Содержательно, мы начинаем с функтора Hom

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}}: \mathbf{K}^{\text{op}} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$$

и применяем к нему лямбду

$$\Lambda(\text{Hom}_{\mathbf{K}}): \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$$

Вопрос только, в какой категории мы это делаем (\mathbf{Cat} не годится).

Остаток главы занимает описание экспоненты в категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$, где \mathbf{K} малая.

Теорема 17.58. Пусть \mathbf{K} – малая категория. Тогда в $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$ есть экспоненты (поэтому $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$ является бидеккартово замкнутой категорией).

Доказательство. Для функторов $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ и $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ их экспоненту $G^F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ определим так

$$G^F(A) = \text{Nat}(H^A \times F, G) \quad \text{для любого } A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$$

Идея этого определения в том, что для экспоненты должны выполняться изоморфизмы

$$G^F(A) \cong \text{Nat}(H^A, G^F) \cong \text{Nat}(H^A \times F, G)$$

(первый – по лемме Йонеды, второй – по определению экспоненты как сопряжённой справа к декартову произведению). На стрелках функтор G^F по определению будет действовать так

$$G^F(f)(\tau) = \tau \circ (H^f \times id_F)$$

где $f: A \rightarrow B$, $\tau \in \text{Nat}(H^A \times F, G)$, $G^F(f)(\tau) \in \text{Nat}(H^B \times F, G)$

$$G^F(f): G^F(A) \rightarrow G^F(B)$$

$$G^F(f): \text{Nat}(H^A \times F, G) \rightarrow \text{Nat}(H^B \times F, G)$$

$$G^F(f)(\tau): H^B \times F \xrightarrow{H^f \times id_F} H^A \times F \xrightarrow{\tau} G$$

Отображением вычисления $ev: G^F \times F \rightarrow G$ будет естественное преобразование со следующими компонентами $ev(A): G^F(A) \times F(A) \rightarrow G(A)$

$$ev(A)(\tau, a) = \tau_A(id_A, a)$$

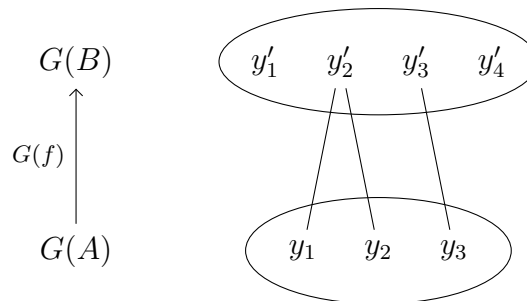
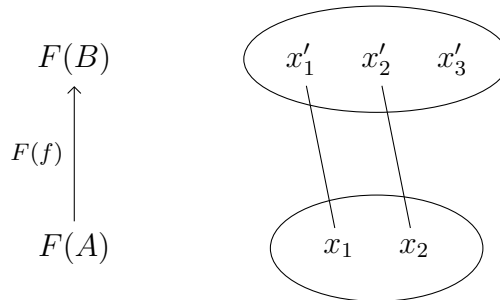
где $\tau \in \text{Nat}(H^A \times F, G)$, $a \in F(A)$. □

Упражнение 17.59. При сильном желании проверьте детали.

Пример 17.60. Рассмотрим опять категорию Set^K , где K имеет вид

$$\begin{array}{c} id_B \hookrightarrow B \\ \uparrow f \\ id_A \hookrightarrow A \end{array}$$

Возьмём два функтора $F: K \rightarrow \text{Set}$ и $G: K \rightarrow \text{Set}$, например



Как найти экспоненту G^F ? Наивное (и неверное) решение состоит в том, чтобы положить

$$G^F(A) = G(A)^{F(A)}$$

$$G^F(B) = G(B)^{F(B)}$$

Но тогда неясно, как определить функцию $G^F(f): G^F(A) \rightarrow G^F(B)$ (попробуйте). Правильное определение выглядит так

$$G^F(A) = \text{Nat}(F, G)$$

$$G^F(B) = G(B)^{F(B)}$$

$$G^F(f)(\tau) = \tau_B$$

где $\tau \in \text{Nat}(F, G)$. Идея в том, что в каждый момент времени надо учитывать все моменты времени, лежащие выше (людям, знакомым с моделями Крипке, тут следует вспомнить импликацию в моделях Крипке).

Упражнение 17.61. Разберитесь, почему приведённая выше конструкция даёт экспоненту G^F .

В одном частном случае описание экспоненты можно сильно упростить. А именно, если шкала \mathbf{K} задаёт группу (то есть в \mathbf{K} один объект и все стрелки обратимы).

Пример 17.62. Пусть \mathbf{K} – малая категория с одним объектом A , в которой все стрелки обратимы (то есть $\text{Mor}(\mathbf{K})$ является группой, обозначим её Gr). Два функтора $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ и $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ можно представить как два множества $X = F(A)$ и $Y = G(A)$, на которых заданы действия группы Gr . Экспоненту G^F можно описать так

$$G^F(A) = Y^X$$

$$G^F(f)(g) = G(f) \circ g \circ F(f^{-1})$$

где $f \in Gr$, $g \in Y^X$. Иными словами, в качестве носителя берётся множество всех функций из X в Y (не только сохраняющих действие, а вообще всех). Отображение вычисления $ev: G^F \times F \rightarrow G$ имеет единственную компоненту $ev(A): Y^X \times X \rightarrow Y$, представляющую собой отображение вычисления в \mathbf{Set} .

Упражнение 17.63. Проверьте, что это определение действительно даёт экспоненту G^F . Проверьте, что элементы экспоненты (то есть, морфизмы из 1 в G^F) взаимно однозначно соответствуют отображениям X в Y , сохраняющим действие группы.

Замечание 17.64. Об обозначениях. Вместо H^A и H_A чаще пишут h^A и h_A , но и большие буквы тоже иногда используют. Мне кажется, для учебника лучше все функторы обозначать большими буквами, чтобы не путать их со стрелками. Обозначения H^f , H_f взяты из книги Freyd, Scedrov “Categories, Allegories”. Для функтора Йонеды стандартного обозначения, видимо, нет и я его обозначил как попало. Готов сменить обозначение, если кто-то предложит лучшее.

Глава 18

Уравнители, декартовы квадраты, топосы

18.1 Уравнители

Определение 18.1. Пусть дана пара стрелок f, g с одинаковыми начальными и одинаковыми конечными объектами

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Объект C вместе со стрелкой $h: C \rightarrow A$ называется *уравнителем* этой пары стрелок, если коммутативна следующая диаграмма ($f \circ h = g \circ h$)

$$C \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

и для любой коммутативной диаграммы того же вида, например

$$E \xrightarrow{k} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

существует единственная стрелка $j: E \rightarrow C$ такая, что $h \circ j = k$

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xrightarrow{h} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\
 \uparrow j & & \nearrow k & & \\
 E & & & &
 \end{array}$$

Иными словами, уравнитель пары f, g — это терминальный объект в категории коммутативных диаграмм следующего вида

$$E \xrightarrow{k} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

с подходящими морфизмами.

Определение 18.2. Категория называется *категорией с уравнителями*, если у любой пары стрелок с одинаковыми началами и одинаковыми концами есть уравнитель.

Пример 18.3. В \mathbf{Set} уравнителем пары стрелок $f, g: A \rightarrow B$

$$C \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

будет вложение $C \subseteq A$, где $C = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$. Действительно, любая функция $k: E \rightarrow A$, для которой $f \circ k = g \circ k$ принимает все свои значения в подмножестве C , поэтому

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xrightarrow{h} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\
 \uparrow j & & \nearrow k & & \\
 E & & & &
 \end{array}$$

Теорема 18.4. *Любой уравнитель является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть h — уравнитель f и g .

$$C \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Пусть также $h \circ j_1 = h \circ j_2$ для некоторых j_1, j_2

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{j_1} \\ \xrightarrow{j_2} \end{array} C \xrightarrow{h} A$$

Докажем, что $j_1 = j_2$ (то есть, на h можно сокращать).

Положим $k = h \circ j_1 (= h \circ j_2)$, тогда $f \circ k = g \circ k$

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{h} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\ \uparrow \hat{j} & \nearrow k & & & \\ E & & & & \end{array}$$

и на роль единственной стрелки j подходят и j_1 , и j_2 . □

Упражнение 18.5. Диаграмма следующего вида (стрелки в правой части одинаковые)

$$A \xrightarrow{id_A} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f} \end{array} B$$

всегда является диаграммой уравнителя.

Упражнение 18.6. Диаграмма следующего вида (стрелки в правой части одинаковые)

$$C \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f} \end{array} B$$

является диаграммой уравнителя если и только если h – изоморфизм.

Замечание 18.7. Мономорфизм, который является уравнителем какой-либо пары стрелок, называется *регулярным*. В **Set** все мономорфизмы регулярны (попробуйте доказать), но в общем случае это не так. Например, в категориях частичного порядка все стрелки мономорфны, но регулярны только тождественные (потому что уравнивать нечего, кроме одинаковых стрелок).

Упражнение 18.8. Если мономорфизм регулярен и к тому же является эпиморфизмом, то он является изоморфизмом.

Упражнение 18.9. Если мономорфизм обратим слева, то он регулярен (если $f \circ g = id$, то g – уравнитель $g \circ f$ и id).

Упражнение 18.10. Правые сопряжённые функторы сохраняют уравнители. Точнее, если $F \dashv G$ и следующая диаграмма – диаграмма уравнителя

$$C \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

то и следующая диаграмма – тоже диаграмма уравнителя

$$G(C) \xrightarrow{G(h)} G(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{G(f)} \\ \xrightarrow{G(g)} \end{array} G(B)$$

Замечание 18.11. Правые сопряжённые функторы сохраняют терминальные объекты, произведения любых семейств объектов, уравнители и мономорфизмы. Это следует из некоторого общего результата „правые сопряжённые функторы сохраняют пределы“, который докажем в главе про пределы.

Пример 18.12. В категориях вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$, где \mathbf{K} малая, уравнители строятся покомпонентно. Пусть дана пара естественных преобразований

$$F \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau} \\ \xrightarrow{\sigma} \end{array} G$$

для которых мы хотим построить уравнитель. Здесь $F, G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$. Уравнитель будет иметь вид

$$H \xrightarrow{\rho} F \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau} \\ \xrightarrow{\sigma} \end{array} G$$

Для каждого $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{K})$ строим уравнитель в \mathbf{Set}

$$H(A) \xrightarrow{\rho_A} F(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau_A} \\ \xrightarrow{\sigma_A} \end{array} G(A)$$

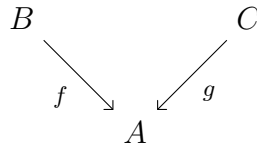
Чтобы превратить $H(A)$ в функтор и ρ_A в естественное преобразование, для любой стрелки $f: A \rightarrow B$ определяем $H(f)$ следующей диаграммой

$$\begin{array}{ccc} H(B) & \xrightarrow{\rho_B} & F(B) \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau_B} \\ \xrightarrow{\sigma_B} \end{array} G(B) \\ \uparrow \hat{H(f)} & \nearrow F(f) \circ \rho(A) & \\ H(A) & & \end{array}$$

Проверить коммутативность этой диаграммы оставляю в качестве упражнения.

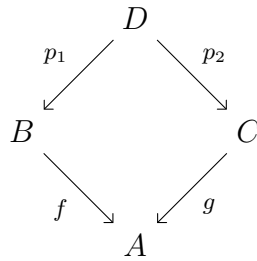
18.2 Декартовы квадраты

Пусть дана пара стрелок с общим концом

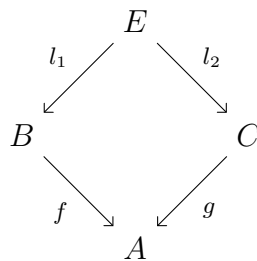


Иногда можно дополнить их до коммутативного квадрата „наилучшим возможным способом“.

Определение 18.13. Диаграмма следующего вида



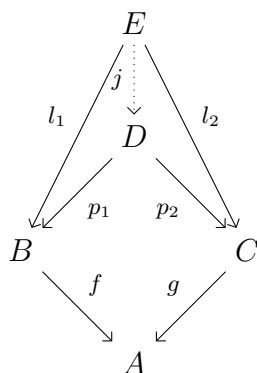
называется *декартовым квадратом*, если она коммутативна и для любого коммутативного квадрата с той же нижней частью, например



существует единственная стрелка $j: E \rightarrow D$ такая что

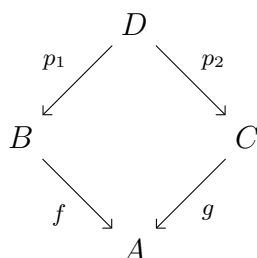
$$l_1 = p_1 \circ j$$

$$l_2 = p_2 \circ j$$



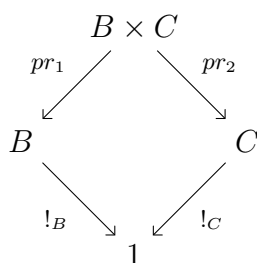
Замечание 18.14. Как бы обрадовался Декарт.

Соглашение 18.15. Если следующий квадрат декартов

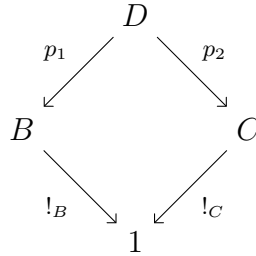


то стрелку p_1 будем называть *подъёмом* стрелки g вдоль f , а стрелку p_2 – *подъёмом* стрелки f вдоль g (по-английски пишут *pullback*).

Пример 18.16. Следующая диаграмма является декартовым квадратом



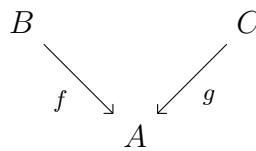
Более того, диаграмма следующего вида



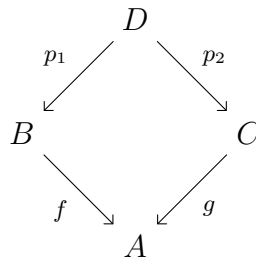
является декартовым квадратом $\Leftrightarrow D$ является произведением B и C с проекциями p_1 и p_2 .

Определение 18.17. Категория называется *категорией с декартовыми квадратами*, если любые две стрелки с общим концом можно достроить до декартова квадрата. Предыдущий пример показывает, что в категории с терминальным объектом и декартовыми квадратами всегда есть конечные произведения.

Пример 18.18. В Set декартовы квадраты строятся так: пусть даны две стрелки с общим концом



Достроим их до квадрата следующим способом

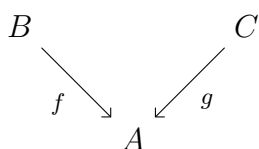


где $D = \{(b, c) \in B \times C \mid f(b) = g(c)\}$, а p_1 и p_2 есть ограничения проекций $pr_1^{B \times C}$ и $pr_2^{B \times C}$ на множество $D \subseteq B \times C$.

Эту конструкцию можно обобщить до следующей теоремы.

Теорема 18.19. Категория с уравнителями и произведениями пар объектов является категорией с декартовыми квадратами.

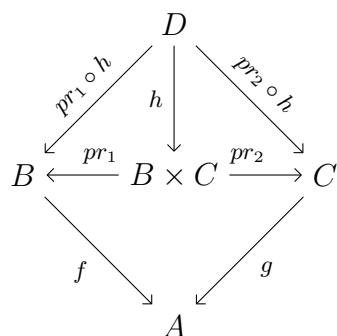
Доказательство. Пусть даны две стрелки с общим концом



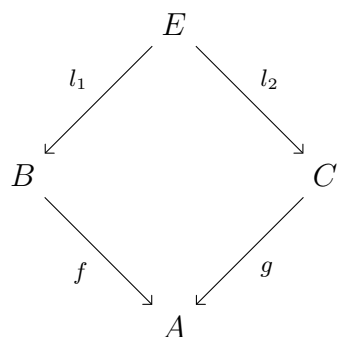
Построим следующий уравнитель

$$D \xrightarrow{h} B \times C \begin{array}{c} \xrightarrow{f \circ pr_1} \\ \xrightarrow{g \circ pr_2} \end{array} A$$

и докажем декартовость внешнего квадрата



Действительно, пусть коммутативен следующий квадрат



Тогда коммутативна следующая диаграмма

$$E \xrightarrow{\langle l_1, l_2 \rangle} B \times C \xrightarrow[f \circ pr_1]{g \circ pr_2} A$$

и по свойствам уравнителя получаем

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{h} & B \times C \xrightarrow[f \circ pr_1]{g \circ pr_2} A \\ \uparrow j & \nearrow \langle l_1, l_2 \rangle & \\ E & & \end{array}$$

и это та стрелка j , что нам нужна

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \vdots j & & \\ & l_1 & & l_2 & \\ & \swarrow & D & \searrow & \\ & pr_1 \circ h & \downarrow h & pr_2 \circ h & \\ B & \xleftarrow{pr_1} & B \times C & \xrightarrow{pr_2} & C \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & A & & \end{array}$$

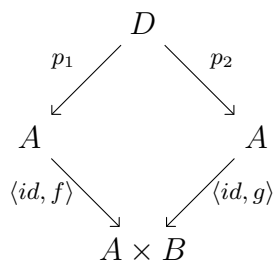
□

Теорема 18.20. Категория с декартовыми квадратами и произведениями пар объектов является категорией с уравнителями.

Доказательство. Пусть дана пара стрелок

$$A \xrightarrow[f]{g} B$$

для которых мы хотим построить уравнитель. Построим декартов квадрат



Я утверждаю, что $p_1 = p_2$ и эта стрелка является уравнителем пары f, g . Действительно, коммутативность квадрата выражается равенством

$$\langle id, f \rangle \circ p_1 = \langle id, g \rangle \circ p_2$$

из чего следует равенство первых и вторых компонент

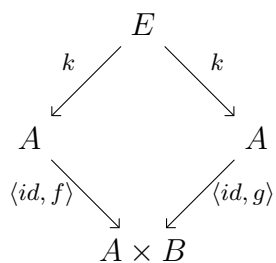
$$id \circ p_1 = id \circ p_2 \quad (\text{то есть } p_1 = p_2)$$

$$f \circ p_1 = g \circ p_2$$

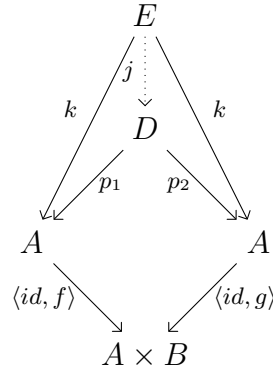
Дальше, если коммутативна следующая диаграмма

$$E \xrightarrow{k} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

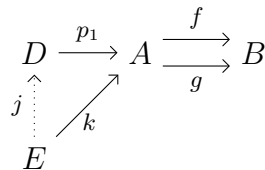
то коммутативен и квадрат



и поэтому



что равносильно коммутативности диаграммы



□

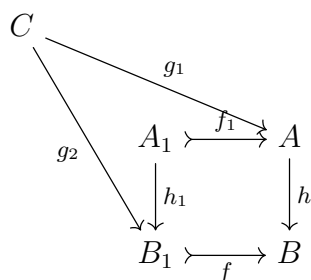
Кроме произведения пары объектов, частным случаем декартовых квадратов оказывается такая конструкция, как взятие прообраза подмножества. Прежде чем двигаться дальше, желательно перечитать раздел про мономорфизмы и подобъекты.

Пример 18.21. Пусть дано множество B , подмножество $B_1 \subseteq B$ и функция $h: A \rightarrow B$. Тогда следующий квадрат декартов

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

где $A_1 = \{x \in A \mid h(x) \in B_1\}$ (прообраз подмножества B_1 относительно h), стрелки f и f_1 – вложения подмножеств, а h_1 есть ограничение функции h на подмножество A_1 .

Действительно, пусть коммутативна диаграмма следующего вида

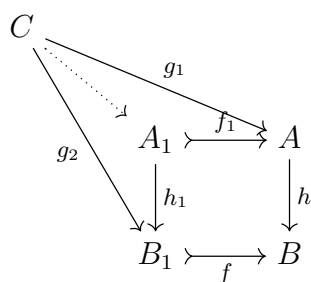


Это значит $h \circ g_1 = f \circ g_2$

Функция g_2 – это функция из C в B , принимающая все значения в подмножестве B_1 , равенство утверждает, что

$$h(g_1(x)) = g_2(x) \in B_1 \text{ для любого } x \in C$$

Мы видим, что функция $h \circ g_1$ принимает все свои значения в подмножестве B_1 , поэтому функция g_1 должна принимать все свои значения в подмножестве A_1 (прообразе B_1 относительно h). Поэтому коммутативна такая диаграмма



где единственная стрелка – это функция g_1 , если её воспринимать как функцию из C в A_1 .

В \mathbf{Set} каждая функция $h: A \rightarrow B$ определяет отображение $h^*: P(B) \rightarrow P(A)$ из множества подмножеств B во множество подмножеств A (взятие прообраза относительно функции h). Аналогично, в категориях с декартовыми квадратами каждая стрелка $h: A \rightarrow B$ определяет отображение $h^*: \text{Sub}(B) \rightarrow \text{Sub}(A)$. Любой мономорфизм с концом B (он задаёт подобъект B) поднимается вдоль h до мономорфизма с концом A .

Теорема 18.22. *Если следующий квадрат декартов*

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

то стрелка f_1 тоже является мономорфизмом. Иными словами, подбъём мономорфизма является мономорфизмом.

Доказательство. Пусть $f_1 \circ g_1 = f_1 \circ g_2$ для некоторых g_1, g_2

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} A_1 \xrightarrow{f_1} A$$

Докажем, что $g_1 = g_2$. Докажем сначала, что $h_1 \circ g_1 = h_1 \circ g_2$.

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} A_1 \xrightarrow{f_1} A \\ \downarrow h_1 \\ B_1$$

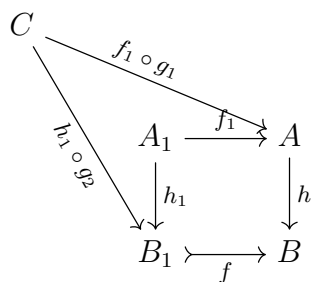
Это следует из равенства

$$f \circ h_1 \circ g_1 = f \circ h_1 \circ g_2$$

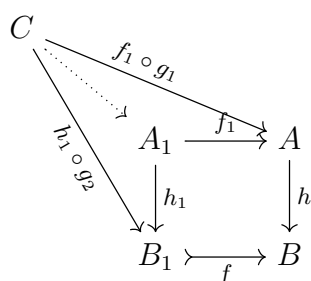
и мономорфности f .

$$\begin{array}{ccc} C \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Дальше рисуем коммутативную диаграмму

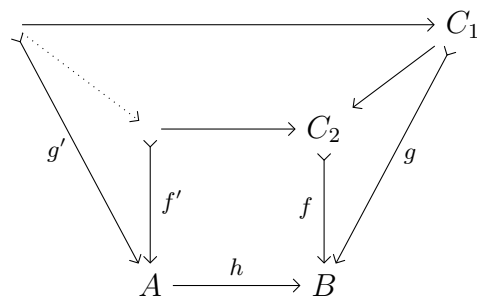


В силу декартовости квадрата, есть единственная стрелка, для которой



и на роль этой стрелки годятся и g_1 , и g_2 . □

Упражнение 18.23. Предпорядок между мономорфизмами сохраняется при подъёмах. Это значит, что если $g \lesssim f$ и мы поднимем f и g вдоль стрелки h до некоторых f' и g' , то $g' \lesssim f'$



Из этого следует, что если $f \simeq g$, то $f' \simeq g'$

Замечание 18.24. Вообще говоря, декартовы квадраты определены с точностью до некоторого изоморфизма, поэтому подъём мономорфизма вдоль h определён с точностью до отношения \simeq . Но для подбъектов подъём определён уже однозначно.

Соглашение 18.25. В категориях с декартовыми квадратами будем обозначать $h^* : \text{Sub}(B) \rightarrow \text{Sub}(A)$ отображение подъёма подобъектов вдоль стрелки $h : A \rightarrow B$

В предыдущем упражнении $[f'] = h^*([f])$

Из предыдущего упражнения следует, что отображение h^* монотонное, то есть сохраняет порядок $[g] \subseteq [f]$ между подобъектами.

Упражнение 18.26. Квадрат следующего вида всегда декартов

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id_A} & A \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{id_B} & B \end{array}$$

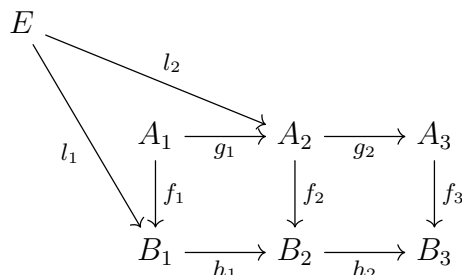
Это значит, что подъём (прообраз) наибольшего подобъекта является наибольшим подобъектом.

Следующие две теоремы вместе называют „Лемма о квадратах“. Ни в одном учебнике не видел выписанного доказательства, везде предлагают доказать в качестве упражнения. Действительно, его трудно изложить понятно. Из спортивного интереса попробую выписать, но, возможно, легче доказать самому.

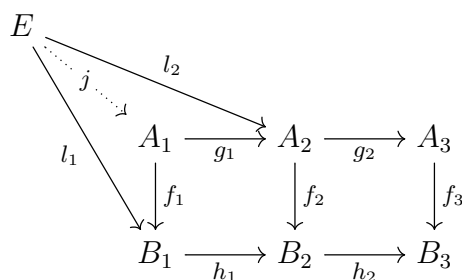
Теорема 18.27. Если левый квадрат коммутативен, а внешний прямоугольник и правый квадрат декартовы, то декартов и левый квадрат.

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{g_1} & A_2 & \xrightarrow{g_2} & A_3 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ B_1 & \xrightarrow{h_1} & B_2 & \xrightarrow{h_2} & B_3 \end{array}$$

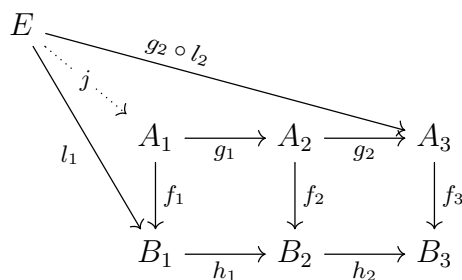
Доказательство. Пусть $h_1 \circ l_1 = f_2 \circ l_2$



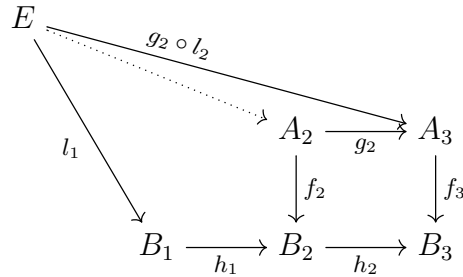
Нам надо доказать, что существует единственная стрелка j , делающая коммутативной такую диаграмму



Поскольку внешний прямоугольник декартов, мы можем утверждать существование стрелки j , для которой коммутативна такая диаграмма



Чтобы убедиться, что это именно та стрелка, которая нам нужна, достаточно проверить $g_1 \circ j = l_2$. Поскольку правый квадрат декартов, должна существовать единственная стрелка, для которой коммутативна диаграмма

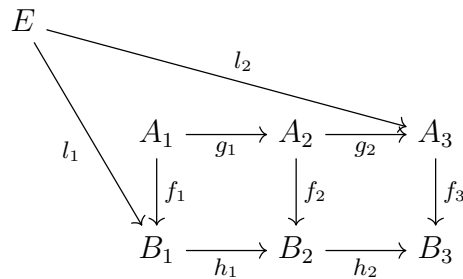


и на роль этой стрелки годятся и $g_1 \circ j$, и l_2 (проверьте). \square

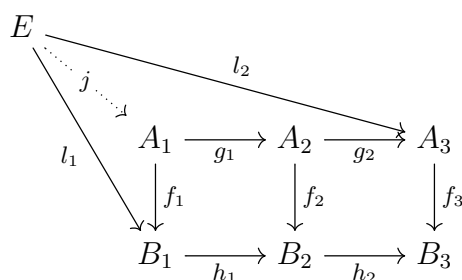
Теорема 18.28. Если оба квадрата в следующей диаграмме декартовы, то и внешний прямоугольник декартов

$$\begin{array}{ccccc}
 A_1 & \xrightarrow{g_1} & A_2 & \xrightarrow{g_2} & A_3 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
 B_1 & \xrightarrow{h_1} & B_2 & \xrightarrow{h_2} & B_3
 \end{array}$$

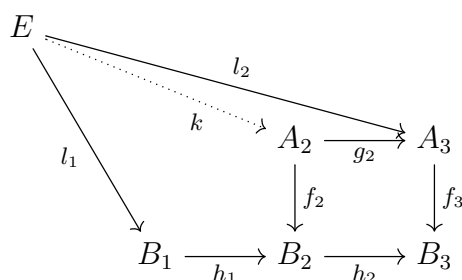
Доказательство. Пусть $h_2 \circ h_1 \circ l_1 = f_3 \circ l_2$



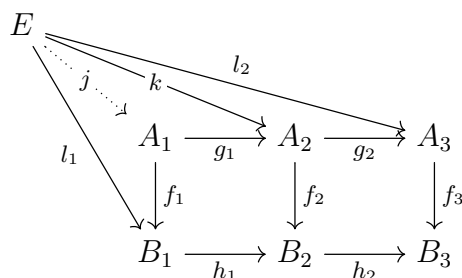
Нам надо доказать, что существует единственная стрелка j , делающая коммутативной такую диаграмму



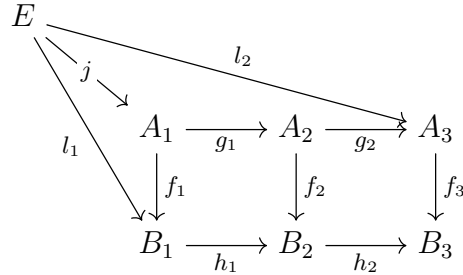
Поскольку правый квадрат декартов, должна существовать единственная стрелка k , для которой коммутативна диаграмма



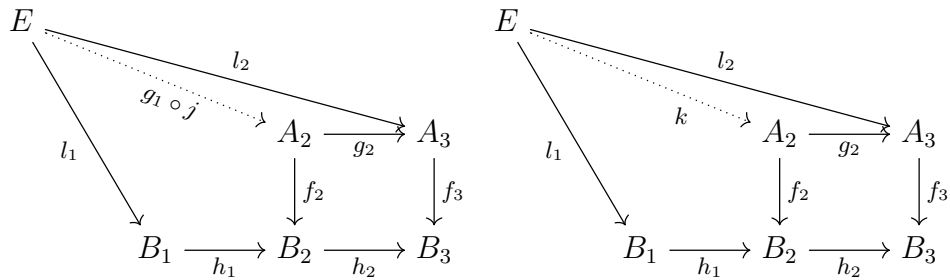
Поскольку левый квадрат тоже декартов, должна существовать единственная стрелка j , для которой коммутативна диаграмма



Проверим, что это та стрелка j , что нам нужна. Выбросив стрелку k (и соответственно, условие $g_1 \circ j = k$), получаем коммутативную диаграмму



но единственность j при этом может и пропасть, поскольку мы ослабили условия на j . Тем не менее, ничего не пропадает, поскольку из коммутативности последней диаграммы выводится $g_1 \circ j = k$



□

Из Леммы о квадратах (второй её части) следует, что операция Sub обладает свойствами функтора.

