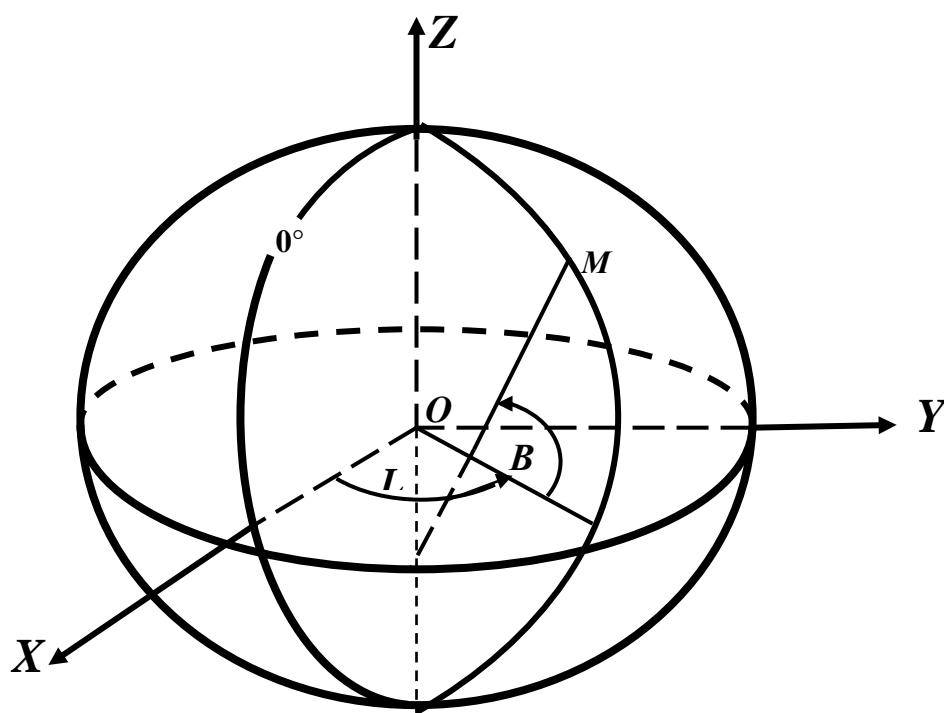


**В. Л. Клепко**

**А. В. Александров**

# **СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ГЕОДЕЗИИ**



**Екатеринбург  
2011**

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уральский государственный горный университет»



В. Л. Клепко

А. В. Александров

# СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ГЕОДЕЗИИ

*Научная монография*

Екатеринбург  
2011

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. МЕТОД КООРДИНАТ (краткие сведения из аналитической геометрии).....	6
1.1 Метод координат на прямой.....	6
1.2. Метод координат на плоскости.....	7
1.2.1. Преобразование координат на плоскости из одной системы координат в другую .....	9
1.3. Метод координат в пространстве.....	12
1.3.1. Декартова прямоугольная система координат в пространстве.....	12
1.3.2. Сферическая система координат.....	13
1.3.3. Цилиндрическая система координат.....	14
1.3.4. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве.....	16
2. ПОНЯТИЕ О ФОРМЕ ЗЕМЛИ.....	22
3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ГЕОДЕЗИИ.....	34
3.1. Сферические системы координат в астрономии.....	34
3.2. Географическая система координат.....	41
3.3. Геодезическая система координат.....	44
3.4. Астрономическая система координат.....	51
4. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛОЖЕНИЕМ ИХ НАЧАЛА.....	58
4.1. Общеземные системы координат.....	58
4.2. Референцные системы координат.....	67
4.3. Топоцентрические системы координат.....	75
4.3.1. Топоцентрическая система полярных координат.....	78
4.4. Системы плоских прямоугольных координат.....	80
4.4.1 Система плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера.....	87
4.4.2. Система прямоугольных координат в проекции UTM .....	94
4.4.3. Система прямоугольных координат в равноугольной конической проекции Ламберта.....	97
5. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ.....	103
6. МЕСТНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ.....	107
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	112
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	113

## ВВЕДЕНИЕ

Геодезия занимается многочисленными измерениями на поверхности Земли и в околоземном пространстве, наблюдениями внегалактических радиосточников (квазаров) для решения ряда научных и научно-практических задач:

- определение формы, размеров и гравитационного поля Земли и их изменений во времени;

- создание государственной геодезической, государственной нивелирной и государственной гравиметрической сетей;

- создание и периодическое обновление топографических карт и планов;

- обеспечение решения различных инженерных, экономических и оборонных задач, земельного кадастра, создание геоинформационных систем;

- разработка автоматизированных комплексов и приборов для производства высокоточных астрономо-геодезических, гравиметрических, спутниковых, радиоинтерферометрических и других измерений;

- разработка строгих и эффективных методов обработки результатов различных геодезических измерений.

Геодезия объединяет в себе ряд самостоятельных дисциплин: высшая геодезия, космическая геодезия, геодезическая астрономия, гравиметрия, топография, прикладная (инженерная) геодезия, морская геодезия, теория математической обработки геодезических измерений. Геодезия теснейшим образом связана с математикой, физикой, астрономией, географией, картографией и другими научными дисциплинами.

В основе решения всех задач геодезии лежит установление различных систем координат и создание опорных геодезических сетей, являющихся физической реализацией систем координат на поверхности Земли.

В последние десятилетия издано достаточное количество монографий, статей геодезической направленности, учебников и учебных пособий по геодезии для различных высших и средних специальных учебных заведений. Однако, в них нет единого подхода к названию систем координат, их определению.

В настоящей работе сделана попытка единого подхода к названиям систем координат, их определениям и связям с другими системами координат, которые применяются в геодезии.

# 1. МЕТОД КООРДИНАТ

## (Краткие сведения из аналитической геометрии)

Метод координат – это способ решения задачи по определению положения точки с помощью чисел (линейных или угловых) и других символов.

Числа, заданные в определенном порядке, называются координатами (слово «координаты» происходит от латинских слов **co** – семейство и **ordinates** – упорядоченный, определенный). Они определяют положение точки на плоскости, на поверхности или в пространстве.

### 1.1 Метод координат на прямой

Для определения положения какой-либо точки  $M$  на прямой поступают следующим образом. На прямой выбирают начало отсчета (точку  $O$ ), единицу масштаба (отрезок  $e$ ) и направление, которое будет считаться положительным (на рис.1.1 это направление показано стрелкой). Прямую с такими условиями называют числовой осью (рис. 1.1).

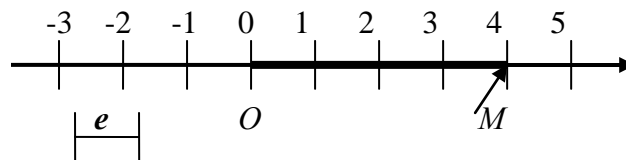


Рис. 1.1. Числовая ось

Для определения положения точки  $M$  на числовой оси достаточно назвать одно число, например  $+4$ . Это значит, что точка  $M$  лежит на расстоянии 4 единиц масштаба от начала отсчета в положительном направлении. Следовательно, определение положения точки  $M$  на прямой связано с определением отрезка  $OM$  не только по величине, но и по направлению. Направленный отрезок

называют *вектором* и обозначают  $\overline{OM}$ . Каждая точка  $M$ , лежащая на прямой, определяет радиус-вектор  $\overline{OM} = M$ .

Радиус-вектор  $M$ , как всякий вектор прямой, имеет при заданном координатном векторе  $e$  определенную координату  $x$ :  $M = xe$ . Эту координату называют координатой точки  $M$ .

Для определения координат точки надо задать определенные условия, совокупность которых называют *системой координат*.

Система координат на прямой задается началом координат (точкой  $O$ ) и координатным вектором  $e$ .

## 1.2. Метод координат на плоскости

Любая точка  $M$  на плоскости, так же как и на прямой, определяется своим радиус-вектором  $M = \overline{OM}$ , если задано начало координат  $O$ .

Если на плоскости даны два не равных нулю, непараллельных вектора  $e_1$  и  $e_2$ , то всякий вектор, в том числе и радиус-вектор, определяется своими координатами:

$$M = x_1 e_1 + x_2 e_2 . \quad (1.1)$$

Очевидно, каждая точка  $M$  при заданном начале координат и координатных векторах  $e_1$  и  $e_2$  имеет одну пару координат, или пара действительных чисел  $x_1, x_2$  при тех же заданных условиях определяет один радиус-вектор  $M$  и, следовательно, одну точку  $M$ .

Если оба координатных вектора  $e_1$  и  $e_2$  имеют модуль (длину), равный единице, то систему координат называют декартовой. Декартову систему координат называют прямоугольной, если координатные векторы единичны и взаимно перпендикулярны. Выходящие из начала декартовой системы координат координатные векторы называют осями координат (рис. 1.2).

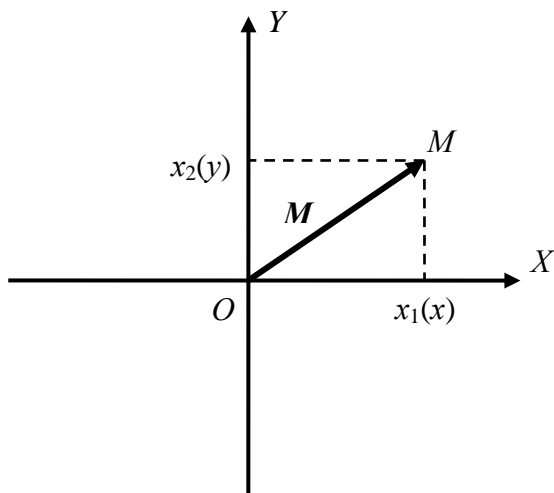


Рис. 1.2. Декартова система прямоугольных координат на плоскости

Первую ось ( $X$ ) называют осью абсцисс, вторую ( $Y$ ) – осью ординат. Соответственно этому первая координата -  $x_1$  называется абсциссой и обозначается буквой  $x$ , вторая -  $x_2$  - ординатой и обозначается буквой  $y$ .

Декартова система прямоугольных координат на плоскости считается установленной, если заданы следующие три условия:

- определено начало координат ( $O$ );
- указаны положительные направления двух координатных осей (оси абсцисс и оси ординат);
- установлена величина масштаба, т. е. единица длины.

Помимо декартовой системы прямоугольных координат на плоскости применяют полярную систему координат. Для установления полярной системы координат на плоскости берется числовая ось. Начало координат на этой оси называют полюсом ( $O$ ), а саму ось - полярной осью  $OP$  (рис. 1.3).

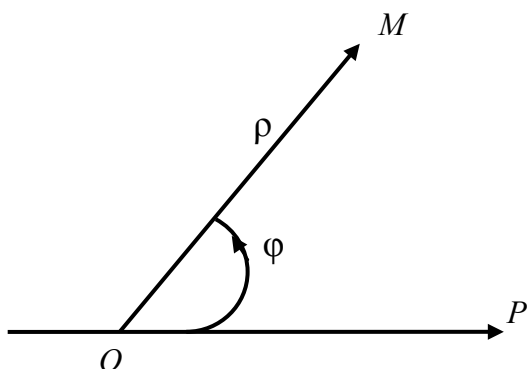


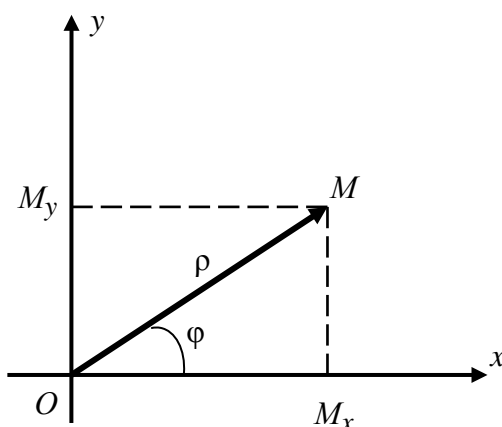
Рис. 1.3. Полярная система координат



Для определения положения точки  $M$  достаточно указать два числа:  $\rho$  - расстояние точки  $M$  от полюса  $O$  (полярный радиус) и  $\varphi$  - угол, отсчитываемый от полярной оси, между полярной осью и полярным радиусом (полярный угол). Точку  $M$  с полярными координатами  $\rho$  и  $\varphi$  обозначают символом  $M(\rho, \varphi)$ . Обычно считают, что  $\rho$  и  $\varphi$  изменяются в следующих пределах:

$$0 < \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Если предположить, что начало декартовой прямоугольной системы координат на плоскости находится в полюсе  $O$ , а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью, можно установить связь между полярными координатами точки и ее декартовыми координатами (рис. 1.4).



$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.2) \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Рис. 1.4. Связь между полярными и прямоугольными координатами на плоскости

Для того чтобы найти величину  $\varphi$ , нужно, используя знаки  $x$  и  $y$ , определить четверть, в которой находится точка  $M$ .

### ***1.2.1. Преобразование координат на плоскости из одной системы координат в другую***

Координаты  $x, y$  определяют положение точки на плоскости только при условии, что дана система координат, т. е. для декартовой прямоугольной системы координат определены: начало системы, направление осей и масштаб.

Часто возникает необходимость в замене координатной системы, к которой отнесены координаты данной точки, другой системой координат.

Пусть на плоскости заданы две произвольные декартовы прямоугольные системы координат: первая, определяемая началом  $O$  и базисными векторами  $i$  и  $j$ , и вторая, определяемая началом  $O'$  и базисными векторами  $i'$  и  $j'$  (рис.1.5).

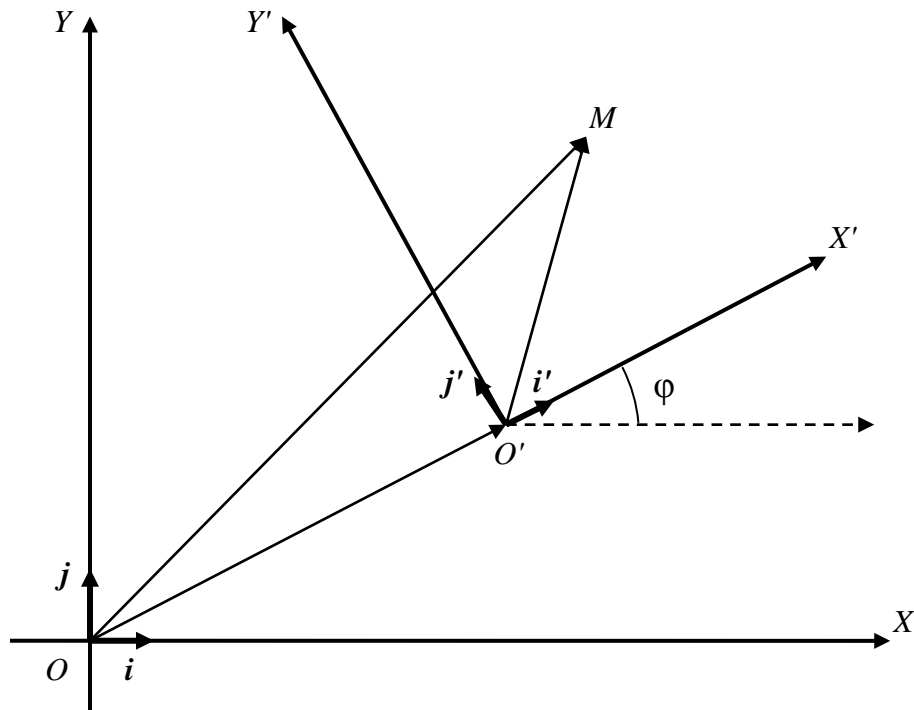


Рис. 1.5. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости

Координаты  $x$  и  $y$  совпадают координатами вектора  $\overline{OM}$  в разложении его по базису  $ij$ , а координаты  $x'$  и  $y'$  совпадают с координатами вектора  $\overline{O'M}$  в разложении его по базису  $i'j'$ , т. е.

$$\overline{OM} = xi + yj; \quad (1.3)$$

$$\overline{O'M} = x'i' + y'j'. \quad (1.4)$$

Если обозначить координаты начала  $O'$  второй системы относительно первой через  $a$  и  $b$ , то

$$\overline{OO'} = ai + bj. \quad (1.5)$$

Любой вектор на плоскости можно разложить по базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ , при этом найдутся такие числа  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$  что

$$\mathbf{i}' = \alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{12}\mathbf{j}, \quad \mathbf{j}' = \alpha_{21}\mathbf{i} + \alpha_{22}\mathbf{j}. \quad (1.6)$$

По правилу сложения векторов

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}. \quad (1.7)$$

В формулу (1.7) подставляем значения  $\overline{OM}, \overline{O'M}, \overline{OO'}$ , предварительно вставив в формулу (1.4) значения  $\mathbf{i}'$  и  $\mathbf{j}'$  из формулы (1.6), и, группируя слагаемые относительно  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , получим:

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y')\mathbf{i} + (b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y')\mathbf{j}. \quad (1.8)$$

В силу единственности разложения вектора по базису и равенства (1.8) получим формулы преобразования координат [9]:

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y'; \\ y &= b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y'. \end{aligned}$$

(1.9)

Позволительно сделать следующий вывод: каковы бы ни были две произвольные декартовы прямоугольные системы координат на плоскости, координаты любой точки этой плоскости относительно первой системы являются линейными функциями координат этой же точки относительно второй системы.

Для геометрического истолкования полученного вывода умножим каждое равенство (1.6) скалярно сначала на  $\mathbf{i}$ , а затем на  $\mathbf{j}$ . При этом будем учитывать, что скалярное произведение двух единичных векторов равно косинусу угла между ними, а также то, что  $\mathbf{i}\mathbf{i} = 1, \mathbf{j}\mathbf{j} = 1, \mathbf{i}\mathbf{j} = 0$ , получим:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(\mathbf{i}' \wedge \mathbf{i}), \quad \alpha_{12} = \cos(\mathbf{i}' \wedge \mathbf{j}), \\ \alpha_{21} &= \cos(\mathbf{j}' \wedge \mathbf{i}), \quad \alpha_{22} = \cos(\mathbf{j}' \wedge \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

В формулах (1.10) символом, например,  $(\mathbf{i}' \wedge \mathbf{i})$  обозначен угол между единичными векторами  $\mathbf{i}'$  и  $\mathbf{i}$ .

На рис. 1.5 оба кратчайших поворота (от  $i$  к  $j$  и от  $i'$  к  $j'$ ) совершаются в одном направлении (против часовой стрелки). Обозначим угол между базисными векторами  $i$  и  $i'$  через  $\varphi$ , который отсчитывается в направлении, отвечающем кратчайшему повороту от  $i$  к  $j$ . Тогда  $\alpha_{11} = \cos\varphi$ .

Пользуясь формулой (1.10), вычислим числа  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{22}$ :

$$\alpha_{11} = \cos\varphi, \alpha_{22} = \cos\varphi, \alpha_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi, \alpha_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi.$$

Тогда формулы преобразования координат (1.9) примут вид

$$\begin{aligned} x &= a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi; \\ y &= b + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Решая уравнения (1.11) относительно  $x'$  и  $y'$ , получим:

$$\begin{aligned} x' &= (x - a) \cos\varphi + (y - b) \sin\varphi; \\ y' &= -(x - a) \sin\varphi + (y - b) \cos\varphi. \end{aligned} \tag{1.12}$$

### 1.3. Метод координат в пространстве

Координатами точки  $M$  в пространстве называют координаты радиус-вектора этой точки  $M$ . Система координат в пространстве определена, если дано начало  $O$  и три некопланарных вектора  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ .

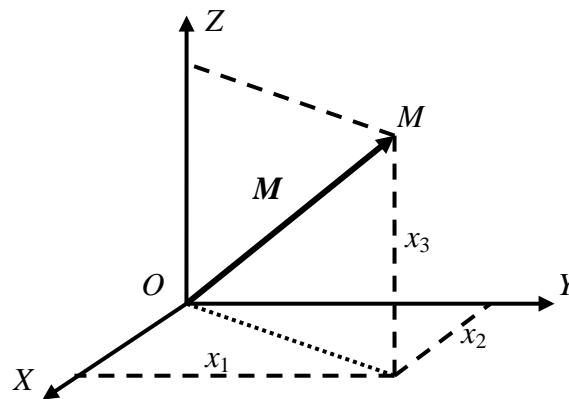
#### 1.3.1. Декартова прямоугольная система координат в пространстве

Систему координат называют декартовой системой прямоугольных координат в пространстве, если дано начало координат  $O$  и три единичных и ортогональных вектора  $i, j, k$ .

В этой системе координат радиус-вектор  $M$  (рис. 1.6) определяется своими координатами:

$$M = x_1 i + x_2 j + x_3 k. \tag{1.13}$$

Рис. 1.6. Декартова система прямоугольных координат в пространстве



Координаты точки  $M$  относительно декартовой системы прямоугольных координат в пространстве обозначаются буквами  $x, y, z$  и соответственно носят название абсциссы, ординаты и аппликаты.

Кроме декартовой системы прямоугольных координат в пространстве наиболее употребительными являются сферическая система координат и цилиндрическая система координат.

### 1.3.2. Сферическая система координат

Сфера – замкнутая поверхность, все точки которой одинаково удалены от одной точки - центра сферы. Если центр сферы совместить с началом декартовой прямоугольной системы координат в пространстве (рис. 1.7), то уравнение сферы будет иметь следующий вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad (1.14)$$

где  $\rho$  – радиус сферы;  $x, y, z$  – координаты точки  $M$ .

Сферическая система координат задается началом координат  $O$ .

Сферическими координатами точки  $M$  называют три числа:

$\rho$  – расстояние от начала координат до точки  $M$  ( $0 \leq \rho < +\infty$ );

$\theta$  – угол между координатной осью  $Z$  и отрезком, соединяющим начало координат  $O$  с точкой  $M$  ( $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ );

$\varphi$  - угол между координатной осью  $X$  и проекцией отрезка  $OM$  на плоскость  $XU$  ( $0 \leq \varphi < 360^\circ$ ).

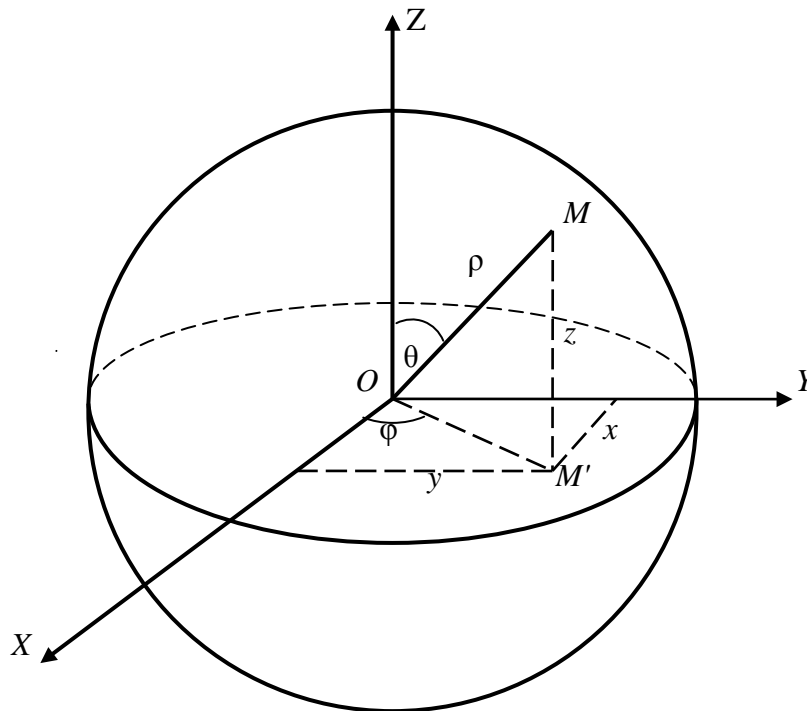


Рис. 1.7. Сферическая система координат

Декартовы прямоугольные координаты  $x, y, z$  точки  $M$  связаны с ее сферическими координатами  $\rho, \varphi, \theta$  следующими соотношениями:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (1.15)$$

От декартовых прямоугольных координат в пространстве переходят к сферическим координатам с помощью формул:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \theta &= \arccos \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right); \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

### 1.3.3. Цилиндрическая система координат

Установим декартову прямоугольную систему координат в пространстве с началом в точке  $O$ . Точка  $M$  – любая точка пространства;  $N$  – ее проекция на плоскость  $XOY$ ;  $M_z$  – проекция точки  $M$  на ось  $Z$  (рис.1.8).

Цилиндрическими координатами точки  $M$  называют три числа -  $\rho$ ,  $\varphi$  и  $z$ , два из которых ( $\rho$  и  $\varphi$ ) являются полярными координатами точки  $N$  относительно полюса  $O$  и полярной оси  $OX$ , а число  $z$  есть величина отрезка  $OM_z$ . Название «цилиндрические координаты» связано с тем, что координатная поверхность  $\rho = \text{const}$ , т. е. поверхность, все точки которой имеют одну и ту же координату  $\rho$ , является цилиндром, прямолинейные образующие которого параллельны оси  $OZ$ .

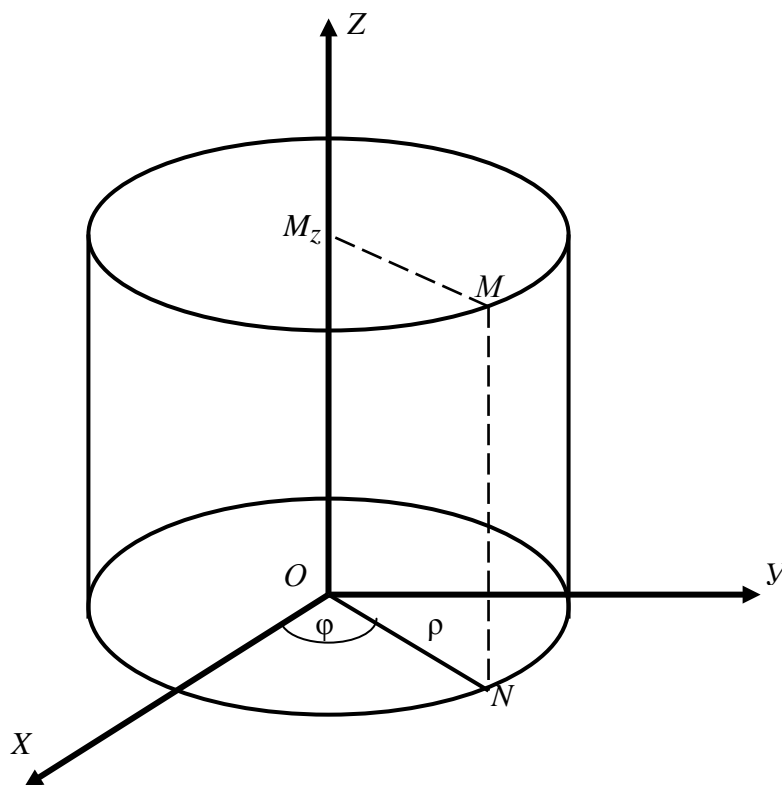


Рис. 1.8. Цилиндрическая система координат

Формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым прямоугольным координатам в пространстве:

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \varphi; \\
 y &= \rho \sin \varphi; \\
 z &= z.
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

Формулы перехода от декартовых прямоугольных координат к цилиндрическим координатам:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right); \\ z &= z.\end{aligned}\tag{1.18}$$

#### ***1.3.4. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве***

Если в пространстве заданы две произвольные декартовы прямоугольные системы координат, то первая система определяется началом  $O$  и базисными векторами  $i, j, k$ , а вторая - началом  $O'$  и базисными векторами  $i', j', k'$  (рис. 1.9).

Координаты точки  $M$  относительно первой системы координат имеют значения  $x, y, z$ , а относительно второй системы –  $x', y', z'$ .



