ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

PROBABILITY: A FIRST COURSE

FREDERICK MOSTELLER

Harvard University

ROBERT E. K. ROURKE

Kent School

GEORGE B. THOMAS, Jr.

Massachusetts Institute of Technology

ADDISON WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC.

READING, MASSACHUSETTS, USA – LONDON, ENGLAND

1961

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

Популярная серия

Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас

Вероятность

Перевод с английского
В. В. Фирсова

Под редакцией И. М. Яглома

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1969

УДК 519.2

Эта книга, написанная группой известных американских математиков и педагогов, представляет собой элементарное введение в теорию вероятностей и статистику — разделы математики, которые находят сейчас все большее и большее применение в науке и в практической деятельности. Написанная живым и ярким языком, она содержит множество увлекательных примеров, взятых большей частью из сферы повседневной жизни. Несмотря на то что для чтения книги достаточно владеть математикой в объеме восьмилетней школы, она является вполне корректным введением в теорию вероятности.

Книга будет полезна всем интересующимся теорией вероятностей, студентам технических и естественно-научных вузов, техникумов, учителям средних школ и учащимся старших классов, а также всем любителям математики.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
30—69

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Одна из наиболее бросающихся в глаза общих тенденций современной математики и ее приложений состоит в резком повышении роли тех разделов науки, которые анализируют явления, имеющие «случайный» характер, и основываются на теории вероятностей. И всего лишь «небольшим преувеличением» прозвучала шутка известного американского математика Дж. Дуба, начавшего свой доклад в Московском математическом обществе словами: «Всем специалистам по теории вероятностей хорошо известно, что математика представляет собой часть теории вероятностей». Эта тенденция в значительной степени объясняется тем, что большинство возникших в последние десятилетия новых математических дисциплин, примыкающих к тому направлению мысли, которое ныне обозначается собирательным термином «кибернетика», оказалось тесно связанным с теорией вероятностей; тем самым теория вероятностей вдруг стала чуть ли не самой первой по прикладному значению из всех математических дисциплин. При этом возникновение ряда новых в большинстве своем «порожденных» теорией вероятностей наук, подобных, скажем, «теорий игр» (см., например, [38]—[41][1])) или «теории информации» (см. [42]—[44]), привело к положению, при котором теорию вероятностей также приходится рассматривать как объединение большого числа разнородных и достаточно глубоко развитых математических дисциплин. Если же прибавить ко

---

[1]) Цифры в квадратных скобках отсылают читателя к составленному редактором списку литературы в конце книги.

всему вышесказанному бесспорное методологическое значение теории вероятностей, важность понимания связи между «случайным» и «неизбежным», между «динамическими» и «статистическими» закономерностями[1]), то станет ясным, что в наше время основы теории вероятностей должны входить в научный багаж каждого образованного человека.

Сейчас во многих странах мира ведутся серьезные дискуссии о включении теории вероятностей (наряду с алгеброй, геометрией и анализом, т. е. основами дифференциального и интегрального исчисления) в курс общеобразовательной средней школы. В ряде стран, например в Югославии и в Японии, элементы теории вероятностей уже давно проходят в школе; в других странах этот вопрос еще только обсуждается и включение теории вероятностей в школьную программу испытывается в экспериментальном порядке. У нас дело тоже пока не пошло далее отдельных экспериментов; впрочем в настоящее время раздел, посвященный теории вероятностей, нашел место среди рекомендованных Министерством просвещения тем факультативных занятий, причем можно не сомневаться в том, что впоследствии этот раздел будет включен и в обязательный курс средней школы.

Давно обсуждается вопрос о включении элементов теории вероятностей в школьный курс математики и в США. В 1959 г. группа американских математиков и педагогов, в которую входили все три автора лежащей перед вами книги (и С. Уилкс, которому книга посвящена), выпустила ротапринтное издание рассчитанного на учащихся средней школы экспериментального учебника по теории вероятностей и математической статистике, а также специальное пособие для учителей, ведущих преподавание по это-

---

[1]) Многие естествоиспытатели и философы (к их числу принадлежат, например, выдающийся советский физик академик В. А. Фок и один из создателей квантовой механики немецкий ученый Вернер Гейзенберг) склонны даже считать, что все без исключения законы природы на самом деле имеют «статистический» (т. е. вероятностный) характер.

му учебнику[1]). Эта книга несколько раз переиздавалась; на ее основе Ф. Мостеллер, Р. Е. К. Рурке и Дж. Б. Томас составили книгу «Теория вероятностей с приложениями к статистике» ([19] в списке литературы на стр. 418—422), вышедшую в свет в 1961 г. Настоящая книга представляет собой уже третий вариант элементарного учебника по теории вероятностей; он составлен на основе предшествующего опыта и рассчитан на широкий круг читателей, начиная с учащихся старших классов средней школы.

Следует сказать несколько слов об особенностях этой книги. Определенным ее недостатком (чуждым, кстати сказать, книге [19]) можно считать полный отказ от концепции непрерывной случайной величины, связанный со стремлением к доступности книги для читателей, совсем не знакомых с элементами дифференциального и интегрального исчисления. Кроме того, нам кажется, что авторы сравнительно мало внимания уделяют принципиальным вопросам теории вероятностей (разным подходам к самому понятию вероятности, вопросу о динамических и статистических закономерностях и т. д.); таким образом здесь оказываются в известной степени обойденными те вопросы, которые мы считаем наиболее важными компонентами общей математической культуры. В противоположность этому «прикладным» аспектам теории, в частности тем из них, которые связаны с математической статистикой, в этой книге уделено заметно больше места, чем в привычных для русского читателя популярных изложениях теории вероятностей; достаточно обратить внимание, скажем, на тщательность, с которой поясняется техника работы с таблицей случайных чисел (стр. 156—164), или на обсуждение в гл. VII вопроса о доверительных интервалах, сопровождаемое указанием на использование специальной номограммы (стр. 417). Весьма украшает книгу большое число детально разобранных примеров, как правило заимство-

[1]) Обстоятельная рецензия на эту книгу была помещена в издававшемся у нас сборнике «Математическое просвещение», вып. 6, М. Физматгиз, 1961, стр. 355—361.

ванных из реальной жизни и могущих заинтересовать учащихся; эти примеры иллюстрируют и поясняют буквально каждое новое понятие и предложение. Тщательно произведен также отбор задач, многочисленных и достаточно интересных; эти задачи доставят читателю хорошую возможность самопроверки степени усвоения материала. Облегчает пользование книгой выразительное выделение в ее тексте всех определений, а также теорем и следствий (в русском издании в пределах каждой главы независимо нумеруются определения и теоремы и следствия) и наличие компактной сводки формул и теорем (стр. 423—426). Вообще чисто педагогические достоинства этого учебника весьма значительны — и хотя намеченный здесь подход к построению школьного курса теории вероятностей не кажется нам единственным возможным, можно смело надеяться, что книга окажется интересной и полезной преподавателю средней школы и окажет свое влияние на ведущиеся у нас дискуссии о преподавании математики в школе и в педагогическом институте. Вполне можно рекомендовать эту книгу и многим другим категориям читателей, начиная с интересующихся математикой учащихся старших классов средней школы и любителей математики, не обладающих специальным образованием.

При подготовке русского издания мы старались, по возможности, не отступать от оригинала, хотя формулировки некоторых примеров и задач пришлось изменить (а две-три задачи и вовсе исключить), ибо существовала реальная опасность того, что содержание этих примеров и задач, весьма тесно увязанных с американской действительностью, русскому читателю будет просто непонятно; эти изменения, так же как замены в некоторых примерах и задачах английских слов и букв русскими, никак не оговариваются. Исключено также обсуждение в дополнении I смысла понятия абсолютной величины числа и свойств символа $|\ |$, в нашей стране знакомые всем восьмиклассникам. Сводка формул и словарь терминов, в оригинале помещенные на обороте корки переплета и смежных листках, перенесены в конец книги. Не помещена имеющаяся в английском издании таблица квадратов и квадратных корней, доступная любому школьнику. Немногочисленные подстрочные примечания переводчика и редактора отмечены звездочками в отличие от нумерованных сносок автора. Заново составлен список литературы, в английском оригинале почти исключительно состоящий из сочинений, нашему читателю недоступных (заметим, что в оригинальном списке литературы имелось несколько меньше сочинений по теории вероятностей, но гораздо больше книг по статистике). Хочется еще обратить внимание читателя на (употребляемый авторами без всяких пояснений) квадратик □, указывающий конец определенного доказательства; этот квадратик можно расшифровывать как (иногда встречающиеся в нашей литературе) буквы ч. т. д. («что и требовалось доказать»).

В заключение следует сказать несколько слов об авторах настоящей книги. Фредерик Мостеллер — руководитель отделения статистики Гарвардского университета, член Американской академии наук и искусств; он хорошо знаком математикам всего мира своими книгами и научными работами [1]). Роберт Рурке — видный педагог; он возглавляет отделение математики Кентской школы и принимает активное участие в деятельности Исследовательской группы по школьной математике Американской математической ассоциации (School Mathematics Study Group, сокращенно SMSG), объединяющей многих ученых и педагогов и ведущей большую работу по модернизации преподавания математики на всех уровнях. Наконец, младший из авторов, Джордж Томас, является профессором прославленного Массачусетского технологического института, в котором работали, в частности, основоположники кибернетики Норберт Винер и Клод Шеннон.

И. М. Яглом

---

[1]) На русский язык переведена книга: Буш Р., Мостеллер Ф., Стохастические модели обучаемости, Физматгиз, М., 1962.

А. Таккеру и С. Уилксу

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

По этой книге можно научиться следующему: во-первых, пониманию закономерностей, которые возникают в процессах, содержащих случайные отклонения; во-вторых, умению сопоставлять реальным физическим ситуациям их вероятностные математические модели и, в-третьих, использованию этих математических моделей для изучения реальных ситуаций и предсказания исходов соответствующих экспериментов на основе подходящей меры неопределенности. В гл. I обсуждаются наиболее распространенные интерпретации понятия вероятности и иллюстрируются способы применения теории вероятностей и статистики к некоторым важным практическим и научным проблемам.

Нам кажется, что эта книга обладает следующими отличительными особенностями:

1. Для понимания излагаемого в книге материала достаточно владения алгеброй в объеме курса средней школы. Знание дифференциального и интегрального исчислений не предполагается.

2. Первые четыре главы содержат доступное изложение краткого курса теории вероятностей для конечных пространств событий.

3. В гл. V одним из немногих элементарных способов вводятся понятия случайной величины и ее распределения и изучаются характеристики таких распределений.

4. Биномиальная теорема, которая давно уже является одной из установившихся тем школьной про-

граммы по математике, часто используется в гл. VI, в которой подробно исследуются свойства биномиального распределения. В конце книги приводятся биномиальные таблицы, составленные для значений p, меньших, равных и больших $^1/_2$. Нам кажется, что удвоение размеров этих таблиц из-за включения значений $p > {}^1/_2$ оправдано дополнительными удобствами при их использовании.

5. В гл. VII рассматриваются вопросы контроля качества продукции, статистической проверки гипотез и оценки вероятностей. Дополнительно к применениям классической теории статистических решений мы включили сюда несколько простых примеров более современных методов, основанных на применении теоремы Байеса.

Каждое новое понятие в книге вводится через соответствующие примеры. Кроме того, примеры приводятся после каждого существенного определения или теоремы. Читатель, желающий быстрей ознакомиться с книгой, может просмотреть некоторые из этих примеров и сконцентрировать внимание на пронумерованных определениях, теоремах и следствиях из них. Однако подлинное владение материалом может возникнуть лишь при достаточно внимательном ознакомлении с иллюстративными примерами и решении упражнений, помещенных в конце большинства параграфов.

Подходящим образом отбирая материал из книги, преподаватель может использовать ее как основу для построения различных курсов теории вероятностей. Лучшими помощниками преподавателя при таком отборе будут его опыт и вкус. Например, программу-минимум может составить изучение первых четырех глав. Для более полного ознакомления с теорией вероятностей следовало бы изучить весь материал вплоть до § 4 гл. VI; при этом в случае недостатка времени можно опустить § 8—12 гл. III, § 4—6 гл. IV и § 5—7 гл.V. Если преподаватель заинтересован в добавлении к курсу статистических приложений (контроль качества, проверка гипотез, оценки вероятностей), то в курс необходимо включить § 5—7 гл. V и § 5 гл. VI. Параграфы 4 и 6 гл. VII можно опустить.

При написании книги авторы широко пользовались помощью, критикой и поддержкой ряда лиц и организаций, которым они чувствуют себя крайне обязанными. Особенно полезен был опыт, приобретенный авторами в качестве членов Комиссии по математике Совета по проведению вступительных экзаменов в колледжи. В частности, были учтены замечания и пожелания, высказанные по адресу экспериментального курса «Введение в теорию вероятностей и статистических решений», известного под названием «серой книги» *).

Авторы пользовались помощью Эдвина К. Дугласа, Ричарда С. Питерса, Доналда Э. Ричмонда и Сэмюэля С. Уилкса и с удовольствием вспоминают сотрудничество с ними. Некоторые разделы этой книги основаны или даже просто заимствованы из материалов, изданных Советом по проведению вступительных экзаменов в колледжи (разумеется, с разрешения Совета). Это разрешение, впрочем, не налагает никакой ответственности на Совет и Комиссию по математике. Значительная часть материала книги была использована в качестве основы курса по теории вероятностей и статистике, который читался в национальном телевизионном классе компании Нейшнл Бродкастинг компани.

Авторы выражают благодарность всем лицам и организациям, способствовавшим выходу этой книги.

Ф. Мостеллер
Р. Рурке
Дж. Томас

---

*) Речь идет об экспериментальном учебнике теории вероятностей для американской средней школы, явившемся первым вариантом настоящего сочинения (см. выше, стр. 6—7); он имел серую обложку.

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. ИЗУЧЕНИЕ ИЗМЕНЧИВОСТИ

Эта глава дает первые ответы на вопросы: Что такое теория вероятностей? Что такое статистика? Как они применяются в жизни? Цель главы заключается в том, чтобы ввести некоторые основные понятия теории вероятностей и статистики и передать ощущения, возникающие при постановке и решении задач, рассматриваемых этими дисциплинами. При этом мы не будем пользоваться никакими алгебраическими выкладками. Следовательно, в этой главе мы:

(1) обсудим природу и роль математических моделей и отношение этих моделей к реальному миру;

(2) представим на суд читателей и обсудим вероятностные модели, которые являются особым видом математических моделей;

(3) предоставим читателям возможность ознакомиться с изменчивостью и закономерностями, возникающими в экспериментах, включающих элемент случайности.

При первом чтении не следует ожидать полного понимания всех идей этой главы. Основой такого понимания может явиться только достаточно большая работа, проделанная при чтении всей книги.

§ 1. Теория вероятностей и статистика

Богатство и разнообразие применений теории вероятностей привлекают к ней многих людей. Некоторых восхищает красота обширной математической структуры, которая возникает из небольшого количества основных допущений и определений. Других, как практиков, так и теоретиков, привлекает возможность обсуждения различных значений, которые можно придать утверждениям, касающимся вероятностей. Третьих восхищает порядок, который возникает из кажущегося хаоса: бросьте одну монету, и никто не сможет предсказать, какой стороной кверху она упадет — гербом или цифрой; но бросьте две тонны монет, и каждый скажет, что одна тонна монет упадет кверху гербом, а вторая тонна — кверху цифрой.

Мы привыкли к тому, что «геометрический» или «идеализированный» треугольник школьной планиметрии имеет смысл математического символа или *математической модели* физического треугольника реального мира. Подобным же образом мы построим математическую модель для вероятностных проблем и выведем следствия из нее. Например, при бросании монеты вероятность выпадения герба равна $1/2$ — и далее мы получим для бросания монет вероятностную модель, которая позволит указать нам вероятность того, что при бросании n монет ровно x из них упадут кверху гербом, а остальные $n-x$ — цифрой. В частности, вероятность того, что все n монет выпадут гербом кверху, окажется равной $(1/2)^n$. Эта теория и следствия из нее применимы к «идеализированным монетам», но мы надеемся применить полученные результаты и к бросаниям реальных монет. В § 3 мы приведем краткие описания множества различных задач, возникающих в повседневной жизни, которые изучаются при помощи вероятностных моделей.

Статистическая теория во многом основана на теории вероятностей, хотя здесь есть и обратная связь: при построении вероятностной модели также используются данные статистики. Когда эти данные собраны, мы можем использовать статистическую теорию для того, чтобы сделать выбор между альтернативными математическими моделями. Для некоторого данного города рассмотрим произвольное множество — *выборку* — семей, с тем чтобы оценить, в какой части домов города установлены телевизоры, принимающие «цветные» программы. Теория вероятностей подскажет нам, какой процент семей в нашей выборке составляют владельцы «цветных» телевизоров, если задан аналогичный процент, касающийся всех семей города. Статистическая же теория имеет обратный характер — она использует касающиеся выборки результаты для оценки во всем городе числа семей, имеющих цветные телевизоры. В этом примере теория вероятностей выводит из известных данных, касающихся всей рассматриваемой совокупности, вероятное значение данных, связанных с определенной выборкой, тогда как статистическая теория выводит относящиеся ко всей совокупности данные из наблюдаемых данных, связанных с произведенной выборкой. Говоря наиболее общо, теория вероятностей выводит из математической модели свойства реального физического процесса, тогда как статистическая теория устанавливает свойства этой модели исходя из данных наблюдения.

Область статистики включает в себя нечто большее, чем только статистическую теорию. В общем статистика — это *искусство и наука собирания, анализа и получения выводов из данных наблюдения*. Некоторые части статистики не относятся к математике, тогда как другие вполне математичны. И хотя мы попытались отделить теорию вероятностей от статистики, все же специалист в области статистики должен разбираться в теории вероятностей так же хорошо, как и в своей области.

§ 2. Интерпретации вероятности

На математическом уровне едва ли могут возникнуть какие-либо расхождения в вопросах оснований теории вероятностей и в вопросах получения математических следствий из ее аксиом. Система аксиом теории вероятностей была построена на основе теории множеств в 1933 г. знаменитым русским математиком А. Н. Колмогоровым *). Однако на уровне интерпретации и использования теории вероятностей существуют две крайние позиции, которых придерживаются различные ученые, и, конечно, множество промежуточных точек зрения.

Объективистская точка зрения в настоящее время наиболее популярна. С этой точки зрения понятие вероятности применимо лишь к таким событиям, которые могут быть многократно повторены без изменения условий опыта. Так, объективист с удовольствием будет говорить о вероятностях, связанных с бросаниями монеты или с массовым производством каких-либо изделий. Он охотно обратится к процессу производства электрических лампочек и обдумает вопрос о вероятности получения в этом процессе доброкачественной лампочки, принимая в качестве этой вероятности отношение количества доброкачественных лампочек к общему числу всех выпущенных. Но его не интересуют уникальные события. Например, он не посмеет говорить о вероятности того, что Рим был основан Ромулом, или о вероятности объединения Аргентины и Чили в одну страну в ближайшие десять лет. Таким образом, объективист оставляет в стороне большую группу задач, считая их неподходящими для применения теории вероятностей, поскольку в этих задачах нельзя составить отношения, основанного на большом количестве наблюдений. Более того, объективист предпочитает давать интерпретации только часто повторяемых событий и не любит строить свои выводы на основе событий других типов.

Другое направление мысли иногда называется *персоналистическим*. Персоналист рассматривает вероятность как некоторую меру личного доверия к какому-либо утверждению, например к утверждению

*) Более ранним является иной (и несколько менее удачный) вариант аксиоматики теории вероятностей, предложенный в 1917 г. С. Н. Бернштейном; на известной книге А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» (вышедшей впервые на немецком языке в 1933 г.) история аксиоматических подходов к теории вероятностей также не закончилась.

о том, что сегодня будет дождь. Представители этого направления считают, что даже, исходя из одних и тех же фактов, различные «разумные» индивидуумы могут выказывать различные степени доверия к тому или иному утверждению; поэтому их «персональные» вероятности какого-либо события могут оказаться различными. Персоналист может применять теорию вероятности ко всем задачам, которые рассматривает объективист, и ко многим другим. Например, по крайней мере в принципе персоналист может говорить о вероятности основания Рима именно Ромулом. В своей работе персоналисту также приходится пользоваться некоторыми специальными методами; в частности, персоналист вынужден значительно чаще обращаться к теореме Байеса, рассматриваемой в гл. V, нежели объективист. С другой стороны, в случае, когда количество данных велико, представители обоих направлений обычно получают одинаковые ответы.

Начинающему изучать теорию вероятностей не стоит сразу же решать, к какому из этих двух направлений он принадлежит. Более того, в этой области никогда не будет сказано последнего слова, поскольку постоянно возникают новые направления. Однако следует возвращаться время от времени к рассмотрению этого различия между вероятностью как относительной частотой, полученной в результате большой серии наблюдений, и вероятностью как мерой степени доверия. Умение проводить это различие позволит лучше понимать излагаемый предмет.

§ 3. Иллюстрации вероятностных моделей

Изучение азартных случайных игр восходит к ранней истории теории вероятностей, и даже сейчас эти игры доставляют множество тренировочных задач как для начинающих, так и для специалистов. Около 1654 г. любитель математики шевалье де Мере консультировался с Блезом Паскалем (знаменитым математиком, естествоиспытателем и философом[1])) относительно решения некоторых обобщений следующей задачи.

Задача об очках. Двое игроков играют серию партий, причем в каждой партии какой-то из двух игроков выигрывает одно очко; шансы выигрыша для этих игроков каждый раз равны. Тот из игроков, который первым наберет три очка, забирает обе ставки. Игроки вынуждены прекратить игру в момент, когда первый игрок набрал 2 очка, а второй — 1 очко. Как следует им разделить между собой ставки? Паскаль считал, что ставки следует разделить в отношении 3 к 1 в пользу первого игрока. А как считаете вы?

Паскаль состоял в полезной переписке с другим выдающимся математиком Пьером Ферма. В этой переписке рассматривались предыдущая и различные другие задачи о вероятностях, и итогом ее явились многие из результатов, которые будут изложены в гл. II, III и IV этой книги.

Другой задачей, возникающей при изучении азартных игр, является старая *задача о длительности игры*. Мы упоминаем о ней потому, что эта задача совершенствовалась и развивалась на протяжении многих лет, и это развитие принесло много пользы как ученым, так и представителям промышленных кругов.

Задача о длительности игры. Два игрока обладают первоначальными капиталами соответственно в m и n единиц. Чтобы участвовать в одной партии игры, каждый должен поставить на кон одну единицу своего капитала. Шансы выигрыша для каждого игрока одинаковы, и выигрывающий партию забирает обе ставки. Если игра продолжается до разорения какого-либо игрока, то из скольких пар-

---

[1]) Вы можете получить удовольствие, прочитав статью Оре: Оre O., Pascal and the invention of probability theory, *Amer. Math. Monthly*, 67 (1960), № 5, 409—419.

тий она будет состоять и каковы шансы выигрыша у игрока, начинающего игру с капиталом в m единиц? [Вероятность того, что игра будет состоять из t партий, вычислить трудно, а вероятность выигрыша игрока с начальным капиталом в m единиц равна $m/(m+n)$.]

Эта задача предшествует аналогичной *задаче о случайном блуждании* (физической) частицы, которая поглощается при столкновении с препятствием, — одной из многих «задач о случайных блужданиях», которые интересуют физиков. Для того чтобы показать связь между этими задачами, предположим, что частица начинает свои блуждания в начале числовой оси — в точке O, и в каждую единицу времени она сдвигается на единицу масштаба влево или вправо от исходного положения, причем выбор направления сдвига случаен. На расстояниях m единиц вправо и n единиц влево от начала координат O расположены вертикальные препятствия, при столкновении с которыми частица поглощается. Положение частицы после t единиц времени точно соответствует сумме денег, выигранных после t партий игроком с начальным капиталом в m единиц.

В каждом из предыдущих примеров суть соответствующей вероятностной модели заключается в требовании правильности монеты, в правиле розыгрыша очков в каждой партии и в правиле определения игрока, который выигрывает игру. Теперь мы обратимся к некоторым примерам задач, для решения которых также необходимы вероятностные модели, но которые позволят нам почувствовать сегодняшний день. Решения этих задач в иных случаях окажутся доступными читателям этой книги, в других — потребуют применения более специальных и глубоко разработанных методов. Такие модели развиваются специалистами в области прикладной математики и статистики, физиками, биологами и другими учеными.

Теория очередей. Люди, подходящие случайным образом в различное время к прилавку магазина, за которым их обслуживают, обычно выстраиваются в очередь, если их достаточно много. Если известны данные, касающиеся частоты появления новых покупателей и времени обслуживания одного покупателя, то как определить время, которое затратит в среднем один покупатель на стояние в очереди? В течение какого времени очередь будет состоять более чем из 10 человек? Какой эффект даст добавление еще одного продавца? Если людям запрещается становиться в очередь и им приходится покидать магазин, то какой процент покупателей останется необслуженным? Различные видоизменения этой задачи представляют интерес при исследовании эксплуатационных характеристик комплекса станков, при решении вопроса о количестве контрольных автоматов, которые следует установить на станции метро, при проектировании оборудования, необходимого для телефонных линий или быстродействующих вычислительных машин, и даже при конструировании и контроле плотин.

Наследственность в биологии. Менделевская теория наследственности в ее простейшей форме требует применения несколько более развитого аппарата теории вероятностей, нежели используемый ниже (конечно, в незамаскированной форме теория вероятностей применялась к проблемам наследственности уже после Менделя). Предположим, что все родители классифицируются на основе одной пары генов и что d означает доминантный ген, а r — рецессивный ген. Тогда родитель с генами dd является чисто *доминантным*, с генами dr — *гибридом* и с генами rr — чисто *рецессивным*. Чисто доминантные и гибридные родители встречаются одинаково часто. Потомки получают по одному гену от каждого родителя и классифицируются аналогичным образом: dd, dr или rr. В следующей таблице представлены для некоторого простого случая пропорции потомства каждого типа для заданного генетического типа родителей:

Родители		Потомки		
		dd	*dr*	*rr*
dd	*dd*	1		
dd	*dr*	1/2	1/2	
dd	*rr*		1	
dr	*dr*	1/4	1/2	1/4
dr	*rr*		1/2	1/2
rr	*rr*			1

Здесь возникают следующие типичные вопросы. Если известны частоты в популяции отдельных генетических типов родителей, то что можно сказать о структуре популяции потомства в первом, втором, ..., n-м поколениях? Если модель так изменится, что доминантные характеристики окажутся в некотором смысле более распространенными, то будет ли это означать неизбежное вымирание рецессивных особей?

Теория эпидемий. Предположим, что некоторая инфекционная болезнь передается при контакте с заразным больным, причем для предрасположенного к этой болезни человека всегда существует некий шанс заразиться при любом таком контакте, но, раз переболев, он становится невосприимчивым к этой инфекции и не может ее передавать. Математическая теория эпидемий описывает распространение эпидемий в терминах количества предрасположенных к болезни, заразных и невосприимчивых к инфекции людей в зависимости от времени. Здесь возникают следующие типичные вопросы. Сколько предрасположенных к болезни людей останется после того, как эпидемия кончится, т. е. количество больных станет равным нулю? Как долго продлится эпидемия? Какова вероятность конца эпидемии для города с заданным количеством жителей?

Естественно, что в этой книге мы не сможем изучить, как решаются такие сложные проблемы во всей общности; однако мы сможем заложить фундамент, необходимый для такого изучения.

§ 4. Применения статистики

Мы уже указывали, что некоторая часть статистики занимается анализом данных, полученных из вероятностных моделей, и что специалисты по статистике могут также развивать вероятностные модели, подобные моделям предыдущего параграфа. Приведем теперь несколько примеров применения статистики в других областях, которые могут заинтересовать читателя.

Поиск лекарств. Фармацевтическая фирма проверяет сотни новых медицинских препаратов для того, чтобы найти такой препарат, который будет, во-первых, безопасным, а во-вторых, превосходящим по эффективности обычно используемые лекарственные средства. Реакции разных людей на один и тот же медикамент различны, и то же самое можно сказать про животных, на которых обычно испытываются новые медикаменты. Эти вариации приводят к возникновению вероятностного взгляда на проблему поиска лекарств. Обычно испытание медикаментов проводится в несколько этапов: большинство новых препаратов приходится отвергать уже на первом этапе проверки, который основан на небольшом числе показателей. Если некоторый препарат выглядит перспективным, то он подвергается следующему этапу проверки, при котором используются более сложные и строгие испытания. Одной из проблем здесь является такой выбор количества и условий экспериментов на последовательных этапах проверки, чтобы хорошие новые препараты не оказались отвергнутыми и исследовались бы лучше, нежели более слабые препараты.

Испытания удобрений. Применение удобрений обычно увеличивает урожай. Прибыль фермера зависит от урожая, себестоимости и рыночной цены. Агрономическая опытная станция может помочь фермеру, определив на основе полевых испытаний зависимость между дополнительно полученным урожаем, скажем, пшеницы и количеством внесенных азотных удобрений. В результате этих испытаний получаются кривые зависимости урожая от количества удобрений. Фермер может использовать эти кривые совместно с информацией о себестоимости урожая и о предполагаемых рыночных ценах для того, чтобы решить вопрос о количестве вносимых удобрений. Такого рода квалифицированные исследования результатов полевых испытаний составляют часть работы сельскохозяйственных статистиков.

В ы б о р о ч н ы е   о п р о с ы. Использование выборочных опросов не ограничивается только предсказанием результатов голосования*). Выборочные опросы используются также большими компаниями для определения потребности в том или ином товаре и для определения цен. Опросы используются и для определения того, какие разделы математики и в каком количестве следует излагать в курсе средней школы или на первых курсах высшей школы. Для обнаружения и исправления ошибок в переписи населения США Национальное бюро по проведению переписи использует специальные выборочные опросы. Такого рода опросы широко практикуются и частично заменяют полную перепись, гораздо более трудоемкую и не обеспечивающую заметно более высокую ценность полученных сведений. На основе изучения выборки можно сделать более подробные и даже более качественные выводы, чем это возможно сделать на основе изучения всей большой совокупности.

Многие задачи можно решить только выборочными методами: проверку напряжения на разрыв стальной проволоки, проверку времени, в течение которого сохраняется вакуум в запаянной трубке, т. е., вообще говоря, все задачи, связанные с проверками, в результате которых объекты проверок приходят в негодность. В других задачах исходные совокупности бесконечны: вряд ли можно ограничить каким-то определенным числом количество проверок платино-

*) В США весьма популярны, скажем, выборочные опросы населения перед президентскими выборами, ставящие своей целью оценку шансов на выборах каждого из кандидатов.

иридиевого эталона метра, хранящегося в бюро стандартов.

Генетика и радиация. Испытания атомных бомб привели к развитию обширных исследований, связанных с действием радиации на наследственность у насекомых и у млекопитающих*). Мутации, т. е. внезапные отклонения в генетических типах потомков, иногда являются следствием радиации. Так, например, такие мутации наблюдались при облучении плодов различными типами радиации и в различных дозах. При этом было установлено, что мутации вызывались именно облучением определенных участков плодов. Здесь возникают следующие типичные вопросы. Одинаково ли возможно возникновение мутаций при облучении различных участков растений? Пропорциональна ли частота мутаций дозе радиации? Отличаются ли по производимому ими эффекту различные типы радиации? Статистические исследования влияния радиации на человека ведутся еще со времен Хиросимы и Нагасаки.