Теорема 18.29. Пусть дана категория \mathbf{K} с декартовыми квадратами, в которой у каждого объекта „не очень много подобъектов“. Это значит, что $\text{Sub}(A)$ является множеством (а не большим классом) для каждого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Тогда отображение $\text{Sub}: \text{Ob}(\mathbf{K}) \rightarrow \text{Set}$ можно продолжить до функтора $\text{Sub}: \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$, определив действие на стрелках следующим способом

$$\text{Sub}(h) = h^*: \text{Sub}(B) \rightarrow \text{Sub}(A)$$

для любой стрелки $h: A \rightarrow B$

Доказательство. Надо доказать свойства функтора (контравариантного)

$$\text{Sub}(id_A) = id_{\text{Sub}(A)}$$

$$\text{Sub}(h_2 \circ h_1) = \text{Sub}(h_1) \circ \text{Sub}(h_2)$$

что соответствует равенствам

$$(id_A)^* = id_{\text{Sub}(A)}$$

$$(h_2 \circ h_1)^* = h_1^* \circ h_2^*$$

Первое равенство означает декартовость следующего квадрата

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow id & & \downarrow id_A \\ A_1 & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

(подъём вдоль стрелки id_A не меняет подобъекта), которую оставляю в качестве лёгкого упражнения, а второе равенство – это Теорема 18.28.

□

Пример 18.30. (Пересечение подобъектов).

Возьмём пару мономорфизмов с общим концом

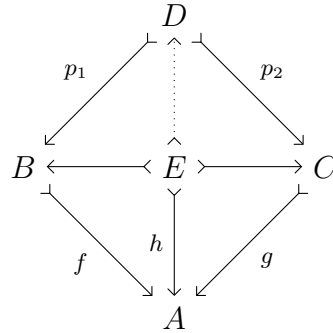
$$\begin{array}{ccc} B & & C \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & A \end{array}$$

Если можно достроить их до декартова квадрата

$$\begin{array}{ccccc} & & D & & \\ & p_1 \swarrow & & \searrow p_2 & \\ B & & & & C \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & A & & \end{array}$$

то стрелка $f \circ p_1 (= g \circ p_2): D \rightarrow A$ оказывается наибольшим мономорфизмом, который пропускается и через f , и через g . Действительно,

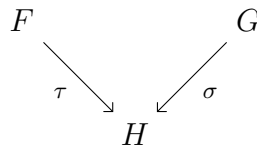
любой мономорфизм $h: E \rightarrow A$, который пропускается через f и g , должен проходить и через $f \circ p_1 (= g \circ p_2)$



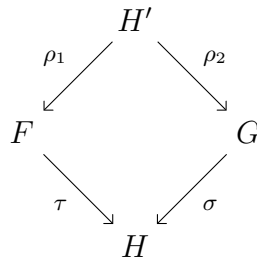
Это значит, что из $[h] \subseteq [f]$ и $[h] \subseteq [g]$ следует $[h] \subseteq [f \circ p_1]$, поэтому подобъект $[f \circ p_1]$ есть пересечение $[f] \cap [g]$

Упражнение 18.31. Попробуйте доказать, что все операции взятия прообраза h^* сохраняют пересечения подобъектов. Это следует из некоторой теоремы, которую мы докажем позже.

Упражнение 18.32. В категориях вида \mathbf{Set}^K , где K – малая, декартовы квадраты строятся покомпонентно. Пусть дана пара естественных преобразований



где $F, G, H: K \rightarrow \mathbf{Set}$. Декартов квадрат будет иметь вид



Для каждого $A \in \mathbf{Ob}(K)$ строим декартов квадрат в \mathbf{Set}

$$\begin{array}{ccc}
 & H'(A) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 F(A) & & G(A) \\
 \searrow \tau_A & & \swarrow \sigma_A \\
 & H(A) &
 \end{array}$$

и определяем действие H' на стрелках, используя свойства декартова квадрата.

Упражнение 18.33. Стрелка $f: A \rightarrow B$ является мономорфизмом если и только если следующий квадрат декартов

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 id \downarrow & & \downarrow f \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Замечание 18.34. Предыдущие два упражнения дают другое доказательство Теоремы 17.52 (естественное преобразование τ является мономорфизмом в \mathbf{Set}^K если и только если все его компоненты τ_A являются мономорфизмами в \mathbf{Set})

Упражнение 18.35. Правые сопряжённые функторы сохраняют декартовы квадраты. Точнее, если $F \dashv G$ и следующий квадрат декартов

$$\begin{array}{ccc}
 & D & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 B & & C \\
 f \searrow & & \swarrow g \\
 & A &
 \end{array}$$

то декартов и следующий квадрат

$$\begin{array}{ccc} & G(D) & \\ G(p_1) \swarrow & & \searrow G(p_2) \\ G(B) & & G(C) \\ G(f) \searrow & & \swarrow G(g) \\ & G(A) & \end{array}$$

Замечание 18.36. Есть проблема с терминологией. По-английски категория, в которой у каждого объекта „не очень много“ подобъектов (множество, а не большой класс), называется *well-powered category*. По-русски такую категорию называют „локально малой слева“. Но это нехорошо, потому что локально малая категория может не быть „локально малой слева“. Надо бы придумать другое название.

18.3 Топосы

В категории множеств \mathbf{Set} функтор $\mathbf{Sub}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ представим. Напомним, что

$$\mathbf{Sub}(A) = P(A) \quad (\text{множество подмножеств } A)$$

$$\mathbf{Sub}(h) = h^* \quad (\text{взятие прообраза относительно } h)$$

$\mathbf{Sub}(h): \mathbf{Sub}(B) \rightarrow \mathbf{Sub}(A)$ если $h: A \rightarrow B$

Возьмём множество $\Omega = \{\top, \perp\}$, оно будет представляющим объектом

$$\mathbf{Sub} \cong H_\Omega$$

Действительно, для любого множества B есть изоморфизм

$$\mathbf{Sub}(B) \cong H_\Omega(B) = \mathbf{Set}(B, \Omega)$$

Каждому подмножеству $B' \subseteq B$ изоморфизм сопоставляет его характеристическую функцию $\chi: B \rightarrow \Omega$, которая принимает значение \top на всех элементах подмножества B' и значение \perp на всех остальных. В обратную сторону, каждой функции $\chi: B \rightarrow \Omega$ соответствует подмножество $\{x \in B \mid \chi(x) = \top\} \subseteq B$

Пусть дана функция $h: A \rightarrow B$. Если подмножеству $B' \subseteq B$ соответствует характеристическая функция $\chi: B \rightarrow \Omega$, то его прообразу $h^*(B') \subseteq A$ соответствует характеристическая функция $\chi \circ h: A \rightarrow \Omega$

$$\begin{array}{ccc} B & \mathbf{Sub}(B) & \xrightarrow{\cong} \mathbf{Set}(B, \Omega) \\ \uparrow h & \downarrow h^* & \downarrow \circ h \\ A & \mathbf{Sub}(A) & \xrightarrow{\cong} \mathbf{Set}(A, \Omega) \end{array}$$

эта диаграмма выражает естественность изоморфизма.

По лемме Йонеды, изоморфизм

$$\tau: H_\Omega \rightarrow \mathbf{Sub}$$

однозначно определяется элементом $\tau_\Omega(id_\Omega) \in \text{Sub}(\Omega)$

Этот элемент есть подмножество $\{\top\} \subseteq \Omega$, то есть подмножество $\{x \in \Omega \mid id_\Omega(x) = \top\}$

Это подмножество обладает следующим свойством „универсальности“ (Упражнение 17.18): любое подмножество получается как прообраз $\{\top\} \subseteq \Omega$ единственно возможным способом. Точнее, для любого множества B и подмножества $B' \subseteq B$ есть ровно одна функция $\chi: B \rightarrow \Omega$ такая, что $B' = \chi^*(\{\top\}) = \{x \in B \mid \chi(x) = \top\}$

Определение 18.37. Пусть \mathbf{K} – категория с терминальным объектом. *Классификатором подобъектов* в категории \mathbf{K} называется объект Ω вместе со стрелкой вида $\top: 1 \rightarrow \Omega$, обладающие следующим свойством: для любого мономорфизма $f: B' \rightarrow B$ существует единственная стрелка $\chi_f: B \rightarrow \Omega$ такая, что следующий квадрат декартов

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow !_{B'} & & \downarrow \chi_f \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

Объект Ω в этом случае называется *классифицирующим объектом*, а стрелка χ_f – *характеристической стрелкой* (или *классифицирующей стрелкой*) мономорфизма f . Элементы Ω называются *значениями истинности*, а элемент $\top: 1 \rightarrow \Omega$ называется *истинной*.

Напомню, что стрелка из терминального объекта всегда мономорфна, поэтому можно перерисовать квадрат так

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow !_{B'} & & \downarrow \chi_f \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

Содержательно, стрелка $\top: 1 \rightarrow \Omega$ является „универсальным мономорфизмом“, из которого любой мономорфизм f получается как прообраз единственно возможным способом.

Замечание 18.38. Предположим, что есть мономорфизм $\top: \Omega' \rightarrow \Omega$, из которого любой мономорфизм получается подъёмом вдоль единственно возможной стрелки. Это значит, для любого $f: B' \rightarrow B$ есть

единственная стрелка $\chi: B \rightarrow \Omega$, для которой есть декартов квадрат такого вида

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \chi \\ \Omega' & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

Тогда должно быть $\Omega' \cong 1$. Действительно, для любого объекта B должна быть единственная стрелка $\chi: B \rightarrow \Omega$, для которой есть декартов квадрат такого вида

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{id} & B \\ \downarrow & & \downarrow \chi \\ \Omega' & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

Возьмём произвольную стрелку $g: B \rightarrow \Omega'$ и нарисуем квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{id} & B \\ g \downarrow & & \downarrow \top \circ g \\ \Omega' & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

Этот квадрат декартов (лёгкая проверка). Но стрелка $\top \circ g$ должна быть единственной, для которой квадрат такого вида декартов, поэтому для каждого объекта B должна быть единственная стрелка вида $g: B \rightarrow \Omega'$, поэтому $\Omega' \cong 1$

Теорема 18.39. *Все классифицирующие объекты изоморфны между собой. Более того, если даны два классификатора*

$$\top: 1 \rightarrow \Omega$$

$$\top': 1 \rightarrow \Omega'$$

то существует единственный изоморфизм $\chi: \Omega \rightarrow \Omega'$ такой, что

$$\chi \circ \top = \top' \quad (\text{переводящий истину в истину})$$

Доказательство. Чтобы доказать существование изоморфизма, рисуем диаграмму из двух декартовых квадратов

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \\
 !_1 \downarrow & & \downarrow \chi_{\top} \\
 1 & \xrightarrow{\top'} & \Omega' \\
 !_1 \downarrow & & \downarrow \chi_{\top'} \\
 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega
 \end{array}$$

По Лемме о квадратах, внешний прямоугольник тоже декартов, перерисуем его так

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \\
 !_1 \downarrow & & \downarrow \chi_{\top'} \circ \chi_{\top} \\
 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega
 \end{array}$$

Но и такой прямоугольник декартов

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \\
 !_1 = id_1 \downarrow & & \downarrow id_{\Omega} \\
 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega
 \end{array}$$

поэтому $\chi_{\top'} \circ \chi_{\top} = id_{\Omega}$ (в силу единственности характеристической стрелки).

Аналогично доказывается $\chi_{\top} \circ \chi_{\top'} = id_{\Omega'}$

Чтобы доказать единственность изоморфизма, заметим, что для любого изоморфизма χ из коммутативности следующего квадрата (это и есть $\chi \circ \top = \top'$) следует его декартовость (проверьте, это нетрудно)

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \\
 !_1 \downarrow & & \downarrow \chi \\
 1 & \xrightarrow{\top'} & \Omega'
 \end{array}$$

и в силу единственности характеристической стрелки такой χ может быть только один. \square

Теорема 18.40. Два мономорфизма $f: A \rightarrow C$ и $g: B \rightarrow C$ задают один и тот же подобъект если и только если $\chi_f = \chi_g$.

Доказательство. Пусть $f \simeq g$. Рисуем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow !_B & & \downarrow \chi_g \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

Поскольку $f \simeq g$, существует изоморфизм h , пропускающий f через g

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ & \searrow f & & & \\ & & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow h & \downarrow !_B & & \downarrow \chi_g \\ & & 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \\ & \searrow !_A & & & \end{array}$$

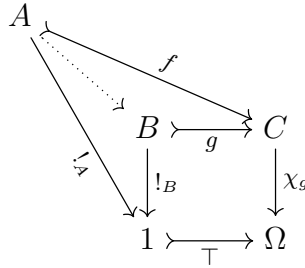
Легко показать, что внешний квадрат тоже декартов, поэтому χ_g является характеристической стрелкой также и для f . В силу единственности характеристической стрелки $\chi_f = \chi_g$.

В обратную сторону, предположим, что $\chi_f = \chi_g$. Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ & \searrow f & & & \\ & & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow !_A & \downarrow !_B & & \downarrow \chi_g \\ & & 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

Внутренний квадрат декартов. Так как $\chi_f = \chi_g$, внешний квадрат тоже декартов, поэтому коммутативен. В силу декартовости внутреннего

квадрата, существует стрелка (пунктир), пропускающая f через g , поэтому $f \lesssim g$.



Меняя f и g местами, точно так же получаем $g \lesssim f$, поэтому $f \simeq g$. \square

Определение 18.41. Категория называется *топосом*, если она:

1. декартово замкнута;
2. с уравнителями (равносильно „с декартовыми квадратами“);
3. имеет классификатор подобъектов.

Замечание 18.42. В топосах ещё многое есть, не очевидное из определения. Например, в каждом топосе есть начальный объект и копроизведения пар объектов.

Замечание 18.43. Локально малая категория \mathbf{K} является топосом, если она:

1. декартово замкнута;
2. с уравнителями (равносильно „с декартовыми квадратами“);
3. функтор $\text{Sub} : \mathbf{K}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ представим.

Данное выше „элементарное“ определение не использует \mathbf{Set} , не зависит от теоретико-множественных проблем, связанных с определением Sub и годится не только для локально малых категорий, хотя от последнего пользы мало.

Замечание 18.44. В любом топосе \mathbf{K} подобъекты любого объекта, упорядоченные по включению, образуют алгебру Гейтинга. Доказать это не очень легко. В частности, подобъекты 1 образуют алгебру Гейтинга. Но поскольку

$$\text{Sub}(1) \cong \mathbf{K}(1, \Omega)$$

то подобъекты 1 – это элементы Ω (значения истинности).

Пример 18.45. $\text{Set}^{\mathbf{K}}$ является топосом для любой малой категории \mathbf{K} . Мы уже строили всё, кроме классификатора. Определим классифицирующий объект в $\text{Set}^{\mathbf{K}}$ (это функтор $\Omega: \mathbf{K} \rightarrow \text{Set}$) таким способом

$$\Omega(A) = \text{Sub}(H^A) \quad \text{для любого } A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$$

Идея этого определения в том, что для классифицирующего объекта должны выполняться изоморфизмы

$$\Omega(A) \cong \text{Nat}(H^A, \Omega) \cong \text{Sub}(H^A)$$

(первый – по лемме Йонеды). На стрелках функтор Ω действует так

$$\Omega(f) = \text{Sub}(H^f): \text{Sub}(H^A) \rightarrow \text{Sub}(H^B)$$

где $f: A \rightarrow B$

Стрелкой $\top: 1 \rightarrow \Omega$ будет естественное преобразование с компонентами

$$\top_A: 1 \rightarrow \text{Sub}(H^A)$$

компонента выдаёт наибольший подобъект H^A .

Пример 18.46. Рассмотрим категорию $\text{Set}^{\mathbf{K}}$ над шкалой \mathbf{K}

$$\begin{array}{c} id_B \hookrightarrow B \\ \uparrow f \\ id_A \hookrightarrow A \end{array}$$

Функторы H^A и H^B выглядят так

$$\begin{array}{ccc} \{f\} & & \{id_B\} \\ f \circ \uparrow & & f \circ \uparrow \\ \{id_A\} & & \emptyset \end{array}$$

Естественное преобразование $H^f: H^B \rightarrow H^A$ выглядит так

$$\begin{array}{ccc} \{id_B\} & \xrightarrow{\circ f} & \{f\} \\ f \circ \uparrow & & f \circ \uparrow \\ \emptyset & \xrightarrow{\circ f} & \{id_A\} \end{array}$$

У H^B два подобъекта

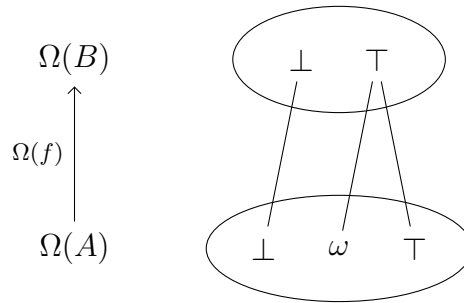
$$\begin{array}{ccc} \emptyset & & \{id_B\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \emptyset & & \emptyset \end{array}$$

У H^A три подобъекта

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \{f\} & \{f\} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \emptyset & \emptyset & \{id_A\} \end{array}$$

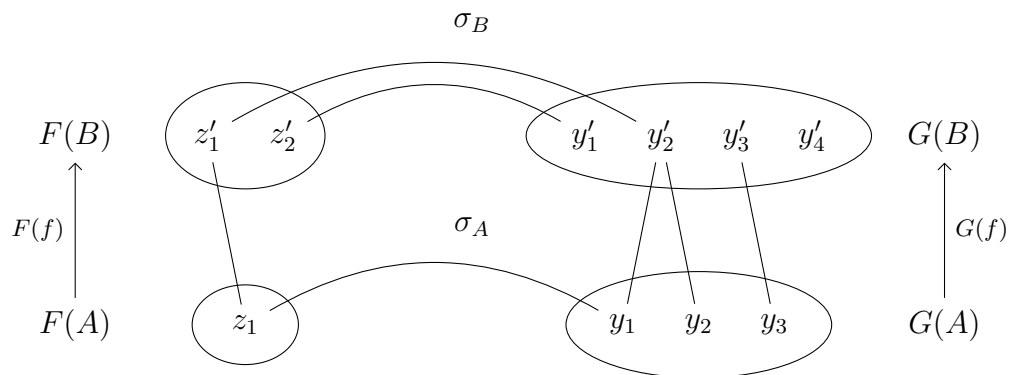
Отображение $Sub(H^f): Sub(H^A) \rightarrow Sub(H^B)$ по каждому подобъекту H^A выдаёт его прообраз относительно H^f , получаем подобъект H^B .

Объект Ω в этой категории выглядит так

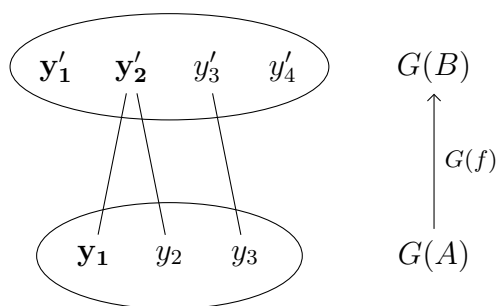


у него три элемента (три стрелки вида $\tau: 1 \rightarrow \Omega$), которые задаются парами $(\perp, \perp), (\omega, \top), (\top, \top)$. Выделенным элементом будет (\top, \top) , он и есть „истина“. Логика этого топоса трёхзначная.

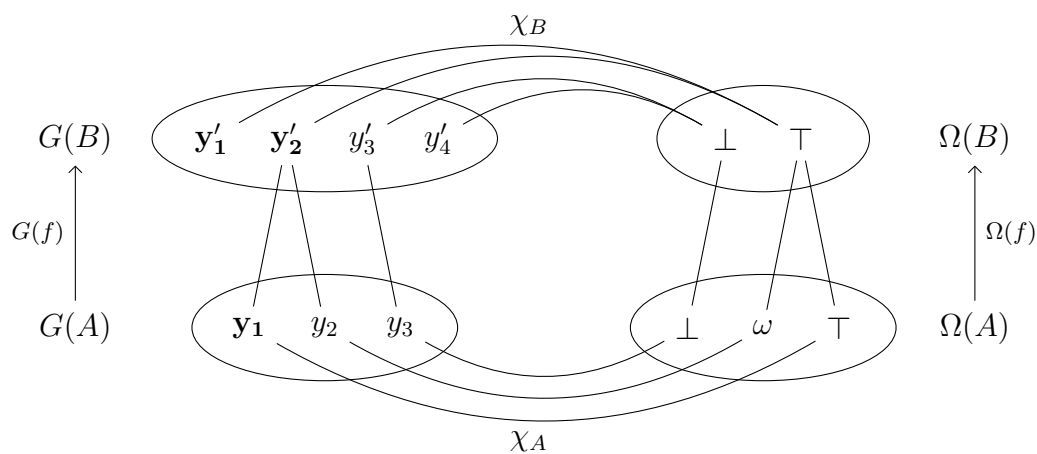
Ниже показан некоторый мономорфизм $\sigma: F \hookrightarrow G$



который задаёт следующий подобъект (выделен жирным)



Характеристическая стрелка $\chi_\sigma : G \rightarrow \Omega$ для этого подобъекта выглядит так



Что же хотел сказать этой картинкой вдохновенный художник? На верхнем уровне (момент времени B) всё просто. Те элементы $G(B)$, которые принадлежат подобъекту, отображаются в \top , а те, которые не принадлежат, отображаются в \perp . На нижнем уровне (момент времени A) ситуация сложнее. Элемент $G(A)$ может принадлежать подобъекту (тогда он отображается в \top), может не принадлежать подобъекту, но попасть в него в будущем (тогда он отображается в ω), может не принадлежать и не попасть никогда (тогда он отображается в \perp).

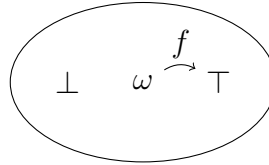
Пример 18.47. Рассмотрим полугруппу с единицей $M = \{e, f\}$, причём $f \circ f = f \neq e$. Рассмотрим M -множество $\Omega = \{\perp, \omega, \top\}$, на котором задано такое действие M

$$f(\perp) = \perp$$

$$f(\omega) = \top$$

$$f(\top) = \top$$

что мы неформально изобразим так

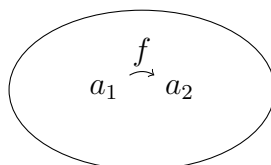


Это и есть классификатор подобъектов в категории M -множеств, а почему, догадайтесь сами. Заметим, что значений истинности (элементов Ω) в данном случае два (\perp и \top , поскольку элементы M -множества – это неподвижные точки). Вообще, для любой полугруппы с единицей M в топосе M -множеств есть только два значения истинности, поскольку у терминального объекта только два подобъекта (терминальный объект – это множество $\{*\}$ с тривиальным действием)

Дальше я попробую объяснить на примере этого топоса, как в топосах интерпретировать логику. Возьмём какой-нибудь объект попроще, а именно M -множество $A = \{a_1, a_2\}$, на котором задано такое действие

$$f(a_1) = a_2$$

$$f(a_2) = a_2$$



У объекта A три подобъекта, которые задаются подмножествами \emptyset , $\{a_2\}$, $\{a_1, a_2\}$. Рассмотрим некоторый язык, на котором можно говорить об объекте A . Язык содержит

$x, y, z \dots$ переменные

a_2 константа

$=$ знак равенства

$\wedge, \vee, \Rightarrow, \perp, \top, \neg$ логические связки

\forall, \exists кванторы

Константы можно вводить только для теоретико-категорных элементов (то есть, неподвижных точек), иначе не получится никакой хорошей логики. Формулы с одной свободной переменной будут обозначать подобъекты A .

Формула $x = a_2$ обозначает подобъект $\{a_2\}$

Формула $x = x$ (тождественно истинная) обозначает подобъект $\{a_1, a_2\}$

Формула $\neg x = x$ (тождественно ложная) обозначает подобъект \emptyset

Формула $\neg x = a_2$ обозначает угадайте какой подобъект. Правильно, \emptyset , а не $\{a_1\}$, который вообще не является подобъектом. Отрицание – это самый большой подобъект, не пересекающийся с нашим.

Формула $x = a_2 \vee \neg x = a_2$ обозначает подобъект $\{a_2\}$ (объединение того, что обозначают $x = a_2$ и $\neg x = a_2$)

Формула $\forall x (x = a_2 \vee \neg x = a_2)$ имеет такой смысл: „для всех x верно $x = a_2 \vee \neg x = a_2$ “. Эта формула не содержит свободных переменных, таким формулам (*замкнутым*, как говорят логики) соответствуют не подобъекты A , а значения истинности. Вообще, формулам с двумя свободными переменными соответствуют подобъекты $A \times A$, формулам с тремя свободными переменными – подобъекты $A \times A \times A$, формулам с нулём свободных переменных (замкнутым) – подобъекты 1 (значения истинности).

Так вот, формуле $\forall x (x = a_2 \vee \neg x = a_2)$ соответствует значение истинности „ложь“. Идея в том, что подобъект $\{a_2\}$, задаваемый формулой $x = a_2 \vee \neg x = a_2$, не совпадает со всем A (то есть, с $\{a_1, a_2\}$). Таким образом, в этом топосе неверен закон исключённого третьего, хотя логика двузначная.

Формула $\neg \forall x (x = a_2 \vee \neg x = a_2)$ принимает логическое значение „истина“.

Из того, что значений истинности два (\top и \perp), следует, что всякая замкнутая формула истинна или ложна, поэтому для любой замкнутой формулы α верен закон исключённого третьего

$$\alpha \vee \neg \alpha$$

Но для формулы со свободной переменной $\alpha(x)$ может быть истинна такая формула

$$\neg \forall x (\alpha(x) \vee \neg \alpha(x))$$

Вывод: с кванторами всё сложнее, чем можно ожидать. Может быть, поможет такое замечание: подобъекты 1 в этом топосе образуют булеву алгебру из двух элементов (\perp и \top), но подобъекты объекта A образуют алгебру Гейтинга из трёх элементов $\emptyset, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$, которая уже не является булевой.

Замечание 18.48. И теперь можно читать книгу Голдблатта „Топосы“. Книга написана на редкость бестолково, но содержит много интересной информации. Кого интересует логика, может почитать главу „Доктрины в категорной логике“ в первом томе „Справочной книги по математической логике“ под редакцией Барвайса и главу „Логика топосов“ в четвёртом томе. По-английски рекомендую читать книгу Lambek, Scott “Introduction to Higher Order Categorical Logic”. Есть ещё книга Джонстона, но она для профессионалов.

18.4 Относительные категории

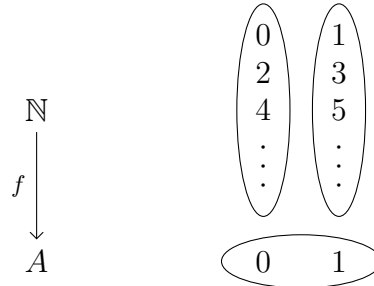
В этом разделе делается попытка объяснить, как на категорном языке говорить об индексированных семействах объектов. В Set мы можем говорить о семействе множеств B_i , индексированных элементами некоторого множества A (то есть $i \in A$). Попытка обобщить эту конструкцию на другие категории приводит к некоторой „ходьбе на голове“, которая с непривычки кажется странной. Тем не менее, польза есть, если мы, допустим, хотим интерпретировать типы, зависящие от параметра в исчислениях Мартин-Лёфа. При первом чтении раздел можно пропустить.

Определение 18.49. Пусть даны категория \mathcal{K} и объект $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$. *Относительная категория над A* (обозначается \mathcal{K}/A , в старых книгах $\mathcal{K} \downarrow A$) – это категория, объектами которой являются всевозможные стрелки с концом A , а морфизмом между $f_1: B \rightarrow A$ и $f_2: C \rightarrow A$ будет любая стрелка $g: B \rightarrow C$, делающая коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & & A \end{array}$$

Композиции морфизмов и тождественные морфизмы в \mathcal{K}/A наследуются из \mathcal{K} .

Пример 18.50. В Set стрелка вида $f: B \rightarrow A$ задаёт набор множеств, индексированных элементами A . Каждому $a \in A$ сопоставим его прообраз $f^*({a})$. Например, пусть $B = \mathbb{N}$, $A = \{0, 1\}$ и стрелка $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ даёт остаток при делении на два. Прообразом нуля $f^*({0})$ будет множество чётных натуральных чисел, а прообразом единицы $f^*({1})$ – множество нечётных.



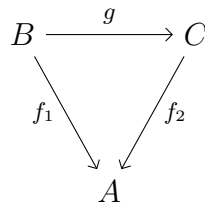
При таком способе мыслить стрелка $f: B \rightarrow A$ называется *расслоением над базой A* , множество B называется *пространством расслоения*, а прообразы элементов A – *слоями*. На картинке выше множество \mathbb{N} распадается на два слоя. Заметим, что слои всегда попарно не пересекаются. В общем случае некоторые слои могут быть пустыми (если стрелка f не является сюръекцией). В обратную сторону, если задано семейство попарно непересекающихся множеств $\{B_a \mid a \in A\}$, можно сделать расслоение со слоями B_a , взяв в качестве B объединение $\bigcup_{a \in A} B_a$. Условие попарной дизъюнктивности слоёв не очень существенно, как показывает следующий пример.

Пример 18.51. Пусть дано множество A . Обозначим через \mathbf{Set}^A категорию, объектами которой являются произвольные семейства множеств вида $\{B_a \mid a \in A\}$ (не обязательно попарно дизъюнктные), а стрелкой из $\{B_a \mid a \in A\}$ в $\{C_a \mid a \in A\}$ будет любой набор функций $\{g_a: B_a \rightarrow C_a \mid a \in A\}$. Покажем, что категория \mathbf{Set}/A эквивалентна категории \mathbf{Set}^A .

Функтор эквивалентности из \mathbf{Set}/A в \mathbf{Set}^A выглядит так.

По объекту категории \mathbf{Set}/A (стрелке вида $f: B \rightarrow A$) мы можем построить семейство множеств $\{B_a \mid a \in A\} = \{f^*(\{a\}) \mid a \in A\}$.

По морфизму категории \mathbf{Set}/A



мы можем построить семейство функций $\{g_a: B_a \rightarrow C_a \mid a \in A\}$, где $C_a = f_2^*({a})$. Условие коммутативности $f_2 \circ g = f_1$ означает, что функция g отображает слой над $a \in A$ опять в слой над $a \in A$ (элементы $f_1^*({a})$ переходят в элементы $f_2^*({a})$ для каждого $a \in A$). Функции g_a получаются как ограничения функции g на B_a .