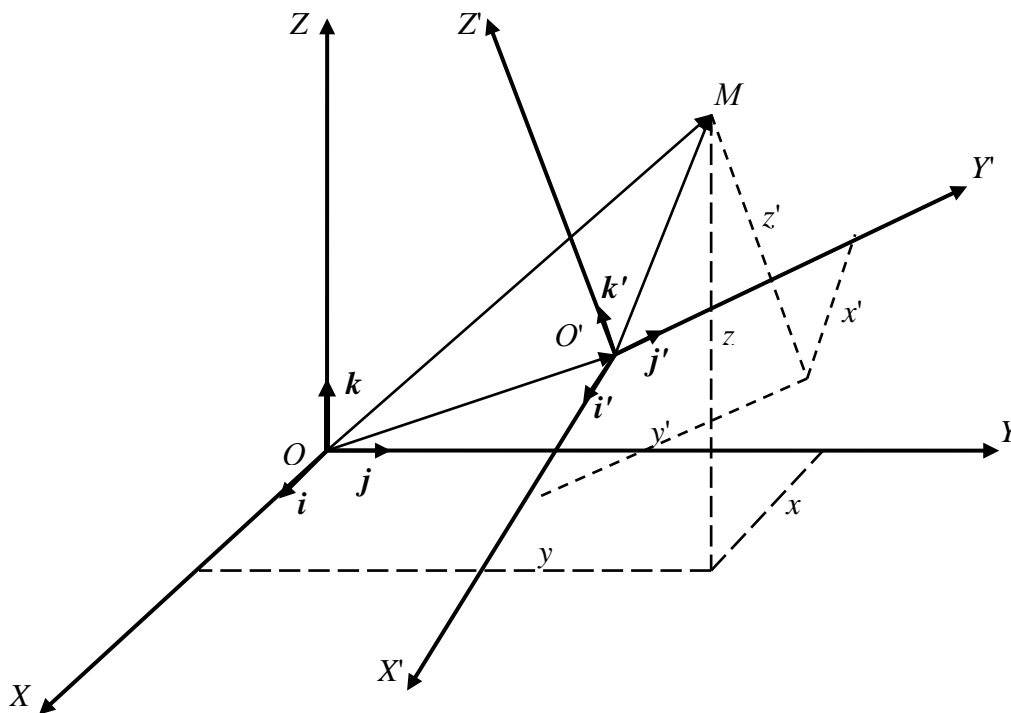


Рис. 1.9. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве

Координаты  $x, y, z$  совпадают с координатами вектора  $\overline{OM}$  в разложении его по базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , координаты  $x', y', z'$  - с координатами вектора  $\overline{O'M}$  в разложении его по базису  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ :

$$\overline{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad (1.19)$$

$$\overline{O'M} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'. \quad (1.20)$$

Координаты начала  $O'$  второй системы координат относительно первой обозначим через  $a, b, c$ , тогда

$$\overline{OO'} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}. \quad (1.21)$$

Так как любой вектор можно разложить по базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , то найдутся девять чисел  $\alpha_{lm}$  ( $l = 1, 2, 3; m = 1, 2, 3$ ):

$$\mathbf{i}' = \alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{12}\mathbf{j} + \alpha_{13}\mathbf{k}; \quad \mathbf{j}' = \alpha_{21}\mathbf{i} + \alpha_{22}\mathbf{j} + \alpha_{23}\mathbf{k}; \quad \mathbf{k}' = \alpha_{31}\mathbf{i} + \alpha_{32}\mathbf{j} + \alpha_{33}\mathbf{k}.$$

$$(1.22)$$

На основании правила сложения векторов

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}. \quad (1.23)$$

В формулу (1.23) подставляем полученные значения  $\overline{OM}$  (1.19),  $\overline{O'M}$  (1.20) с учетом (1.22) и  $\overline{OO'}$  (1.21). Произведя несложные алгебраические преобразования, получим:

$$\begin{aligned}
 x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z')\mathbf{i} + (b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z')\mathbf{j} + \\
 &+ (c + \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z')\mathbf{k}.
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

В силу единственности разложения вектора по базису из равенства (1.24) получим искомые формулы преобразования координат [9]:

$$\begin{aligned}
 x &= a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z'; \\
 y &= b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z'; \\
 &\tag{1.25}
 \end{aligned}$$

$$z = c + \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z'.$$

Следовательно, можно утверждать: каковы бы ни были две произвольные декартовы прямоугольные системы координат, координаты  $x, y, z$  любой точки пространства относительно первой системы являются линейными функциями координат  $x', y', z'$  той же точки относительно второй системы.

Умножив каждое из равенств (1.22) скалярно на  $\mathbf{i}$ , а затем на  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$ , получим следующие выражения для чисел  $\alpha_{lm}$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \cos(\mathbf{i}' \wedge \mathbf{i}), & \alpha_{12} &= \cos(\mathbf{i}' \wedge \mathbf{j}), & \alpha_{13} &= \cos(\mathbf{i}' \wedge \mathbf{k}); \\
 \alpha_{21} &= \cos(\mathbf{j}' \wedge \mathbf{i}), & \alpha_{22} &= \cos(\mathbf{i}' \wedge \mathbf{j}), & \alpha_{23} &= \cos(\mathbf{j}' \wedge \mathbf{k}); \\
 \alpha_{31} &= \cos(\mathbf{k}' \wedge \mathbf{i}), & \alpha_{32} &= \cos(\mathbf{k}' \wedge \mathbf{j}), & \alpha_{33} &= \cos(\mathbf{k}' \wedge \mathbf{k}).
 \end{aligned}$$

Выясним геометрический смысл формул (1.25) в предположении, что обе системы  $OXYZ$  и  $O'X'Y'Z'$  имеют общее начало  $O$  ( $a = b = c = 0$ ) и являются правыми (системы называют правыми, если поворот от одного базисного вектора к другому происходит против часовой стрелки).

Проведем ось  $U$ , совпадающую с линией пересечения координатных плоскостей  $OXY$  первой системы с координатной плоскостью  $O'X'Y'$  второй си-

стемы и направленную таким образом, что три направления  $OZ$ ,  $OZ'$  и  $U$  образуют правую тройку (рис. 1.10).

Рассмотрим три угла, которые характеризуют расположение осей второй системы координат относительно первой:

$\Psi$  – угол между осями  $OX$  и  $U$ , отсчитываемый в плоскости  $OXY$  от оси  $OX$  в направлении кратчайшего поворота от  $OX$  к  $OY$ ;

$\theta$  – угол (менее  $\pi$ ) между осями  $OZ$  и  $OZ'$ ;

$\varphi$  – угол между осями  $U$  и  $OX'$ , отсчитываемый в плоскости  $OXY'$  от оси  $U$  в направлении кратчайшего поворота от  $OX'$  к  $OY'$ .

Три угла  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\theta$  называют углами Эйлера (Леонард Эйлер (1707 – 1783) – математик, механик, физик и астроном; с 1731 г. – академик Петербургской АН). По углам Эйлера и по направлениям осей  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  однозначно определяются направления осей  $OX'$ ,  $OY'$  и  $OZ'$ .

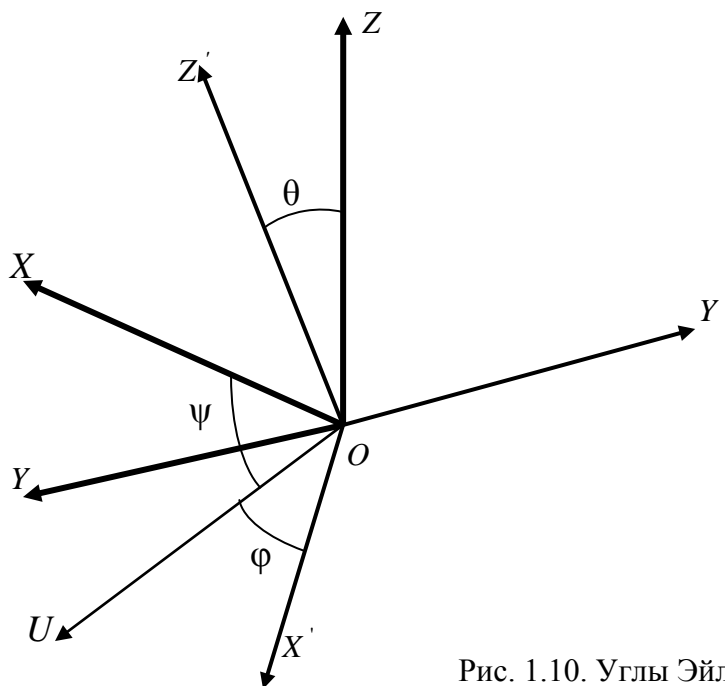


Рис. 1.10. Углы Эйлера

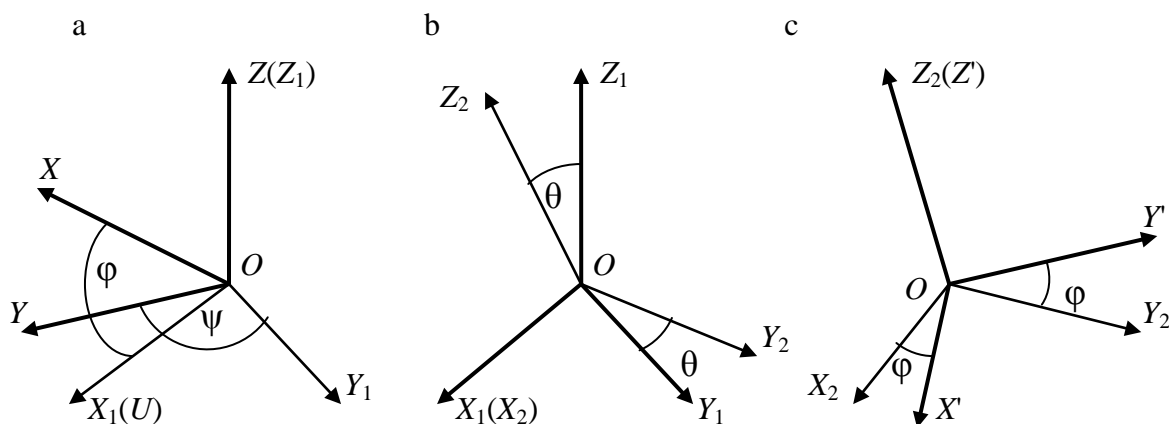


Рис. 1.11. Преобразование системы координат  $OXYZ$  в систему  $OX'Y'Z'$  последовательными поворотами:  
 а - вокруг оси  $OZ$ ; б - вокруг оси  $OX_1$ ; с - вокруг оси  $OZ_2$

Если заданы углы Эйлера, то преобразование первой системы  $OXYZ$  во вторую систему  $OX'Y'Z'$  можно представить в виде последовательного проведения следующих трех поворотов (рис. 1.11):

- поворота системы  $OXYZ$  на угол  $\psi$  вокруг оси  $OZ$ , переводящего эту систему в систему  $OX_1Y_1Z_1$  (см. рис. 1.11, а);
- поворота системы  $OX_1Y_1Z_1$  на угол  $\theta$  вокруг оси  $OX_1$ , переводящего эту систему в систему  $OX_2Y_2Z_2$  (см. рис. 1.11, б);
- поворота системы  $OX_2Y_2Z_2$  на угол  $\phi$  вокруг оси  $OZ_2 = OZ'$ , переводящего эту систему в систему  $OX'Y'Z'$  (см. рис. 1.11, с).

Каждый из указанных трех поворотов производится в одной из координатных плоскостей соответствующей системы. После каждого поворота получим следующие значения координат:

- после первого поворота

$$x = x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi, \quad y = x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi, \quad z = z_1; \quad (1.26)$$

- после второго

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \cos \theta - z_2 \sin \theta, \quad z_1 = y_2 \sin \theta + z_2 \cos \theta; \quad (1.27)$$

- после третьего

$$x_2 = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y_2 = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \quad z_2 = z'. \quad (1.28)$$

Внося выражения (1.28) в (1.27), а затем (1.27) в (1.26), получим:

$$\begin{aligned} x &= (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) \cos \psi - \\ &\quad - [(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \cos \theta - z' \sin \theta] \sin \psi, \\ y &= (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) \sin \psi + \\ &\quad + [(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \cos \theta - z' \sin \theta] \sin \psi, \\ z &= [(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \cos \theta + z' \cos \theta]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Сравнивая формулы (1.29) с формулами (1.25) (при  $a = b = c = 0$ ), окончательно получим выражения для чисел  $\alpha_{lm}$  через углы Эйлера:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi; & \alpha_{21} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi; \\ \alpha_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi; & \alpha_{32} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi; \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi; & \alpha_{23} &= \sin \theta \cos \varphi; \\ \alpha_{31} &= \sin \psi \sin \theta; & \alpha_{32} &= -\cos \psi \sin \theta; & \alpha_{33} &= \cos \theta. \end{aligned}$$

При выводе формул (1.30) считалось, что обе системы имеют общее начало. Вместе с тем выбор направлений осей координат и величин углов Эйлера не зависят от того, где выбрано начало первой и второй систем.

Общее преобразования представляют последовательные действия по параллельному переносу и трех поворотов, производимых в соответствующих координатных плоскостях, и определяются формулами (1.25). В этих формулах при условии, что обе системы координат являются правыми, числа  $\alpha_{lm}$  выражаются через углы Эйлера по формулам (1.30).

В разделе 1 рассмотрены только те системы координат, которые в том или ином виде применяют в геодезии.

В геодезии координаты точек определяют на поверхности Земли и в околоземном пространстве. Поэтому при установлении систем координат необходимо иметь представление о форме и размерах Земли.

## **2. ПОНЯТИЕ О ФОРМЕ ЗЕМЛИ**

Определение поверхности Земли и ее внешнего поля силы тяжести является основной научной задачей высшей геодезии. Решением этой задачи занимается теоретическая геодезия, являющаяся одной из ее разделов.

Представление о форме Земли изменялось по мере развития многих наук. Около двух с половиной тысячелетий назад Землю считали плоской. Затем возникла мысль о шарообразности Земли, которую высказал древнегреческий математик и философ Пифагор (570-500 гг. до н. э.). Как полагают, первому доказать шарообразность Земли удалось величайшему мыслителю древности Ари-

стотелю (384-322 гг. до н. э.). Наблюдая лунные затмения, он подметил, что край земной тени, падающей на Луну, всегда имеет круглую форму.

С того времени, когда Землю стали принимать за шар, определение ее размеров сводилось к установлению длины отрезка дуги большого круга, равной одному градусу. Градусные измерения в то время заключались в измерении расстояния между некоторыми двумя точками на земной поверхности, расположенными на одном меридиане, и определении из астрономических наблюдений широт этих двух точек. Если  $s$  – длина измеренной дуги меридиана,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – широты ее конечных точек, то можно вычислить радиус Земли  $R$ :

$$R = s_{1^\circ} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}, \quad (2.1)$$

где  $s_{1^\circ}$  - длина дуги в  $1^\circ$ .

Первое такое определение радиуса Земли выполнено Эратосфеном Киренским (около 276-194 гг. до н. э.). Он измерил разности широт городов Александрии и Сиены (в настоящее время Асуан) исходя из предположения, что эти города лежат на одном меридиане.

Эратосфен знал, что в Сиене в полдень, в день летнего солнцестояния, Солнце находится в зените. В Александрии в то же самое время зенитное расстояние Солнца равнялось  $1/50$  части окружности, т. е.  $7,2^\circ$ . По данным проводников торговых караванов, расстояние между Александрией и Сиеной равнялось 5000 стадий (1 египетский стадий равняется 158 м). Эратосфен получил радиус Земли около 6290 км (по современным данным, средний радиус Земли составляет 6371 км).

Примерно через тысячу лет после Эратосфена, в 827 г., арабские ученые получили радиус земного шара в переводе на современные меры длины 6340 км. Таким образом, уже в древности размеры Земли были известны со сравнительно высокой точностью.

В 1528 г. французский врач Жан Фернель (1497-1558) выполнил измерения дуги меридиана от Парижа до Амьена. Величина  $1^\circ$  дуги меридиана у него составила 110,6 км.

Около века спустя, в 1614-1617 гг., голландский ученый В. Снеллиус впервые применил метод триангуляции, в котором линейная протяженность большой дуги меридиана на поверхности Земли измерялась через систему последовательно сопряженных треугольников. Он получил длину дуги меридиана в  $1^\circ$  величиной 107,335 м.

В 1669-1670 гг. французский ученый Жан Пикар (1620-1682) измерил дугу меридиана Фернеля, но с более высокой точностью. В своих измерениях он значительно усовершенствовал метод триангуляции, предложенный голландским ученым Снеллиусом. По дуге меридиана длиной  $1^\circ 22' 55''$  между Парижем и Амьеном была проложена цепочка из 13 треугольников, опиравшихся на 2 базиса (12 и 8 км). В угловых измерениях Пикар применил зрительные трубы с сеткой нитей. Базисные измерения выполнялись с помощью деревянных жезлов, укладываемых в створе измеряемой линии. В результате измерений и последующих вычислений он получил длину дуги меридиана в  $1^\circ$ , равной 111,212 км (по современным данным - 111,18 км). В 1671 г. Пикар опубликовал свой труд «Измерение Земли», в котором обобщил результаты своих триангуляционных измерений дуги Париж - Амьен и высказал предположение о том, что форма Земли не является шаром. Таким образом, измерения Пикара явились последним определением радиуса Земли, рассматривавшейся как шар.

Английский математик, механик, астроном и физик Исаак Ньютон (1643-1727), узнав о результатах, полученных Пикаром, убедился в правоте своей теории всемирного тяготения. Основные выводы относительно законов движения он изложил в своем главном труде «Математические начала натуральной философии». В этой работе он впервые изложил теорию фигуры Земли. Ньютон теоретически доказал, что поверхность Земли, согласно закону всемирного тя-



готения и под действием центробежной силы, должна иметь форму сфероида, а не шара, а именно представляет собой шар, расширенный у экватора и сплюснутый у полюсов. Результаты, полученные Пикаром, Ньютон использовал для расчета величины сжатия Земли, которая получилась равной 1:230.

В свою очередь Пикар, желая подтвердить теорию Ньютона применительно к фигуре Земли, разработал проект градусных измерений с целью определения и сравнения двух меридианных дуг, лежащих на разных широтах, и определения сжатия Земли. Однако Пикару не успел осуществить свой проект.

Реализацией проекта занялись французские астрономы и геодезисты отец и сын Кассини: Джованни Доменико Кассини (1625-1712) – первый директор Парижской обсерватории с 1669 г. и Жак Кассини (1677-1756) - директор обсерватории с 1712 г. К 1718 году были закончены измерения, результаты которых показали, что Земля имеет сжатие не по полюсам, а по экватору, т. е. опровергали выводы Ньютона.

Для установления истины – сжата Земля или вытянута вдоль полярной оси – Французская академия наук организовала две экспедиции. Одна из них в 1736-1737 гг. измерила дугу меридиана на севере Скандинавии (на границе современных Швеции и Финляндии). Другая экспедиция продолжалась с 1735 по 1742 гг. и измерила дугу меридиана в Перу (нынешний Эквадор). Результаты градусных измерений, выполненных обеими экспедициями, подтвердили правоту Ньютона и дали правильное представление о сжатии Земли.

В период Французской буржуазной революции были выполнены измерения дуги меридиана с целью установления новой единицы длины – метр. Эти градусные измерения выполнялись в 1792-1799 гг. под руководством двух французских астрономов и геодезистов - Пьера Фрасуа Андре Мешеня (1744-1804) и Жана Батиста Жозефа Деламбра (1749-1822), иностранного почетного члена Петербургской АН (1810). Дуга меридиана протяженностью по широте 9°40' частично совпадала с дугой меридиана Кассини и пересекала всю Фран-

цию от Дюнкерка (на берегу пролива Па-де-Кале) до Барселоны (на Средиземноморском побережье Испании). Измерения позволили вычислить четверть дуги Парижского меридиана, а  $1/10\ 000\ 000$  часть этой четверти была принята в качестве единицы измерения длины - 1 метр.

Результаты Лапландской экспедиции и измерения Деламбура позволили вычислить сжатие Земли, равное 1:300, которое длительное время считалось общепринятым.

Таким образом, проблема определения формы и размеров Земли была решена в XVIII веке по результатам геодезических измерений. Измерения, выполненные во Франции, положили начало градусным измерениям по меридиану, которые стали быстро развиваться с конца XVIII века во многих странах Европы. Несколько позже стали производиться градусные измерения и по параллелям.

Восемнадцатый век знаменит еще и тем, что к геодезическим методам определения сжатия Земли добавились другие методы, основанные на теоретических положениях небесной механики и других наук. Французский математик и астроном Алексис Клод Клеро (1713-1765), член Французской академии наук, участник экспедиции в Лапландию, представил теорию строения Земли в книге «Теория фигуры Земли». Он получил уравнение, с помощью которого можно вычислить сжатие Земли по разности силы тяжести на экваторе и на полюсе.

В конце XVIII в. французский астроном, математик, физик Пьер Симон Лаплас (1749-1827) на основе изучения движения Луны и результатов измерения силы тяжести получил величину сжатия Земли, примерно равную 1:300. Основываясь на материалах градусных измерений, он обнаружил отклонения отвесных линий (угол между направлением нормали к поверхности земного эллипсоида в точке и отвесной линией), что послужило поводом для вывода известного уравнения, названного его именем. Уравнение Лапласа определяет разность геодезического и астрономического азимутов.

Большое значение имела его первая научная работа, связанная с теорией азартных игр. Для нахождения средних значений случайных величин Лаплас предложил «метод наименьших квадратов». Этот метод получил дальнейшую разработку в работах немецкого математика, геодезиста и физика Карла Фридриха Гаусса (1777-1855) и до настоящего времени широко применяется во многих уравнительных вычислениях.

Первые значительные триангуляционные работы в России были начаты в 1816 г. под руководством Карла Ивановича Теннера (1783-1860), русского военного геодезиста и астронома, почетного члена Петербургской АН. Он впервые ввел деление триангуляции на классы, разработал один из типов базисных приборов для измерения выходных сторон в триангуляции, усовершенствовал методику угловых измерений.

Одновременно с работами К. И. Теннера в Прибалтийских губерниях приступил к градусным измерениям другой выдающийся российский астроном, член Петербургской АН, первый директор Пулковской обсерватории Василий Иванович Струве (1793-1864).

В 1830 г. К. И. Теннер и В. И. Струве продолжили совместную работу и завершили в 1852 г. градусные измерения дуги протяженностью в  $25^{\circ} 20'$  от устья Дуная до Северного Ледовитого океана. Эти измерения неоднократно использовались учеными для вывода размеров земного эллипсоида.

Выдающийся немецкий астроном и геодезист Фридрих Вильгельм Бессель (1784-1846) посвятил геодезии значительное число своих трудов. Он использовал десять лучших измерений длины градуса меридиана, в том числе измерения, выполненные Теннером и Струве, для вывода размеров эллипсоида, названного его именем. Эллипсоид Бесселя применялся в России при обработке результатов геодезических измерений вплоть до 1942 года.

Определение размеров эллипсоида, наиболее подходящего для территории России, неразрывно связано с деятельностью Феодосия Николаевича Кра-

совского (1878-1948) – выдающегося ученого, геодезиста, картографа, члена-корреспондента АН СССР. Он решил важнейшую проблему страны того времени: составил схему и программу построения государственной опорной астрономо-геодезической сети. В 1940 году при участии его ученика, а впоследствии видного ученого профессора А. А. Изотова, были выведены размеры принятого в СССР и законодательно утвержденного в 1946 г. эллипсоида, получившего название «эллипсоид Красовского».

При решении задач геодезии использовали поверхность эллипсоида вращения, имеющего малое сжатие, как геометрическое тело достаточно простой формы, наиболее приближенное к реальной фигуре Земли. Вместе с тем знание геометрии земного эллипсоида оказалось недостаточным, так как получение высокоточных результатов геодезических измерений требовало учета данных физики Земли.

Каждая точка на земной поверхности испытывает воздействие двух основных сил: силы земного притяжения и центробежной силы, возникающей вследствие суточного вращения Земли. Сила земного притяжения  $\vec{F}$  зависит от формы, размеров и массы Земли, а также от распределения аномальных плотностей. Центробежная сила  $\vec{P}$  направлена вдоль радиуса параллели, на которой находится материальная точка. Обе силы являются векторами, имеющими противоположные знаки, а равнодействующая сила является суммой векторов  $\vec{F}$  и  $\vec{P}$  и носит название силы тяжести  $g$ :

$$g = \vec{F} + \vec{P}. \quad (2.2)$$

Сила тяжести  $g$  изменяется в зависимости от широты точки и достигает наибольшей величины на полюсах и наименьшей – на экваторе.

Наука об измерении силы тяжести называется гравиметрией. В гравиметрии за единицу ускорения силы тяжести принята единица, называемая Гал (1 Гал = 1 см · с<sup>-2</sup>).

Силовое поле, обусловленное земным притяжением и центробежной силой, называют полем силы тяжести, или гравитационным полем Земли. В гравиметрии для описания поля силы тяжести используют скалярную функцию – потенциал. Потенциалом вектора называют скалярную функцию координат, частные производные которой по любому направлению равны проекциям вектора на это направление. Часть потенциала силы тяжести, обусловленную только притяжением масс Земли, называют потенциалом земного притяжения, или геопотенциалом.

Производная от потенциала силы тяжести  $W$  по любому направлению  $s$  в точке равна проекции этой силы на данное направление:

$$\frac{\partial W}{\partial s} = g \cos(g, s), \quad (2.3)$$

где  $g$  – значение силы тяжести в точке;

$(g, s)$  – угол между направлением силы тяжести и направлением  $s$ , по которому перемещается единичная масса.

Если материальная точка  $A$  перемещается под прямым углом к вектору силы тяжести  $\vec{g}$  (рис. 2.1, а), т. е.  $\cos(g, s) = 0$ , то получим;

$$\frac{dW}{ds} = 0, \quad dW = 0, \quad W = C = \text{const}. \quad (2.4)$$

Поверхность, во всех точках которой потенциал силы тяжести имеет одно и то же значение ( $W = \text{const}$ ), называют уровенной поверхностью Земли.

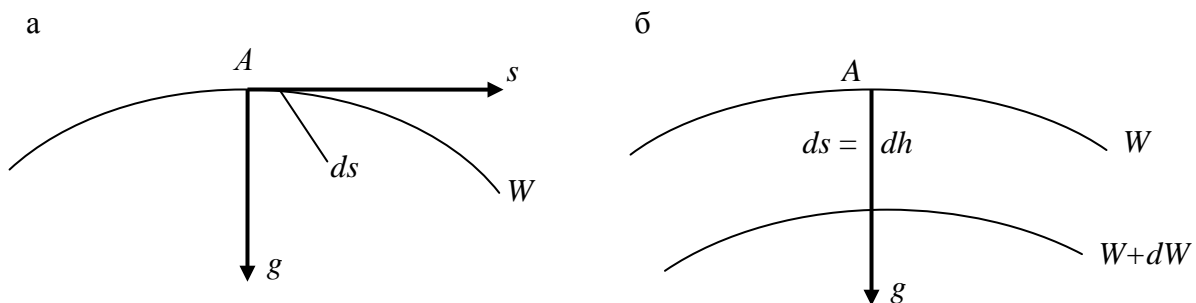


Рис. 2.1. Схема перемещения материальной точки  $A$ :  
 а – перпендикулярно к вектору силы тяжести  $g$ ;  
 б – вдоль вектора силы тяжести  $g$

При различных значениях  $C$  получим бесчисленное множество уровенных поверхностей. Заметим, что находящаяся только под действием силы тяжести поверхность воды совпадает с одной из уровенных поверхностей.

Если материальная точка  $A$  перемещается с одной уровенной поверхности на другую, находящуюся на бесконечно малом расстоянии  $ds=dh$ , по направлению вектора силы тяжести  $\vec{g}$  (рис. 2.1, б), т. е.  $\cos(g, s) = 1$ , то получим:

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dh} = g, \text{ или } dW = gdh, \text{ откуда } dh = \frac{dW}{g}. \quad (2.5)$$

Анализируя формулы (2.4) и (2.5), сделаем следующие весьма важные выводы (рис. 2.2):

- уровенные поверхности Земли нигде не соприкасаются, не пересекаются и не параллельны между собой;
- уровенные поверхности сближаются между собой на полюсах и удаляются на экваторе;
- уровенные поверхности Земли имеют волнообразный вид из-за наличия внутри ее аномальных по плотности масс.

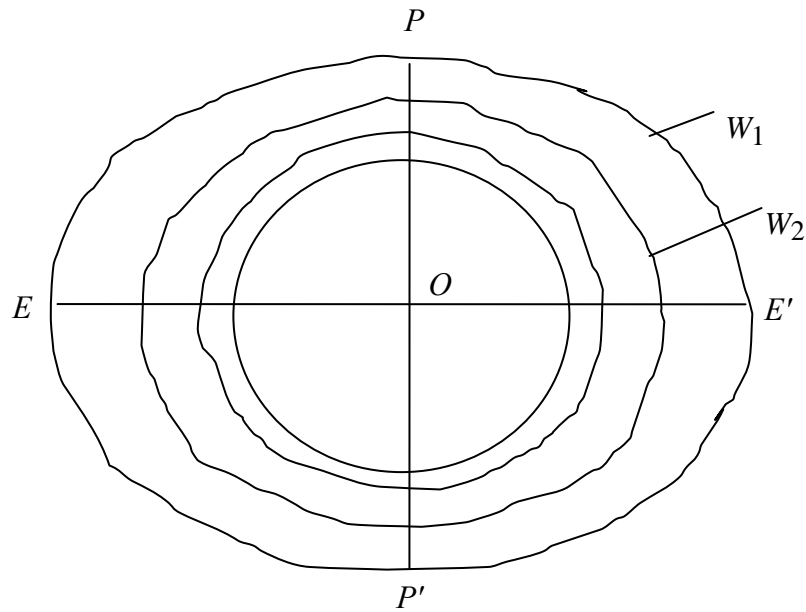


Рис. 2.2. Уровненные поверхности Земли

Под поверхностью Земли можно понимать поверхность ее твердой оболочки, т. е. поверхность суши и дна океанов и морей. Однако дно океанов и морей скрыто под толщей воды, а деятельность человека протекает в основном на поверхности суши и океана. Поэтому в настоящее время под поверхностью Земли, или ее физической поверхностью, понимают поверхность суши на материках и поверхность океанов и морей. Суша составляет около 29 % земной поверхности, а остальная часть - около 71 %, покрыта океанами и морями. Поэтому за фигуру Земли в первом приближении можно принять фигуру, ограниченную невозмущенной поверхностью океанов и морей и продолженную под материками так, чтобы отвесные линии во всех ее точках были перпендикулярны к ней. Такую фигуру немецкий математик и физик Иоганн Бенедикт Листинг (1808 -1882) предложил в 1873 г. назвать *геоидом*.