Геология. На месте движения ледников часто остаются большие валуны, покрытые царапинами, которые им нанес ледник. Исходя из распределения углов, которые эти царапины составляют с направлением на север, требуется оценить направление, в котором дрейфовал ледник.

Другие примеры применений статистики вы найдете в тексте этой книги.

§ 5. Эмпирическое изучение изменчивости

Как мы уже видели, теория вероятностей и статистика изучают колебания и закономерности, наблюдаемые в процессах, которые содержат элементы случайности. Хотя мы сталкиваемся с такого рода изменчивостью каждый день — при поездках на

*) Началом этих исследований послужили считающиеся сегодня классическими эксперименты известного русского генетика Н. В. Тимофеева-Ресовского, выполненные в 1935 г.

транспорте, при оценке времени, необходимого для чистки зубов, при изменениях собственного веса, в наших расходах на каждый день, во времени, используемом для занятий, в различных играх и соревнованиях, — мы редко изучаем изменчивость систематическим образом. Можно сказать, что мы обладаем представлением об изменчивости, но обычно не владеем никакими относящимися к ней данными.

Лучше всего ознакомиться со случайными процессами так: надо выполнить несколько простых экспериментов, обработать их результаты и проанализировать их. Некоторые из этих результатов не окажутся для вас неожиданными, а некоторые немного вас удивят. В остальной части этой главы мы изучим результаты некоторых простых экспериментов, которые вы сможете выполнить самостоятельно, и предложим вам дополнительные эксперименты для того, чтобы вы смогли приобрести опыт в обращении с вероятностными моделями и изменчивостью. Перед выполнением каждого эксперимента от вас требуется записать *предварительную догадку* относительно исхода этого эксперимента, так что вы получите некоторый опыт в проведении таких оценок и, кроме того, будете наверняка знать, насколько результат эксперимента совпадает с тем, который вы ожидали. В том случае, когда расхождение окажется серьезным, вы спросите себя, какое из условий задачи вы не приняли во внимание. Вы сможете понять, что даже для профессиональных математиков решение подобных математических задач иногда связано с достаточно тяжелым трудом и что некоторые из этих задач невозможно решить, не обладая эмпирическими данными.

З а д а ч а о п е р в о м т у з е. Обычная колода игральных карт состоит из 52 карт, среди которых имеются четыре туза. Эта колода тщательно тасуется, после чего открываются верхние карты одна за другой до появления первого туза. Подсчитывается номер карты, которая оказалась первым тузом. Этот процесс повторяется несколько раз.

(а) *На каком месте в среднем появляется первый туз?* (Прежде чем читать дальше, попробуйте угадать ответ и запишите его.)

(б) *Какова вероятность того, что первый туз появится на 1-м месте? на 2-м месте? ...на 52-м месте?* (Мы использовали здесь многоточие для того, чтобы не выписывать все промежуточные номера мест между крайними указанными значениями.)

(в) *Среди какого количества карт, лежащих сверху колоды, в половине всех случаев заведомо находится первый туз?* (Сначала запишите вашу догадку.)

Обсуждение. Вопросы (б) и (в) этого примера разбираются теоретически в гл. III, а здесь мы попробуем исследовать проблему эмпирическим путем. В столбцах табл. 1 мы выписали по порядку соответствующие результаты, полученные при 100-кратном выполнении нашего эксперимента. Мы замечаем, что номера карт, оказавшихся первым тузом, меняются весьма значительно: от 1 до 32. Они бы могли меняться больше — от 1 до 49, поскольку все четыре туза могли оказаться внизу колоды. Более того, как вы можете заметить из таблицы, в этих изменениях номеров не видно никакого ритма, свидетельствующего о причинном характере наблюдаемых изменений. Мы называем такие изменения *колебаниями в выборке*, или *выборочными отклонениями.* Если тасовка карт достаточно тщательна, то знание номера первого туза при одном испытании нельзя использовать для предсказания этого номера при следующем испытании.

Наличие некоторого порядка в этом хаосе основывается на устойчивости сумм номеров по столбцам и средних номеров в столбцах. Средние значения номеров меняются только от 9,25 до 11,75. Эти изменения средних значительно меньше изменений самих номеров от испытания к испытанию.

На основе этих данных можно построить таблицу *распределения частот* (табл. 2), в которой каждому номеру сопоставлено количество испытаний, при которых он оказался порядковым номером первого туза. Например, в табл. 1 номер 1 встречается 11 раз.

Таблица 1

Номер карты, которая оказалась первым тузом

Номер тасовки	Первые 20 номеров	Вторые 20 номеров	Третьи 20 номеров	Четвертые 20 номеров	Пятые 20 номеров
1	5	17	5	7	27
2	4	8	5	15	18
3	29	19	8	17	11
4	3	18	4	16	2
5	24	20	1	9	1
6	3	13	5	11	28
7	3	2	24	10	17
8	22	2	1	1	9
9	5	19	15	21	3
10	16	9	2	1	4
11	1	7	3	4	17
12	1	1	18	15	7
13	5	3	22	4	2
14	23	6	25	26	5
15	16	2	13	8	9
16	6	15	11	13	6
17	26	3	2	13	3
18	10	4	5	11	22
19	1	12	3	1	13
20	32	5	22	29	1
Всего	235	185	194	232	205
Среднее	11.75	9,25	9,70	11,60	10,25

В табл. 2 также приводятся теоретические частоты отдельных исходов нашего опыта обнаружения первого туза, найденные при помощи вероятностной модели этой задачи. Определение этих теоретических частот мы отложим до гл. III, а здесь ограничимся вычислением вероятности того, что первый туз оказался на первом месте, т. е. что номер первого туза есть 1. В карточной колоде, состоящей из 52 карт, есть четыре туза, и каждый из них может оказаться

Таблица 2

Экспериментальные и теоретические частоты номеров для задачи о первом тузе

Номер	Экспериментальная частота	Теоретическая частота	Номер	Экспериментальная частота	Теоретическая частота
1	11	7,7	21	1	1,7
2	7	7,2	22	4	1,5
3	9	6,8	23	1	1,3
4	6	6,4	24	2	1,2
5	9	6,0	25	1	1,1
6	3	5,6	26	2	1,0
7	3	5,2	27	1	0,8
8	3	4,9	28	1	0,7
9	4	4,6	29	2	0,7
10	2	4,2	30	0	0,6
11	4	3,9	31	0	0,5
12	1	3,6	32	1	0,4
13	5	3,4	33	0	0,4
14	0	3,1	34	0	0,3
15	4	2,9	35	0	0,3
16	3	2,6	36	0	0,2
17	4	2,4	37	0	0,2
18	3	2,2	38	0	0,1
19	2	2,0	39	0	0,1
20	1	1,8	40—49	0	0,3
				100	99,9

на первом месте. Поэтому естественно сказать, что вероятность появления какого-либо туза на первом месте равна $4/52=1/13$. А поскольку эксперимент выполнялся 100 раз, то теоретическая частота появления туза на первом месте равна $100/13\approx 7{,}7$. (Символ $\approx$ означает «приблизительно равно».) Конечно, первый туз не может оказаться на первом месте 7,7 раза; это число равно *среднему* всех таких частот, которое можно получить, выполняя, например, тысячу раз эксперимент, состоящий из 100 тасовок колоды и нахождения первого туза. Это число называется теоретической, или *ожидаемой,* частотой. Мы будем говорить о нем подробнее в гл. V. Теоретические частоты номеров с 40 до 49 не превосходят 0,05 каждая; их сумма меньше 0,3.

Можно заметить, что теоретические частоты не совпадают с наблюдаемыми в опыте точно, но в их поведении обнаруживается одна и та же тенденция: и те, и другие частоты убывают при возрастании номеров. Наблюдавшиеся в этом примере расхождения между теоретическими и экспериментальными частотами — обычное явление, о котором следует иметь представление. Существуют два источника такого рода расхождений — колебания в выборке и несоответствие теоретико-вероятностной модели реальной ситуации эксперимента. При проведении эксперимента можно тщательно производить подсчет карт, но значительно труднее обеспечить тщательность их тасовки.

Некоторые авторы, которые проводили статистические исследования такого типа, не находят никаких оснований для расхождений между теоретической моделью и действительными данными. Мы не будем здесь рассматривать их аргументов.

Вернемся к нашему первому вопросу.

(а) *На каком месте в среднем появляется первый туз?*

Общая сумма номеров во всех пяти сериях тасовок равна

$$235 + 185 + 194 + 232 + 205 = 1051,$$

и поэтому среднее значение номера для 100 тасовок равно 10,51. Это близко к соответствующему теоретическому значению, что мы и покажем теперь, используя соображения симметрии. Однако, читателям придется принять некоторые аргументы на веру.

Четыре туза разбивают колоду на пять частей, что иллюстрируется табл. 3. Каждая часть может

Таблица 3

Среднее число карт

		Наблюдаемое среднее количество карт для 20 тасовок
Часть 1:	карты до первого туза	9,75
Часть 2:	карты между первым и вторым тузами	12,55
Часть 3:	карты между вторым и третьим тузами	6,65
Часть 4:	карты между третьим и четвертым тузами	9,40
Часть 5:	карты после четвертого туза	9,10

состоять из некоторого количества карт от 0 до 48. Кажется разумным предположить (и можно строго доказать), что средние значения числа карт в каждой такой части должны совпадать. В табл. 3 против каждой части представлено соответствующее среднее значение числа карт в этой части для 20 новых тасовок.

Если справедливо, что эти величины для всех пяти частей равны, то теоретическая средняя длина такой части должна равняться $48/5=9{,}6$. Таким образом, среднее число карт до первого туза равно 9,6; добавляя сюда 1, мы получаем, что средний номер карты, оказавшейся первым тузом, равен $9{,}6+1=$ $=10{,}6$.

Этот теоретический средний номер очень близок к среднему номеру 10,51, полученному экспериментально для 100 тасовок. Однако столь близкого совпадения, вообще говоря, не следует ожидать. Из теории больших выборок следует, что примерно в одной трети всех повторений эксперимента со 100 тасовками полученные средние будут отличаться от 10,6 не менее чем на 0,85, а в 5% всех повторений это расхождение превзойдет 1,7.

Теоретические частоты табл. 2, поделенные на 100, являются ответами на вопрос (б):

(б) *Какова вероятность того, что первый туз появится на 1-м месте?, на 2-м месте? ...на 52-м месте?*

Обратимся теперь к нашему последнему вопросу:

(в) *Среди какого количества карт, лежащих сверху колоды, в половине всех случаев заведомо находится первый туз?*

Из табл. 2 следует, что 51 раз из 100 первый туз располагается не далее восьмой карты. Поэтому мы можем использовать число 8 в качестве оценки ответа на вопрос (в). Поскольку нам еще даны теоретические частоты, мы можем складывать их, начиная с частоты, соответствующей номеру 1, до тех пор, пока сумма этих частот не превзойдет 50% от общей суммы. Выполнив это, мы найдем, что теоретический ответ на вопрос (б) равен 9; сумма теоретических частот для номеров 1, 2,..., 9 не превосходит 54,4%. Мы называем этот номер 9-м медианным номером, или *медианой,* для того, чтобы отличать его от *среднего* номера 10,6.

Рассмотрим теперь пример из совершенно другой области.

Распределение длин слов. Длиной слова называется количество букв его составляющих. *Какова средняя длина слов, используемых в спортивных репортажах?* (Попробуйте угадать ответ и запишите его.)

Таблица 4

Распределение длины слов в статье о спорте

Длина в буквах	Частота	Длина в буквах	Частота
1	1	7	5
2	6	8	2
3	12	9	3
4	7	10	0
5	7	11	1
6	5	12	1
		Всего	50

Решение. В табл. 4 представлено распределение длин слов, полученное на основе выборки 50 слов из одной газетной статьи о бейзболе. Естественно, что для более обоснованных выводов потребовалось бы значительно большая выборка.

Для получения суммы длин всех 50 слов необходимо умножить каждую длину на ее частоту и сложить все эти произведения. Таким образом мы получаем число 243. Поэтому средняя длина слова равна $243/50 \approx 4{,}9$. Можно заметить, что наиболее часто встречаются слова, состоящие из трех букв; видно также, что около половины всех слов состоят из 1, 2, 3 или 4 букв.

Последние цифры телефонных номеров. *Требуется, используя телефонную книгу, найти распределение частот последних цифр для* 100 *телефонных номеров.* (Попробуйте угадать это распределение частот и запишите его).

Таблица 5

Распределение частот последних цифр 100 телефонных номеров

Цифра	Частота
0	11
1	13
2	11
3	11
4	10
5	5
6	7
7	14
8	8
9	10
	100

Решение. Многие люди считают, что цифры 0, 1, ..., 9 должны встречаться одинаково часто. В табл. 5 представлены результаты выборки, состоящей из

100 телефонных номеров. Можно заметить, что все цифры встречаются приблизительно с одинаковой частотой, как и ожидалось. Конечно, в таблице представлены результаты только одной выборки 100 номеров, а не целой серии таких выборок.

Распределение первых цифр. *Требуется найти распределение частот первых значащих цифр в числах, выражающих количества голосов, поданных за данного кандидата в каком-либо административном районе, например в штате, округе, избирательном участке, или в числах, выражающих результаты каких-либо физических измерений, подобных измерениям площадей штатов, высот гор, основных физических констант.* Напомним, что первой значащей цифрой числа называется первая цифра слева, отличная от 0. Так, например, в числах 345 и 0,00345 первой значащей цифрой является 3.

Решение. Многие люди полагают, что цифры 1, 2, ..., 9 встречаются одинаково часто. Попробуйте и вы угадать ответ и запишите вашу догадку. Табл. 6

Таблица 6

Распределение частот первых значащих цифр числа голосов

1	24
2	14
3	11
4	16
5	11
6	12
7	5
8	4
9	5
	102

показывает распределение частот первых цифр числа голосов, поданных в различных округах штата Иллинойс на президентских выборах 1956 г. за Д. Эйзенхауэра. Мы замечаем, что наиболее частой является цифра 1 и что меньшие цифры встречаются куда более часто, чем большие. Обратите внимание на то, что цифры 7, 8 и 9 вместе встречаются только в 14 случаях, а не в 34 (число 34 равно одной трети от общего числа испытаний 102). Для объяснения этого факта — неожиданного для большинства из нас — в некоторых научных статьях строились даже соответствующие вероятностные модели. Люди, часто пользующиеся таблицами логарифмов, не могли не заметить, что первые страницы этих таблиц обычно грязнее последних; это опять же подтверждает то обстоятельство, что маленькие цифры здесь встречаются чаще, чем большие. Вообще в числах, полученных при очень многих измерениях, значительно чаще первые цифры оказываются принадлежащими к первой половине десятка.

Случайное блуждание. *В точке О числовой оси находится некоторая частица. Каждую секунду она с равной вероятностью сдвигается на* 1 *либо вправо, либо влево. За* 25 *секунд она делает* 25 *таких движений.*

(а) *Как далеко в среднем окажется она от точки О?* (Попробуйте угадать ответ и запишите его.)

(б) *Сколько времени в среднем она будет находиться на положительной полуоси? На отрицательной полуоси?*

(в) *Сколько раз в среднем в течение блуждания она будет попадать в точку О?* (Запишите вашу догадку.)

Обсуждение. Эта задача о случайном блуждании решается довольно сложно. Однако мы можем выполнить соответствующий эксперимент, бросая монету 25 раз и сдвигая фишку в зависимости от исхода — герб или цифра — бросания на 1 вправо или влево. Взамен бросания монеты мы можем использовать последние цифры номеров из телефонной книги, делая шаг вправо или влево в зависимости от четности или нечетности последней цифры номера. Вместо телефонной книги можно также использовать табл. I случайных чисел в конце этой книги. В табл. 7

представлены результаты 10 блужданий, каждое из которых состоит из 25 шагов.

Таблица 7

Результаты 10 случайных блужданий по 25 шагов
(+ и — означают положительную и отрицательную полуоси)

Блуждание	Конечное положение	Время на положительной полуоси	Время на отрицательной полуоси	Время в точке O
1	1−	16	5	4
2	7+	19	3	3
3	5+	20	2	3
4	9+	24	0	1
5	1+	4	15	6
6	5−	6	11	8
7	5−	7	12	6
8	3−	2	19	4
9	11+	25	0	0
10	3+	9	15	1
Сумма расстояний 50		Всего 132	82	36

Сумма расстояний частицы от точки O равна 50, поэтому среднее расстояние от точки O равно $50/10=5$. Теоретическая величина расстояния, полученная вероятностными методами, близка к 4. При большом числе шагов n теоретическое среднее расстояние от точки O приблизительно равно $0{,}8\sqrt{n}$.

Заметим, что существует значительное расхождение между временем, проводимым частицей на положительной и отрицательной полуосях. Однако из симметрии положительного и отрицательного направлений и из равновероятности сдвига частицы в этих направлениях следует, что в среднем для многих блужданий половину всего времени частица будет проводить на положительной полуоси, а половину —

на отрицательной. В нашей выборке частица в среднем проводит на положительной полуоси 13,2 *сек*, а на отрицательной полуоси 8,2 *сек*. Это расхождение в данном случае объясняется большими колебаниями, наблюдаемыми в нашей выборке. Заметим, что в девятом блуждании все 25 *сек* частица провела на положительной полуоси; в четвертом блуждании она провела на положительной полуоси 24 *сек*, а в восьмом блуждании она провела на отрицательной полуоси 19 *сек*. Таким образом, мы обнаружили следующий факт: несмотря на то что в среднем для многих блужданий половину всего времени частица должна проводить на положительной полуоси, а другую половину — на отрицательной, все же в одном каком-либо блуждании заметную часть времени частица проводит на какой-то одной полуоси. Этот удивляющий нас результат не является следствием того, что 25 — слишком маленькое число шагов, приводящее к заметным отклонениям от теоретически предсказываемых данных. На самом деле это общее свойство подведения частиц в такого рода задачах о случайных блужданиях.

Наконец, среднее число возвращений в точку O для наших десяти блужданий равно $36/10=3{,}6$. Теоретическое значение этой величины приблизительно равно 3,0.

С л у ч а й н ы е ч и с л а. Вас могут заинтересовать величины отклонений от теоретических частот экспериментальных частот, полученных на основе изучения таблицы случайных чисел, содержащей миллион случайных чисел 0, 1, 2, ..., 9[1]. Во втором столбце табл. 8 представлены частоты случайных чисел 0, 1, 2, . . . , 9, полученные при изучении первых 50 000 чисел из таблицы случайных чисел. Теоретическая частота для каждого числа равна, конечно, $50\,000/10= =5000$. В третьем столбце даны частоты для миллиона случайных чисел; теоретически частоты в этом случае равны 100 000.

[1]) Таблица A Million Random Digits, составленная Rand Corparation, изд-во Free Press, Glencoe (США), 1955.

Таблица 8

Частоты случайных чисел

Число	Частота среди первых 50 000 случайных чисел	Частота среди миллиона случайных чисел
0	4923	99 802
1	5013	100 050
2	4916	100 641
3	4951	100 311
4	5109	100 094
5	4993	100 214
6	5055	99 942
7	5080	99 559
6	4986	100 107
9	4974	96 280

Из теории больших выборок следует, что около двух третей всех наблюдаемых частот для 50 000 случайных чисел должны отличаться от теоретической частоты не более чем на 67; и около двух третей наблюдаемых частот для миллиона случайных чисел должны отличаться от теоретической частоты не более чем на 300. В нашем примере в обоих столбцах все частоты для шести цифр лежат в указанных интервалах, тогда как из теории следует, что это должно выполняться во всяком случае для двух третей (или 0,67) всех случайных чисел. Таким образом, налицо хорошее совпадение с теорией.

Упражнения к § 5

1. Возьмите колоду игральных карт в 52 карты и после тщательной тасовки заметьте номер карты, которая оказалась первым сверху тузом. Проделайте это 5 раз. Получите средний номер первого туза для пяти тасовок и сравните его с теоретическим значением 10,6.

2. Для каждой из пяти тасовок обычной колоды в 52 игральные карты отметьте число карт, лежащих выше первого туза, затем число карт, лежащих между первым и вторым тузом, и т д., как в табл. 3. Затем получите средние количества карт в каждой части, как в последнем столбце табл. 3, и сравните эти числа с 9,6.

3. Найдите распределение частот длины слов для первых 50 слов какой-либо статьи на спортивную тему в газете и сравните среднюю длину слова с длиной, полученной на основе табл. 4 *).

4. Откройте телефонную книгу на любой странице и найдите распределение частот последних цифр для 25 телефонных номеров. Найдите среднее значение последней цифры и сравните его с 4,5 — теоретическим значением, полученным в предположении, что все цифры равновозможны.

5. Используйте энциклопедию или другой источник для нахождения распределения частот первых значащих цифр чисел, выражающих размеры площади или населения штатов США **), и сравните это распределение с данными табл. 6.

6. Используйте химический или физический справочник для нахождения распределения частот первых значащих цифр 50 физических констант.

7. Используйте табл. I случайных чисел в конце книги для выполнения четырех случайных блужданий, состоящих из 25 шагов, так, как это описано в тексте. Используйте ваши данные для ответа на три вопроса, поставленные в тексте.

8. Используйте табл. I случайных чисел в конце книги для выполнения 10 случайных блужданий, каждое из которых состоит из 10 шагов, и используйте эти результаты для ответа на три вопроса, поставленные в тексте (для блужданий длительности 10).

9. Найдите распределение частот чисел 0, 1, ..., 9 для 50 случайных чисел, стоящих в первых пяти столбцах и десяти строках табл. I случайных чисел в конце книги.

10. Выберите из обычной колоды игральных карт (52 карты) две масти — пики и черви. Расположите карты червовой масти в следующем порядке: туз, 2, 3, 4, ..., 10, валет, дама, король. Перетасуйте карты пиковой масти и выложите их рядом с червями. Сосчитайте количество совпадений значений карт в этих мастях. Выполните этот эксперимент 5 раз и найдите среднее число совпадений карт. Попробуйте угадать теоретическое среднее число совпадений.

11. Откройте какой-либо роман в середине и выберите первые 10 полных строк текста. Сосчитайте количество букв *е* в каждой строке и найдите среднее число букв *е* в одной строке. Найдите также среднее число букв в одной строке. Оцените, какой процент букв в строке составляет буква *е*.

12. Рассмотрим задачу о длительности игры (§ 3) при $m=3$, $n=2$. Проведите 10 таких игр, используя для определения

---

*) Разумеется, при сравнении данных, относящихся к русскому языку, с данными табл. 4 не могут не возникнуть значительные расхождения; проанализируйте их характер.

**) Или областей СССР.

выигрывающего в одной партии либо бросания монеты, либо таблицу случайных чисел. Каждый раз отмечайте общее число партий, из которых состояла игра, а также выигравшего игрока. (а) Найдите среднее число партий в одной игре. (б) Вычислите, какую часть составляли игры, выигранные игроком с начальным капиталом в m единиц, и сравните это число с 0,6.

13. Вернемся к задаче об очках § 3. Используйте бросание монеты или таблицу случайных чисел для того, чтобы 20 раз закончить эту игру. Найдите, сколько из этих игр выиграл игрок, уже набравший 2 очка, а сколько — игрок, набравший 1 очко. Находятся ли эти числа в отношении 3 : 1, как думал Паскаль?

14. Отмечается число бросаний кости до появления 6 очков. Выполните этот эксперимент 10 раз и найдите среднее число таких бросаний.

15. Отмечается число бросаний кости до появления 1, 2, ..., 6 очков. Выполните этот эксперимент 5 раз и найдите среднее число бросаний для каждого количества очков.

16. *Упрощенная эпидемия.* Некая инфекционная болезнь имеет однодневный инфекционный период, и после этого дня пациент становится невосприимчивым к этой болезни и не передает ее. На острове живут 6 отшельников, которых мы пронумеруем числами от 1 до 6. Если какой-либо отшельник заболеет этой болезнью, то он обратится за помощью к другому случайно выбранному отшельнику. В том случае, если этот новый отшельник еще не болел этой болезнью, то после этого он заразится ею и будет оставаться заразным в течение следующего дня. Предположим, что в один день этой болезнью заболел отшельник 1, в то время как остальные отшельники никогда ею не болели. При помощи бросания игральной кости выберите отшельника, к которому больной обратится за помощью (не обращая внимания на выпадения 1 очка). Этот отшельник будет заразным на следующий день. Затем при помощи бросания кости определите, к кому он обратится за помощью, и т. д. Продолжите этот процесс до тех пор, пока какой-либо больной отшельник не обратится за помощью к такому, который уже болел этой болезнью, вследствие чего эпидемия прекратится. Повторите этот эксперимент 5 раз и найдите среднее число отшельников, которые перенесли болезнь.

17. З а д а ч а о б о б с л у ж и в а н и и. Существуют 50 шансов из 100 в пользу того, что в каждую единицу времени к прилавку подойдет новый покупатель. Если у прилавка стоят другие покупатели, то он станет в очередь. В противном случае продавец обслужит его в течение двух единиц времени. В исходный момент у прилавка нет ни одного покупателя. Чему будет равна средняя длина очереди через 10 единиц времени? Выполните этот эксперимент 5 раз, используя бросания монеты, и получите требуемое среднее число. Найдите также среднее число обслуженных покупателей в течение 10 данных единиц времени.

Пример (a_i обозначает покупателя, который подходит к прилавку в i-м временном интервале):

Единица времени	Прибывает	Обслуживается	В очереди
1	a_1	a_1	a_1
2	a_2	a_1	a_1, a_2
3	—	a_2	a_2
4	—	a_2	a_2
5	—	—	—
6	a_6	a_6	a_6
7	a_7	a_6	a_6, a_7
8	a_8	a_7	a_7, a_8
9	a_9	a_7	a_7, a_8, a_9
10	a_{10}	a_8	a_8, a_9, a_{10}

Всего обслужено 4 покупателя; на 10-й временной интервал оказывается, что в очереди стоят 3 покупателя.

§ 6. Растут ли вероятности?

Многие люди совершенно справедливо считают, что при бросании *правильной* монеты много раз доля случаев, когда она выпадает гербом кверху, будет близка к 1/2. Некоторые чувствуют, что логическим следствием из этого обстоятельства является то, что после появления 10 гербов подряд появление цифры становится более вероятным. Этот взгляд основан на недоразумении, причиной которого является непонимание того, как применять «закон средних» к бросаниям монеты. Так как монета не обладает ни памятью, ни сознанием, ни способностью влиять на свое поведение, то она вряд ли может сама изменить вероятность выпадения кверху гербом или цифрой. Выдающийся специалист в области теории вероятностей Феллер предлагает такое краткое объяснение того, каким образом применим этот закон. Он говорит, что закон средних работает здесь при помощи *поглощения,* а не при помощи компенсации. Другими словами, если некоторая серия бросаний началась с выпадения 10 гербов, то эти 10 гербов в существенной доле поглотятся результатами тысячи бросаний, а после миллиона бросаний их влияние станет совсем незаметным.

Одной из причин, по которой возникает вера в увеличение вероятностей, является то, что в некоторых задачах это увеличение действительно имеет место. (Можете ли вы придумать такую задачу?) В задаче о первом тузе, если первые 30 карт не были тузами, вероятность того, что следующей картой окажется туз, уже довольно велика — она равна 4/22; после же того, как первые 48 карт не окажутся тузами, эта вероятность станет равной 1. Это возрастание вероятности происходит от того, что мы производим выборку карт из колоды *без* возвращения, а в этом случае меняется состав совокупности, из которой производится выборка. Но при бросании монеты ни в каком смысле нельзя изъять один герб из совокупности появляющихся гербов. Модель выборки без возвращения непригодна для бросаний монеты.

В некоторых задачах, на первый взгляд похожих на задачу о правильной монете, вероятности могут время от времени изменяться. В начале сезона вратарь футбольной команды может еще не находиться в хорошей спортивной форме, и вероятность того, что он возьмет одиннадцатиметровый штрафной удар, может оказаться очень низкой. Но в дальнейшем она может возрасти. Однако позже небольшая травма может снова снизить его показатели. Таким образом, можно считать, что вероятность взятия вратарем пенальти меняется со временем. Однако в своей самой простой форме закон средних едва ли применим к столь сложным задачам.

ГЛАВА II

ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ И БИНОМИАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

§ 1. Перестановки; принцип умножения

Из поколения в поколение людей интересовали задачи, в которых требовалось найти количество способов расположения множества объектов. Сколькими способами могут 12 человек стать в очередь к театральной кассе? Сколько существует различных автомобильных номеров, если номер состоит из двух букв, за которыми следуют три цифры? Сколько различных маршрутов может избрать пешеход, решив пройти девять кварталов — пять на запад и четыре на север? Вопросы подобного рода привлекательны и представляют самостоятельный интерес; мы, однако, их будем рассматривать по следующей причине: нам часто будут нужны ответы на аналогичные вопросы при изучении вероятностей.

Мы хотим установить некий общий принцип, который позволит находить число возможных размещений множества объектов. С этой целью рассмотрим один пример.

Пример 1. *Сколькими способами можно расставить на полке три книги (обозначим их буквами A, B и C)?*

Решение 1. Один из путей решения этой задачи состоит в следующем: выпишем все возможные размещения и посчитаем их. Чтобы ни одно из размещений не было пропущено, перечисление всех вариантов удобно связать с построением специального графа, который называется *деревом* (рис. 1).

Исходную точку, или вершину, обозначим через O. Двигаясь всеми возможными путями из точки O к правой крайней вершине дерева, мы получаем 6 размещений, которые перечислены в крайнем правом столбце. Заметим, что при построении дерева учиты-

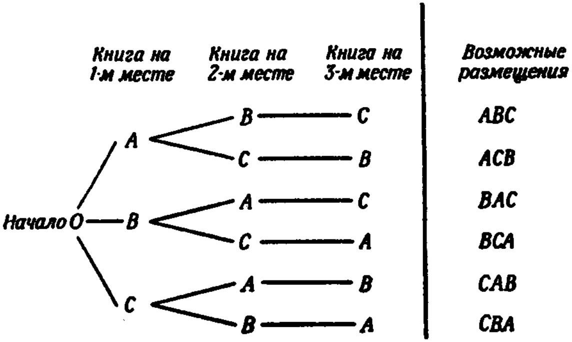


Рис. 1. Дерево для получения размещений трех книг.

вается порядок объектов. Так, ABC и ACB считаются различными размещениями трех книг, потому что они отвечают различным порядкам. *Порядок — основа таких размещений*; *изменение порядка дает другое размещение.*

Решение 2. На более удачное решение этой задачи наводит дальнейшее изучение дерева. Будем рассуждать так.