В обратную сторону, функтор эквивалентности из \mathbf{Set}^A в \mathbf{Set}/A строится так.

Если дано семейство множеств $\{B_a \mid a \in A\}$, возьмём их дизъюнктное объединение $B = \Sigma_{a \in A} B_a = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B_a\}$ и стрелку $f: B \rightarrow A$, определённую так

$$f(a, b) = a$$

Слой $f^*({a})$ состоит из всех пар вида (a, b) , где $b \in B_a$, он изоморфен B_a , но теперь слои попарно не пересекаются. Если дано семейство функций $\{g_a: B_a \rightarrow C_a \mid a \in A\}$, сопоставляем ему морфизм в \mathbf{Set}/A

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{a \in A} B_a & \xrightarrow{g} & \Sigma_{a \in A} C_a \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & & A \end{array}$$

$$f_1(a, b) = a$$

$$f_2(a, c) = a$$

$$g(a, b) = (a, g_a(b))$$

Стрелку g можно обозначить $\Sigma_{a \in A} g_a$, это копроизведение семейства $\{g_a \mid a \in A\}$.

Содержательно, категории \mathbf{K}/A есть обобщение категорий \mathbf{Set}^A с \mathbf{Set} на произвольные \mathbf{K} .

Упражнение 18.52. Если в категории \mathbf{K} есть терминальный объект, то $\mathbf{K}/1 \cong \mathbf{K}$

Пример 18.53. В категории вида \mathbf{K}/A всегда есть терминальный объект, это стрелка $id_A: A \rightarrow A$, потому что

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad f \quad} & A \\ & \searrow f & \swarrow id_A \\ & & A \end{array}$$

В \mathbf{Set} стрелка id_A задаёт расслоение, где над каждым $a \in A$ висит слой из одного элемента $\{a\}$.

Элементами объекта f в \mathbf{K}/A будут стрелки g со свойством $f \circ g = id_A$

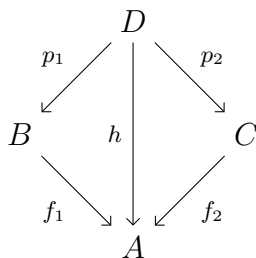
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad g \quad} & B \\ & \searrow id_A & \swarrow f \\ & & A \end{array}$$

такие стрелки называются *сечениями* расслоения f . В \mathbf{Set} такая стрелка g по каждому элементу $a \in A$ выдаёт некоторый элемент соответствующего слоя $g(a) \in f^*(\{a\})$

Пример 18.54. Возьмём мономорфизм $f: B \rightarrow A$ в \mathbf{Set} . Над каждым $a \in A$ висит слой из одного элемента (если a принадлежит подмножеству) или пустой (если нет).

Пример 18.55. Возьмём функцию $pr_1: A \times B \rightarrow A$ в \mathbf{Set} . Над каждым $a \in A$ висит слой, изоморфный B (множество всех пар (a, b) таких, что $b \in B$). Поэтому $\Sigma_{x \in A} B \cong A \times B$

Пример 18.56. Декартово произведение объектов $f_1: B \rightarrow A$ и $f_2: C \rightarrow A$ в \mathbf{K}/A , если оно существует, задаётся некоторым объектом $h: D \rightarrow A$ и парой проекций p_1, p_2 .

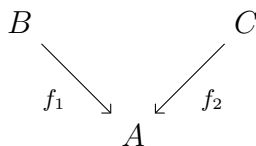


Поскольку p_1 и p_2 являются морфизмами в \mathcal{K}/A , должны быть выполнены равенства

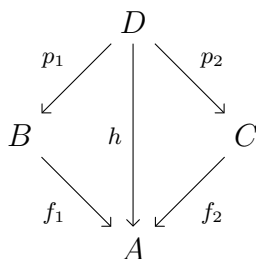
$$f_1 \circ p_1 = h = f_2 \circ p_2$$

поэтому внешний квадрат должен быть коммутативен. Немного поразмыслив, приходим к выводу, что эта коммутативная диаграмма задаёт произведение в \mathcal{K}/A если и только если внешний квадрат декартов.

Пример 18.57. Вспомним, что в \mathbf{Set} декартовы квадраты строятся так: пусть даны две стрелки с общим концом



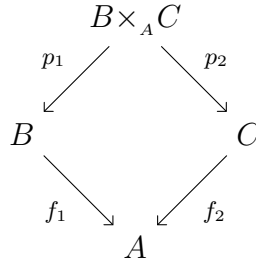
Достроим их до квадрата следующим способом



где $D = \{(b, c) \in B \times C \mid f_1(b) = f_2(c)\}$, а p_1 и p_2 есть ограничения проекций $pr_1^{B \times C}$ и $pr_2^{B \times C}$ на множество $D \subseteq B \times C$.

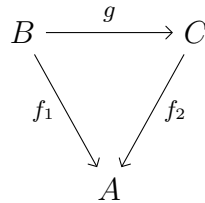
Если ввести обозначения $B_a = f_1^*({a})$ и $C_a = f_2^*({a})$, то стрелка $h = f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2: D \rightarrow A$ задаёт расслоение со слоями $B_a \times C_a$.

Замечание 18.58. Часто декартов квадрат изображают так



и называют объект $B \times_A C$ (вместе с проекциями p_1, p_2) „расслоённым произведением“. Обозначение неудачно, потому что операция применяется не к объектам A, B и C , а к паре стрелок f_1 и f_2 . Топологи в этом случае правильно говорят о „*послойном произведении отображений* f_1 и f_2 “. Разумно было бы писать что-то вроде $f_1 \times_A f_2$, но это уже не от меня зависит.

Пример 18.59. Возьмём категорию \mathbf{K} и в ней объект A . Определим функтор $\Sigma_A: \mathbf{K}/A \rightarrow \mathbf{K}$. По объекту $f: B \rightarrow A$ категории \mathbf{K}/A функтор Σ_A выдаёт B . По стрелке g категории \mathbf{K}/A функтор Σ_A выдаёт g .



В \mathbf{Set} этот функтор фактически по семейству множеств $\{B_a \mid a \in A\}$ выдаёт их дизъюнктивное объединение $\Sigma_{a \in A} B_a \cong B$, отсюда и обозначение.

Определение 18.60. Возьмём категорию \mathbf{K} и в ней стрелку $h: A \rightarrow B$. Определим функтор $\Sigma_h: \mathbf{K}/A \rightarrow \mathbf{K}/B$. Функтор Σ_h переводит объект $f: C \rightarrow A$ категории \mathbf{K}/A в объект $h \circ f: C \rightarrow B$ категории \mathbf{K}/B . Стрелка g категории \mathbf{K}/A переходит в стрелку g категории \mathbf{K}/B

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 & \xrightarrow{g} & C_2 \\
 & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\
 & & A \xrightarrow{h} B
 \end{array}$$

Упражнение 18.61. В Set функтор Σ_h действует так. Пусть дано семейство множеств $\{C_a \mid a \in A\}$. Возьмём элемент $b \in B$. В него переходят некоторые элементы $a \in A$ (то есть $h(a) = b$). Повесим над b дизъюнктивное объединение соответствующих C_a и получим семейство множеств $\{\Sigma_{a \in A} C_a \mid h(a) = b\}$, индексированное элементами $b \in B$. По семейству функций $\{g_a \mid a \in A\}$ функтор Σ_h выдаёт семейство функций $\{\Sigma_{a \in A} g_a \mid h(a) = b\}$, индексированное элементами $b \in B$. Функтор Σ_A из предыдущего примера получается, если в \mathbf{K} есть 1 , тогда $\mathbf{K} \cong \mathbf{K}/1$ и в качестве h надо взять стрелку $!_A: A \rightarrow 1$

Теорема 18.62. Пусть \mathbf{K} – категория с декартовыми квадратами. Более того, мы потребуем, чтобы для любой пары стрелок с общим концом был выбран какой-то декартов квадрат из всех возможных (напомню, что декартовы квадраты определены с точностью до изоморфизма). Тогда для любой стрелки h к функтору Σ_h есть правый сопряжённый.

Доказательство. Возьмём любые два объекта A, B и произвольную стрелку между ними $h: A \rightarrow B$. Докажем, что есть функтор

$$h^*: \mathbf{K}/B \rightarrow \mathbf{K}/A \text{ такой, что } \Sigma_h \dashv h^*$$

$$\mathbf{K}/A \begin{array}{c} \xrightarrow{\Sigma_h} \\ \xleftarrow{h^*} \end{array} \mathbf{K}/B$$

Мы определим операцию на объектах $h^*: \text{Ob}(\mathbf{K}/B) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{K}/A)$ и применим Теорему 12.26.

Чтобы понять сопряжённость, обозначим объекты \mathbf{K}/A буквами a, b, c , а объекты \mathbf{K}/B буквами X, Y, Z . Определение $h^*(X)$ выглядит так

$$\begin{array}{ccc}
 C' & \xrightarrow{\varepsilon_X} & C \\
 h^*(X) \downarrow & & \downarrow X \\
 A & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}$$

где квадрат декартов и верхнюю стрелку обозначили ε_X . Таким образом, $h^*(X)$ – это подъём X вдоль h . Это тот же h^* , который мы раньше применяли к мономорфизмам, теперь мы применяем его к произвольным объектам \mathcal{K}/B .

Заметим, что ε_X является морфизмом в \mathcal{K}/B между $h \circ h^*(X)$ и X , то есть между $\Sigma_h(h^*(X))$ и X .

Пусть дан произвольный объект a и морфизм f между объектами $\Sigma_h(a)$ и X , то есть между $h \circ a$ и X

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \searrow & & \\
 & f & \\
 & \searrow & \\
 & & C' \xrightarrow{\varepsilon_X} C \\
 & & \downarrow h^*(X) \quad \downarrow X \\
 & & A \xrightarrow{h} B \\
 & \swarrow a & \\
 & &
 \end{array}$$

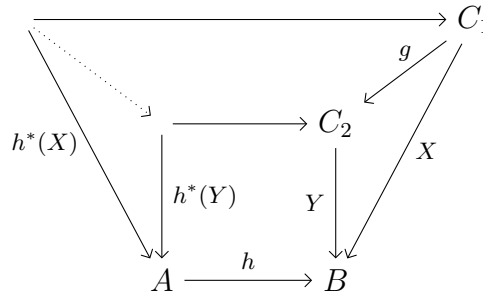
Внешний квадрат коммутативен, поскольку f является морфизмом в \mathcal{K}/B . Внутренний квадрат декартов, поэтому есть единственная стрелка из a в $h^*(X)$, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \searrow & & \\
 & f & \\
 & \searrow & \\
 & & C' \xrightarrow{\varepsilon_X} C \\
 & & \downarrow h^*(X) \quad \downarrow X \\
 & & A \xrightarrow{h} B \\
 & \swarrow a & \\
 & &
 \end{array}$$

Эта стрелка и есть $\Gamma(f)$. Из диаграммы следует $\varepsilon_X \circ \Gamma(f) = f$, то есть $\varepsilon_X \circ \Sigma_h(\Gamma(f)) = f$, поскольку функтор Σ_h не меняет стрелки. \square

Следствие 18.63. Функторы h^* , являясь правыми сопряжёнными, сохраняют произведения. Точнее $h^*: \mathcal{K}/B \rightarrow \mathcal{K}/A$ переводит любые произведения из \mathcal{K}/B в произведения в \mathcal{K}/A . В частности, все h^* сохраняют пересечения любых семейств мономорфизмов, которые есть в \mathcal{K}/B . Ещё проще: прообраз пересечения семейства мономорфизмов есть пересечение их прообразов.

Замечание 18.64. Мы определили действие h^* только на объектах \mathcal{K}/B . Стандартным образом (Теорема 12.26) определяется действие на морфизмах. Морфизм g категории \mathcal{K}/B под действием функтора h^* переходит в стрелку, отмеченную пунктиром на следующей диаграмме



Если в качестве X, Y брать мономорфизмы, то стрелка g единственно возможная и картинка изображает монотонность h^* на мономорфизмах.

Упражнение 18.65. В Set функтор h^* по семейству множеств $\{C_b \mid b \in B\}$ выдаёт семейство множеств $\{C_{h(a)} \mid a \in A\}$. По семейству функций $\{g_b \mid b \in B\}$ он выдаёт семейство функций $\{g_{h(a)} \mid a \in A\}$. Таким образом, функтор h^* осуществляет замену индексов или подстановку чего-то вместо параметра (а именно $h(a)$ вместо b).

Замечание 18.66. В Set и во всех топосах к каждому функтору h^* есть не только левый сопряжённый Σ_h , но и правый сопряжённый Π_h и картина выглядит так $\Sigma_h \dashv h^* \dashv \Pi_h$

В Set функтор Π_h действует так. Пусть дано семейство множеств $\{C_a \mid a \in A\}$. Возьмём элемент $b \in B$. В него переходят некоторые элементы $a \in A$ (то есть $h(a) = b$). Повесим над b произведение соответствующих C_a и получим семейство множеств $\{\prod_{a \in A} C_a \mid h(a) = b\}$, индексированное элементами $b \in B$.

Напоследок очень кратко о современной теории типов (это надо писать отдельно). Допустим, у нас есть тип (это как бы множество) A и тип $B(x)$, зависящий от параметра, где $x \in A$. Это записывается примерно так

$$x \in A \vdash B(x) : \text{Type}$$

Например, возьмём тип списков $List(x)$, где x – длина списка, тогда

$$x \in \mathbb{N} \vdash List(x) : \text{Type}$$

„если x – натуральное число, то $List(x)$ – тип“. В категориях типы без параметров интерпретируются как объекты, а типы с параметрами как расслоения. В Set мы берём множество $\Sigma_{x \in \mathbb{N}} List(x)$ (это множество всех списков любой длины) и строим расслоение

$$\begin{array}{c} \Sigma_{x \in \mathbb{N}} List(x) \\ \downarrow f \\ \mathbb{N} \end{array}$$

где функция f выдаёт по списку его длину (над каждым натуральным числом n висит множество списков длины n)

В общем случае, секвенция

$$x \in A \vdash B(x) : \text{Type}$$

интерпретируется как некоторая стрелка

$$\begin{array}{c} B \\ \downarrow f \\ A \end{array}$$

В этом случае тип $\Sigma_{x \in A} B(x)$ будет интерпретироваться просто как объект B .

Допустим, написано выражение

$$x \in A \vdash g(x) : B(x)$$

это значит „если x – элемент типа A , то $g(x)$ – элемент типа $B(x)$ “. Например, мы можем ввести функцию g , которая по каждому натуральному числу n выдаёт некоторый список длины n (допустим, список $000 \dots 0$ длины n), тогда мы напишем

$$x \in \mathbb{N} \vdash g(x) : List(x)$$

На категорном языке g интерпретируется как стрелка $g: A \rightarrow B$ со свойством $f \circ g = id_A$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ & \searrow id_A & \swarrow f \\ & & A \end{array}$$

Пусть даны два типа без параметров и тип, зависящий от параметра

$$A : Type$$

$$B : Type$$

$$x \in B \vdash C(x) : Type$$

интерпретация такая

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & & \downarrow f \\ A & & B \end{array}$$

Пусть также задан элемент B , зависящий от параметра

$$x \in A \vdash g(x) : B$$

В данном простом случае интерпретация такая

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Мы можем определить новый тип

$$x \in A \vdash C(g(x)) : \text{Type}$$

Интерпретация его будет такой

$$\begin{array}{ccc} C' & & C \\ g^*(f) \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Более сложный случай

$$A : \text{Type}$$

$$x \in A \vdash B(x) : \text{Type}$$

$$x \in A, y \in B(x) \vdash C(x, y) : \text{Type}$$

Интерпретация такая

$$\begin{array}{c} C \\ \downarrow f_2 \\ B \\ \downarrow f_1 \\ A \end{array}$$

Объект B – это $\Sigma_{x \in A} B(x)$, в **Set** это множество пар вида (x, y) , где $x \in A, y \in B(x)$.

Мы можем навесить сигму на $C(x, y)$ и определить новый тип

$$x \in A \vdash \Sigma_{y \in B(x)} C(x, y) : \text{Type}$$

интерпретация его будет такой

$$\begin{array}{c} C \\ \downarrow f_1 \circ f_2 \\ A \end{array}$$

Можно навесить ещё одну сигму и получить тип

$$\Sigma_{x \in A} \Sigma_{y \in B(x)} C(x, y) : \text{Type}$$

его интерпретацией будет просто объект C .

Случай чуть попроще

$$A : \text{Type}$$

$$B : \text{Type}$$

$$x \in A, y \in B \vdash C(x, y) : \text{Type}$$

здесь тип B без параметра. Интерпретация выглядит так

$$\begin{array}{c} C \\ \downarrow f_2 \\ A \times B \\ \downarrow pr_1 \\ A \end{array}$$

поскольку $\Sigma_{x \in A} B \cong A \times B$

Это набросок, есть много трудностей.

Глава 19

Монады

В принципе, эту главу можно читать сразу после главы про сопряжённость, хотя в одном месте надо знать, что такое эквивалентность категорий. Если воспринимать категории как „обобщённые частично упорядоченные множества“, то монада – это „обобщённый оператор замыкания“.

Определение 19.1. Пусть K – упорядоченное множество (можно брать и предпорядок). *Оператором замыкания* на множестве K называется отображение $T: K \rightarrow K$ со следующими свойствами

1. $\frac{A \leq B}{T(A) \leq T(B)}$ (монотонность)
2. $A \leq T(A)$
3. $T(T(A)) \leq T(A)$

для любых $A, B \in K$.

Замечание 19.2. Для упорядоченных множеств можно записывать третью аксиому в форме

$$T(T(A)) = T(A)$$

но в таком виде она не обобщается на монады.

Пример 19.3. Возьмём в качестве \mathbb{K} множество всех фигур на плоскости, упорядоченное по включению. Для каждой фигуры A в качестве $T(A)$ возьмём её выпуклую оболочку (я не буду здесь вставлять картинку выпуклой оболочки, но её легко найти).

Пример 19.4. Возьмём в качестве \mathbb{K} любую алгебру Гейтинга, например множество из трёх элементов $\{\perp, \omega, \top\}$, где $\perp \leq \omega \leq \top$. Положим

$$T(A) = \neg\neg A$$

Это оператор замыкания, поскольку выводимы правила

1. $\frac{\alpha \vdash \beta}{\neg\neg\alpha \vdash \neg\neg\beta}$
2. $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$
3. $\neg\neg(\neg\neg\alpha) \vdash \neg\neg\alpha$

и поэтому в любой алгебре Гейтинга верно

1. $\frac{A \leq B}{\neg\neg A \leq \neg\neg B}$
2. $A \leq \neg\neg A$
3. $\neg\neg(\neg\neg A) \leq \neg\neg A$

На алгебре $\{\perp, \omega, \top\}$ этот оператор действует так

$$\neg\neg\top = \top$$

$$\neg\neg\omega = \top$$

$$\neg\neg\perp = \perp$$

Напомню, что $\neg A$ – это наибольший элемент B со свойством $A \wedge B = \perp$, поэтому $\neg\omega = \perp$.

Определение 19.5. Пусть \mathbb{K} – упорядоченное множество (можно брать и предпорядок). *Оператором замыкания* на множестве \mathbb{K} называется отображение $T: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ со следующими свойствами

1. $A \leq T(A)$
2. $\frac{A \leq T(B)}{T(A) \leq T(B)}$

для любых $A, B \in K$.

Теорема 19.6. *Определения 19.1 и 19.5 равносильны между собой.*

Доказательство. Пусть верны условия

1. $\frac{A \leq B}{T(A) \leq T(B)}$
2. $A \leq T(A)$
3. $T(T(A)) \leq T(A)$

Тогда правило

$$\frac{A \leq T(B)}{T(A) \leq T(B)}$$

можно доказать так

$$\frac{\frac{A \leq T(B)}{T(A) \leq T(T(B))} \quad 1 \quad T(T(B)) \leq T(B)^3}{T(A) \leq T(B)}$$

где цифры показывают номера использованных правил, а последний шаг по транзитивности порядка.

В обратную сторону, пусть верны правила

1. $A \leq T(A)$
2. $\frac{A \leq T(B)}{T(A) \leq T(B)}$

Тогда правило

$$\frac{A \leq B}{T(A) \leq T(B)}$$

можно доказать так

$$\frac{A \leq B \quad B \leq T(B)^1}{\frac{A \leq T(B)}{T(A) \leq T(B)} 2}$$

Правило $T(T(A)) \leq T(A)$ можно доказать так (начинаем с рефлексивности порядка)

$$\frac{T(A) \leq T(A)}{T(T(A)) \leq T(A)} 2$$

□

Теорема 19.7. Для операторов замыкания верно следующее правило

$$\frac{A \leq T(B) \quad B \leq T(C)}{A \leq T(C)}$$

Доказательство. Пусть верны условия

1. $A \leq T(A)$
2. $\frac{A \leq T(B)}{T(A) \leq T(B)}$

Тогда правило

$$\frac{A \leq T(B) \quad B \leq T(C)}{A \leq T(C)}$$

можно доказать так

$$\frac{A \leq T(B) \quad \frac{B \leq T(C)}{T(B) \leq T(C)} 2}{A \leq T(C)}$$

□

Теорема 19.8. Пусть даны два упорядоченных множества K и K_1 (можно брать и предпорядки) и два отображения

$$F: K \rightarrow K_1$$

$$G: K_1 \rightarrow K$$

со следующими свойствами

$$1. \frac{A \leq B}{F(A) \leq F(B)} \quad (\text{монотонность } F)$$

$$2. \frac{X \leq Y}{G(X) \leq G(Y)} \quad (\text{монотонность } G)$$

$$3. F(A) \leq X \Leftrightarrow A \leq G(X)$$

для любых $A, B \in K$ и $X, Y \in K_1$

(это означает, что $F \dashv G$, если воспринимать K и K_1 как категории).
Тогда отображение

$$G \circ F: K \rightarrow K$$

является оператором замыкания.

Доказательство. Для краткости буду обозначать $G \circ F$ просто GF .
Докажем свойства оператора замыкания

$$A \leq GF(A)$$

$$\frac{A \leq GF(B)}{GF(A) \leq GF(B)}$$

Первое (начинаем с рефлексивности порядка)

$$\frac{F(A) \leq F(A)}{A \leq GF(A)} \quad 3$$

Второе

$$\frac{\frac{A \leq GF(B)}{F(A) \leq F(B)} 3}{GF(A) \leq GF(B)} 2$$

□

Теорема 19.9. Пусть дан оператор замыкания $T: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$. Существует пара сопряжённых монотонных отображений $F \dashv G$

$$\mathbb{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbb{K}_1$$

таких, что $T = G \circ F$

Доказательство. Положим

$$\mathbb{K}_1 = \{B \in \mathbb{K} \mid T(B) \leq B\}$$

с порядком, унаследованным из \mathbb{K} .
Положим

$$F(A) = T(A)$$

$$G(B) = B$$

для всех $A \in \mathbb{K}, B \in \mathbb{K}_1$.

Заметим, что $F(A) \in \mathbb{K}_1$, поскольку $T(T(A)) \leq T(A)$. Непосредственно видно, что оба отображения монотонны и $G \circ F = T$. Мы знаем следующие факты

1. $\frac{A \leq B}{T(A) \leq T(B)}$ (монотонность)
2. $A \leq T(A)$
3. $T(B) \leq B$ если $B \in \mathbb{K}_1$

Покажем, что

$$F(A) \leq B \Leftrightarrow A \leq G(B) \quad \text{если } B \in \mathbb{K}_1$$

По определению F, G это означает

$$T(A) \leq B \Leftrightarrow A \leq B \quad \text{если } B \in \mathbf{K}_1$$

Слева направо

$$\frac{A \leq T(A)^2 \quad T(A) \leq B}{A \leq B}$$

Справа налево

$$\frac{\frac{A \leq B}{T(A) \leq T(B)} \quad 1 \quad T(B) \leq B^3}{T(A) \leq B}$$

□

Пример 19.10. Для алгебры Гейтинга $\mathbf{K} = \{\perp, \omega, \top\}$ и оператора замыкания

$$T(A) = \neg\neg A$$

в качестве \mathbf{K}_1 получаем подмножество $\{\perp, \top\}$ элементов, для которых выполнен закон двойного отрицания

$$\neg\neg A = A$$

Пример 19.11. Для оператора выпуклой оболочки в качестве \mathbf{K}_1 получаем множество всех выпуклых фигур. Выпуклая оболочка $T(A)$ фигуры A – это наименьшее выпуклое множество B такое, что $A \subseteq B$

$$T(A) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \quad \text{если } B \in \mathbf{K}_1$$

Определение 19.12. *Монадой* в категории \mathbf{K} называется тройка (T, η, Ψ)

$$T: \text{Об}(\mathbf{K}) \rightarrow \text{Об}(\mathbf{K})$$

$$\eta_A: A \rightarrow T(A) \quad \text{для каждого } A \in \text{Об}(\mathbf{K})$$

$$\frac{g: A \rightarrow T(B)}{\Psi(g): T(A) \rightarrow T(B)} \quad \text{операция на стрелках}$$

(здесь A, B – любые объекты \mathbf{K})

Строго говоря, при Ψ надо ставить индексы и писать что-то вроде

$$\Psi_{A,B}: \mathbf{K}(A, T(B)) \rightarrow \mathbf{K}(T(A), T(B))$$

Кроме того, должны выполняться следующие равенства

$$\Psi(g) \circ \eta = g$$

$$\Psi(\eta) = id$$

$$\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

Заметим, что T – не функтор, а только операция на объектах.

Замечание 19.13. Пояснение к первому равенству (проверка типов)

$$\frac{\eta_A: A \rightarrow T(A) \quad \frac{g: A \rightarrow T(B)}{\Psi(g): T(A) \rightarrow T(B)}}{\Psi(g) \circ \eta_A: A \rightarrow T(B)}$$

Ко второму

$$\frac{\eta: A \rightarrow T(A)}{\Psi(\eta_A): T(A) \rightarrow T(A)}$$

К третьему

$$\frac{f: A \rightarrow T(B) \quad \frac{g: B \rightarrow T(C)}{\Psi(g): T(B) \rightarrow T(C)}}{\Psi(g) \circ f: A \rightarrow T(C)} \quad \frac{\frac{f: A \rightarrow T(B)}{\Psi(f): T(A) \rightarrow T(B)} \quad \frac{g: B \rightarrow T(C)}{\Psi(g): T(B) \rightarrow T(C)}}{\Psi(g) \circ \Psi(f): T(A) \rightarrow T(C)}$$

Замечание 19.14. В языке Haskell вместо $T(A)$ пишут ma , операцию Ψ (с некоторой перестановкой аргументов) обозначают $>>=$, а стрелку η называют `return`. Кроме того, во многих программистских опусах записывают композицию в обратном порядке (вместо $g \circ f$ пишут fg или $f; g$), это действительно часто бывает удобным. Но глубоко вникать в язык Haskell я не буду, поскольку его не знаю.

Пример 19.15. Рассмотрим монаду в Set

$$T(A) = A + 1$$

$$\eta_A = k_1: A \rightarrow A + 1$$

$$\Psi(g) = [g, k_2]: A + 1 \rightarrow B + 1 \quad \text{где } g: A \rightarrow B + 1$$

Таким образом, с точностью до изоморфизма

$$T(A) \text{ — это множество } A \cup \{*\}, \text{ где } * \notin A$$

$$\eta_A(a) = a \text{ для любого } a \in A$$

$$\Psi(g)(a) = g(a) \text{ для любого } a \in A$$

$$\Psi(g)(*) = *$$

Таким образом, $T(A)$ — это множество A с добавленным новым элементом $*$

Функция η_A вкладывает A в $A \cup \{*\}$

Оператор Ψ продолжает функцию $g: A \rightarrow B \cup \{*\}$ до функции

$\Psi(g): A \cup \{*\} \rightarrow B \cup \{*\}$, полагая $\Psi(g)(*) = *$

Стрелки вида $g: A \rightarrow T(B)$ соответствуют частичным (не всюду определённым) функциям из A в B (там, где функция не определена, она принимает значение $*$)

Пример 19.16. Рассмотрим такую монаду в Set

$$T(A) = P(A) \quad \text{множество подмножеств } A$$

$$\eta_A(a) = \{a\} \quad \text{где } a \in A$$

$$\Psi(g)(X) = \cup\{g(a) \mid a \in X\} \quad \text{где } g: A \rightarrow P(B)$$

Таким образом,

$\eta_A: A \rightarrow P(A)$ по каждому элементу $a \in A$ выдаёт множество $\{a\}$.

$\Psi(g): P(A) \rightarrow P(B)$ по каждому подмножеству $X \subseteq A$ выдаёт объединение множеств $g(a)$ для всех $a \in X$.

Стрелки вида $g: A \rightarrow T(B)$ — это многозначные функции из A в B . Каждая такая функция по элементу A выдаёт подмножество B (не один результат, а много).

Определение 19.17. Пусть дана монада (T, η, Ψ) в категории \mathbf{K} . Определим новую операцию на стрелках $g * f$

$$\frac{f: A \rightarrow T(B) \quad g: B \rightarrow T(C)}{g * f: A \rightarrow T(C)}$$

следующим способом

$$g * f = \Psi(g) \circ f$$

$$\frac{f: A \rightarrow T(B) \quad \frac{g: B \rightarrow T(C)}{\Psi(g): T(B) \rightarrow T(C)}}{\Psi(g) \circ f: A \rightarrow T(C)}$$

Для операторов замыкания это соответствует Теореме 19.7. Заметим, что аксиома

$$\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

из определения монады теперь может быть записана так

$$\Psi(g * f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

Определение 19.18. Пусть дана монада (T, η, Ψ) в категории \mathbf{K} . Категорией Клейсли этой монады будем называть категорию \mathbf{K}_T , определённую следующим образом

1. Объекты в \mathbf{K}_T те же, что в \mathbf{K} .
2. Стрелками из A в B в \mathbf{K}_T считаются стрелки из A в $T(B)$ в \mathbf{K} .
3. Композицией стрелок в \mathbf{K}_T является $g * f$

$$\frac{f: A \rightarrow T(B) \quad g: B \rightarrow T(C)}{g * f: A \rightarrow T(C)}$$

4. Тожественной стрелкой id_A в \mathbf{K}_T является $\eta_A: A \rightarrow T(A)$

Замечание для зануд: строго говоря, стрелки из A в $T(B)$ в \mathbf{K} – это ещё не морфизмы, а протоморфизмы из A в B в \mathbf{K}_T . Дело в том, что по стрелке $f: A \rightarrow T(B)$ объект B однозначно не восстанавливается, поскольку для разных объектов $B_1 \neq B_2$ может оказаться $T(B_1) = T(B_2)$. В качестве морфизма можно брать пару (f, B) .

Чтобы проверить, что категория Клейсли действительно является категорией, докажем следующую теорему.