Изучением геоида геодезия занимается около 150 лет. Во второй половине XX века началось широкое применение искусственных спутников Земли в геодезических целях. Это позволило изучать геоид с высокой точностью методом спутниковой альтиметрии (спутниковая альтиметрия – метод исследования

гравитационного поля Земля, основанный на высокоточном измерении высоты спутника над поверхностью океана). Эти измерения показали, что невозмущенная морская поверхность не везде совпадает с уровенной поверхностью потенциала силы тяжести: в отдельных районах отклонения по высоте достигают  $\pm 1,5-2$  м.

Изучение фигуры геоида на суше аналогичным методом невозможно, так как геоид проходит под поверхностью суши, а другие методы, в том числе и методы космической геодезии, дают недостаточную точность. Для изучения фигуры геоида с высокой точностью с помощью наземных измерений необходимо силу тяжести измерять непосредственно на его поверхности, что практически невозможно.

Известный советский ученый Михаил Сергеевич Молоденский (1909-1991) – выдающийся геодезист и геофизик, член-корреспондент АН СССР - доказал, что по результатам комплекса наземных астрономо-геодезических и гравиметрических измерений теоретически строго может быть определена другая вспомогательная поверхность – поверхность *квазигеоида* (квази – часть сложных слов, соответствующая по значению словам «почти», «близко»). Поверхность квазигеоида совпадает с геоидом на морях и океанах и незначительно отклоняется от поверхности геоида: в равнинной местности на 2-4 см, в горах – не более 2 м. Таким образом, определив из обработки результатов измерений параметры квазигеоида и измерив относительно него высоты точек земной поверхности, можно изучить фигуру реальной Земли. Такая фигура Земли ограничена ее твердой оболочкой на суше и невозмущенной поверхностью морей и океанов [25].

Для научного и практического решения задач геодезии необходима обобщенная и сравнительно простая математическая аппроксимация фигуры Земли. Наиболее удобным представлением фигуры Земли является земной эллипсоид (рис. 2.3).



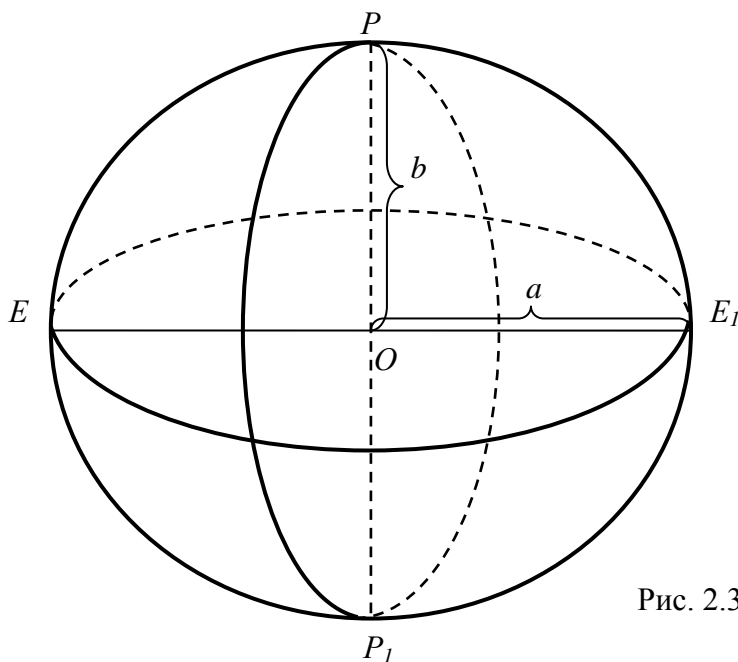


Рис. 2.3. Земной эллипсоид

Земным эллипсоидом называют эллипсоид вращения, параметры которого подбирают под условием наилучшего соответствия фигуре геоида или, более строго, квазигеоида. Его поверхность может быть получена вращением эллипса  $PEP_1E_1$  вокруг его малой оси  $PP_1$ .

Эллипсоид вращения, параметры которого подбирают под условием наилучшего соответствия фигуре квазигеоида (геоида) в пределах всей Земли, называют *общим земным эллипсоидом*.

Параметры общего земного эллипсоида определяют с учетом следующих условий:

- центр общего земного эллипсоида должен совпадать с центром масс Земли, а его малая ось – с осью вращения Земли;
- объем эллипсоида должен быть равен объему квазигеоида (геоида);
- сумма квадратов отклонений по высоте поверхности эллипсоида от поверхности квазигеоида (геоида) должна быть наименьшей.

Для обработки результатов геодезических измерений в пределах одной страны или группы рядом расположенных стран определяют эллипсоид, размеры и ориентирование которого в теле Земли наиболее подходит для данной

территории. Такие эллипсоиды носят название *референц-эллипсоидов* (рис. 2.4).

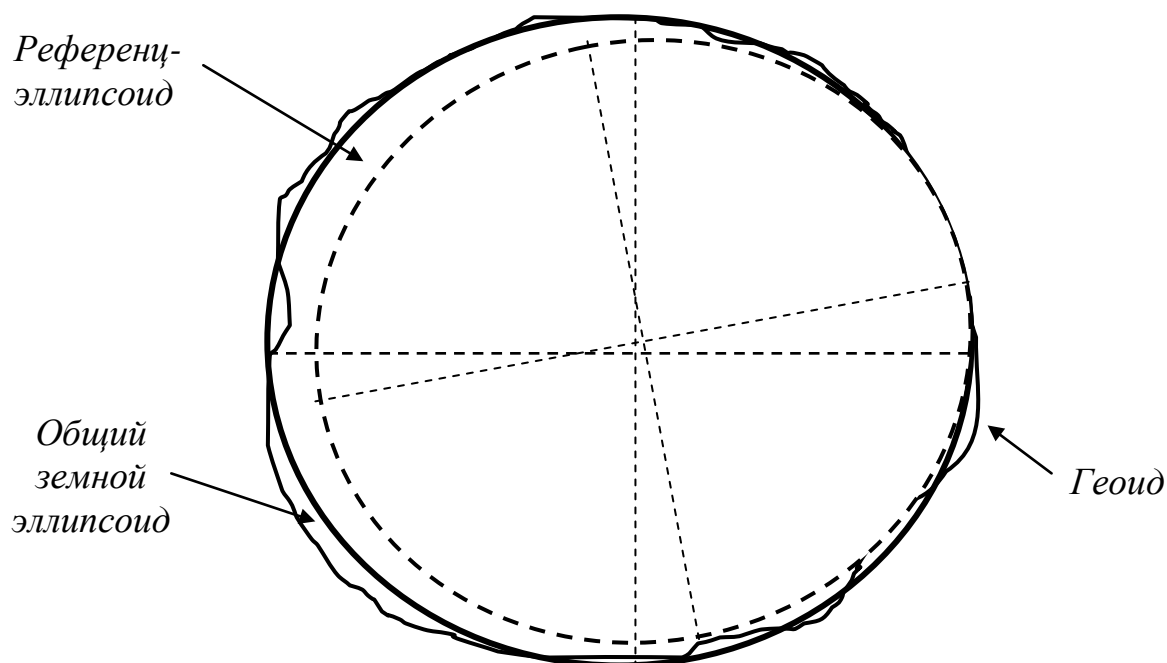


Рис. 2.4. Геоид, общий земной эллипсоид, референц-эллипсоид

Форму, размеры и ориентировку референц-эллипсоида определяют следующие требования:

- параметры референц-эллипсоида должны, возможно, меньше отличаться от параметров общего земного эллипсоида;
- ось вращения референц-эллипсоида должна быть параллельна оси вращения Земли, а плоскость его экватора – плоскости экватора Земли;
- в пределах территории страны или группы стран, для которых рассчитан референц-эллипсоид, сумма квадратов отклонений поверхности квазигеоида (геоида) от поверхности референц-эллипсоида должна быть наименьшей.

При выполнении геодезических работ на территории России, СНГ и некоторых других стран используют референц-эллипсоид Красовского.

### 3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ГЕОДЕЗИИ

В основе развития всех направлений геодезии лежит установление систем координат, связанных не только с поверхностью Земли, но и вне ее поверхности.

Потребность в умении выбирать системы координат и распространить их на все окружающее пространство появилась во времена Древней Греции и Римской империи [24]. Использование систем координат было вызвано необходимостью в ориентации при строительстве различных сооружений, при движении на незнакомой местности, при совершении морских путешествий. В качестве ориентирующей координатной линии принималась полуденная линия, которая определялась по Солнцу или другим небесным светилам.

#### 3.1. Сферические системы координат в астрономии

Самым большим пространством для наблюдений явилось звездное небо. Все небесные объекты находятся на разных расстояниях от нас. Вместо действительных положений небесных светил в пространстве рассматривали их проекции на поверхность воображаемой небесной сферы, в центре которой находился наблюдатель. Наблюдения светил потребовали определения их координат и введения сферической системы координат (рис. 3.1).

Главными ориентирующими линиями являлись отвесная линия и линия, вокруг которой вращается звездное небо, т. е. ось вращения Земли, или ось мира. На таких линиях устанавливались важнейшие точки на пересечении прямой, проходящей через центр сферы  $O$ , со сферой: для отвесной линии – точки зенита и надира  $Z$  и  $Z'$ , для оси мира – полюсы мира  $P$  и  $P'$ .

Плоскости, проходящие через центр такой сферы и перпендикулярные от-

весной линии или оси мира, называли истинным горизонтом и небесным экватором соответственно.

С геометрической точки зрения зенит  $Z$  и надир  $Z'$  являются полюсами по отношению к математическому горизонту, а полюсы мира  $P$  и  $P'$  являются полюсами по отношению к небесному меридиану.

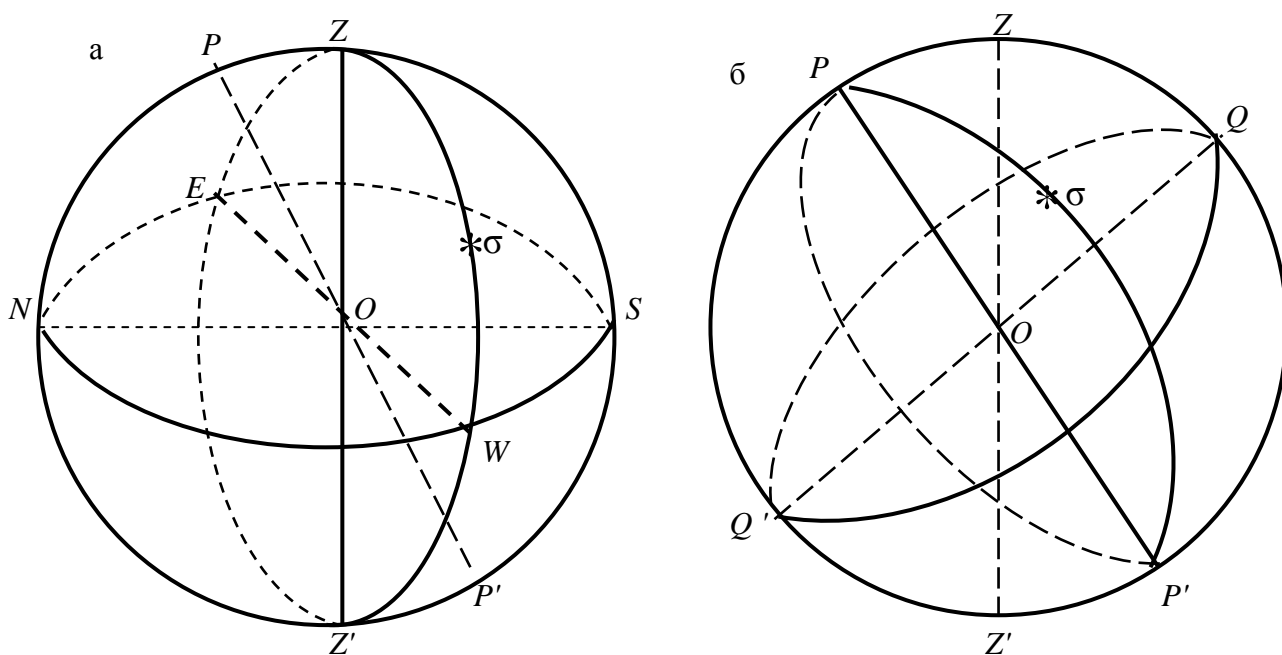


Рис. 3.1. Сферические системы координат

Плоскости, проходящие через отвесную линию  $ZZ'$ , называют вертикальными плоскостями, а их сечения небесной сферой – вертикалами, или кругами высот (рис. 3.1, а).

Сечение небесной сферы плоскостью, проходящей через ось мира  $PP'$  и какое-либо светило  $\sigma$ , называют кругом склонения этого светила (рис. 3.1, б).

Вообще сферическая система координат задается положением на сфере двух больших кругов, которые образуются при пересечении сферы плоскостями, проходящими через ее центр и расположенными взаимно перпендикулярно (рис. 3.2).

Одна из двух точек, в которых эти круги пересекаются, принимается за начальную точку, например точка  $G$ , при определении одной из сферических координат светила.

Один из больших кругов, например  $NG\sigma'S$ , пусть будем основным, а другой -  $ZGZ'$  – начальным. Сферическими координатами светила  $\sigma$  будут: дуга  $G\sigma' = \alpha$  и дуга  $\sigma\sigma' = \beta$ .

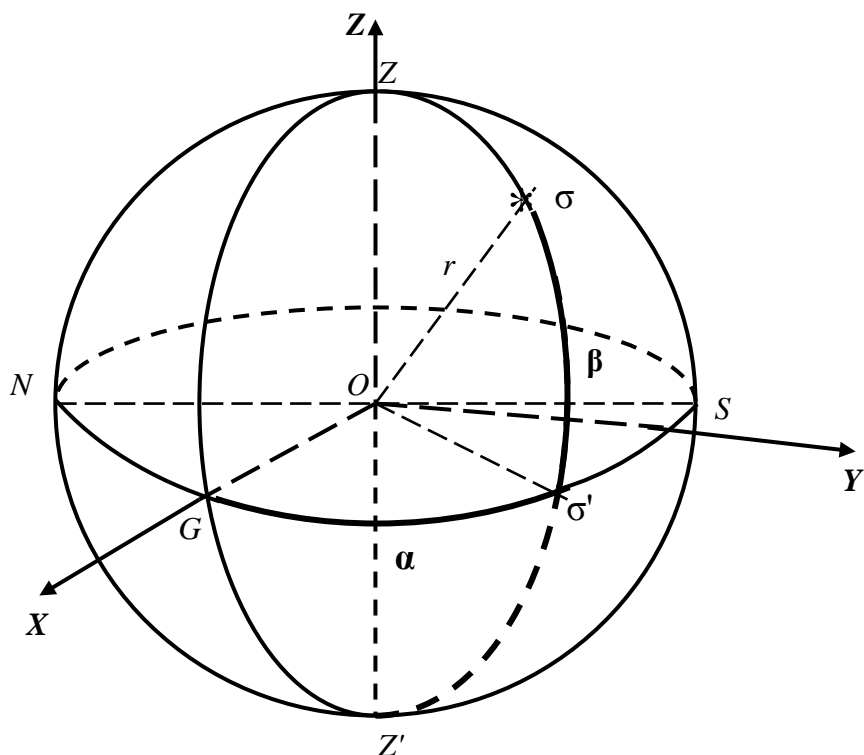


Рис. 3.2. Сферические координаты

В прямоугольной системе координат в пространстве  $OXYZ$  плоскость  $OXY$  совпадает с большим кругом сферы  $NG\sigma'S$ , ось  $Z$  – с отвесной линией  $ZZ'$ , ось  $X$  направлена в точку  $G$ , ось  $Y$  дополняет систему до правой. Связь между прямоугольными координатами светила  $\sigma$  в пространстве и его сферическими координатами при радиусе сферы  $r$  выражается формулами:

$$\begin{aligned} X &= r \cos \beta \cos \alpha; \\ Y &= r \cos \beta \sin \alpha; \\ Z &= r \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Часто значение радиуса небесной сферы принимают равным единице.

Система сферических координат применяется в геодезической астрономии.

Положение светила на небесной сфере относительно принятой основной плоскости и точки начала отсчета однозначно определяется двумя угловыми величинами, которые носят название небесных координат.

Системы небесных координат отличаются друг от друга выбором основной плоскости (основного круга), полюса системы и главного круга и носят названия: горизонтальная (горизонтная) (рис. 3.3), первая экваториальная (рис. 3.4), вторая экваториальная (см. рис. 3.5) системы небесных координат.

**Горизонтальная** система координат определяется следующими линиями и точками (см. рис. 3.3):

- основной круг - математический горизонт  $NESW$ ;
- полюс системы – зенит  $Z$ ;
- главный круг – небесный меридиан  $PZQ'SP'Z'QN$ ;
- начальная точка – точка севера  $N$ .

Положение светила  $\sigma$  на небесной сфере относительно принятых кругов и точек определяется двумя координатами: высотой светила  $h$  и азимутом  $A$ .

Высота светила  $h$  отсчитывается от  $0^\circ$  до  $\pm 90^\circ$  (по направлению к зениту плюс, к надиру - минус). Вместо высоты светила  $h$  часто пользуются зенитным расстоянием  $z$  (дуга  $Z\sigma$ ), отсчитываемым от точки зенита  $Z$  от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ .

Связь между зенитным расстоянием и высотой светила выражается формулой  $z + h = 90^\circ$ .

Азимут светила  $A$  отсчитывается от точки севера  $N$  (в астрономии от точки юга  $S$ ) до меридиана, проходящего через светило  $\sigma$  и называемого вертикалом, или кругом высот, от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .

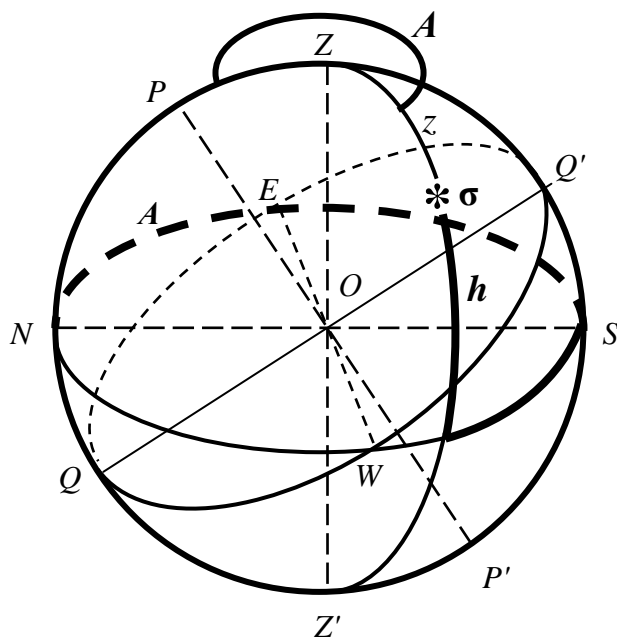


Рис. 3.3. Горизонтальная система координат

Горизонтальная система координат применяется для непосредственного определения видимого положения светила с помощью угломерных инструментов.

**Первая экваториальная** система координат определяется следующими линиями и точками (см. рис. 3.4):

- основной круг – небесный экватор  $QQ'$ ;
- полюс системы – северный полюс мира  $P$ ;
- главный круг – небесный меридиан  $PZQ'SP'Z'Q$ ;
- начальная точка – верхняя точка пересечения небесного меридиана с небесным экватором  $Q$ .

Положение светила  $\sigma$  на небесной сфере определяется двумя координатами: склонением  $\delta$  и часовым углом  $t$ .

Склонением светила  $\sigma$  называют дугу круга склонения от небесного экватора до данного светила. Оно отсчитывается от небесного экватора по направлению к северному полюсу мира от  $0^\circ$  до  $+90^\circ$  и к южному – от  $0^\circ$  до  $-90^\circ$ . Склонение определяет положение светила на круге склонения. Положение круга склонения определяется второй координатой  $Q\sigma'$  – часовым углом, отсчитываемым от северной точки небесного экватора  $Q$  по ходу часовой стрелки

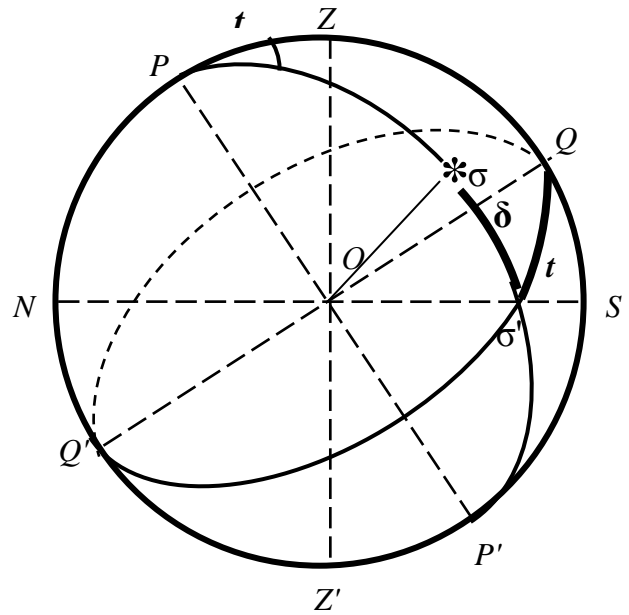


Рис. 3.4. Первая экваториальная система координат

склонения светила. Он непрерывно изменяется пропорционально времени и измеряется от 0 до  $24^h$ .

Первая экваториальная система координат применяется преимущественно при определении звездного времени – одной из основных задач практической астрономии.

**Вторая экваториальная** система координат определяется следующими линиями и точками:

- основной круг – небесный экватор  $Q'Q''$ ;
- полюс системы – северный полюс мира  $P$ ;
- главный круг – круг склонения точки весеннего равноденствия  $\gamma$ ;
- начальная точка – точка весеннего равноденствия  $\gamma$ .

Точка весеннего равноденствия  $\gamma$  – это одна из точек пересечения эклиптики, вдоль которой происходит видимое годичное движение Солнца, и небесного экватора.



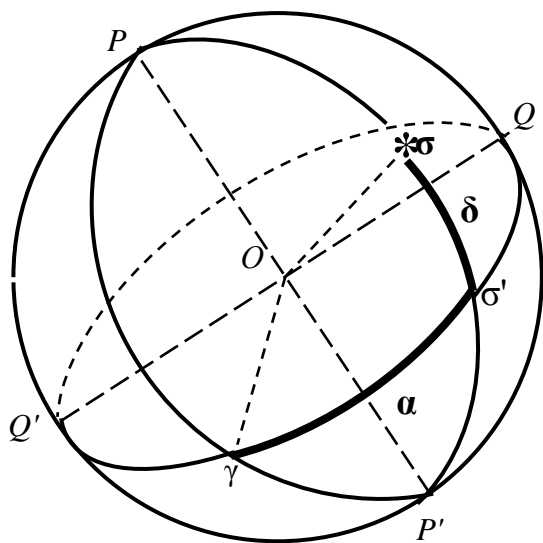


Рис. 3.5. Вторая экваториальная система координат

Положение светила  $\sigma$  на небесной сфере в этой системе координат определяется двумя координатами: склонением  $\delta$ , как и в первой экваториальной системе координат, и прямым восхождением  $\alpha$ .

Прямым восхождением светила  $\alpha$  называют дугу небесного экватора  $\gamma\sigma'$ , отсчитываемую от точки весеннего равноденствия против хода часовой стрелки, т. е. в направлении, противо-

воположном видимому суточному вращению небесной сферы, до круга склонения данного светила. Прямое восхождение, как и часовой угол, измеряют в часовой мере.

Прямое восхождение и склонение светила определяют на обсерваториях и публикуют в астрономических ежегодниках и звездных каталогах.

Связь между координатами горизонтальной ( $z$  и  $A$ ) и первой экваториальной ( $\delta$  и  $t$ ) системами координат одного и того же светила  $\sigma$  устанавливают с помощью параллактического треугольника  $PZ\sigma$  (рис. 3.6) и формул сферической тригонометрии. Так как горизонтальные координаты зависят от места наблюдения, широту места наблюдения  $\varphi$  считают известной величиной.

Из треугольника  $PZ\sigma$  имеем:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t; \\ \sin z \cos A &= \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t; \\ -\sin z \sin A &= \cos \delta \sin t. \end{aligned} \tag{3.2}$$

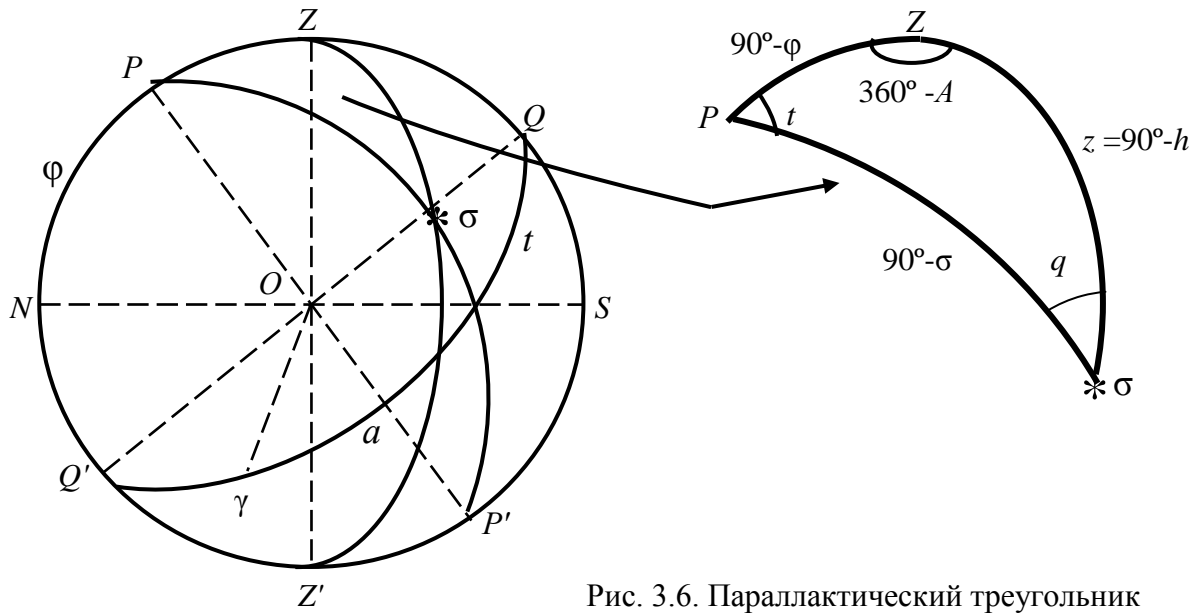


Рис. 3.6. Параллактический треугольник

Для установления связи между координатами первой и второй экваториальных систем координат достаточно найти связь между прямым восхождением  $\alpha$  и часовым углом  $t$ , так как склонение светила  $\delta$  является одинаковым в обеих системах координат, то

$$t_\gamma = \alpha + t. \quad (3.3)$$

где  $t_\gamma$  - часовой угол точки весеннего равноденствия.

Часовой угол точки весеннего равноденствия численно равен звездному времени  $s$  в момент наблюдения в данной точке. Поэтому уравнение (3.3) можно записать так:

$$s = \alpha + t. \quad (3.4)$$

В формуле (3.4) все величины выражаются в часовой мере.

### 3.2. Географическая система координат

Древнегреческий ученый Гиппарх (ок. 180 или 190-125 до н. э.) определял местоположение пунктов земной поверхности из астрономических наблю-

дений и ввел сетку меридианов и параллелей для построения географических карт. С его именем связано появление географических координат: широты (расстояние от экватора до данного пункта в направлении к полюсам) и долготы (расстояние к востоку или к западу от начального меридиана) [24]. Гиппарх предложил определять астрономическим способом широты и долготы большого количества пунктов по всему миру. Это позволило бы реализовать его идею создания единой опорной сети для уточнения карт мира.

В географической системе координат (рис. 3.7) началом является центр Земли, принимаемой за шар, а координатными плоскостями – плоскость земного экватора и плоскость нулевого (начального) меридиана.