В задаче требуется заполнить три места на полке — их можно изобразить следующим образом:

На первое место мы можем поместить либо A, либо B, либо C. Поэтому первое место можно заполнить тремя способами:

3		

(На дереве это обстоятельство иллюстрируется тремя ветвями, исходящими от точки O и ведущими к столбцу «Книга на первом месте».) Для каждого из трех способов заполнения первого места у нас есть два варианта заполнения второго места, так как для этого можно использовать любую из двух оставшихся книг:

3	2	

Таким образом, мы можем заполнить первые два места 3×2, или шестью способами. (Заметим, что как раз шесть ветвей дерева заканчиваются на столбце «Книга на втором месте».) Для каждого из шести вариантов заполнения первых двух мест у нас есть только один вариант заполнения третьего места, поскольку остается единственная книга. Поэтому все три места мы можем заполнить 6×1, или шестью способами. (Заметим, что именно шесть ветвей дерева оканчиваются на столбце «Книга на третьем месте».) Можно изобразить количество вариантов заполнения каждого из трех мест так:

3	2	1

Общее число размещений находится *умножением:*

$$3\times2\times1=6.$$

До сих пор мы употребляли слово «размещение» для описания такого упорядочения объектов, которое подобно расстановке книг на полке в ряд. «Размещение» — общее слово, носящее неформальный, описательный характер. Мы же имеем дело с особым видом размещений: мы рассматриваем *линейные* размещения, т. е. такие упорядочения объектов, которые подобны упорядочению точек на прямой, а не другие виды размещений, как, например, размещение цветов в вазе. И поскольку нас интересует здесь некоторый специальный тип размещений, то для более точного их описания нам необходим специальный термин. Этот специальный термин — *перестановка.*

Каждое из шести размещений книг в предыдущем примере называется перестановкой из трех книг по три. Мы говорим, что существует шесть перестановок из трех книг по три или просто шесть перестановок из трех книг.

Определение 1. Перестановка. *Перестановкой* некоторого количества объектов называется любое размещение этих объектов в определенном линейном порядке.

«Переставить» множество объектов — значит расположить их в каком-то выбранном порядке.

Пример 2. *У нас есть не менее трех экземпляров книги A, не менее трех экземпляров книги B и не менее трех экземпляров книги C. Скольким различными способами можно расставить на полке три книги? (Экземпляры одной и той же книги мы считаем неразличимыми между собой.)*

Решение. Так как у нас есть теперь по меньшей мере три экземпляра каждой книги, то допустимы размещения, подобные AAA или ABA. Любое размещение трех экземляров книги A нельзя отличить от любого другого размещения этих или других экземпляров той же книги, потому что для нас экземпляры одной книги между собой неразличимы (хотя на самом деле они, конечно, различны: например, состоят из разных молекул). Однако размещения ABA и AAB для нас отличны одно от другого. Рассуждая, как в примере 1, мы можем показать, что каждое из трех мест на полке можно заполнить тремя способами. Различные варианты заполнения каждого места изображаются так:

3	3	3

Как и раньше, общее количество перестановок найдем умножением:

$$3 \times 3 \times 3 = 27.$$

Быстрый способ подсчета. Когда число объектов в множестве велико, невозможно без большого труда выписать все перестановки этих объектов и сосчитать их количество. К счастью, метод рассуждений, на который нас навело дерево перестановок и который мы использовали при решении примеров 1 и 2, допускает обобщение. Тем самым мы получаем удобный универсальный метод решения задач на перестановки. В основе этого метода лежит следующее утверждение:

Принцип умножения. *Пусть необходимо выполнить одно за другим какие-то k действий.*

Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе действие можно выполнить n_2 способами, после чего третье действие можно выполнить n_3 способами, и так далее до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены

$$\boxed{n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k} \text{ способами.} \tag{1}$$

Замечание об обозначениях. Мы употребили индексы при букве n и многоточие, чтобы обозначить произведение произвольного числа сомножителей. Этот способ записи может показаться излишне сложным, но какой-то аналогичный способ необходим. Всеми буквами латинского алфавита возможно обозначить лишь 26 переменных; употребление же индексов и многоточия дает нам возможность записывать *любое* конечное количество переменных.

Рассмотрим, какую роль в записи играет многоточие. Оно указывает, что мы должны начать с множителя n_1 и выписывать дополнительные множители до тех пор, пока не дойдем до k-го множителя n_k. При этом *не подразумевается,* что k больше трех; например, при $k=2$ выражение (1) запишется так:

$$n_1 \times n_2,$$

а если $k=1$, то это выражение будет означать просто n_1.

Необходимость в индексах становится очевидной, когда мы пытаемся выписать без них произведение, где число сомножителей велико или неопределенно.

Если мы запишем множество переменных следующим образом:

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ h,$$

то очевидно, что эта запись символизирует наличие в множестве всего лишь восьми переменных, а не произвольного их количества. Когда мы освоимся с употреблением индексов, мы оценим их удобство и ту пользу, которую они приносят (см. приложение II).

Дерево, иллюстрирующее принцип умножения. Дерево на рис. 2 иллюстрирует принцип

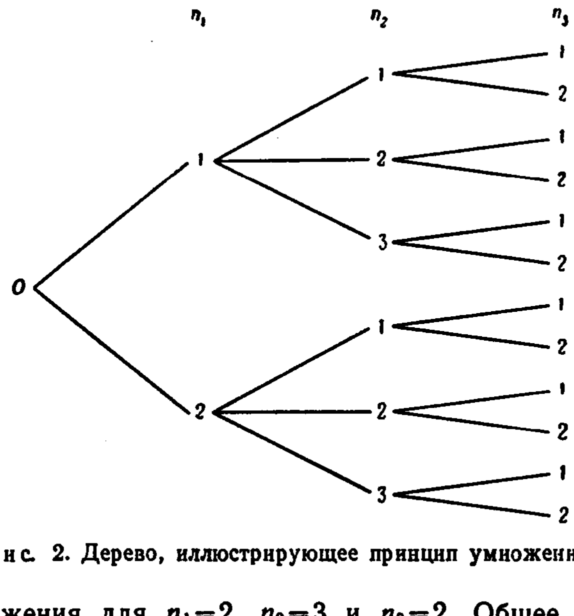


Рис. 2. Дерево, иллюстрирующее принцип умножения.

умножения для $n_1=2$, $n_2=3$ и $n_3=2$. Общее число путей вдоль ветвей дерева от начала к его правой крайней вершине равно

$$n_1 \times n_2 \times n_3 = 2 \times 3 \times 2 = 12.$$

Примеры, подобные приведенным выше, делают принцип умножения интуитивно очевидным. В дальнейшем мы будем считать этот принцип справедливым и используем его для упрощения подсчетов. Заметим, что принцип умножения учитывает *порядок* объектов в перестановках.

Пример 3. *Номер автомобиля состоит из двух букв, за которыми следует трехзначное число. Сколько существует различных автомобильных номеров?*

Решение. Мы можем считать, что номер автомобиля состоит из пяти мест, на первые два из которых надо поставить буквы, а на остальные — цифры. Первое место можно заполнить любой из 26 букв латинского алфавита, т. е. 26 способами. После этого мы снова 26 способами можем заполнить второе место (повторения букв разрешаются). Аналогично третье место можно заполнить 9 способами (на это место нельзя ставить цифру 0, ибо число должно быть по условию трехзначным), четвертое — 10 способами и пятое — 10 способами (нуль на этих местах и повторения цифр разрешаются). Используя принцип умножения, получаем ответ

$$26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 608\,400.$$

Пример 4. *Турист планирует поездку из Чикаго в Саутгемптон через Нью-Йорк и обратно тем же маршрутом. При этом он решает воспользоваться услугами одной из шести авиалиний между Нью-Йорком и Чикаго и одной из четырех морских линий между Нью-Йорком и Саутгемптоном. Сколькими способами он может совершить эту поездку при условии, что не воспользуется никакой линией дважды?*

Решение. Поездку из Чикаго в Нью-Йорк можно совершить шестью способами, после чего поездку из Нью-Йорка в Саутгемптон можно совершить четырьмя способами. Затем поездку из Саутгемптона в Нью-Йорк можно осуществить тремя способами и из Нью-Йорка в Чикаго — пятью. Используя принцип умножения, получаем, что общее количество способов совершить всю поездку равно

$$6 \times 4 \times 3 \times 5 = 360.$$

Пример 5. *Сколько четырехзначных чисел можно составить, используя цифры* 1, 2, 3, 4 и 5, *если*

(а) *никакая цифра не повторяется более одного раза,*

(б) *повторения цифр допустимы,*

(в) *числа должны быть нечетными и повторений цифр быть не должно?*

Решение. (а) *Без повторений.* Нам надо заполнить четыре места. На первое можно поставить любую из пяти цифр. Затем, поскольку никакую цифру нельзя использовать более одного раза, на второе место можно поставить любую из четырех оставшихся цифр. Таким же образом на третье место можно поставить одну из трех цифр, а на четвертое одну из двух. Следовательно, по принципу умножения всего можно составить

$$5\times4\times3\times2=120 \qquad \text{четырехзначных чисел.}$$

(б) *Повторения цифр допустимы.* Если повторения цифр разрешены, то на каждое место можно поставить любую из данных пяти цифр. Следовательно, в этом случае можно всего составить

$$5\times5\times5\times5=625 \qquad \text{четырехзначных чисел.}$$

(в) *Нечетное, без повторений.* Если число должно быть нечетным, то последняя его цифра может равняться либо 1, либо 3, либо 5. Поэтому на четвертое место можно поставить любую из этих трех цифр. После этого на оставшиеся места можно поставить четыре цифры, три цифры и две цифры соответственно, ибо никакую цифру нельзя использовать более одного раза. Количество нечетных четырехзначных чисел без повторения цифр равно

$$4\times3\times2\times3=72.$$

Замечание. В решении примера 5 вначале мы заполняли четвертое место. *Если некоторое действие* (в данном случае — заполнение четвертого места) *необходимо выполнить по-особому, не так, как другие, обычно бывает целесообразно выполнить его* *вначале*. Однако в большинстве случаев, когда на выполнение действий не наложено никаких ограничений (аналогичных ограничению нечетности в нашем случае), безразличен порядок, в котором эти действия выполняются. Так, в этом же примере после того как на четвертое место поставлена нечетная цифра, не имеет значения, какое из трех оставшихся мест заполнять следующим.

Подобным же образом в примере 1 безразлично, какое место на полке заполнено первым. Мы можем поставить книгу на среднее место, затем поставить другую слева от нее и, наконец, третью — справа. Принцип умножения применяется так же, как и в изложенном выше решении, и дает прежний ответ. Мы рассуждаем о первом действии — заполнении среднего места, втором — заполнении левого места и третьем — правого места. Несмотря на то что мы вольны выполнять эти действия в любом порядке, все же удобно говорить об их последовательном выполнении одно за другим, что помогает при анализе задачи. На самом деле все три книги можно поставить на полку одновременно, но решение задачи становится понятнее, если говорить о последовательном выполнении действий.

Пример 6. *При приготовлении пиццы*) к сыру добавляются разные компоненты, обеспечивающие тот или иной вкус пиццы. В распоряжении Билла имеются перец, лук, сосиски, грибы и анчоусы, причем все это можно, по его мнению, добавлять к сыру. Сколько типов пиццы может приготовить Билл?*

Решение. В распоряжении Билла 5 компонент. Для каждой из них независимо от других Билл может решить вопрос о включении ее в пиццу. С перцем можно поступить двумя способами — либо включить его в пиццу, либо не включить. После этого двумя же способами Билл может распорядиться и с луком — включить его в пиццу или не включить.

---

*) Пицца — национальное итальянское блюдо, распространенное и в США.

Аналогично он может поступить с каждой из пяти компонент. Поэтому в зависимости от добавления тех или иных компонент Билл может приготовить пиццу 2^5, или 32, способами, в число которых входят и пицца, состоящая только из одного сыра, и пицца, содержащая все имеющиеся у Билла продукты.

Принцип сложения. Рассмотрим два действия, первое из которых может быть выполнено m способами, а второе — n способами. *Принцип умножения* утверждает: если, после того как первое действие выполнено любым из m способов, второе действие можно выполнить n способами, то оба действия вместе могут быть выполнены mn способами. Вкратце: принцип умножения относится к таким ситуациям, в которых мы можем выполнить *сначала* первое действие, а *затем* второе.

Совершенно отличная ситуация встречается нам, когда мы хотим выполнить *либо* первое действие, *либо* второе действие, но не оба сразу. Рассмотрим следующий пример.

Пример 7. *В нашем распоряжении есть три различных флага. На флагштоке поднимается сигнал, состоящий не менее чем из двух флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке, если порядок флагов в сигнале учитывается?*

Решение. Условимся первым действием считать подъем на флагштоке двух флаго́в (рис. 3), а вторым действием — подъем трех флагов. По принципу умножения два флага поднять можно 3×2, или шестью, способами. Аналогично поднять три флага можно $3\times2\times1$, или шестью, способами.

Раз мы должны поднять только один сигнал, то это может быть либо сигнал из двух флагов, либо сигнал из трех флагов. В данном случае мы выполняем *либо* первое действие, *либо* второе, но не первое действие и затем второе. Эти действия взаимно исключают одно другое: они не могут быть выполнены одновременно. Поэтому общее количество сигналов равно

$$6+6=12.$$

Принцип сложения. *Если два действия взаимно исключают одно другое, причем одно из них можно выполнить m способами, а другое — n способами, то какое-либо одно из них можно выполнить $m+n$ способами.*

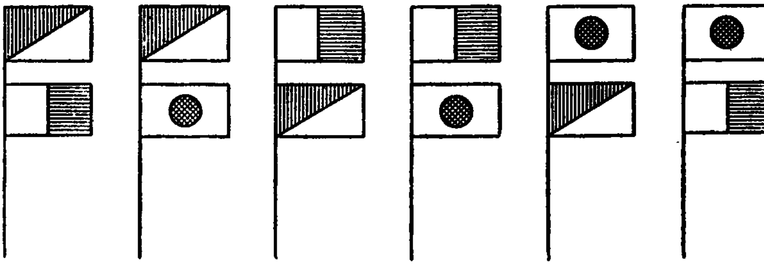


Рис. 3. Сигналы, использующие два из трех флагов.

Этот принцип легко обобщить на случай произвольного конечного количества действий. Сформулировать его мы предоставляем читателям в качестве упражнения.

Упражнения к § 1

Для решения следующих задач используйте принцип умножения.

1. Сколькими способами могут восемь человек стать в очередь к театральной кассе?

2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 6, 7, 8, если никакую цифру не использовать более одного раза? Сколько среди этих чисел будет четных? Сколько нечетных?

3. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы *W*. Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трех букв, причем эти буквы могут повторяться? Если позывные состоят из четырех букв, которые не повторяются?

4. У нас есть три письма, каждое из которых мы можем послать по шести различным адресам. Сколькими способами можно осуществить рассылку писем, если никакие два письма нельзя посылать по одному адресу? Сколькими способами можно разослать письма, если по одному адресу разрешается посылать более одного письма?

5. В автомашине семь мест. Сколькими способами семь человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя

могут только трое из них? [Советуем перечесть замечание к примеру 5 (в).]

6. В пассажирском поезде девять вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде четырех человек при условии, что все они поедут в разных вагонах?

7. В классе тридцать одноместных парт. Сколькими способами можно рассадить на них шестерых школьников?

8. Из двенадцати кандидатов тренер отбирает пятерых и составляет из них баскетбольную команду. Два кандидата могут играть центровыми, четверо — только в защите, а остальные — только в нападении *). Сколькими способами тренер может составить команду?

9. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещены?

10. Пять мальчиков и пять девочек рассаживаются в ряд на десять подряд расположенных мест, причем мальчики садятся на нечетные места, а девочки на четные. Сколькими способами они могут это сделать?

11. Сколькими способами три различных подарка A, B и C можно выдать каким-то трем из пятнадцати лиц, если никто не должен получить более одного подарка? Если подарок A должно получить вполне определенное лицо?

12. Сколькими различными способами из восьми книг можно отобрать несколько, но не менее одной? (Советуем просмотреть решение примера 6 в тексте.)

13. Сколько сигналов можно поднять на мачте, имея четыре флага различных цветов, если каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флагов?

14. Энциклопедия состоит из девяти томов — с первого по девятый. Сколькими способами ее можно поставить на полке в беспорядке, т. е. так, чтобы тома не следовали один за другим в порядке их номеров?

15. Сколько существует пятизначных чисел? Сколько среди них таких, которые начинаются цифрой 2 и оканчиваются цифрой 4? Которые не содержат цифры 5? Которые делятся на 5?

16. В группе девять человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее двух человек?

17. В забеге участвуют пять мальчиков. Сколькими способами могут распределиться два первых места?

18. Сколько различных подмножеств, включая пустое подмножество и все множество, можно выделить из множества,

---

*) Предполагается, что баскетбольная команда состоит из одного центрового, двух защитников и двух нападающих. — *Прим. перев.*

содержащего девять элементов? Из множества, содержащего n элементов?

19. Сколько упорядоченных пар символов (x, y) можно образовать, если на место x можно подставлять либо a, либо b, либо c, а на место y можно подставлять либо 1, либо 2, либо 3, либо 4? Нарисуйте дерево, на котором показано множество всех возможных пар (x, y).

20. Сколько существует перестановок с повторениями из n объектов по r? (Предполагается, что имеется по крайней мере по r экземпляров каждого из n объектов.)

21. Выходя из вагона поезда, некто обнаружил у себя в кармане никель, дайм, квотер и полдоллара*). Сколькими способами он может дать на чай носильщику?

§ 2. Формулы для числа перестановок

Принцип умножения дает нам общий метод нахождения числа перестановок множества объектов. Для некоторых важных типов задач можно существенно упростить использование этого метода, введя подходящие обозначения. К их изложению мы и перейдем.

Символ факториала. Как мы убедились при изучении § 1, принцип умножения позволяет нам устанавливать такие факты:

(1) 7 человек могут стать в очередь

$$7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 \text{ способами;}$$

(2) 20 книг можно расставить на полке

$$20\times19\times18\times\ldots\times3\times2\times1 \text{ способами;}$$

(3) n объектов можно расположить один за другим

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3\times2\times1 \text{ способами}$$

и так далее. Еще раз отметим, что использование многоточия не подразумевает, что обязательно $n>3$. Многоточие показывает, что начиная с натурального числа n следует производить умножение на мно-

*) Никель, дайм, квотер и полдоллара — монеты США достоинством соответственно в 5, 10, 25 и 50 центов. — *Прим. перев.*

жители, каждый из которых на единицу меньше предыдущего, до тех пор, пока мы не дойдем до единицы.

В аналогичных задачах могут встретиться очень большие числа и очень длинные последовательности сомножителей. Поэтому для удобства записей мы введем специальный символ.

Определение 2. n факториал. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначится $n!$ (читается «n факториал»).

Таким образом,

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\ \dots\ 3\times2\times1 = n\times(n-1)!.}$$

В частности, мы получаем

$$1! = 1,$$
$$2! = 2\times1 = 2\times1! = 2,$$
$$3! = 3\times2\times1 = 3\times2! = 6,$$
$$4! = 4\times3\times2\times1 = 4\times3! = 24,$$
$$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 5\times4! = 120.$$

Продолжая таким образом, мы получаем таблицу значений $n!$ (табл. 9) или более обширную табл. II в конце книги. (В табл. II приведены также значения $\lg n!$.)

Таблица 9

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

Вычислять значения $n!$ при больших n крайне трудно, ибо с увеличением n факториалы растут с фантастической скоростью. Число перестановок всех букв латинского алфавита, равное $26!$, больше чем 4×10^{26}.

Символ факториала удобно использовать для записи больших чисел, которые встречаются при решении задач на перестановки и близких к ним задач. Заметим, что

$$20! = 20 \times 19!,$$

$$100! = 100 \times 99!,$$

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Пример 1. *Используя принцип умножения, можно показать, что* 50 *человек могут стать в один ряд*

$$50 \times 49 \times 48 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = 50! \text{ *способами.*}$$

Теорема 1. Число перестановок из n элементов по n. *Число перестановок из n различных объектов по n равно $n!$.*

Доказательство. Теорема доказывается непосредственным применением принципа умножения. Пусть наши n объектов мы размещаем на n местах. На первое место можно поставить любой из n данных объектов. После того как первое место заполнено, на второе место можно поставить любой из $n-1$ оставшихся объектов. Подобным же образом на третье место можно поставить любой из $n-2$ объектов, на четвертое — любой из $n-3$ объектов и так далее. Следовательно, по принципу умножения все n мест можно заполнить

$$n(n-1)(n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1 = n! \text{ способами.}$$

Число перестановок множества из n различных элементов по n обозначается через P_n^n или просто через P_n. Поэтому мы имеем

$$\boxed{P_n^n = P_n = n!} \quad \square.$$

Теперь мы рассмотрим такие перестановки из n различных объектов, в которых участвуют не все, а только определенное количество объектов.

Пример 2. *Сколькими способами из семи книг можно отобрать три и расставить их на три места на книжной полке?*

Решение. Первое место можно заполнить любой из семи книг, т. е. семью способами. После этого остается шесть книг, и поэтому второе место можно заполнить шестью способами. Таким же образом третье место можно заполнить пятью способами. По принципу умножения все три места можно заполнить

$7\times6\times5$ способами.

Для записи произведения $7\times6\times5$ можно также использовать символ факториала:

$$7\times6\times5=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=\frac{7!}{4!}.$$

Число перестановок из семи объектов по три обозначается через P_7^3 и равно $7\times6\times5$. Поэтому

$$P_7^3=7\times6\times5=\frac{7!}{4!}.$$

Замечание. Чтобы вычислить P_7^3, мы «начинаем с семи и берем три сомножителя».

Определение 3. Перестановка из n элементов по r. *Перестановкой* из n элементов по r называется произвольное размещение r элементов, которые принадлежат множеству, содержащему всего n элементов. Общее число всех таких перестановок обозначается P_n^r, где обязательно $r\leqslant n$ *).

Теорема 2. Число перестановок из n элементов по r. *Число перестановок из n различных элементов по r равно*

$$\boxed{P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}.}$$

---

*) В русской литературе перестановки из n элементов по r часто называются *размещениями* из n элементов по r, а их число часто обозначают через A_n^r.

Доказательство. Эта теорема также доказывается непосредственным применением принципа умножения. Предположим, что нам надо заполнить r мест, выбирая для этого объекты из множества в n объектов. На первое место можно поставить любой из n объектов. После этого останется $n-1$ объектов и любой из них можно поставить на второе место. Поэтому второе место можно заполнить $n-1$ способами. Подобным же образом третье место можно заполнить $n-2$ способами, четвертое — $n-3$ способами и так далее. Продолжая дальше, мы видим, что десятое место можно заполнить $n-9$ способами, двадцать пятое место — $n-24$ способами и, наконец, r-е место можно заполнить $n-(r-1)$ способами. По принципу умножения все r мест можно заполнить

$$\boxed{P_n^r = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-r+1)} \text{ способами.} \qquad (1)$$

Выражение в правой части формулы (1) содержит r сомножителей. Его можно привести к более удобному виду, умножив на $(n-r)!/(n-r)!$, после чего получим

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}. \quad \square \qquad (2)$$

Формула (1) определена для всех $r \leqslant n$. При $r<n$ формулы (1) и (2) совпадают. Однако при $r=n$ формула (2) дает

$$P_n^n = \frac{n!}{0!}.$$

Полагая $0!=1$, мы получаем, что теперь формула (2) охватывает и случай $r=n$. При этом выражение для P_n^n, которое дается формулой (2), совпадает с результатом теоремы 1. Более того, если $n=1$, то формула

$$n! = n \times (n-1)! \qquad (3)$$

принимает вид

$$1! = 1 \times (0!).$$

Следовательно, определяя

$$0! = 1,$$

мы делаем формулу (3) пригодной и для случая $n=1$.

Пример 3. *Сколько пятибуквенных слов можно образовать из букв, составляющих слово «треугольник»? (Под «словом» здесь понимается любое размещение из букв. Такое «слово» не обязательно есть слово какого-либо языка.)*

Решение. Задача состоит в том, чтобы найти число перестановок из 11 букв по 5. Это число равно

$$P_{11}^5 = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 388\,080.$$

Пример 4. *Сколько различных перестановок можно получить, если брать по пять карт из колоды, содержащей пятьдесят две карты?*

Решение. Используя теорему 2, мы получаем, что искомое число равно

$$P_{52}^5 = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311\,875\,200.$$

Замечание. Следует учитывать порядок карт. Поэтому набор из двойки, тройки, четверки, пятерки и шестерки червей отличается от набора из двойки, тройки, пятерки, четверки и шестерки червей.

Пример 5. *Сколько разных слов можно образовать из всех букв слова «гипербола»? Сколько среди них таких, в которых буквы «г» и «и» стоят рядом? В которых эти буквы не стоят рядом?*

Решение. Согласно теореме 1, количество перестановок из девяти букв по девяти равно 9!, или 362 880. Поэтому искомое количество слов равно 9!, если на составляемые слова не налагать дополнительных ограничений. Если же буквы *г* и *и* должны стоять рядом, разумно рассматривать их как одну букву *ги*. Теперь нам надо разместить восемь букв. Это дает 8! размещений. Однако в каждом из этих размещений порядок *ги* возможно заменить на порядок *иг*, так что каждое из этих 8! размещений следует заменить на два размещения, удовлетворяющие поставленному условию. Следовательно, общее число слов, в которых буквы *г* и *и* стоят рядом, равно $2 \cdot 8! = 80\,640$.

Число слов, в которых буквы *г* и *и* не стоят рядом, равно разности

$$362\,880 - 80\,640 = 282\,240.$$

Для решения задач на размещение объектов множества читатель теперь имеет в своем распоряжении принципы умножения и сложения и несколько формул. Но не следует ожидать, что все задачи можно решить непосредственным применением какой-либо формулы. Гибкость необходима в любой ситуации. Определенная задача требует применения формул, принципов умножения или сложения, некоторых специальных приемов или сочетания всех этих средств.

Упражнения к § 2

Замечание. В этих упражнениях «словом» называется любое размещение букв.

1. Чему равны P_9^3, P_m^1, P_7^7, P_k^2?

2. Вычислите P_n^0 и объясните результат.

3. Сколько слов можно образовать из букв слова *фрагмент*, если слова должны состоять (а) из восьми букв, (б) из семи букв, (в) из трех букв?

4. Студенту необходимо сдать четыре экзамена в течение десяти дней. Сколькими способами можно составить ему расписание экзаменов?

5. Музыкальный концерт состоит из трех песен и двух скрипичных пьес. Сколькими способами можно составить программу концерта, так чтобы он начинался и оканчивался исполнением песни и чтобы скрипичные пьесы не исполнялись одна за другой?

6. Доказать, что число трехбуквенных слов, которые можно образовать из букв, составляющих слово «*гипотенуза*», равно числу всех возможных перестановок букв, составляющих слово «*призма*».

7. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из пяти цифр, если первая из них не равна нулю? Если номер состоит из одной буквы, за которой следуют четыре цифры, отличные от нуля?

8. Пассажирский поезд состоит из двух багажных вагонов, четырех плацкартных и трех купированных. Сколькими спосо-

бами можно сформировать состав, если багажные вагоны должны находиться в его начале, а купированные — в конце?

9. Три дороги соединяют города A и B, четыре дороги соединяют B и C. Сколькими способами можно совершить поездку из A в C через B и вернуться в A также через B?

10. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг, если (а) две определенные книги должны всегда стоять рядом, (б) эти две книги не должны стоять рядом?

11. В геометрии многоугольники обычно обозначаются буквами, поставленными у их вершин. Сколькими способами можно обозначить треугольник, используя буквы латинского алфавита? Сколькими способами можно обозначить пятиугольник? Десятиугольник? (Ответ запишите в виде произведения сомножителей, не вычисляя его.)

12. Сколько пятибуквенных слов можно образовать, используя для этого десять различных букв, (а) если никакую букву нельзя использовать в одном слове более одного раза, (б) если повторения букв разрешены. Сколько в последнем случае встретится слов, в которых на самом деле есть повторения?

13. Сколько различных трехбуквенных слов можно образовать, используя буквы, составляющие вашу фамилию, причем эти слова должны начинаться и оканчиваться согласными, а в середине должна стоять гласная буква?

§ 3. Сочетания

Для того чтобы уяснить себе разницу между перестановками и сочетаниями, рассмотрим один пример.

Пример 1. *Сколькими способами читатель может отобрать три книги из четырех, обозначенных A, B, C и D, если порядок книг его не интересует?*

Решение. Мы знаем, что число *перестановок* из четырех различных книг по три равно

$$P_4^3 = 4\times3\times2 = 24.$$

В этих перестановках, или размещениях, учитывается *порядок* книг.

Совершенно другая задача возникает, когда мы хотим сделать выбор трех книг из A, B, C и D без учета их порядка. Существует только четыре возможных выбора:

$$ABC,\quad ABD,\quad ACD,\quad BCD. \tag{1}$$

Например, мы не записали здесь ACB, поскольку выбор ACB не отличается от выбора ABC, ибо мы условились порядок книг не учитывать.

Слово «выбор» — неплохое повседневное слово, которое описывает исход рассматриваемых нами действий. Однако раз мы имеем дело с определенным видом выбора, в котором не учитывается порядок объектов, то нам необходим специальный термин. (Подобная ситуация встретилась нам при употреблении слова «размещение» для описания перестановок.) Каждый выбор трех книг в списке (1) называется *сочетанием* из четырех книг по три. Общее число таких сочетаний обозначается

$$C_4^3, \text{ или } \binom{4}{3},$$

и каждое из этих обозначений читается «число сочетаний из четырех по три». Символ $\binom{4}{3}$ не имеет горизонтальной черты в середине; это не дробь. Сосчитав сочетания в списке (1), мы видим, что

$$C_4^3 = \binom{4}{3} = 4.$$

В этом примере подчеркивается следующая разница между перестановками и сочетаниями:

В перестановках порядок элементов учитывается; в сочетаниях порядок элементов не учитывается.

Практические соображения. Обычно мы по содержанию задачи должны решить, участвуют ли в ней перестановки или сочетания. Решение зависит от ответа на вопрос: «*Учитывать порядок объектов или нет?*» Например, если мы расставляем три книги на полке, естественно рассматривать ABC и ACB как различные размещения и учитывать порядок книг при подсчете. Здесь мы привлекаем перестановки. Но если мы отбираем три книги для воскресного чтения, то выбор книг ABC и ACB следует считать одним и тем же; порядок книг не учитывается при подсчете, и поэтому мы привлекаем сочетания. Аналогично два человека X и Y могут стать один за другим двумя способами: XY или YX. Но эти же два человека могут образовать некую комиссию из двух лиц только одним способом, поскольку комиссии XY и YX совпадают. Порядок учитывается в строю; в комиссии же, где все члены равноправны и нет председателя, порядок не играет роли.

Подмножества данного множества. При обсуждении примера 1 можно использовать язык множеств. Мы говорили о подмножестве из трех элементов, выделенном из множества

$$\{A, B, C, D\}.$$

Для краткости иногда подмножество, содержащее три элемента, называют *трехэлементным подмножеством.* Итак, у множества из четырех элементов есть ровно четыре трехэлементных подмножества.

> **Определение 4.** Сочетания. *Сочетание* есть набор объектов, рассматриваемый без учета их порядка. *Сочетанием* из n элементов по r называется произвольное неупорядоченное r-элементное подмножество множества, содержащего n различных объектов. Общее число таких сочетаний обозначается через C_n^r или $\binom{n}{r}$; здесь обязательно $r \leqslant n$.

Иными словами, можно сказать, что множество из n элементов имеет C_n^r, или $\binom{n}{r}$, r-элементных подмножеств. Теперь нам надо отыскать формулы, по которым вычисляется C_n^r.