Теорема 19.19. *Операция $g * f$ имеет такие свойства*

$$(h * g) * f = h * (g * f)$$

$$g * \eta = g$$

$$\eta * g = g$$

(ассоциативность композиции и свойства двусторонних единиц)

Доказательство. Выпишем аксиомы монад

1. $\Psi(g) \circ \eta = g$
2. $\Psi(\eta) = id$
3. $\Psi(g * f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$

и докажем

$$\begin{aligned} (h * g) * f &= \\ &= \Psi((h * g) * f) \circ \eta && \text{аксиома 1} \\ &= \Psi(h) \circ \Psi(g) \circ \Psi(f) \circ \eta && \text{аксиома 3} \\ &= \Psi(h * (g * f)) \circ \eta && \text{аксиома 3} \\ &= h * (g * f) && \text{аксиома 1} \end{aligned}$$

и дальше

$$\begin{aligned}
 g * \eta &= \\
 &= \Psi(g) \circ \eta && \text{по определению } * \\
 &= g && \text{аксиома 1}
 \end{aligned}$$

и наконец

$$\begin{aligned}
 \eta * g &= \\
 &= \Psi(\eta) \circ g && \text{по определению } * \\
 &= id \circ g && \text{аксиома 2} \\
 &= g
 \end{aligned}$$

□

Замечание 19.20. Для программистов представляет интерес именно категория Клейсли. Идея в том, что стрелки вида $f: A \rightarrow T(B)$ можно представлять как „функции из A в B с некоторым прибабмахом“, например, многозначные, не всюду определённые, имеющие побочный эффект или ещё какие.

Пример 19.21. Для монады из Примера 19.15 стрелки вида $g: A \rightarrow T(B)$ соответствуют частичным (не всюду определённым) функциям из A в B и мы получаем в качестве \mathbf{Set}_T категорию множеств и их частичных отображений.

Пример 19.22. Для монады из Примера 19.16 стрелки вида $g: A \rightarrow T(B)$ – это многозначные функции из A в B . Композиция стрелок $f: A \rightarrow T(B)$ и $g: B \rightarrow T(C)$ в категории Клейсли этой монады выглядит так

$$\begin{aligned}
 g * f &= \Psi(g) \circ f \\
 (g * f)(a) &= \Psi(g)(f(a)) = \cup\{g(b) \mid b \in f(a)\}
 \end{aligned}$$

Каждой стрелке $f: A \rightarrow T(B)$ сопоставим отношение $R_f(a, b)$ между элементами A и элементами B

$$R_f(a, b) \text{ если и только если } b \in f(a)$$

Тогда композиции стрелок $g * f$ соответствует так называемая композиция отношений

$$(R_g \circ R_f)(a, c) \Leftrightarrow \exists_{b \in B} (R_f(a, b) \wedge R_g(b, c)) \Leftrightarrow \exists_{b \in B} (b \in f(a) \wedge c \in g(b))$$

Таким образом, категория Клейсли этой монады изоморфна категории множеств и отношений между ними.

Далее мы докажем для монад аналог Теоремы 19.8.

Теорема 19.23. Пусть дана пара сопряжённых функторов $F \dashv G$

$$\mathbb{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbb{K}_1$$

и соответствующие преобразования Φ, Γ

$$\frac{g: A \rightarrow G(X)}{\Phi(g): F(A) \rightarrow X} \qquad \frac{f: F(A) \rightarrow X}{\Gamma(f): A \rightarrow G(X)}$$

Полагаем

$$T = G \circ F: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\eta = \Gamma(id)$$

$$\Psi(g) = G(\Phi(g))$$

$$\frac{id_{F(A)}: F(A) \rightarrow F(A)}{\Gamma(id_{F(A)}): A \rightarrow GF(A)} \qquad \frac{g: A \rightarrow GF(B)}{\Phi(g): F(A) \rightarrow F(B)} \\ \frac{\Gamma(id_{F(A)}): A \rightarrow GF(A)}{G\Phi(g): GF(A) \rightarrow GF(B)}$$

Тройка (T, η, Ψ) является монадой в категории \mathbb{K} .

Доказательство. Выпишем аксиомы сопряжённости

1. $\Gamma(\Phi(g)) = g$
2. $\Phi(\Gamma(f)) = f$
3. $\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ F(h)$
4. $\Gamma(h \circ f) = G(h) \circ \Gamma(f)$

$$5. \Phi(G(h) \circ g) = h \circ \Phi(g)$$

$$6. \Gamma(f \circ F(h)) = \Gamma(f) \circ h$$

(эта система аксиом избыточна, но мы не будем экономить). Докажем свойства монады

$$\Psi(g) \circ \eta = g$$

$$\Psi(\eta) = id$$

$$\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

Первое

$$\Psi(g) \circ \eta =$$

$$= G\Phi(g) \circ \eta \quad \text{по определению } \Psi$$

$$= G\Phi(g) \circ \Gamma(id) \quad \text{по определению } \eta$$

$$= \Gamma(\Phi(g) \circ id) \quad \text{аксиома 4}$$

$$= \Gamma\Phi(g)$$

$$= g \quad \text{аксиома 1}$$

Второе

$$\Psi(\eta) =$$

$$= G\Phi(\eta) \quad \text{по определению } \Psi$$

$$= G\Phi\Gamma(id) \quad \text{по определению } \eta$$

$$= G(id) \quad \text{аксиома 2}$$

$$= id$$

Третье

$$\Psi(\Psi(g) \circ h) =$$

$$= G\Phi(\Psi(g) \circ h) \quad \text{по определению } \Psi$$

$$= G\Phi(G\Phi(g) \circ h) \quad \text{по определению } \Psi$$

$$= G(\Phi(g) \circ \Phi(h)) \quad \text{аксиома 5}$$

$$= G\Phi(g) \circ G\Phi(h) \quad \text{функториальность } G$$

$$= \Psi(g) \circ \Psi(h) \quad \text{по определению } \Psi$$

□

Пример 19.24. Пусть \mathbf{K} – декартово замкнутая категория, $C \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Рассмотрим два сопряжённых функтора $F \dashv G$

$$F(A) = A \times C$$

$$G(A) = A^C$$

и соответствующую монаду

$$T(A) = (A \times C)^C$$

Стрелки вида $g: A \rightarrow T(B)$, то есть $g: A \rightarrow (A \times C)^C$, взаимно однозначно соответствуют стрелкам вида $f: A \times C \rightarrow B \times C$. Таким образом, стрелка $f: A \rightarrow B$ в категории Клейсли – это, по сути, стрелка вида $f: A \times C \rightarrow B \times C$ в \mathbf{K} .

Такие стрелки можно представлять как некие „вычисления с побочными эффектами“. Если C – это некое „множество состояний“, то функция вида $f: A \times C \rightarrow B \times C$ по элементу A и состоянию выдаёт элемент B (результат вычисления) и новое состояние.

Пример 19.25. Рассмотрим пару сопряжённых функторов $F \dashv G$

$$\text{Set} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \text{Grp}$$

где $F(A)$ – свободная группа, порождённая множеством A , а $G(X)$ – множество-носитель группы X . Стрелки вида $g: A \rightarrow T(B)$, то есть $g: A \rightarrow GF(B)$ взаимно однозначно соответствуют стрелкам вида $f: F(A) \rightarrow F(B)$. То есть, гомоморфизмам свободных групп. Каждый объект A категории Клейсли определяет свободную группу $F(A)$, стрелки из A в B в категории Клейсли соответствуют гомоморфизмам из $F(A)$ в $F(B)$. Таким образом, категория Клейсли этой монады изоморфна категории свободных групп.

Теорема 19.26. Пусть дана монада (T, η, Ψ) в категории \mathbf{K} . Определим действие T на стрелках следующим образом

$$T(h) = \Psi(\eta \circ h)$$

$$\frac{h: A \rightarrow B \quad \eta_B: B \rightarrow T(B)}{\eta_B \circ h: A \rightarrow T(B)} \\ \frac{}{\Psi(\eta_B \circ h): T(A) \rightarrow T(B)}$$

Тогда T становится функтором, а η и Ψ естественными преобразованиями, что означает выполнение следующих равенств

$$T(id) = id$$

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$$

$$T(h) \circ \eta = \eta \circ h$$

$$\Psi(g \circ h) = \Psi(g) \circ T(h)$$

$$\Psi(T(h) \circ g) = T(h) \circ \Psi(g)$$

Доказательство. Выпишем аксиомы монады

1. $\Psi(g) \circ \eta = g$
2. $\Psi(\eta) = id$
3. $\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$

и докажем нужные свойства

$$T(id) = id$$

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$$

$$T(h) \circ \eta = \eta \circ h$$

$$\Psi(g \circ h) = \Psi(g) \circ T(h)$$

$$\Psi(T(h) \circ g) = T(h) \circ \Psi(g)$$

Первое

$$\begin{aligned}
T(id) &= \\
&= \Psi(\eta \circ id) && \text{по определению } T \\
&= \Psi(\eta) \\
&= id && \text{аксиома 2}
\end{aligned}$$

Второе

$$\begin{aligned}
T(g) \circ T(f) &= \\
&= \Psi(\eta \circ g) \circ \Psi(\eta \circ f) && \text{по определению } T \\
&= \Psi(\Psi(\eta \circ g) \circ \eta \circ f) && \text{аксиома 3} \\
&= \Psi(\eta \circ g \circ f) && \text{аксиома 1} \\
&= T(g \circ f) && \text{по определению } T
\end{aligned}$$

Третье

$$\begin{aligned}
T(h) \circ \eta &= \\
&= \Psi(\eta \circ h) \circ \eta && \text{по определению } T \\
&= \eta \circ h && \text{аксиома 1}
\end{aligned}$$

Четвёртое

$$\begin{aligned}
\Psi(g) \circ T(h) &= \\
&= \Psi(g) \circ \Psi(\eta \circ h) && \text{по определению } T \\
&= \Psi(\Psi(g) \circ \eta \circ h) && \text{аксиома 3} \\
&= \Psi(g \circ h) && \text{аксиома 1}
\end{aligned}$$

Пятое

$$\begin{aligned}
\Psi(T(h) \circ g) &= \\
&= \Psi(\Psi(\eta \circ h) \circ g) && \text{по определению } T \\
&= \Psi(\eta \circ h) \circ \Psi(g) && \text{аксиома 3} \\
&= T(h) \circ \Psi(g) && \text{по определению } T
\end{aligned}$$

□

Упражнение 19.27. Проверьте, что это единственный способ определить действие T на стрелках, при котором T становится функтором, а η и μ естественными преобразованиями.

Дадим теперь другое (эквивалентное) определение монады.

Определение 19.28. Монадой в категории \mathbf{K} называется тройка (T, η, μ) из функтора и двух естественных преобразований, где

$$T: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$$

$$\eta: Id_{\mathbf{K}} \rightarrow T \quad \text{то есть } \eta_A: A \rightarrow T(A)$$

$$\mu: T \circ T \rightarrow T \quad \text{то есть } \mu_A: T(T(A)) \rightarrow T(A)$$

(здесь A – любой объект \mathbf{K}), причём коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{\eta_{T(A)}} & T^2(A) \\ \downarrow T(\eta_A) & \searrow id_{T(A)} & \downarrow \mu_A \\ T^2(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^3(A) & \xrightarrow{\mu_{T(A)}} & T^2(A) \\ \downarrow T(\mu_A) & & \downarrow \mu_A \\ T^2(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \end{array}$$

где используются сокращения

$$T^2(A) = T(T(A))$$

$$T^3(A) = T(T(T(A)))$$

Нарисуем ещё диаграммы, выражающие естественность η и μ

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\ \downarrow h & & \downarrow T(h) \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & T(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^2(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \\ \downarrow T^2(h) & & \downarrow T(h) \\ T^2(B) & \xrightarrow{\mu_B} & T(B) \end{array}$$

и выпишем все пять равенств

$$\mu_A \circ \eta_{T(A)} = id_{T(A)}$$

$$\mu_A \circ T(\eta_A) = id_{T(A)}$$

$$\mu_A \circ \mu_{T(A)} = \mu_A \circ T(\mu_A)$$

$$T(h) \circ \eta_A = \eta_B \circ h$$

$$T(h) \circ \mu_A = \mu_B \circ T(T(h))$$

Поскольку так жить нельзя, мы будем опускать индексы и писать так

$$\mu \circ \eta = id$$

$$\mu \circ T(\eta) = id$$

$$\mu \circ \mu = \mu \circ T(\mu)$$

$$T(h) \circ \eta = \eta \circ h$$

$$T(h) \circ \mu = \mu \circ TT(h)$$

Замечание 19.29. Часто диаграммы из определения монады рисуют так

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 \\ T\eta \downarrow & \searrow id_T & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{\mu T} & T^2 \\ T\mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

где ηT , $T\eta$, μT и $T\mu$ – это некоторые естественные преобразования (угадайте, какие).

Пример 19.30. Рассмотрим монаду в \mathbf{Set} из Примера 19.15. По-новому её можно задать так

$$T(A) = A + 1$$

$$T(f) = f + id_1: A + 1 \rightarrow B + 1 \quad \text{где } f: A \rightarrow B$$

$$\eta_A = k_1: A \rightarrow A + 1$$

$$\mu_A = [id_{A+1}, k_2]: (A + 1) + 1 \rightarrow A + 1$$

Таким образом, с точностью до изоморфизма

$T(A)$ – это множество $A \cup \{*\}$, где $* \notin A$

$T(f)(a) = f(a)$ для любого $a \in A$

$T(f)(*) = *$

$\eta_A(a) = a$ для любого $a \in A$

$T(T(A)) = (A + 1) + 1 = A \cup \{*_1\} \cup \{*_2\}$

$\mu_A(a) = a$ для любого $a \in A$

$\mu_A(*_1) = \mu_A(*_2) = *$

Таким образом, $T(A)$ – это множество A с добавленным новым элементом $*$

Функция $T(f): A \cup \{*\} \rightarrow B \cup \{*\}$ продолжает функцию $f: A \rightarrow B$ на $A \cup \{*\}$, полагая $T(f)(*) = *$

Функция η_A вкладывает A в $A \cup \{*\}$

Функция μ_A отображает $A \cup \{*_1\} \cup \{*_2\}$ в $A \cup \{*\}$, склеивая $*_1$ и $*_2$ в один элемент $*$

Пример 19.31. Рассмотрим монаду в \mathbf{Set} из Примера 19.16. По-новому её можно задать так

$T(A) = P(A)$ множество подмножеств A

$T(f)(X) = f[X]$ где $f: A \rightarrow B$, $X \subseteq A$

$\eta_A(a) = \{a\}$ где $a \in A$

$\mu_A(\mathcal{Z}) = \cup \mathcal{Z}$ где $\mathcal{Z} \in P(P(A))$

Таким образом, $T(f): P(A) \rightarrow P(B)$ по каждому подмножеству $X \subseteq A$ выдаёт его образ $f[X]$.

$\eta_A: A \rightarrow P(A)$ по каждому элементу $a \in A$ выдаёт множество $\{a\}$.

$\mu_A: P(P(A)) \rightarrow P(A)$ по каждому семейству \mathcal{Z} подмножеств A выдаёт его объединение $\cup \mathcal{Z}$.

Определение 19.32. Пусть дана монада (T, η, μ) в категории \mathbf{K} . *Алгеброй монады* называется любая стрелка вида $f: T(A) \rightarrow A$, для которой коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\ & \searrow id_A & \downarrow f \\ & & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^2(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \\ T(f) \downarrow & & \downarrow f \\ T(A) & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

что соответствует равенствам

$$f \circ \eta = id$$

$$f \circ \mu = f \circ T(f)$$

Свободной алгеброй, порождённой объектом A , будем называть стрелку $\mu_A: T^2(A) \rightarrow T(A)$. Эта стрелка является алгеброй в силу коммутативности диаграмм из определения монады

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{\eta_{T(A)}} & T^2(A) \\ & \searrow id_{T(A)} & \downarrow \mu_A \\ & & T(A) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^3(A) & \xrightarrow{\mu_{T(A)}} & T^2(A) \\ T(\mu_A) \downarrow & & \downarrow \mu_A \\ T^2(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \end{array}$$

Гомоморфизмом между алгебрами $f: T(A) \rightarrow A$ и $g: T(B) \rightarrow B$ называется любая стрелка $h: A \rightarrow B$, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{T(h)} & T(B) \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Категорией Эйлера-Мура монады (T, η, μ) называется категория \mathcal{K}^T всех алгебр этой монады и гомоморфизмов между ними. Строго говоря, это протоморфизмы, поскольку по стрелке h не видно, из какой алгебры в какую она действует.

Пример 19.33. Рассмотрим пару сопряжённых функторов $F \dashv G$

$$\text{Set} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \text{Grp}$$

где $F(A)$ – свободная группа, порождённая множеством A , а $G(X)$ – множество-носитель группы X .

$T(A) = GF(A)$ – множество элементов свободной группы, порождённой множеством A . Если, например, $A = \{x, y\}$, то

$$T(A) = \{e, x, y, x^{-1}, y^{-1}, xx, xy, yx, yy, x^{-1}y, xy^{-1}, x^{-1}y^{-1} \dots\}$$

Стрелка $\eta_A: A \rightarrow T(A)$ – это вложение A в $T(A)$

Положим

$$\mu_A = G(\varepsilon_{F(A)}) = G(\Phi(id_{GF(A)})) = \Psi(id_{T(A)})$$

Получается монада (T, η, μ) (проверять не будем, но чуть позже докажем эквивалентность двух определений монады, из которой это следует).

$TT(A)$ – это множество элементов свободной группы, порождённой множеством $T(A)$.

Если $A = \{x, y\}$, то среди элементов $TT(A)$ будет, допустим, элемент $(xx)(yx)^{-1}$

Отображение $\mu_A: TT(A) \rightarrow T(A)$ состоит в том, чтобы „раскрыть скобки и вычислить“. Например

$$\mu_A(xx^{-1}) = e$$

$$\mu_A((yx)^{-1}) = x^{-1}y^{-1}$$

$$\mu_A((xx)(yx)^{-1}) = xy^{-1}$$

Всякая группа X с носителем A может быть задана функцией вида $f: T(A) \rightarrow X$, которая сопоставляет каждому элементу $T(A)$ его значение. Например, возьмём группу положительных действительных чисел

с умножением $X = (\mathbb{R}^+, \cdot)$. Элементы $T(\mathbb{R}^+)$ – это „формальные произведения чисел“ вроде $3 \cdot 4 \cdot 2^{-1}$

Группа X может быть задана стрелкой $f: T(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}^+$, которая каждому „формальному произведению“ сопоставляет его значение

$$f(3 \cdot 4 \cdot 2^{-1}) = 6$$

Оказывается, что группы – это и есть алгебры этой монады. Доказать это непосредственно довольно трудно, но есть некоторая теорема Бека, которая помогает (о ней в конце главы). Категория Эйленберга-Мура этой монады – это категория групп \mathbf{Grp} . Свободные алгебры – это в точности свободные группы. Чуть позже мы докажем, что для любой монады категория Клейсли эквивалентна полной подкатегории категории Эйленберга-Мура, состоящей из свободных алгебр.

Пример 19.34. Рассмотрим монаду в \mathbf{Set} из Примера 19.30

$$T(A) = A + 1$$

$$\eta_A = k_1: A \rightarrow A + 1$$

$$\mu_A = [id_{A+1}, k_2]: (A + 1) + 1 \rightarrow A + 1$$

Алгебры этой монады – это функции $f: A \cup \{*\} \rightarrow A$, тождественные на A , потому что

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k_1} & A + 1 \\ & \searrow id_A & \downarrow f \\ & & A \end{array}$$

Коммутативность второй диаграммы оставляю в качестве упражнения. Такая функция определяется тем, в какую точку A переходит $*$ и мы получаем в качестве \mathbf{Set}^T категорию множеств с выделенным элементом и функций между ними, переводящих выделенный элемент в выделенный. В данном случае категория Клейсли оказывается эквивалентной категории Эйленберга-Мура (разбирали этот пример в главе про эквивалентность категорий).

Пример 19.35. Пусть (M, e, \circ) – некоторая полугруппа с единицей. Определим функтор $T: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$

$$T(A) = M \times A$$

$$T(f) = id_M \times f$$

Определим естественные преобразования $\eta_A: A \rightarrow M \times A$, а также $\mu_A: M \times (M \times A) \rightarrow M \times A$

$$\eta_A(a) = (e, a)$$

$$\mu_A(m_1, (m_2, a)) = (m_1 \circ m_2, a)$$

где $a \in A$, $m_1, m_2 \in M$. Диаграммы из определения монады

$$\begin{array}{ccc} M \times A & \xrightarrow{\eta_{M \times A}} & M \times (M \times A) \\ \downarrow id_M \times \eta_A & \searrow id_{M \times A} & \downarrow \mu_A \\ M \times (M \times A) & \xrightarrow{\mu_A} & M \times A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M \times (M \times (M \times A)) & \xrightarrow{\mu_{M \times A}} & M \times (M \times A) \\ \downarrow id_M \times \mu_A & & \downarrow \mu_A \\ M \times (M \times A) & \xrightarrow{\mu_A} & M \times A \end{array}$$

выражают равенства

$$\mu_A \circ \eta_{M \times A} = id_{M \times A}$$

$$\mu_A \circ (id_M \times \eta_A) = id_{M \times A}$$

$$\mu_A \circ \mu_{M \times A} = \mu_A \circ (id_M \times \mu_A)$$

или, вспоминая определения η, μ

$$(e \circ m, a) = (m, a)$$

$$(m \circ e, a) = (m, a)$$

$$((m_1 \circ m_2) \circ m_3, a) = (m_1 \circ (m_2 \circ m_3), a)$$

то есть, свойства двусторонней единицы и ассоциативность полугруппы.

Алгеброй этой монады будет любая функция вида $f: M \times A \rightarrow A$, для которой коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & M \times A \\
 & \searrow id_A & \downarrow f \\
 & & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M \times (M \times A) & \xrightarrow{\mu_A} & M \times A \\
 id_M \times f \downarrow & & \downarrow f \\
 M \times A & \xrightarrow{f} & A
 \end{array}$$

и это в точности M -множество. Действительно, если функция f задаёт некоторое действие полугруппы M на множестве A по правилу

$$m \circ a = f(m, a)$$

то коммутативность диаграмм означает равенства

$$e \circ a = a$$

$$(m_1 \circ m_2) \circ a = m_1 \circ (m_2 \circ a)$$

Гомоморфизмами алгебр являются отображения, сохраняющие действие, то есть гомоморфизмы M -множеств.

$$\begin{array}{ccc}
 M \times A & \xrightarrow{id_M \times h} & M \times B \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}$$

Два определения монады соответствуют двум определениям оператора замыкания. Докажем их эквивалентность.

Теорема 19.36. *Два определения монад (определения 19.12 и 19.28) эквивалентны между собой.*

Доказательство. Пусть дана монада (T, η, μ) , выпишем аксиомы

1. $\mu \circ \eta = id$
2. $\mu \circ T(\eta) = id$
3. $\mu \circ \mu = \mu \circ T(\mu)$
4. $T(h) \circ \eta = \eta \circ h$
5. $T(h) \circ \mu = \mu \circ TT(h)$

Определим $\Psi(g)$ следующим способом

$$\Psi(g) = \mu \circ T(g)$$

$$\frac{\frac{g: A \rightarrow T(B)}{T(g): T(A) \rightarrow T(T(B))} \quad \mu_B: T(T(B)) \rightarrow T(B)}{\mu_B \circ T(g): T(A) \rightarrow T(B)}$$

и докажем его свойства

$$\Psi(g) \circ \eta = g$$

$$\Psi(\eta) = id$$

$$\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

Первое

$$\begin{aligned} \Psi(g) \circ \eta &= \\ &= \mu \circ T(g) \circ \eta && \text{по определению } \Psi \\ &= \mu \circ \eta \circ g && \text{аксиома 4 (естественность } \eta) \\ &= id \circ g && \text{аксиома 1} \\ &= g \end{aligned}$$

Второе

$$\begin{aligned} \Psi(\eta) &= \\ &= \mu \circ T(\eta) && \text{по определению } \Psi \\ &= id && \text{аксиома 2} \end{aligned}$$

Третье

$$\begin{aligned}
 & \Psi(\Psi(g) \circ f) = \\
 & = \mu \circ T(\Psi(g) \circ f) && \text{по определению } \Psi \\
 & = \mu \circ T(\mu \circ T(g) \circ f) && \text{по определению } \Psi \\
 & = \mu \circ T(\mu) \circ TT(g) \circ T(f) && \text{функториальность } T \\
 & = \mu \circ \mu \circ TT(g) \circ T(f) && \text{аксиома 3} \\
 & = \mu \circ T(g) \circ \mu \circ T(f) && \text{аксиома 5 (естественность } \mu) \\
 & = \Psi(g) \circ \Psi(f) && \text{по определению } \Psi
 \end{aligned}$$

В обратную сторону, пусть дана монада (T, η, Ψ) , положим

$$T(h) = \Psi(\eta \circ h)$$

и выпишем аксиомы и три ранее доказанных (Теорема 19.26) свойства естественности

1. $\Psi(g) \circ \eta = g$
2. $\Psi(\eta) = id$
3. $\Psi(\Psi(g) \circ f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$
4. $T(h) \circ \eta = \eta \circ h$
5. $\Psi(g \circ h) = \Psi(g) \circ T(h)$
6. $\Psi(T(h) \circ g) = T(h) \circ \Psi(g)$

Определим μ следующим равенством

$$\mu = \Psi(id)$$

$$\frac{id_{T(A)}: T(A) \rightarrow T(A)}{\Psi(id_{T(A)}): T(T(A)) \rightarrow T(A)}$$

и докажем его свойства

$$\mu \circ \eta = id$$

$$\mu \circ T(\eta) = id$$

$$\mu \circ \mu = \mu \circ T(\mu)$$

$$T(h) \circ \eta = \eta \circ h$$

$$T(h) \circ \mu = \mu \circ TT(h)$$

Первое

$$\begin{aligned} \mu \circ \eta &= \\ &= \Psi(id) \circ \eta && \text{по определению } \mu \\ &= id && \text{аксиома 1} \end{aligned}$$

Второе

$$\begin{aligned} \mu \circ T(\eta) &= \\ &= \Psi(id) \circ T(\eta) && \text{по определению } \mu \\ &= \Psi(id \circ \eta) && \text{свойство 5} \\ &= \Psi(\eta) \\ &= id && \text{аксиома 2} \end{aligned}$$

Третье

$$\begin{aligned} \mu \circ T(\mu) &= \\ &= \Psi(id) \circ T(\mu) && \text{по определению } \mu \\ &= \Psi(id \circ \mu) && \text{свойство 5} \\ &= \Psi(\mu) \\ &= \Psi(\mu \circ id) \\ &= \Psi(\Psi(id) \circ id) && \text{по определению } \mu \\ &= \Psi(id) \circ \Psi(id) && \text{аксиома 3} \\ &= \mu \circ \mu && \text{по определению } \mu \end{aligned}$$

Четвёртое – естественность η , свойство 4.

Пятое

$$\begin{aligned}
 T(h) \circ \mu &= \\
 &= T(h) \circ \Psi(id) && \text{по определению } \mu \\
 &= \Psi(T(h) \circ id) && \text{свойство 6} \\
 &= \Psi(T(h)) \\
 &= \Psi(id \circ T(h)) \\
 &= \Psi(id) \circ TT(h) && \text{свойство 5} \\
 &= \mu \circ TT(h) && \text{по определению } \mu
 \end{aligned}$$

Докажем ещё, что эти две конструкции, а именно построение (T, η, Ψ) по заданному (T, η, μ) и построение (T, η, μ) по заданному (T, η, Ψ) , взаимно обратны. Пусть монада задана через μ , определим Ψ

$$\Psi(g) = \mu \circ T(g)$$

и теперь определим через это Ψ новое μ и новое $T(h)$

$$\mu' = \Psi(id)$$

$$T'(h) = \Psi(\eta \circ h)$$

Покажем, что получаются те же μ и $T(h)$, с которых начали

$$\mu' = \Psi(id) = \mu \circ T(id) = \mu \circ id = \mu$$

$$T'(h) = \Psi(\eta \circ h) = \mu \circ T(\eta \circ h) = \mu \circ T(\eta) \circ T(h) = T(h)$$

В обратную сторону, пусть монада задана через Ψ , положим

$$T(h) = \Psi(\eta \circ h)$$

$$\mu = \Psi(id)$$

и теперь определим через них новое Ψ

$$\Psi'(g) = \mu \circ T(g)$$

Покажем, что получается то же Ψ , с которого начали

$$\Psi'(g) = \mu \circ T(g) = \Psi(id) \circ T(g) = \Psi(id \circ g) = \Psi(g)$$

□

Теорема 19.37. Пусть дана пара сопряжённых функторов $F \dashv G$

$$\mathbb{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbb{K}_1$$

и соответствующие преобразования Φ, Γ

$$\frac{g: A \rightarrow G(X)}{\Phi(g): F(A) \rightarrow X} \qquad \frac{f: F(A) \rightarrow X}{\Gamma(f): A \rightarrow G(X)}$$

Полагаем

$$T = GF: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\eta_A = \Gamma(id_{F(A)})$$

$$\mu_A = G(\varepsilon_{F(A)}) = G(\Phi(id_{GF(A)}))$$

$$\frac{id_{F(A)}: F(A) \rightarrow F(A)}{\Gamma(id_{F(A)}): A \rightarrow GF(A)} \qquad \frac{id_{GF(A)}: GF(A) \rightarrow GF(A)}{\Phi(id_{GF(A)}): FGF(A) \rightarrow F(A)} \\ \frac{\phantom{id_{F(A)}}}{G\Phi(id_{GF(A)}): GF(A) \rightarrow GF(A)}$$

Тройка (T, η, μ) является монадой в категории \mathbb{K} .

Доказательство. Определим Ψ как в Теореме 19.23

$$\Psi(g) = G(\Phi(g))$$

Тройка (T, η, Ψ) является монадой по Теореме 19.23. Определим через Ψ новое действие T на стрелках

$$T'(h) = \Psi(\eta \circ h)$$

Проверим, что оно совпадает со старым (это единственный нетривиальный момент доказательства)

$$T'(h) = \Psi(\eta \circ h) = \Psi(\eta) \circ T(h) = id \circ T(h) = T(h)$$

Определим μ

$$\mu_A = \Psi(id_{T(A)}) = G(\Phi(id_{GF(A)}))$$

Тройка (T, η, μ) является монадой по Теореме 19.36. □

Докажем теперь, что категория Клейсли эквивалентна полной подкатегории категории Эйленберга-Мура, состоящей из свободных алгебр.

Теорема 19.38. Пусть дана монада (T, η, μ) в категории \mathbf{K} . Тогда \mathbf{K}_T эквивалентна полной подкатегории \mathbf{K}^T , состоящей из свободных алгебр.