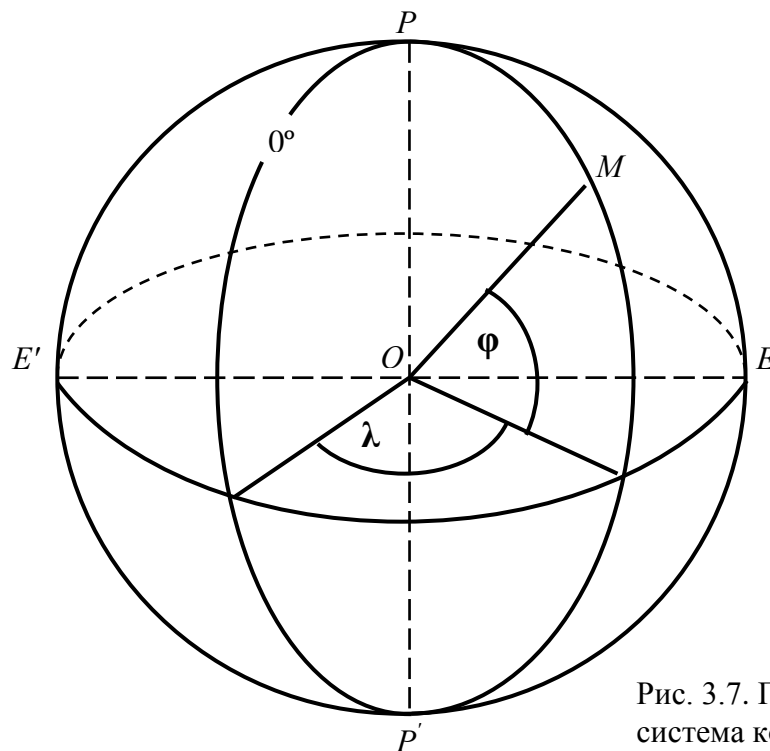


Рис. 3.7. Географическая система координат

Положение точки  $M$  на земной поверхности определяется двумя координатами: географической широтой и географической долготой.

Географической широтой  $\phi$  называют угол между плоскостью земного экватора и радиусом, проведенным в точку  $M$  на поверхности шара.

Географическая широта отсчитывается от экватора к северу от  $0^\circ$  до  $+90^\circ$  (северная широта) и к югу от  $0^\circ$  до  $-90^\circ$  (южная широта).

Линии пересечения земной поверхности плоскостями, проходящими через ось вращения Земли, называют географическими меридианами.

Географической долготой  $\lambda$  называют угол между географическим меридианом, проходящим через точку  $M$ , и нулевым меридианом.

Географическая долгота  $\lambda$  отсчитывается от нулевого меридиана к востоку от  $0^\circ$  до  $+180^\circ$  (восточная долгота) и к западу - от  $0^\circ$  до  $-180^\circ$  (западная долгота).

Основным способом определения географических координат являлся астрономический способ. На протяжении более 2000 лет, исходя из того, что Земля является шаром, различные ученые от Дикеарха, Эратосфена и других до Пикара занимались определением только размеров Земли как шара, т. е. величины ее радиуса.

Выдающиеся открытия ученых XVIII в., результаты объемных геодезических работ, организованных Французской академией наук, доказали, что Земля не является шаром. За фигуру Земли в первом приближении приняли геоид (см. раздел 2).

В дальнейшем положение точек, определяемых астрономическим способом по наблюдениям звезд, стали относить к поверхности геоида, а координаты точек называть астрономическими. По своей сути это были географические координаты, но теперь они определялись не относительно радиуса шара, а отвесной линии, перпендикулярной к поверхности геоида. Вероятно, следует согласиться с авторами работы [16], которые вкладывают в понятия географические и астрономические координаты одинаковый смысл.

За астрономическими координатами сохранили обозначения  $\varphi$  и  $\lambda$  и называли их астрономической широтой и астрономической долготой соответственно. Позднее шар был заменен эллипсоидом вращения, форма которого

больше соответствовала земной поверхности. Геодезические координаты  $B$  и  $L$  точек земной поверхности определяли относительно нормалей к поверхности эллипсоида в этих точках, но их продолжали отождествлять с астрономическими координатами  $\varphi$  и  $\lambda$ . По мере повышения точности геодезических и астрономических измерений выявились существенные различия между значениями астрономических и геодезических координат одной и той же точки земной поверхности. Однако термин «географические координаты» сохранился за обеими системами координат.

В высшей геодезии рассматриваются система геодезических и система астрономических координат, существенные различия между которыми связаны с уклонением отвесных линий.

### 3.3 Геодезическая система координат

Бурное развитие математики, физики, небесной механики в XVII-XVIII веках требовало высокой точности измерений, которая могла быть достигнута только с применением новых систем координат. Это, в свою очередь, вызывало необходимость определения фигуры Земли, которое стало основной научной задачей высшей геодезии.

За фигуру Земли стали принимать земной эллипсоид, форма и размеры которого с необходимой точностью соответствуют форме и размерам Земли.

Уравнение поверхности двухосного эллипсоида вращения имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (3.5)$$

где  $a$  и  $b$  – большая и малая оси эллипсоида соответственно.

Уравнение (3.5) соответствует системе прямоугольных координат в пространстве, начало которой совмещено с центром эллипсоида (рис. 3.8).

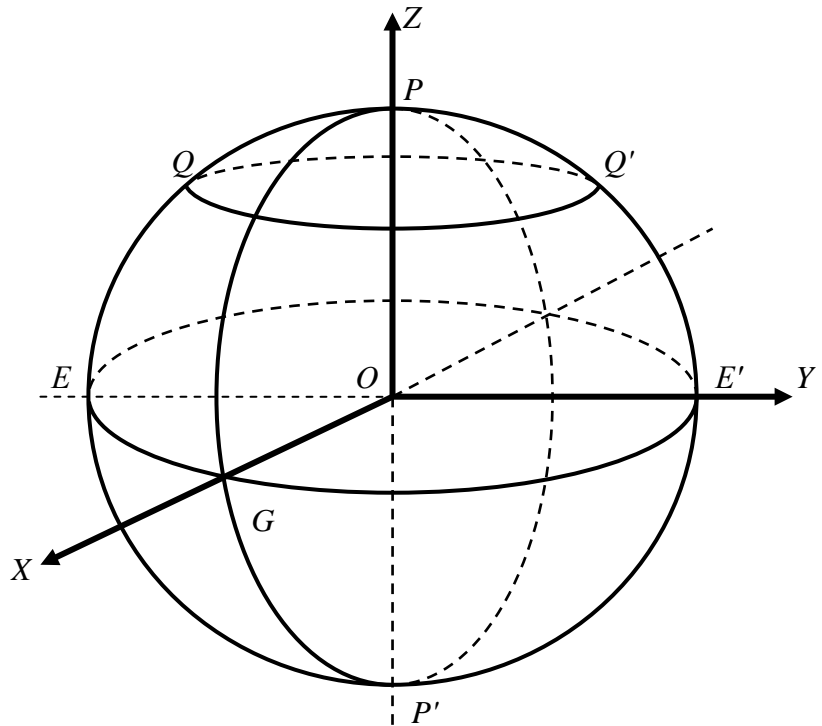


Рис.3.8. Система прямоугольных координат в пространстве, связанная с эллипсоидом вращения

Координатную плоскость  $XOY$  называют плоскостью экватора. Сечения поверхности эллипсоида плоскостями, перпендикулярными к его оси вращения  $PP'$ , представляют собой окружности, называемые параллелями.

Плоскости, проходящие через малую ось эллипсоида, называют меридианными плоскостями, а сечение ими поверхности эллипсоида – меридианами (например,  $PGP'$  - меридиан).

Форму эллипсоида определяет относительная величина – сжатие эллипсоида  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{a - b}{a}. \quad (3.6)$$

где  $a$  и  $b$  – большая и малая полуоси эллипсоида соответственно.

При решении многих задач геодезии пользуются величинами первого  $e$  и второго  $e'$  эксцентриситетов:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (3.7)$$

За координатные линии на поверхности эллипсоида выбирают сетку меридианов и параллелей. Если принять за начальный один из меридианов

(например, меридиан  $PGP'$ ), то положение другого меридиана, проходящего через точку  $M$  можно определить двугранным углом между плоскостями начального и данного меридианов (рис. 3.9).

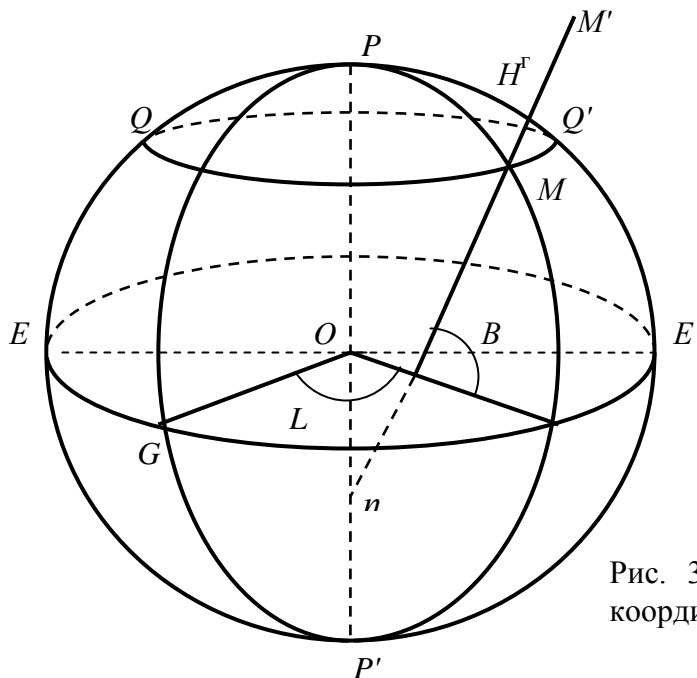


Рис. 3.9. Геодезическая система координат

Этот угол будет иметь одно и то же значение для всех точек, лежащих на данном меридиане, и может быть принят в качестве одной из координат точки на поверхности эллипсоида. Эту координату называют *геодезической долготой* и обозначают  $L$ .

Геодезическая долгота  $L$  – двугранный угол между плоскостями начального геодезического меридиана и геодезического меридиана данной точки. Плоскостью геодезического меридиана называют плоскость, проходящую через нормаль к поверхности эллипсоида в данной точке и параллельно его малой оси.

Геодезические долготы отсчитывают от плоскости начального меридиана от  $0^\circ$  до  $\pm 180^\circ$ . Для точек, расположенных к востоку от начального меридиана, геодезические долготы считают положительными (восточные долготы), а к западу – отрицательными (западные долготы).

Другую координату точки  $M$  можно связать с параллелью. Параллель – это окружность, все точки которой одинаково удалены от оси вращения и от экватора эллипсоида. Поэтому можно было бы принять за другую координату линейную величину радиуса параллели  $QQ'$ , проходящей через точку  $M$ . Однако в геодезии для определения координаты параллели, а равно и координаты точки  $M$ , принимают тоже угловую величину. Для этого проводят нормаль к поверхности эллипсоида в точке  $M$  (нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке называют прямую, проходящую через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости в этой точке). На рис. 3.9 нормалью является прямая  $Mn$ , которая пересекает экватор и малую ось вращения эллипсоида.

Острый угол, составленный нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора, называют *геодезической широтой* этой точки и обозначают  $B$ .

Геодезические широты отсчитываются от плоскости экватора и изменяются в пределах от  $0^\circ$  до  $\pm 90^\circ$ . Для точек, расположенных к северу от экватора, геодезические широты считают положительными (северные широты), а к югу – отрицательными (южные широты).

Третьей координатой называют расстояние  $MM'$  между поверхностью эллипсоида и данной точкой, отсчитываемое по нормали (см. рис. 3.9). Это расстояние называют *геодезической высотой*  $H$  точки  $M'$ .

. Точки, находящиеся выше поверхности эллипсоида, имеют положительные высоты, а ниже – отрицательные. Точки, лежащие на поверхности эллипсоида, имеют геодезические высоты, равные нулю ( $H=0$ ).

При решении некоторых задач на поверхности эллипсоида вместо геодезической широты  $B$  удобно использовать приведенную широту  $u$ , оставляя в качестве второй координаты по-прежнему геодезическую долготу  $L$  [2].

На рис. 3.10 показана часть меридианного эллипса  $PE'P'$ , из центра которого проведена окружность радиусом, равным большой полуоси  $a$ .



Точка  $D'$  получена пересечением окружности  $P'ES'$  линией  $DM$ , параллельной малой оси эллипса  $PO$ ;  $Dn$  – нормаль, а  $DT$  – касательная к меридианному эллипсу в точке  $D$ .

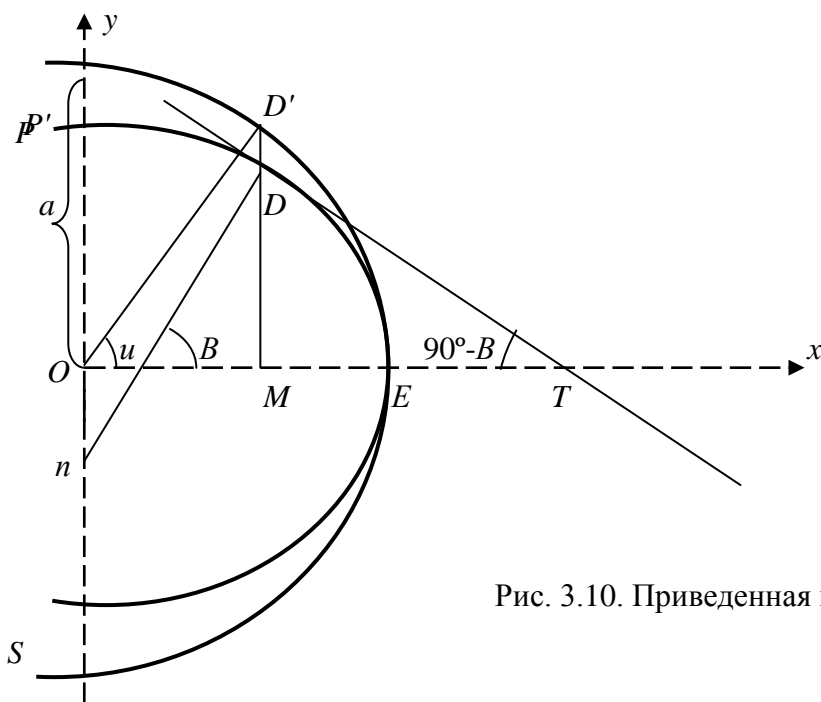


Рис. 3.10. Приведенная широта

Используя уравнение меридианного эллипса в параметрической форме, нетрудно получить формулу соотношения между широтами  $B$  и  $u$ :

$$\operatorname{tg} B = \frac{a}{b} \operatorname{tgu}. \quad (3.8)$$

Геодезическая система координат – это основная система, в которой однозначно определяются положения точек на поверхности эллипсоида координатами  $B$ ,  $L$  и  $H$ . Геодезические координаты не могут быть измерены непосредственно, их получают относительно исходного пункта, имеющего координаты  $B_0$ ,  $L_0$ ,  $H_0$ .

Через нормаль к поверхности эллипсоида можно провести множество плоскостей. Эти плоскости, перпендикулярные к касательной плоскости к поверхности эллипсоида в данной точке, называют нормальными плоскостями. Кривые, образуемые от пересечения нормальных плоскостей, проведенных в

данной точке, с поверхностью эллипсоида, называют **нормальными сечениями**. В каждой точке существуют два взаимно перпендикулярных нормальных сечения, кривизна которых имеет максимальное и минимальное значения. Эти нормальные сечения называют **главными нормальными сечениями**.

Например, в точке  $K$  поверхности эллипсоида главными нормальными сечениями являются (рис. 3.11):

- меридианное сечение  $PKE_1P_1E$ , проходящее через данную точку  $K$  и оба полюса эллипсоида  $P$  и  $P_1$ ;

- сечение первого вертикала  $WKU$ , проходящее через точку  $K$ , и перпендикулярное к меридианному сечению точки  $K$ .

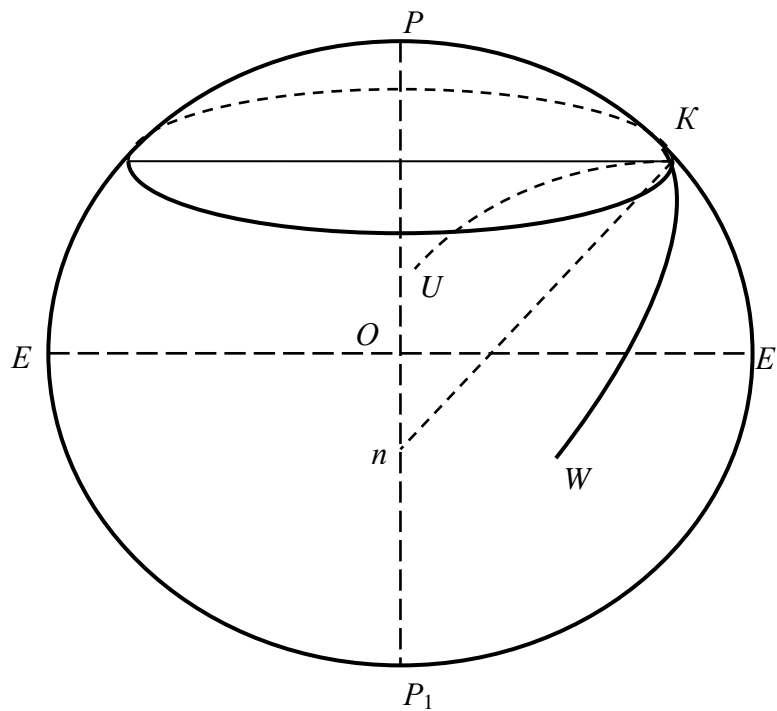


Рис. 3.11. Главные нормальные сечения

Обозначим через  $M$  и  $N$  радиусы кривизны меридиана и первого вертикала соответственно. Тогда (без вывода формул)  $M$  и  $N$  будут иметь следующие значения [2] :

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)^3}}; \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (3.9)$$

где  $a$  - большая полуось эллипсоида;

$e$  – первый эксцентриситет;

$B$  – геодезическая широта точки  $M$ .

Величины обоих главных радиусов кривизны зависят от широты. Из формулы (3.9) видно, что главные радиусы кривизны будут иметь наименьшую величину при  $B = 0^\circ$  (на экваторе) и наибольшую – при  $B = 90^\circ$  (в полюсе) Среднее геометрическое значение из главных радиусов кривизны называют средним радиусом кривизны  $R$ :

$$R = \sqrt{MN}. \quad (3.10)$$

Средний радиус кривизны  $R$  используется при решении некоторых задач математической картографии, а также в тех случаях, когда можно пренебречь сфероидичностью Земли.

Прямоугольные координаты точек в пространстве можно вычислить по известным геодезическим координатам этих точек по формулам:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Z &= (N + H - e^2 N) \sin B, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $X, Y, Z$  – прямоугольные координаты точки в пространстве;

$B, L, H$  – геодезические координаты точки;

$e$  – первый эксцентриситет эллипсоида;

$N$  – радиус кривизны первого вертикала.

Геодезические координаты точек по известным прямоугольным координатам этих точек в пространстве вычисляют по формулам [5]:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}L &= \frac{Y}{X}; \\
\operatorname{tg}B &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + \frac{e^2 N \sin B}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \text{ при } Z \leq \sqrt{X^2 + Y^2}; \\
\operatorname{ctg}B &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} - \frac{e^2 N \cos B}{Z}, \text{ при } Z > \sqrt{X^2 + Y^2}; \\
H &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B} - N = Z \operatorname{cosec}B - (1 - e^2)N.
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

По формулам (3.12) геодезическую широту вычисляют приближениями.

### 3.4. Астрономическая система координат

В астрономической системе координат положение точки на земной поверхности определяют по наблюдениям звезд относительно отвесной линии и оси вращения Земли.

Отвесной линией называют касательную к силовой линии поля силы тяжести в данной точке. Плоскость, перпендикулярная к силовой линии в точке, называется плоскостью астрономического горизонта. Проекцией отвесной линии на северную часть небесной сферы является астрономический зенит.

При геодезических измерениях на точке земной поверхности считают, что отвесные линии не меняют своего положения. Положение же оси вращения Земли относительно точек земной поверхности непрерывно меняется.

Если бы Земля имела форму шара, однородного или состоящего из концентрических слоев одинаковой плотности, и являлась бы абсолютно твердым телом, то, согласно законам механики, направление оси вращения Земли и период ее вращения оставались бы постоянными на протяжении любого промежутка времени.

Земля не имеет точной сферической формы, а близка к сфероиду. На эк-

ваториальные выступы сфероидальной Земли действуют силы притяжения от Луны и от Солнца. По этой причине ось вращения Земли совершает очень сложное движение в пространстве, что, в свою очередь, приводит к изменению положения плоскостей небесного экватора и эклиптики в пространстве. Точка пересечения эклиптики с небесным экватором – точка весеннего равноденствия – тоже меняет свое положение, что приводит к изменению экваториальных и эклиптических координат звезд.

Изменение положение точки весеннего равноденствия происходит в направлении, противоположном видимому годичному движению Солнца. Поэтому момент прохождения Солнцем этой точки в каждый последующий год наступает раньше, чем в предыдущий год. Такое явление в астрономии называют *прецессией*.

Ось вращения Земли под действием притяжения Солнца будет описывать коническую поверхность. Вершина конуса при этом совпадает с центром масс Земли, а ось проходит через центры эклиптики  $R$  и  $R'$  (эклиптика – большой круг небесной сферы, по которому происходит видимое годичное движение Солнца; плоскость эклиптики наклонена к плоскости небесного экватора под углом  $23^{\circ}27'$ ). Конус пересекает небесную сферу по малому кругу, угловой радиус которого составляет  $\varepsilon \sim 23,5^{\circ}$ . Этот круг параллелен эклиптике.

Прецессия вызывает непрерывное движение оси вращения Земли и, следовательно, оси Мира по конической поверхности. Полюс мира при этом описывает на небесной сфере малый круг. В связи с изменением положения полюса мира будет перемещаться плоскость небесного экватора. Точка весеннего равноденствия будет непрерывно двигаться по эклиптике навстречу видимому годичному движению Солнца на небесной сфере. Лунно-солнечная прецессия имеет период около 26 тысяч лет. Соответственно, ежегодное перемещение точки весеннего равноденствия составляет около  $50''$  [16].

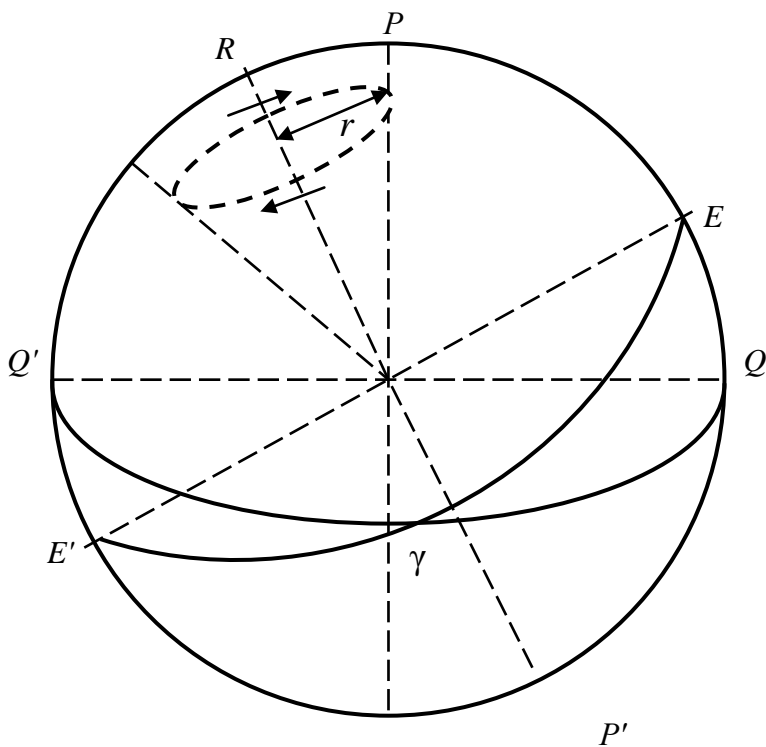


Рис. 3.12. Прецессионное движение земной оси:

$PP'$  – ось Мира;  $RR'$  – ось эклиптики;  $r$  - радиус окружности, по которой перемещается северный полюс Мира ( $r = 23^{\circ}27'$ );  $\gamma$  – точка весеннего равноденствия;  $Q\gamma Q'$  – небесный экватор;  $E\gamma E'$  - эклиптика

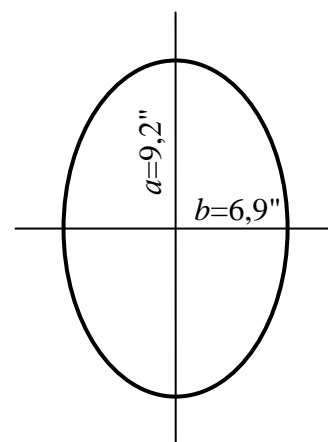


Рис. 3.13. Нутационный эллипс

Кроме того, ось вращения Земли совершает различные мелкие колебания около своего среднего положения, которое называют *нутацией* земной оси (рис. 3.13). Нутационное колебание земной оси имеет период в 18,6 года. Вследствие этого движения земной оси полюсы мира описывают на небесной сфере эллипсы с полуосями  $a$  и  $b$ , равными 9,2 и 6,9 соответственно.

Положения полюса мира  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , перемещающиеся только под действием прецессии, называют средним полюсом Мира. При одновременном действии прецессии и нутации полюс мира совершает движение по траектории, показанной на рис. 3.14.

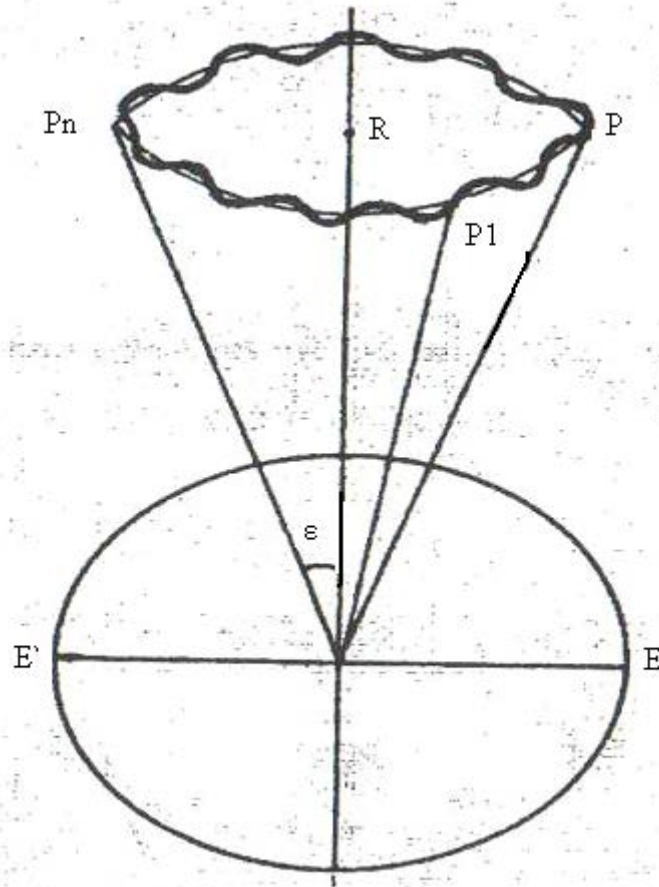


Рис. 3.14. Движение полюса мира при одновременном действии прецессии и нутации

Направление оси вращения Земли занимает фиксированное положение в пространстве. Вместе с тем тело Земли смещается относительно оси вращения, в результате чего полюсы Земли “блуждают” на ее поверхности.

Движение земных полюсов непосредственно вытекают из теории вращения Земли, основы которой были теоретически предсказаны Эйлером еще в конце XVIII века. Он принял Землю за абсолютно твердое тело и установил, что ввиду ее шарообразности будет иметь место изменение положения точек Земли относительно ее оси вращения, т. е. полюсы будут перемещаться по поверхности Земли. Движение полюса будет совершаться по окружности в направлении суточного вращения Земли с периодом, равным 305 суток.

Дальнейшие исследования этого вопроса американским ученым С. Чендлером позволили в 1891 году сделать вывод о том, что период перемещения полюса превышает эйлеровский период примерно на 4 месяца. Продолжительность чендлеровского периода определяется в 430 – 435 суток.

Различие периодов теоретического (Эйлера) и действительного (Чендлера) объясняется тем, что Эйлер принимал Землю за абсолютное твердое тело, тогда как в действительности она представляет собой эластичное тело, покрытое гидросферой и атмосферой.

Многочисленными наблюдениями было доказано, что полюс описывает на поверхности Земли не окружность (см. рис. 3.13), а неправильную спиралевидную кривую. Он удаляется от некоторого среднего положения не более чем на 0,3" (примерно 10 м), а период движения полюса составляет 427 суток [10].

Таким образом, положение оси вращения Земли относительно точек на ее поверхности непрерывно меняется. В связи с этим существует два понятия: мгновенная ось вращения и средняя ось вращения, которым соответствуют мгновенные и средние астрономические координаты.

Мгновенная ось вращения Земли пересекает ее поверхность в точках, которые называют мгновенными полюсами Земли, или просто полюсами Земли. Мгновенная ось вращения совпадает с осью Мира. Из-за движения мгновенных полюсов постоянно меняются астрономические координаты пунктов. Чтобы устранить это неудобство, мгновенные координаты, т. е. полученные непосредственно из наблюдений, приводят к среднему полюсу [5].

До 1968 года результаты астрономических определений относили к среднему полюсу эпохи (Система полюса А. Я. Орлова на эпоху 1900 – 1905 гг.).