Вычисление C_n^r, или $\binom{n}{r}$. Рассмотрим список (1), в котором представлены все возможные наборы из четырех книг по три. Переставляя всеми способами книги в каждом наборе, мы получим, что любому набору из трех книг соответствуют шесть перестановок этих книг, так как любое трехэлементное подмножество можно переставить 3! способами. В результате получаются $4 \times 3!$, или 24, перестановки, которые выписаны в таблице 10.

Таблица 10

C_4^3 и P_4^3. Каждому сочетанию соответствуют $3! = 6$ перестановок

Сочетания	Перестановки
ABC	*ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA*
ABD	*ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA*
ACD	*ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA*
BCD	*BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB*

Очевидно, что 24 перестановки из четырех книг по три получены всевозможными перестановками в сочетаниях из четырех книг по три. Иными словами,

$$(\text{Число сочетаний}) \times 3! = (\text{Числу перестановок}).$$

Или, используя символы,

$$C_4^3 \times 3! = P_4^3,$$

$$\binom{4}{3} \times 3! = 4 \times 3 \times 2.$$

Поэтому

$$C_4^3 = \binom{4}{3} = 4.$$

Предыдущие рассуждения можно обобщить, что позволит нам вычислять C_n^r, или $\binom{n}{r}$.

Теорема 3. Число сочетаний из n элементов по r. *Число сочетаний из множества n различных объектов по r равно*

$$\boxed{C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}. \qquad (2)$$

Доказательство. Каждое сочетание по r объектов можно упорядочить $r!$ способами, а поэтому из него получается $r!$ перестановок. Следовательно, $r!$ перестановок каждого из C_n^r сочетаний дают $C_n^r \times r!$ перестановок. Более того, число $C_n^r \times r!$ равно общему числу перестановок, поскольку любая перестановка из r объектов получается из некоторого сочетания по r объектов. Поэтому

$$C_n^r \times r! = P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Разделив обе части последнего равенства на $r!$, получим

$$\boxed{C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.} \quad \square \qquad (2)$$

Непосредственным применением формулы (2) находим

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!\,98!} = \frac{100 \times 99}{1 \times 2} = 4950;$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n;$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

Следствие 4. *Число сочетаний из n элементов по $n-r$ равно числу сочетаний из n элементов по r:*

$$\boxed{\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}.} \qquad (3)$$

Доказательство. Для получения $\binom{n}{r}$ достаточно поменять местами сомножители знаменателя в выражении (2). $\square$

Обсуждение. Не удивительно, что число сочетаний из n объектов по $(n-r)$ равно числу сочетаний из n объектов по r. Каким бы образом мы ни отбирали r объектов из n, мы всегда оставляем $(n-r)$ объектов. Так,

$$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} \quad \text{и} \quad \binom{50}{5} = \binom{50}{45}.$$

Пример 2. *Колода игральных карт насчитывает 52 различные карты. Сколькими способами можно сдать 13 карт на руки одному игроку?*

Решение. Искомое количество способов, какими можно отобрать 13 карт из колоды в 52 карты, задается формулой (2):

$$\binom{52}{13} = \frac{52!}{13! \times 39!} = 635\,013\,559\,600.$$

Пример 3. *Сколькими способами можно составить комиссию в составе трех человек, выбирая их среди четырех супружеских пар, если* (а) *в комиссию могут входить любые трое из данных восьми человек;* (б) *комиссия должна состоять из двух женщин и одного мужчины;* (в) *в комиссию не должны входить члены одной семьи?*

Решение. (а) В комиссии не играет роли порядок членов, поэтому задача состоит в том, чтобы установить число способов, какими можно отобрать трех человек из восьми. По формуле (2) число таких комиссий равно

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56.$$

(б) Двух женщин можно выбрать $\binom{4}{2}$, или шестью, способами. После того как они выбраны одним из этих способов, одного мужчину можно выбрать $\binom{4}{1}$, или четырьмя, способами. Следовательно, в силу принципа умножения (§ 1) количество способов, какими можно составить комиссию из двух женщин и одного мужчины, равно

$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24.$$

(в) Если члены одной семьи не должны входить в комиссию, то в ней обязательно будут представлены три семьи. Из четырех семей три можно отобрать $\binom{4}{3}$ способами. После того как три семьи отобраны, двумя способами можно выделить представителя в комиссию от первой из этих семей (мужа или жену), двумя способами от второй и двумя — от третьей. В силу принципа умножения общее число комиссий равно

$$\binom{4}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$

Иначе, поскольку существуют четыре способа выбрать семью и шесть способов выбрать недостающего члена в комиссию, в которую входила бы какая-либо семья, то есть всего 24 недопустимые комиссии. Вычитая 24 из общего числа 56, мы получаем 32 комиссии, в которые не входят члены одной семьи. Часто бывает легче вместо того, чтобы считать прямо, произвести подсчет, относящийся к случаю, противоположному тому, который нас интересует, а затем найти, чему равно дополнение до общего количества всех возможных вариантов.

Пример 4. *Сколькими способами можно отобрать несколько книг (не менее одной) из пяти одинаковых учебников алгебры и четырех одинаковых учебников геометрии?*

Решение. Сначала выберем учебники алгебры. Мы можем взять либо одну, либо две, либо три, либо четыре, либо пять книг, либо не брать ни одной. Следовательно, учебники алгебры можно отобрать шестью способами. После того как это сделано одним из шести способов, мы можем подобным же образом отобрать пятью способами учебники геометрии. По принципу умножения общее количество способов отобрать книги равно 6×5, или тридцати. Среди этих способов есть один, при котором мы не взяли ни одного учебника алгебры и ни одного учебника геометрии. Так как мы должны взять по крайней мере одну книгу, то количество наборов книг будет равно $30-1=29$.

Теорема 5. Правило Паскаля.

$$\boxed{\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}} \quad \text{для} \quad 1 \leqslant r \leqslant n.$$

Доказательство. Это правило можно доказать, заменив символы их выражениями через факториалы и проделав необходимые упрощения. Ниже приводится другой вариант доказательства, связанный со смыслом входящих в формулу символов.

Количество сочетаний без повторений по r элементов, которые можно выделить из данного множества $n+1$ объектов, равно $\binom{n+1}{r}$. Рассмотрим некоторый определенный объект этого множества. Если этот определенный объект входит в сочетание, то остальные $r-1$ объектов можно отобрать среди оставшихся n объектов $\binom{n}{r-1}$ способами. Если же этот объект не входит в сочетание, то r объектов можно отобрать среди оставшихся n объектов $\binom{n}{r}$ способами. Общее число сочетаний получается сложением числа сочетаний, содержащих рассматриваемый объект, с числом сочетаний, в которых он не содержится, поскольку никакой другой случай невозможен. Поэтому общее количество сочетаний из $n+1$ элементов по r равно

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}. \quad \square$$

Замечание. В этом доказательстве применяется принцип сложения, а не принцип умножения. В решении представлены два действия, каждое из которых в отдельности допустимо, но оба они не могут быть выполнены одновременно. Дело обстоит так: *или* это действие, *или* то действие. Такие действия *взаимно исключают одно другое;* их нельзя выполнить вместе. Каждое действие образует свою отдельную задачу, и окончательный результат получается сложением, а не умножением.

Правило Паскаля дает нам простой способ построения таблицы значений $\binom{n}{r}$, известной под названием *треугольника Паскаля* *). В табл. 11 показана часть треугольника Паскаля для значений n от 0 до 10. Строки таблицы соответствуют значениям n, столбцы — значениям r. Первые и последние элемен-

Таблица 11

Правило Паскаля для $\binom{n}{r}$, $0 \leqslant r \leqslant n \leqslant 10$,

$$\binom{n+r}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}, \quad 1 \leqslant r \leqslant n$$

n \ r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

ты любой строки равны 1, потому что $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Любой другой элемент таблицы, согласно правилу Паскаля, равен сумме элемента, который стоит непосредственно над ним, и элемента, стоящего над ним слева. Так, например, элемент, отвечающий значениям $n=3$ и $r=2$, стоит в четвертой строке и третьем столбце таблицы; он равен сумме элемента, стоящего в третьей строке и третьем столбце, и элемента, стоящего в третьей строке и во втором столбце, поскольку $\binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1}$.

*) Ср. хорошую популярную брошюру: В. А. Успенский, Треугольник Паскаля, М., «Наука», 1966.

Упражнения к § 3

1. Чему равны $\binom{9}{3}$, $\binom{9}{6}$, $\binom{m}{3}$, $\binom{k}{1}$, $\binom{5}{5}$?

2. Покажите, что $\binom{n}{0}=1$, и поясните это на языке выбора объектов из множества.

3. Найдите n из следующих уравнений:

(а) $\binom{n}{2}=45$; (б) $\dfrac{P_n^4}{\binom{n-1}{3}}=60$; (в) $\binom{n}{8}=\binom{n}{12}$.

4. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

5. Подрядчику нужны четыре плотника, а к нему с предложением своих услуг обратились десять. Сколькими способами он может выбрать среди них четверых?

6. Сколькими способами можно отобрать несколько фруктов из семи яблок, четырех лимонов и девяти апельсинов? (Мы считаем, что фрукты одного вида неразличимы.)

7. Сколько «слов», содержащих не менее чем одну букву, можно составить из двух букв *А*, пяти букв *Б* и девяти букв *В*?

8. На окружности выбрано десять точек. Сколько можно провести хорд с концами в этих точках? Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках? Сколько выпуклых десятиугольников? А сколько самопересекающихся?

9. Сколькими способами из девяти книг можно отобрать четыре? Сколькими способами это можно сделать, если в число отобранных должна входить некая определенная книга? Сколькими способами можно отобрать четыре книги так, чтобы определенная книга не входила в их число?

10. Компания из двадцати мужчин разделяется на три группы, в первую из которых входят три человека, во вторую — пять и в третью — двенадцать. Сколькими способами они могут это сделать? (Ответ записать в виде произведения сомножителей, не вычисляя его.)

11. Сколькими способами можно отобрать несколько книг (не менее одной) из пачки, содержащей четыре одинаковые поваренные книги и восемь одинаковых романов?

12. Выпишите символы, обозначающие число сочетаний из 20 элементов по 4 и число сочетаний из 100 элементов по 98. Вычислите их числовые значения и определите, какое из них больше.

13. Колода карт содержит 52 различные карты. Сдача карт одному игроку состоит из пяти карт, порядок которых не важен. Запишите число всех возможных сдач одному игроку, используя факториалы.

14. Сколькими способами могут два продавца книг распределить между собой 300 экземпляров одной книги, 200 экземпляров другой и 100 экземпляров третьей, если никакой продавец не должен получить всех книг? (Ответ записать в виде произведения сомножителей, не вычисляя его.)

15. Колода карт содержит 13 карт пиковой масти, 13 треф, 13 бубен и 13 червей. Сколькими способами можно сдать одному игроку 5 пик, 4 черви, 2 трефы и 2 пики? (Ответ записать в виде произведения сомножителей, не вычисляя его.)

16. В предвыборной борьбе за две одинаковые должности выступают шесть кандидатов. Каждый избиратель может занести в свой бюллетень либо одного кандидата, либо двух. Сколькими способами могут быть заполнены бюллетени?

17. Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно образовать из букв слова *уравнение?*

18. 20 пассажиров собираются совершить поездку в двухэтажном автобусе, который вмещает 12 пассажиров внизу и 8 наверху. При этом 4 пассажира не желают ехать внизу, а 5 пассажиров — наверху. Сколькими способами их можно рассадить по местам в автобусе, если (а) порядок размещения пассажиров по местам как внизу, так и наверху не учитывается; (б) порядок размещения внизу и наверху учитывается?

19. Сколькими способами из пяти супружеских пар можно отобрать четырех человек, если (а) в число отобранных должны входить двое мужчин и две женщины; (б) никакая супружеская пара не должна входить в это число?

20. Проверьте, что элементы табл. 11, расположенные в строке, отвечающей значению $n=4$, удовлетворяют условиям

$$\binom{4}{0}=\binom{4}{4}=1 \quad \text{и} \quad \binom{4}{r}=\binom{3}{r}+\binom{3}{r-1} \quad \text{для } 1\leqslant r\leqslant 3.$$

21. Запишите элементы треугольника Паскаля, которые стоят в строке, отвечающей значению $n=11$, и в строке, отвечающей значению $n=12$ (табл. 11).

Упражнения на перестановки и сочетания

А

1. Сколькими способами некто может выбрать три подарка из десяти различных предметов?

2. На железной дороге 50 станций. На каждом билете печатаются названия станций отправления и прибытия. Сколько различных билетов можно напечатать? Тот же вопрос, если каждый билет можно использовать в любом направлении, т. е. безразлично, с какой из двух обозначенных в билете станций вы отправляетесь,

3. Сколькими способами можно распределить 15 различных предметов между тремя лицами, обозначенными A, B и C, если A должен получить 2 предмета, B — 3 предмета и C — 10 предметов?

4. На плоскости даны 20 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проводится прямая. Сколько таких прямых можно провести?

5. В пространстве даны 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько плоскостей можно задать, выбирая различные тройки данных точек?

6. Восемь мальчиков водят хоровод; затем к ним присоединяются еще пять девочек. Сколькими способами девочки могут встать в кольцо, если никакие две девочки не должны стоять рядом? (Заметим, что здесь следует учитывать порядок, поскольку все детали различны.)

7. Городской совет состоит из мэра и шести старейшин. Сколько различных комиссий можно сформировать из членов городского совета, если каждая комиссия состоит из четырех человек, в следующих случаях: (а) мэр города входит в каждую комиссию? (б) мэр города не входит ни в одну комиссию?

8. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова *сапфир*? Сколько среди них таких, которые не содержат буквы *р*? Сколько таких, которые начинаются с буквы *с* и оканчиваются буквой *р*?

9. Для участия в команде тренер отбирает пять мальчиков из десяти. Сколькими способами он может сформировать команду, если (а) два определенных мальчика должны войти в команду, (б) нет никаких ограничений?

10. Некто имеет восемь различных пар перчаток. Сколькими способами он может отобрать одну перчатку для правой руки и одну перчатку для левой руки так, чтобы они не принадлежали одной паре?

11. В рамку проектора одновременно вставляются 4 квадратных диапозитива, которые проектируются на 4 экрана. При этом каждый диапозитив можно поставить четырьмя способами, и только один из них является правильным. Сколько существует способов поставить диапозитивы так, чтобы по крайней мере один из них не был поставлен правильно?

B

12. Сколько чисел, заключающихся между 1000 и 9999, содержат цифру 3?

13. Сколько слов, состоящих из двух гласных и двух согласных, можно образовать из букв слова *функция*?

14. Дан правильный двадцатиугольник. Сколько можно построить четырехугольников, вершины которых совпадают с вершинами данного двадцатиугольника, если никакие две из вершин четырехугольника не являются противоположными вершинами двадцатиугольника?

15. Докажите, что $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$ (правило Паскаля), заменив символы на их выражения через факториалы и упростив полученные выражения.

16. Десять кресел поставлены в ряд. Сколькими способами на них могут сесть два человека? Сколькими способами эти два человека могут сесть рядом? Сколькими способами они могут сесть так, чтобы между ними было по крайней мере одно пустое кресло?

17. Сколько существует диагоналей у выпуклого двадцатиугольника? Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, в котором можно провести 35 различных диагоналей?

18. Предприятие может предоставить работу по одной специальности четырем женщинам, по другой специальности пяти мужчинам и по третьей специальности трем работникам независимо от их пола. Сколькими способами можно заполнить эти места, если имеются 18 претендентов на них, среди которых 8 женщин и 10 мужчин?

19. 15 точек расположены на плоскости так, что 5 из них лежат на одной прямой, а из остальных никакие три не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проводится прямая. Сколько таких прямых можно провести?

20. Сколько шестизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждое число должно состоять из трех четных и трех нечетных цифр, причем никакая цифра не входит в число более одного раза?

21. За каждым из двух солдат закрепляется личный номер, состоящий из трех цифр. Сколькими способами это можно сделать? Тот же вопрос, если номер должен состоять только из четных цифр? (Нуль является четной цифрой!)

22. В течение десяти недель студенты сдают десять экзаменов, в том числе два по математике. Сколькими способами можно распределить экзамены по неделям так, чтобы экзамены по математике не следовали один за другим?

23. У филателиста есть восемь разных канадских марок и десять разных марок США. Сколькими способами он может отобрать три канадские и три американские марки и наклеить их в альбом на шесть пронумерованных мест?

24. Симфония записана на четырех пластинках, причем для записи использовались обе стороны каждой пластинки. Сколько существует способов проиграть эту симфонию так, чтобы по крайней мере одна ее часть попала не на свое место?

25. В железнодорожном вагоне десять мест расположены лицом по ходу поезда и десять мест — против хода поезда. Сколькими способами можно посадить в вагон восемь пассажиров, если двое отказываются сидеть лицом по ходу поезда, а трое — лицом против хода поезда?

26. Из группы в 20 солдат каждую ночь выделяется наряд, состоящий из трех человек. Сколько ночей подряд командир может выделять наряд, не совпадающий ни с одним из предыдущих? Сколько раз при этом в наряд войдет какой-то определенный солдат?

27. Восемь человек должны расположиться в двух комнатах, причем в каждой должно быть по крайней мере три человека. Сколькими способами они могут это сделать?

§ 4. Перестановки объектов с повторениями

В § 1—3 мы рассматривали размещения множеств таких объектов, которые отличались один от другого. Чему будет равно число возможных перестановок множества объектов, если в этом множестве некоторые объекты совпадают? Нетрудно сообразить, что если какие-то объекты в множестве невозможно отличить друг от друга, то число всех возможных размещений этого множества уменьшается. Например, из букв A, B и C можно образовать 3! трехбуквенных слова; однако из букв A, A, A можно образовать только *одно* трехбуквенное слово.

Пример 1. *Сколько различных слов можно образовать из всех букв слова «атака»?*

Решение. Задача была бы легкой, если бы три буквы a отличались одна от другой. В этом случае, как мы знаем, существуют 5! перестановок пяти различных букв. Попробуем свести новую задачу (не все буквы различны) к известной задаче (все буквы различны) таким образом: будем *временно* считать их различными.

Обозначим неизвестное нам число перестановок всех букв слова *атака* через x. Рассмотрим одну из этих перестановок, например

$$a\ a\ a\ т\ к$$

Если мы в этой перестановке обозначим три буквы a через

$$a_1, \quad a_2 \quad и \quad a_3,$$

то вместо исходной перестановки мы сможем получить 3! перестановок, которые отличаются между собой только положениями букв a_1, a_2 и a_3, в то время как буквы $т$ и $к$ стоят на фиксированных местах. Подобным же образом каждая из исходных перестановок даст при такой замене 3! новые перестановки. Поэтому общее число перестановок будет равно $x \times 3!$. Так как пять букв

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ т,\ к$$

теперь все различны, то $x \times 3!$ равно числу перестановок из пяти различных букв. Следовательно,

$$x \times 3! = 5!$$

или

$$x = \frac{5!}{3!}.$$

Заметим, что мы рассуждали таким же образом, когда находили $\binom{n}{r}$. Мы можем обобщить эти рассуждения для того, чтобы показать, что число перестановок из n объектов по n для такого множества объектов, в котором r объектов совпадают, а остальные все отличны друг от друга, равно $\frac{n!}{r!}$. Повторным применением такого рода рассуждений мы получим следующую теорему:

Теорема 6. Перестановки объектов с повторениями. *Пусть дано множество из n элементов, в котором n_1 элементов принадлежат к первому типу, n_2 элементов принадлежат ко второму типу, n_3 элементов принадлежат к третьему типу, и так далее до n_k объектов k-го типа, причем элементы одного и того же типа не различимы между собой. Тогда общее число перестановок данного множества n элементов равно*

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,\ldots\,n_k!}}, \qquad (1)$$

где

$$n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k=n.$$

Следствие 7. Число перестановок в случае двух типов объектов. *Если множество из n элементов состоит из r элементов одного типа и $n-r$ другого типа, то число перестановок данного множества из n объектов равно*

$$\boxed{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}.} \tag{2}$$

Доказательство. (а) Доказательство немедленно следует из теоремы 6, если мы положим $n_1=r$ и $n_2=n-r$. Впрочем, можно дать и другое доказательство этой теоремы.

(б) Предположим, что нам надо расставить по порядку r одинаковых объектов, которые мы обозначим A, и $n-r$ одинаковых объектов, отличных от предыдущих, которые мы обозначим B. Количество способов, которыми можно отобрать r мест для размещения объектов A из всех n мест, равно $\binom{n}{r}$, после чего эти объекты можно расположить на выбранных местах одним способом. Далее, объекты типа B можно расположить на оставшихся $n-r$ местах $\binom{n-r}{n-r}\times 1$, или одним, способом. Следовательно, общее число размещений равно $\binom{n}{r}$. □

Замечание. Число *перестановок* данного множества из n объектов, где r объектов относятся к одному типу, а остальные — к другому типу, совпадает с числом сочетаний из n различных объектов по r. Из предыдущего доказательства становятся понятными причины этого совпадения.

Пример 2. *Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова «Миссисипи»?*

Решение. В данном слове девять букв, в том числе одна буква *м*, три буквы *с*, четыре буквы *и* и одна буква *п*. Следовательно, $n_1=1$, $n_2=3$, $n_3=4$ и $n_4=1$. В силу теоремы 6 общее число перестановок из этих букв равно

$$\frac{9!}{1!\times 3!\times 4!\times 1!}=2520.$$

Пример 3. *Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова «удобрения», если все гласные должны идти друг за другом в следующем порядке: у, о, е, и, я?*

Решение 1. Поскольку порядок гласных (согласные мы пока вычеркиваем) не может быть изменен, то гласные нельзя переставлять между собой; поэтому в данной задаче их можно считать неразличимыми. Таким образом задача сводится к нахождению числа всех возможных перестановок из девяти букв по девяти, причем пять из этих букв совпадают. В силу теоремы 6 это число равно

$$\frac{9!}{5!(1!)^4}=3024.$$

Решение 2. Мы размещаем девять букв на девять подряд идущих мест. Места для гласных можно выбрать $\binom{9}{5}$ способами, и, после того как это сделано, их можно поставить на выбранные места одним способом — в заранее указанном порядке. Согласные можно расставить на оставшихся четырех местах 4! способами. Следовательно, общее число перестановок этих букв равно

$$\binom{9}{5}\times 1\times 4!=\frac{9!}{5!4!}\times 4!=\frac{9!}{5!}=3024.$$

Пример 4. *Дано n букв А и r букв Б. Сколько различных слов можно образовать из этих букв так, чтобы каждое слово содержало все n букв А?*

Решение. В данном случае у нас есть $r+1$ взаимно исключающих друг друга случаев, потому что мы можем составить слово из n букв *А* и совсем не брать буквы *Б*; взять n букв *А* и одну букву *Б*; взять n букв *А* и две буквы *Б* и т. д. Все эти $r+1$ случаев выписаны в табл. 12, в которой также

Таблица 12

Несовместимые события	Число последовательностей
n букв A, 0 букв $Б$	$\binom{n}{0}$
n букв A, 1 буква $Б$	$\binom{n+1}{1}$
n букв A, 2 буквы $Б$	$\binom{n+2}{2}$
n букв A, 3 буквы $Б$	$\binom{n+3}{3}$
. . . .	. . . .
n букв A, r букв $Б$	$\binom{n+r}{r}$

указаны соответствующие им количества слов. Для каждого случая эти количества слов вычислены по формуле (2) следствия 7.

Поскольку эти случаи взаимно исключают друг друга, общее число слов мы находим, применяя принцип сложения. Оно равно

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+r}{r}. \quad \square$$

Замечание. Эта сумма равна $\binom{n+r+1}{r}$, что можно показать последовательным применением правила Паскаля (теорема 5, § 3). Так, мы имеем

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}=\binom{n+2}{1},$$

$$\binom{n+2}{1}+\binom{n+2}{2}=\binom{n+3}{2},$$

$$\binom{n+3}{2}+\binom{n+3}{3}=\binom{n+4}{3}$$

и т. д. Окончательно на r-м шаге получим

$$\binom{n+r}{r-1}+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}. \quad \square$$

Упражнения к § 4

1. Найти число перестановок, образованных из всех букв слова *комиссия*.

2. Сколько различных десятизначных чисел можно получить, используя в их написании цифры 2233344455?

3. Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова *перестановка*? Сколько из них начинается с буквы *п* и оканчивается буквой *а*?

4. Сколькими способами можно разложить в один ряд 13 различных карт, если определенные 10 карт должны идти в заранее выбранном порядке?

5. Найти число различных способов, которыми можно выписать в один ряд шесть плюсов и четыре минуса.

6. Найти число способов, которыми можно выписать в один ряд девять троек и шесть пятерок так, чтобы никакие две пятерки не стояли рядом.

7. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа 123456789, при условии, что в каждой такой перестановке как все четные цифры, так и все нечетные цифры будут идти в возрастающем порядке?

8. Найти число всех возможных перестановок букв слова *зоология*. Сколько среди них таких, в которых три буквы *о* стоят рядом? Сколько таких, в которых в точности две буквы *о* стоят рядом?

9. В классе 12 девочек и 10 мальчиков. Сколькими способами можно построить их в одну шеренгу, если в ней как все девочки, взятые отдельно, так и все мальчики, взятые без девочек, должны стоять по росту?

10. Сколько различных маршрутов может избрать пешеход, решив пройти девять кварталов, — из них пять на запад и четыре на север?

11. Сколько чисел, больших чем 3 000 000, можно написать при помощи цифр 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3?

12. Сколькими способами можно расположить в один ряд пять красных мячей, четыре черных мяча и пять белых мячей так, чтобы мячи, лежащие на краях, были одного цвета?

Обзорные упражнения

1. Крыса бежит по лабиринту, который устроен так, что сначала она должна выбрать одну из двух дверей. За каждой из них ее ожидает по три двери, а за каждой из них — по четыре. Пройдя какую-либо дверь, крыса не может вернуться через нее обратно. Сколькими различными путями крыса может пройти лабиринт от начала до конца?

2. Металлург, изучающий сплавы, при проведении эксперимента может использовать 3 различных температурных режима,

6 различных значений времени остывания и 4 различные присадки меди. Выбор температурного режима, значения времени остывания и типа присадки полностью определяет эксперимент. Сколько различных экспериментов может провести металлург?

3. Сейф открывается при помощи цифрового замка, циферблат которого состоит из 100 клавиш с цифрами, расположенных по окружности. Для того чтобы открыть сейф, необходимо нажать какие-то 3 клавиши, причем известно, что между любыми двумя искомыми клавишами располагаются не менее десяти клавиш. Сколько комбинаций из трех клавиш необходимо перепробовать, чтобы заведомо открыть сейф?

4. В мастерской по изготовлению ключей есть 12 типов заготовок для ключей. Из каждой заготовки можно сделать ключ, вырезав выступ в пяти определенных местах, причем величина выступа на первом месте может принимать два значения, а на остальных местах — три значения. Сколько различных ключей может изготовить мастерская?

5. В распоряжении агрохимика есть шесть различных типов минеральных удобрений. Ему необходимо провести несколько экспериментов по изучению совместного влияния любой тройки минеральных удобрений. Сколько всего экспериментов ему придется провести?

6. Пусть в условиях предыдущего упражнения агрохимику не надо проводить эксперимента по изучению таких троек удобрений, в которые бы одновременно входили удобрения A и B. Сколько экспериментов ему придется провести в этом случае?

7. Вычислительная машина используется для изучения того, как решаются задачи. Для решения предлагаемой ей задачи машина может в каждой попытке использовать 10 программ решения, причем в одной попытке могут последовательно применяться несколько программ, но обязательно различных. Некоторая задача, предложенная машине, решается последовательным применением четырех из этих программ в определенном порядке. Каково наибольшее число попыток, каждая из которых состоит из применения четырех программ, которое придется сделать машине для решения этой задачи?

8. Исследователь, изучающий на машине проблему решения задач, предлагает машине задачу, правильное решение которой достигается последовательным выполнением 6 программ в определенном порядке. Теперь в распоряжении машины имеются две программы типа A, две программы типа B и две программы типа C. Исследователь составил список всевозможных последовательностей, в которых можно применять эти программы:

$$AABBCC,\ AABCBC,\ \ldots,\ CCBBAA.$$

В списке оказалось 88 последовательностей. Все ли последовательности вошли в список?

9. В соревнованиях по бейсболу две команды A и B играют между собой несколько игр до тех пор, пока какая-либо команда

не выиграет четырех игр. Составляется последовательность названий команд, выигрывающих игры (например, последовательность A, B, A, B, B, B означает, что 1-ю и 3-ю игры выиграла команда A, а 2-ю, 4-ю, 5-ю и 6-ю игры выиграла команда B). Сколько таких различных последовательностей можно составить?

§ 5. Биномиальная теорема

Выражения для целых положительных степеней бинома $(a+x)$, такие, как

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$

часто используются в алгебре. Кроме того, выражения этого типа встретятся нам в дальнейшем. Они также имеют непосредственное отношение к результатам, уже полученным в этой главе выше. Поэтому мы заинтересованы в нахождении закона или формулы, используя которые было бы легко получить все выражения подобного рода.

Конечно, мы всегда можем найти их обычным умножением. Но этот способ при росте показателя степени быстро становится крайне трудоемким. И после того, как мы покажем при помощи умножения, что

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4,$$

и примемся за вывод выражения для $(a+x)^5$, мы уже пожалеем, что в нашем распоряжении нет более удобного метода, нежели метод простого умножения многочленов. Если мы внимательно изучим выражения для $(a+x)^2$, $(a+x)^3$ и $(a+x)^4$, то придем к некоторым догадкам. Можно понять, как выглядят слагаемые в этих выражениях, даже не производя вычислений. Например, в выражении для $(a+x)^5$ будет $5+1$, или шесть, членов; если их выписать *без коэффициентов*, то мы получим

$$a^5, \quad a^4x, \quad a^3x^2, \quad a^2x^3, \quad ax^4, \quad x^5.$$

Заметим, что любой из этих членов представляет собой произведение пяти сомножителей, каждый из которых равен либо a, либо x. Мы видим, что любое слагаемое есть одночлен пятой степени относительно a и x. (Как известно, *степенью* одночлена относительно некоторых неизвестных называется сумма степеней этих неизвестных, входящих в данный одночлен.)

Продолжая подобным образом, мы видим, что выражение для $(a+x)^n$ содержит $n+1$ слагаемое; если выписать их без коэффициентов, то мы получим

$$a^n, \quad a^{n-1}x, \quad a^{n-2}x^2, \ldots, \quad a^{n-r}x^r, \quad \ldots, \quad x^n,$$

где каждое слагаемое представляет собой одночлен степени n относительно a и x. Но остается вопрос: как выглядят коэффициенты, с которыми эти одночлены входят в интересующее нас выражение? Почему в выражении для $(a+x)^4$ коэффициент при a^3x равен 4, а при a^2x^2 равен 6? Для того чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим процесс умножения подробнее.