Доказательство. Определим функтор $F: \mathbf{K}_T \rightarrow \mathbf{K}^T$

$$F(A) = (T^2(A) \xrightarrow{\mu_A} T(A))$$

$$F(h) = \Psi(h) = \mu \circ T(h)$$

Функтор F по объекту A выдаёт свободную алгебру $\mu_A: T^2(A) \rightarrow T(A)$. По стрелке $h: A \rightarrow B$ в \mathbf{K}_T , то есть стрелке $h: A \rightarrow T(B)$ в \mathbf{K} , функтор F выдаёт гомоморфизм свободных алгебр

$$\begin{array}{ccc} T^2(A) & \xrightarrow{T\Psi(h)} & T^2(B) \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow \mu_B \\ T(A) & \xrightarrow{\Psi(h)} & T(B) \end{array}$$

Проверим, что эта диаграмма действительно коммутативна

$$\begin{aligned}
\mu \circ T\Psi(h) &= \\
&= \mu \circ T(\mu \circ T(h)) && \text{по определению } \Psi \\
&= \mu \circ T(\mu) \circ TT(h) && \text{функториальность } T \\
&= \mu \circ \mu \circ TT(h) && \text{одна из аксиом монады} \\
&= \mu \circ T(h) \circ \mu && \text{естественность } \mu \\
&= \Psi(h) \circ \mu && \text{по определению } \Psi
\end{aligned}$$

Проверим, что функтор F строгий.

Если $F(h_1) = F(h_2)$ (то есть $\Psi(h_1) = \Psi(h_2)$), то $h_1 = h_2$

$$h_1 = \Psi(h_1) \circ \eta = \Psi(h_2) \circ \eta = h_2$$

Проверим, что функтор F полный. Это значит, для каждого гомоморфизма свободных алгебр

$$\begin{array}{ccc}
T^2(A) & \xrightarrow{T(f)} & T^2(B) \\
\mu_A \downarrow & & \downarrow \mu_B \\
T(A) & \xrightarrow{f} & T(B)
\end{array}$$

должна быть стрелка $h: A \rightarrow T(B)$ такая, что $f = \Psi(h)$ (то есть $f = F(h)$)

Запишем коммутативность диаграммы

$$1. \mu \circ T(f) = f \circ \mu$$

Положим $h = f \circ \eta$ и проверим, что $f = \Psi(h)$

$$\begin{aligned}
\Psi(h) &= \\
&= \Psi(f \circ \eta) && \text{по определению } h \\
&= \mu \circ T(f \circ \eta) && \text{по определению } \Psi \\
&= \mu \circ T(f) \circ T(\eta) && \text{функториальность } T \\
&= f \circ \mu \circ T(\eta) && \text{в силу 1} \\
&= f \circ id && \text{одна из аксиом монады} \\
&= f
\end{aligned}$$

Таким образом, функтор F является функтором эквивалентности (строгий, полный, сюръективный на объектах) из категории Клейсли \mathbf{K}_T в полную подкатегорию категории Эйленберга-Мура \mathbf{K}^T , состоящую из свободных алгебр. Изоморфизма категорий, вообще говоря, не получается, потому что для разных $A \neq B$ может быть $T(A) = T(B)$. \square

Остаток главы занимает решение проблемы – всякая ли монада получается как композиция некоторой пары сопряжённых функторов? Ответ „да“, причём обычно даже не единственным способом. Например, если в примере с группами заменить категорию \mathbf{Grp} на её полную подкатегорию, состоящую только из свободных групп, монада в \mathbf{Set} получается та же самая. Есть два универсальных способа разложить любую монаду в композицию сопряжённых функторов, они называются „конструкция Эйленберга-Мура“ и „конструкция Клейсли“, переходим к их довольно трудному описанию.

Теорема 19.39. Пусть дана монада (T, η, μ) в категории \mathbf{K} . Определим два функтора

$$\mathbf{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbf{K}^T$$

$$F(A) = (T^2(A) \xrightarrow{\mu_A} T(A))$$

$$F(h) = T(h)$$

$$G(T(A)) \xrightarrow{f} A = A$$

$$G(h) = h$$

Тогда есть такое сопряжение $F \dashv G$ с единицей η , что монада, порождённая этим сопряжением, совпадает с (T, η, μ) .

Доказательство. Функтор F по объекту A выдаёт свободную алгебру $\mu_A: T^2(A) \rightarrow T(A)$. По стрелке $h: A \rightarrow B$ функтор F выдаёт гомоморфизм $T(h)$ свободных алгебр

$$\begin{array}{ccc} T^2(A) & \xrightarrow{T^2(h)} & T^2(B) \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow \mu_B \\ T(A) & \xrightarrow{T(h)} & T(B) \end{array}$$

Функтор G по алгебре $f: T(A) \rightarrow A$ выдаёт её носитель A . По гомоморфизму алгебр

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{T(h)} & T(B) \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

функтор G выдаёт стрелку $h: A \rightarrow B$. Непосредственно видно, что

$$G \circ F = T$$

Переходим к доказательству $F \dashv G$. Мы хотим, чтобы η было единицей сопряжения. Надо доказать следующее: для любых $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}^T)$ и любой стрелки $g: A \rightarrow G(X)$ (это стрелка в \mathbf{K}) существует ровно одна стрелка $f: F(A) \rightarrow X$ в \mathbf{K}^T со свойством $g = G(f) \circ \eta_A$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\ & \searrow g & \downarrow G(f) & & \downarrow f \\ & & G(X) & & X \end{array}$$

Пусть X – это алгебра $h: T(B) \rightarrow B$. Нарисуем её на диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\
 & \searrow g & \downarrow G(f) & & \downarrow f \\
 & & G(T(B)) \xrightarrow{h} B & & (T(B)) \xrightarrow{h} B
 \end{array}$$

Вспомогая определение F и G , получаем

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) & & (T^2(A) \xrightarrow{\mu_A} T(A)) \\
 & \searrow g & \downarrow f & & \downarrow f \\
 & & B & & (T(B)) \xrightarrow{h} B
 \end{array}$$

Таким образом, надо доказать, что для любой алгебры $h: T(B) \rightarrow B$ и любой стрелки $g: A \rightarrow B$ существует единственный гомоморфизм f из алгебры $\mu_A: T^2(A) \rightarrow T(A)$ в алгебру $h: T(B) \rightarrow B$ со свойством $f \circ \eta_A = g$.

Дано: есть стрелки $h: T(B) \rightarrow B$ и $g: A \rightarrow B$, причём для h верны равенства

1. $h \circ \eta = id$
2. $h \circ \mu = h \circ T(h)$

поскольку h является алгеброй. Надо доказать, что существует единственная стрелка $f: T(A) \rightarrow B$ со свойствами

$$f \circ \mu = h \circ T(f)$$

$$f \circ \eta = g$$

первое равенство выражает, что f является гомоморфизмом алгебр

$$\begin{array}{ccc}
 T^2(A) & \xrightarrow{T(f)} & T(B) \\
 \mu_A \downarrow & & \downarrow h \\
 T(A) & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Докажем существование. Положим $f = h \circ T(g)$ и проверим свойства.
Первое

$$\begin{aligned}
 f \circ \mu &= \\
 &= h \circ T(g) \circ \mu && \text{по определению } f \\
 &= h \circ \mu \circ TT(g) && \text{естественность } \mu \\
 &= h \circ T(h) \circ TT(g) && 2 \\
 &= h \circ T(h \circ T(g)) && \text{функториальность } T \\
 &= h \circ T(f) && \text{по определению } f
 \end{aligned}$$

Второе

$$\begin{aligned}
 f \circ \eta &= \\
 &= h \circ T(g) \circ \eta && \text{по определению } f \\
 &= h \circ \eta \circ g && \text{естественность } \eta \\
 &= id \circ g && 1 \\
 &= g
 \end{aligned}$$

Докажем единственность. Предположим, что для некоторого f выполнены условия

1. $f \circ \mu = h \circ T(f)$
2. $f \circ \eta = g$

и докажем $f = h \circ T(g)$

$$\begin{aligned}
h \circ T(g) &= \\
&= h \circ T(f \circ \eta) && 2 \\
&= h \circ T(f) \circ T(\eta) && \text{функториальность } T \\
&= f \circ \mu \circ T(\eta) && 1 \\
&= f \circ id && \text{одна из аксиом монады} \\
&= f
\end{aligned}$$

Остаётся проверить, что монада, порождённая этим сопряжением, совпадает с (T, η, μ) . Напомню, что для любого сопряжения $F \dashv G$ с соответствующими Φ, Γ определяется монада (T', η', μ')

$$\begin{aligned}
T' &= G \circ F \\
\eta'_A &= \Gamma(id_{F(A)}) \\
\mu'_A &= \Psi(id_{T'(A)}) = G(\Phi(id_{GF(A)}))
\end{aligned}$$

надо доказать, что для нашего сопряжения получится исходная монада (T, η, μ) . Мы уже проверяли $G \circ F = T$, также верно $\eta = \Gamma(id)$, поскольку η по построению является единицей сопряжения. Мы видели, что для алгебры $X = (h: T(B) \rightarrow B)$ и стрелки $g: A \rightarrow G(X)$ верно

$$\Phi_{A,X}(g) = h \circ T(g)$$

Когда мы пишем $G(\Phi(id_{GF(A)}))$, к стрелке $id_{GF(A)}: GF(A) \rightarrow GF(A)$ мы применяем $\Phi_{GF(A),F(A)}$, причём $F(A)$ – это алгебра $\mu_A: T^2(A) \rightarrow T(A)$, поэтому

$$\Phi_{GF(A),F(A)}(id) = \mu_A \circ T(id) = \mu_A \circ id = \mu_A$$

$$\mu'_A = G(\Phi(id)) = G(\mu_A) = \mu_A$$

□

Упражнение 19.40. Проверьте, что для операторов замыкания конструкция Эйленберга-Мура даёт разложение из Теоремы 19.9.

Разложение Эйленберга-Мура обычно не является единственно возможным разложением данной монады в пару сопряжённых функторов. Например, если мы возьмём вместо \mathbf{K}^T её полную подкатегорию, состоящую только из свободных алгебр (а функторы F и G определим как раньше), мы всё равно получим сопряжённость. Сейчас мы дадим интересное описание этой конструкции с помощью категории Клейсли.

Теорема 19.41. Пусть дана монада (T, η, Ψ) в категории \mathbf{K} . Определим два функтора

$$\mathbf{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbf{K}_T$$

$$F(A) = A$$

$$F(h) = \eta \circ h$$

$$G(A) = T(A)$$

$$G(h) = \Psi(h)$$

Тогда есть такое сопряжение $F \dashv G$ с единицей η , что монада, порождённая этим сопряжением, совпадает с (T, η, Ψ) .

Доказательство. Разберёмся сначала в определении F и G . Пусть $h: A \rightarrow B$ в \mathbf{K} . Тогда

$$\frac{h: A \rightarrow B \quad \eta_B: B \rightarrow T(B)}{\eta_B \circ h: A \rightarrow T(B)}$$

И мы получаем стрелку $F(h) = \eta \circ h: A \rightarrow T(B)$ в категории \mathbf{K}_T . Пусть $h: A \rightarrow B$ в \mathbf{K}_T , это значит, что $h: A \rightarrow T(B)$ в \mathbf{K} .

$$\frac{h: A \rightarrow T(B)}{\Psi(h): T(A) \rightarrow T(B)}$$

и мы получаем стрелку $G(h) = \Psi(h): T(A) \rightarrow T(B)$ в \mathbf{K} . Докажем, что F и G являются функторами. Надо доказать

$$F(g \circ f) = F(g) * F(f)$$

$$F(id) = \eta$$

$$G(g * f) = G(g) \circ G(f)$$

$$G(\eta) = id$$

Подставим определения F и G

$$\eta \circ (g \circ f) = (\eta \circ g) * (\eta \circ f)$$

$$\eta \circ id = \eta$$

$$\Psi(g * f) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$$

$$\Psi(\eta) = id$$

Не очевидно только первое равенство, его и докажем

$$\begin{aligned} (\eta \circ g) * (\eta \circ f) &= \\ &= \Psi(\eta \circ g) \circ \eta \circ f \\ &= \eta \circ g \circ f \end{aligned}$$

Теперь проверим $G \circ F = T$

$$G(F(A)) = T(A) \quad \text{по определению } G \text{ и } F$$

$$G(F(h)) = \Psi(\eta \circ h) = \Psi(\eta) \circ T(h) = id \circ T(h) = T(h)$$

Переходим к доказательству $F \dashv G$. Мы хотим, чтобы η было единицей сопряжения. Надо доказать следующее: для любых $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$, $B \in \text{Ob}(\mathbf{K}_T)$ и любой стрелки $g: A \rightarrow G(B)$ (это стрелка в \mathbf{K}) существует ровно одна стрелка $f: F(A) \rightarrow B$ в \mathbf{K}_T со свойством $g = G(f) \circ \eta_A$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\ & \searrow g & \downarrow G(f) & & \downarrow f \\ & & G(B) & & B \end{array}$$

Стрелка $f: F(A) \rightarrow B$ в \mathbf{K}_T – это стрелка $f: F(A) \rightarrow T(B)$ в \mathbf{K} , поэтому перерисуем правую часть диаграммы так

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\
 & \searrow g & \downarrow G(f) & & \downarrow f \\
 & & G(B) & & T(B)
 \end{array}$$

(все стрелки на этой диаграмме уже в \mathbf{K})

Вспоминая определение F и G , получаем окончательно:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) & & A \\
 & \searrow g & \downarrow \Psi(f) & & \downarrow f \\
 & & T(B) & & T(B)
 \end{array}$$

Таким образом, нам надо доказать, что для любой стрелки $g: A \rightarrow T(B)$ есть ровно одна стрелка $f: A \rightarrow T(B)$ со свойством

$$g = \Psi(f) \circ \eta$$

Но это так, поскольку свойство равносильно $g = f$. Заметим сразу, что $\Phi(g) = g$.

Остаётся проверить, что монада, порождённая этим сопряжением, совпадает с (T, η, Ψ) . Напомню, что для любого сопряжения $F \dashv G$ с соответствующими Φ, Γ определяется монада (T', η', Ψ')

$$T' = G \circ F$$

$$\eta'_A = \Gamma(id_{F(A)})$$

$$\Psi'(g) = G(\Phi(g))$$

надо доказать, что для нашего сопряжения получится исходная монада (T, η, Ψ) . Мы уже проверили $G \circ F = T$. Кроме того, получаются те же η (по построению она является единицей сопряжения) и Ψ

$$\Psi'(g) = G(\Phi(g)) = G(g) = \Psi(g)$$

(второе равенство в силу $\Phi(g) = g$)

□

Замечание 19.42. Конструкции Клейсли и Эйленберга-Мура дают в некотором смысле „наименьшее“ и „наибольшее“ разложение монады в композицию сопряжённых функторов. Говоря строже, для каждой монады есть категория, объектами которой являются всевозможные разложения этой монады, разложение Клейсли является в этой категории начальным объектом, а разложение Эйленберга-Мура терминальным. Функтор $F: K_T \rightarrow K^T$, который мы построили при доказательстве Теоремы 19.38, является морфизмом

$$0 \longrightarrow 1$$

в этой категории. Есть некоторая теорема Бека (точнее, целый набор теорем), которая показывает, в каких случаях пара сопряжённых функторов даёт разложение Эйленберга-Мура соответствующей монады, но я её здесь доказывать не буду, читайте Маклейна.

По поводу приложений монад к программированию я лично читал статьи Eugenio Moggi. Всем заинтересованным людям также очень рекомендую найти и прочитать статью Kosta Došen „Deductive completeness“ в журнале The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.2, №3, Sept.1996 (в журнале фамилия набрана с опечаткой, поэтому в интернете статья быстрее находится по запросу Kosta Dožen „Deductive completeness“)

Глава 20

Пределы и копределы

20.1 Большой пример

Допустим, мы хотим найти множества A, B с таким свойством

$$A \cong B^A$$

А зачем? А это дало бы нам простейший пример к так называемой „теореме о неподвижной точке“. Допустим, у нас есть такие множества и докажем, что всякая функция из B в B имеет неподвижную точку. Точнее, для всякой функции $f: B \rightarrow B$ есть такой элемент $b \in B$, что $f(b) = b$. Введём обозначения для изоморфизмов

$$i: A \rightarrow B^A$$

$$i^{-1}: B^A \rightarrow A$$

Каждому элементу A соответствует некоторая функция из A в B , поэтому мы можем „применять элементы A друг к другу“. Точнее, каждому элементу $a \in A$ соответствует функция $i(a): A \rightarrow B$. Каждым двум элементам $a_1, a_2 \in A$ можно сопоставить $i(a_1)(a_2) \in B$ и это как бы „результат применения a_1 к a_2 “. Введём такую функцию $g: A \rightarrow B$

$$g(a) = f(i(a)(a)) \quad \text{для всех } a \in A$$

она „применяет a сам к себе и к результату применяет f “. Теперь „применим g саму к себе“. Точнее, применим g к $i^{-1}(g)$ и получим

$$g(i^{-1}(g)) = f(i(i^{-1}(g))(i^{-1}(g))) = f(g(i^{-1}(g)))$$

Таким образом, $g(i^{-1}(g)) \in B$ является неподвижной точкой для функции f .

Проблема в том, что таких множеств A и B не бывает, кроме тривиального случая $A \cong B \cong 1$ (именно потому, что не бывает множеств со свойством неподвижной точки, кроме 1). Но можно взять вместо множеств объекты некоторой категории.

Определение 20.1. Введём категорию ωPoset . Объектом ωPoset является любое частично упорядоченное множество A со следующим свойством: всякая возрастающая последовательность элементов A

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

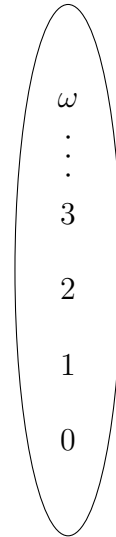
имеет супремум $\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$

Морфизмом $f: A \rightarrow B$ является любое монотонное отображение, которое сохраняет супремумы, что значит

$$f(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(a_n)$$

для любой возрастающей последовательности $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$

Пример 20.2. Рассмотрим множество $C = \{0, 1, 2, 3 \dots \omega\}$ (возрастающая последовательность $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$ и ещё один элемент ω , который больше всех).



Функция $f: C \rightarrow C$ будет морфизмом, если она

1. монотонна;
2. $f(\omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(n)$

Сообщаю без доказательства, что категория $\omega\mathbf{Poset}$ декартово замкнута.

Терминальным объектом будет множество из одного элемента, обозначим его $\{0\}$.

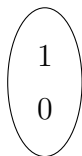
Произведением A и B будет множество пар $\{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ с поточечным порядком

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \text{ если и только если } a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2$$

Экспонентой B^A будет множество всех морфизмов из A в B $\{f \mid f: A \rightarrow B\}$ с поточечным порядком

$$f_1 \leq f_2 \text{ если и только если } f_1(a) \leq f_2(a) \text{ для всех } a \in A$$

Пример 20.3. До конца этого раздела положим $B = \{0, 1\}$, где $0 < 1$



Есть три морфизма $f: B \rightarrow B$ (морфизмами будут просто монотонные функции, поскольку возрастающих последовательностей нет)

$$f_1(b) = 1 \quad \text{для всех } b \in B$$

$$id(b) = b \quad \text{для всех } b \in B$$

$$f_0(b) = 0 \quad \text{для всех } b \in B$$

У каждого из них есть неподвижная точка. Упорядоченное множество B^B выглядит так

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ id \\ f_0 \end{pmatrix}$$

Сопоставим каждому морфизму $f: B \rightarrow B$ множество

$$\{b \in B \mid f(b) = 1\}$$

и получим такую картинку

$$\begin{pmatrix} \{0, 1\} \\ \{1\} \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

Упражнение 20.4. Разберитесь, почему порядок по включению между этими множествами соответствует порядку между морфизмами.

Заметим, что B^B изоморфно такому упорядоченному множеству

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Возьмём такую последовательность объектов $B_0, B_1, B_2, B_3 \dots$

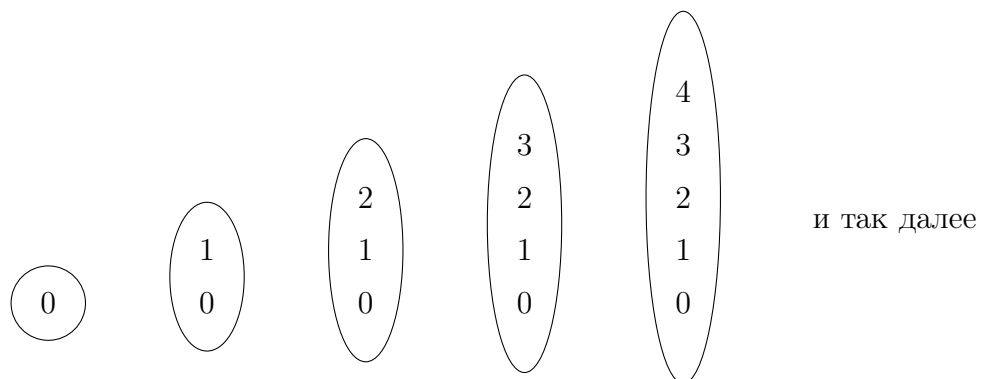
$$B_0 = 1$$

$$B_1 = B^{B_0} \quad (\cong B)$$

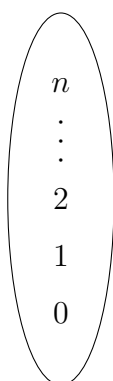
$$B_2 = B^{B_1} \quad (\cong B^B)$$

$$B_3 = B^{B_2} \quad (\cong B^{B^B})$$

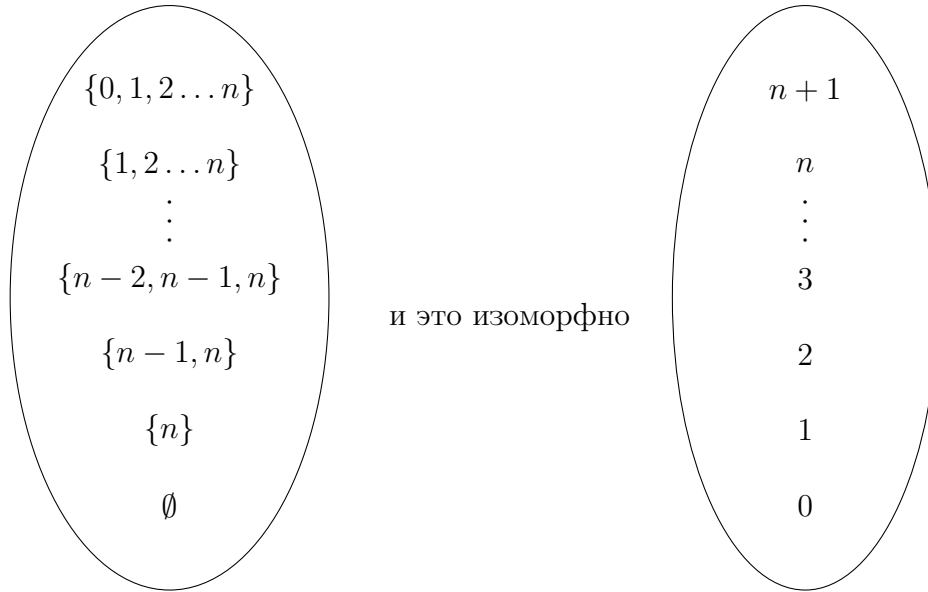
и так далее, $B_{n+1} = B^{B_n}$ для каждого n . Покажем, что с точностью до изоморфизма эта последовательность выглядит так



Действительно, пусть B_n с точностью до изоморфизма выглядит так



Что такое B_{n+1} ? Это множество морфизмов из B_n в B с поточечным порядком. Каждый морфизм $f: B_n \rightarrow B$ однозначно определяется множеством $\{b \in B_n \mid f(b) = 1\}$. Поэтому B_{n+1} устроено так



Упражнение 20.5. Разберитесь, почему множества на левой картинке именно такие (это следует из монотонности морфизмов).

Дальше идея такая: у нас есть последовательность объектов B_n такая, что $B_{n+1} = B^{B_n}$ для каждого n . Возьмём некий предел этой последовательности

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

и тогда, возможно, получим изоморфизм

$$A \cong B^A$$

Но чтобы это сделать, понадобится некоторая дополнительная структура.

Определение 20.6. Определим два морфизма

$$h_0: 1 \rightarrow B$$

$$g_0: B \rightarrow 1$$

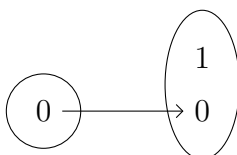
следующим образом

$$h_0(0) = 0$$

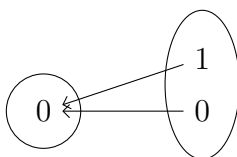
$$g_0(0) = 0$$

$$g_0(1) = 0$$

Морфизм h_0 действует так



Морфизм g_0 действует так (справа налево)



Введём теперь два семейства морфизмов

$$B_0 \xrightarrow{h_0} B_1 \xrightarrow{h_1} B_2 \xrightarrow{h_2} B_3 \xrightarrow{h_3} \dots$$

$$B_0 \xleftarrow{g_0} B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \xleftarrow{g_3} \dots$$

по индукции. Мы уже ввели

$$h_0: B_0 \rightarrow B_1$$

$$g_0: B_1 \rightarrow B_0$$

Допустим, мы каким-то образом определили

$$h_n: B_n \rightarrow B_{n+1}$$

$$g_n: B_{n+1} \rightarrow B_n$$

Тогда определим морфизмы

$$h_{n+1}: B^{B_n} \rightarrow B^{B_{n+1}}$$

$$g_{n+1}: B^{B_{n+1}} \rightarrow B^{B_n}$$

следующим способом

$$h_{n+1}(f) = f \circ g_n \quad \text{для любого } f \in B^{B_n} \quad (f: B_n \rightarrow B)$$

$$g_{n+1}(f) = f \circ h_n \quad \text{для любого } f \in B^{B_{n+1}} \quad (f: B_{n+1} \rightarrow B)$$

Упражнение 20.7. Проверьте, что морфизмы

$$h_1: B \rightarrow B^B$$

$$g_1: B^B \rightarrow B$$

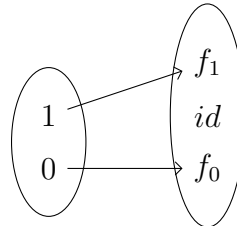
действуют так

$$h_1(0) = f_0$$

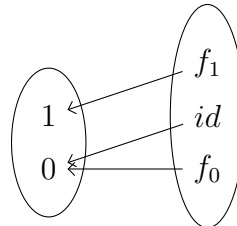
$$h_1(1) = f_1$$

$$g_1(f) = f(0) \quad \text{для каждого } f \in B^B$$

Морфизм h_1 действует так



Морфизм g_1 действует так

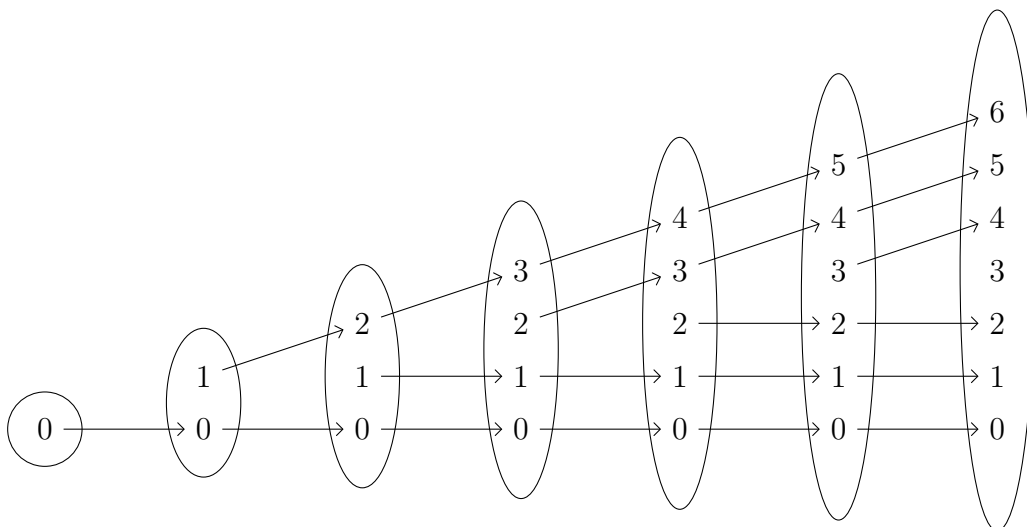


Упражнение 20.8. Проверьте, что $g_n \circ h_n = id$ для всех n . Поэтому все h_n являются мономорфизмами, а все g_n эпиморфизмами.

Упражнение 20.9. Трудолюбивым и упорным людям предлагаю проверить, что морфизмы

$$B_0 \xrightarrow{h_0} B_1 \xrightarrow{h_1} B_2 \xrightarrow{h_2} B_3 \xrightarrow{h_3} \dots$$

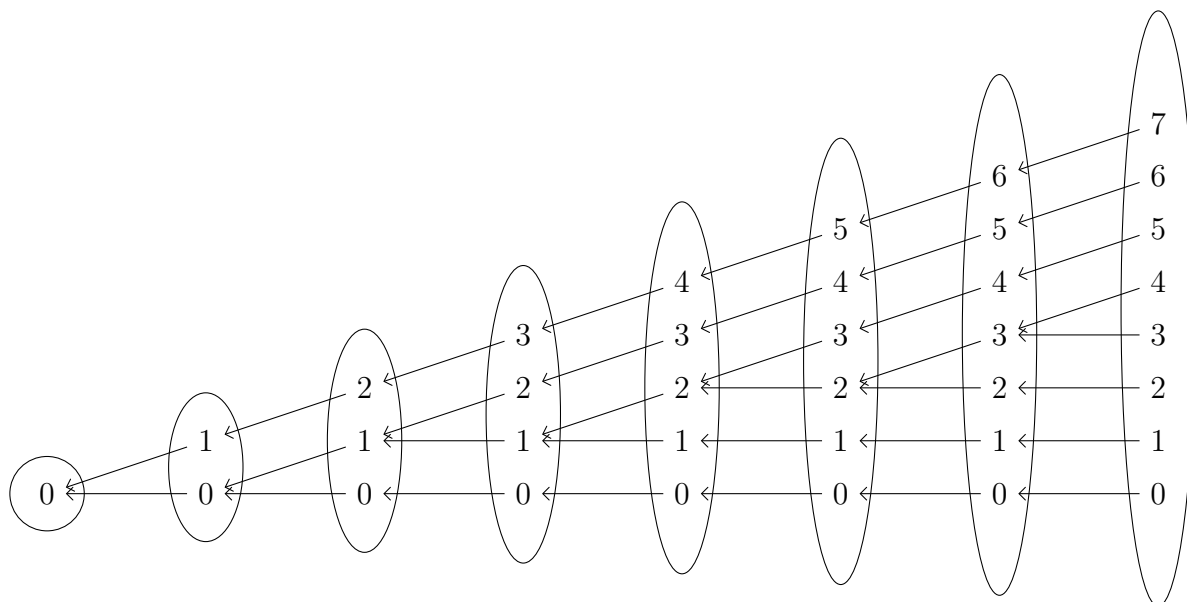
действуют так



а морфизмы

$$B_0 \xleftarrow{g_0} B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \xleftarrow{g_3} \dots$$

действуют так



Переходим к определению предела. Возьмём в качестве $A = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ множество всех бесконечных последовательностей

$$(b_0, b_1, b_2, b_3 \dots) \text{ где } b_n \in B_n$$

для которых выполнено свойство

$$b_n = g_n(b_{n+1}) \text{ для всех } n$$

Порядок на этом множестве последовательностей поточечный. Вот оно:

$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots)$

$(0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots)$

$(0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5 \dots)$

$(0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4 \dots)$

...