Начиная с 1898 года Международная служба широты (с 1962 года преобразована в Международную службу движения полюсов) по результатам многолетних наблюдений свидетельствовала, что имеет место прогрессивное перемещение полюсов. Это перемещение получило название векового движения



полюса Земли. Исследованием этого вопроса занимались многие ученые, однако до настоящего времени нет единого взгляда на проблему векового движения полюсов. Тем не менее Международный астрономический союз (МАС) фактически признал наличие векового движения полюсов и в 1967 году на своем XIII съезде в Париже принял решение об отнесении координат мгновенного полюса Земли к среднему положению полюса на фиксированную эпоху, которое получило название Международного условного начала – МУН.

Положение среднего полюса в Системе МУН назначается под условием неизменности средних астрономических координат, что равнозначно неизменности положения среднего полюса на поверхности Земли.

Положениям северного и южного средних полюсов соответствует средняя ось вращения Земли. Положение средней оси относительно самой Земли, в том числе относительно отвесных линий, считается неизменным. Средняя ось вращения не проходит через центр масс Земли и с осью мира не совпадает [5].

В астрономической системе координат положение точек на поверхности Земли определяется двумя угловыми величинами: астрономической широтой и астрономической долготой.

*Астрономической широтой  $\varphi$*  точки называют угол, образованный отвесной линией в данной точке и плоскостью экватора Земли.

*Астрономической долготой  $\lambda$*  называют двугранный угол между плоскостями астрономического меридиана данной точки и начального астрономического меридиана. Плоскостью астрономического меридиана называют плоскость, проходящую через отвесную линию в данной точке и параллельную оси вращения Земли. Эта плоскость в общем случае не проходит через полюсы Земли. Заметим, что астрономический экватор и астрономические меридианы не совпадают с геодезическим экватором и геодезическими меридианами.

Связь между астрономическими координатами пунктов и сферическими координатами светил определяется двумя теоремами [16]:

- астрономическая широта  $\varphi$  пункта наблюдения равна высоте полюса Мира над горизонтом  $h_p$  и склонению зенита  $\delta_z$ :

$$\varphi = h_p = \delta_z; \quad (3.13)$$

- разность часовых углов светила, характеризующих его положение в один и тот же физический момент в разных пунктах, равна разности астрономических долгот этих пунктов:

$$t_A - t_B = \lambda_A - \lambda_B. \quad (3.14)$$

Вместо светила можно взять точку весеннего равноденствия  $\gamma$ . Тогда соотношение (3.14) будет иметь вид

$$(t_\gamma)_A - (t_\gamma)_B = \lambda_A - \lambda_B. \quad (3.15)$$

Поскольку часовой угол точки весеннего равноденствия численно равен звездному времени  $s$ , получим:

$$s_A - s_B = \lambda_A - \lambda_B. \quad (3.16)$$

Соотношение (3.16) означает, что разность одноименных времен (например, звездных), взятых в один и тот же физический момент в двух разных пунктах, численно равна разности астрономических долгот этих пунктов.

Соотношения (3.13) и (3.16) выражают принципы определения астрономических координат пунктов.

## **4. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛОЖЕНИЕМ ИХ НАЧАЛА**

В главе 1 дано определение понятия «система координат». Согласно этому определению, в системе координат должно быть установлено ее начало.

В зависимости от того, где находится начало координат, различают:

- общеземные системы координат, в которых их начало совмещено с центром масс Земли;
- референсные системы координат, в которых их начало находится на удалении десятков и сотен метров от центра масс Земли;
- топоцентрические системы координат, началом которых является пункт наблюдений на земной поверхности или на другой поверхности (плоскость, сфера, эллипсоид);
- системы плоских прямоугольных координат, в которых началом является точка пересечения двух взаимно перпендикулярных осей ( $x$  и  $y$ ) в определенной картографической проекции.

### **4.1. Общеземные системы координат**

Общеземными считают такие системы координат, которые получены при условии совмещения их начала с центром масс Земли. Они носят название геоцентрических систем координат.

Создание геоцентрических систем координат связано с возникновением спутниковой геодезии, основной задачей которой являлось выполнение точных геодезических измерений на земной поверхности с помощью искусственных спутников Земли (ИСЗ). Спутниковая геодезия возникла вскоре после запуска в СССР первого в мире ИСЗ 4 октября 1957 года. За прошедшие годы эта область геодезии непрерывно развивалась и совершенствовалась и в настоящее

время занимает ведущее положение в системе геодезического обеспечения территории России.

Постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июня 2000 года № 568 установлена единая государственная система координат “Параметры Земли 1990 года” (ПЗ-90) для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач.

**Система геодезических параметров “Параметры Земли” (ПЗ-90)** является геоцентрической прямоугольной пространственной системой координат. Обычно в названии систем координат указывается эпоха, которой она соответствует.

ПЗ-90 получены по результатам наблюдений геодезических спутников ГЕОИК, в том числе фотографирования их на фоне звездного неба, доплеровских, радиодальномерных и лазерных измерений, измерений высот спутника над поверхностью моря. Привлечены также радиотехнические и лазерные измерения дальностей до спутников систем ГЛОНАСС и «Эталон» [13].

Система ПЗ включает в себя: фундаментальные физические постоянные. параметры общеземного эллипсоида (ОЗЭ), систему координат ПЗ, закрепленную координатами пунктов космической геодезической сети, характеристики гравитационного поля Земли (ГПЗ) и элементы трансформирования между системой координат ПЗ и и референцными системами координат России.

Основные фундаментальные постоянные, использованные при выводе системы геодезических параметров ПЗ-90 [20]:

- скорость света  $c = 299\,792\,458$  м/с;
- геоцентрическая гравиметрическая постоянная (с учетом атмосферы)  
 $fM = 398\,600,44 \cdot 10^9$  м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>;
- угловая скорость вращения Земли  $\omega = 7292\,115 \cdot 10^{-11}$  рад/с.

Система координат ПЗ создана без интеграции с зарубежными геодезическими сетями. Она закреплена координатами 33 опорных пунктов на террито-

рии стран СНГ и Антарктиды, полученными динамическим методом спутниковой геодезии. Координаты этих пунктов (широта, долгота, высота) получены непосредственно по наблюдениям спутника ГЕОИК с точностью 1-2 м [3] .

Теоретическое определение системы координат ПЗ основывается на следующих положениях [6]:

- а) начало системы координат расположено в центре масс Земли;
- б) ось  $Z$  направлена в Международное условное начало (см. раздел 3.3);
- в) ось  $X$  лежит в плоскости начального астрономического меридиана, установленного Международным бюро времени;
- г) ось  $Y$  дополняет систему до правой системы координат.

Положения точек в системе ПЗ могут быть получены в виде пространственных прямоугольных или геодезических координат.

Геодезические координаты относятся к ОЗЭ, размеры и форма которого определяются значениями большой полуоси и сжатия:

$$a_{\text{ПЗ-90}} = 6\,378\,136 \text{ м};$$

$$\alpha_{\text{ПЗ-90}} = 1:298,257839\,303.$$

Центр ОЗЭ совпадает с началом системы координат ПЗ, ось вращения эллипсоида – с осью  $Z$ , а плоскость начального меридиана – с плоскостью  $XOY$ .

Система координат ПЗ-90.02 - уточненная версия системы координат ПЗ-90. Уточнение достигнуто за счет GPS-измерений на пунктах космической геодезической сети МО РФ [7] .

Система координат ПЗ-90.02 принята Распоряжением Правительства Российской Федерации от 20 июня 2007 года № 797-р в целях повышения тактико-технических характеристик глобальной навигационной спутниковой системы ГЛОНАСС, улучшения геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач.

Геоцентрическая система координат ПЗ-92.02 является также уточненной версией системы координат ПЗ-90. Она используется для обеспечения системы

ГЛОНАСС, реализуется сетью контрольных станций слежения по аналогии с сетью контрольных станций GPS.

**Система геодезических параметров “Мировая геодезическая система” (WGS)** - геоцентрическая прямоугольная пространственная система координат.

Система параметров WGS включает в себя: фундаментальные физические постоянные, систему координат WGS, закрепленную координатами пунктов космической геодезической сети, параметры ОЗЭ, характеристики модели ГПЗ, элементы трансформирования между геоцентрической системой координат WGS и различными национальными системами координат.

Первая версия системы координат WGS-84 была введена с 1 января 1987 года, которая неоднократно уточнялась. В настоящее время действует четвертая версия системы координат WGS-84, обозначаемая как WGS-84(G1150) и введенная с 20 января 2002 года (литера G означает GPS, а 1150 – номер GPS-недели, соответствующий дате, к которой отнесена версия системы координат WGS-84) [6].

Теоретическое определение системы координат WGS основывается на тех же положениях, что и системы координат ПЗ.

Положения точек в системе WGS могут быть получены в виде пространственных прямоугольных или геодезических координат. При этом геодезические координаты относятся к ОЗЭ, размеры и форма которого определяются следующими параметрами:

$$a_{\text{WGS}} = 6\,378\,137 \text{ м};$$

$$\alpha_{\text{WGS}} = 1:298,257\,223\,563.$$

Центр эллипсоида совпадает с началом системы координат WGS, ось вращения эллипсоида совпадает с осью Z, а плоскость начального меридиана – с плоскостью XOZ.

Система координат WGS-84 используется для обеспечения орбитальной группировки системы GPS. Эта система координат задается и уточняется на 11 станциях слежения. Координаты станций слежения GPS периодически корректируются путем согласования с системой координат ITRF.

**Международная система координат ITRF** (International Terrestrial Reference frame – Международный наземный референцный каркас) - международная земная координатная система, являющаяся основой для построения различных координатных систем на поверхности Земли.

Система ITRF представляет собой геоцентрическую прямоугольную пространственную систему координат, а также набор фундаментальных астрономо-геодезических параметров и геофизических моделей.

Основная экваториальная плоскость системы перпендикулярна к геоцентрическому направлению на Международное условное начало (МУН), положение которого согласовано с координатами среднего полюса Земли на эпоху 1984,0, по данным Международной службы вращения Земли. Положение плоскости начального меридиана установлено в соответствии с рекомендациями Международного бюро времени.

Система координат ITRF в настоящее время реализуется порядка 190 пунктами, в состав которых входят пункты радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ) и пункты Международной службы вращения Земли. Значения геоцентрических координат пунктов ITRF в результате непрерывного совершенствования сети и геодинамических процессов изменяются. Поэтому каталоги координат обновляют и указывают эпоху обновления [7].

Последняя реализация ITRF-2005 содержит координаты и скорости их изменения более 500 опорных станций, причем более чем на 100 из них проводились не менее двух различных типов измерений. Точность координат и скоростей большинства станций в этой системе лежит в пределах 1-5 см и 1-5 мм/год соответственно [23].

Таким образом, в настоящее время в мире используется несколько реализаций общеземной геоцентрической системы координат, основные из них: WGS-84 (США), ITRF (Международная система координат), ПЗ-90.02 (Россия).

В соответствии с планами мероприятий федеральной целевой программы (ФЦП) «Глобальная навигационная система» выполняются работы по созданию и развитию государственной геодезической сети новой структуры. Такая сеть должна быть создана в основном к 2012 году, что обеспечит к моменту вывода на орбиты полной группировки ИСЗ системы ГЛОНАСС создание высокоточной национальной геоцентрической системы координат, в полной мере реализующей тактико-технические характеристики системы ГЛОНАСС. По своим точностным параметрам эта система должна соответствовать Международной системе координат ITRF, что обеспечит конкурентоспособность системы ГЛОНАСС на международном уровне при выполнении высокоточных геодезических работ [7].

При производстве геодезических работ с применением глобальных навигационных спутниковых систем ГЛОНАСС и GPS возникает необходимость преобразования координат из системы ПЗ в систему WGS и обратно. Такие преобразования выполняют с использованием элементов трансформирования, точность которых определяет точность преобразований.

Общая формула преобразования координат при переходе от одной системы (системы  $B$ ) к другой (системе  $A$ ) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = R_{A,B} \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где  $x, y, z$  – координаты точки  $O_B$  (начало координат в системе  $B$ ) в системе координат  $A$ ;



$R_{A,B}$  - матрица поворота координатных осей при переходе от системы  $B$  к системе  $A$ .

Матрица  $R_{A,B}$  имеет вид [15]:

$$R_{A,B} = \begin{pmatrix} \cos(X_A, X_B) & \cos(X_A, Y_B) & \cos(X_A, Z_B) \\ \cos(Y_A, X_B) & \cos(Y_A, Y_B) & \cos(Y_A, Z_B) \\ \cos(Z_A, X_B) & \cos(Z_A, Y_B) & \cos(Z_A, Z_B) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

В формулы (4.2) входят косинусы углов между направлениями соответствующих осей. Переход от системы  $B$  к системе  $A$  при неизменном начале координат  $O$  (рис. 4.1) можно описать тремя последовательными поворотами [15]:

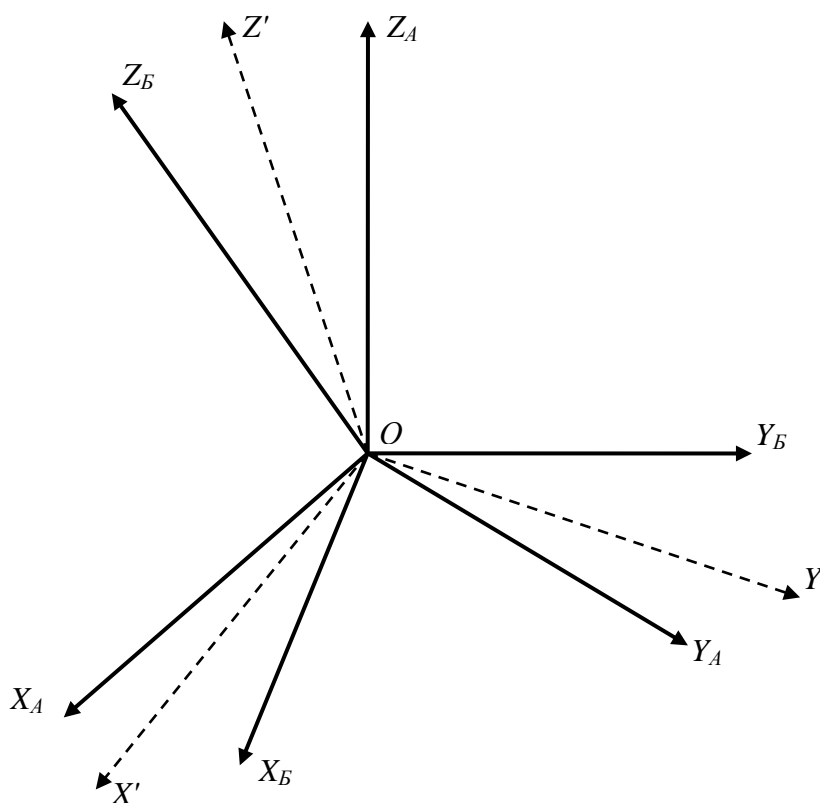


Рис. 4.1. Последовательные повороты координатных осей

1) поворот на угол  $\omega_Z$  вокруг оси  $OZ_A$ , при этом ось  $X_A$  перемещается в положение  $X'$ , а  $Y_A$  – в  $Y'$ ;

2) поворот на угол  $\omega_x$  вокруг оси  $OX'$ , при этом ось  $Y'$  перемещается в положение  $Y_B$ , а  $Z_A$  – в  $Z'$ ;

3) поворот на угол  $\omega_y$  вокруг оси  $OY_B$ , при этом ось  $Z'$  перемещается в положение  $Z_B$ , а  $X'$  – в  $X_B$ .

Углы  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  называют угловыми элементами трансформирования систем координат при переходе из одной системы в другую.

Матрица поворота  $R$  с угловыми элементами трансформирования с учетом формулы (4.2) примет следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \omega_y \cos \omega_z - & -\sin \omega_z \cos \omega_y + & \sin \omega_y \cos \omega_x \\ -\sin \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z & +\sin \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z & \\ -\sin \omega_z \cos \omega_x & \cos \omega_x \cos \omega_z & \sin \omega_x \\ \cos \omega_z \sin \omega_y + & \sin \omega_z \sin \omega_y - & \\ +\sin \omega_x \cos \omega_y \sin \omega_z & -\sin \omega_x \cos \omega_y \cos \omega_z & \cos \omega_y \cos \omega_x \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

В тех случаях, когда углы  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  являются малыми величинами, выражение (4.3) можно представить в следующем виде:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Если масштабы двух систем отличаются, то в формулы преобразования необходимо ввести масштабный элемент трансформирования. В этом случае матрица масштабных преобразований будет иметь следующий вид:

$$T = \begin{pmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Таким образом, преобразование пространственных прямоугольных координат при переходе из одной системы в другую выполняют с помощью семи элементов трансформирования, точность которых определяет точность преобразований:

- линейные элементы –  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ;
- угловые элементы -  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ;
- масштабный элемент –  $m$ .

Преобразование координат из системы  $A$  в систему  $B$  выполняют по формулам:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B = (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & +\omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & +\omega_x \\ +\omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_A + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Преобразование координат из системы  $B$  в систему  $A$  выполняют по формулам:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_A = (1 - m) \begin{pmatrix} 1 & -\omega_z & +\omega_y \\ +\omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & +\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

В табл. 4.1 приведены параметры связи трех систем координат: WGS-84, ПЗ-90, ПЗ-90.02 [6].

Таблица 4.1

**Параметры связи систем координат**

Элементы трансформирования систем координат	ПЗ-90 в WGS-84	ПЗ-90 в ПЗ-90.02
$\Delta X$	-1.10	+1.07
$\Delta Y$	-0,30	+0,03
$\Delta Z$	-0,90	-0,02
$\omega_x$	0	0
$\omega_y$	0	0
$\omega_z$	-0,20"	+0,13"
$m$	$(-0,12) \cdot 10^{-6}$	$(+0,22) \cdot 10^{-6}$

## 4.2. Референционные системы координат

К референционным системам координат относят такие системы, в которых их начало находится на удалении десятков и сотен метров от центра масс Земли. Отсчетной поверхностью таких систем является референц-эллипсоид.

Референц-эллипсоид – земной эллипсоид, принятый для обработки геодезических измерений в пределах одной или группы стран, имеющий определенные размеры и ориентировку в теле Земли. Форму, размеры и ориентировку референц-эллипсоида определяют, исходя из следующих требований:

- параметры референц-эллипсоида должны, возможно, меньше отличаться от параметров общеземного эллипсоида (для стран, имеющих небольшую площадь, не обязательно);

- ось вращения референц-эллипсоида должна быть параллельна оси вращения Земли, а плоскость его экватора – плоскости экватора Земли;

- сумма квадратов отклонений поверхности квазигеоида (геоида) от поверхности референц-эллипсоида должна быть минимальной.

Референционная система координат является единой государственной системой геодезических координат. Началом истории построения такой системы можно считать 1816 год, когда начались работы под руководством В. Я. Струве и К. И. Теннера (см. раздел 2).

В 1897 г. Корпусом Военных Топографов под руководством профессора Николаевской академии Генерального штаба К. В. Шарнгорста (1846-1908) было начато уравнивание разрозненных «губернских триангуляций» в целях приведения в общую систему координат. Исходными пунктами явились астрономическая обсерватория в Дерпте и пункты триангуляции меридианной дуги Струве, а все вычисления выполнены на референц-эллипсоиде Бесселя. Эта работа была завершена в 1926 году изданием Военно-топографической службой каталога Шарнгорста.

В 1928 году Главным геодезическим управлением СССР была утверждена единая схема и программа развития триангуляции страны, предложенная Ф. Н. Красовским. Работы по уравниванию триангуляции были выполнены на Эллипсоиде Бесселя и завершены в 1932 году, а принятая система координат получила название системы координат 1932 года.

В те же годы под руководством Ф. Н. Красовского и А. А. Изотова начались работы по выводу параметров референц-эллипсоида, наилучшим образом подходившего для территории СССР. Под руководством М. С. Молоденского велись работы по определению высот геоида по данным астрономо-гравиметрического нивелирования.

Совместным решением Главного управления геодезии и картографии (ГУГК) и Военно-топографического управления Генерального Штаба (ВТУ ГШ МО) от 4 июня 1942 года в качестве референц-эллипсоида при уравнивании был принят эллипсоид (в последующем получивший имя Красовского) со следующими параметрами:

$$a = 6378245 \text{ м}; \quad e = 1:298,3.$$

Систему координат, в которой велись вычисления, было решено именовать системой координат 1942 года [8].

**Система координат 1942 года** введена Постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. №760 как единая система координат и высот в топографо-геодезических и картографических работах, выполняемых на территории СССР. Началом системы координат было принято Пулковое, а исходный уровень высот - Балтийское море (Кронштадтский футшток).

В состав исходных геодезических дат входят [12]:

- геодезические координаты сигнала  $A$ , находящегося приблизительно в 250 метрах от Пулково, с геодезическими координатами  $B_0 = 59^\circ 46' 15,359''$ ;  $L_0 = 30^\circ 19' 28,318''$  и геодезическим азимутом  $A_0 = 121^\circ 06' 42,305''$  на пункт Бугры;

- составляющие уклонения отвесной линии для исходного пункта Пулково ( $\xi_0 = 0,16''$ ;  $\eta_0 = 1,78''$ );

- высота геоида над эллипсоидом в пункте Пулково принята равной 0.

Эти данные в совокупности определяют пространственную ориентировку осей референц-эллипсоида в теле Земли при выполнении следующих теоретически строгих условий:

- малая ось эллипсоида параллельна направлению к положению среднего полюса;

- плоскость нулевого меридиана параллельна плоскости начального астрономического меридиана;

- поверхность референц-эллипсоида имеет в среднем наименьшие уклонения от поверхности геоида на всей территории расположения обрабатываемой геодезической сети.

При установлении системы координат 1942 года в уравнивание вошли 87 полигонов АГС, покрывающих большую часть Европейской территории СССР и узкой полосы, распространяющих координаты до Дальнего Востока. Обработка выполнялась на эллипсоиде Красовского с использованием метода проектирования.

Дальнейшее распространение системы координат 1942 года на территорию СССР проводилось последовательно несколькими крупными блоками полигонов триангуляции и полигонометрии 1 класса. При присоединении каждого очередного блока координаты пунктов на границах блоков уравненной сети принимались за жесткие. Для сгущения АГС, сформированной в виде системы полигонов, выполнялось их заполнение сплошными сетями триангуляции 2 класса. Сплошные сети триангуляции 2 класса уравнивались в пределах отдельных полигонов с использованием уравненных координат пунктов триангуляции 1-го класса в качестве исходных [8].

Развитие АГС для всей территории страны было завершено к началу 80-х годов прошлого столетия. Уравненная астрономо-геодезическая сеть включала в себя 164 306 пунктов 1 и 2 классов, 3,6 тысяч геодезических азимутов, определенных из астрономических наблюдений, и 2,8 тысяч базисных сторон, расположенных через 170-200 км.

К моменту завершения общего уравнивания АГС на территории страны независимо были созданы две спутниковые геодезические сети: космическая геодезическая сеть (КГС) и доплеровская геодезическая сеть (ДГС).

КГС включала в себя в себя 26 стационарных астрономо-геодезических пунктов, координаты этих пунктов определены по фотографическим, доплеровским, дальномерным радиотехническим и лазерным наблюдениям ИСЗ системы геодезического измерительного комплекса (ГЕОИК). Точность взаимного положения пунктов при расстояниях между ними около 1...1,5 тыс. км характеризуется средними квадратическими ошибками, равными 0,2...0,3 м.

ДГС состояла из 131 пунктов, взаимное положение и координаты которых определялись по доплеровским наблюдениям ИСЗ системы TRANSIT. Точность определения взаимного положения пунктов при среднем расстоянии между ними 500...700 км характеризуется средними квадратическими ошибками, равными 0,4...0,6 м [14].

**Система геодезических координат 1995 года** установлена постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2000 года № 568 для использования при осуществлении геодезических и картографических работ начиная с 1 июля 2002 года.

Целесообразность введения системы координат 1995 года (СК-95) состоит в повышении точности, оперативности и экономической эффективности решения задач геодезического обеспечения, отвечающего современным требованиям экономики, науки и обороны страны [8].

СК-95 получена в результате совместного уравнивания трех самостоятельных, но связанных между собой геодезических построений различных классов точности: КГС, ДГС, АГС по их состоянию на период 1991-1993 гг. Объем измерительной астрономо-геодезической информации, обработанной для введения СК-95, превышает на порядок соответствующий объем информации, использованной для установления СК-42 [14].

Результатом совместного уравнивания КГС, ДГС, АГС и значений радиус-векторов пунктов явилось построение геодезической сети, содержащей 134 опорных пунктов ГГС, покрывающих всю территорию при среднем расстоянии между смежными пунктами 400-500 км.

Точность определения взаимного положения этих пунктов по каждой из трех пространственных координат характеризуется средними квадратическими ошибками 0,25...0,80 м при расстояниях от 500 до 9000 км.

Абсолютные ошибки отнесения положения пунктов к центру масс Земли не превышают 1 м по каждой из трех осей пространственных координат.

Эти пункты использовались в качестве исходных пунктов при заключительном общем уравнивании АГС [14].

Точность определения взаимного планового положения пунктов, полученная в результате заключительного уравнивания АГС по состоянию на 1995 год, характеризуется средними квадратическими ошибками:

- 0,02...0,04 м для смежных пунктов;
- 0,25...0,80 м при расстояниях от 1 до 9 тыс. км [14].

В СК-95 сохранены без изменений координаты начального пункта Пулково, эллипсоид Красовского и проекция Гаусса-Крюгера. В этой системе полностью выполнены условия параллельности осей  $OZ$  и плоскостей нулевых меридианов относительно системы ПЗ-90, начало СК-95 находится на расстоянии около 156 м от начала системы координат ПЗ-90.



По сравнению с СК-42 в СК-95 изменились ее начало и ориентировка осей. Начало СК-95 находится на расстоянии около 10 м от начала СК-42. Непараллельность осей  $OZ$  этих систем характеризуется углами разворота  $\omega_x = 0$  и  $\omega_y = -0,351''$ , которым на полюсе соответствует расстояние 10,5 м (рис. 4.2).

В дальнейшем на основе совместного уравнивания геодезической сети, состоящей из 134 пунктов (КГС, АГС, ДГС), и астрономо-геодезической сети, состоящей из 164 тысяч пунктов 1 и 2 классов, СК-95 распространена на всю территорию бывшего СССР, а ошибки координат пунктов снизились с 30 до 1 м [21].

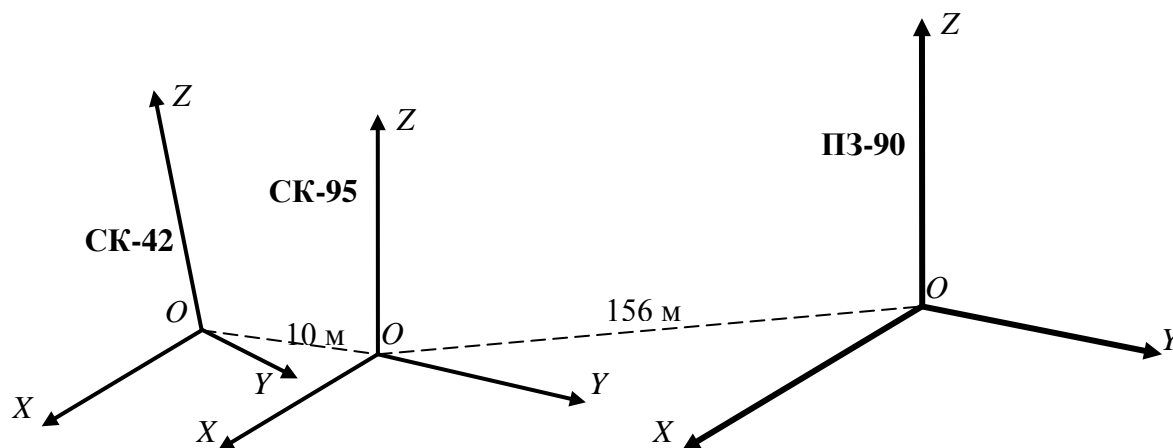


Рис. 4.2. Взаимное расположение СК-42, СК-95, ПЗ-90

Преобразование геодезических координат из одной системы координат (системы  $A$ ) в другую (систему  $B$ ) выполняют по формулам:

$$\begin{aligned} B_B &= B_A + \Delta B; \\ L_B &= L_A + \Delta L; \\ H_B &= H_A + \Delta H, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где  $B, L$  – геодезическая широта и геодезическая долгота, выраженные в единицах плоского угла;

$H$  – геодезическая высота, м;

$\Delta B, \Delta L, \Delta H$  – поправки к геодезическим координатам точки.