Произведение различных биномов. Использование индексов может помочь нам уяснить, что происходит, когда мы перемножаем биномы. Рассмотрим следующие произведения:

$$(a_1+x_1)(a_2+x_2) = a_1a_2 + a_1x_2 + x_1a_2 + x_1x_2;$$

$$(a_1+x_1)(a_2+x_2)(a_3+x_3) = a_1a_2a_3 + \boxed{a_1a_2x_3} + \\ + \boxed{a_1x_2a_3} + \boxed{x_1a_2a_3} + a_1x_2x_3 + x_1a_2x_3 + \\ + x_1x_2a_3 + x_1x_2x_3.$$

Выше приведенные выражения иллюстрируют три принципа умножения:

(1) *степень* каждого слагаемого одночлена равна числу перемножаемых биномов;

(2) каждый одночлен представляет собой произведение, в которое входит в *точности одно* неизвестное из каждого из биномов-сомножителей (обратите внимание на индексы в правых частях выражения);

(3) все выражение представляет собой сумму таких одночленов, *полученных всеми возможными способами.*

Если в этих произведениях различных биномов мы опустим индексы и приведем подобные члены, мы получим выражения соответственно для $(a+x)^2$ и $(a+x)^3$. Заметим, что принципы (2) и (3) дают нам ключ к нахождению коэффициентов. Если, например, мы отберем члены, содержащие два a и один x, то увидим, что член a^2x встретится три раза, поэтому сопровождающий его коэффициент в выражении $(a+x)^3$ будет равен 3 (рассмотрите члены выражения, заключенные в рамку).

Попробуем применить эти три принципа для получения выражения для $(a+x)^4$. Так как

$$(a+x)^4=(a+x)(a+x)(a+x)(a+x),$$

то каждый одночлен в искомом выражении будет иметь степень 4 относительно a и x. Вот все возможные случаи:

$$a^4, \quad a^3x, \quad a^2x^2, \quad ax^3, \quad x^4.$$

Каждый одночлен получен при помощи выбора в точности одного слагаемого из всех четырех биномов-сомножителей. Для того чтобы получить первый член a^4, мы вовсе пренебрегаем буквой x и берем четыре a — по одному из каждого бинома. Ясно, что это можно сделать $\binom{4}{0}$, или одним, способом; следовательно, a^4 встретится в выражении только один раз, и коэффициент при a^4 будет равен 1. Чтобы получить второй член a^3x, мы берем один раз x из какого-то одного бинома и три раза a из трех оставшихся биномов. Это можно сделать $\binom{4}{1}$, или четырьмя, способами; поэтому член a^3x встретится 4 раза и коэффициент при нем будет равен 4. Аналогично член a^2x^2 можно получить $\binom{4}{2}$, или шестью, способами; член ax^3 — $\binom{4}{3}$, или четырьмя, способами; член x^4 — $\binom{4}{4}$, или одним, способом. Поэтому эти последние три члена будут иметь коэффициенты, равные соответственно 6, 4 и 1. Полное выражение для $(a+x)^4$ есть сумма всех перечисленных членов:

$$(a+x)^4=\binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3x+\binom{4}{2}a^2x^2+\binom{4}{3}ax^3+\binom{4}{4}x^4=$$
$$=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4.$$

Теперь мы попробуем обобщить предыдущие рассуждения.

Теорема 8. Биномиальная теорема. *Если n — целое положительное число, то*

$$\boxed{\begin{aligned}(a+x)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2+\ldots\\ \ldots+\binom{n}{r}a^{n-r}x^r+\ldots+\binom{n}{n}x^n.\end{aligned}} \qquad (1)$$

Доказательство. Каждый одночлен в выражении для $(a+x)^n$ имеет степень n относительно a и x. Поэтому, если пока не обращать внимания на коэффициенты, каждое слагаемое в выражении для $(a+x)^n$ имеет вид

$$a^{n-r}x^r, \quad \text{где} \quad r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Одночлен $a^{n-r}x^r$ получен выбором x из r биномов-сомножителей и выбором a из оставшихся $n-r$ сомножителей. Этот выбор можно сделать $\binom{n}{r}$ способами (см. теорему 3, § 3). Следовательно, одночлен $a^{n-r}x^r$ встретится $\binom{n}{r}$ раз и коэффициент при нем будет равен $\binom{n}{r}$. Поэтому общий вид (каждого) одночлена в выражении для $(a+x)^n$ можно записать так:

$$\binom{n}{r}a^{n-r}x^r,$$

а все выражение равно сумме всех таких членов. Если использовать знак суммирования (см. приложение II), то это выражение можно переписать так:

$$(a+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} x^r. \quad \square$$

Коэффициенты $\binom{n}{r}$ часто называют *биномиальными коэффициентами*.

Другой вид биномиальной формулы. Так как

$$\binom{n}{0} = 1; \qquad \binom{n}{1} = n;$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!};$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \text{ и т. д.,}$$

то биномиальную формулу можно также переписать в следующем виде:

$$\boxed{(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ldots + x^n.} \qquad (2)$$

Пример 1. *Раскрыть скобки в выражении* $(2+x)^4$.

Решение. Используя формулу (2), получим

$$(2+x)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 x + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}2^2\cdot x^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}2\cdot x^3 + x^4 =$$
$$= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4.$$

Пример 2. *Раскрыть скобки в выражении* $(1-2x^2)^5$.

Решение. Из формулы (2) следует

$$(1-2x^2)^5 = [1+(-2x^2)]^5 = 1 + 5(-2x^2) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(-2x^2)^2 +$$
$$+ \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(-2x^2)^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(-2x^2)^4 + (-2x^2)^5 =$$
$$= 1 - 10x^2 + 40x^4 - 80x^6 + 80x^8 - 32x^{10}.$$

Замечание. В этом выражении знаки членов чередуются, поскольку второй член бинома отрицателен. По аналогичной причине будут чередоваться знаки в выражении для $(a-x)^n$.

Пример 3. *Докажите, что*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Решение. Поскольку формула (1) пригодна для всех значений a и x, мы можем положить в ней $a=x=1$. Это дает

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}. \ \Box$$

Пример 4. *Докажите, что если nx близко к нулю, то*

$$(1+x)^n \approx 1+nx.$$

Решение. Требуемый результат немедленно следует из формулы (2), если мы положим в ней $a=1$ и опустим члены, в которые входят x^2, x^3 и более высокие степени x. Эти отбрасываемые члены будут:

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2; \qquad \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 \text{ и т. д.}$$

Их абсолютные значения соответственно меньше, чем абсолютные значения

$$\frac{n^2x^2}{2!}; \qquad \frac{n^3x^3}{3!} \text{ и т. д.,}$$

поскольку

$$n(n-1)<n^2, \qquad n(n-1)(n-2)<n^3 \text{ и т. д.}$$

Если nx близко к нулю, то эти высшие степени числа nx малы сравнительно с первой степенью nx. Поэтому мы имеем

$$\boxed{(1+x)^n \approx 1+nx.} \ \Box \qquad (3)$$

При решении упражнения 39 этого параграфа вам предстоит показать, что если $|nx|<1$, то приближение (3) дает ошибку, меньшую чем $(nx)^2$. Эта оценка ошибки показывает, что чем ближе nx к нулю, тем лучше наше приближение. Например, рассмотрим число

$$(1+0{,}003)^{20}.$$

Так как $x=0{,}003$ и $n=20$, то

$$(nx)^2=(0{,}06)^2=0{,}0036.$$

Следовательно, формула (3) дает приближение к $1{,}003^{20}$ с двумя верными цифрами после запятой:

$$1+20\,(0{,}003)=1{,}06.$$

Для значений nx, близких к нулю, формула (3)

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

так же хорошо подходит для нецелых значений n, как и для целых. Например,

$$(1+x)^{1/2} \approx 1+\frac{1}{2}x, \text{ если } x \text{ близко к нулю.} \qquad (4)$$

Пример 5. *Найти приближенно, чему равно* $\sqrt{4{,}02}$.

Решение. Преобразуя подкоренное выражение и используя (4), получаем

$$\sqrt{4{,}02}=2\sqrt{1{,}005}=2\,(1+0{,}005)^{1/2}\approx$$
$$\approx 2\,(1+0{,}0025)=2{,}005.$$

Упражнения к § 5

1. Какова степень каждого одночлена относительно p и q в выражении для $(p+q)^7$? Выпишите все эти одночлены без их коэффициентов, расположив их по возрастающим степеням q. Укажите общую формулу, охватывающую все эти одночлены?

2. Сколько слагаемых входит в выражение для $(m+n)^{100}$? Выпишите три первых члена этого выражения без их коэффициентов, располагая их по возрастающим степеням n.

3. В выражении для $(1+x)^{1000}$, расположенном по возрастающим степеням x, найдите (а) 200-й член, (б) коэффициент при 375-м члене, (в) коэффициент при x^{625}.

4. В выражении для $(a+x)^{100}$ выпишите, не упрощая, 50-й член. Чему равен 20-й член? Какой член содержит x^{60}?

5. Раскройте скобки в выражении $(q+p)^4$. Каковы значения каждого из слагаемых, если $p=1/2$ и $q=1/2$. Используйте биномиальную формулу для решения следующих примеров (численные выражения вычислите; в буквенных — раскройте скобки):

6. (а) $(1+b)^5$; (б) $(1{,}01)^5$.
7. (а) $(1+b)^5$; (б) $(0{,}98)^5$.
8. $(1+p)^7$.
9. $(1-3a)^4$.
10. $(1-x^2)^5$.
11. $(2+4m)^4$.
12. $(x+y)^6$.
13. $(3-6c)^5$.
14. $\left(\frac{1}{2}a+1\right)^4$.
15. $(p+q)^7$.
16. $(a+ax)^6$.
17. $(1-x^3)^5$.
18. $(x^2-x^3)^6$.
19. $(x-y)^5$.

Выпишите первые три члена следующих выражений:

20. $(p+q)^{50}$.
21. $(x-y)^{100}$.
22. $(1-a^2)^{40}$.
23. $(2x-3y)^6$.

Используйте биномиальную формулу для приближенного вычисления.

24. $1{,}002^{10}$.
25. $0{,}997^{20}$.
26. $1{,}004^5$.
27. $0{,}9998^{10}$.
28. $\sqrt{9{,}09}$.
29. $\sqrt[3]{8{,}024}$.
30. $\sqrt{26}$.
31. $\sqrt[3]{999}$.
32. $600^{3/4}$.
33. $1/\sqrt[5]{3120}$.

Найдите приблизительно, чему равны следующие выражения, если $|x|$ достаточно мало:

34. $\sqrt{1-2x}$.
35. $\sqrt[3]{1+6x}$.

36. $\sqrt{4+8x}$.

37. $\sqrt[3]{8-24x^2}$.

38. Пусть n — четное число. Используйте формулу (1) для доказательства следующего равенства:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n}=$$
$$=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{n-1}$$

39. Докажите, что если $|nx|<1$, то формула (4)

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

содержит ошибку, меньшую чем $(nx)^2$. (*Указание:*

$$\frac{1}{r!} \leqslant \frac{1}{2^{r-1}} \quad \text{при} \quad r \geqslant 1.)$$

40. Сколько различных членов содержит выражение для $(a+b+c)^n$ при $n=1$? При $n=2$? При $n=3$? В общем случае?

ГЛАВА III

ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО С ВЕРОЯТНОСТЬЮ: РАВНОВОЗМОЖНЫЕ ИСХОДЫ

§ 1. Введение. Некоторые опыты

Одним из самых первых понятий теории вероятностей является понятие равновозможности исходов некоторого опыта. Термин «равновозможность» заменяет здесь важное для нашей теории понятие «равновероятность». Идея этих двух понятий интуитивна. При подбрасывании монеты, например, кажется разумным предположить, что монета «одинаково» может упасть кверху гербом или цифрой; эти два исхода опыта — герб и цифра — рассматриваются как «равновозможные». Другими словами, мы считаем, что выпадение герба имеет такие же шансы осуществиться, как и выпадение цифры.

Игральной костью называется однородный куб, грани которого размечены точками следующим образом:

Большинство людей будет считать достаточно разумным представление о том, что при бросании кости выпадение одной грани столь же возможно, как и выпадение другой. Поэтому опыт с бросанием игральной кости имеет шесть «равновозможных» исходов: на верхней грани кости ожидается одна точка, две точки, три точки и т. д. Мы говорим, что для осуществления каждого из этих исходов имеется «один шанс из шести».

В обычной колоде из 52 игральных карт все карты таковы, что невозможно отличить одну из них от другой, если смотреть на них с изнанки (со стороны «рубашки»). Предположим, что мы тщательно тасуем колоду и после этого вытаскиваем из нее одну карту. Мы можем сказать, что каждая карта имеет такие же шансы быть вытянутой, как и любая другая, — один шанс из пятидесяти двух.

Что приводит нас к мысли о том, что при бросании монеты, при бросании игральной кости, при вытаскивании карты из тщательно перетасованной колоды все исходы соответствующих опытов равновозможны? Нас приводят к этому симметричность и однородность монеты или кости и одинаковость карт. Если бы центр тяжести кубика располагался ближе к одной его грани, то выпадение противоположной грани было бы более возможно, и шесть исходов опыта не были бы равновозможными. Опыты с обычными монетами, игральными костями, картами поддерживают наше убеждение в том, что выпадение герба происходит столь же часто, как и выпадение цифры, что выпадение одной грани игрального кубика происходит столь же часто, как выпадение любой другой, что при случайном вытягивании карты из колоды какая-либо одна карта появляется столь же часто, как и любая другая. Поэтому оба рассуждения — как основанное на симметричности или одинаковости, так и основанное на опытах с реальными физическими объектами — поддерживают мысль о равновозможности разных исходов такого рода экспериментов.

Дж. Е. Керрих[1]) провел эксперимент с подбрасыванием монеты, когда он был интернирован в лагере во время второй мировой войны. В десяти сериях, каждая из которых состояла из 1000 подбрасываний, он нашел, что число выпадения гербов равнялось: 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529. Мы видим, что эти числа группируются вокруг 500, хотя

---

[1]) Kerrich J. E., «An Experimental Introduction to the Theory of Probability», Belgisk Import Co. Copenhagen.

ни одно из них в точности не равно 500. Для того чтобы проверить, насколько теория соответствует фактам, важно изучить результаты подобных экспериментов с физическими объектами и сравнить эти результаты с теоретическими. Крайне важно по опыту знать, как соотносятся математическая теория и события в реальном мире. По этой причине мы будем предлагать вам некоторые опыты, которые каждый может выполнить сам.

Для того чтобы оценить важность экспериментальной проверки теоретических рассуждений, рассмотрим опыт с подбрасыванием двух монет. Говорят, что математик Даламбер рассуждал так: есть три возможных исхода опыта: (а) выпало два герба, (б) выпали один герб и одна цифра, (в) выпали две цифры. Он думал, что эти три исхода равновозможны. Если бы это было верно, то каждый из них встречался бы приблизительно в 1/3 всех возможных исходов. Перед тем как читать дальше, предлагаем вам выполнить упражнение 1 в конце этого параграфа.

В табл. 13 показан другой путь решения этой задачи. Этот путь дает нам четыре возможных исхода опыта, а не три. Если эти четыре случая равновозможны, мы должны ожидать, что выпадение одного герба и одной цифры встретится приблизительно в два раза более часто, чем выпадение двух гербов или двух цифр, поскольку случаи 2 и 3 оба соответствуют выпадению одного герба и одной цифры.

Таблица 13

Бросание двух монет

Случай	Первая монета	Вторая монета
1	Герб	Герб
2	Герб	Цифра
3	Цифра	Герб
4	Цифра	Цифра

Можно ли при помощи одних только рассуждений решить вопрос о том, какой из этих двух анализов задачи о бросании двух монет правилен? Возможно, да. Конечно, здесь могут быть разногласия: одни выберут «три равновозможных исхода», другие — «четыре равновозможных исхода», Когда мы несколько больше продвинемся в изучении теории вероятностей, мы обнаружим, что решение с «четырьмя равновозможными исходами» соответствует предположению о независимости исхода подбрасывания первой монеты от исхода подбрасывания второй. А это предположение по мнению большинства специалистов вполне соответствует фактам.

Понятие о «равновозможных исходах опыта» используется в теории вероятности в следующих четырех важных случаях:

(1) Для описания физических экспериментов, подобных бросанию монеты.

(2) Для того чтобы получить некоторые факты, которые затем можно сравнить с экспериментальными данными. Мы можем не верить, что некий опыт удовлетворяет схеме «равновозможных исходов», но если такое предположение сделано, то возможно сделать выводы из него и затем экспериментально проверить эти выводы. Например, опыт с подбрасыванием двух монет, выполненный 50 раз, предрешает выбор между схемами, отвечающими трем или четырем равновозможным исходам.

(3) Для того чтобы получить удовлетворительное приближение к истинным результатам в решении таких задач, где, как мы заранее знаем, разные исходы опыта не являются равновозможными. Например, несмотря на то что мальчиков рождается больше, нежели девочек, мы часто допускаем, что каждый новорожденный имеет одинаковые шансы оказаться мальчиком или девочкой, и для многих приложений это допущение вполне приемлемо.

(4) Для того чтобы получить случайную выборку в статистических исследованиях и других экспериментальных работах. Изучение сведений, относя-

щихся к группе объектов, выбранных случайным образом из некоторой совокупности, часто позволяет охарактеризовать всю совокупность, тогда как анализ данных, касающихся объектов, выбранных не строго случайным образом, приводит к различным ответам.

Понятие об эксперименте. Мы используем термин *эксперимент* для того, чтобы описать опыты, подобные бросанию одной или нескольких монет, бросанию игральной кости, вытаскиванию карты из колоды. Множество более серьезных опытов связано с каждым медицинским или научным исследованием, как, например, поисками вакцины против полиомиелита, изучением причин рака и поисками средств борьбы против него, исследованиями по генетике Грегора Менделя, физиологическими опытами Павлова и синтезом пенициллина Шиханом. В этих экспериментах трудно представить все возможные исходы и уж совсем нет оснований ожидать, что эти исходы будут равновозможными.

Однако почти все серьезные эксперименты включают в себя наблюдения или измерения, при истолковании которых можно использовать приложения теории вероятностей или статистики. Мы будем использовать термин «эксперимент» для описания любого действия, которое возможно повторить, не изменяя его условий. Обычно точный результат таких действий невозможно предсказать с уверенностью. Мы ограничимся рассмотрением экспериментов, которые имеют конечное число возможных исходов; в этой же главе мы будем иметь дело лишь со случаем равновозможных исходов эксперимента.

Например, выбор 3 человек из данных 30 есть «эксперимент», который может привести к выбору какого-то одного из $\binom{30}{3}$, или 4060, сочетаний из 30 человек по 3. Утверждение о «случайном» выборе трех человек означает, что каждое сочетание имеет 1 шанс из 4060 быть выбранным.

Вероятность: мера случайности. Хотя мы использовали это слово значительно раньше, лишь здесь мы введем слово «вероятность» как специальный термин, который получит теперь строгое определение, позволяющее использовать его при рассмотрении экспериментов, включающих элемент «случайного».

Опыты, которые мы обсуждали до этого, подсказывают нам метод количественного определения шансов реализации некоторого определенного события. Рассмотрим, например, подбрасывание монеты. На повседневном языке мы скажем, что осуществление выпадения герба имеет «один шанс из двух»; на математическом языке мы скажем, что «вероятность выпадения герба равна $1/2$». Символически это записывается так:

$$P(\text{герб}) = \frac{1}{2}.$$

Подобным же образом при бросании игральной кости грань, отмеченная шестью точками, имеет один шанс из шести оказаться наверху; поэтому мы скажем, что «вероятность выпадения шести очков равна $1/6$». Символически это запишется так:

$$P(\text{шесть очков}) = \frac{1}{6}.$$

Аналогично, когда мы вытаскиваем карту из тасованной колоды, содержащей 52 карты, мы имеем

$$P(\text{туз червей}) = \frac{1}{52}.$$

А когда мы случайно отбираем трех человек из данных 30, вероятность отобрать трех определенных лиц A, B и C равна

$$P(A,\ B \text{ и } C) = \frac{1}{4060}.$$

Вообще мы используем символ

$$P(\ldots..)$$

для обозначения «вероятность .....», причем вместо точек здесь следует вписать название любого исхода, вероятность которого нас интересует.

В качестве следующего примера рассмотрим лотерею, в которой разыгрывается один приз и имеется десять лотерейных билетов. На каждом из этих билетов пишется имя участника, после чего все билеты тщательно перемешивают в коробке и один билет вынимают из нее наугад. Тот, чье имя написано на этом билете, выигрывает приз.

Тогда если имя *Джон* написано только на одном билете, то шансы Джона выиграть приз равны 1 из 10, поскольку все исходы лотереи равновозможны. Поэтому мы говорим, что

$$P(\text{выиграл Джон}) = \frac{1}{10}.$$

Аналогично, если имя Джона написано на 7 билетах, его шансы выиграть равны 7 из 10, и

$$P(\text{выиграл Джон}) = \frac{7}{10}.$$

Общая идея заключается в выделении из всего множества равновозможных исходов определенного подмножества «благоприятных исходов». Затем мы определяем вероятность рассматриваемого исхода по следующему правилу:

$$P(\text{благоприятный исход}) = \frac{\text{Число благоприятных исходов}}{\text{Число всех возможных исходов}}.$$

Этот метод определения меры благоприятных исходов, которая называется их *вероятностью*, сразу приводит к определенным следствиям: так, например, если множество всех возможных исходов не содержит ни одного благоприятного исхода, то

$$P(\text{благоприятный исход}) = 0;$$

если же все возможные исходы благоприятны, то

$$P(\text{благоприятный исход}) = 1.$$

Отсюда же следует, что

$$0 \leqslant P(\text{благоприятный исход}) \leqslant 1.$$

Это вполне совпадает с нашими интуитивными ощущениями. Если имени Джона нет ни на одном билете, то у него нет шансов выиграть приз и P(выиграл Джон) = 0; если его имя написано на всех билетах, то он выиграет наверняка и P (выиграл Джон) = 1.

Число, названное нами вероятностью благоприятного исхода, должно, как нам интуитивно кажется, приблизительно равняться средней частоте осуществлений этого исхода при достаточно большом количестве повторений эксперимента.

Пример 1. *Четыре грани обычной игральной кости окрашены в красный цвет, а остальные две грани — в зеленый. Кость бросается один раз. Чему равна вероятность того, что верхняя грань окажется* (а) *красной;* (б) *зеленой?*

Решение. Поскольку выпадения всех шести граней равновозможны, вероятность выпадения красной грани равна

$$\frac{\text{Число благоприятных исходов}}{\text{Число всех возможных исходов}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Поэтому мы получаем

$$P(\text{красная грань}) = \frac{2}{3}.$$

Подобным же образом,

$$P(\text{зеленая грань}) = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что ответ не равен $1/2$. Эти два исхода — «выпадение красной грани» и «выпадение зеленой грани» — не равновозможны.

Понятие «события». Иногда приходится рассматривать множество исходов, соответствующих некоторому одному событию. В примере 1 мы может рассматривать выпадение любой красной грани как исход, соответствующий событию «верхняя грань красная». Тот метод определения вероятностей, которому посвящена настоящая глава, можно описать в терминах событий.

Определение 1. Вероятность события. Если эксперимент может привести к любому одному из n различных равновозможных исходов и если в точности m из этих исходов соответствуют событию A, то *вероятность события* A равна

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}.} \tag{1}$$

Замечание. Событие «не A» мы будем обозначать через $\bar{A}$. Из предыдущего определения немедленно следует, что вероятность события «не A» равна

$$\boxed{P(\bar{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A).} \tag{2}$$

Шансы. Относительные возможности событий A и $\bar{A}$ по сравнению друг с другом часто выражаются термином *«шансы в пользу A»*:

$$\boxed{\text{Шансы в пользу } A=\frac{P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{m/n}{(n-m)/n}=\frac{m}{n-m}.} \tag{3}$$

Поэтому для кости с четырьмя красными гранями и двумя зелеными гранями шансы в пользу выпадения красной грани равны $^4/_2$, или $^2/_1$. Если мы знаем вероятности событий A и $\bar{A}$, то выражение (3) определяет *шансы в пользу A* (иногда их называют также *шансы против $\bar{A}$*).

С другой стороны, если мы знаем, что шансы в пользу A равны a/b, то

$$\boxed{P(A)=\frac{a}{a+b}; \quad P(\bar{A})=\frac{b}{a+b}.} \tag{4}$$

Пример 2. *Из обычной колоды в 52 игральные карты выбирается наугад одна карта. Найти вероятность того, что эта карта будет либо тузом, либо королем, либо дамой, либо валетом, либо десяткой, и шансы в пользу этого события.*

Решение. Число возможных исходов опыта извлечения одной карты равно 52. В каждой из четырех мастей есть пять указанных карт — всего 20 карт. Таким образом, мы имеем 20 благоприятных исходов опыта, отвечающих событию «выбрана интересующая нас карта». Если колода хорошо перетасована и карта выбирается наугад, то каждая из 52 карт имеет равную возможность оказаться выбранной. Следовательно,

$$P(\text{выбрана нужная карта}) = \frac{m}{n} = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}.$$

Шансы в пользу того, что выбрана нужная карта, равны 5 к 8, поскольку

$$P(\text{выбрана неподходящая карта}) = 1 - \frac{5}{13} = \frac{8}{13} \text{ и}$$

$$\frac{5/13}{8/13} = \frac{5}{8}.$$

Иначе говоря, шансы против появления нужной нам карты равны 8 к 5. Мы получим такой же результат, заметив, что

$$\text{Шансы в пользу нужной карты} = \frac{\text{Число нужных карт}}{\text{Число остальных карт}} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8},$$

и затем вычислив

$$P(\text{выбрана нужная карта}) = \frac{5}{5+8} = \frac{5}{13}.$$

Упражнения к § 1

1. Выполните следующий эксперимент. Бросьте две монеты 50 раз и выпишите все исходы этих бросаний — два герба, один герб и одна цифра, две цифры. Вычислите частоту всех трех исходов. Подтверждают ли ваши вычисления рассуждение Даламбера о том, что эти исходы равновозможны?

2. Бросается игральная кость. Какова вероятность выпадения трех очков? Более чем трех очков? Менее чем трех очков? Четного числа очков? Нечетного числа очков?

3. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна трем? Четырем? Одиннадцати?

4. Бросаются две монеты. Какова вероятность, что обе они упадут кверху гербом? Одна упадет кверху гербом, а другая кверху цифрой?

5. В классе учатся 25 девочек и 15 мальчиков. По жребию выбирается один из них. Какова вероятность того, что выбранным окажется мальчик?

6. Урна содержит 10 белых и 8 черных шаров. Из урны наугад выбирается один шар. Какова вероятность того, что он будет черным? Что он будет белым?

7. В семье имеется трое детей. Какова вероятность того, что все они мальчики? (Предполагается, что вероятность рождения мальчика равна вероятности рождения девочки.)

8. Выполните опыт с бросанием монеты 100 раз, отмечая все выпадения гербов. Вычислите относительную частоту выпадения герба. Сравнимы ли ваши результаты с вероятностью выпадения герба при однократном бросании монеты?

9. Из хорошо тасованной колоды, содержащей 52 карты, наугад выбирается одна карта. Найти вероятность того, что она окажется бубновой масти? Что она окажется тузом? Что она будет черной масти?

10. Найдите ошибку в следующей процедуре: чтобы определить вероятность того, что случайно выбранный американский гражданин живет в одном определенном штате, число благоприятных случаев (1) делится на общее число штатов (50); при этом получается ответ 1/50.

11. Из букв слова *уравнение* наугад выбирается одна буква. Какова вероятность, что эта буква будет гласной? Согласной? Что это будет буква *щ*?

12. Некто купил один билет лотереи, в которой разыгрывается 10 призов и продано 120 билетов. Какова вероятность, что он выиграет приз? Что он не выиграет приза?

13. В сумке лежат 10 мячей, пронумерованных от 1 до 10. Наугад вынимаются два мяча. Какова вероятность того, что это будут мячи с номерами 7 и 3?

14. Цифры от 1 до 9 включительно пишутся на листках бумаги, которые затем складываются в ящик и тщательно перемешиваются. Наугад вынимается один листок. Какова вероятность того, что число, написанное на этом листке, четное? Нечетное? Простое? (*Замечание.* Число 1 не является простым.) Делится на 3?

15. Пять мячей, пронумерованных цифрами от 1 до 5, положены в ящик, после чего они вынимаются один за другим случайным образом. Какова вероятность того, что их будут вынимать в следующем порядке: 1, 2, 3, 4, 5?

16. На книжной полке в случайном порядке стоит энциклопедический справочник, состоящий из шести томов. Какова вероятность того, что хотя бы один из томов этого справочника не стоит на своем месте?

17. Трехзначное число образовано случайным выбором трех неповторяющихся цифр из числа цифр 1, 2, 3, 4, 5. Какова вероятность того, что это число четное? Нечетное? Что оно делится на 5?

§ 2. Пространство событий, отвечающее некоторому эксперименту

Мы обсудили понятие эксперимента и изучили несколько простых экспериментов с равновозможными исходами. Теперь мы введем важное понятие «пространства событий, отвечающее данному эксперименту». Поясним это понятие на следующем примере.

Рассмотрим эксперимент с бросанием двух монет: дайма и квотера *). Как можно выписать все возможные исходы этого эксперимента? Для этого можно придумать множество способов — и выбираемый нами способ обычно зависит от того, что именно нас в этом эксперименте интересует. Предположим, например, что нас интересует, выпадет ли каждая монета кверху гербом *Г* или цифрой *Ц*. Тогда множество

$$S = \{ГГ,\ ГЦ,\ ЦГ,\ ЦЦ\}, \tag{1}$$

где первая буква в паре букв обозначает исход бросания дайма, а вторая буква — исход бросания квотера, представляет собой список всех возможных исходов нашего эксперимента. (Пара букв *ГЦ* означает, что дайм упал гербом кверху, а квотер — цифрой кверху.) Каждый исход эксперимента соответствует в точности одному элементу множества (1).

В другом случае нас может интересовать только *число* выпавших гербов или цифр. Если мы договоримся обозначать выпадение a гербов и b цифр упорядоченной парой (a, b), то полный список всех возможных исходов эксперимента будет представлять собой множество

$$S_1 = \{(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)\}. \tag{2}$$

Каждый исход эксперимента соответствует в точности одному элементу множества (2).

---

*) См. примечание к стр. 54.

Возможно также, что нас занимает лишь вопрос о том, упали ли наши монеты одинаково (т. е. обе гербом кверху или обе цифрой кверху) или различно. В этом случае список всех возможных исходов опыта задается множеством

$$S_2 = \{O,\ P\}, \tag{3}$$

где буква O означает, что монеты упали одинаково, а буква P — что различно. Как и раньше, каждому исходу эксперимента соответствует в точности один элемент множества (3).

Следовательно, каждое из множеств (1), (2) и (3) дает нам список, соответствующий всем возможным исходам эксперимента. Каждое такое множество называется «пространством событий, отвечающих данному эксперименту»; вот почему мы говорим об «*определенном* пространстве событий, отвечающих указанному эксперименту», а не просто о «пространстве событий». Для того чтобы выписать все возможные исходы эксперимента, можно использовать больше чем одно пространство событий.

Замечание. S — более основательное пространство событий, нежели S_1 или S_2, поскольку из него можно извлечь больше информации. Если мы знаем, какой элемент S реализовался в результате нашего эксперимента, то мы можем сказать, какие исходы реализовались в пространствах событий S_1 и S_2; однако обратное верно далеко не всегда.