$(0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 \dots n, n \dots)$ „зигзаг-последовательность“

...

$(0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2 \dots)$

$(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \dots)$

$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \dots)$

Для краткости обозначим каждую из этих последовательностей одним символом (слева от каждой последовательности записан её обозначающий символ)

$0'$ (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...)

$1'$ (0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...)

$2'$ (0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5...)

$3'$ (0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4...)

...

ω (0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4... $n, n...$) „зигзаг-последовательность“

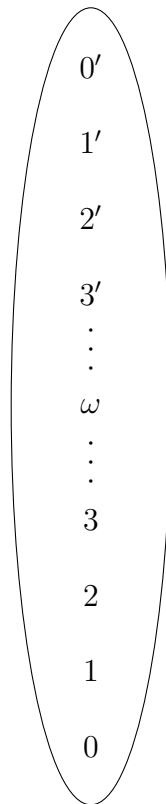
...

2 (0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2...)

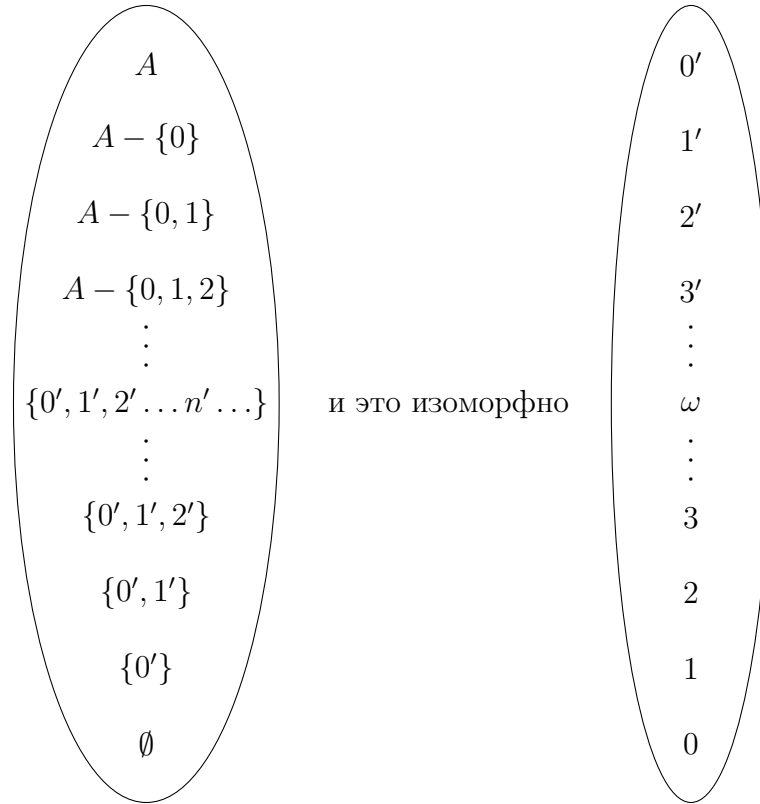
1 (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1...)

0 (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0...)

И мы видим, что с точностью до изоморфизма упорядоченное множество A выглядит так



Множество B^A выглядит так (вместо каждой стрелки $f: A \rightarrow B$ пишем множество $\{a \in A \mid f(a) = 1\}$)



Получаем желаемый изоморфизм

$$B^A \cong A$$

Поясним, что изображено на левой картинке. Букве A в самом верху соответствует стрелка $f: A \rightarrow B$, тождественно равная единице

$$f(a) = 1 \text{ для всех } a \in A$$

для этой стрелки $\{a \in A \mid f(a) = 1\} = A$

Дальше вниз, $A - \{0\}$ соответствует стрелке $f: A \rightarrow B$, которая переводит все элементы A , кроме 0 , в единицу, а 0 в 0

$$f(a) = 1 \text{ для всех } a > 0$$

$$f(0) = 0$$

для этой стрелки $\{a \in A \mid f(a) = 1\} = A - \{0\}$

Дальше вниз, $A - \{0, 1\}$ соответствует стрелке $f: A \rightarrow B$, определённой так

$$f(a) = 1 \text{ для всех } a > 1$$

$$f(1) = 0$$

$$f(0) = 0$$

Ещё дальше вниз множество $\{0', 1', 2' \dots n' \dots\}$ соответствует стрелке $f: A \rightarrow B$, определённой так

$$f(n') = 1$$

$$f(\omega) = 0$$

$$f(n) = 0$$

В самом низу пустое множество \emptyset соответствует стрелке $f: A \rightarrow B$, тождественно равной нулю: $f(a) = 0$ для всех $a \in A$, для этой стрелки $\{a \in A \mid f(a) = 1\} = \emptyset$

Заметим, что если брать все монотонные функции из A в B , не требуя сохранения супремумов, над множеством $\{0', 1', 2' \dots\}$ появится ещё одно множество $\{0', 1', 2' \dots \omega\}$ и изоморфизма не получится. Этому множеству соответствует функция $f: A \rightarrow B$, которая действует так

$$f(n') = 1$$

$$f(\omega) = 1$$

$$f(n) = 0$$

эта функция не будет непрерывной, потому что

$$\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \quad \text{но при этом}$$

$$f(\omega) = 1 \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} f(n) = 0$$

Упражнение 20.10. Для людей, знакомых с лямбда-исчислением. Попробуйте понять, что в этой модели

$$\lambda x : A.xx = \omega$$

$$(\lambda x : A.xx)(\lambda x : A.xx) = \omega\omega = 0 : B$$

Замечание 20.11. Этот пример я придумал сам в педагогических целях. Это упрощение известных моделей Скотта для лямбда-исчисления. Скотт таким способом построил в ωPoset объект D со свойством

$$D \cong D^D$$

но его уже не нарисуешь. Подробности в книге Барендрегта „Лямбда-исчисление“. Я пытался подобрать A и B наугад, не смог и построил „по науке“.

Замечание 20.12. А почему, собственно, не бывает множеств со свойством неподвижной точки, кроме одноэлементных? Возьмём некоторое множество B , в котором есть два разных элемента $b_1 \neq b_2$. Определим такую функцию $f : B \rightarrow B$

$$f(b) = \begin{cases} b_1, & \text{если } b = b_2 \\ b_2, & \text{если } b \neq b_2 \end{cases}$$

У этой функции не может быть неподвижной точки. При попытке формально доказать существование функции f (например в теории множеств или подходящей теории типов) выясняется, что для этого нужен закон исключённого третьего

$$\forall b \in B (b = b_2 \vee b \neq b_2)$$

без него не проходит разбор случаев. Соответственно, в теории множеств с интуиционистской логикой доказать существование функции f нельзя. Более того, там можно без противоречия считать, что существуют множества A и B со свойством $A \cong B^A$, $B \not\cong 1$.

Мы, видимо, уже поняли, что топосы – это как бы модели для интуиционистской теории множеств (на самом деле, для теории типов). Соответственно, можно найти такие A и B в подходящем топосе. Например,

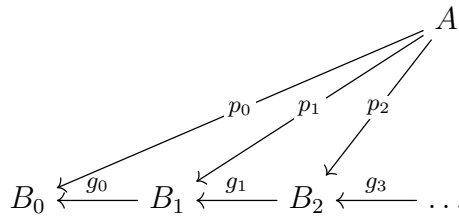
можно вложить $\omega\mathbf{Poset}$ (точнее, подходящий „малый“ фрагмент этой категории) в топос с помощью вложения Йонеды и вспомнить, что вложение Йонеды сохраняет экспоненты.

20.2 Пределы

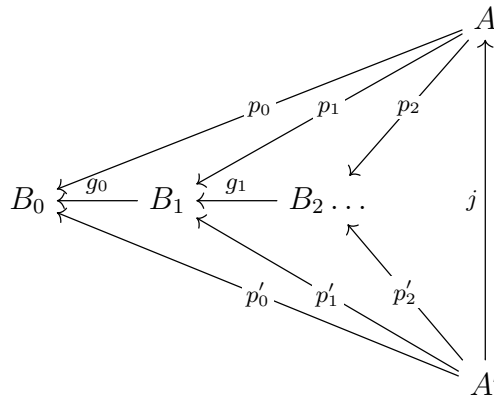
Определение 20.13. Возьмём некоторую диаграмму в некоторой категории \mathcal{K} . Для определённости возьмём категорию ωPoset и диаграмму

$$B_0 \xleftarrow{g_0} B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \xleftarrow{g_3} \dots$$

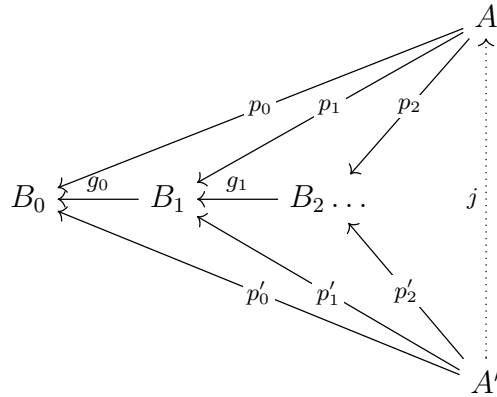
из предыдущего раздела. *Конусом* для этой диаграммы назовём любой объект A вместе с набором стрелок $\{p_n: A \rightarrow B_n\}$ (по одной стрелке в каждый объект диаграммы), для которых коммутативны все треугольники с вершиной A , то есть $p_n = g_n \circ p_{n+1}$ для любой стрелки g_n на диаграмме.



Пусть даны два конуса: A с набором стрелок $\{p_n\}$ и A' с набором стрелок $\{p'_n\}$. *Морфизмом* из конуса (A', p') в конус (A, p) назовём любую стрелку $j: A' \rightarrow A$ такую, что $p_n \circ j = p'_n$ для любого объекта B_n на диаграмме.



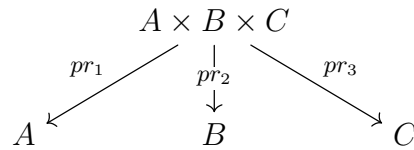
Пределом диаграммы назовём терминальный объект в категории конусов.



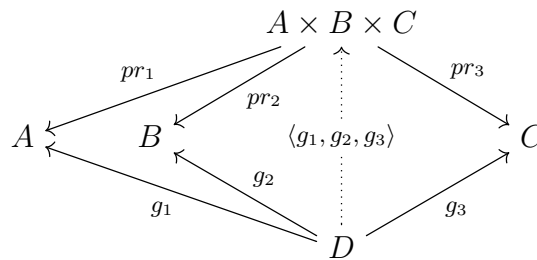
Пример 20.14. Возьмём диаграмму без стрелок, например

$$A \quad B \quad C$$

Пределом этой диаграммы будет конус



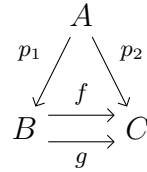
потому что



Пример 20.15. Рассмотрим диаграмму такого вида

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C$$

Конусом над ней будет пара стрелок



для которых выполнены равенства

$$f \circ p_1 = p_2$$

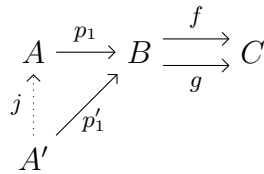
$$g \circ p_1 = p_2$$

Таким образом, конус задаётся стрелкой p_1 , для которой

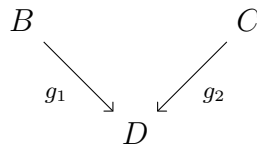
$$f \circ p_1 = g \circ p_1$$

$$A \xrightarrow{p_1} B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C$$

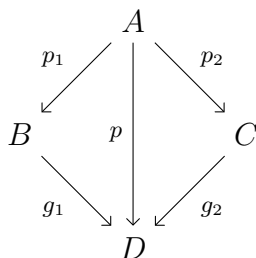
а стрелка p_2 по ней определяется однозначно. Конус будет пределом диаграммы, если и только если он задаёт уравнитель пары f, g



Пример 20.16. Рассмотрим такую диаграмму



Конусом над ней будет тройка стрелок такого вида



для которых выполнены равенства

$$g_1 \circ p_1 = p = g_2 \circ p_2$$

Таким образом, внешний квадрат должен быть коммутативным. Ко-нус будет пределом диаграммы если и только если внешний квадрат декартов.

Пример 20.17. Вспомним, как мы строили предел диаграммы

$$B_0 \xleftarrow{g_0} B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \xleftarrow{g_3} \dots$$

в предыдущем разделе. Мы взяли множество всех последовательностей

$$(b_0, b_1, b_2, b_3 \dots) \quad \text{где } b_n \in B_n$$

это множество обозначим $\prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$, проекции на $B_0, B_1, B_2 \dots$ обозначим соответственно $pr_0, pr_1, pr_2 \dots$

$$pr_0(b_0, b_1, b_2, b_3 \dots) = b_0$$

$$pr_1(b_0, b_1, b_2, b_3 \dots) = b_1$$

$$pr_2(b_0, b_1, b_2, b_3 \dots) = b_2$$

Определим стрелку $g: \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$ таким равенством

$$g = \langle g_0 \circ pr_1, g_1 \circ pr_2, g_2 \circ pr_3 \dots \rangle$$

По последовательности $(b_0, b_1, b_2, b_3 \dots)$ функция g выдаёт последовательность $(g_0(b_1), g_1(b_2), g_2(b_3) \dots)$

Построим уравнитель

$$A \xrightarrow{h} \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n \begin{array}{c} \xrightarrow{id} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

это множество последовательностей $(b_0, b_1, b_2, b_3 \dots)$, для которых выполнено равенство

$$(b_0, b_1, b_2, b_3 \dots) = (g_0(b_1), g_1(b_2), g_2(b_3), g_3(b_4) \dots)$$

то есть

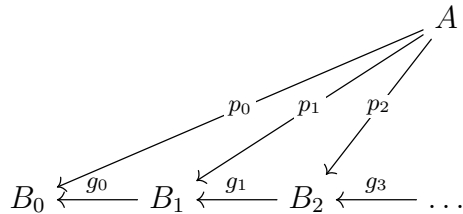
$$b_n = g_n(b_{n+1}) \quad \text{для всех } n$$

Стрелки $p_n: A \rightarrow B_n$ определим как ограничения проекций на подмножество A

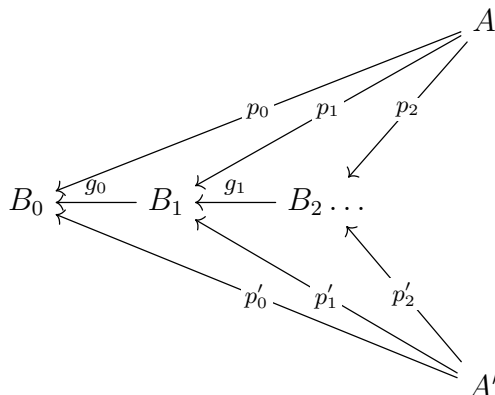
$$p_n = pr_n \circ h \quad \text{для всех } n$$

$$h = \langle p_0, p_1, p_2 \dots \rangle$$

Покажем, что (A, p) действительно является пределом диаграммы. Все треугольники с вершиной A коммутативны



Пусть дан объект A' и набор стрелок $p'_n: A' \rightarrow B_n$



таких, что все треугольники с вершиной A' тоже коммутативны, то есть

$$p'_n = g_n \circ p'_{n+1} \quad \text{для всех } n$$

Построим стрелку $h': A' \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$$h' = \langle p'_0, p'_1, p'_2, \dots \rangle$$

$$p'_n = pr_n \circ h' \quad \text{для всех } n$$

и получаем

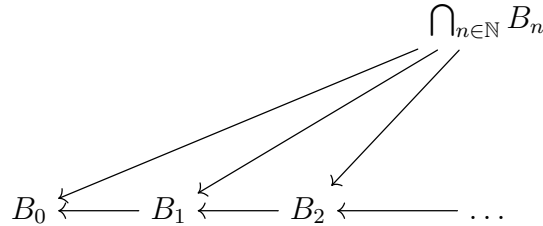
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n & \xrightarrow{id} & \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n \\ & \nearrow h' & & \xrightarrow{g} & \\ A' & & & & \end{array}$$

поскольку A является уравниателем.

Упражнение 20.18. Пусть дана убывающая последовательность множеств

$$B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$$

Пределом соответствующей диаграммы, составленной из мономорфизмов, будет пересечение $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$



По сути, в качестве предела мы получаем множество таких последовательностей

$$(b_0, b_1, b_2, b_3 \dots) \quad \text{где } b_n \in B_n$$

для которых $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = \dots$, каждая такая последовательность имеет вид $(b, b, b, b \dots)$, где $b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$

Определение 20.19. Категория \mathbf{K} называется *полной*, если в ней есть уравнители всех пар стрелок (с одинаковыми началами и концами) и произведения любых индексированных множеств объектов. Последнее означает, то для любого множества I и любого семейства объектов $\{A_i \mid i \in I\}$ есть произведение $\prod_{i \in I} A_i$

Многие из категорий, которые мы уже рассматривали, полны. \mathbf{Set} , \mathbf{Grp} , \mathbf{Cat} , \mathbf{Poset} , $\omega\mathbf{Poset}$, все категории вида $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$, где \mathbf{K} малая (включая категорию графов \mathbf{Grph}), полны. Заметим, что все эти категории „большие“. На это есть причины. Рассуждая в классической теории множеств, можно доказать, что малые полные категории должны иметь очень специальный вид.

Теорема 20.20. *Любая малая полная категория является категорией предпорядка.*

Доказательство. Напомню, что в категориях предпорядка между любыми двумя объектами не больше одной стрелки. Предположим что категория \mathbf{K} полна и в ней есть две разные стрелки $f, g: A \rightarrow B$ между некоторыми объектами A, B . Возьмём некоторое множество индексов I и образуем произведение $\prod_{i \in I} B$, все множители в котором одинаковые. Любая стрелка вида $h: A \rightarrow \prod_{i \in I} B$ определяется своими компонентами, каждая из которых, в частности, может быть равна f или g . Таким

образом, есть не меньше $2^{|I|}$ таких стрелок, где $|I|$ – мощность множества I . Если, допустим, во множестве I три элемента, то существует не меньше 8 стрелок вида $h: A \rightarrow B \times B \times B$. Если категория \mathbf{K} малая, мы можем взять множество I , в котором больше элементов, чем всех стрелок в \mathbf{K} и получим противоречие. \square

Пример малой полной категории – упорядоченное множество $[0, 1]$ (отрезок действительных чисел), в нём каждое подмножество имеет точную нижнюю грань, которая и будет произведением. Вообще, если брать только частичные порядки, категорная полнота соответствует такому свойству: каждое подмножество имеет точную нижнюю грань, такие порядки называются *полными решётками*.

Интересно, что приведённая выше теорема существенно использует закон исключённого третьего (если разобраться в рассуждениях с мощностями) и не проходит в интуиционистской теории множеств. Соответственно, в некоторых топосах, отличных от \mathbf{Set} , бывают „внутренние малые полные категории“, не являющиеся категориями предпорядка, не будем объяснять, что это такое, но вещь хорошая. Кому интересно, может почитать книгу Phoa “An introduction to fibrations, topos theory, the effective topos and modest sets”.

В примере 20.17 мы доказали, что в полных категориях есть пределы всех „обратных последовательностей морфизмов“ вида

$$B_0 \xleftarrow{g_0} B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \xleftarrow{g_3} \dots$$

Сейчас мы обобщим этот результат и докажем, что в полных категориях есть пределы любых диаграмм. Для этого уточним обозначения. Диаграмма – это размеченный граф. Возьмём некоторый граф, например

$$\cdot \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longleftarrow \dots$$

обозначим его вершины и рёбра какими-нибудь буквами

$$V_0 \xleftarrow{r_0} V_1 \xleftarrow{r_1} V_2 \xleftarrow{r_2} V_3 \xleftarrow{r_3} \dots$$

Сам граф будем обозначать Gr . Множество вершин Gr будем обозначать $Ver(Gr)$, множество рёбер будем обозначать $Ar(Gr)$. Диаграмма вида

$$B_0 \xleftarrow{g_0} B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \xleftarrow{g_3} \dots$$

в некоторой категории \mathbf{K} (например, в ωPoset) – это правильное отображение (гомоморфизм) графов $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathbf{K}$, если категорию \mathbf{K} воспринимать как граф (объекты являются вершинами, а стрелки рёбрами).

$$\mathcal{D}(V_n) = B_n$$

$$\mathcal{D}(r_n) = g_n$$

Можно превратить это отображение в функтор, если вместо Gr взять категорию, свободно порождённую Gr (добавляются формальные произведения рёбер вроде $r_0 \circ r_1 \circ r_2: V_3 \rightarrow V_0$), но практически этого лучше не делать, потому что увеличивает количество стрелок и усложняет вычисления.

Определение 20.21. Пусть даны граф Gr , категория \mathbf{K} и диаграмма $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathbf{K}$.

Конусом с основанием \mathcal{D} называется любой объект $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ вместе с набором стрелок $p_V: A \rightarrow \mathcal{D}(V)$ (по одной стрелке для каждой вершины $V \in \text{Ver}(Gr)$), обладающие таким свойством: для любого ребра $r: V \rightarrow U$ верно равенство $p_U = \mathcal{D}(r) \circ p_V$

Морфизмом между конусами (A', p') и (A, p) называется любая стрелка $j: A' \rightarrow A$ со свойством $p_V \circ j = p'_V$ для всех $V \in \text{Ver}(Gr)$

Пределом диаграммы \mathcal{D} называется терминальный объект в категории конусов.

Теорема 20.22. В полной категории \mathbf{K} есть пределы любых диаграмм.

Доказательство. Пусть даны граф Gr , полная категория \mathbf{K} и диаграмма $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathbf{K}$. Возьмём произведение

$$\prod_{V \in \text{Ver}(Gr)} \mathcal{D}(V)$$

всех объектов \mathbf{K} на диаграмме, для краткости обозначим его Π
Для диаграммы

$$B_0 \xleftarrow{g_0} B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \xleftarrow{g_3} \dots$$

это будет $\prod_{n \in \mathbb{N}} B_n = B_0 \times B_1 \times B_2 \times \dots$

Проекции этого произведения будем обозначать pr_U

$$pr_U : \prod_{V \in \text{Ver}(Gr)} \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{D}(U) \quad \text{где } U \in \text{Ver}(Gr)$$

Для всякого ребра $r : V \rightarrow U$ рисуем (не коммутативный) треугольник

$$\begin{array}{ccc} & \Pi & \\ pr_V \swarrow & & \searrow pr_U \\ \mathcal{D}(V) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r)} & \mathcal{D}(U) \end{array}$$

Теперь мы выделим из Π подобъект A (с помощью подходящего уравнителя), на котором все эти треугольники коммутативны, этот подобъект и будет пределом. Поскольку $V = \text{dom}(r)$, $U = \text{cod}(r)$, перерисуем треугольник так

$$\begin{array}{ccc} & \Pi & \\ pr_{\text{dom}(r)} \swarrow & & \searrow pr_{\text{cod}(r)} \\ \mathcal{D}(\text{dom}(r)) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r)} & \mathcal{D}(\text{cod}(r)) \end{array}$$

Возьмём теперь произведение

$$\prod_{r \in \text{Ar}(Gr)} \mathcal{D}(\text{cod}(r))$$

„произведение всех концов стрелок на диаграмме“, для диаграммы

$$B_0 \xleftarrow{g_0} B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \xleftarrow{g_3} \dots$$

это тоже будет

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

но для такой диаграммы

$$B \rightrightarrows C$$

это будет $C \times C$, а для такой диаграммы

$$A \quad B \quad C$$

вообще 1 (стрелок нет, произведение пустого семейства).
 Определим теперь две стрелки

$$\prod_{V \in \text{Ver}(Gr)} \mathcal{D}(V) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \prod_{r \in \text{Ar}(Gr)} \mathcal{D}(\text{cod}(r))$$

уравнитель которых и будет пределом.

$$f = \langle pr_{\text{cod}(r)} \rangle_{r \in \text{Ar}(Gr)}$$

$$g = \langle \mathcal{D}(r) \circ pr_{\text{dom}(r)} \rangle_{r \in \text{Ar}(Gr)}$$

Для диаграммы

$$B_0 \xleftarrow{g_0} B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \xleftarrow{g_3} \dots$$

это будут стрелки

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} B_n \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

$$f = \langle pr_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} = \langle p_0, p_1, p_2 \dots \rangle = id$$

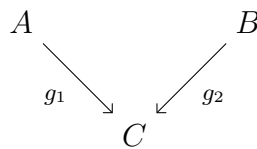
$$g = \langle g_n \circ pr_{n+1} \rangle_{n \in \mathbb{N}} = \langle g_0 \circ pr_1, g_1 \circ pr_2, g_2 \circ pr_3 \dots \rangle$$

Наконец, берём уравнитель

$$A \twoheadrightarrow \prod_{V \in \text{Ver}(Gr)} \mathcal{D}(V) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \prod_{r \in \text{Ar}(Gr)} \mathcal{D}(\text{cod}(r))$$

и получаем предел, что предлагается проверить в качестве упражнения. \square

Пример 20.23. Берём пару стрелок с общим концом в Set (для простоты)



Построим предел этой диаграммы. Берём произведение всех объектов на диаграмме $A \times B \times C$ и произведение концов всех стрелок на диаграмме $C \times C$. Функции $f: A \times B \times C \rightarrow C \times C$ и $g: A \times B \times C \rightarrow C \times C$ из доказательства предыдущей теоремы в данном случае выглядят так

$$f = \langle pr_3, pr_3 \rangle$$

$$g = \langle g_1 \circ pr_1, g_2 \circ pr_2 \rangle$$

или проще

$$f(a, b, c) = (c, c)$$

$$g(a, b, c) = (g_1(a), g_2(b))$$

Их уравнителем будет множество троек (a, b, c) , для которых $f(a, b, c) = g(a, b, c)$, то есть

$$(g_1(a), g_2(b)) = (c, c)$$

или проще

$$g_1(a) = g_2(b) = c$$

оно изоморфно множеству пар (a, b) , для которых $g_1(a) = g_2(b)$ и мы получаем в качестве предела декартов квадрат.

Теорема 20.24. *В категориях вида \mathbf{Set}^K , где K малая, все пределы вычисляются покомпонентно, отдельно для каждого $A \in \text{Ob}(K)$*

Доказательство. Мы знаем, что произведения и уравнители в категориях вида \mathbf{Set}^K вычисляются покомпонентно. Можно сослаться на предыдущую теорему (все пределы в полной категории строятся из произведений и уравнителей) и на этом закончить. Но это не совсем красиво и я приведу явную конструкцию пределов. Пусть дана малая категория K и диаграмма $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathbf{Set}^K$ (в которой $\mathcal{D}(V)$ являются функторами, а $\mathcal{D}(r)$ естественными преобразованиями). Мы хотим построить предельный конус в \mathbf{Set}^K , состоящий из функтора H и набора естественных преобразований ρ_V (это не компоненты одного преобразования ρ , а для каждого V своё естественное преобразование $\rho_V: H \rightarrow \mathcal{D}(V)$)

$$\begin{array}{ccc}
 & H & \\
 \rho_V \swarrow & & \searrow \rho_U \\
 \mathcal{D}(V) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r)} & \mathcal{D}(U)
 \end{array}$$

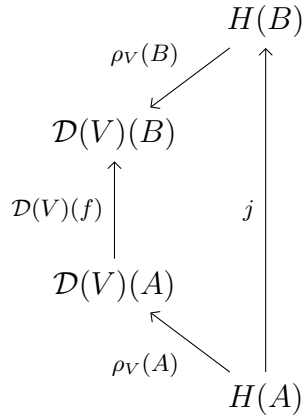
Для каждого объекта $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ построим предельный конус в Set , состоящий из множества $H(A)$ и набора функций $\rho_V(A)$

$$\begin{array}{ccc}
 & H(A) & \\
 \rho_V(A) \swarrow & & \searrow \rho_U(A) \\
 \mathcal{D}(V)(A) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r)(A)} & \mathcal{D}(U)(A)
 \end{array}$$

Чтобы превратить H в функтор, надо определить его действие на стрелках. Для каждой стрелки $f \in \mathbf{K}(A, B)$ рисуем такую коммутативную диаграмму в Set

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(B) & & \\
 & & \rho_V(B) \swarrow & & \searrow \rho_U(B) \\
 & & \mathcal{D}(V)(B) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r)(B)} & \mathcal{D}(U)(B) \\
 \mathcal{D}(V)(f) \uparrow & & & & \uparrow \mathcal{D}(U)(f) \\
 & & \mathcal{D}(V)(A) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r)(A)} & \mathcal{D}(U)(A) \\
 & & \rho_V(A) \swarrow & & \searrow \rho_U(A) \\
 & & H(A) & &
 \end{array}$$

и полагаем $H(f) = j$, где j определяется как единственная стрелка, делающая коммутативными все такие диаграммы



□

Пример 20.25. Берём граф Gr без стрелок с двумя вершинами

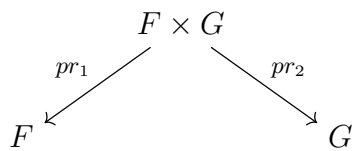
$$V \quad U$$

и диаграмму $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathbf{Set}^K$

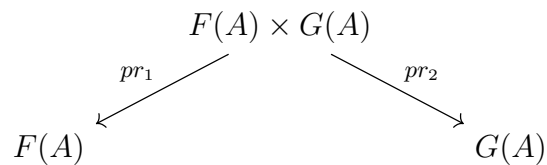
$$F \quad G$$

где $F, G: K \rightarrow \mathbf{Set}$

Мы хотим построить предел этой диаграммы в \mathbf{Set}^K



Для каждого $A \in \mathbf{Ob}(K)$ строим предел в \mathbf{Set}



Для каждой $f: A \rightarrow B$ определяем стрелку $F(f) \times G(f)$ диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(B) \times G(B) & & \\
 & \swarrow pr_1 & & \searrow pr_2 & \\
 F(B) & & & & G(B) \\
 \uparrow F(f) & & F(f) \times G(f) & & \uparrow G(f) \\
 F(A) & & & & G(A) \\
 \swarrow pr_1 & & & \searrow pr_2 & \\
 & & F(A) \times G(A) & &
 \end{array}$$

Наконец, определяем функтор $F \times G$ равенствами

$$(F \times G)(A) = F(A) \times G(A)$$

$$(F \times G)(f) = F(f) \times G(f)$$

Посмотрите также свежим взглядом на упражнение 10.21, а также пример 18.12 (в этом примере единственное естественное преобразование ρ и ρ_A обозначают его компоненты).