Поправки к геодезическим координатам определяют по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 \Delta B &= \frac{\rho}{(M + H)} \left[ \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \Delta \alpha + \left( \frac{N^2}{a^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - \right. \\
 &\quad \left. - (\Delta x \cos L + \Delta y \sin L) \sin B + \Delta z \cos B \right] + \\
 &\quad + (1 + e^2 \cos 2B)(\omega_x \sin L - \omega_y \cos L) - \rho m e^2 \sin B \cos B; \\
 \Delta L &= \frac{\rho}{(N + H) \cos B} (-\Delta x \sin L + \Delta y \cos L) + \operatorname{tg} B (1 - e^2)(\omega_x \cos L + \\
 &\quad + \omega_y \sin L) + \omega_z; \\
 \Delta H &= -\frac{a}{N} \Delta a + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} + (\Delta x \cos L + \Delta y \sin L) \cos B + \Delta z \sin B + \\
 &\quad + N e^2 \sin B \cos B \left( \frac{\omega_x}{\rho} \sin L - \frac{\omega_y}{\rho} \cos L \right) + m(N + H - e^2 N \sin^2 B).
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

где  $\Delta B$ ,  $\Delta L$  - поправки к геодезической широте и долготе, с;

$\Delta H$  - поправка к геодезической высоте, м;

$B$ ,  $L$  - геодезические широта и долгота, рад;

$H$  - геодезическая высота, м;

$\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  - линейные элементы трансформирования систем координат при переходе из системы  $A$  в систему  $B$ ;

$\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  - угловые элементы трансформирования систем координат при переходе из системы  $A$  в систему  $B$ ;

$m$  - масштабный элемент трансформирования систем координат при переходе из системы  $A$  в систему  $B$ ;

$$\Delta a = a_B - a_A; \quad \Delta e^2 = e_B^2 - e_A^2; \quad a = \frac{a_B + a_A}{2}; \quad e^2 = \frac{e_B^2 + e_A^2}{2};$$

$$M - \text{радиус кривизны меридианного сечения} \left( M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \right);$$

$N$  – радиус кривизны первого вертикала  $\left( N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \right)$ ;

$a_B, a_A$  – большие полуоси эллипсоида в системах координат  $B$  и  $A$  соответственно;

$e_B^2, e_A^2$  – квадраты эксцентриситетов эллипсоидов в системах координат  $B$  и  $A$  соответственно;

$\rho$  – число угловых секунд в 1 радиане ( $\rho = 206265$ ).

При преобразовании геодезических координат из системы  $A$  в систему  $B$  в формулах (4.8) используют значения геодезических координат в системе  $A$ , а при обратном преобразовании – в системе  $B$ , а знак поправок  $\Delta B, \Delta L, \Delta H$  в формулах (4.9) меняют на противоположный.

Формулы (4.9) обеспечивают вычисление поправок к геодезическим координатам с погрешностью, не превышающей 0,3 м (в линейной мере), а для достижения погрешности не более 0,001 м выполняют вторую итерацию, т. е. учитывают значения поправок к геодезическим координатам по формулам (4.8) и повторно выполняют вычисления по формулам (4.9). При этом

$$\begin{aligned} B &= \frac{B_A + (B_A + \Delta B)}{2}; \\ L &= \frac{L_A + (L_A + \Delta L)}{2}; \\ H &= \frac{H_A + (H_A + \Delta H)}{2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Формулы (4.8) и (4.9) и точностные характеристики преобразований по этим формулам справедливы до широты  $89^\circ$  [6].

Преобразование геодезических координат в прямоугольные пространственные координаты осуществляется по формулам (3.11) с учетом (3.9).

### 4.3. Топоцентрические системы координат

Топоцентрической системой координат называют систему, начало которой находится в какой-либо точке  $M$  поверхности Земли (рис. 4.3).

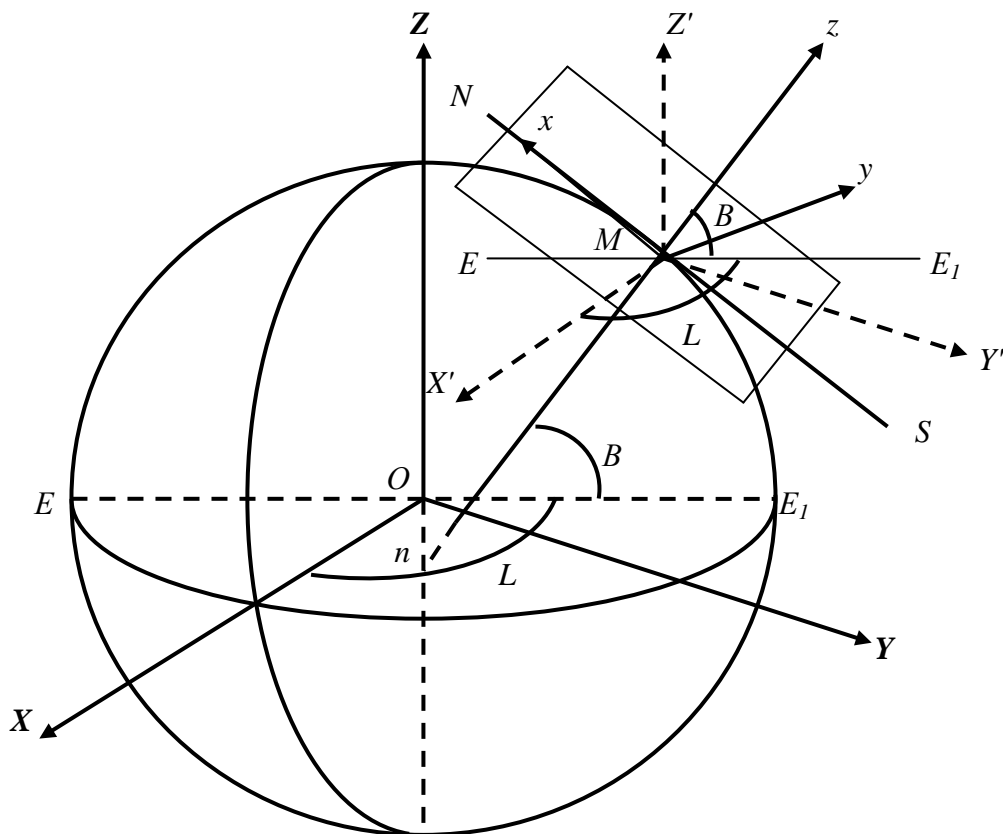


Рис. 4.3. Топоцентрическая система координат:  
 $X, Y, Z$  –прямоугольная пространственная;  
 $x, y, z$  – горизонтальная

На рис. 4.3  $X, Y, Z$  - геоцентрическая прямоугольная пространственная система координат;  $X', Y', Z'$  - топоцентрическая прямоугольная пространственная система координат, оси которой параллельны осям геоцентрической системы координат.

В топоцентрической горизонтальной системе  $x, y, z$  ось  $z$  совмещена с отвесной линией или нормалью к поверхности эллипсоида, а оси  $x$  и  $y$  расположены в горизонтальной плоскости. При этом ось  $x$  лежит в плоскости астроно-

мического или геодезического меридиана и направлена на север, а ось  $y$  – на восток.

Переход от системы  $X, Y, Z$  к системе  $X', Y', Z'$  осуществляется переносом начала координат из точки  $O$  в точку  $M$ .

Переход от системы  $X', Y', Z'$  к системе  $x, y, z$  при совмещении оси  $z$  с нормалью к поверхности эллипсоида выполняется последовательными поворотами координатных осей системы  $X', Y', Z'$  на углы:  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = -(90^\circ - B)$ ,  $\omega_z = 180^\circ + L$  с помощью матрицы поворота  $R$  (4.3) [12].

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & -\cos B \\ -\sin L & -\cos L & 0 \\ \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

где  $\Delta X = X - X_M$ ;  $\Delta Y = Y - Y_M$ ;  $\Delta Z = Z - Z_M$ .

С учетом (4.11) получим:

$$\begin{aligned} x &= -(\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \sin B + \Delta Z \cos B; \\ y &= -\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L; \\ z &= (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \cos B + \Delta Z \sin B. \end{aligned} \quad (4.12)$$

При аналогичном переходе при совмещении оси  $z$  с отвесной линией, используя астрономические координаты  $\varphi$  и  $\lambda$ , получим:

$$\begin{aligned} x &= -(\Delta X \cos \lambda + \Delta Y \sin \lambda) \sin \varphi + \Delta Z \cos \varphi; \\ y &= -\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda; \\ z &= (\Delta X \cos \lambda + \Delta Y \sin \lambda) \cos \varphi + \Delta Z \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Результаты измерений на каждом пункте геодезической сети, например на пункте  $A$  (рис. 4.4):  $r$  – расстояние до соседних пунктов;  $z$  – астрономические зенитные расстояния, отсчитываемые от астрономического зенита;  $\nu$  – горизонтальный угол относительно начального направления – представляют собой сферические координаты наблюдаемых пунктов в топоцентрической горизонтальной системе [15].

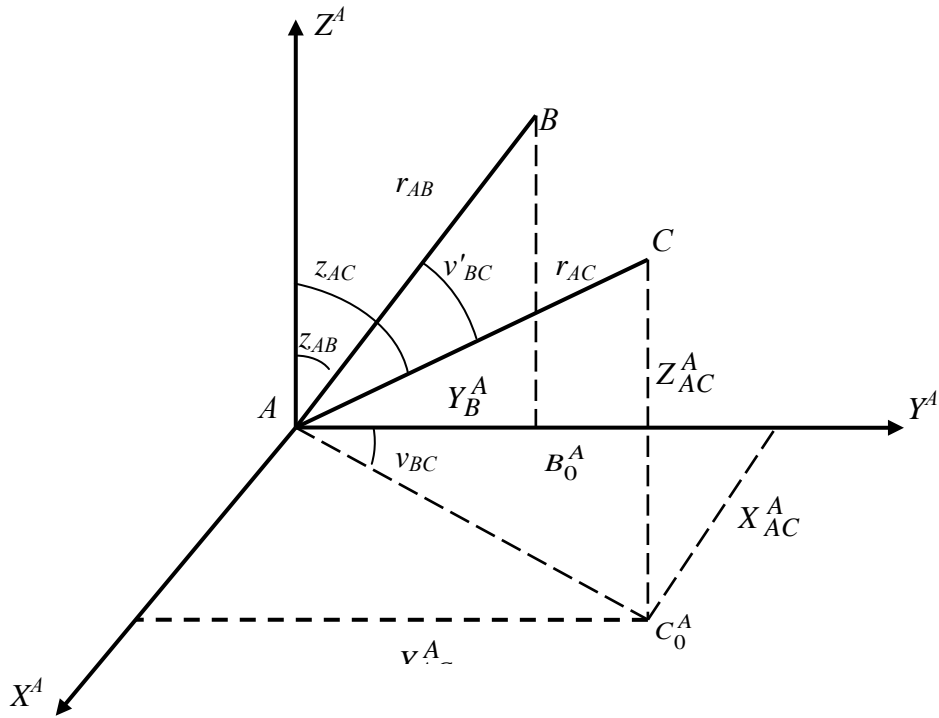


Рис. 4.4. Сферические координаты наблюдаемых пунктов:  $A$  – пункт наблюдения;  $Z^A$  – направление на астрономический зенит;  $AB$  – начальное направление (находится в координатной плоскости  $Z^A AY^A$ )

Направляющие косинусы  $l$ ,  $m$ ,  $n$  для направления  $AC$  можно получить из угловых измерений:

$$\begin{aligned}
 l_{AC}^A &= \sin z_{AC} \sin v_{BC}; \\
 m_{AC}^A &= \sin z_{AC} \cos v_{BC}; \\
 n_{AC}^A &= \cos z_{AC}.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Тогда координаты пункта  $C$  при длине стороны  $AC = r_{AC}$  будут:

$$\begin{aligned}
 X_C^A &= r_{AC} \sin z_{AC} \sin v_{AC}; \\
 Y_C^A &= r_{AC} \sin z_{AC} \cos v_{AC}; \\
 Z_C^A &= r_{AC} \cos z_{AC}.
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

### 4.3.1. Топоцентрическая система полярных координат

В полярной системе координат на плоскости началом системы является любая точка, например  $O$ , и одна координатная ось  $OP$ , называемая полярной осью (рис. 4.5). Полярными координатами какой-либо точки  $G$  на плоскости называют радиус-вектор  $\rho$  – расстояние по прямой от точки  $O$ , называемой полюсом, до точки  $G$  и полярный угол  $\alpha$  – угол между полярной осью  $OP$  и радиус-вектором  $\rho$ , который отсчитывается от полярной оси по направлению часовой стрелки.

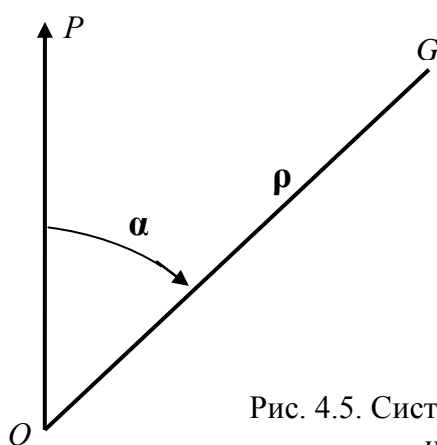


Рис. 4.5. Система полярных координат на плоскости

На поверхности сферы система полярных координат устанавливается следующим образом (рис. 4.6).

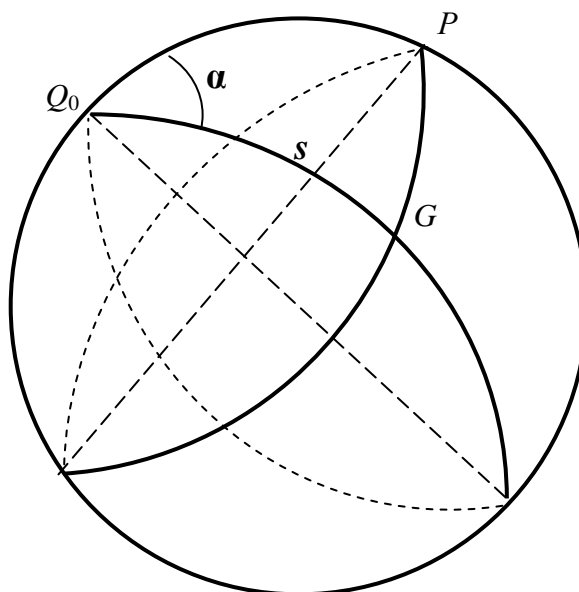


Рис. 4.6. Система полярных координат на сфере

Примем некоторую точку  $Q_0$  за полюс системы полярных координат. Из точки  $Q_0$  можно провести множество дуг больших кругов, представляющих геодезические линии на поверхности сферы. Одну из этих дуг, например  $Q_0P$ , примем за полярную ось. Положение любой точки  $G$  на поверхности сферы будет определяться длиной дуги большого круга  $s$  от полюса  $Q_0$  до точки  $G$  и полярным углом  $\alpha$  между полярной осью  $Q_0P$  и дугой большого круга  $Q_0G$ .

Координатными линиями будут плоские кривые – дуги больших кругов  $\alpha = \text{const}$  и малые круги  $s = \text{const}$  [11].

Система полярных координат на поверхности эллипсоида устанавливается так же, как на сфере (рис. 4.7).

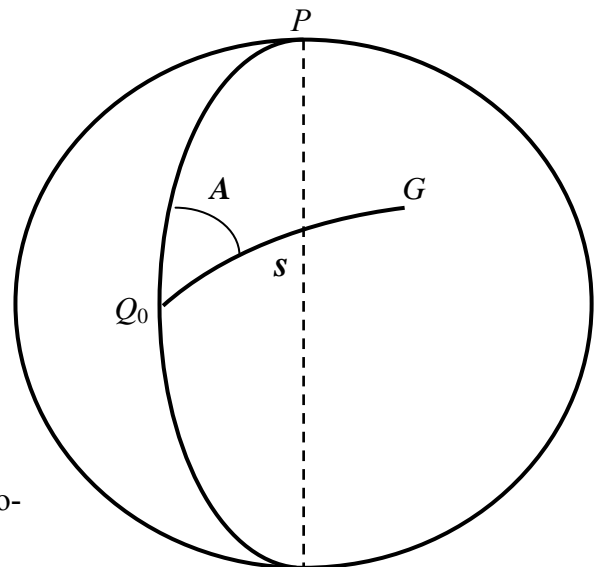


Рис. 4.7. Система полярных координат на эллипсоиде

Произвольную точку  $Q_0$  на поверхности эллипсоида выберем за полюс системы полярных координат. В качестве полярной оси примем меридиан, проходящий через точку  $Q_0$ .

Полярными координатами любой точки, например  $G$ , называют длину геодезической линии  $s$  от точки  $Q_0$  до точки  $G$  и азимут  $A$  этой линии в полюсе  $Q_0$ .

Первое семейство координатных линий ( $A = \text{const}$ ) представляет собой пучок геодезических линий, исходящих из полюса  $Q_0$ . Второе семейство коор-



динатных линий ( $s = \text{const}$ ) состоит из замкнутых кривых, называемых геодезическими окружностями.

В частном случае, когда полюс системы полярных координат выбран в полюсе эллипсоида  $P$ , эта система принимает наиболее простой вид. Вместо  $s$  и  $A$  координатами будут длина дуги меридиана  $X$  и геодезическая долгота  $L$ . Значения обеих координат следует взять со знаком минус, так как в геодезии принято длину дуги меридиана отсчитывать от экватора, а не от полюса; долгота же отсчитывается против движения часовой стрелки, а не по часовой стрелке, как это принято в полярных координатах для азимута [11].

#### **4.4. Системы плоских прямоугольных координат**

При определении взаимного положения точек на поверхности эллипсоида и в околоземном пространстве применяют геоцентрическую систему пространственных прямоугольных координат, системы геодезических координат, связанных с общим земным эллипсоидом или референц-эллипсоидами.

Вместе с тем при развитии геодезических сетей, топографических съемках, маркшейдерских и инженерно-геодезических работах геодезические измерения производятся между точками, удаленными друг от друга на незначительные расстояния (во много раз меньше радиуса земного шара). В этих случаях гораздо удобнее и значительно проще использовать плоскость, на которой устанавливается система прямоугольных координат. Основное преимущество применения плоских прямоугольных координат состоит в том, что при обработке результатов геодезических измерений используют формулы тригонометрии и аналитической геометрии на плоскости.

Поверхность Земли имеет сложную форму. Для того чтобы отобразить поверхность Земли на плоскости, необходимо от ее физической поверхности перейти к математической поверхности, которая наиболее близка к физической

поверхности и может быть описана математическими уравнениями. За математическую поверхность в геодезии принимают эллипсоид вращения, малая ось которого совпадает с осью вращения Земли. Для осуществления такого перехода необходимо изобразить поверхность эллипсоида на плоскости. Решением этой задачи занимается математическая картография, которая разрабатывает теорию и практику применения различных проекций поверхности эллипсоида на плоскости.

При любом изображении поверхности эллипсоида на плоскости неизбежно возникают искажения длин линий, углов и площадей. Применение картографических проекций в геодезии имеет свои особенности, так как изображается не вся поверхность эллипсоида, а только небольшая часть его поверхности.

Изобразить поверхность земного эллипсоида на плоскости – значит найти две однозначные, непрерывные и дифференцируемые функции:

$$x = f_1(B, L); \quad y = f_2(B, L). \quad (4.16)$$

В математической картографии часто применяют полярные координаты:  $\delta$  – полярный угол и  $\rho$  – радиус-вектор (рис. 4.8). В этом случае изображение на плоскости определяется следующими уравнениями:

$$\delta = f_1(B, L); \quad \rho = f_2(B, L). \quad (4.17)$$

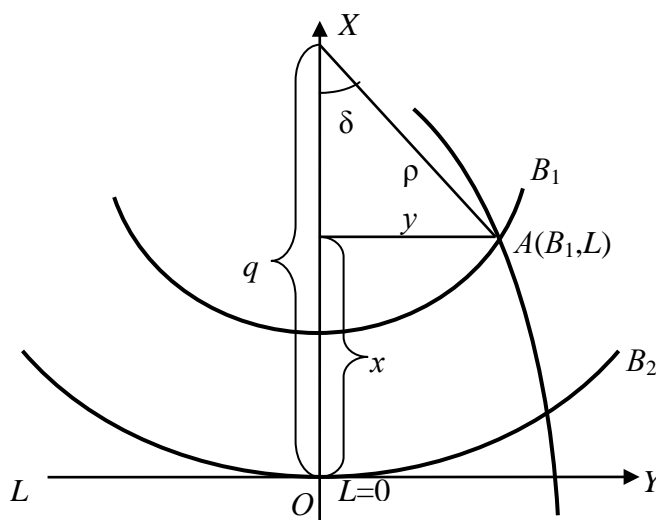


Рис. 4.8. Связь между прямоугольными и полярными координатами

Связь между прямоугольными координатами  $x$  и  $y$  и полярными координатами  $\delta$  и  $\rho$  (см. рис. 4.8):

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta. \quad (4.18)$$

Характер и свойства функции  $f_1$  и  $f_2$  (формула (4.17)) определяют разнообразие картографических проекций и их многочисленность.

Изображение земной поверхности на плоскости в любой проекции будут иметь искажения. По этой причине будут искажаться линии, площади и углы. Величины искажений зависят от свойств изображения и являются важнейшим показателем достоинства той или иной проекции.

Отношение линейного элемента в проекции  $ds'$  к соответствующему линейному элементу на земном эллипсоиде  $ds$  называют масштабом длин  $\mu$ :

$$\mu = \frac{ds'}{ds}. \quad (4.19)$$

Получим значение отрезка  $ds'$ :

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2. \quad (4.20)$$

Аналогично получим значение  $ds$ :

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2. \quad (4.21)$$

После несложных алгебраических преобразований получим:

$$\begin{aligned} ds'^2 &= ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2; \\ ds^2 &= Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$e = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2; \quad f = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}; \quad g = \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2,$$

(4.23)

$$\left. \begin{aligned} E &= \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right)^2, \\ F &= \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right) + \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right) + \left( \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right), \\ G &= \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

С учетом формул (4.19) и 4.22) получим

$$\mu^2 = \frac{ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2}{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}. \quad (4.25)$$

В сфероидической геодезии уравнение эллипсоида вращения задается пространственными прямоугольными координатами  $X, Y, Z$ :

$$X = \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}; \quad Y = \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}; \quad Z = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (4.26)$$

где  $a$  – большая полуось эллипсоида вращения;  $e$  – эксцентриситет.

Формулы, относящиеся к поверхности эллипсоида вращения:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}; \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}; \quad r = N \cos \varphi, \quad (4.27)$$

где  $M$  – радиус кривизны меридианного сечения;

$N$  – радиус кривизны первого вертикала;

$R$  – радиус кривизны параллели.

С учетом формул (4.26) и (4.27) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \varphi} &= -M \sin \varphi \cos \lambda, & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} &= -M \sin \varphi \sin \lambda, & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} &= M \cos \varphi; \\ \frac{\partial X}{\partial \lambda} &= -N \cos \varphi \sin \lambda, & \frac{\partial Y}{\partial \lambda} &= N \cos \varphi \cos \lambda, & \frac{\partial Z}{\partial \lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Подставив частные производные в выражения (4.24) для  $E, F$  и  $G$ , после несложных преобразований получим:

$$E = M^2, \quad F = 0, \quad G = (N \cos \varphi)^2 = r^2,$$

а с учетом выражения (4.25) формулу масштаба длин приведем к следующему виду:

$$\mu^2 = \frac{ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}. \quad (4.28)$$

Отношение элемента площади  $dF'$  в проекции к соответствующему элементу площади  $dF$  на земном эллипсоиде называют масштабом площади  $p$ :

$$p = \frac{dF'}{dF}. \quad (4.29)$$

При определении понятия «масштаб» говорят об отношениях элементарных отрезков или площадок на поверхности эллипсоида и на плоскости, так как масштабы ( $\mu$  и  $p$ ) не являются постоянными величинами и изменяются в зависимости от географического положения изображаемых элементов.

На топографической карте подписывается так называемый общий масштаб, который называют главным масштабом. Формула (4.18) дает значение частных масштабов.

При исследовании картографических проекций значение общего масштаба принимают равным единице. Тогда уклонение масштаба линий и площадей от единицы называют искажениями:

$$v_\mu = \mu - 1 \quad \text{— искажение длин;}$$

$$v_p = p - 1 \quad \text{— искажение площадей.}$$

Искажения углов характеризуется разностью между величиной угла  $\beta$ , получаемого в изображении на плоскости, и соответствующего угла  $\alpha$  на поверхности земного эллипсоида, т. е. величина искажения углов определяется разностью  $(\beta - \alpha)$ .

В геодезии используют изображение сравнительно небольшой части поверхности земного эллипсоида, для того чтобы значительно упростить вычис-

ление искажений, а сами величины линейных и угловых искажений были относительно небольшими. При необходимости изобразить большую часть поверхности эллипсоида ее делят на отдельные небольшие участки, и каждый такой участок изображается на плоскости в своей системе плоских прямоугольных координат.

В картографии применяют множество различных проекций, которые классифицируются по характеру искажений и по виду нормальной сетки основной системы координат [22].

По характеру искажений проекции разделяют на произвольные, равноэллиптические, равноугольные и равнопромежуточные проекции. Из этого множества проекций в геодезии применяют только равноугольные (конформные) проекции, в которых углы между линиями на эллипсоиде при их изображении на плоскости не изменяются, а масштаб в данной точке не зависит от направления.

Геодезические линии на поверхности эллипсоида изображаются на плоскости в виде сложных кривых, и их использование весьма затруднительно. По этой причине изображение геодезической линии на плоскости заменяют прямой линией – хордой, соединяющей начальную и конечную точки такого изображения. При таком подходе необходимо дополнительно вычислять угол между изображением геодезической линии и хордой. Длина хорды используется для решения различных задач на плоскости (например, при решении прямой и обратной геодезических задач на плоскости) [11].

По виду меридианов и параллелей нормальной сетки проекции подразделяются на конические, цилиндрические, азимутальные и их разновидности. Под нормальной сеткой подразумевается та, которая является наиболее простым изображением в данной проекции той или иной сети координатных линий, соответствующих определенной системе координат [22].

Нормальными коническими называют проекции, в которых картографическая сетка имеет следующий вид: меридианы – прямые, сходящиеся в одной

точке под углами, пропорциональными разности долгот соответствующих меридианов, а параллели – дуги концентрических окружностей, центр которых находится в точке схода меридианов.

Частные масштабы и искажения зависят только от широты.

Нормальные цилиндрические проекции имеют наиболее простую картографическую сетку, так как меридианы изображаются в них равноотстоящими параллельными, а параллели – параллельными прямыми, перпендикулярные меридианам.

Частные масштабы и искажения являются функциями только широты.

В азимутальных проекциях меридианы нормальной сетки – прямые, пересекающиеся в одной точке под углами, равными разности долгот соответствующих меридианов, параллели – концентрические окружности с центром в точке пересечения меридианов.

Из всего многообразия проекций карт, предназначенных для решения многочисленных хозяйственных и оборонных задач, наибольший интерес представляют топографические карты, которые являются основными картами государства. Они составляются на основе геодезических измерений и топографических съемок. Геодезической основой для производства топографических съемок являются геодезические пункты, координаты которых даются в той же проекции, что и составляемые топографические карты.

Выбор проекции топографических карт имеет значение с точки зрения установления системы плоских прямоугольных координат.

Неизбежность искажений длин, углов и площадей в любой проекции накладывает определенные требования к простоте учета этих искажений. Главное требование – равноугольность проекции, в которой создается топографическая карта. В каждой точке топографической карты масштаб по всем направлениям должен быть постоянным.

Кроме этого, необходимо, чтобы искажения длин, по крайней мере в рамках листа топографической карты, были в пределах графической точности масштаба (0,2 мм в масштабе карты).

Небольшая величина искажений и простота их учета приводят к необходимости отображать земную поверхность по частям – по отдельным зонам ограниченных размеров. Поэтому желательно, чтобы число зон было минимальным при их максимальных размерах. Для массовых работ очень важно, чтобы зоны были единообразными.

Перечисленным требованиям отвечают равноугольные проекции:

- азимутальная проекция Руссиля;
- коническая проекция Ламберта;
- поперечно-цилиндрическая проекция Гаусса-Крюгера;
- проекция UTM (Universal Transverse Mercator).

Перечисленные проекция имеют общие черты: все они равноугольные; на плоскости отображают области земного эллипсоида ограниченных размеров; искажения минимальные и распределены симметрично относительно линий или точек постоянных искажений; осевой меридиан изображается прямой, принимаемой за одну из координатных осей [19].

#### ***4.4.1. Система плоских прямоугольных координат в проекции***

##### ***Гаусса-Крюгера***

Проекция Гаусса разработана в 1820-1830 гг. и применена на практике при вычислении ганноверской триангуляции для картографирования Германии. Теория проекции Гаусса и ее математическое описание были впервые опубликованы немецким геодезистом Шрейбером в 1866 г. В 1912-1919 гг. другой немецкий математик Крюгер Иоганнес Луис (1857-1923), развивая идеи Гаусса, разработал математический аппарат конформной проекции эллипсоида на плоскость, получившей название проекции Гаусса-Крюгера.