Определение 2. Пространство событий, отвечающее эксперименту; элементарное событие. *Пространством событий, отвечающим данному эксперименту,* называется произвольное множество S, обладающее следующим свойством: каждому исходу эксперимента соответствует в точности один элемент этого множества. Каждый элемент множества S называется *элементарным событием.*

Пример 1. Семья с тремя детьми. *Для того чтобы изучить распределение мальчиков и девочек во* *всех семьях, имеющих трех детей, составлен список этих семей. Какое пространство событий отвечает эксперименту, заключающемуся в выборе одной семьи?*

Решение. Будем буквой *М* обозначать мальчика, а буквой *Д* обозначать девочку. Если мы используем тройки букв для указания пола старшего, среднего и младшего ребенка в указанном порядке,

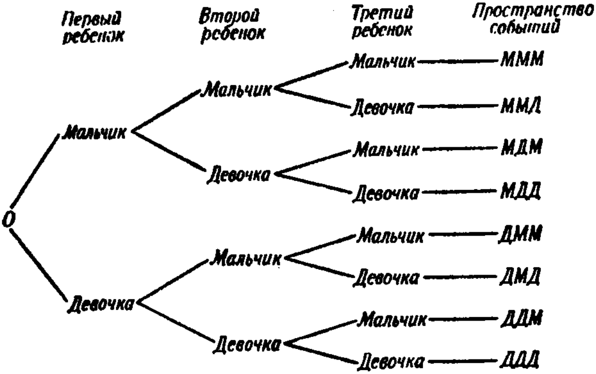


Рис. 4. Дерево для семей с тремя детьми.

то следующее множество будет пространством событий для нашего эксперимента:

$$\{ММM,\ ММД,\ МДМ,\ ДММ,\ МДД,\ ДМД,\ ДДМ,\ ДДД\}.$$

Тройка *ДММ*, например, представляет исход «старший ребенок — девочка, а средний и младший — мальчики». Другое пространство событий получается при выписывании числа мальчиков в семье, имеющей трех детей:

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

Заметим, что удобным методом выписывания всех возможных исходов эксперимента является построение «дерева» (см. рис. 4).

Пример 2. *Числа* 1, 2, 3 *и* 4 *пишутся на четырех листках бумаги. После этого листки кладутся в шляпу* *и перемешиваются. Человек с завязанными глазами вынимает один за другим два листка. Описать пространство событий, отвечающее этому эксперименту.*

Решение. Положим, что каждому исходу эксперимента соответствует упорядоченная пара (x, y), где x есть число, написанное на первом листке, а y — число, написанное на втором листке. x и y связаны следующими ограничениями:

$$1 \leqslant x \leqslant 4, \quad 1 \leqslant y \leqslant 4, \quad x \neq y.$$

Пространство событий выписано в табл. 14.

Таблица 14

Пространство событий для двух нумерованных листков

y: номер на втором листке

x: номер на первом листке

$x \backslash y$	1	2	3	4
1		(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)		(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)		(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	

Упражнения к § 2

1. Бросается монета, а после этого бросается игральная кость. Выпишите какое-либо пространство событий для этого эксперимента. Постройте соответствующее дерево.

2. Бросаются три монеты. Выпишите два пространства событий, отвечающих этому эксперименту.

3. Из букв слова *плюс* наугад выбираются две буквы одна за другой. Выпишите какое-либо пространство событий для этого эксперимента.

4. У мальчика в кармане есть цент, никель, дайм и квотер *). Он вынимает из кармана одну за другой две монеты. Выпишите пространство событий. Постройте соответствующее дерево.

5. Предположим, что вы собираетесь провести обследование семей, имеющих двух детей. Вы отмечаете пол каждого ре-

*) См. примечание к стр. 54.

бенка в порядке их старшинства. Например, если первый ребенок в семье мальчик, а второй — девочка, то вы записываете МД. Это одно элементарное событие пространства событий для вашего эксперимента. Выпишите все элементарные события этого пространства.

6. Выпишите пространство событий, отвечающее обследованию упражнения 5, проводимому для семей, имеющих четырех детей. Из скольких элементарных событий состоит это пространство? Сколько элементарных событий соответствует семьям, имеющим трех мальчиков и одну девочку? Сколько элементарных событий соответствует семьям, в которых первый ребенок девочка?

7. Бросаются две игральных кости — одна черная, а другая белая. Отмечается число очков, выпавших на каждой кости. Выпишите какое-либо пространство событий, отвечающее этому эксперименту. (*Замечание*. Следует учитывать, что кости различны.)

8. Чертежная линейка в поперечном сечении представляет собой равносторонний треугольник. У двух таких линеек — красной и зеленой — грани пронумерованы числами 1, 2 и 3. Эти линейки бросаются на пол, после чего записываются числа, отвечающие их нижним граням. Постройте таблицу, в которую входят все элементарные события для этого эксперимента.

9. По жребию из 25 радиоприемников отбираются 3 и затем проверяются. Проверка показывает, исправен ли приемник (*И*), или неисправен (*Н*). Выпишите пространство событий, отвечающее этому эксперименту.

10. Из 5 различных книг *A*, *B*, *C*, *D* и *E* отбираются 3 книги. Выпишите пространство событий, отвечающее этому эксперименту. Сколько элементарных событий соответствуют наборам отобранных книг: (а) включающих *A*; (б) не включающих *A*; (в) включающих *B* и *C*; (г) включающих либо *D*, либо *E*?

11. Два шара — красный и синий — помещают в два ящика, занумерованных числами 1 и 2. Выпишите соответствующие этому эксперименту пространства событий, если: (а) оба шара можно положить в один ящик; (б) никакой ящик не должен быть пустым.

12. Наугад выбирается одна буква из числа образующих слово *формула*. Какие из следующих множеств являются пространствами событий для рассматриваемого эксперимента и какие не могут считаться пространствами событий:

(а) {*ф*, *о*, *р*, *м*, *у*, *л*, *а*}; (г) {гласная, *ф*, *р*, *м*, *л*};

(б) {*р*, *м*, *у*, *л*, *а*}; (д) {гласная, согласная}?

(в) {согласная, *у*};

13. Ящик содержит некоторое количество шаров, одинаковых во всем, за исключением цвета: часть из них красные, часть — белые, остальные синие. Один за другим вынимаются

два шара. Какое пространство событий отвечает этому эксперименту? Сколько элементарных событий соответствует наборам из двух шаров одного цвета? Сколько элементарных событий соответствует наборам из разноцветных шаров? Сколько соответствуют наборам из красного *и* синего шаров? Сколько соответствуют наборам из красного *или* синего шаров?

14. В пространстве событий упражнения 7, сколько элементарных событий соответствуют тому, что сумма очков больше 10? Что сумма очков меньше 5? Что сумма очков четная? Что на черной кости выпало более 5 очков. Что на черной кости выпало более 5 очков, а на белой кости — менее 3 очков? Что либо на белой кости выпало четное количество очков, либо на черной кости выпало 3 очка?

§ 3. Вероятности в конечном пространстве событий

После того как выполнен эксперимент, мы, возможно, захотим узнать вероятности различных исходов эксперимента или событий, с ним связанных. Часто эти вероятности можно вычислить, выписав пространство событий с равновозможными элементарными событиями и подсчитав число элементарных событий, соответствующих интересующему нас исходу. Следующие примеры иллюстрируют этот метод. Поскольку в оставшейся части этой главы мы часто будем обращаться к этим примерам, их следует разобрать с особой тщательностью.

Пример 1. Две игральные кости. *Эксперимент состоит в бросании двух обычных игральных костей и в наблюдении за числом выпавших на их верхних гранях очков.*

Обсуждение. Мы будем считать, что кости различны: например, одна кость *красная*, а другая *белая*. Для наших целей подошел бы и эксперимент с двумя бросаниями одной кости; при этом первое бросание соответствовало бы бросанию красной кости, а второе — бросанию белой кости. В табл. 15 выписаны все элементарные события, составляющие пространство событий этого эксперимента.

В оставшейся части главы мы будем часто обращаться к табл. 15, поэтому сразу же заложите листом бумаги эту страницу, чтобы в дальнейшем не терять время на ее поиск.

Таблица 15

Пространство событий для эксперимента с бросанием двух костей

Исход для белой кости (б)

Исход для красной кости (к)	к \ б	1	2	3	4	5	6
	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Каждая *строка* таблицы соответствует фиксированному значению $к$ — числа очков, выпавших на *красной* кости; каждый *столбец* соответствует фиксированному значению $б$ — числа очков, выпавших на *белой* кости. Например, пара (2, 4) во второй строке и четвертом столбце отвечает событию «на красной кости выпало 2 очка, на белой кости выпало 4 очка». В целом пространство событий этого эксперимента S есть множество упорядоченных пар $(к, б)$, где $к$ и $б$ принимают значения 1, 2, 3, 4, 5 или 6 каждое:

$$S = \{(к, б): 1 \leqslant к \leqslant 6,\ 1 \leqslant б \leqslant 6\}. \tag{1}$$

Даже не выписывая полностью все возможные исходы опыта, мы видим из (1), что их число равно 6×6, или 36. Мы полагаем, что игральные кости достаточно однородны и бросаются «наугад», так что эти исходы равновозможны. Поэтому каждому элементарному событию данного пространства событий мы приписываем вероятность $^1/_{36}$.

Как только построено отвечающее рассматриваемому эксперименту пространство событий и определены вероятности элементарных событий, мы можем ответить, например, на следующие вопросы:

(1) Чему равна вероятность дубля? (Дублем называется совпадение числа очков, выпавших на каждой кости.)

(2) Чему равна вероятность того, что число очков, выпавших на белой кости, по крайней мере на 3 больше, чем число очков, выпавших на красной кости?

(3) Чему равна вероятность того, что сумма $к+б$ равна 10?

Часто бывает полезным перевести словесные описания некоторых событий, например «выпадение дубля на костях», на язык алгебраических формул, подобных формуле «$к=б$». Далее мы будем рассматривать подмножество пространства событий, элементы которого удовлетворяют выписанному алгебраическому соотношению. Обычно это соотношение имеет вид равенства или неравенства. После этого нам остается лишь проделать элементарную выкладку. Рас-

Таблица 16

События и вероятности в эксперименте с бросанием двух костей

Номер вопроса	Словесное описание	Алгебраическое соотношение	Соответствующее множество элементарных событий	Вероятность
1	Выпадение дубля	$б=к$	(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
2	Число очков на белой кости по крайней мере на три больше числа очков на красной кости	$б\geqslant к+3$	(1,4); (1,5); (1,6); (2,5); (2,6); (3,6)	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
3	Сумма очков на костях равна 10	$б+к=10$	(4,6); (5,5); (6,4)	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

смотрим, например, три вопроса, которые мы поставили в связи с опытом бросания двух костей. В табл. 16 выписаны отвечающие этим трем вопросам словесные описания, их алгебраические эквиваленты, получающиеся подмножества и искомые вероятности.

Замечание. Описанная процедура используется для нахождения вероятностей различных исходов эксперимента. Опишем последовательные этапы этой процедуры:

(1) *Построение пространства событий S.* Пространство событий можно выписать так, как это сделано в табл. 15, или указать при помощи записи, подобной выражению (1).

(2) *Определение вероятностей элементов пространства событий (элементарных событий).* Если пространство событий содержит n равновозможных исходов, то каждое элементарное событие получает вероятность $1/n$. Сумма вероятностей всех элементарных событий данного пространства событий должна равняться 1.

(3) *Нахождение вероятности события E сложением вероятностей элементарных событий, отвечающих подмножеству пространства событий S, соответствующих событию E.* Поскольку пустое множество вовсе не имеет элементов, его вероятность равна нулю. (О «пустом множестве» см. приложение 1, § 3, стр. 379.)

Пример 2. *Для лечения некоторой хронической болезни применяются пять лекарств a, b, c, d, e. Врач хочет провести сравнительное исследование трех из этих пяти лекарств. Три исследуемых лекарства врач отбирает из данных пяти случайным образом. Чему равна вероятность того, что (а) лекарство a будет исследовано; (б) будут исследованы лекарства a и b; (в) будет исследовано по крайней мере одно из лекарств a и b?*

Решение. В табл. 17 выписаны все $\binom{5}{3}$, или 10, возможных наборов из 5 лекарств по 3. Для удобства

Таблица 17

S для примера с лекарствами

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
abc	*abd*	*abe*	*acd*	*ace*	*ade*	*bcd*	*bce*	*bde*	*cde*

дальнейших ссылок все элементарные события пронумерованы.

Далее, мы приписываем вероятность $^1/_{10}$ каждому элементарному событию, поскольку мы считаем, что все 10 наборов равновозможны. После этого легко подсчитать, что вероятность события (а) равна 6/10, ибо событию «отобрано лекарство *a*» отвечают 6 наборов из 10.

Аналогично вероятность того, что в число отобранных лекарств попадут оба лекарства *a* и *b*, равна 3/10, поскольку в точности 3 набора содержат как *a*, так и *b*. Наконец, вероятность того, что в число отобранных попадет по крайней мере одно из лекарств *a* или *b*, равна 9/10: ведь только одно десятое элементарное событие не содержит ни *a*, ни *b*.

Замечание. Мы можем найти эти вероятности и другим способом, используя результаты гл. II. Например, три лекарства из пяти без повторения можно отобрать $\binom{5}{3}$ способами и $\binom{4}{2}$ способами можно отобрать их так, чтобы лекарство *a* входило в набор. Следовательно,

$$P\ (\text{лекарство } a \text{ исследовано}) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}.$$

Так же можно найти и остальные вероятности.

Упражнения к § 3

Упражнения 1—7 относятся к эксперименту с бросанием двух костей. При их решении пользуйтесь табл. 15.

1. Чему равна вероятность невыпадения дубля?

2. Чему равна вероятность того, что число очков на одной кости в два раза больше числа очков на другой кости?

3. Чему равна вероятность того, что на одной кости выпало 5 очков, а на другой — меньше 5 очков?

4. Чему равна вероятность того, что на белой кости выпало меньше трех очков, а на красной кости — больше трех очков?

5. Вычислите:

(а) $P(к + б = 6)$; (г) $P(к + б > 9)$;

(б) $P(к + б = 8)$; (д) $P(k \geqslant б + 4)$.

(в) $P(к + б < 5)$;

6. Найдите алгебраические условия, описывающие следующие события: (а) невыпадение дубля, (б) число очков на красной кости на 2 меньше числа очков на белой кости, (в) число очков на белой кости по крайней мере на 2 больше, чем число очков на красной кости, (г) число очков на красной кости в два раза больше числа очков на белой кости.

7. Дайте словесное описание следующим событиям, выраженным алгебраическими соотношениями:

(а) $к = 3б$; (в) $к \neq б$; (д) $б = к^2$;

(б) $к - б = 1$; (г) $к + б > 8$; (е) $к \geqslant б$.

8. Рассмотрим пространство событий упражнения 4 к § 2. Ответьте на следующие вопросы: (а) Чему равна вероятность того, что обе монеты серебряные?* (б). Чему равна вероятность того, что мальчик вынул менее 20 центов? (в) Менее 15 центов? (г) Более 15 центов? (д) Что число, выражающее ценность (в центах) извлеченных монет, простое? (е) Что это число делится на 10?

9. В упражнении 6 из § 2 предположим, что все элементарные события пространства событий имеют одинаковые вероятности. Чему равна вероятность того, что в семье, имеющей четырех детей, первые два ребенка девочки? Что трое детей мальчики и лишь один ребенок девочка? Что в семье имеются два мальчика и две девочки?

10. В упражнении 8 из § 2 предположим, что все элементарные события пространства событий имеют равные вероятности. Пусть $к$ обозначает номер нижней грани красной линейки, а $з$ — номер нижней грани зеленой линейки. Найдите:

(а) $P(к = з)$; (г) $P(к \neq з)$;

(б) $P(к + з > з)$; (д) $P(к = з^2)$.

(в) $P(к > з)$;

11. В старинной индейской игре Тонг два игрока одновременно показывают друг другу либо один, либо два, либо три пальца на правой руке. Если для каждого игрока равновозможно

*) Серебряные монеты — дайм и квотер. — *Прим. перев.*

показать один, два или три пальца, чему равна вероятность того, что общее число показанных пальцев четно? Нечетно? Больше четырех? Меньше двух? Простое? (*Замечание*: Начните с построения пространства событий.)

12. Два бруска — черный и белый — представляют собой правильные четырехугольные призмы. Боковые грани этих брусков пронумерованы числами 1, 2, 3 и 4. Бруски покатили по полу и после их остановки заметили числа на верхних гранях брусков. Постройте таблицу для пространства событий, отвечающего этому эксперименту. Если x — номер верхней грани черного бруска, а y — номер верхней грани белого бруска, то найдите:

(а) $P(x+y=5)$; (б) $P(x=y)$; (в) $P(x>y+1)$;

(г) P (1 или 3 на черном бруске и 2 или 4 на белом бруске);

(д) P (сумма чисел на верхних гранях обоих брусков четная);

(е) P (большее число равно 4).

13. Повторите эксперимент упражнения 8 из § 2 для трех линеек (третья линейка пусть будет голубой). Чему равна вероятность того, что в точности одна нижняя грань помечена числом 2? Что в точности две нижние грани помечены числом 2? Что нижние грани всех трех линеек помечены числом 2? Что сумма всех чисел, отвечающих нижним граням линеек, не меньше 7?

14. Предположим, что у нас есть черный брусок упражнения 12 и красная линейка упражнения 13. Они катятся по полу, и после остановки отмечаются числа на верхней грани бруска и на нижней грани линейки. Постройте пространство событий и найдите вероятность того, что число на бруске больше числа на линейке. Что эти числа равны? Что сумма этих чисел — простое число?

15. Предположим, что все элементарные события пространства событий упражнения 10 из § 2 равновозможны. Чему равна вероятность того, что будет отобрана книга B? Что будут отобраны обе книги A и B? Что будет отобрана хотя бы одна из книг, A или B? Что будут отобраны книги C, D и E?

Контрольные упражнения к § 1, 2, 3

1. Числа от 1 до 15 написаны на 15 мячах по одному на каждом мяче. Выбирается наугад один мяч. Чему равна вероятность того, что число, написанное на этом мяче: (а) делится на 5; (б) четное; в) нечетное; (г) является точным квадратом; (д) является двузначным; (е) является простым; (ж) является простым и таково, что число, меньшее его на 2, также простое?

2. В ящике в 5 раз больше красных шаров, чем черных (шары одинаковы во всем, за исключением цвета). Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что он будет красным.

3. *Правильным икосаэдром* называется правильный двадцатигранник, все грани которого совершенно равноправны. Некоторые из граней окрашены в красный цвет, а остальные в синий. Если при бросании икосаэдра обнаружилось, что вероятность остановки его на красной грани в 4 раза больше вероятности остановки его на синей грани, то сколько его граней окрашено в красный цвет?

4. 70 жителей пригорода Бостона участвуют в голосовании по вопросу о запрещении плавания моторных лодок на верхнем Таинственном озере. Результаты голосования представлены в следующей таблице:

	Владельцы моторных лодок	Владельцы парусных лодок	Владельцы и того и другого	Остальные жители Бостона	Всего
Сторонники запрещения	0	7	1	18	26
Противники запрещения	20	2	3	5	30
Не имеют мнения	0	1	1	12	14
Всего	20	10	5	35	70

Из этих 70 человек выбирается наугад один. Найдите вероятности следующих событий: (а) что это лицо — сторонник запрещения; (б) что он противник запрещения; (в) что он владелец лодки какого-либо типа; (г) что он владелец парусной лодки; (д) владелец моторной лодки.

5. Из числа трех мужчин (Арчер, Бейкер, Вильям) и двух женщин (Глен, Девис) избирается комиссия из двух человек. Опишите два различных пространства событий этого эксперимента.

6. Вы просите друга «задумать число». Опишите пространство событий этого эксперимента.

7. Учитель просит каждого ученика в классе сосчитать число карандашей, которые тот принес в класс. Опишите пространство событий этого эксперимента.

8. Из обычной колоды в 52 игральные карты вынимают карты одну за другой до появления первого туза. Опишите два различных пространства событий этого эксперимента.

9. Монета бросается до тех пор, пока либо выпадет герб, либо четыре раза подряд выпадет цифра. Каково пространство событий для этого эксперимента?

10. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет 2 очка. Опишите пространство событий для этого эксперимента.

11. Вы просили каждого из 25 различных лиц назвать свой день рождения. Опишите пространство событий для этого эксперимента.

12. Селекционер скрещивает две породы, каждая из которых обладает парой генов (a, A). Каждая из родительских особей передает потомку один из этих генов (либо a, либо A); два гена — один отцовский и один материнский — составляют пару генов потомка. Опишите пространство событий, элементами которого являются пары генов возможных потомков.

13. Из n кандидатов для определенной работы отбираются m лиц; при этом $n \geqslant m$. (а) Сколькими способами можно отобрать m человек из данных n? (б) Сколькими способами это можно сделать так, чтобы в число отобранных попал некоторый определенный человек A? (в) Предположим, что все наборы по m лиц из данных n равновозможны. Чему равна вероятность того, что кандидат A будет отобран? Обсудите полученный результат. Соответствует ли он вашему интуитивному представлению о величине интересующей нас вероятности?

14. Из обычной карточной колоды (в 52 игральные карты) извлекаются одна за другой две карты. Пусть упорядоченная пара (x, y) обозначает отвечающее этому эксперименту элементарное событие; здесь x есть наименование первой вытянутой карты, а y — наименование второй. (а) Сколько элементарных событий образуют пространство событий? (б) Чему равна вероятность каждого элементарного события? (в) Чему равна вероятность того, что первая карта туз, а вторая валет? (г) Что одна из этих карт туз, а другая валет?

§ 4. События и множества

Как уже указывалось в § 1 и 3, в теории вероятностей слово *«событие»* обозначает *некоторое подмножество пространства событий S, отвечающего некоторому эксперименту.* Как мы видели, эти события, или подмножества, можно описать либо словами, либо с помощью алгебраических равенств или неравенств. Такие описания определяют отвечающее некоторому «событию» подмножество множества S.

Замечание по поводу союзов «и» и «или». В обычной речи в выражениях вида «A или B» союз «или» может иметь один из двух различных смыслов:

(1) *«или» разделительное* — другими словами, выражение «A или B» означает: «или A, или B, но не то

и другое вместе». Такой смысл имеет союз «или» в выражении «монета падает кверху гербом *или* кверху цифрой»;

(2) *«или» неразделительное* — здесь выражение «A или B» означает «или A, или B, или и A и B одновременно». Такой смысл может иметь предлог «или» в выражении: «Этим летом я собираюсь поехать во Францию или в Италию».

Зачастую для выяснения смысла слова «или» достаточно проанализировать контекст, в котором этот союз употребляется *). Однако при использовании союза «или» в относящихся к *событиям* выражениях типа «A или B» мы всегда будем употреблять это слово в *неразделительном* смысле. Иначе говоря, выражение «A или B» всегда будет у нас означать «или A, или B, или и то и другое вместе».

Это соглашение применяется в математике очень часто. Например, оно совпадает с определением *объединения* $A \cup B$ двух множеств A и B:

$A \cup B$ есть множество, все элементы которого принадлежат либо множеству A, либо множеству B, либо и тому и другому множеству.

Поэтому в этой книге «вероятность события A или B» будет обозначаться так:

$$P(A \cup B).$$

Понятие об *одновременной* принадлежности элемента двум множествам соответствует нашему использованию в разговоре о событиях союза «и». Поэтому если (события) A и B — подмножества пространства событий, то «A и B» есть *пересечение* этих подмножеств; это значит, что событие «A и B» состоит из всех элементарных событий, которые принадлежат одновременно как A, так и B. Таким образом,

пересечение $A \cap B$ множеств A и B состоит из всех элементов, принадлежащих как A, так и B.

*) Однако так обстоит дело не всегда; например, второе из указанных выше предложений не позволяет однозначно установить смысл употребления предлога «или»

Словесное выражение «вероятность A и B» подразумевает

$$P(A \cap B).$$

Проиллюстрируем эти понятия на следующих примерах, связанных с табл. 15.

Пример 1. *В эксперименте с бросанием двух костей найти вероятность того, что $к \leqslant 3$ или $б \leqslant 2$.*

Решение. Для выполнения неравенства $к \leqslant 3$ на красной кости должно выпасть либо 1, либо 2, либо 3 очка. Соответствующее множество A состоит из 18 элементарных событий, отвечающих первым трем строкам табл. 15. Для выполнения неравенства $б \leqslant 2$ на белой кости должно выпасть либо 1, либо 2 очка; соответствующее множество B состоит из 12 элементарных событий, записанных в первых двух столбцах той же таблицы. Элементарные события, принадлежащие объединению A и B, также относятся к событию *A или B*. Поэтому, для того чтобы найти число элементарных событий в множестве $A \cup B$, не следует складывать отвечающие A и B числа событий, поскольку существуют шесть элементарных событий, которые входят в оба эти множества, и их не следует считать дважды. Правильно подсчет числа элементарных событий множества $A \cup B$ производится следующим образом:

$$18 + 12 - 6 = 24. \tag{1}$$

Следовательно, вероятность события «A или B» равна 24/36, или 2/3.

Заметим, что 18 есть число элементарных событий, составляющих A; 12 — число событий, составляющих B; а 6 — число событий, составляющих пересечение $A \cap B$ множеств A и B. Разделив все члены выражения (1) на 36, получим

$$\frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36}. \tag{2}$$

Поэтому мы можем сказать, что в случае нашего примера

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B), \tag{3}$$

поскольку

$$P(A)=\frac{18}{36}; \qquad P(B)=\frac{12}{36};$$

$$P(A\cap B)=\frac{6}{36}; \qquad P(A\cup B)=\frac{24}{36}.$$

В следующем параграфе мы убедимся, что формула (3) справедлива во всех случаях.

Упражнения к § 4

Упражнения 1—7 относятся к выписанному в табл. 15 пространству событий, отвечающему эксперименту с бросанием двух костей.

Найдите вероятности следующих событий:

1. $к>2$ или $б>3$.
2. $к>2$ и $3б>3$.
3. $к<2$ или $б<4$.
4. $к<2$ и $б<4$.
5. $к+б=5$ или $к+б=7$.
6. $к+б=5$ и $к+б=7$.
7. Докажите, что

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B),$$

где A означает событие «$к>4$», а B — событие «$б>2$».

Упражнения 8—14 относятся к пространству событий примера 2 (§ 3, табл. 17).

Найдите вероятности следующих событий:

8. Отобраны лекарства a или c.
9. Отобраны лекарства a и c.
10. Отобраны лекарства a и b или b и c.
11. Отобраны лекарства a и b и b и c.
12. Отобраны лекарства e или b и c.
13. Отобраны лекарства e и b и c.
14. Покажите, что

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B),$$

где A означает событие «отобрано лекарство a», а B — событие «отобрано лекарство b».

§ 5. Несовместимые события

Если два события не могут произойти одновременно, то они называются *несовместимыми*. Вычисление вероятностей особенно просто, когда некоторое событие состоит из нескольких несовместимых событий.

Пример 1. *В эксперименте с подбрасыванием двух костей найти вероятность того, что сумма к + б равна 7 или* 10.

Решение. Обратитесь к табл. 15. Для шести элементарных событий $к+б=7$, для трех из них $к+б=10$. Поскольку соответствующие множества не пересекаются, то всего существует 9 элементарных событий для которых эта сумма равна 7 или 10. Следовательно, искомая вероятность равна 9/36, или 1/4.

Если мы обозначим через A множество элементарных событий, соответствующих событию $к+б=7$, а через B — множество элементарных событий, отвечающих событию $к+б=10$, то, используя теоретико-множественную символику, получим

$$P(A)+P(B)=P(A\cup B). \tag{1}$$

Это равенство немедленно следует из того, что

$$P(A)=\frac{6}{36}, \quad P(B)=\frac{3}{36} \quad \text{и} \quad P(A\cup B)=\frac{9}{36}.$$

Равенство (1) является частным случаем равенства (3) предыдущего параграфа: оно отвечает случаю, когда $P(A\cap B)=0$.

Определение 3. Несовместимые события. Два события называются *несовместимыми*, если не существует никакого элементарного события, реализация которого означает выполнение каждого из данных событий; n событий называются *несовместимыми*, если любые два из них несовместимы.

Заметим, что из этого определения сразу следует, что *пересечению двух или большего числа несовместимых событий отвечает пустое множество* (элементарных событий).

Теорема 1. Вероятность $A\cup B$. *Если A и B представляют собой подмножества конеч-*

ного пространства S элементарных событий, то

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).} \qquad (2)$$

Доказательство. Вероятность $A \cup B$ равна сумме вероятностей элементарных событий, входящих в

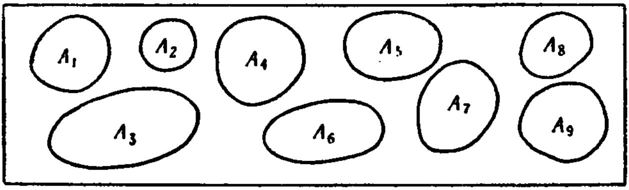


Рис. 5. Несовместимые события.

$A \cup B$. Далее, $P(A) + P(B)$ равна сумме вероятностей элементарных событий, составляющих A, и вероятностей элементарных событий, составляющих B. Очевидно, что $P(A) + P(B)$ включает в себя вероятности

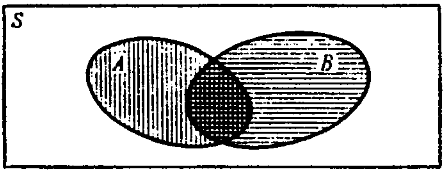


Рис. 6. События из S.

событий, входящих в $A \cap B$, причем эти вероятности — и только они! — в нашей сумме учитываются дважды. Если мы вычтем $P(A \cap B)$ из выражения $P(A) + P(B)$, то мы получим сумму вероятностей всех элементарных событий, составляющих $A \cup B$. Следовательно,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad \square \qquad (3)$$

Следствие 2. *Если множества A и B не пересекаются, то*

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B).} \qquad (4)$$

Формула (4) немедленно следует из формулы (3), поскольку, если A и B не пересекаются, то $A \cap B = \emptyset$, где $\emptyset$ — пустое множество, и $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$.

Следствие 3. Несколько непересекающихся событий. *Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ — несовместимые события. Тогда*

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m).} \tag{5}$$

Другими словами, вероятность A_1, *или* A_2, *или* ... ..., *или* A_m, где все рассматриваемые события несовместимы, равна сумме вероятностей этих событий.

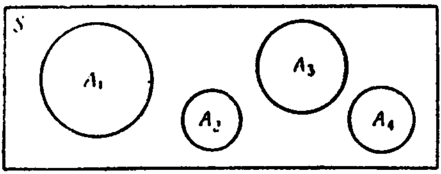


Рис. 7. Непересекающиеся множества.

Доказательство (см. рис. 7). Вероятность объединения A_1, A_2 и т. д. равна сумме вероятностей составляющих их элементарных событий. Сумма

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m)$$

представляет собой сумму вероятностей элементарных событий, входящих в A_1, плюс сумма вероятностей элементарных событий, входящих в A_2, и т. д. Поскольку эти события не пересекаются, рассматриваемая сумма включает в себя вероятности *всех* элементарных событий, составляющих объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, причем вероятность каждого элементарного события входит в эту сумму один и только один раз. □

Определение 4. Разбиение. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_m$ несовместимы и их объединение совпадает со всем пространством событий, то мы будем говорить, что эти m событий образуют *разбиение* данного пространства событий S на m подмножеств.