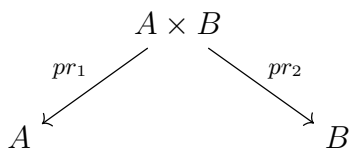
Замечание 20.26. Формулировка предыдущей теоремы не совсем строгая, попробуем чуть строже. Для каждого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ есть функтор $Ev_A: \text{Set}^{\mathbf{K}} \rightarrow \text{Set}$, который по $F: \mathbf{K} \rightarrow \text{Set}$ выдаёт $F(A)$. Чтобы построить предел диаграммы $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \text{Set}^{\mathbf{K}}$, надо построить пределы всех диаграмм $Ev_A \circ \mathcal{D}: Gr \rightarrow \text{Set}$, после чего однозначно восстанавливаются стрелки, превращающие всё это в предел в $\text{Set}^{\mathbf{K}}$

Замечание 20.27. О терминологии. Маклейн всё время говорит о „малых диаграммах“, предполагая, что могут быть ещё и „большие диаграммы“, в которых или вершин, или рёбер графа Gr „очень много“ (не множество, а большой класс). Соответственно, полную категорию он определяет как такую категорию, в которой есть пределы всех „малых диаграмм“. Поскольку я определял граф как два множества (рёбер и вершин) и две функции (dom и cod), у меня все диаграммы „малые“ и оговорок делать не нужно. Вообще, со времён Маклейна терминология сильно изменилась, я пытаюсь следовать современной англоязычной терминологии.

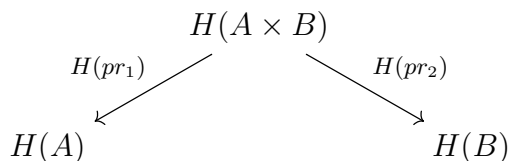
20.3 Сохранение пределов

Определение 20.28. Функтор называется *непрерывным*, если он переводит предельные конусы в предельные. Говоря строже, функтор $H: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}'$ непрерывен, если для любой диаграммы $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathbf{K}$ и любого конуса предела (A, p) с основанием \mathcal{D} конус $(H(A), H(p))$ тоже предельный (для диаграммы $H \circ \mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathbf{K}'$)

Пример 20.29. Непрерывный функтор H переводит любой конус произведения



в конус произведения



и любую диаграмму уравнителя

$$C \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

в диаграмму уравнителя

$$H(C) \xrightarrow{H(h)} H(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{H(f)} \\ \xrightarrow{H(g)} \end{array} H(B)$$

Вообще, непрерывные функторы сохраняют произведения любых индексированных множеств объектов, терминальные объекты, уравнители, декартовы квадраты и мономорфизмы – последнее потому, что стрелка $f: A \rightarrow B$ является мономорфизмом если и только если следующий квадрат декартов

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 id \downarrow & & \downarrow f \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Теорема 20.30. *Правые сопряжённые функторы непрерывны.*

Доказательство. Пусть даны категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , два сопряжённых функтора $F \dashv G$

$$\mathbf{K}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbf{K}_2$$

а также граф Gr и диаграмма $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathbf{K}_2$, для которой есть предельный конус в виде объекта $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}_2)$ и набора стрелок $p_V: X \rightarrow \mathcal{D}(V)$ для каждого $V \in \text{Ver}(Gr)$.

Для каждого ребра $r: V \rightarrow U$ коммутативен треугольник в \mathbf{K}_2

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 p_V \swarrow & & \searrow p_U \\
 \mathcal{D}(V) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r)} & \mathcal{D}(U)
 \end{array}$$

Применим функтор G и получим коммутативный треугольник в \mathbf{K}_1

$$\begin{array}{ccc}
 & G(X) & \\
 G(p_V) \swarrow & & \searrow G(p_U) \\
 G\mathcal{D}(V) & \xrightarrow{G\mathcal{D}(r)} & G\mathcal{D}(U)
 \end{array}$$

Таким образом, объект $G(X)$ и набор стрелок $G(p_V)$ образуют конус над диаграммой $G \circ \mathcal{D}$ в категории \mathbf{K}_1 .

Докажем, что этот конус предельный. Пусть дан другой конус (A', f) с основанием $G \circ \mathcal{D}$, тогда коммутативны треугольники в \mathbf{K}_1

$$\begin{array}{ccc}
 G\mathcal{D}(V) & \xrightarrow{G\mathcal{D}(r)} & G\mathcal{D}(U) \\
 & \swarrow f_v \quad \nearrow f_u & \\
 & A' &
 \end{array}$$

Применив к стрелкам f преобразование Φ , получим коммутативные треугольники в \mathbf{K}_2

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}(V) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r)} & \mathcal{D}(U) \\
 & \swarrow \Phi(f_v) \quad \nearrow \Phi(f_u) & \\
 & F(A') &
 \end{array}$$

Таким образом, объект $F(A')$ и набор стрелок $\Phi(f_v)$ образуют конус для диаграммы \mathcal{D} . Поскольку конус (X, p) предельный, существует единственная стрелка $j: F(A') \rightarrow X$, для которой коммутативны все треугольники

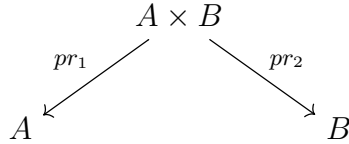
$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 & \swarrow p_v & \uparrow j \\
 \mathcal{D}(V) & & \\
 & \swarrow \Phi(f_v) & \\
 & F(A') &
 \end{array}$$

Применив преобразование Γ , получаем единственную стрелку $\Gamma(j)$, для которой коммутативны все треугольники

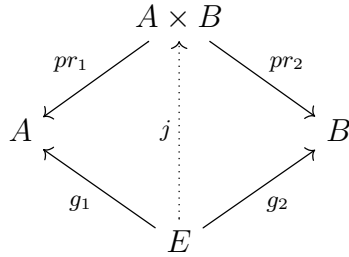
$$\begin{array}{ccc}
 & G(X) & \\
 & \swarrow G(p_v) & \uparrow \Gamma(j) \\
 G\mathcal{D}(V) & & \\
 & \swarrow f_v & \\
 & A' &
 \end{array}$$

□

Пример 20.31. Теперь покажем на примерах, что все функторы вида H^E (представимые ковариантные функторы) непрерывны. Рассмотрим локально малую категорию \mathcal{K} и в ней конус произведения



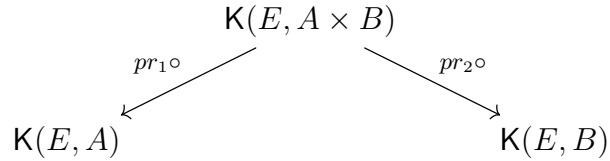
Возьмём некоторый объект E и нарисуем диаграмму



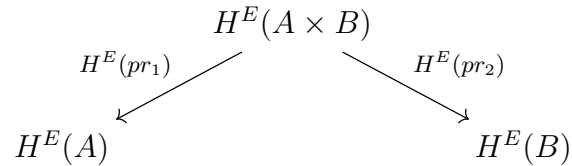
Мы видим, что есть изоморфизм в \mathbf{Set}

$$\mathcal{K}(E, A \times B) \cong \mathcal{K}(E, A) \times \mathcal{K}(E, B)$$

который по стрелке j выдаёт пару стрелок $(pr_1 \circ j, pr_2 \circ j)$ и поэтому следующая диаграмма является конусом произведения в \mathbf{Set}



и это есть в точности



Таким образом, функтор H^E перевёл конус произведения в \mathbf{K} в конус произведения в \mathbf{Set} . Рассмотрим теперь диаграмму уравнителя в \mathbf{K}

$$C \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

В силу следующей картинки

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \\ \uparrow \text{---} j & \nearrow k & \\ E & & \end{array}$$

есть взаимно однозначное соответствие между стрелками $j \in \mathbf{K}(E, C)$ и стрелками $k \in \mathbf{K}(E, A)$, для которых верно равенство $f \circ k = g \circ k$, это означает, что следующая диаграмма

$$\mathbf{K}(E, C) \xrightarrow{h \circ} \mathbf{K}(E, A) \begin{array}{c} \xrightarrow{f \circ} \\ \xrightarrow{g \circ} \end{array} \mathbf{K}(E, B)$$

будет диаграммой уравнителя в \mathbf{Set} .

Теорема 20.32. *Представимые ковариантные функторы непрерывны.*

Доказательство. Пусть дана локально малая категория \mathbf{K} . Возьмём произвольный объект $E \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ и покажем, что H^E непрерывен. Пусть дан граф Gr , диаграмма $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathbf{K}$ и её предельный конус A с набором стрелок p_V . Для каждого ребра $r: V \rightarrow U$ коммутативен треугольник

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ p_V \swarrow & & \searrow p_U \\ \mathcal{D}(V) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r)} & \mathcal{D}(U) \end{array}$$

Это означает равенство

$$p_U = \mathcal{D}(r) \circ p_V$$

Покажем, что $H^E(A)$ с набором стрелок $H^E(p_V)$ образуют предельный конус в \mathbf{Set} . Прежде всего, нарисуем этот конус

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{K}(E, A) & \\ p_V \circ & \swarrow & \searrow p_U \circ \\ \mathbb{K}(E, \mathcal{D}(V)) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r) \circ} & \mathbb{K}(E, \mathcal{D}(U)) \end{array}$$

Эти треугольники коммутативны, потому что для каждого $h \in \mathbb{K}(E, A)$

$$p_U \circ h = \mathcal{D}(r) \circ p_V \circ h$$

Предположим теперь, что есть другой конус в \mathbf{Set} в виде множества M и набора функций f_V , для которых коммутативны все треугольники

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(E, \mathcal{D}(V)) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r) \circ} & \mathbb{K}(E, \mathcal{D}(U)) \\ & \swarrow f_V & \nearrow f_U \\ & M & \end{array}$$

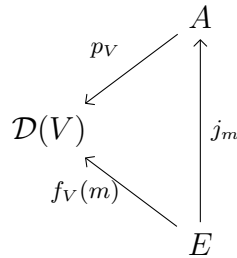
Это значит, для каждого $m \in M$ верно равенство

$$f_U(m) = \mathcal{D}(r) \circ f_V(m)$$

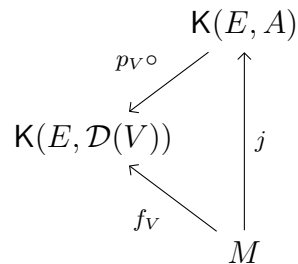
и мы получаем для каждого $m \in M$ коммутативный треугольник в \mathbb{K}

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(V) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r)} & \mathcal{D}(U) \\ & \swarrow f_V(m) & \nearrow f_U(m) \\ & E & \end{array}$$

Поскольку конус (A, p) предельный, для каждого $m \in M$ существует единственная стрелка $j_m \in \mathbb{K}(E, A)$, для которой коммутативны все такие треугольники



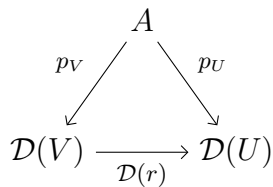
и мы получаем единственную стрелку $j: M \rightarrow \mathcal{K}(E, A)$, для которой коммутативны все треугольники в \mathbf{Set}



□

Теорема 20.33. *Функтор Йонеды $Y_{\mathcal{K}}$ непрерывен для любой малой категории \mathcal{K} .*

Доказательство. Пусть дана диаграмма $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathcal{K}$ и предельный конус



Применим к этому конусу функтор Йонеды $Y_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{K}^{op}}$

$$Y(A) = H_A$$

$$Y(f) = H_f$$

и получим конус в $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}^{\text{оп}}}$

$$\begin{array}{ccc} & H_A & \\ H_{p_V} \swarrow & & \searrow H_{p_U} \\ H_{\mathcal{D}(V)} & \xrightarrow{H_{\mathcal{D}(r)}} & H_{\mathcal{D}(U)} \end{array}$$

Чтобы доказать, что этот конус предельный, вспомним, что пределы в $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}^{\text{оп}}}$ строятся покомпонентно. Таким образом, достаточно доказать, что для любого $E \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ следующий конус будет пределом в \mathbf{Set}

$$\begin{array}{ccc} & H_A(E) & \\ H_{p_V}(E) \swarrow & & \searrow H_{p_U}(E) \\ H_{\mathcal{D}(V)}(E) & \xrightarrow{H_{\mathcal{D}(r)}(E)} & H_{\mathcal{D}(U)}(E) \end{array}$$

Вспомнив определения, перерисуем его так

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{K}(E, A) & \\ p_V \circ \swarrow & & \searrow p_U \circ \\ \mathbf{K}(E, \mathcal{D}(V)) & \xrightarrow{\mathcal{D}(r) \circ} & \mathbf{K}(E, \mathcal{D}(U)) \end{array}$$

и дальше так

$$\begin{array}{ccc} & H^E(A) & \\ H^E(p_V) \swarrow & & \searrow H^E(p_U) \\ H^E(\mathcal{D}(V)) & \xrightarrow{H^E(\mathcal{D}(r))} & H^E(\mathcal{D}(U)) \end{array}$$

и этот конус предельный в силу предыдущей теоремы (функторы вида H^E непрерывны).

□

20.4 Копределы

Для копределов всё, как для пределов, только наоборот.

Определение 20.34. Пусть дана диаграмма такого вида

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C$$

Объект A вместе со стрелкой $h: C \rightarrow A$ называется *коуравнителем* пары стрелок f, g , если коммутативна следующая диаграмма ($h \circ f = h \circ g$)

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \xrightarrow{h} A$$

и для любой коммутативной диаграммы того же вида, например

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \xrightarrow{k} E$$

существует единственная стрелка $j: A \rightarrow E$ такая, что

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \begin{array}{c} \xrightarrow{h} A \\ \searrow k \\ E \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \vdots \\ \downarrow j \end{array}$$

Иными словами, коуравнитель – это начальный объект в категории коммутативных диаграмм следующего вида

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \xrightarrow{k} E$$

с подходящими морфизмами.

Упражнение 20.35. Стрелка коуравнителя всегда является эпиморфизмом.

Пример 20.36. Рассмотрим диаграмму следующего вида

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C$$

Коконусом для этой диаграммы будет объект A и пара стрелок

$$k_1: B \rightarrow A$$

$$k_2: C \rightarrow A$$

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ k_1 \nearrow & & \nwarrow k_2 \\ B & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & C \end{array}$$

для которых выполнены равенства

$$k_2 \circ f = k_1$$

$$k_2 \circ g = k_1$$

Таким образом, коконус задаётся стрелкой k_2 , для которой

$$k_2 \circ f = k_2 \circ g$$

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \xrightarrow{k_2} A$$

а стрелка k_1 по ней определяется однозначно. Коуравнитель – это начальный объект в категории коконусов.

Пример 20.37. В Set коуравнители строятся так. Пусть дана диаграмма

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C$$

Мы хотим задать на множестве C такое отношение эквивалентности $c_1 \sim c_2$, что $f(b) \sim g(b)$ для всякого $b \in B$. Это отношение эквивалентности должно быть в некотором смысле „слабейшим“ отношением эквивалентности с таким свойством. Зададим между точками множества C такое отношение $c_1 R c_2$

$$c_1 R c_2 \Leftrightarrow \exists b \in B \{c_1 = f(b) \wedge c_2 = g(b)\}$$

„существует такое $b \in B$, что $c_1 = f(b)$ и $c_2 = g(b)$ “ Это отношение не симметрично, не рефлексивно и не транзитивно (в общем случае). Определим отношение $c_1 S c_2$ так

$$c_1 S c_2 \Leftrightarrow c_1 R c_2 \vee c_2 R c_1$$

это отношение уже симметрично. Определим отношение $c \sim c'$ так

$$c \sim c' \Leftrightarrow (c = c_1) \wedge (c_1 S \dots S c_n) \wedge (c_n = c')$$

для некоторой цепочки $c_1 \dots c_n$, где $n \geq 1$
 Это значит, что или $c = c'$, или

$$\text{или } c S c'$$

$$\text{или } c S c_2 \wedge c_2 S c'$$

$$\text{или } c S c_2 \wedge c_2 S c_3 \wedge c_3 S c'$$

и так далее. Это отношение рефлексивно, симметрично, транзитивно, обладает свойством $f(b) \sim g(b)$ и является наименьшим среди всех отношений эквивалентности с таким свойством.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \xrightarrow{h} A$$

где A – фактор-множество, полученное из C отождествлением эквивалентных точек $c_1 \sim c_2$ (или множество классов эквивалентности, если так понятнее). Это и будет диаграмма коуравнителя. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \xrightarrow{k} E$$

Это значит, что $k \circ f = k \circ g$, то есть

$$k(f(b)) = k(g(b)) \text{ для всякого } b \in B$$

Поскольку $f(b) \sim g(b)$, функция k переводит эквивалентные точки C в одну и ту же точку E , поэтому однозначно определена стрелка $j: A \rightarrow E$ такая, что

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \searrow k \\ \downarrow j \end{array} \begin{array}{c} A \\ \\ E \end{array}$$

Пример 20.38. Для диаграммы без стрелок

$$A \qquad B$$

начальным объектом в категории коконусов (копределом) будет копроизведение

$$\begin{array}{ccc} & A + B & \\ k_1 \nearrow & \vdots & \nwarrow k_2 \\ A & [g_1, g_2] & B \\ g_1 \searrow & \downarrow & \swarrow g_2 \\ & D & \end{array}$$

Упражнение 20.39. Дайте определение коконуса и копредела в общем случае.

Определение 20.40. Категория называется *кополной*, если в ней есть коуравнители всех пар стрелок (с одинаковыми началами и концами), а также копроизведения любых индексированных множеств объектов.

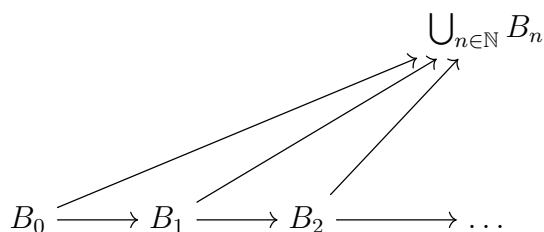
Упражнение 20.41. Все малые кополные категории являются категориями предпорядка.

Упражнение 20.42. В кополной категории есть копределы всех диаграмм.

Упражнение 20.43. Пусть дана возрастающая последовательность множеств

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$$

Копределом соответствующей диаграммы, составленной из мономорфизмов, будет объединение $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$



По сути, мы берём дизъюнктное объединение

$$B_0 + B_1 + B_2 + \dots$$

и отождествляем в нём точки, которые переходят друг в друга при движении по стрелкам.

Упражнение 20.44. Все копределы в $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$, где \mathbf{K} малая, строятся покомпонентно, отдельно для каждого $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{K})$

Упражнение 20.45. Левые сопряжённые функторы *конепрерывны* (сохраняют копределы).

Упражнение 20.46. Функторы H_D переводят копределы в \mathbf{K} в пределы в \mathbf{Set}

$$\mathbf{K}(A + B, D) \cong \mathbf{K}(A, D) \times \mathbf{K}(B, D)$$

Пример 20.47. Рассмотрим категорию $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$ над шкалой \mathbf{K}

$$\begin{array}{c} id_B \hookrightarrow B \\ \uparrow f \\ id_A \hookrightarrow A \end{array}$$

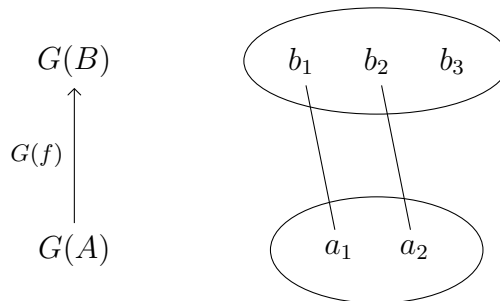
Функторы H^A и H^B выглядят так

$$\begin{array}{ccc} \{f\} & & \{id_B\} \\ f \circ \uparrow & & f \circ \uparrow \\ \{id_A\} & & \emptyset \end{array}$$

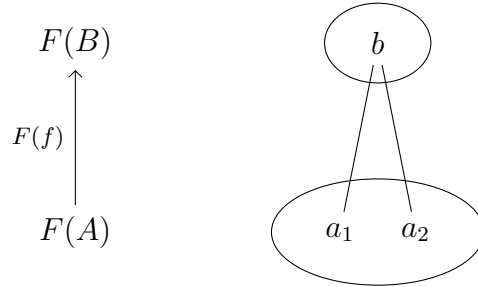
или с точностью до изоморфизма

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & & \{*\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \{*\} & & \emptyset \end{array}$$

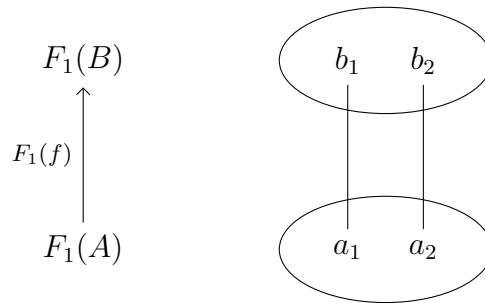
Покажем, что любой функтор из \mathbf{K} в \mathbf{Set} получается как копредел диаграммы, составленной из представимых функторов. Возьмём такой функтор $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$



Непосредственно видно, что $G \cong H^A + H^A + H^B$
Возьмём теперь такой функтор F



Он получается из следующего функтора $F_1 \cong H^A + H^A$



отождествлением b_1 и b_2 и его можно получить с помощью подходящего коуравнителя. Для этого рассмотрим две стрелки

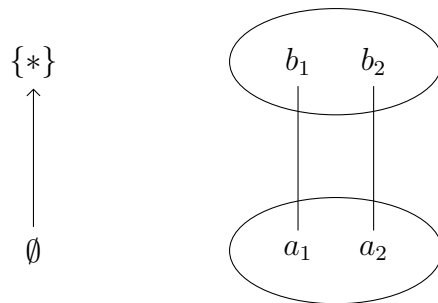
$$\tau: H^B \rightarrow F_1$$

$$\sigma: H^B \rightarrow F_1$$

определённые так

$$\tau_B(*) = b_1$$

$$\sigma_B(*) = b_2$$



и коуравнитель пары τ, σ даст нам F .

Теорема 20.48. *Любой функтор $F \in \text{Ob}(\text{Set}^{\mathbf{K}})$, где \mathbf{K} малая, является копределом диаграммы, составленной из представимых функторов.*

Доказательство. Возьмём граф Gr , вершинами которого являются элементы всех множеств $F(A)$ для всех $A \in \text{Ob}(\mathbf{K})$. Таким образом

$$\text{Ver}(Gr) = \Sigma_{A \in \text{Ob}(\mathbf{K})} F(A)$$

Далее, для каждой тройки (f, a, b) такой, что

$$f \in \text{Mor}(\mathbf{K}), f: A \rightarrow B$$

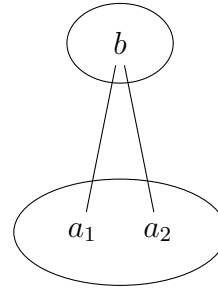
$$a \in F(A)$$

$$b \in F(B)$$

$$F(f)(a) = b$$

введём ребро $r_{f,b,a}: b \rightarrow a$ (заметьте направление)

Любой функтор из предыдущего примера, например

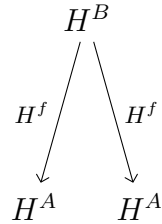


по существу и есть граф, в данном случае с тремя вершинами и двумя рёбрами, направленными вниз, которые можно назвать r_{f,b,a_1} и r_{f,b,a_2} (на самом деле нужны ещё три ребра в виде петель, соответствующие id_B и id_A , но они ни на что не влияют и без них можно обойтись). Теперь определим диаграмму $\mathcal{D}: Gr \rightarrow \text{Set}^{\mathbf{K}}$

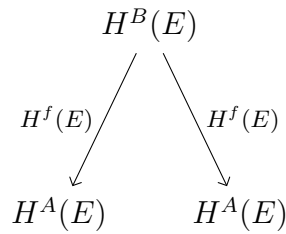
$$\mathcal{D}(a) = H^A$$

$$\mathcal{D}(r_{f,b,a}) = H^f: H^B \rightarrow H^A$$

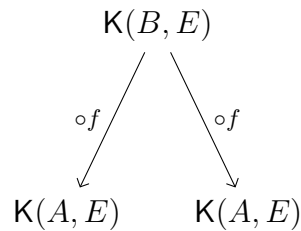
для нашего примера это будет



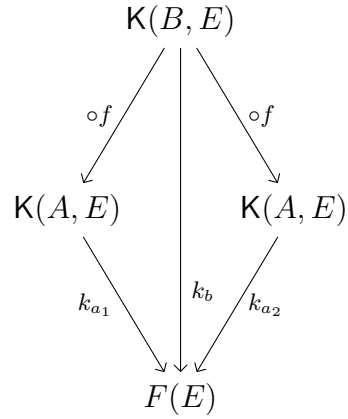
и в качестве её копредела получим функтор F , что мы и видели в предыдущем примере. Докажем это строго. Вспомним, что предел в $\mathbf{Set}^{\mathbf{K}}$ строится покомпонентно. Возьмём некоторый объект $E \in \mathbf{Ob}(\mathbf{K})$ и соответствующую диаграмму в \mathbf{Set} , в нашем примере E может быть равно A или B



или лучше так



Покажем, что копредельным коконусом (хи-хи) для этой диаграммы будет множество $F(E)$ вместе с набором стрелок k_{a_1}, k_b, k_{a_2}



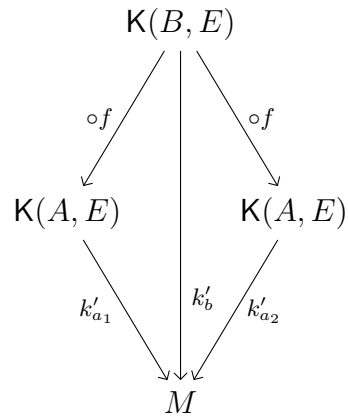
определённых так

$$k_{a_1}(h) = F(h)(a_1) \quad \text{где } h: A \rightarrow E$$

$$k_b(h) = F(h)(b) \quad \text{где } h: B \rightarrow E$$

$$k_{a_2}(h) = F(h)(a_2) \quad \text{где } h: A \rightarrow E$$

Действительно, возьмём произвольный коконус в виде множества M вместе с набором стрелок k'_{a_1}, k'_b, k'_{a_2}



для которых выполнено равенство

$$k'_{a_1}(h \circ f) = k'_b(h) = k'_{a_2}(h \circ f)$$

и построим единственную стрелку $j_E: F(E) \rightarrow M$, для которой

$$j_E \circ k_{a_1} = k'_{a_1}$$

$$j_E \circ k_b = k'_b$$

$$j_E \circ k_{a_2} = k'_{a_2}$$

Эта стрелка действует так

$$j_E(e) = k'_e(id_E) \text{ для любого } e \in F(E)$$

что предлагается проверить вычислением заинтересованным людям. Например, если $E = A$, стрелка $j_A: F(A) \rightarrow M$ действует так

$$j_A(a_1) = k'_{a_1}(id_A)$$

$$j_A(a_2) = k'_{a_2}(id_A)$$

а если $E = B$, стрелка $j_B: F(B) \rightarrow M$ действует так

$$j_B(b) = k'_b(id_B)$$

□

Глава 21

Теорема о сопряжённом функторе

Есть ли польза от теоремы о сопряжённом функторе — вопрос спорный. Джонстон называет её „фундаментально бесполезной“. Я скорее согласен с Джонстоном. Но это классика и я её изложу.

Пример 21.1. Рассмотрим два упорядоченных множества: множество K_1 всех фигур на плоскости и множество K_2 всех выпуклых фигур, а также вложение $K_2 \subseteq K_1$, которое мы будем обозначать как функтор $G: K_2 \rightarrow K_1$. Произвольные фигуры будем обозначать A, B , выпуклые фигуры X, Y, Z . Мы можем построить к функтору G левый сопряжённый $F: K_1 \rightarrow K_2$, положив

$$F(A) = \bigcap \{Z \mid A \subseteq Z\}$$

который выдаёт по фигуре A пересечение всех выпуклых фигур Z , содержащих A , то есть выпуклую оболочку A . Поскольку для функтора вложения $G(Z) = Z$, перепишем определение так

$$F(A) = \bigcap \{Z \mid A \subseteq G(Z)\}$$

Докажем, что F монотонна и $F \dashv G$, что означает

1. $\frac{A \subseteq B}{F(A) \subseteq F(B)}$
2. $F(A) \subseteq X$ если и только если $A \subseteq G(X)$

При доказательстве будем использовать только следующие факты:

1. Множество K_2 полное (в нём есть любые пересечения, пересечение любого семейства выпуклых фигур выпукло);
2. G монотонно;
3. G сохраняет любые пересечения.

Докажем монотонность F . Предположим, что $A \subseteq B$. Тогда из $B \subseteq G(Z)$ следует $A \subseteq G(Z)$, поэтому

$$\{Z \mid B \subseteq G(Z)\} \subseteq \{Z \mid A \subseteq G(Z)\}$$

поэтому

$$\bigcap \{Z \mid A \subseteq G(Z)\} \subseteq \bigcap \{Z \mid B \subseteq G(Z)\}$$

(чем больше фигур во множестве, тем меньше пересечение из всех) и это как раз и есть

$$F(A) \subseteq F(B)$$

Докажем сопряжённость. Из $F(A) = \bigcap \{Z \mid A \subseteq G(Z)\}$ по определению пересечения (как наибольшей нижней грани), имеем

$$F(A) \subseteq Z \text{ если } A \subseteq G(Z) \text{ (для любой выпуклой фигуры } Z)$$

$$F(A) \text{ наибольшая выпуклая фигура с таким свойством.}$$

Подставив X вместо Z , получаем, что из $A \subseteq G(X)$ следует $F(A) \subseteq X$. В обратную сторону, предположим, что $F(A) \subseteq X$ и докажем, что $A \subseteq G(X)$. Выпишем посылку

$$\bigcap \{Z \mid A \subseteq G(Z)\} \subseteq X$$

Применим к обеим частям функтор G и по монотонности получим

$$G(\bigcap \{Z \mid A \subseteq G(Z)\}) \subseteq G(X)$$

Вспомнив, что G сохраняет пересечения, перепишем левую часть так

$$\bigcap \{G(Z) \mid A \subseteq G(Z)\} \subseteq G(X)$$

В левой части стоит пересечение некоторого множества фигур, причём A меньше или равно любой из этих фигур (это фигуры вида $G(Z)$, для которых верно $A \subseteq G(Z)$). Поэтому A меньше или равно их пересечению

$$A \subseteq \bigcap \{G(Z) \mid A \subseteq G(Z)\} \subseteq G(X)$$

Получаем

$$A \subseteq G(X)$$

В данном примере доказательство могло бы быть заметно легче, поскольку $G(Z) = Z$, но мы хотим примерно такого обобщения: пусть даны категории \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , а также функтор $G: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_1$. Пусть также категория \mathbf{K}_2 полная, а функтор G непрерывный (сохраняет пределы). Тогда к G есть левый сопряжённый $F: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$. К сожалению, в такой форме это неверно. Напомню, что полная категория, не являющаяся категорией предпорядка, обязана быть „большой“. Поэтому мы не сможем определить аналог $\bigcap \{Z \mid A \subseteq G(Z)\}$, это будет как бы „произведение всех объектов \mathbf{K}_2 с некоторым свойством“, а всех объектов \mathbf{K}_2 очень много и произведение взять нельзя, даже имея полноту. Например, мы не можем взять произведение всех множеств в \mathbf{Set} (ну, непустых), хотя \mathbf{Set} полная. В результате, чтобы доказать существование сопряжённого функтора, приходится добавлять ещё некоторые, довольно неуклюжие условия.

Определение 21.2. Пусть дан функтор $G: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_1$ и объект $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$. Обозначим через $A \downarrow G$ категорию запятой, объектами которой являются стрелки вида $g: A \rightarrow G(X)$, а морфизмом между объектами $g_1: A \rightarrow G(X)$ и $g_2: A \rightarrow G(Y)$ будет любая стрелка $h: X \rightarrow Y$, для которой $G(h) \circ g_1 = g_2$

$$\begin{array}{ccc} & & G(X) \\ & \nearrow^{g_1} & \downarrow G(h) \\ A & & G(Y) \\ & \searrow_{g_2} & \end{array}$$

Говоря точнее, объектами являются пары (g, X) , где $g: A \rightarrow G(X)$, иначе по объекту нельзя будет восстановить X , а он нам нужен.

Теорема 21.3. Если категория \mathbf{K}_2 полная, а функтор $G: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_1$ непрерывный, то и категория $A \downarrow G$ полная.

Доказательство. Возьмём некоторую диаграмму $\mathcal{D}: Gr \rightarrow (A \downarrow G)$ в категории $A \downarrow G$. Каждой вершине графа $V \in \text{Ver}(Gr)$ соответствует некоторый объект $\mathcal{D}(V)$ и это стрелка вида $g_V: A \rightarrow G(X_V)$ в \mathbf{K}_1 . Каждому ребру графа $r: V \rightarrow U$ соответствует некоторая стрелка $h_r: X_V \rightarrow X_U$ в \mathbf{K}_1 .

$$\begin{array}{ccc} G(X_V) & \xrightarrow{G(h_r)} & G(X_U) \\ & \swarrow g_V \quad \searrow g_U & \\ & A & \end{array}$$

Треугольник изображает объекты $\mathcal{D}(V)$ и $\mathcal{D}(U)$ и стрелку $\mathcal{D}(r)$ между ними. Покажем, как строить предел этой диаграммы.

Возьмём диаграмму в \mathbf{K}_2 , построенную из объектов X_V и стрелок h_r , построим её предел, он и даст нам предел в $A \downarrow G$. Говоря строже, определим функтор $H: (A \downarrow G) \rightarrow \mathbf{K}_2$ („проекция категории запятой“)

$$H(g) = X \text{ если } g: A \rightarrow G(X)$$

$$H(h) = h$$

По диаграмме $\mathcal{D}: Gr \rightarrow (A \downarrow G)$ мы строим диаграмму $H \circ \mathcal{D}: Gr \rightarrow \mathbf{K}_2$, берём её предел и он однозначно определяет предел диаграммы \mathcal{D} , что мы сейчас и проверим.

Пусть предельный конус для $H \circ \mathcal{D}$ состоит из объекта X и набора стрелок $p_V: X \rightarrow X_V$

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ p_V \swarrow & & \searrow p_U \\ X_V & \xrightarrow{h_r} & X_U \end{array}$$

Применим функтор G и получим предельный конус в \mathbf{K}_1 , поскольку G непрерывен

$$\begin{array}{ccc}
 & G(X) & \\
 G(p_V) \swarrow & & \searrow G(p_U) \\
 G(X_V) & \xrightarrow{G(h_r)} & G(X_U)
 \end{array}$$

Пририсовем снизу стрелки $g_V: A \rightarrow G(X_V)$ и получим ещё один конус

$$\begin{array}{ccc}
 & G(X) & \\
 G(p_V) \swarrow & & \searrow G(p_U) \\
 G(X_V) & \xrightarrow{G(h_r)} & G(X_U) \\
 \swarrow g_V & & \nearrow g_U \\
 & A &
 \end{array}$$

Далее, существует единственная стрелка $j: A \rightarrow G(X)$, делающая коммутативными все такие треугольники

$$\begin{array}{ccc}
 & G(X) & \\
 G(p_V) \swarrow & & \uparrow j \\
 G(X_V) & & A \\
 \swarrow g_V & & \uparrow
 \end{array}$$

И вот эта стрелка $j: A \rightarrow G(X)$, если воспринимать её как объект категории $A \downarrow G$, является пределом диаграммы \mathcal{D} , а треугольник, нарисованный выше – это фрагмент предельного конуса в $A \downarrow G$. Детали предлагаю проверить заинтересованным людям в качестве упражнения.

□

Далее, план действий такой. Если $F \dashv G$, то стрелка $\eta_A: A \rightarrow G(F(A))$ является начальным объектом в категории $A \downarrow G$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta^A} & G(F(A)) & & F(A) \\
 & \searrow g & \downarrow G(f) & & \downarrow f \\
 & & G(X) & & X
 \end{array}$$

Пусть $G: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_1$, категория \mathbf{K}_2 полная и функтор G непрерывный. Чтобы построить левый сопряжённый функтор F , надо для каждого $A \in \text{Ob}(\mathbf{K}_1)$ построить начальный объект в категории $A \downarrow G$. Категория $A \downarrow G$ полная в силу предыдущей теоремы. Возьмём „диаграмму“, построенную из всех объектов $A \downarrow G$ и всех стрелок между ними, возьмём предел этой диаграммы и он, наверное, будет начальным объектом в $A \downarrow G$. Этот предел – аналог $\bigcap \{Z \mid A \subseteq G(Z)\}$ из первого примера в этом разделе (где мы брали в качестве \mathbf{K}_2 малую полную категорию предпорядка). К сожалению, в общем случае это не проходит, потому что категория $A \downarrow G$ получается „большая“ и предел соответствующей „большой диаграммы“ существовать не обязан. Нужны дополнительные ограничения типа „существования малого базиса“. Докажем сначала некоторую трудную лемму.

Определение 21.4. Пусть I – некоторое множество индексов. Индексированное множество объектов $\{A_i \mid i \in I\}$ некоторой категории \mathbf{K} называется *слабо начальным*, если для любого $B \in \text{Ob}(\mathbf{K})$ при некотором i существует стрелка $f: A_i \rightarrow B$.

Теорема 21.5. Пусть \mathbf{K} – локально малая полная категория, в которой есть слабо начальное множество. Тогда в \mathbf{K} есть начальный объект.

Доказательство. Обозначим слабо начальное множество $\{A_i \mid i \in I\}$. Возьмём произведение всех объектов A_i , оно существует в силу полноты категории \mathbf{K}

$$A = \prod_{i \in I} A_i$$

Для любого объекта B есть стрелка из A в B (объект A с таким свойством называется *слабым начальным объектом*). Действительно, для некоторого $i \in I$ должна существовать стрелка $f: A_i \rightarrow B$, поэтому $f \circ pr_i: A \rightarrow B$. Однако, стрелка из A в B может быть не единственной.

Выделим из A подобъект с помощью подходящего уравнивателя и получим начальный объект. А именно, выделим такой подобъект $C \twoheadrightarrow A$, который уравнивает все стрелки вида $h: A \rightarrow A$ с id_A . Иными словами, мы хотим, чтобы все диаграммы такого вида были коммутативны

$$C \twoheadrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{id_A} \\ \xrightarrow{h} \end{array} A$$

Заметим, что на подобъекте C любые две стрелки $h_1, h_2: A \rightarrow A$ будут равны (потому что обе равны id_A)

$$C \twoheadrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{h_1} \\ \xrightarrow{h_2} \end{array} A$$

С этой целью мы нарисуем диаграмму, состоящую из одного объекта A и всех стрелок из A в A (одна вершина и сколько-то петель). Если, допустим, есть всего две стрелки $h_1, h_2: A \rightarrow A$, то эта диаграмма выглядит так

$$h_1 \curvearrowright A \curvearrowleft h_2$$

(конечно, одна из стрелок должна быть равна id_A). Теперь построим предел этой диаграммы, он и будет желанным уравнивателем. Произведение всех объектов на этой диаграмме – это просто A . Возьмём произведение $\prod_{h \in K(A,A)} A$ всех концов стрелок на диаграмме, оно составлено из одинаковых множителей A , а количество их равно количеству стрелок из A в A (их не очень много в силу локальной малости K). Если, допустим, есть всего две стрелки $h_1, h_2: A \rightarrow A$, то это будет множество $A \times A$. Определим теперь две стрелки

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \prod_{h \in K(A,A)} A$$

уравнитель которых и будет пределом.

$$f = \langle id_A \rangle_{h \in K(A,A)}$$

$$g = \langle h \rangle_{h \in K(A,A)}$$

Если, допустим, есть всего две стрелки $h_1, h_2: A \rightarrow A$, то $f, g: A \rightarrow A \times A$ будут такие

$$f = \langle id_A, id_A \rangle$$

$$g = \langle h_1, h_2 \rangle$$

Возьмём, наконец, уравнитель

$$C \xrightarrow{\square} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \Pi_{h \in K(A,A)} A$$

это подобъект A , на котором все $h: A \rightarrow A$ равны id_A , поэтому коммутативны все диаграммы вида

$$C \xrightarrow{\square} A \begin{array}{c} \xrightarrow{id_A} \\ \xrightarrow{h} \end{array} A$$

Докажем теперь такой результат: если есть стрелка вида $h: D \rightarrow C$ (объект D произвольный), то к ней есть правая обратная $h': C \rightarrow D$

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ h' \nearrow & & \searrow h \\ C & \xrightarrow{id_C} & C \end{array}$$

что значит $h \circ h' = id_C$. Чтобы доказать наличие правой обратной, выпишем такую последовательность стрелок

$$A \xrightarrow{f} D \xrightarrow{h} C \xrightarrow{\square} A$$

где f произвольная стрелка из A в D , которая существует в силу слабой начальности A .

Мы имеем стрелку $\square \circ h \circ f: A \rightarrow A$. Далее, коммутативна следующая диаграмма

$$C \xrightarrow{\square} A \begin{array}{c} \xrightarrow{id_A} \\ \xrightarrow{\square \circ h \circ f} \end{array} A$$

Соответствующее равенство выглядит так

$$\square \circ h \circ f \circ \square = id_A \circ \square$$

$$\square \circ h \circ f \circ \square = \square$$

$$\square \circ h \circ f \circ \square = \square \circ id_C$$

Поскольку \square мономорфизм (как стрелка уравнителя), сокращаем на него слева и получаем

$$h \circ f \circ \square = id_C$$

и мы получили правую обратную $h' = f \circ \square$

Докажем, наконец, что C является начальным объектом. Это значит, то для любого B должна быть единственная стрелка из C в B . Для любого B есть стрелка из C в B (в силу слабой начальности A должна быть стрелка $f: A \rightarrow B$, поэтому $f \circ \square: C \rightarrow B$)

Осталось доказать, что для любого объекта B есть не больше одной стрелки из C в B . Предположим, что есть две стрелки $f_1, f_2: C \rightarrow B$ и докажем, что они равны между собой. Возьмём их уравнитель

$$D \xrightarrow{h} C \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{array} B$$

выполнено равенство

$$f_1 \circ h = f_2 \circ h$$

Пририсует правую обратную

$$C \xrightarrow{h'} D \xrightarrow{h} C \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{array} B$$

и получим

$$f_1 \circ h \circ h' = f_2 \circ h \circ h'$$

$$f_1 \circ id_C = f_2 \circ id_C$$

$$f_1 = f_2$$

□

Замечание 21.6. Можно строить начальный объект немного иначе. Возьмём диаграмму, составленную из всех объектов слабо начального множества $\{A_i \mid i \in I\}$ и всех стрелок между ними, предел этой диаграммы будет начальным объектом.

Теорема 21.7. Пусть дан функтор $G: \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_1$, причём категория \mathbf{K}_2 полная и локально малая, а функтор G непрерывный. Пусть также выполнено такое условие: для каждого объекта $A \in \mathbf{K}_1$ существует множество I и индексированное им семейство стрелок $g_i: A \rightarrow G(X_i)$ такое, что каждая стрелка вида $g: A \rightarrow G(X)$ может быть представлена как композиция $g = G(h) \circ g_i$ для некоторой стрелки $h: X_i \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} & & G(X_i) \\ & \nearrow^{g_i} & \downarrow G(h) \\ A & & G(X) \\ & \searrow_g & \end{array}$$

Тогда к функтору G есть левый сопряжённый $F \dashv G$

Доказательство. Это множество стрелок $\{g_i \mid i \in I\}$ есть не что иное, как слабо начальное множество объектов в категории $A \downarrow G$. Категория $A \downarrow G$ локально малая (потому что \mathbf{K}_2 локально малая) и полная в силу теоремы 21.3. Поэтому в ней существует начальный объект в силу теоремы 21.5 и это будет стрелка $\eta_A: A \rightarrow G(F(A))$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) & & F(A) \\ & \searrow_g & \downarrow G(f) & & \downarrow f \\ & & G(X) & & X \end{array}$$

□

Примеры у Маклейна, потому что автор устал.

Заключение

Первоначальный замысел был „написать популярную брошюру страниц на сто, чтобы не отпугнуть объёмом“. Я её даже написал (первая версия учебника), но она никому не понравилась и пришлось браться гораздо основательнее, выписывая доказательства. Одной из проблем была терминология. Русская терминология теории категорий вообще придумана сгоряча (все эти „оттягивания“, „расщепимые морфизмы“ и т.д.) При всём уважении к переводчику книги Маклейна, не следовало называть элементы „членами объектов“. Я позволил себе назвать стрелку $f \times g$ просто „произведением“, как её называют по-английски. Строгие функторы давно уже никто не зовёт „унивалентными“, тем более, что это слово теперь популярно в другом смысле (так называемые „унивалентные основания математики“, один из вариантов теории типов). Лично я также предпочёл бы говорить „последовательное произведение“ (как говорят топологи), а не „расслоённое“, но это, возможно, дело вкуса. Заключительная мысль: теория категорий не является древним знанием, смысл которого утрачен – это живая и тёплая наука.

Замеченные ошибки

1) В примере 17.7 было написано:

Естественность этого изоморфизма выражается диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 D & F(D) & \xrightarrow{\cong} & H^0(D) \\
 f \uparrow & F(f) \uparrow & & \uparrow H^0(f) \\
 C & F(C) & \xrightarrow{\cong} & H^0(C)
 \end{array}$$

На самом деле диаграмма такая

$$\begin{array}{ccc}
 D & F(D) & \xrightarrow{\cong} & H_1(D) \\
 f \uparrow & F(f) \downarrow & & \downarrow H_1(f) \\
 C & F(C) & \xrightarrow{\cong} & H_1(C)
 \end{array}$$

Это потому, что я хотел начать с ковариантной леммы Йонеды, потом передумал и начал с контравариантной, а диаграмму не заменил.

2) В примере 17.56 было написано:

Условие $f \circ f = f$ означает, что $f(f(x)) = x$ для любого $x \in M$.

На самом деле, конечно:

Условие $f \circ f = f$ означает, что $f(f(x)) = f(x)$ для любого $x \in M$.

3) В упражнении 18.23 две разных стрелки на диаграмме были названы буквой h .

4) В примере 18.46 зачем-то заключал пустое множество в фигурные скобки. Например, рисовал так

$$\begin{array}{cc}
 \{\emptyset\} & \{id_B\} \\
 \uparrow & \uparrow \\
 \{\emptyset\} & \{\emptyset\}
 \end{array}$$

Тогда как нужно было так

$$\begin{array}{cc}
 \emptyset & \{id_B\} \\
 \uparrow & \uparrow \\
 \emptyset & \emptyset
 \end{array}$$

5) Поправил две битые ссылки – в самом конце главы 2 (потому что пометил две разные ссылки `\label{freyd}`) и в самом конце главы 10 (там скопировал пример целиком вместе с меткой, получилось две одинаковых метки).

6) Кажется, пару мелких опечаток поправил по ходу дела. Если где-то было непонятно, посмотрите ещё раз – может, это была опечатка.

Предметный указатель

- Faithful functor, 15
- Inflation, 210
- Modus ponens, 137, 138
- Pullback, 253
- Well-powered category, 270
- Аксиоматика
 - бидеккартово замкнутых категорий, 161
 - декартово замкнутых категорий, 108
- Алгебра
 - Гейтинга, 170
 - монады, 317
 - свободная, 317
- Ассоциативность композиции, 2
- Атомарная формула, 135
- Атомарное высказывание, 135
- База расслоения, 284
- Бидеккартово замкнутая категория, 160
- свободная, 163
- Выводимое правило, 147
- Вложение
 - Йонеды, 228
 - категорий, 190
- Вынуждение, 173
- Высказывание, 135
- атомарное, 135
- Галуа соответствие, 84
- Гейтинга алгебра, 170
- Гипотеза, 137
 - закрывающаяся, 138, 141
 - секвенции, 150
- Гомоморфизм
 - алгебр, 317
 - графов, 33
 - M -множеств, 31
 - полугрупп с единицей, 12
- Двоеточие
 - дискретное, 189
 - связное, 189
- Двойственная категория, 41
- Действие полугруппы, 30
- Декартов квадрат, 252
 - в \mathbf{Set}^K , 268
- Декартово замкнутая категория, 97
- Диаграмма, 19
 - коммутативная, 19, 178
 - малая, 368
 - путь в диаграмме, 19
- Дизъюнкция, 135
- Дискретная категория, 51
- Доказательство от противного, 148
- Допущение, 137

закрытое, 138, 141
 секвенции, 150
 Единица сопряжения, 88
 Естественное преобразование,
 23
 композиция, 24
 обратное, 25
 тождественное, 23
 Естественный изоморфизм, 25
 Забывающий функтор, 16
 Заключение секвенции, 150
 Закон
 двойного отрицания, 148
 исключённого третьего, 148
 Закрытая
 гипотеза, 138, 141
 посылка, 138, 141
 Закрытое допущение, 138, 141
 Замкнутая формула, 281
 Значения истинности, 272
 Изоморфизм, 6
 естественный, 25
 естественный по A , 65
 категорий, 13
 Импликация, 135
 Интерпретация
 исчисления высказываний,
 167
 Истина, 135, 195, 272
 Истинная формула, 167
 Исчисление
 высказываний, 142, 151, 154
 интерпретация, 167
 классическое, 148
 специальная форма, 154
 натурального вывода, 136,
 142
 секвенций, 151
 Итерация, 114
 Йонеды
 вложение, 228
 лемма
 контравариантная, 221
 ковариантная, 233
 функтор, 228
 Канонический подобъект, 188
 Категория, 1, 9
 Клейсли, 306
 Эйленберга-Мура, 318
 бидеклартово замкнутая, 160
 графов, 33
 групп, 15
 двойственная, 41
 декартово замкнутая, 97,
 107
 дискретная, 51
 другое определение, 9
 запятой, 391
 конкретная, 16
 конкретная над, 85
 кополная, 380
 локально малая, 3
 малая, 3
 малых категорий, 13
 множеств, 2
 относительная, 283
 полная, 360
 предпорядка, 5
 раздувание, 210
 с декартовыми квадратами,
 254
 с конечными
 произведениями, 71
 с произведениями пар
 объектов, 66
 с уравнителями, 248

свободная, 85, 163
 свободно порождённая
 графом, 85
 скелетная, 209
 функторов, 24
 частично упорядоченных
 множеств, 189
 well-powered, 270
 Классификатор подобъектов,
 272
 в Set^K , 277
 Классифицирующая стрелка,
 272
 Классифицирующий объект,
 272
 Клейсли
 категория, 306
 конструкция, 329
 Ковариантный функтор, 44
 Коединица сопряжения, 88
 Коидеал, 171
 Коконус, 78, 378, 380
 Коммутативная диаграмма, 19,
 178
 Композиция
 естественных
 преобразований, 24
 морфизмов, 1
 отношений, 308
 стрелок, 1
 функторов, 12
 Конепрерывный функтор, 381
 Конец
 морфизма, 1
 стрелки, 1
 Конкретная категория, 16
 Конструкция
 Клейсли, 329
 Эйленберга-Мура, 329
 Контекст секвенции, 150
 Контравариантный функтор, 45
 Конус, 67, 354
 с основанием \mathcal{D} , 362
 Конъюнкция, 135
 Кополная категория, 380
 Копредел, 380
 в Set^K , 381
 Копроекции, 73
 Копроизведение, 73
 категорий, 75
 семейства объектов, 78
 стрелок, 76
 функторов в Set^K , 77
 Коуравнитель, 377
 Крипке модели, 176
 Кэли теорема, 17
 Лемма
 Йонеды
 контравариантная, 221
 ковариантная, 233
 о квадратах, 262
 Логические связки, 135
 Ложь, 135, 195
 Локально малая категория, 3
 Малая
 диаграмма, 368
 категория, 3
 Множество
 M -множество, 30
 значений истинности, 195
 предупорядоченное, 4
 разделяющее, 184
 в Set^K , 238
 слабо начальное, 394
 частично упорядоченное, 5
 Модели

Крипке, 176
 Скотта, 352
 Монада, 303, 314
 Мономорфизм, 177
 в Set^K , 239
 обратимый слева, 179
 регулярный, 249
 Морфизм, 1
 единичный, 2
 изоморфизм, 6
 классифицирующий, 272
 коконусов, 78
 композиция, 1
 конец, 1
 конусов, 67, 354, 362
 начало, 1
 обратимый слева, 179
 обратимый справа, 196
 обратный, 6
 пропускается через, 188
 тождественный, 2
 характеристический, 272
 Натуральный вывод, 136
 Начало
 морфизма, 1
 стрелки, 1
 Начальный объект, 42
 в Set^K , 42
 Непрерывный функтор, 369
 Объединение, 75
 Объект, 1
 изоморфные объекты, 6
 классифицирующий, 272
 в Set^K , 277
 начальный, 42
 натуральных чисел, 113
 представляющий, 219, 231
 разделяющий, 182
 слабый начальный, 394
 терминальный, 35
 точки, 37
 тождество, 2
 элементы, 37
 Обратимая слева стрелка, 179
 Обратимая справа стрелка, 196
 Обратная стрелка, 6
 Обратный
 морфизм, 6
 функтор, 13
 Обратное естественное
 преобразование, 25
 Оператор замыкания, 297
 Основной представимый
 функтор
 контравариантный, 219
 ковариантный, 231
 Относительная категория, 283
 Относительное
 псевдодополнение, 170
 Отношение
 вынуждения, 173
 предпорядка, 4
 частичного порядка, 5
 Отображение вычисления, 96
 Отрицание, 135
 Оценка, 170
 Пересечение, 51
 подобъектов, 267
 Подкатегория, 190
 полная, 192
 Подобъект, 188
 канонический, 188
 Подъём стрелки, 253
 Полная
 категория, 360
 подкатегория, 192

решётка, 361
 Полный функтор, 192
 Полугруппа с единицей, 4
 гомоморфизм, 12
 действие, 30
 Посылка, 137
 закрытая, 138, 141
 секвенции, 150
 Послойное произведение, 288
 Правило
 вывода, 136
 cut, 154
 elimination, 136
 introduction, 136
 Modus ponens, 138
 weak, 151
 выводимое, 147
 ослабления, 150
 приведения к абсурду, 143
 разбора случаев, 143
 сечения, 155
 Правильно построенный терм,
 163
 Предел диаграммы, 354, 362
 в Set^K , 365
 Предпорядок, 4
 Представимый функтор
 контравариантный, 219
 ковариантный, 231
 Представление
 функтора, 219, 231
 Представляющий объект, 219,
 231
 Примитивная рекурсия, 129
 Принцип двойственности, 43, 44
 Проекция, 47
 Произведение, 47
 групп, 49
 категорий, 50
 послойное, 288
 семейства объектов, 67
 стрелок, 53
 функторов в Set^K , 54
 Пространство расслоения, 284
 Протоморфизм, 9
 Протострелка, 9
 Путь в диаграмме, 19
 Равносильность, 135
 Разделяющее множество, 184
 в Set^K , 238
 Разделяющий объект, 182
 Раздувание, 210
 Расслоение, 284
 Расслоённое произведение, 288
 Регулярный мономорфизм, 249
 Ретракция, 196
 Свойства тождества, 2
 Свободная
 алгебра, 317
 категория, 85
 Свободная бидеккартово
 замкнутая категория,
 163
 Секвенция, 150
 гипотеза, 150
 допущение, 150
 заключение, 150
 контекст, 150
 посылка, 150
 Сечение расслоения, 286
 Скелет категории, 209
 Скелетная категория, 209
 Скотта модели, 352
 Слабо начальное множество,
 394
 Слабый начальный объект, 394

Сложение, 125
 Слой, 284
 Соответствие Галуа, 84
 Сопряжённость функторов, 81,
 90, 94, 105
 Стирающий функтор, 16
 Стрелка, 1
 единичная, 2
 изоморфизм, 6
 классифицирующая, 272
 композиция, 1
 конец, 1
 мономорфная, 177
 начало, 1
 обратимая слева, 179
 обратимая справа, 196
 обратная, 6
 предшествования, 117
 пропускается через, 188
 тождественная, 2
 характеристическая, 195,
 272
 эпиморфная, 195
 Строгий функтор, 15
 Схема аксиом, 148
 Теорема
 Бека, 319, 337
 Кэли, 17
 о неподвижной точке, 339
 о примитивной рекурсии,
 129
 о сопряжённом функторе,
 398
 Теория типов, 292
 Терм, 163
 правильно построенный, 163
 Терминальный объект, 35
 в Set^K , 36
 Тождественная стрелка, 2
 Тождественное естественное
 преобразование, 23
 Тождественный
 морфизм, 2
 функтор, 12
 Тождество, 2
 Топос, 27, 276
 Точки, 37
 Умножение, 132
 Уравнитель, 247
 в Set^K , 250
 Факторобъект, 198
 Формула, 135
 атомарная, 135
 замкнутая, 281
 истинная при
 интерпретации, 167
 Функтор, 11
 Йонеды, 228
 забывающий, 16
 ковариантный, 44
 композиция, 12
 конепрерывный, 381
 контравариантный, 45
 левый сопряжённый, 82
 непрерывный, 369
 обратный, 13
 основной представимый,
 219, 231
 отражающий изоморфизмы,
 193
 отражающий
 мономорфизмы, 180
 отражающий эпиморфизмы,
 197
 полный, 192
 правый сопряжённый, 82

представимый, 219, 231
с представительным
образом, 206
сопряжённый, 81
стирающий, 16
строгий, 15
тождественный, 12
эквивалентности, 206
Sub, 266
Частичный порядок, 5
Шкала, 27
 коидеал, 171
Характеристическая стрелка,
 195, 272
Эйленберга-Мура
 категория, 318
 конструкция, 329
Эквивалентность
 категорий, 206, 211
 логическая, 135
Экспонента, 96
 в Set^K , 243
Элементы, 37
 в Set^K , 38
Эпиморфизм, 195
 обратимый справа, 196

Указатель обозначений

$dom(f)$	1	$K_2^{K_1}$	24
$cod(f)$	1	τ^{-1}	25
$f: A \rightarrow B$	1	$F \cong G$	25
$A \xrightarrow{f} B$	1	Set^K	27
$g \circ f$	2	$Grph$	33
id_A	2	1	36
1_A	2	$!_B$	36
Set	2	K^{op}	41
$Ob(K)$	3	0	43
$Mor(K)$	3	\square_B	43
$K(A, B)$	3	F^{op}	44
$Hom_K(A, B)$	3	$A \times B$	48
$A \lesssim B$	4	pr_1	48
$A \leq B$	5	pr_2	48
f^{-1}	6	$\langle g_1, g_2 \rangle$	48
$A \cong B$	6	$K_1 \times K_2$	50
$F: K_1 \rightarrow K_2$	11	$A \sqcap B$	51
$K_1 \xrightarrow{F} K_2$	11	$f \times g$	53
Id_K	12	$F \times G$	54
$G \circ F$	12	$\prod_{i \in I} A_i$	68
Cat	13	pr_i	68
F^{-1}	13	$\langle g_i \rangle_{i \in I}$	68
$K_1 \cong K_2$	13	$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$	68
Grp	15	$\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$	68
$\tau: F \rightarrow G$	23	$A + B$	74
$F \xrightarrow{\tau} G$	23	k_1	74
id_F	23	k_2	74
$\sigma \circ \tau$	24	$[g_1, g_2]$	74

$A \sqcup B$	75	f^A	122
$K_1 + K_2$	75	$+$	125
$f + g$	76	\times	132
$F + G$	77	\top	135
$\sum_{i \in I} A_i$	78	\perp	135
k_i	78	\wedge	135
$[g_i]_{i \in I}$	78	\vee	135
$A_1 + A_2 + \dots + A_n$	78	\Rightarrow	135
$[g_1, g_2, \dots, g_n]$	78	\neg	135
$F \dashv G$	81	\Leftrightarrow	135
Φ	81	$\wedge I$	136
Γ	81	$\wedge E$	136
\exists_f	84	$\Rightarrow I$	137
f^*	84	$\Rightarrow E$	137
η_A	87	MP	137
ε_A	87	\Leftrightarrow	147
η	88	$\neg\neg E$	148
ε	88	$\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$	150
B^A	96	$\vdash \beta$	150
ev	96	$\Gamma \vdash \beta$	150
Λ	96	BiCCC	162
$(-) \times A$	97	$A \Vdash P$	173
$(-)^A$	97	$A \Vdash \alpha$	174
\forall_f	100	$f: A \multimap B$	177
N	113	$g \lesssim f$	186
0	113	$f \simeq g$	186
S	113	$[f]$	188
\mathbb{N}	113	Sub(A)	188
p	117	$[f] \subseteq [g]$	188
0_A	120	Poset	189
$\ulcorner g \urcorner$	122	Ω	195

$f: A \rightarrow B$	195	$\text{Ver}(Gr)$	361
$\text{Hom}_{\mathbf{K}}$	215	$\text{Ar}(Gr)$	361
H_A	217	\mathcal{D}	362
$\text{Nat}(F, G)$	221	$A \downarrow G$	391
H_f	224		
$Y_{\mathbf{K}}$	228		
H^A	230		
H^f	234		
h^*	259, 289		
$\text{Sub}(h)$	266		
Ω	272		
$\top: 1 \rightarrow \Omega$	272		
χ_f	272		
\forall	281		
\exists	281		
\mathbf{K}/A	283		
Set^A	284		
$B \times_A C$	288		
Σ_A	288		
Σ_h	288		
Π_h	291		
$x \in A \vdash B(x) : \text{Type}$	292		
$x \in A \vdash g(x) : B(x)$	292		
T	297		
(T, η, Ψ)	303		
$g * f$	306		
\mathbf{K}_T	306		
$T(h)$	311		
(T, η, μ)	314		
\mathbf{K}^T	318		
ωPoset	340		