В этой проекции цилиндр касается эллипсоида по меридиану, называемому центральным (осевым) меридианом (рис. 4.9)

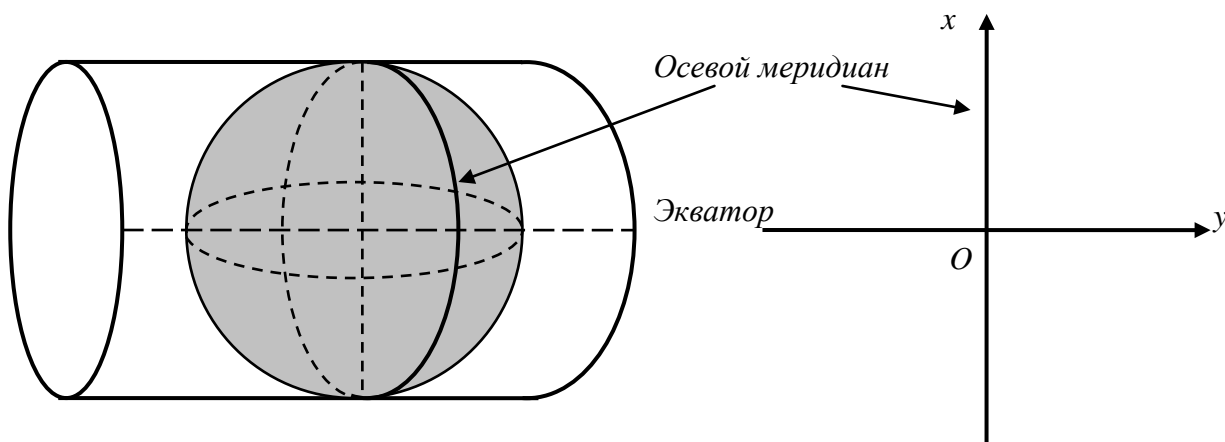


Рис. 4.9. Проекция Гаусса-Крюгера:  
 - цилиндр касается эллипсоида по центральному (осевому) меридиану, масштаб по которому равен 1 (слева);  
 - система плоских прямоугольных координат (справа)

Система координат в проекции Гаусса-Крюгера определяется следующими условиями:

- изображение на плоскости равноугольное;
- осевой меридиан и экватор изображаются на плоскости проекции прямыми линиями, принимаемыми за оси абсцисс и ординат, точка их пересечения является началом системы прямоугольных координат;
- масштаб вдоль осевого меридиана постоянный и принят равным единице.

В проекции Гаусса-Крюгера масштаб проекции быстро возрастает по мере удаления от осевого меридиана. Формула масштаба в функции прямоугольных координат имеет вид [11]:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}. \quad (4.30)$$

Вместе с увеличением масштаба проекции возрастают искажения длин конечных отрезков. Поэтому применение прямоугольных координат Гаусса-

Крюгера для обработки геодезических измерений практически целесообразно только для сравнительно узких полос поверхности эллипсоида.

В СССР система прямоугольных координат Гаусса-Крюгера была впервые применена Н. Г. Келлем (1883-1965) – видным геодезистом, маркшейдером, педагогом, членом-корреспондентом АН СССР, при обработке триангуляции Кузбасса.

В марте 1928 г. состоялось Третье геодезическое совещание, в Постановлении которого указано:

«14. Признать, что наиболее приемлемыми для немедленного применения в СССР являются прямоугольные координаты Гаусса-Крюгера.

15. Рекомендовать ширину координатных полос в  $6^\circ$  по долготе. При этом допускать применение и  $3^\circ$  полос.

16. В изменение решения 2-го Геодезического совещания признать, что средние меридианы должны совпадать со средними меридианами листов международной карты в масштабе 1:1 000 000. Для  $3^\circ$  полос допустить средние меридианы, совпадающие с крайними меридианами листов миллионной карты.

**П р и м е ч а н и е.** Долгота среднего меридиана листов международной карты равна  $6n+3^\circ$ , где  $n$  - целое число.

17. Масштаб вдоль среднего меридиана принять равным единице».

Теория проекции Гаусса-Крюгера рассмотрена в работах [1, 11. 22].

Практическая сущность проекции заключается в следующем. Вся поверхность эллипсоида делится на  $6$ -градусные (по долготе) зоны, которые, каждая в отдельности, разворачиваются в плоскую поверхность.

Всего образуется  $60$  таких зон, которые нумеруются с запада на восток, начиная от  $0^\circ$ , цифрами от  $1$  до  $60$ . По широте зоны делятся на пояса (ряды) по  $4^\circ$ , которые обозначаются латинскими буквами от  $A$  до  $V$ , начиная от экватора. Именно эти листы образуют систему листов (разграфку) карты масштаба 1: 1 000 000.

Каждая из этих зон изображается на плоскости независимо от остальных, образуя систему координат, осями которой являются осевой меридиан зоны и экватор. Крайним западным меридианом первой зоны является Гринвичский меридиан, и счет зон ведется от Гринвича на восток. Осевой меридиан первой зоны имеет долготу  $3^\circ$ , второй –  $9^\circ$ , третьей –  $15^\circ$  или для любой зоны

$$L_{0,N} = 6^\circ N - 3^\circ, \quad (4.31)$$

где  $N$  – номер координатной зоны.

При производстве крупномасштабных топографических съемок применяют трехградусные зоны. Взаимное расположение шестиградусных и трехградусных зон показано на рис. 4.10.

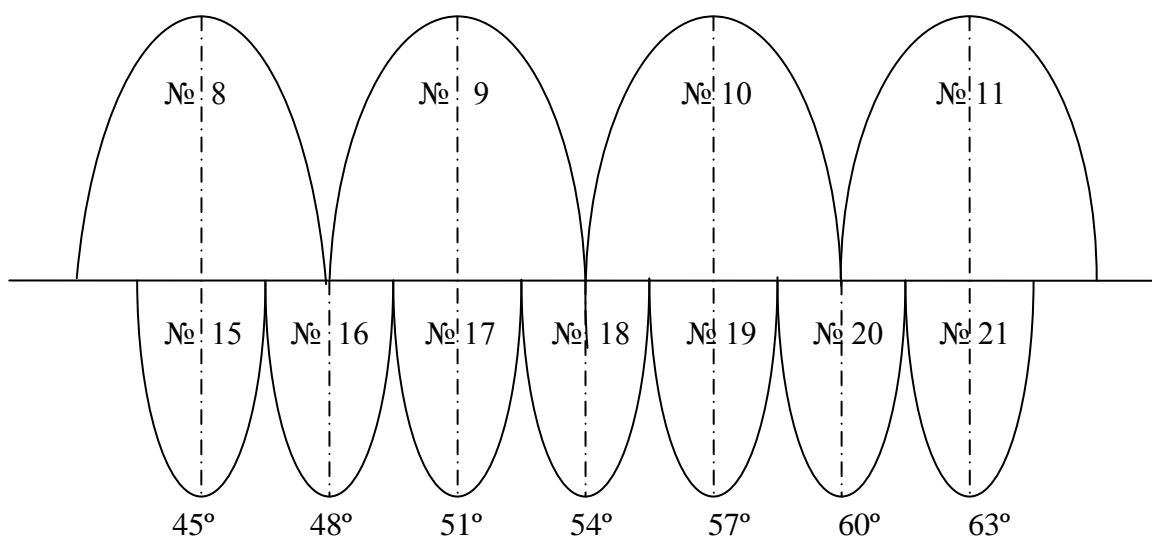


Рис. 4.10. Взаимное положение шестиградусных и трехградусных зон

Осевыми меридианами трехградусных зон служат средние и крайние меридианы шестиградусных зон. Долгота осевого меридиана  $L_{0,n}$  и номер зоны  $n$  трехградусных зон связаны между собой уравнением

$$L_{0,n} = 3^\circ n. \quad (4.32)$$

Точка пересечения экватора с граничными меридианами шестиградусной зоны имеют максимальное значение ординаты  $y$  (в пределах зоны):

$$y_{\max} = \frac{l_{\max}}{\rho} R = \frac{3^\circ}{57,3^\circ} 6378 \text{ км} \approx 334 \text{ км},$$

где  $l$  – разность долгот осевого и граничного меридианов зоны.

Масштаб проекции в этой точке (см. формулу (4.30)) также достигает максимального значения:  $m_{\max} = 1 + \frac{y_{\max}^2}{2R^2} = 1 + \frac{334^2}{2 \cdot 6378^2} \approx 1,00137$ , что соответствует относительному искажению длин линий  $m_{\max} - 1 = 1:730$ .

Для территории России, расположенной севернее параллели с широтой  $B = 43^\circ$ , значение ординаты  $y$  не превышает в пределах шестиградусной зоны:  $y_{\max} \cos B = 334 \text{ км} \cos 43^\circ \approx 244 \text{ км}$ , что соответствует значению масштаба 1,00073 и относительному искажению длин линий порядка 1:1370.

В пределах каждой 6-градусной зоны устанавливается система прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера, в которой ось  $x$  направлена на север, ось  $y$  – на восток (рис. 4.11).

Территория Российской Федерации расположена севернее экватора, поэтому все значения абсцисс  $x'$  в каждой зоне будут иметь положительные значения. Ординаты  $y'$  отсчитываются от осевого меридиана в обе стороны от осевого меридиана и будут отрицательными для точек, лежащих в западной половине координатной зоны.

Чтобы исключить отрицательные значения  $y'$ , осевой меридиан каждой зоны смещается к западу на 500 000 м, и, кроме того, дописывают впереди значения  $y$  номер зоны, так что условное значение  $y = N \cdot 1\,000\,000 \text{ м} + 500\,000 \text{ м} + y'$ .

Например, если некоторая точка находится в 8-й координатной зоне и имеет ординату  $y' = -55\,451,54 \text{ м}$ , то  $y = 8\,444\,548,46 \text{ м}$ .

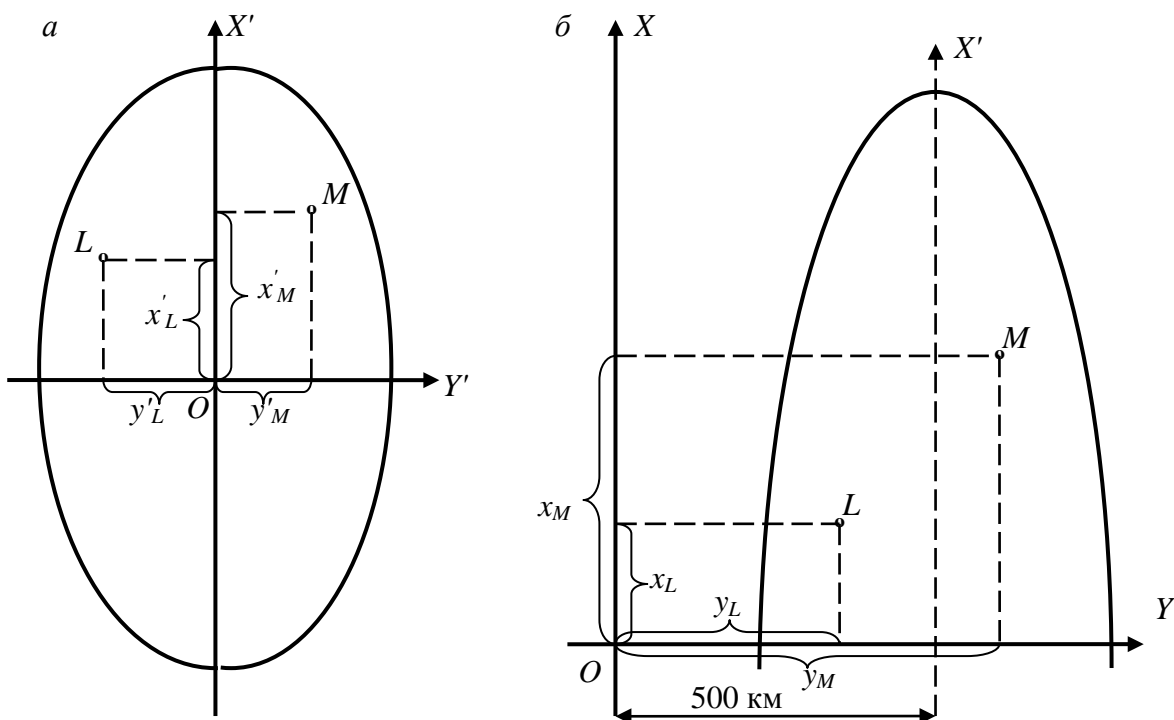


Рис. 4.11. Прямоугольные координаты Гаусса-Крюгера:  
*a* – система истинных координат; *б* - система условных координат

Таким образом, при вычислениях в проекции Гаусса применяют два вида координат:

- истинные координаты  $x'$ ,  $y'$ , началом которых является точка пересечения экватора с осевым меридианом зоны ( $x' = 0$ ,  $y' = 0$ ) (рис. 4.11, *a*);
- условные координаты  $x$ ,  $y$ , началом которых является точка пересечения экватора с условным меридианом ( $x = 0$ ,  $y = 500$  км) (рис. 4.11, *б*).

Связь между истинными значениями прямоугольных координат Гаусса-Крюгера  $x$  и  $y$  и геодезическими координатами  $B$  и  $L$  на эллипсоиде Красовского осуществляется по следующим формулам [4]:

$$\begin{aligned}
 x' = & 6367558,4968B - \sin 2B(16002,89 + 66,9607\sin^2 B + 0,3515\sin^4 B) + \\
 & + l^2 \sin 2B(1594561,25 + 5336,535\sin^2 B + 26,790\sin^4 B + 0,149\sin^6 B) + \\
 & + l^4 \sin 2B(672483,4 - 811219,9\sin^2 B + 5420,0\sin^4 B - 10,6\sin^6 B) + \\
 & + l^6 \sin 2B(278194 - 830174\sin^2 B + 572434\sin^4 B - 16010\sin^6 B) + \\
 & + l^8 \sin 2B(109500 - 574700\sin^2 B + 863700\sin^4 B - 398600\sin^6 B);
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\left. \begin{aligned}
 y' = l \cos B(6378245 + 21346,1414\sin^2 B + 107,1590\sin^4 B + 0,5977\sin^6 B) + \\
 + l^3 \cos B(1070204,16 - 2136826,66\sin^2 B + 17,98\sin^4 B - 11,99\sin^6 B) + \\
 + l^5 \cos B(270806 - 1523417\sin^2 B + 1327645\sin^4 B - 21701\sin^6 B) + \\
 + l^7 \cos B(79690 - 866190\sin^2 B + 1730360\sin^4 B - 945460\sin^6 B).
 \end{aligned} \right\} (4.34)$$

$$\text{В формулах (4.34) и (4.35)} \quad l = L - L_{0,n}, \quad (4.35)$$

где  $L_{0,n}$  – значение долготы осевого меридиана зоны с номером  $n$ , величины  $B$  и  $l$  выражены в радианах. Координаты  $x$  и  $y$  вычисляются с ошибкой не более 1 мм при удалении от осевого меридиана до  $9^\circ$  ( $l \leq 9^\circ$ ).

Вычисление геодезических координат  $B$  и  $L$  на эллипсоиде Красовского по истинным прямоугольным координатам  $x'$  и  $y'$  Гаусса-Крюгера выполняется по формулам:

$$\beta = \frac{x'}{6367558,4969}; \quad z_0 = \frac{y'}{6378245 \cos B_0};$$

$$\begin{aligned}
 B_0 = \beta + \sin 2\beta(0,00252588685 - 0,00001491860\sin^2 \beta + 0,00000011904\sin^4 \beta); \\
 \Delta B = -z_0^2 \sin 2B_0(0,251684631 - 0,003369263\sin^2 B_0 + 0,000011276\sin^4 B_0) + \\
 + z_0^4 \sin 2B_0(0,10500614 - 0,04559916\sin^2 B_0 - 0,00228901\sin^4 B_0 - \\
 - 0,00002987\sin^6 B_0) - z_0^4 \sin 2B_0(0,10500614 - 0,0455991\sin^2 B_0 + \\
 + 0,00228901\sin^4 B_0 - 0,00002987\sin^6 B_0) - \\
 - z_0^6 \sin 2B_0(0,042858 - 0,025318\sin^2 B_0 + 0,014346\sin^4 B_0 - 0,001264\sin^6 B_0) + \\
 + z_0^8 \sin 2B_0(0,01672 - 0,00630\sin^2 B_0 + 0,01188\sin^4 B_0 - 0,00328\sin^6 B_0).
 \end{aligned}$$

$$B = B_0 + \Delta B;$$

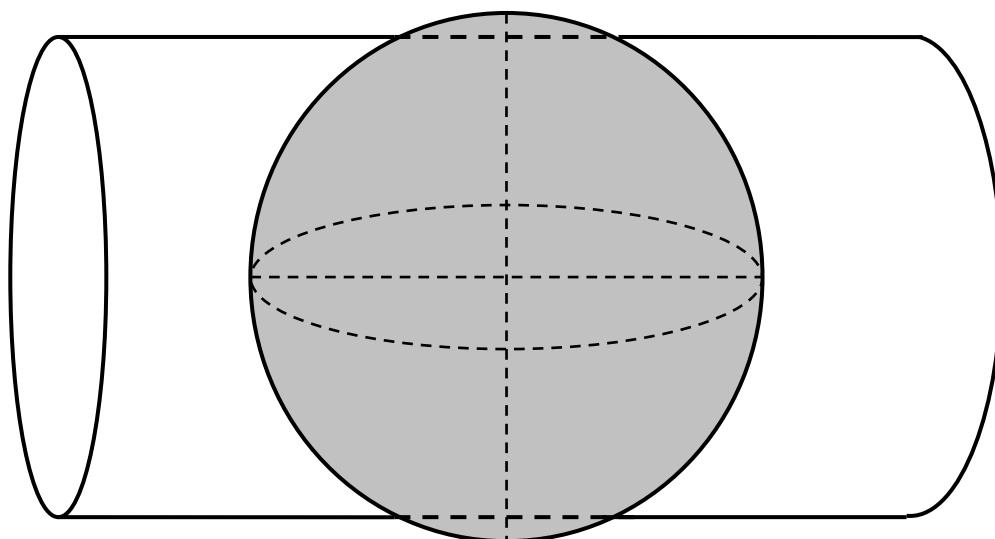
$$\begin{aligned}
 l = z_0(1 - 0,0033467108\sin^2 B_0 - 0,0000056002\sin^4 B_0 - 0,0000000187\sin^6 B_0) - \\
 - z_0^3(0,16778975 + 0,16273586\sin^2 B_0 - 0,00052490\sin^4 B_0 - \\
 0,00000846\sin^6 B_0) + z_0^5(0,0420025 + 0,1487407\sin^2 B_0 + 0,0059420\sin^4 B_0 - \\
 - 0,0000150\sin^6 B_0) - z_0^7(0,01225 + 0,09477\sin^2 B_0 + 0,03282\sin^4 B_0 - \\
 - 0,00034\sin^6 B_0) + z_0^9(0,0038 + 0,0524\sin^2 B_0 + 0,0482\sin^4 B_0 - 0,0032\sin^6 B_0);
 \end{aligned}$$

$$L = L_0 + l. \quad (4.36)$$

В формулах (4.36) величины  $B$  и  $L$  вычисляются в радианах [4].

#### 4.4.2. Система прямоугольных координат в проекции UTM (*Universal Transverse Mercator*)

Равноугольная поперечно-цилиндрическая проекция UTM - универсальная поперечная проекция Меркатора. UTM – это проекция эллипсоида на секущий цилиндр (4.12).



4.12. Проекция эллипсоида на секущий цилиндр

Проекция UTM разработана в 1936 г. Международным союзом геодезии и геофизики и принята многими национальными и международными картографическими организациями [19].

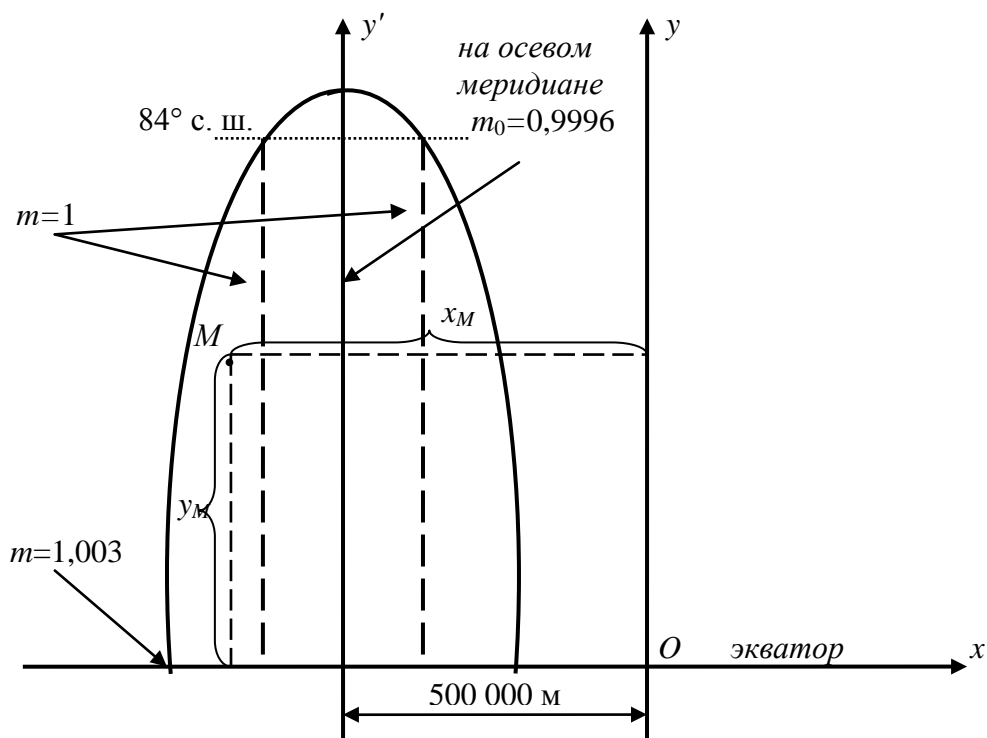
В этой проекции, так же как в проекции Гаусса-Крюгера, применяют шестиградусные зоны. В отличие от проекции Гаусса-Крюгера зоны простираются не от Северного полюса до Южного, а лишь в полосе от параллели  $84^\circ$  северной широты до параллели  $80^\circ$  южной широты. Для картографирования околополюсных пространств используется равноугольная азимутальная (стереографическая) проекция.

Частный масштаб длин на осевом меридиане  $m_0 = 0,9996$ . Поэтому в проекции образуются две линии нулевых искажений, параллельные осевому меридиану.

диану и отстоящие на расстоянии около 180 км по обе стороны от него. На границе зон частный масштаб длин приблизительно равен 1,0003 [19].

Земной эллипсоид делится на 60 шестиградусных зон, которые нумеруются от 1 до 60, начиная от меридиана  $180^\circ$  западной долготы. 1-я зона ограничена меридианами с долготами  $180^\circ$  и  $-174^\circ$ , а 60-я зона - меридианами  $+174^\circ$  и  $+180^\circ$ . Каждая зона имеет свой осевой меридиан.

В пределах каждой 6-градусной зоны устанавливаются две системы прямоугольных координат, в которых положительные направления осей  $y$  и  $x$  направлены на север и на восток соответственно (рис. 4. 13).



4.13. Система прямоугольных координат в проекции UTM для северной части зоны

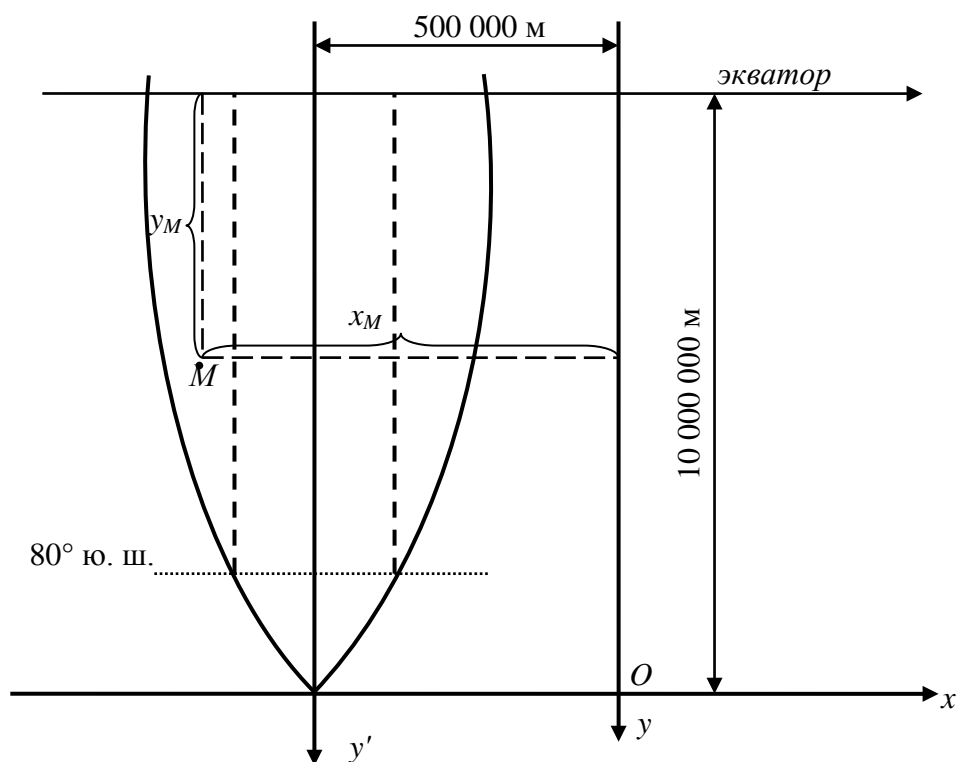
Чтобы исключить отрицательные значения  $x'$ , осевой меридиан каждой зоны смещается к западу (ложный восточный сдвиг) на  $500\,000$  м, и, кроме того, дописывают впереди значения  $x$  номер зоны, так что условное значение  $x = N \cdot 1\,000\,000$  м +  $500\,000$  м +  $x'$ . Например, если некоторая точка нахо-



дится в 6-й координатной зоне и имеет значение  $x' = -55\,451,54$  м, то  $x = 6\,444\,548,46$  м.

В северной части зоны значения  $y'$  и  $y$  на экваторе равны 0.

В южной части каждой зоны начало координат по оси  $x$  перемещено к югу от экватора на  $10\,000\,000$  м (рис. 4.14). Такое смещение начала координат обеспечивает положительные значения прямоугольных координат в направлениях координатных осей  $x$  и  $y$ .



4.14. Система прямоугольных координат в проекции UTM для южной части зоны

Координаты UTM отнесены к эллипсоиду WGS-84

Проекция Гаусса-Крюгера и UTM и их координатные системы широко используются для топографического и тематического картографирования, привязки снимков, полученных с космических аппаратов, а также в качестве математической основы наиболее распространенных баз пространственных данных

#### 4.4.3. Система прямоугольных координат в равноугольной конической проекции Ламберта

В нормальных конических проекциях меридианы изображаются прямыми линиями, сходящимися в одной точке под углами, пропорциональными разности долгот соответствующих меридианов, а параллели – дугами концентрических окружностей с центром в точке схода меридианов (рис. 4.15) [1].

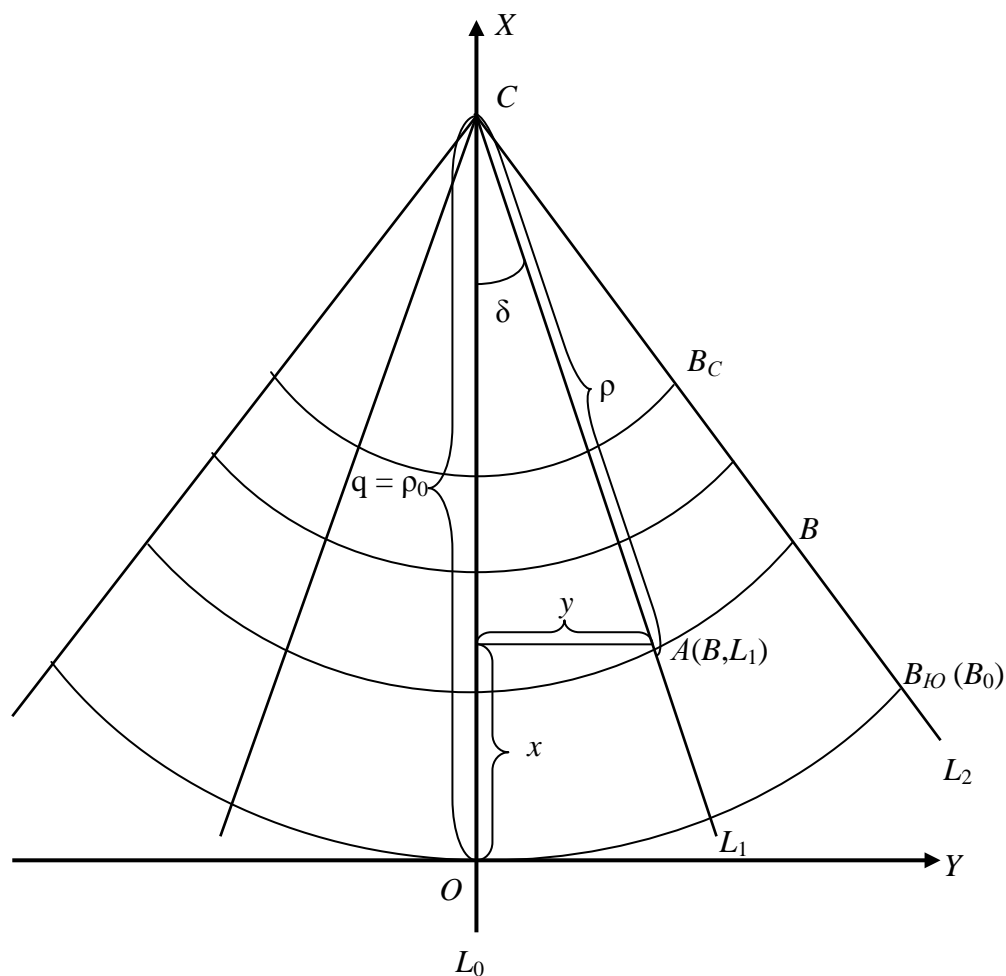


Рис. 4.15. Система координат в нормальной конической проекции

Важным параметром конических проекций является коэффициент пропорциональности  $\alpha$ , который определяет величину углов между линиями меридианов. Значение  $\alpha$  находится в пределах  $0 < \alpha < 1$ .

Началом прямоугольной системы координат является точка  $O(x_0, y_0)$ , являющаяся точкой пересечения среднего меридиана  $L_0$  с южной параллелью карты  $B_0$ .

Введем следующие обозначения:

$B, L$  – геодезические координаты точки;

$x, y$  – прямоугольные координаты точки (положительные направления координатных осей  $X$  и  $Y$  показаны стрелками на рис. 4.15);

$B_0, L_0$  – геодезические координаты начала прямоугольной системы координат в данной зоне проекции Ламберта;

$\rho$  – радиус-вектор параллели с геодезической широтой  $B$ ;

$\rho_0$  – радиус-вектор параллели с геодезической широтой  $B_0$ ;

$\delta$  – полярный угол.

Тогда (см. формулу (4.18))

$$x = x_0 - (\rho_0 - \rho \cos \delta); \quad y = \rho \sin \delta, \quad (4.37)$$

где  $\delta = \alpha \lambda$ ;  $\lambda = L_1 - L_0$ ;  $\rho = f(B)$ .

Параметр  $\alpha$  всегда меньше единицы, и в этом случае параллели изображаются неполными окружностями. Если  $\alpha = 0$ , то конические проекции превращаются в цилиндрические.

В нормальных конических проекциях сетка меридианов и параллелей ортогональна, главные направления совпадут с меридианами и параллелями и частные масштабы длин по меридианам  $m$  и параллелям  $n$  будут экстремальными. Исходя из определения частного масштаба длин и рис. 4.16 получим [1]:

$$m = -\frac{d\rho}{M d\varphi}; \quad n = \frac{\rho d\delta}{r d\lambda} = \frac{\alpha \rho}{r}. \quad (4.38)$$

Знак минус в формуле (4.38) показывает, что с увеличением  $\varphi$  радиус  $\rho$  уменьшается.

Масштаб площади  $p = mn$ .

Наибольшие искажения углов определяют по формуле  $\sin \frac{\varpi}{2} = \frac{a-b}{a+b}$ .

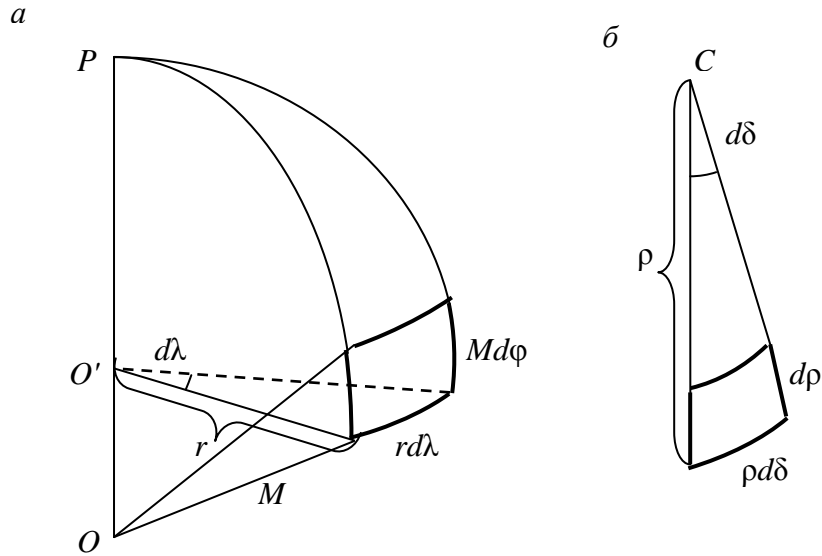


Рис. 4.16. Бесконечно малая трапеция:  
*a* – на эллипсоиде; *б* – в конической проекции

В равноугольных конических проекциях полярный радиус  $\rho$  находят исходя из основного условия равноугольного отображения  $m = n$ , с учетом формул (4.38):

$$-\frac{d\rho}{M d\varphi} = \frac{\alpha \rho}{r} \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \frac{M d\varphi}{r}. \quad (4.39)$$

В результате интегрирования получим:

$$\ln \rho = \ln C - \alpha \int \frac{M d\varphi}{r}, \quad (4.40)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Интеграл  $\int \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} = q$  ( $r = N \cos \varphi$ ) встречается во всех выводах при равноугольном изображении эллипса и после интегрирования

$$\int \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} = \ln U, \quad (4.41)$$

где  $U = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^e(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}$ ;  $\sin \phi = e \sin \varphi$ ;  $e$  – первый эксцентриситет эллипсоида.

Формула (3.45) примет вид  $\ln \rho = \ln C - \alpha \ln U$ , откуда

$$\rho = \frac{C}{U^\alpha}. \quad (4.42)$$

При  $\varphi = 0$  ( $\psi = 0$ ) функция  $U$  равна единице, и тогда  $\rho_{\varphi=0} = C$ ; при  $\varphi = 90^\circ$  функция  $U$  равна бесконечности и  $\rho_{\varphi=90^\circ} = 0$ , т. е. географический полюс изображается точкой. На основании формул (4.37), (4.38), (4.42) получим формулы нормальных равноугольных конических проекций:

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \quad \rho = \frac{C}{U^\alpha}; \quad \delta = \alpha \lambda; \quad C = \text{const}; \quad m = n = \frac{\alpha \rho}{r} = \frac{\alpha C}{r U^\alpha};$$

$$p = m^2; \quad \varpi = 0. \quad (4.43)$$

Параметры  $\alpha$  и  $C$  влияют на величину и распределение искажений. Способы определения параметров  $\alpha$  и  $C$  рассмотрены в работе [1].

Перевычисления геодезических координат в плоские прямоугольные координаты равноугольной конической проекции Ламберта производятся по следующим формулам [5]:

$$N_0 \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}}; \quad \rho_0 = m_0 N_0 \operatorname{ctg} B_0; \quad v_0 = \sin B_0;$$

$$\varphi_0 = B_0 - \sin 2B_0 (a_1 + a_2 \sin^2 B_0 + a_3 \sin^4 B_0);$$

$$a_1 = \frac{1}{2} e^2; \quad a_2 = \frac{5}{12} e^4 - \frac{1}{12} e^6; \quad a_3 = \frac{13}{30} e^6; \quad t_0 = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi_0}{2}; \quad \lambda = v_0 (L - L_0);$$

$$\varphi = B - \sin 2B (a_1 + a_2 \sin^2 B + a_3 \sin^4 B); \quad t = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi}{2};$$

$$k = \frac{t_0^{v_0}}{t^{v_0}}; \quad x = x_0 + \rho_0 (1 - k \cos \lambda); \quad y = y_0 + \rho_0 k \sin \lambda. \quad (4.44)$$

В формулах (4.44) величины  $v$  и  $k$  являются постоянными интегрирования, аналогичные величинам  $\alpha$  и  $C$  в формулах (4.43).

Исходными данными для вычислений по формулам (4.44) являются параметры эллипсоида  $a$  и  $e^2$ , а также постоянные величины для каждой зоны проекции Ламберта  $x_0, y_0, B_0, L_0, v_0$  и  $m_0$ . По этим данным заранее можно вычислить  $\rho_0, t_0, a_1, a_2, a_3$ .

Вычисления геодезических координат по прямоугольным координатам проекции Ламберта выполняют по следующим формулам [5]:

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}}; \\
 \rho_0 &= m_0 N_0 \operatorname{ctg} B_0; \\
 v_0 &= \sin B_0; \\
 v'_0 &= \frac{1}{\sin B_0}; \\
 \varphi_0 &= B_0 - \sin 2B_0 (a_1 + a_2 \sin^2 B_0 + a_3 \sin^4 B_0); \\
 a_1 &= \frac{1}{2} e^2; \quad a_2 = \frac{5}{12} e^4 - \frac{1}{12} e^6; \quad a_3 = \frac{13}{30} e^6; \\
 t_0 &= \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi_0}{2}; \\
 a'_1 &= \frac{e^2 + e^4 + e^6}{2}; \quad a'_2 = \frac{7e^4 + 17e^6}{12}; \quad a'_3 = \frac{14}{15} e^6; \\
 k &= \sqrt{\left(1 - \frac{x - x_0}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{\rho_0}\right)^2}; \\
 \varphi &= 2 \arg(k^{-v'_0} \cdot t_0) - 90^\circ; \\
 B &= \varphi + \sin 2\varphi (a'_1 - a'_2 \sin^2 \varphi + a'_3 \sin^4 \varphi); \\
 L &= L_0 + v'_0 \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{\rho_0 - (x - x_0)}.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

В формулах (4.45) постоянные величины  $\rho_0, \nu_0, \nu'_0, a_1, a_2, a_3, t_0, a'_1, a'_2, a'_3$  вычисляются заранее. Значения  $k, \varphi, B, L$  вычисляют по прямоугольным координатам конкретных точек.

.

## 5. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Выполнение высокоточных измерений с помощью глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) ГЛОНАСС и GPS тесно связано с координатными системами, в которых выполняются спутниковые измерения.

В космической геодезии для определения координат точек земной поверхности используют в основном геоцентрические прямоугольные пространственные системы координат, которые достаточно подробно рассмотрены в разделе 4.1.

При описании движения спутников используются сферические системы координат, начало которых может быть установлено как в центре масс Земли, так и в любой точке на земной поверхности (см. раздел 3.1).

Измеряемые навигационные параметры спутников ГНСС и определяемые координаты геодезических спутниковых приемников отсчитываются в разных системах координат.

Спутники совершают движение вокруг Земли по эллиптическим орбитам, которые под воздействием возмущающих ускорений со временем (от эпохи к эпохе) меняют свою форму и ориентацию в пространстве. Мгновенную орбиту спутника называют оскулирующей. С оскулирующей орбитой связана орбитальная система координат.

Спутник  $s'$ , перемещаясь по проекции орбиты на небесную сферу из Южного полушария в Северное, пересекает плоскость небесного экватора в точке  $ВУ$ , называемой восходящим узлом.

Угол  $\Omega$  - долгота  $ВУ$  отсчитывается в плоскости экватора на восток от направления на точку весеннего равноденствия  $\gamma$  до направления на  $ВУ$ . (Точка весеннего равноденствия  $\gamma$  – это точка пересечения небесного экватора с эклиптической).



Угол  $\omega$  – аргумент перигея (перигея) с вершиной в центре масс Земли отсчитывается в плоскости орбиты от направления на  $BV$  до направления на  $\Pi$  (перигей).

Перигей - ближайшая к центру масс Земли точка орбиты спутника.

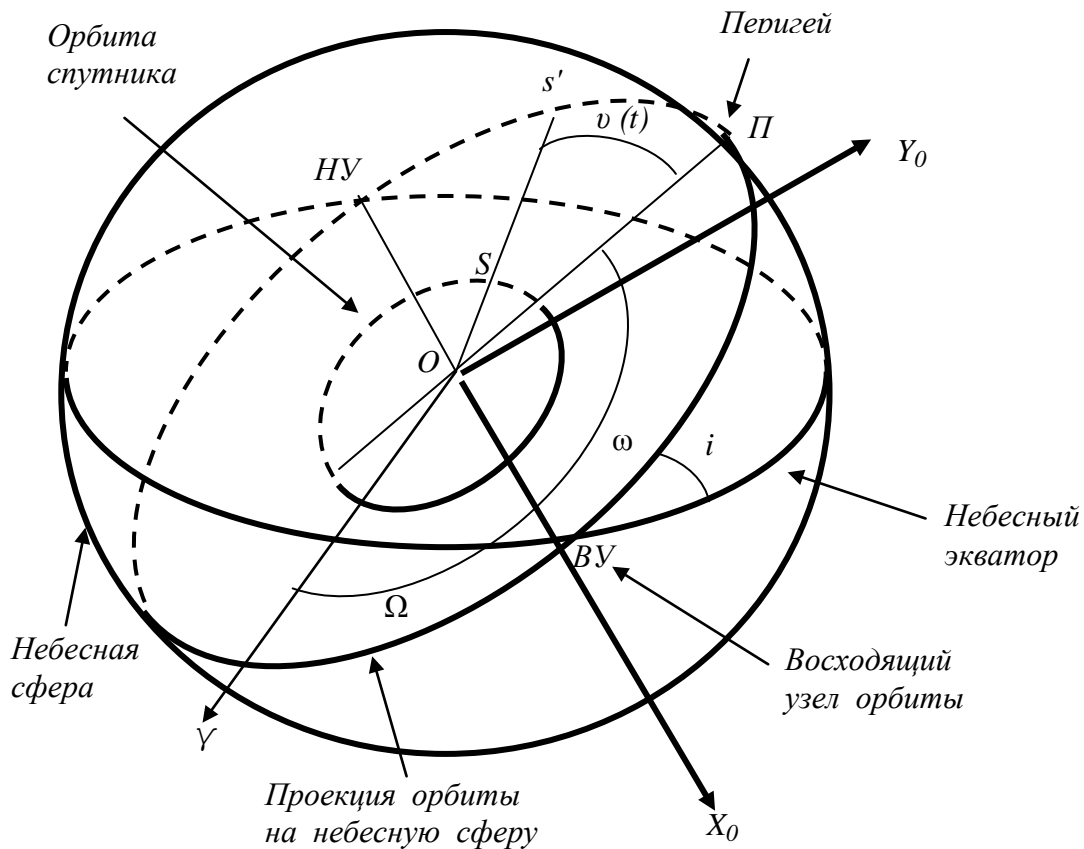


Рис. 5.1. Элементы кеплеровой орбиты и орбитальная система координат

Угол  $i$  – наклон плоскости орбиты к плоскости экватора.

Положение спутника на орбите характеризуется истинной аномалией  $v$  – угол в плоскости орбиты между радиус-вектором  $\vec{r}$  и направлением на перигей  $\Pi$ . Сумма аргумента перигея и истинной аномалии называется аргументом широты  $u$  ( $u = \omega + v$ ).

Элементы, характеризующие орбитальное движение спутника на исходную эпоху, и параметры, определяющие изменения этих элементов с течением времени, составляют эфемериды спутника (эфемериды - это таблицы, в которых даны координаты спутника на определенные моменты времени).

С орбитой спутника связана орбитальная система координат, которая представляет собой систему плоских прямоугольных координат. Начало координат совпадает с центром масс Земли. Оси координат лежат в плоскости орбиты, при этом ось  $X_0$  направлена в  $BV$ , ось  $Y_0$  - перпендикулярна оси  $X_0$ . Пользуясь эфемеридами спутника, можно вычислить его орбитальные координаты  $x_0$  и  $y_0$  по формулам:

$$x_0 = r \cos u; \quad y_0 = r \sin u, \quad (5.1)$$

где  $r$  – расстояние от центра масс Земли до мгновенного положения спутника на орбите;  $u$  – аргумент широты.

Для того чтобы перейти от орбитальной системы координат к геоцентрической пространственной прямоугольной системе, необходимо выполнить два поворота:

- поворот плоскости орбиты на угол наклона  $i$ ;
- поворот восходящего узла орбиты  $BV$ , т. е. направления оси  $X_0$ , на угол  $l$  – угол в плоскости экватора между  $BV$  и плоскостью начального меридиана.

Такое преобразование в матричном виде будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos l & -\cos i \sin l \\ \sin i & \cos i \cos l \\ 0 & \sin i \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_0. \quad (5.2)$$

Каждый спутник передает свои эфемериды  $(X, Y, Z)$  в составе навигационного сообщения.

## МЕСТНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Под местной системой координат понимают условную систему координат, установленную в отношении ограниченной территории, не превышающей территорию субъекта Российской Федерации. Начало отсчета координат и ориентировка осей координат местной системы смещены по отношению к началу отсчета координат и ориентировки осей координат единой государственной системы координат, используемой при осуществлении геодезических и картографических работ.

Местные системы координат устанавливаются для проведения геодезических и топографических работ при инженерных изысканиях, строительстве и эксплуатации зданий и сооружений, межевании земель, ведении кадастра и осуществлении иных специальных работ [17].

При установлении местных систем координат применяется система плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера, но с произвольным осевым меридианом, проходящим через центральную часть участка или вблизи его с таким расчетом, чтобы можно было пренебречь поправками за редуцирование линий и углов на плоскость этой проекции.

Первые местные системы плоских прямоугольных координат появились при составлении крупномасштабных карт и планов городов. С целью повышения точности таких карт и планов стали переходить от осевых меридианов шестиградусных зон проекции Гаусса-Крюгера к произвольным осевым меридианам, проходящим через центральную часть города. Такие местные системы координат [4] получили название местных систем координат с постоянными коэффициентами. Они создавались на сравнительно небольшой территории [4].

При установлении местных систем координат необходимо обеспечить возможность перехода от местной системы координат к государственной сис-

теме координат. Такой переход осуществляется с использованием параметров перехода (ключей). Параметрами перехода (ключами) от местной системы координат к государственной системе координат являются:

- координаты начала местной системы координат в государственной системе координат  $(X_0, Y_0)$ ;

- координаты начала местной системы координат в местной системе координат  $(x_0, y_0)$  ;

- долгота осевого меридиана, проходящего через начало местной системы координат  $(L_0)$ ;

- угол поворота осей координат местной системы относительно осей координат государственной системы в точке начала местной системы координат  $(\gamma)$ ;

- высота поверхности относимости местной системы координат; обычно это высота над уровнем моря  $(H_0=0)$  или средний уровень города  $(H_0=H_{\text{города}})$ ;

- система высот.

Угол  $(\gamma)$  поворота осей координат  $(x, y)$  местной системы координат относительно осей координат  $(X, Y)$  государственной системы означает угол поворота осевого меридиана зоны, в которой установлена местная система координат относительно осевого меридиана шестиградусной зоны в проекции Гаусса-Крюгера. Он отсчитывается по ходу часовой стрелки от осевого меридиана шестиградусной зоны проекции Гаусса-Крюгера (рис. 6.1).

Если  $\gamma$  не задается, то его можно вычислить с высокой точностью (менее 0,001") по формулам, приведенным в работе [4].

Угол  $\gamma$  с достаточной точностью может быть вычислен по формуле

$$\gamma = (\alpha'_{OP} - \delta'_{OP}) - (\alpha_{OP} - \delta_{OP}), \quad (6.1)$$

где  $\alpha_{OP}, \alpha'_{OP}$  - дирекционные углы стороны  $OP$  в государственной и местной системах координат соответственно (см. рис. 6.1);

$\delta_{OP}, \delta'_{OP}$  - поправки за кривизну изображения геодезической линии при переходе на плоскость проекции Гаусса-Крюгера в государственной и местной системах координат соответственно [18].

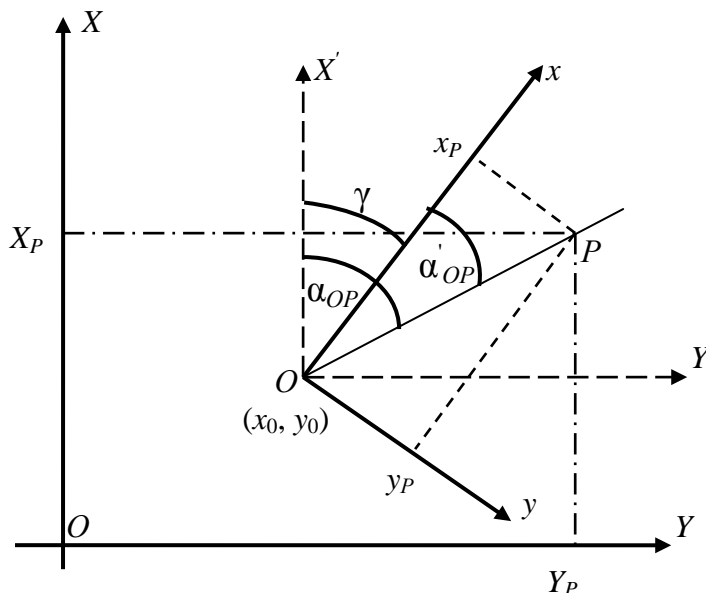


Рис. 6.1. Угол  $\gamma$  поворота осей координат местной системы координат относительно государственной системы

Преобразование координат из местной системы координат в государственную систему производится по формулам

$$\begin{aligned} X^{\text{Гос}} &= X_0^{\text{Гос}} + x' + (y_0 \cdot f \cdot y' + y_0^2 \cdot f)x'; \\ Y^{\text{Гос}} &= Y_0^{\text{Гос}} + (y_0 \cdot f \cdot y' + y_0^2 \cdot f)y' - y_0 \cdot f \cdot (x')^2, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где  $X^{\text{Гос}}, Y^{\text{Гос}}$  – координаты пункта в государственной системе координат в шестиградусной зоне проекции Гаусса-Крюгера (СК-42, СК-95);

$X_0^{\text{Гос}}, Y_0^{\text{Гос}}$  - координаты начального пункта местной системы координат в государственной системе координат;

$x', y'$  – координаты пункта в местной системе координат;

$f = \frac{1}{2R_0^2}$ ;  $R_0$  - радиус кривизны в точке начала местной системы координат.

Координаты  $x', y'$ , входящие в формулу (3.54), должны быть преобразованы за поворот осей координат местной системы координат относительно государственной системы (см. раздел 1.2.1) и за переход от среднего уровня населенного пункта ( $H_0$ ) к уровню моря по формуле

$$\begin{aligned}x' &= \Delta x \left(1 - \frac{H_0}{N_0}\right) \cos \gamma - \Delta y \left(1 - \frac{H_0}{N_0}\right) \sin \gamma; \\y' &= \Delta y \left(1 - \frac{H_0}{N_0}\right) \cos \gamma - \Delta x \left(1 - \frac{H_0}{N_0}\right) \sin \gamma; \\ \Delta x &= x - x_0; \Delta y = y - y_0,\end{aligned}\tag{6.3}$$

где  $x_0, y_0$  – координаты начального пункта в местной системе координат;

$x, y$  – координаты пункта в местной системе координат;

$N_0$  – радиус кривизны первого вертикала в точке начала местной системы координат;

$\gamma$  – угол поворота осевого меридиана местной системы координат относительно осевого меридиана шестиградусной зоны проекции Гаусса-Крюгера.

Значение  $N_0$  учитывается только в том случае, если в населенном пункте принята поверхность относимости с абсолютной высотой  $H_0$ . Если в установленной местной системе координат все измерения отнесены к уровню Балтийского моря, то в формулах (3.5) значение  $H_0/N_0$  принимается равным нулю.

Преобразование из государственной системы координат в местную производится по следующим формулам:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \Delta X \left(1 + \frac{H_0}{N_0}\right) \cos \gamma + \Delta Y \left(1 + \frac{H_0}{N_0}\right) \sin \gamma; \\y &= y_0 + \Delta Y \left(1 + \frac{H_0}{N_0}\right) \cos \gamma - \Delta X \left(1 + \frac{H_0}{N_0}\right) \sin \gamma; \\ \Delta X &= \Delta X' - (2Y_0 \cdot f \cdot \Delta Y' + Y_0^2 \cdot f) \Delta X'; \\ \Delta Y &= \Delta Y' - (Y_0 \cdot f \cdot \Delta Y' + Y_0^2 \cdot f) \Delta Y' + Y_0 \cdot f (\Delta X')^2; \\ \Delta X' &= X^{Гос} - X_0^{Гос}; \Delta Y' = Y^{Гос} - Y_0^{Гос},\end{aligned}\tag{6.4}$$

В формулах (6.4) приняты те же обозначения, что и в формулах (6.2) и (3.55). Если в местной системе координат измерения отнесены к уровню моря, выражение  $\frac{H_0}{N_0}$  принимается равным нулю.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основой решения всех задач, стоящих перед геодезией, лежит установление различных систем координат. Многочисленные измерения на поверхности Земли и в околоземном пространстве позволяют решить задачу создания государственной геодезической сети (ГГС). Состав и точность геодезических измерений, выполняемых на пунктах ГГС, определяют основные требования к установлению систем координат, т. е. определение начала систем координат, положение координатных плоскостей или осей, установление масштаба.

В современных условиях возрастают требования к точности определения координат пунктов ГГС, являющихся физической реализацией систем координат. В соответствии с “Основными положениями о государственной геодезической сети Российской Федерации” [14], создается ГГС, основанной на применении методов космической геодезии и использовании глобальных навигационных спутниковых систем ГЛОНАСС и GPS. Создаваемая ГГС включает в себя геодезические построения различных классов точности:

- фундаментальную астрономо-геодезическую сеть (ФАГС);
- высокоточную геодезическую сеть (ВГС);
- спутниковую геодезическую сеть 1 класса (СГС-1)

Такая ГГС позволит создать высокоточную национальную геоцентрическую систему координат. По своим точностным характеристикам эта система координат должна соответствовать международной системе координат ITRF.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вахрамеева Л. А., Бугаевский Л. М., Казакова Э. Л.* Математическая картография. М.: Недра, 1986. 286 с.
2. *Высшая геодезия*/ В. Г. Зданович [и др.]. М.: Недра, 1970. 512 с.
3. *Генике А. А., Побединский Г. Г.* Глобальные спутниковые системы определения местоположения и их применение в геодезии. М.: Картгеоцентр, 2004. 335 с.
4. *Герасимов А. П., Назаров В. Г.* Местные системы координат. М.: ООО «Издательство «Перспект», 2010. 64 с.
5. *Герасимов А. П.* Уравнивание государственной геодезической сети. М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1996. 216 с.
6. *ГОСТ Р 51794-2008. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. Методы преобразования координат определяемых точек.* Введ. 2008-18-12. М.: Стандартинформ, 2009.
7. *Демьянов Г. В.* Геодезические системы координат, современное состояние и основные направления развития // Геодезия и картография. 2008. №9. С.17-20.
8. *Единая государственная система геодезических координат 1995 года (СК-95): справочный документ / под общей редакцией А. А. Дразнюка.* М.: ЦНИИГАиК, 2000. 35 с.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2009. 224 с.
10. *Кленко В. Л.* Космическая геодезия. Сферическая астрономия. Екатеринбург: УГГУ, 2007. 162 с.
11. *Морозов В. П.* Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1969. 304 с.
12. *Огородова Л. В.* Высшая геодезия. М.: Геодезкартиздат, 2006. 384 с.
13. *Опыт создания геоцентрической системы координат ПЗ-90 / В. В. Бойков [и др.]* // Геодезия и картография. 1993. №11. С.17-21.
14. *Основные положения о государственной геодезической сети Российской Федерации.* ГКИНП (ГНТА) – 01 – 006 – 03. М.: ЦНИИГАиК, 2004. 28 с.

15. *Пеллинен Л. П.* Высшая геодезия. М.: Недра, 1978. 264 с.
16. *Плахов Ю. В., Краснорылов И. И.* Геодезическая астрономия. М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 2002. 390 с.
17. *Правила установления местных систем координат:* Постановление Правительства Российской Федерации от 3 марта 2007 г. №139.
18. *Руководство по математической обработке геодезических сетей и составлению каталогов координат и высот пунктов в городах и поселках городского типа.* ГКИНП – 06 – 233 – 90 (Издание официальное). М.: ГКГК СССР, 1990. 376 с.
19. *Серापинас Б. Б.* Математическая картография. М.: Издательский центр «Академия», 2005. 338 с.
20. *Система геодезических параметров Земли “Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90):* справочный документ / под общей редакцией В. В. Хвостова М.: Координационный научно-информационный центр, 1998. 40 с.
21. *Система координат СК-95:* Информационный бюллетень ГИС – Ассоциации 3(20). 1999. 3 с.
22. *Соловьев М. Д.* Математическая картография. М.: Недра, 1969. 288 с.
23. *Татевян С. К.* Проблемы построения земной координатной основы // Геодезия и картография. 2009. №4. С. 9-13.
24. *Тетерин Г. Н.* История геодезии с древнейших времен. Новосибирск: Агентство «Сибпринт», 2001. 432 с.
25. *Яковлев Н. В.* Высшая геодезия. М.: Недра, 1989. 445 с.

Научное издание

Владлен Лазаревич Клепко  
Александр Васильевич Александров

## СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ГЕОДЕЗИИ

*Научная монография*

Редактор изд-ва *Л. В. Устьянцева*  
Компьютерная верстка *В. Л. Клепко*  
Дизайн обложки *Н. И. Гасанов*

Подписано в печать 24.05.2011 г. Формат 60 × 84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать на ризографе.  
Печ. л. 7,25. Уч.-изд. л. 5,75. Тираж 200. Заказ №

Издательство УГГУ  
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30  
Уральский государственный горный университет  
Отпечатано с оригинал-макета  
в лаборатории множительной техники УГГУ