Так, например, на рис. 8 показано разбиение S на 8 подмножеств:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8.$$

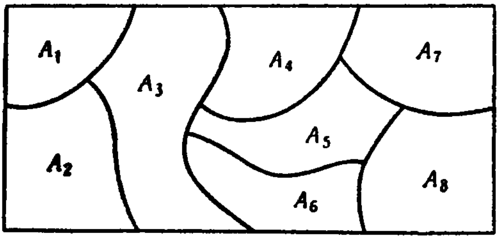


Рис. 8. Разбиение S.

Теорема 4. Вероятности событий разбиения. *Если A_1, A_2, ..., A_m образуют разбиение конечного пространства событий S, то*

$$\boxed{P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m) = 1.}$$

Доказательство. Это вытекает из следствия 3, поскольку

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = P(S) = 1. \quad \square$$

Пример 2. *У тренера университетской баскетбольной команды есть три входных билета на матч профессиональных команд. Он решает отдать эти билеты трем наугад выбранным игрокам своей первой сборной. В первой сборной играют Арт (А), Боб (Б), Вильям (В), Гарри (Г) и Дик (Д). Найти вероятность того, что будут выбраны либо Арт и Боб, либо Вильям и Дик, либо Боб, Вильям и Гарри.*

Решение. Пространство событий состоит из $\binom{5}{3}$, или 10, возможных наборов из 5 игроков по 3:

$$S = \{АБВ,\ АБГ,\ АБД,\ АВГ,\ АВД,\ АГД,\ БВГ,\ БВД,\ БГД,\ ВГД\}.$$

Отберем теперь подмножества этого множества, отвечающие интересующим нас событиям. Эти подмножества и их словесные описания выписаны в следующей таблице:

Словесное описание	Событие
Выбраны Арт и Боб	$A_1 = \{АБВ,\ АБГ,\ АБД\}$
Выбраны Вильям и Дик	$A_2 = \{АВД,\ БВД,\ ВГД\}$
Выбраны Боб, Вильям, Гарри	$A_3 = \{БВГ\}$

Поскольку три игрока выбираются наугад, вероятность каждого элементарного события равна 1/10. Поскольку же события A_1, A_2 и A_3 несовместимы,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}7.$$

Пример 3. *Рассмотрим эксперимент с бросанием двух костей* (§ 3). *Чему равна вероятность невыпадения дубля?*

Решение. Шесть элементарных событий в таб. 15 соответствуют событию *«выпадение дубля»*. Обозначим это событие через A. Поэтому

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Искомая вероятность *невыпадения дубля* равна

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{6}.$$

События «выпадение дубля» и «невыпадение дубля» несовместимы. Их также называют «дополнительными». Эти два события охватывают вместе все возможные исходы эксперимента.

Определение 5. Дополнительные события. Событие A и событие $\bar{A}$, состоящее из всех элементарных событий пространства событий, не принадлежащих A, называются *дополнительными событиями.*

Любое событие A и его дополнительное событие $\bar{A}$ несовместимы, а их объединение совпадает со всем пространством событий. Другими словами, события A и $\bar{A}$ образуют разбиение S на два подмножества.

Теорема 5. Дополнительные события. *Если A и $\bar{A}$ — дополнительные события, то*

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A).} \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку A и $\bar{A}$ не пересекаются, то из формулы (4) следует

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

А так как $A \cup \bar{A}$ совпадает со всем пространством событий S, то

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1.$$

Поэтому

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad \square$$

Эта формула была получена в § 1 как следствие определения вероятности события в пространстве событий с равновозможными исходами. Настоящее доказательство пригодно для более общих пространств событий, которые мы будем изучать в гл. IV.

Упражнения к § 5

1. Бросается кость. Пусть E означает событие «выпало четыре очка», а F — событие «выпало четное число очков». Будут ли события E и F несовместимыми?

2. Бросается кость. Пусть E означает событие «выпало четное число очков», а F — событие «выпало нечетное число очков». Будут ли события E и F дополнительными? Будут ли они несовместимыми?

3. Чему равна вероятность выпадения одного, или двух, или трех очков при однократном бросании кости?

4. Пусть вероятность того, что в некоторой игре двух лиц выигрывает A, равна 0,6. Что можно сказать о вероятности того, что A проигрывает? Будут ли события «A выигрывает» и «A проигрывает» несовместимыми? Будут ли они дополнительными? (А как обстоит дело с ничьей?)

5. Бросаются две монеты. Пусть E означает событие «выпадение двух гербов», а F — событие «выпадение двух цифр». Будут ли события E и F несовместимыми? Будут ли они дополнительными? Найдите $P(E \cup F)$.

Упражнения 6—16 относятся к эксперименту с бросанием двух игральных костей, описанному в примере 1 § 3. Найдите следующие вероятности:

6. Сумма очков не равна 11.

7. Выпавшие количества очков равны 3 или 4.

8. Ни на одной кости не выпало ни трех, ни четырех очков.

9. На каждой кости выпало не менее трех очков.

10. По крайней мере на одной кости выпало меньше трех очков.

11. На каждой кости выпало менее трех очков.

12. Только на одной кости выпало меньше трех очков.

13. $к + б$ четно или $к + б$ нечетно.

14. $к+б=4$ или $к+б=11$.

15. $к \leqslant 2+б$.

16. $к \neq б$.

17. Вернитесь к примеру 2 этого параграфа. Пусть E означает событие «выбраны Гарри и Дик», F — событие «выбраны Боб и Вильям» и G — событие «выбраны Вильям, Гарри и Дик». Найдите $P(E \cup F \cup G)$.

18. Пусть вероятность того, что забег выигрывает Джим, равна 1/3, а вероятность того, что забег выигрывает Том, равна 1/5. Какова вероятность того, что забег выиграет один из них?

19. Бросаются три монеты. Найти вероятность выпадения: (а) ни одного герба; (б) по крайней мере одного герба.

20. Числа 1, 2, 3, ..., 20 написаны на листках бумаги, которые помещаются в коробку и тщательно перемешиваются. Из коробки наугад вынимается один листок. Какова вероятность того, что число на вынутом листе окажется либо простым, либо делящимся на три?

§ 6. Независимые события

Предшествовавшее обсуждение подготовило нас к введению нового понятия *независимых* событий. Когда мы говорим в повседневной речи, что какие-то два события «не имеют отношения одно к другому», то мы указываем на обстоятельство, называемое на математическом языке «независимостью» рассматриваемых событий. Обсуждение этого нового понятия мы начнем с иллюстрирующего его примера.

Пример 1. *Рассмотрим эксперимент с бросанием двух костей* (§ 3). *Чему равна вероятность того, что* $к \leqslant 3$ *и* $б \geqslant 5$?

Решение. Рассматриваем событие, которое заключается в одновременном выполнении обоих данных условий. Пусть A — множество элементарных событий, удовлетворяющих условию $к \leqslant 3$, а B — множество элементарных событий, удовлетворяющих условию $б \geqslant 5$. Мы хотим узнать число элементарных событий, отвечающих выполнению сразу обоих данных условий; они принадлежат *пересечению* $A \cap B$. В это пересечение входят 3×2 элементарных событий, выписанных в первых трех строках и последних двух столбцах табл. 15. Следовательно, мы имеем

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Найдем также вероятности

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

поскольку A состоит из 18 элементарных событий, а B из 12. Используя найденное выражение для вероятностей, проверим, что *в данном примере*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1}$$

Эта формула приводит к результату, какой подсказывает нам наша интуиция, — надо только обдумать условие задачи. Рассмотрим очень длинную серию бросаний двух костей. Мы ожидаем, что условие

$к \leqslant 3$ будет выполнено примерно в половине всех бросаний. Оставим для дальнейшего рассмотрения только эти бросания, игнорируя все остальные. Для какого числа из них выполнено также условие $б \geqslant 5$? Поскольку результат падения красной кости нисколько не влияет на «поведение» белой кости, то представляется разумным считать, что примерно 1/3 всех бросаний, для которых выполнено условие $к \leqslant 3$, также удовлетворяет условию $б \geqslant 5$. Поэтому доля бросаний, которая удовлетворяет обоим поставленным условиям, приблизительно равна 1/3 от 1/2, или 1/6.

Всегда ли справедлива формула (1)? Ответ на этот вопрос отрицателен, как мы увидим в примере 4. В том случае, когда формула (1) справедлива, события A и B называются *независимыми* событиями; в противном случае эти события называются *зависимыми*. Наша интуиция подсказывает нам, что действительно исход бросания красной кости не зависит от результата, полученного при бросании белой кости. Кажется очевидным, что бросание красной кости никак не связано с бросанием белой кости; именно в этом смысле в повседневной речи употребляется термин «независимые» события. Более того, это предложение можно обратить. Если в повседневной речи мы говорим о том, что два события «не имеют никакого отношения одно к другому», то означает это попросту тот факт, что вероятность выполнения обоих событий находится перемножением вероятностей выполнения каждого из них, как мы и видели в примере 1.

Для дальнейшего нам, однако, будет необходимо определение, свободное от оттенка неопределенности, связанного с употреблением выражения «не имеют никакого отношения одно к другому». Такое определение, основанное на изучении задач, аналогичных примеру 1, мы сейчас и дадим.

Определение 6. Независимые события. События A и B называются *независимыми* тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).} \tag{1}$$

Данное определение предлагает достаточно ясный способ обнаружения того, являются ли два события A и B независимыми: если эти события *не* удовлетворяют соотношению (1), то они *зависимы.*

Теорема 6. *Если A и B — независимые события с положительными вероятностями, то они не несовместимы.*

Доказательство. Нам надо доказать, что существует по крайней мере одно элементарное событие, отвечающее реализации как события A, так и события B, т. е. принадлежащее их пересечению. Пусть через $\emptyset$ обозначено пустое множество, тогда либо $A \cap B = \emptyset$, либо $A \cap B \neq \emptyset$. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cap B) = 0$ и из (1) следует, что $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$. Так как это противоречит предположению о положительности вероятностей событий A и B, то из этого следует, что $A \cap B \neq \emptyset$. □

Пример 2. Независимые события: бросания монет. *Бросаются две монеты. Показать, что событие «первая монета упала гербом кверху» и событие «монеты упали одинаково» независимы.*

Решение. Пространство событий для этого эксперимента таково:

$$S = \{ГГ,\ ГЦ,\ ЦГ,\ ЦЦ\}.$$

Пусть первое из данных событий обозначено через A, а второе — через B. Поскольку четыре элементарных исхода, образующих множество S, равновозможны, присвоим каждому из них вероятность 1/4. Далее получаем

$$A = \{ГГ,\ ГЦ\}; \qquad P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$B = \{ГГ,\ ЦЦ\}; \qquad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$A \cap B = \{ГГ\}; \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

и, значит, в силу определения 6 события A и B независимы.

Пример 3. Независимые события: бросания игральных костей. *В эксперименте с бросанием двух игральных костей* (§ 3) *найти вероятность того, что на красной кости выпало четное количество очков, а на белой — нечетное.*

Решение. Сосчитаем элементарные события в пространстве событий S. Таблица 15 (см. стр. 107) содержит 18 элементарных событий (3 строки), для которых $к$ четно, и 18 элементарных событий (3 столбца), для которых $б$ нечетно. Эти два 18-элементных множества имеют 9 общих элементов (стоящих на пересечении этих трех строк и трех столбцов). Следовательно, существуют 9 элементарных событий, для которых $к$ четно и $б$ нечетно, и поэтому

$$P\,(к \text{ четно и } б \text{ нечетно}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Поскольку

$$P\,(к \text{ четно}) = P\,(б \text{ нечетно}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

то события «$к$ четно» и «$б$ нечетно» независимы в силу определения 6.

Пример 4. Зависимые события: бросания игральных костей. *В эксперименте с бросанием двух костей найти вероятность того, что* $к \neq 5$ *и, кроме того, сумма очков на обеих костях равна* 11 ($к + б = 11$).

Решение. Условию $к+б=11$ удовлетворяют два элементарных события табл. 15: (5,6) и (6,5). Если мы обозначим множество, состоящее из этих двух элементарных событий, через E, то

$$P\,(E) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Обозначим теперь через F множество элементарных событий, удовлетворяющих условию $к \neq 5$. Множество

F содержит 30 элементов и, значит,

$$P(F)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}.$$

Поскольку одновременному выполнению событий E и F отвечает только один исход эксперимента, а именно исход (6,5), то

$$P(E\cap F)=\frac{1}{36}.$$

А так как дробь 1/36 не равна произведению дробей 1/18 и 5/6, то в силу определения 6 события E и F зависимые.

Замечание. Если мы имеем три или более независимых событий, то вероятность их одновременного выполнения равна произведению вероятностей выполнения каждого из событий (по определению независимых событий!). Так, например, если E, F и G независимы, то

$$P(E\cap F\cap G)=P(E)\cdot P(F)\cdot P(G). \qquad (2)$$

Предостережение

Существует опасность смешения понятий *несовместимости* событий и *независимости* событий. Источник этой ошибки кроется в слишком вольном употреблении выражения «не имеют никакого отношения одно к другому». Это выражение, применяемое к реальным событиям, представляет собой удобное описание независимости событий. Но если это же выражение ошибочно применять к множествам, то оно будет, видимо, означать, что соответствующие множества не пересекаются — а непересекающиеся множества соответствуют несовместимым и как раз обязательно зависимым событиям. (В самом деле, при рассмотрении независимых событий A и B с положительными вероятностями мы убедились в том, что они *не являются* несовместимыми; см. теорему 6.)

Упражнения к § 6

1. В эксперименте с бросанием двух костей примера 1 (§ 3) покажите, что события «$к>4$» и «$б<3$» независимы.

2. Бросаются три монеты. Покажите, что события «на первой монете выпал герб» и «цифра выпала на последних двух монетах» независимы. Покажите, что события «выпало два герба» и «выпало три герба» зависимы.

3. Монета бросается четыре раза. Найти вероятность того, что при первом бросании она упадет гербом кверху, при втором и третьем бросаниях — цифрой кверху, и при четвертом бросании — снова гербом кверху.

4. Дважды бросается пара игральных костей. Какова вероятность того, что число очков, выпавших на каждой кости во втором бросании, отличается от числа очков, выпавших на той же кости при первом бросании. (Предположите независимость исходов этих двух бросаний.)

5. Игральная кость бросается три раза. Какова вероятность того, что при первом бросании выпадет нечетное число очков, при втором — четное число очков, а при третьем бросании — 6 очков? (Предположите независимость исходов этих трех бросаний.)

6. Результаты экзаменов в некоторой школе показывают, что 10% учащихся не смогли сдать математику, 12% — английский язык, и 2% провалили экзамены как по математике, так и по английскому языку. Наугад выбирается один ученик. Будут ли события «этот ученик не сдал математику» и «этот ученик не сдал английский язык» независимыми?

7. Пусть E есть любое событие в пространстве событий S. Покажите, что E и S независимы. Будут ли независимыми события E и $\emptyset$?

8. В урне лежат 5 черных шаров, 4 красных шара и 3 белых шара. Последовательно вынимаются 3 шара, причем каждый шар возвращается в урну перед тем, как вынимать следующий. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй — красным, и третий — белым.

§ 7. Условные вероятности

Часто приходится рассматривать вероятности событий, исходя не из всего пространства событий, а только из некоторой его части. Вероятность того, что некий человек, случайно выбранный из определенной группы лиц, имеет голубые глаза, изменится, если мы выберем это лицо из числа одних лишь блондинов, входящих в полную группу. Для множества студентов, посещающих лекции по определенной математической дисциплине, вероятность того, что случайно выбранный студент успешно сдаст соответствующий экзамен, будет меньше той же вероятности, определяемой исходя из того, что рассматриваемые студенты собираются серьезно специализироваться по математике. Шансы удачно поохотиться для произвольного жителя некоторого города значительно меньше тех же шансов для лица, являющегося членом охотничьего клуба. В каждом из этих примеров внимание фиксируется на вероятности события, определяемой, так сказать, «по отношению к некоторому подмножеству полного пространства событий»; мы видим, что эта «вероятность по отношению к подмножеству» может отличаться от вероятности во всем пространстве событий. Так как подмножества пространства событий задаются некоторыми дополнительными условиями, то вероятности, связанные с принадлежащими этим подмножествам событиями, называются *условными вероятностями.*

Для того чтобы освоиться с понятием условной вероятности, обсудим следующий пример, который основан на знакомом нам эксперименте с бросанием двух игральных костей (см. табл. 15 на стр. 107):

Пример 1. *Найти вероятность того, что* $к=1$ *при условии, что* $к+б<4$.

Обсуждение. Во-первых, нам необходимо понять, какой смысл имеет искомая вероятность. Среди всех исходов бросаний двух костей некоторые таковы, что сумма $к+б$ меньше 4, другие приводят к противоположным результатам. Эти последние мы будем игнорировать, ограничившись рассмотрением *приведенного пространства событий* S', состоящего из трех элементарных событий:

$$S'=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)\}.$$

Поскольку в основном пространстве событий S эти исходы равновозможны, то мы припишем им равные вероятности и в приведенном пространстве событий S'. А так как приведенное пространство событий состоит из трех элементарных событий, то вероятность каждого из них в S' следует считать равной 1/3. События, определяемые условием $к=1$, состоят из двух элементарных событий:

$$(1,\ 1) \text{ и } (1,\ 2).$$

Поэтому вероятность того, что *в приведенном пространстве* событий S' имеет место равенство $к=1$, равна 2/3. Это-то число мы и назовем *условной вероятностью события $к=1$ при условии $к+б<4$*.

Для того чтобы лучше изучить условные вероятности, рассмотрим подмножества исходного пространства событий S, соответствующие условиям $к+б<4$ и $к=1$. Соответствующие этим условиям исходы выписаны в табл. 18.

Таблица 18

Условие	Событие
$к+б<4$	$B=\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1)\}$
$к=1$	$A=\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3)\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6)\}$

Поскольку нас интересуют шансы выполнения условия A, когда условие *B уже выполнено*, нам естественно обратить внимание на событие $A\cap B$, соответствующее множеству элементарных событий, которые принадлежат одновременно как A, так и B. Мы имеем:

$$A\cap B=\{(1,1),\ (1,2)\}.$$

Каковы вероятности событий A, B и $A\cap B$ в исходном пространстве событий S? Они равны:

$$P(A)=\frac{6}{36};\quad P(B)=\frac{3}{36};\quad P(A\cap B)=\frac{2}{36}.$$

Заметьте, что мы специально не приводим эти дроби к наименьшему знаменателю. Такое приведение в данном случае нам только помешало бы.

Для записи понятия «вероятность A при условии B» часто используется символ

$$P(A\mid B),$$

где вертикальная черта читается «при условии».

В предыдущем примере наше первое решение привело нас к результату

$$P(A \mid B) = \frac{2}{3}.$$

Теперь заметим, что в *этом примере* мы также имеем

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B), \tag{1}$$

поскольку

$$\frac{2}{36} = \frac{3}{36} \cdot \frac{2}{3}.$$

Формула (1) дает нам другой способ получения $P(A \mid B)$. Из равенства (1) следует, что

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Интересно также рассмотреть, что получится, если мы поменяем местами A и B в обеих частях равенства (1). Событие $A \cap B$ совпадает с событием $B \cap A$. Поэтому мы сочтем естественным, что также

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B \mid A). \tag{2}$$

(См. упр. 2 в конце этого параграфа.)

Пример 2. *В произвольном порядке выписываются две буквы а и две буквы б. Все размещения считаются равновозможными. Найдите вероятность того, что обе буквы а стоят рядом, при условии, что последняя по порядку буква есть буква б.*

Решение. Пространство событий, элементами которого являются все возможные расположения данных четырех букв, таково:

$$S = \{aабб,\ абаб,\ абба,\ бааб,\ баба,\ ббаа\}.$$

Рассмотрим приведенное пространство событий B, элементами которого являются такие наборы, у которых на последнем месте стоит буква *б*:

$$B = \{аабб,\ абаб,\ бааб\}.$$

Поскольку нас интересует вероятность того, что *б* — последняя буква и две буквы *а* стоят рядом, мы рассмотрим далее только такие элементарные события из приведенного пространства B, которые содержат пару последовательных букв *аа*. Соответствующие элементарные события принадлежат пересечению B и A, где A означает множество всех наборов, содержащих последовательность *аа*:

$$A = \{aабб,\ баaб,\ ббaa\}.$$

Поэтому

$$B \cap A = \{aабб,\ баaб\}.$$

Если мы будем считать элементарные события из B равновозможными, то, исходя из количества элементов в приведенном пространстве, каждому элементарному событию из B следует приписать вероятность 1/3. А так как два из трех элементарных событий, образующих B, содержат *аа*, то

$$P(A \mid B) = \frac{2}{3}.$$

Выполняется ли в этом случае равенство (1)? В исходном пространстве событий S мы имеем

$$P(B) = \frac{3}{6}, \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{6}.$$

Следовательно, и *в этом примере*

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B),$$

поскольку

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3}.$$

Упр. 2 в конце параграфа требует проверить, что в этом случае выполнено также и равенство (2).

Замечание. Пример 2 можно решить, непосредственно применяя понятия гл. II. Если *б* должно стоять на последнем месте, то оставшиеся три буквы *а*, *а*, *б* можно переставить 3!/2!, или тремя, способами. Из этих трех размещений только два — *аабб* и *бааб* содержат две буквы *а* рядом. Поскольку три возможных размещения с буквой *б* на последнем месте равновозможны, то

$$P\ (\text{две буквы } a \text{ рядом} \mid \text{буква } б \text{ на последнем месте}) = \frac{2}{3}.$$

Предыдущие примеры и другие, подобные им, приводят нас к следующему определению.

Определение 7. Условная вероятность и приведенное пространство событий. *Условная вероятность* события A при условии B (обозначается $P(A|B)$) определяется формулой

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{где} \quad P(B) \neq 0.} \tag{3}$$

Приведенным пространством событий в этом случае называется данное событие B.

Все вероятности являются условными вероятностями по отношению к исходному пространству событий, и $P(A)$ есть просто сокращение для $P(A|S)$, где S — полное пространство исходов эксперимента. Однако если пространство S фиксировано, то в записи вероятностей событий оно обычно опускается. Если же про некоторое *подмножество* B известно, что оно содержит *все* исходы эксперимента, то мы все же пишем $P(A|B)$, чтобы указать, что речь идет про условную вероятность при условии B *). В частности, $P(B|B) = 1$.

Замечание 1. Вероятности, стоящие в числителе и знаменателе дроби, образующей правую часть формулы (3), суть вероятности событий в *исходном* пространстве событий S. Конечно, результат не изменится, если мы обратимся к рассмотрению *приведенного* пространства событий — в данном случае пространства B. Ясно, что вероятность события B в приведенном пространстве событий B надо приравнять к единице;

---

*) В данном случае совпадающую с «безусловной» вероятностью $P(A)$

поэтому если мы вычислим вероятности, стоящие в правой части выражения (3) в приведенном пространстве событий B, то числитель будет равен вероятности A в B, тогда как знаменатель будет равен 1.

Замечание 2. Ограничение $P(B)\neq 0$ в выражении (3) означает, что данное событие B не должно иметь вероятность нуль. В конечном пространстве событий с равновозможными исходами следует рассматривать только события B с положительной вероятностью осуществления, иначе бессмысленно говорить о вероятности события A при условии B.

При рассмотрении бесконечных пространств событий события с нулевой вероятностью встречаются довольно часто; здесь условные вероятности при условии осуществления этих событий во многих случаях могут быть интерпретированы вполне осмысленно.

Замечание 3. Равенства (3) и (1) по существу совпадают. Мы получаем (1) умножением обеих частей (3) на $P(B)$. Обратно, предположив, что $P(B)\neq 0$, мы получим (3), разделив обе части (1) на $P(B)$.

Замечание 4. Даже если нам известны вероятности $P(A)$ и $P(B)$, мы не сможем найти вероятность $P(A\cap B)$, если только нам не удалось установить независимость A и B. Мы должны рассматривать A, B и $A\cap B$ как три отдельных множества в S, даже если множества A и B достаточно велики и выписать все их элементы нет возможности.

Предостережения

(1) $P(A|B)$ редко совпадает с $P(A\cap B)$. В самом деле, условная вероятность события A при условии B, вообще говоря, отлична и от $P(A)$ и от $P(A\cap B)$.

(2) $A|B$ *не есть* символ для обозначения какого-либо множества.

В связи с предостережением (1) рассмотрим, например, пространства событий S эксперимента с бросанием двух костей (см. табл. 15). Пусть A означает событие «на красной кости выпало четное количество очков», а B — событие «на белой кости выпало два очка». Сосчитав отвечающие A, B и $A \cap B$ элементарные события в пространстве S, мы найдем, что

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$

и

$$P(A \mid B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. *Рассмотрим эксперимент с бросанием двух костей* (см. табл. 15). *Найти вероятность того, что на белой кости выпало четыре очка при условии «$к + б = 11$».*

Решение. Искомая вероятность равна нулю; невозможно получить $к = 4$, если $к + б = 11$.

Пример 4. *В условиях примера 3 найти вероятность того, что число очков на белой кости больше 4 при условии, что на красной кости выпало 4 очка.*

Решение. Пусть B означает событие, описываемое условием $к = 4$, а A означает событие, описываемое неравенством $б > 4$. Тогда B содержит 6 элементарных событий (см. табл. 15), A содержит 12 элементарных событий, а их пересечение $A \cap B$ состоит из двух элементарных событий (4, 5) и (4, 6). Поэтому мы получаем

$$P(B) = \frac{6}{36}, \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{36},$$

и формула (3) дает

$$P(A \mid B) = \frac{2/36}{6/36} = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что мы могли бы получить этот результат более прямым путем при помощи непосредственного подсчета: два равновозможных случая ($б = 5$ или 6) из 6 равновозможных случаев, составляющих B, приводят к вероятности $2/6 = 1/3$. Поскольку A состоит из 12 элементарных событий, мы также получаем

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Итак, *в этом примере* условная вероятность события A при условии B совпадает с вероятностью события A. Другими словами, информация о том, что на красной кости выпало 4 очка, не меняет вероятности того, что на белой кости выпало более четырех очков. Эта последняя вероятность равна 1/3 независимо от исхода бросания красной кости.

Теорема 7. Условные вероятности независимых событий. *Если A и B — независимые события, имеющие положительные вероятности, то*

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A) \quad \text{и} \quad P(B \mid A) = P(B).} \tag{4}$$

Доказательство. Так как A и B независимы и $A \cap B = B \cap A$, то мы получаем из равенства (2) из § 6

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B).$$

Поскольку ни $P(A)$, ни $P(B)$ не равны нулю, мы можем делить на них обе части равенства. Поэтому формула (3) дает

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Доказательство того, что $P(B \mid A) = P(B)$, мы оставляем читателям в качестве упражнения.

Упражнения к § 7

1. В эксперименте с бросанием двух костей (табл. 15) найти вероятность того, что $к=5$ при условии $к+б \geqslant 10$. Найти вероятность того, что $б \geqslant 4$ при условии $к+б=8$.

2. Рассмотрите пример 2 этого параграфа. Покажите, что

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

3. Пятизначное число образовано при помощи перестановки цифр 44433. Все размещения равновозможны. Найти вероятность того, что все тройки стоят рядом при условии, что полученное число четное.

4. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что на второй кости выпадет четное количество очков, если на первой кости выпало 5 очков?

Упражнения 5—16 основаны на следующих данных. Шесть мальчиков — Джо, Сэм, Том, Дик, Гарри и Пит — образовали клуб. Они решают избрать из своего состава правление клуба, в которое бы входили три человека. Выборы производятся путем жребия, причем все 20 возможных исходов жребия имеют одинаковые вероятности.

5. Проверьте, что возможное число наборов из 6 мальчиков по 3 равно 20.

6. Опишите какой-либо процесс выбора правления клуба при помощи жребия.

7. Постройте какое-либо пространство событий, содержащее 20 элементарных событий, отвечающих 20 возможным составам правления.

8. Какова вероятность того, что Сэм войдет в правление? Что он не войдет в правление?

9. Какова вероятность того, что Сэм войдет в правление, а Том не войдет в правление?

10. Какова вероятность того, что ни Сэм, ни Том не войдут в правление?

11. Известно, что Сэм вошел в правление; какова в этом случае вероятность того, что Том также войдет в правление?

12. Чему равна вероятность того, что Том, Дик и Гарри не образуют правления клуба?

13. Если известно, что Том и Дик вошли в правление, то какова вероятность того, что Гарри в него не войдет?

14. Какова вероятность того, что в правление войдет либо Джо, либо Пит, либо они оба?

15. Предположим, что Джо и Сэм — братья, Том и Дик — братья, Гарри и Пит — тоже братья. Какова вероятность того, что в правление войдут два брата?

16. Теперь предположим, что среди мальчиков братьями являются только Джо, Сэм и Пит. Какова вероятность того, что в правлении не будет братьев?

17. Пусть p означает вероятность того, что некоторое событие происходит при одном испытании. Докажите, что вероятность того, что в процессе n независимых испытаний это событие реализовалось n раз, равна p^n.

18. Из 10 человек отбираются двое; все возможные выборы двух человек равновозможны. Какова вероятность того, что будут отобраны два вполне определенных человека? Что оба они не будут отобраны? Что ни один из них не будет отобран?

19. Как утверждает статистика, из 100 000 человек в возрасте 20 лет к 70 годам в живых остаются 47 773. Какова вероятность того, что человек, доживший до 20 лет, доживет и до 70? Что он не доживет до 70 лет?

20. Вероятности того, что некто A умрет в течение следующих 20 лет, равна 0,025; что другой человек B умрет в течение

20 ближайших лет, — равна 0,030. Чему равна вероятность того, что оба они умрут в течение ближайших 20 лет? Что A умрет, а B не умрет? Что ни один из них не умрет?

21. Семь человек становятся случайным образом в очередь один за другим. Какова вероятность того, что два определенных человека станут рядом? Что они не станут рядом?

22. Для некоего игрока в баскетбол вероятность забросить мяч в корзину со штрафного броска равна 1/2. Сколько надо предоставить ему штрафных бросков для того, чтобы вероятность попадания в корзину хотя бы один раз была не меньше 0,99?

23. Пусть p означает вероятность выполнения некоторого события в одном испытании. Докажите, что вероятность выполнения этого события хотя бы один раз в серии из n независимых испытаний равна $1-(1-p)^n$.

24. Урна содержит 3 белых шара и 4 черных шара. Три человека один за другим вынимают по одному шару, не возвращая их в урну. Тот, кто первым вытаскивает белый шар, выигрывает. Каковы соответственные шансы первого, второго и третьего игроков? (Они продолжают игру до тех пор, пока кто-то не выиграет.)

25. Вы останавливаете наугад на улице трех человек и спрашиваете, в какой день недели они родились. Какова вероятность того, что они все родились в четверг? Что двое из них родились в четверг, а третий — в пятницу? Что ни один из них не родился в воскресенье?

26. Из чисел 1, 2, 3, ..., 10 наугад выбираются два числа. Какова вероятность того, что их сумма будет четной?

27. Магазин принимает партию из 10 радиоприемников для продажи в том случае, если при проверке двух из них, выбранных наугад, они оба оказываются исправными. Какова вероятность того, что магазин примет партию, содержащую 4 неисправных приемника?

28. Комиссия из трех членов выбирается из группы, содержащей 20 человек. Какова вероятность того, что некий определенный человек войдет в комиссию? Что он не войдет в комиссию?

29. Из пяти супружеских пар — всего 10 человек — случайным образом отбирают четырех человек. Какова вероятность того, что среди отобранных не будет мужа и жены?

30. Семизначное число образуется при помощи перестановки цифр 1234567. Если все перестановки равновозможны, то какова вероятность того, что в случайно выбранной перестановке нечетные цифры будут следовать одна за другой в возрастающем порядке (но, может быть, не подряд)?

§ 8. Пространства событий с большим числом элементов

Если число всех элементов пространства событий очень велико, то метод выписывания их всех в одну таблицу становится непригодным. Однако для вычисления вероятностей в пространстве событий с равновозможными исходами возможно обойтись и без перечисления всех элементарных событий, используя способы подсчета, которые мы обсуждали в гл. II. Проиллюстрируем это на следующих примерах.

Пример 1. Первый туз. *Колода в 52 игральные карты тщательно тасуется, после чего открываются верхние карты одна за другой до появления первого туза. Какова вероятность того, что первым тузом окажется* (а) *пятая карта,* (б) *k-я карта,* (в) *что первый туз встретится не далее k-й карты?*

Решение. (а) Существует несколько пространств событий этого эксперимента. Мы берем следующее.

Сопоставим каждому расположению карт в колоде перестановку из 52 букв: 48 букв H и 4 буквы T. При этом если на k-м месте в колоде лежит туз, то на k-м месте в перестановке букв стоит T, если же не туз — то H. Существуют

$$\frac{52!}{48!\,4!}=\binom{52}{4}$$

возможных перестановок из 48 букв H и 4 букв T; каждая из этих перестановок представляет собой элементарное событие пространства S. Мы предположим, что все элементарные события равновозможны, и припишем каждому из них вероятность $1/\binom{52}{4}$.

Рассмотрим теперь событие E, которое заключается в том, что «первым тузом оказалась пятая карта». Поскольку первый туз стоит на пятом месте перестановки, то ее начало должно иметь вид

$$HHHHT,$$

а далее идут 44 буквы H и 3 буквы T в каком-либо (безразлично каком!) порядке. Число элементарных событий в E, следовательно, равно числу перестановок из 44 букв H и 3 букв T; это число равно

$$\frac{47!}{44!\,3!} = \binom{47}{3}.$$

Следовательно,

$$P(E) = \frac{\binom{47}{3}}{\binom{52}{4}} = \frac{16\,215}{270\,725} \approx 0{,}060.$$

(б) Подобным же образом, если первый туз появляется на k-м месте, тогда оставшиеся три туза и $48-(k-1)$ (или $49-k$) других карт могут быть переставлены на последних $52-k$ местах $\binom{52-k}{3}$ способами. Следовательно,

$$P\,(\text{первый туз на } k\text{-м месте}) = \frac{\binom{52-k}{3}}{\binom{52}{4}}, \quad k = 1, 2, \ldots, 49.$$

(в) Обозначим через F событие, заключающееся в том, что «первый туз встретился не далее k-й карты». Тогда дополнительное событие $\bar{F}$ заключается в том, что «все четыре туза лежат после k-й карты». Первые k элементов любой перестановки в $\bar{F}$ должны представлять собой H. Поэтому число элементарных событий в $\bar{F}$ равно числу перестановок из 4 букв T и $48-k$ букв H на оставшихся $52-k$ местах. Это число равно

$$\frac{(52-k)!}{(48-k)!\,4!} = \binom{52-k}{4}.$$

Следовательно,

$$P(\bar{F}) = \frac{\binom{52-k}{4}}{\binom{52}{4}}$$

и

$$P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 1 - \frac{\binom{52-k}{4}}{\binom{52}{4}}, \quad k = 1, 2, \ldots, 49.$$

Например, если $k=9$, мы получаем

$$P(F) \approx 1-0{,}46=0{,}54.$$

Таким образом, больше шансов за то, что первый туз появится до 10-й карты, чем за то, что среди первых 9 карт не будет ни одного туза.

Замечание. В предыдущем примере нам встретился случай так называемого «увеличения шансов». В свете этого примера читатель может пожелать перечитать обсуждение в § 6 гл. I.

Пример 2. Задача о днях рождения. *В комнате имеется k человек. Какова вероятность того, что по крайней мере у двух из них дни рождения совпадают, т. е. приходятся на одно и то же число одного и того же месяца. Каково наименьшее значение k, при котором вероятность этого будет не меньше 1/2? (А как вы думаете? Выскажите предположение и запишите его.)*

Решение. Мы будем считать, что в году 365 дней, опуская 29 февраля. Для дня рождения каждого человека существует 365 возможных дней года, и, следовательно, существует 365^k возможностей для дней рождения k человек. Поэтому наше пространство событий S содержит 365^k элементарных событий, каждое из которых представляет собой упорядоченный набор из k элементов:

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_k),$$

в котором x_1 означает день рождения первого человека, x_2 означает день рождения второго человека и x_k означает день рождения k-го человека. Мы предположим, что все 365^k возможных исходов имеют одинаковые вероятности. Тогда вероятность каждого элементарного события равна $1/365^k$.

Рассмотрим теперь событие E в пространстве событий S, заключающееся в том, что «никакие два человека не имеют общего дня рождения». При этом условии существуют 365 возможностей для дня рождения первого человека, 364 — для дня рождения второго человека, 363 — для дня рождения третьего человека, ..., $365-(k-1)$, или $365-k+1$ — для дня рождения k-го человека. Поэтому, используя принцип умножения, мы получаем, что число всех возможных наборов из k элементов, удовлетворяющих поставленному условию, равно

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \ldots (365-k+1).$$

Это произведение представляет собой количество элементарных событий, составляющих событие E.

Отсюда следует, что

$$P(E)=\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \ldots (365-k+1)}{365^k}.$$

И наконец,

$$P\text{ (по крайней мере у двоих людей дни рождения совпадают)}=1-P(E).$$

Эти вероятности, подсчитанные для каких-то значений k, доставляют нам неожиданную информацию! Некоторые результаты приведены в табл. 19. И из

Таблица 19

Число людей в комнате	5	10	20	23	30	40	60
Вероятность совпадения по крайней мере двух дней рождения	0,027	0,117	0,411	0,507	0,706	0,891	0,994

нее видно, что если в комнате находятся всего лишь 23 человека, то уже и тогда имеется более половины шансов за то, что по крайней мере у двоих из них дни рождения совпадают!

Замечание. Хотя в примерах, подобных выше приведенным, невозможно выписать все элементы пространства событий, все же следует тщательно обдумать, что из себя представляют элементарные события, каково их число и какое подмножество соответствует тому событию, вероятность которого мы хотим определить.

В некоторых случаях желательно разложить событие A на более простые события, несовместимые между собой, например на

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k.$$

В этом случае мы получаем

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k,$$

и, поскольку соответствующие подмножества не пересекаются,

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k). \qquad (1)$$

Пример 3 иллюстрирует тот случай, когда таким подмножествам отвечают одинаковые вероятности. Тогда равенство (1) приводится к виду

$$P(A) = kP(A_1).$$

Пример 3. *Мальчик играет с десятью раскрашенными кубиками и тремя пустыми коробками. Он наугад раскладывает эти* 10 *кубиков по* 3 *коробкам. Какова вероятность того, что в двух коробках окажется по* 3 *кубика, а в одной* 4?

Решение. Для того чтобы различать коробки, обозначим их буквами a, b, c. Нам надо построить пространство событий. Понаблюдаем, как мальчик выполняет эксперимент; при этом будем записывать по порядку буквы, означающие те коробки, в которые он последовательно кладет кубики. В результате получится последовательность из 10 букв, например

$$bbcaaaccba. \qquad (2)$$

Эта последовательность соответствует следующему выполнению эксперимента: первый кубик кладется в коробку b, второй — в коробку b, третий — в коробку c, четвертый, пятый и шестой — в коробку a и т. д. Таким образом, наше пространство событий S состоит из всех возможных последовательностей из 10 букв, в которых каждая буква — это либо буква a, либо b, либо c. Примером такой последовательности является последовательность (2). По принципу умножения главы II число элементарных событий в данном пространстве событий равно

$$n = 3 \times 3 \times 3 \times \ldots \times 3 = 3^{10}.$$

Поскольку мальчик кладет кубики в коробки наугад, каждому элементарному событию мы припишем вероятность $1/n$.

Далее рассмотрим событие A, заключающееся в том, что в двух коробках оказалось по 3 кубика, а в одной 4. Разложим это событие на 3 несовместимых события:

A_1 означает событие «3 кубика в коробке a, 3 кубика в коробке b, 4 кубика в коробке c»,

A_2 означает событие «3 кубика в коробке a, 4 кубика в коробке b, 3 кубика в коробке c»,

A_3 означает событие «4 кубика в коробке a, 3 кубика в коробке b, 3 кубика в коробке c».

Очевидно, что

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

Поскольку никакие два из этих событий не могут быть выполнены одновременно, они несовместимы. Следовательно,

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Теперь обратимся к одному из этих подмножеств, например к A_1. Последовательности из S, принадлежащие A_1, состоят из трех a, трех b и четырех c, взятых в каком-то порядке. По теореме 6 из § 4 главы II общее число различных перестановок этих букв равно

$$\frac{10!}{3!\,3!\,4!}. \tag{3}$$

Поэтому вероятность события A_1 равна

$$P(A_1) = \frac{10!}{3!\,3!\,4!} : 3^{10}.$$

Наконец очевидно, что формула (3) также указывает и число элементарных событий, отвечающих A_2

или A_3. Таким образом, три события A_1, A_2 и A_3 имеют одинаковые вероятности, и

$$P(A) = 3P(A_1) = 3 \cdot \frac{10!}{3!\,3!\,4!} : 3^{10} = \frac{1400}{3^8} \approx 0{,}213.$$

Пример 4. Задача о выборе. *Школьный совет состоит из* 30 *учителей:* 20 *женщин и* 10 *мужчин. Случайным образом производится выбор* 5 *учителей для участия в обсуждении школьных проблем. Какова вероятность того, что в число отобранных войдут* (а) *только женщины*; (б) *в точности двое мужчин?*

Решение. (а) Количество всех равновозможных наборов из 30 человек по 5 равно

$$\binom{30}{5} = 142\,506.$$

Набор, состоящий исключительно из женщин, может быть выбран

$$\binom{20}{5} = 15\,504 \text{ способами.}$$

Таким образом, 15 504 элементарных событий из S соответствуют событию «набор состоит только из женщин». Следовательно,

P (набор состоит только из женщин) =

$$= \frac{\binom{20}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{15\,504}{142\,506} \approx 0{,}109.$$

(б) Набор, состоящий из 2 мужчин и 3 женщин, может быть произведен

$$\binom{10}{2} \times \binom{20}{3} = 51\,300 \text{ способами.}$$

Поэтому

P (набор состоит из 2 мужчин и 3 женщин) =

$$= \frac{\binom{10}{2}\binom{20}{3}}{\binom{30}{5}} = \frac{51\,300}{142\,506} \approx 0{,}360.$$

Замечание. Следующее обобщение предыдущего примера играет важную роль в теории вероятностей. Предположим, что мы имеем группу из n объектов, в которую входит m объектов A и w объектов $\bar{A}$ $(m+w=n)$. Из данных n объектов мы отбираем r. Какова вероятность того, что в число отобранных войдет в точности x объектов A? Данные собраны в таблице 20.

Таблица 20

	A	$\bar{A}$	Всего
В выборке	x	$r-x$	r
Не в выборке	$m-x$	$w-r+x$	$n-r$
Всего	m	w	n

Всего существует $\binom{n}{r}$ возможных наборов. Из них в точности x объектов A содержит $\binom{m}{x}\binom{w}{r-x}$ наборов. Поэтому

$$P(\text{набор содержит } x \text{ объектов } A)=\frac{\binom{m}{x}\cdot\binom{w}{r-x}}{\binom{n}{r}}.$$

Эта только что выведенная формула дает нам распределение вероятностей, отвечающее всевозможным таблицам с двойным входом, подобных табл. 20. Каждому значению x соответствует своя таблица. Распределение вероятностей для множества таких таблиц носит название *гипергеометрического* распределения.

Упражнения к § 8

1. Вернемся к примеру 1 этого параграфа. Какова вероятность того, что первый туз появится на 4 месте? На 47 месте?

2. В условиях этого же примера какова вероятность того, что первый туз появится не позднее 5-й карты? Не позднее 49-й карты?

3. Рассмотрим задачу о днях рождения (пример 2 из § 8). Пусть в комнате находится 40 человек. Какова вероятность того, что по крайней мере двое из них имеют общий день рождения? На улице наугад останавливают 10 человек и спрашивают их о дне рождения. Какова вероятность того, что по крайней мере двое из них назовут один и тот же день? (См. табл. 19.) Оцените вероятность того, что по крайней мере два члена сената Соединенных Штатов Америки родились в один и тот же день, но, может быть, в разные годы *).

4. В комнате находятся k человек. Какова вероятность того, что по крайней мере двое из них родились в один и тот же месяц? (Предположите, что вероятности рождения человека в различные месяцы года равны.)

5. Если в упражнении 4 положить $k=5$, то каков будет ответ?

6. Каждый день 8 водителей приезжают в город и оставляют свои машины на трех автомобильных стоянках. Если каждый водитель выбирает стоянку для своей машины случайным образом, то какова вероятность того, что в некоторый день 5 из этих 8 водителей остановятся на одной стоянке, 2 — на другой и 1 — на третьей?

7. Из партии, состоящей из 20 радиоприемников, случайным образом для проверки отбираются три приемника. Партия содержит 6 неисправных приемников. Какова вероятность того, что в число отобранных войдут (а) только неисправные приемники; (б) только исправные приемники; (в) один неисправный и два исправных приемника?

8. В классе учатся 35 учеников: 20 девочек и 15 мальчиков. Решено при помощи жребия распределить среди учеников 4 билета в театр. Какова вероятность того, что (а) билеты достанутся 4 девочкам; (б) билеты достанутся 2 мальчикам и 2 девочкам?

9. Докажите, что

$$\binom{52-k}{4}+\sum_{j=1}^{k}\binom{52-j}{3}=\binom{52}{4}, \quad k=1, 2, \ldots, 49.$$

(*Примечание*: Используйте правило Паскаля для упрощения этой суммы.)

10. С 1789 года по 1960 год сменилось 33 президента США. Каковы шансы в пользу того, что какие-либо двое из них имели общий день рождения? Выпишите наугад дни рождения 33 человек, у которых вы имеете возможность об этом спросить. Сравните их между собой. Подтверждают ли факты ваши вычисления?

11. В исторических городах туристы часто интересуются надписями на мемориальных таблицах и надгробиях. Турист

*) Сенат Соединенных Штатов состоит из 100 членов. — *Прим. перев.*

случайным образом отбирает 30 надгробий и сравнивает указанные даты смерти 30 лиц. Какова вероятность того, что по крайней мере 2 такие даты будут различаться только годом? Сравните это с результатом эксперимента, описанного в упражнении 10.

§ 9. Случайные выборки

В предшествующей части этой главы мы видели, что определенные физические соображения, связанные с бросанием симметричного предмета, подобного монете или кости, или с вытаскиванием наугад карты из тщательно перемешанной колоды игральных карт, заставляют считать разумным приписывание всем элементарным событиям рассматриваемого пространства событий одних и тех же вероятностей. Бросание монеты, тщательное перемешивание колоды и вытаскивание карты из нее человеком «наугад» — все это условия, необходимые для того, чтобы эксперимент можно было считать чисто «случайным»[1]), т. е. чтобы все исходы эксперимента были равновозможными, имели одинаковые вероятности.

В добавление к простым опытам, которые мы рассматривали выше, рассмотрим более серьезные эксперименты, в которых вероятности различных событий будут заранее определены и надо будет обеспечить такое проведение эксперимента, чтобы вероятности отдельных событий совпадали с уже известными нам. В некоторых из таких экспериментов, как, например, в известной задаче об отборе призывных номеров солдат в конце 1940 года, возможно провести только один опыт. Другие эксперименты можно повторять много раз, как, например, в задаче о случайном блуждании (см. главу I).

В этом и следующих двух параграфах мы рассмотрим примеры таких экспериментов. Мы обсудим способы получения желаемых вероятностей, как одинако-

[1]) Выражения «случайно», «случайность», «наугад» употребляются не обязательно только для описания ситуаций, в которых все исходы имеют равные вероятности; правда, в обыденной речи они часто используются именно в таком смысле. Мы будем всегда использовать эти выражения в этом их смысле, если только не будет оговорено противное.

вых, так и различных, при помощи определенных физических процессов, а также способы организации этих процессов. В § 11 мы опишем некоторый физический процесс, который даст нам возможность отбирать определенные объекты из некоторого множества так, чтобы вероятность выборки совпадала с заранее заданной.

Пример 1. Входной приз. *На танцах в школе входной приз получает та из k пар, которая приобрела выигрышный входной билет. Комиссия, которая организовала танцы, хочет сделать так, чтобы шансы каждой пары получить приз были одинаковы, т. е, чтобы вероятность выигрыша приза каждой парой равнялась $1/k$. Билеты, на каждом из которых отмечено, какой из k пар он принадлежит, помещаются в урну и перемешиваются. После этого человек с завязанными глазами достает из урны один билет, который и выигрывает.*

Критика. На первый взгляд кажется, что описанная процедура обеспечивает равенство шансов для всех пар. Однако если k велико, например более 100, то невозможно достаточно тщательно перемешать билеты в урне, так как процедура перемешивания не будет вполне эффективной. Можно недоумевать по поводу причин, в силу которых вероятности отдельных исходов не будут равны, но тем не менее исследование многих повторений этого эксперимента показывает, что искомая вероятность зависит от времени прихода на танцы, т. е. от того, где был расположен данный билет в урне перед перемешиванием. Поэтому для каждого билета вероятность оказаться выигравшим не будет равна $1/k$, и мы можем только поставить в известность об этом комиссию, организующую танцы.

Пример 2. Призывные номера. *В течение второй мировой войны было необходимо определить порядок, в котором военнообязанные мужчины должны призываться на военную службу. Каждый мужчина на районном призывном пункте получал номер от* 1 *до* 9000. (*Это число заведомо превышало количе-*

ство военнообязанных мужчин, которых должны были призывать на этом пункте.)

Каждый номер помещался в круглую капсулу, после чего эти капсулы помещались в барабан и при вращении барабана перемешивались. После этого из барабана капсулы вынимались одна за другой. Пространство событий этого эксперимента представляет собой множество 9000! *перестановок из данных номеров. Без сомнения, эксперимент был организован так, чтобы вероятность получения каждой из этих перестановок равнялась* 1/9000! *После перемешивания официальные лица вынимали капсулы из барабана, причем первые извлеченные номера объявлялись по радио.*

Снова возникает вопрос об эффективности перемешивания. Окончательная последовательнсость номеров часто имела неожиданные свойства, и было написано несколько научных статей для того, чтобы доказать неравновероятность всех перестановок. Из предыдущего обсуждения физических условий, которые необходимо выполнить для достижения равных вероятностей элементарных событий, мы знаем, что основным фактором, обеспечивающим это, является тщательность перемешивания капсул: только весьма тщательное перемешивание капсул дает нам уверенность в достижении равных вероятностей.

Ниже приводится распределение по частоте первых 50 номеров:

Номера между	Встретились
0001—1000	5
1001—2000	0
2001—3000	3
3001—4000	1
4001—5000	7
5001—6000	8
6001—7000	11
7001—8000	7
8001—9000	8
	Всего 50 номеров

Заметим, что среди номеров от 1 до 4000 встретилось слишком мало таких, которые попали в число первых 50 номеров. Мы ожидали, что их будет примерно $4/9 \cdot 50$, или около 22, тогда как на самом деле их оказалось всего 9. Это сразу приводит к мысли о том, что капсулы лежали слоями и не были тщательно перемешаны. Следует также отметить, что среди 50 вытянутых номеров все 5 номеров, меньших 2000, заключались между 100 и 199. Конечно, любое множество из 50 номеров, выбранных из данных 9000, может обладать подобными исключительными свойствами. Существует соответствие между появлением такого рода исключительных свойств и между особенностями проведения этого эксперимента, связанными с недостаточно тщательным перемешиванием, которые приводят нас к сомнениям в том, что каждая перестановка имеет заданную вероятность. Все это становится еще более очевидным, когда знакомишься с процессом перемешивания поближе, что называется из первых рук. В общем мораль (с ней хорошо знаком каждый повар!) заключается в том, что тщательно перемешать не так просто, как кажется.

Пример 3. Медицинский эксперимент. *Врач предлагает новый курс лечения некоторой болезни. Желательно сравнить это новое лечение со старым. Из* 20 *пациентов, которые пригодны для этого исследования, половине предлагается новый курс лечения, а половине — старый. Эти* 20 *пациентов разбиваются на* 10 *пар, причем каждая пара состоит из пациентов, болезнь которых находится примерно на одной стадии развития. Доктор имеет в виду применить к одному пациенту из каждой такой пары новый курс лечения, а к другому — старый. Это предохраняет его от положения, при котором болезнь у* 10 *человек, отобранных для испытания нового метода, случайно окажется более запущенной или, напротив, более легкой, чем у остальных* 10 *пациентов.*

Пока все хорошо. Однако как доктору отобрать того пациента пары, к которому будет применен новый курс лечения? Можно, конечно, думать, что это несущественно. Однако доктор знает, что, как бы тщательно ни группировать людей в пары, совершенным образом это сделать все равно нельзя. И он опасается, что знание своих пациентов приведет его к тому, что он подсознательно отберет для проведения нового курса лечения в каждой паре пациента, у которого болезнь протекает в более легкой форме, чем у другого пациента. А это будет систематически приводить к тому, что результаты испытаний окажутся благоприятными для нового курса лечения. Каким образом доктор сможет обеспечить отсутствие такого рода ошибки в проведении эксперимента?

Пространство событий состоит из $2^{10}=1024$ способов, какими можно отобрать одного пациента из каждой пары. Поскольку нет никаких медицинских причин для предпочтения одного выбора другому, врач хочет обеспечить равенство вероятности каждого выбора числу 1/1024. Какой физический процесс он может использовать для этого? Один из способов — выписать все 1024 варианта выбора пациентов на листках бумаги и после тщательного перемешивания выбрать один наугад. Другой способ заключается в следующем: он может произвольным образом приписать одному пациенту каждой пары букву *Г*, а другому — букву *Ц* и 10 раз бросить монету. Если при первом бросании монета упадет гербом, то новый курс лечения будет применен к пациенту *Г* первой пары; в противном случае — к пациенту *Ц*; аналогично для второй, третьей, ..., десятой пары.

Экспериментальное решение вероятностных задач. Иногда в процессе решения сложной задачи, относящейся к применениям теории вероятностей, математик может испытывать некоторые трудности в получении точного решения. И если в этой задаче трудно выделить какой-либо подслучай, на котором можно было бы проверить точность решения, математик может обратиться к эксперименту.

Проиллюстрируем это на примере простой задачи. Из чисел $1, 2, 3, \ldots, 10$ выбираются одно за другим два числа так, что выбор любой их упорядоченной пары равновозможен. Какова вероятность того, что большее число в паре превосходит 5? После того как вы получите ответ на этот вопрос, проверьте его при помощи случайной выборки двух карт одна за другой из 10, перенумерованных числами от 1 до 10 карт, повторяя этот эксперимент большое количество раз. Сравните эмпирический результат с тем ответом, который вы получили теоретически.

Некоторые вероятностные задачи настолько сложны для теоретического решения, что для их решения проще провести тысячи повторений соответствующего эксперимента (для чего обычно используются быстродействующие вычислительные машины), чем получить ответ теоретическим путем. Числовой ответ получается при помощи усреднения полученного множества результатов или при помощи какого-либо другого способа и используется в практической работе. Такой метод решения вероятностных задач называется *методом Монте-Карло.*

Случайные выборки для решения невероятностных задач. Метод Монте-Карло применяется не только для решения вероятностных задач. Математик, занимающийся прикладными вопросами, часто находит нужным связать какую-либо задачу, не имеющую вероятностного характера, с вероятностной задачей. После этого он может использовать для решения этой вероятностной задачи экспериментальные методы, которые не обязательно будут во всем подобны вышеописанным. Другими словами, он использует эмпирические вероятностные методы для решения невероятностных задач.

Проиллюстрируем это на следующем примере. Предположим, что мы хотим приблизительно определить площадь области A (рис. 9), ограниченной какой-то сложной кривой. Пусть наша область заключена внутри единичного квадрата и мы имеем метод, позволяющий бросать наугад точки на этот единичный квадрат. Здесь выражение «наугад» означает, что вероятность попадания точки на произвольный прямоугольный участок квадрата площади p равна p.

Поэтому вероятность попадания точки в область A равна площади области A.

При бросании точек внутрь квадрата некоторые из них попадут внутрь области A, а другие не попадут. Выполним бросание нескольких сотен точек внутрь единичного квадрата. Доля точек, попавших в A, будет представлять собой достаточно хорошее приближение к величине площади A. Удобный и простой

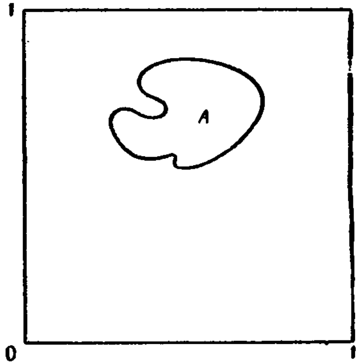


Рис. 9. Область A, ограниченная сложной кривой.

метод выполнения этого эксперимента заключается, например, в следующем. Перерисуем рис. 9 таким образом, чтобы сторона единичного квадрата была размером приблизительно в 5—10 *см*, после этого станем от этой мишени в 8—10 шагах и будем бросать в мишень стрелу. Будем учитывать только попадания стрелы внутрь квадрата. Площадь A приблизительно оценивается отношением числа попаданий стрелы в область A к числу всех попаданий внутрь квадрата.

§ 10. Случайные числа

После того как кто-либо достаточно много раз выполнит опыты с бросанием монеты или кости или с вытаскиванием карты из предварительно перетасованной колоды, у него возникнет естественное желание получить более удобный и быстрый метод выполнения эксперимента, математически эквивалентного этим экспериментам. Если мы хотим отобрать 500 множеств, каждое из которых состоит из трех карт, то сам процесс тасовки колоды окажется настолько трудоемким и отнимет так много времени, что усталость неизбежно приведет к нетщательному перемешиванию карт и к потере чистой «случайности». Карты, шары в урне, листки бумаги — все это хорошо использовать тогда, когда эксперимент недолог; если же его приходится проводить сотни или, как часто встречается при решении задач, тысячи раз, их использование становится невозможным. Для проведения подобных экспериментов математики используют *случайные числа.*

Что такое случайные числа? Таблицы случайных чисел представляют собой таблицы однозначных чисел, полученных в результате какого-либо случайного процесса. Последовательности случайных чисел могут быть любой желаемой длины. А опубликованные таблицы случайных чисел содержат до 1 000 000 чисел.

Строение таблицы случайных чисел. Большинство таблиц случайных чисел построены на основе случайной выборки в пространстве событий, состоящем из

Таблица 21

Краткая таблица случайных чисел

Строка	Столбцы 1–5	Столбцы 6–10
1	22719	92549
2	17618	88357
3	25267	35973
4	88594	69428
5	60482	33679
6	30753	19458
7	60551	24788
8	35612	09972
9	43713	18448
10	73998	97374

10 чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Многие физические процессы, которые можно применить для организации выбора числа «наугад», дают достаточно хорошую уверенность в том, что вероятность выбора каждого числа равна 1/10 и что последовательные выборы независимы. Соответствующий процесс выполняется, в результате чего генерируются тысячи случайных чисел, которые и выписываются в порядке их появления. Таблица 21 представляет собой небольшую выборку таблицы случайных чисел, полученных в результате такого процесса; в конце книги приведена более обширная таблица I случайных чисел. Одним из способов получения таких чисел является одновременное бросание игральной кости и монеты, причем все бросания, в которых на кости выпало 6 очков, игнорируются. Парам

$$(Г, 1),\ (Г, 2),\ (Г, 3),\ (Г, 4),\ (Г, 5),$$
$$(Ц, 1),\ (Ц, 2),\ (Ц, 3),\ (Ц, 4),\ (Ц, 5)$$

сопоставляются числа

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Если монета и кость достаточно близки к идеальным, т. е. в достаточной степени симметричны и однородны, то вероятность получения каждого числа равна 1/10.

Читатель, желающий провести случайную выборку, может использовать эти таблицы так, как описано в § 11. Таким образом, он заменяет самостоятельное проведение случайного процесса использованием того случайного процесса, в результате которого была составлена таблица случайных чисел. Таблицы, приведенные в книге, удобны для использования и, кроме того, они основаны на более корректных физических процессах, нежели те, которые каждый может за несколько минут организовать сам.

Следует еще раз обратить внимание на то, что множество чисел не может само по себе являться случайным или не являться таковым. Например, если некто выписал множества $\{8, 2, 5\}$ или $\{9, 9, 9\}$, то нет никакой причины, которая позволила бы утверждать, что первое из них «случайно», а второе — «закономерно». Мы говорим, что некоторое множество представляет собой множество случайных чисел, если выполнены следующие условия:

(1) известны вероятности в пространстве событий для этих чисел;

(2) существует физический процесс для последовательного получения этих чисел, причем есть достаточно большая уверенность в том, что вероятность получения данного числа в результате этого процесса совпадает с заданной вероятностью.

Термин «случайные числа» представляет собой сокращение термина числа «генерированные случайным образом», причем вероятность генерирования каждого из них равна 1/10.

§ 11. Использование таблиц случайных чисел

Таблицы случайных чисел используются в разнообразных задачах. Ниже мы приведем несколько примеров, иллюстрирующих это.

Заметим, что не всегда следует начинать выборку чисел из таблицы случайных чисел каждый раз с начала таблицы. Однако, если в вашем распоряжении имеется большая таблица случайных чисел, легко устранить погрешности, которые при этом могут возникнуть. Следует начать последовательную выборку чисел с самого начала таблицы и продолжать ее до тех пор, пока вы не получите требуемое количество случайных чисел. А затем, при решении следующей задачи начинайте выборку со следующего числа.

Пример 1. *В одном из предыдущих примеров от нас требовалось отобрать пары различных чисел из десяти чисел* 1, 2, ..., 10 *так, чтобы вероятности выбора каждой пары были равны.*

В таблице случайных чисел часто бывает удобным рассматривать число 0 как обозначение для числа 10; мы так и поступим в данном примере. Начнем отбор пар с верхнего левого элемента табл. 21, на месте которого стоят пять чисел: 22719. Поскольку первое число в таблице равно 2, первым элементом первой пары будет 2. Следующее число в таблице равно 2. Поскольку числа в каждой упорядоченной паре должны быть различны, это число не может являться вторым элементом пары. Следующее число равно 7. Следовательно, наша первая пара чисел — (2, 7). Продолжая, мы замечаем, что следующее число в таблице равно 1, и поэтому мы записываем 1 в качестве первого элемента второй упорядоченной пары. Следующее число в таблице равно 9, и наша вторая пара — (1, 9).

Один ряд из 5 чисел уже исчерпан, поэтому мы переходим ко второму ряду, который состоит из чисел 17618. Первое из этих чисел равно 1, а второе 7, поэтому наша следующая пара равна (1, 7). