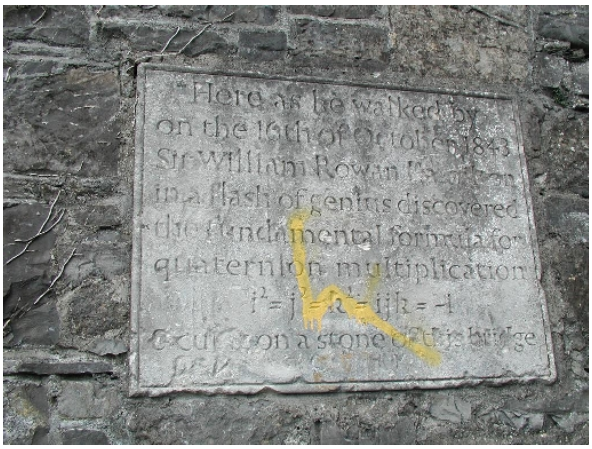
Листок 11*

Кватернионы: арифметика и геометрия. Теорема Гурвица.



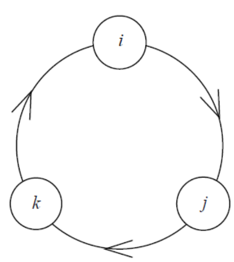
«Одним туманным вечером по пути из Тринити-колледжа в Дублине Гамильтон прибег к помощи алкогольных паров. Это и привело его к замечательной теореме, которую мы изложим ниже (и которую он пытался перед этим найти много лет). Говорят, что он был так поражен октрытой им формулой, что сейчас же вырезал ее перочиным ножиком на перилах деревянного мостика через канал, по которому он в это время шел. Но я, хоть и искал эту надпись, вырезанную тогда Гамильтоном, не нашел ее на этом мостике».[1]

1. Арифметика кватернионов

Напомним, что **кватернион** — это вектор 4-мерного векторного пространства над $\mathbb{R}$ с базисом $1,\ i,\ j,\ k$:

$$q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Помимо структуры векторного пространства, на кватернионах имеется структура **алгебры** над полем $\mathbb{R}$: их можно умножать, при этом $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, а умножение базисных кватернионов друг на друга проще всего запомнить с помощью следующего мнемонического правила:



Эта картинка значит следующее: $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ (идем по часовой стрелке). Если идти против часовой стрелки, знак меняется: $ji = -k$, $ik = -j$, $kj = -i$. Такая таблица умножения полностью определяет умножение в алгебре кватернионов. Алгебра кватернионов обозначается $\mathbb{H}$.

[1] *В. И. Арнольд, Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов.* На самом деле, как следует из писем Уильяма Гамильтона, 16 октября 1843 г. он действительно вырезал формулу $ijk = -1$ на перилах Брукгамского моста. Со временем надпись стерлась, но сейчас она сделана каменной.

Кватернионы можно записывать в следующем виде:

$$q = a + v,$$

где $\mathrm{Re}(q) := a \in \mathbb{R}$ — *вещественная часть*, а $\mathrm{Im}(q) := v = bi + cj + dk$ — *векторная* или *мнимая* часть.

Задача 1. Пусть даны два кватерниона $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ и $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$. Убедитесь, что

$$\mathrm{Re}(q_1 q_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2.$$

Другими словами, $\mathrm{Re}(q_1 q_2) = a_1 a_2 - (v_1, v_2)$, где через (v_1, v_2) обозначено *скалярное произведение* $b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$ векторов v_1 и v_2.

Как вы знаете,

$$(v_1, v_2) = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos(v_1, v_2),$$

где через $\|v\|$ обозначена длина или, как еще говорят, **норма** вектора v. Другими словами, если $v = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$, то

$$\|v\| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

Вообще, **нормой кватерниона** $q = a + bi + cj + dk$ называется длина соответствующего ему вектора $\mathbb{R}^4$:

$$\|q\| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Задача 2. В обозначениях предыдущей задачи, докажите, что

$$\mathrm{Im}(q_1 q_2) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + [v_1, v_2],$$

где $[v_1, v_2]$ — *векторное произведение* векторов v_1 и v_2. В частности, для чисто мнимых (то есть с нулевой вещественной частью) кватернионов q_1 и q_2 имеем

$$q_1 q_2 = -(v_1, v_2) + [v_1, v_2].$$

Как учат в курсе аналитической геометрии, векторное произведение двух векторов в трёхмерном евклидовом пространстве — это вектор, перпендикулярный обоим исходным векторам, норма которого равна площади параллелограмма, образованного этими векторами, а выбор из двух направлений определяется ориентацией пространства.

Аналогично случаю комплексных чисел, **сопряженным** к кватерниону $q = a + bi + cj + dk$ называют кватернион

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk = a - v.$$

Задача 3. Докажите, что

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$$

(именно в таком порядке!).

Поскольку

$$q\overline{q} = \|q\|^2,$$

имеем

$$q \cdot \frac{\overline{q}}{\|q\|^2} = 1.$$

Таким образом, для каждого $q \in \mathbb{H}$ существует **обратный** кватернион $q^{-1} = \bar{q}/\|q\|^2$.

2. Теорема Гурвица

Как вы помните, для любых двух комплексных чисел $z_k = a_k + ib_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$ справедливо
$$|z_1|^2|z_2|^2 = |z_1 z_2|^2.$$
Левая часть равна $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$. Распишем подбробно правую часть:
$$|(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)|^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (b_1a_2 + a_1b_2)^2.$$
Таким образом, мы получили совершенно неочевидное утверждение: *произведение суммы двух квадратов на сумму двух квадратов есть снова сумма двух квадратов*:
$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (b_1a_2 + a_1b_2)^2.$$
Оказывается, то же самое верно для сумм четырех квадратов.

Задача 4. Используя тождество
$$\|q_1q_2\|^2 = \|q_1\|^2\|q_2\|^2, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{H},$$
докажите (следуя за Гамильтоном!), что произведение суммы четырех квадратов на сумму четырех квадратов есть снова сумма четырех квадратов.

На самом деле, это утверждение было известно еще Эйлеру, который в 1748 г. пытался вывести из него, что всякое натуральное число можно представить в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Последнее действительно верно и теперь называется *теоремой Лагранжа о сумме четырех квадратов.*

Как это обычно бывает в математике, открытие Эйлера было забыто и на него обратили внимание только после работ Гамильтона по кватернионам. Вскоре после этого Артур Кэли обнаружил такое же равенство для сумм *восьми* квадратов. Естественно, у математиков возник вопрос: существуют ли другие такие тождества. В конце XIX века немецкий математик Адольф Гурвиц доказал следующую удивительную теорему:

Теорема 1 (Гурвиц, 1898). *Пусть $\mathbb{K}$ — любое поле характеристики не равной двум (например, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$). Если*
$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$$
для всех $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, где $z_k = \sum_{i,j=1}^n a_{ijk}x_iy_j$, то $n = 1, 2, 4$ или 8.

Мы не будем доказывать эту теорему. Отметим только, что тождество для $n = 8$ получается при рассмотрении нормы произведения в **алгебре октав** $\mathbb{O}$ — некоторой 8-мерной неассоциативной и некоммутативной алгебре над полем вещественных чисел.

3. Геометрия кватернионов

Поскольку умножение кватернионов сочетает в себе два вида произведения — скалярное и векторное — кватернионы находят применение во многих задачах геометрии и механики. Так же как комплексные числа описывают движения плоскости (см. Листок 10), кватернионы используют для описания *вращений пространства.* В частности, кватернионы реально применяются в компьютерной графике, анимации, игровых движках и т.д. Давайте обсудим математику, которая за этим стоит.

Напомним, что $\mathbb{H}$ является 4-мерным векторным пространством над $\mathbb{R}$ с базисом 1, i, j и k. При этом чисто мнимые кватернионы
$$\{bi + cj + dk : \ b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

образуют в $\mathbb{H}$ трехмерное подпространство с базисом i, j, k, которое мы будем отождествлять с $\mathbb{R}^3$ и обозначать $\mathbb{H}_0$. Наша цель — интерпретировать вращения пространства $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{H}_0$ в терминах умножения кватернионов. В качетсве первого приближения к этой цели давайте заметим, что для задания поворота $\mathbb{R}^3$ достаточно знать две вещи:

- Ось поворота;
- Угол поворота вокруг этой оси.

Пусть дан какой-нибудь кватернион единичной нормы:

$$q = a + v, \quad \|q\| = 1,$$

то есть $a^2 + \|v\|^2 = 1$. Тогда a и $\|v\|$ можно принять за косинус и синус некоторого угла:

$$a = \cos\varphi, \quad \|v\| = \sin\varphi.$$

Обозначим через v' вектор $v/\|v\|$; ясно, что $\|v'\| = 1$ (в таких случаях принято говорить, что мы *нормировали* вектор v, разделив этот вектор на его длину). Таким образом, любой кватернион q единичной нормы представляется в виде

$$q = \cos\varphi + \sin\varphi \cdot v',$$

где v' — вектор единичной длины в $\mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$. Именно этот вектор мы возьмем в качестве *направляющего вектора оси вращения*. Осталось выбрать угол поворота. Оказывается, что если мы хотим совершить поворот вокруг v' на угол θ, то нужно взять $\varphi = \theta/2$,

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot v'$$

Перейдем к точным формулировкам. В следующей серии задач мы доказываем такую теорему:

Теорема 2. *Как и выше, отождествим $\mathbb{R}^3$ с пространством $\mathbb{H}_0$. Тогда для любого кватерниона q единичной нормы и любого $w \in \mathbb{H}_0$ отображение*

$$w \mapsto qwq^{-1}$$

осуществляет поворот $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{H}_0$ на угол θ вокруг оси v'.

Задача 5. Мы уже договорились, что, сопоставляя кватерниону $q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)v'$ поворот, в качестве оси поворота мы выберем проходящую через начало отсчета прямую в $\mathbb{R}^3$ с направляющим вектором v'. Поэтому для доказательства Теоремы 2 сперва нужно убедиться, что преобразование

$$w \mapsto qwq^{-1}$$

переводит эту прямую в себя. Докажите это. Возможно, вам будет полезно следующее наблюдение: если $q = \cos\varphi + \sin\varphi \cdot v'$, то

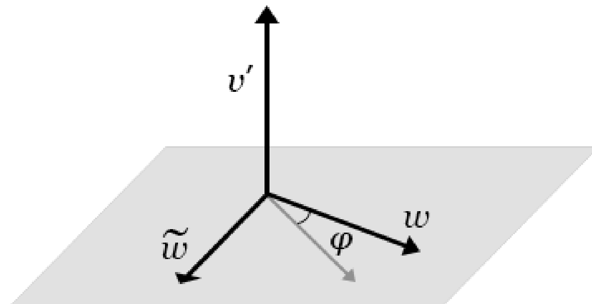
$$q^{-1} = \cos\varphi - \sin\varphi \cdot v'.$$

Нам осталось доказать, что операция $w \mapsto qwq^{-1}$ осуществляет поворот плоскости, перпендикулярной v', на угол θ. Это будет сделано в два шага в задачах 6-7.

Задача 6. Пусть $v' \in \mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$ — вектор длины 1, а w — произвольный вектор, перпендикулярный v'. Тогда умножение w слева на кватернион $q = \cos\varphi + \sin\varphi \cdot v'$ осуществляет поворот w вокруг оси v' на угол[2] φ.

[2]Мы будем считать, что поворот осуществляется в том же самом направлении, в каком совершается кратчайший поворот от i к j (вокруг k).

Подсказка: Докажите, что $qw = w\cos\varphi + \widetilde{w}\sin\varphi$, где $\widetilde{w}$ — вектор в плоскости, перпендикулярной v', составляющий с вектором w прямой угол (см. рисунок ниже). Используйте задачи 1 и 2, а также геометрический смысл векторного произведения.



Итак, умножение w на q поворачивает этот вектор внутри плоскости, перпендикулярной v', на угол φ. Оказывается, умножение w на q^{-1} *справа* — тоже поворот на φ.

Задача 7. Докажите это. Можно использовать, например, что

$$wq^{-1} = w\overline{q} = \overline{q\overline{w}},$$

и чисто мнимые кватернионы при сопряжении меняют знак (что соответсвует измению направления вектора на противоположное).

Из задач 6-7 следует, что суммарный поворот вокруг v' составляет $(\theta/2) + (\theta/2) = \theta$, что и требовалось. Теорема 2 доказана.

4. Задача о сложении поворотов

Теорема 2 позволяет быстро решить достаточно трудную геометрическую задачу. А именно, пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ последовательно совершаются два поворота: сначала относительно оси ℓ_1 на угол φ_1, а затем — вокруг оси ℓ_2 на угол φ_2. В результате получим новый поворот. Спрашивается, как найти его ось и угол?

Пусть v_k — направляющий вектор оси ℓ_k, $k = 1, 2$. При первом повороте произвольный вектор $w \in \mathbb{R}^3$ перейдет в $w_1 = q_1 w q_1^{-1}$, где $q_1 = \cos(\varphi_1/2) + v_1\sin(\varphi_1/2)$. При втором повороте w_1 перейдет в

$$w_2 = q_2 w_1 q_2^{-1} = q_2(q_1 w q_1^{-1})q_2^{-1} = (q_2 q_1)w(q_2 q_1)^{-1}.$$

Вычислив произведение $q_2 q_1$ и представив его в виде

$$q_2 q_1 = \cos\psi + v\cdot\sin\psi, \quad \|v\| = 1,$$

заключаем, что результирующий поворот есть поворот вокруг оси v на угол 2ψ.

Задача 8. Пусть первый поворот совершается вокруг оси x на угол $\pi/2$, а второй — вокруг оси y на тот же угол. Найдите результирующий поворот.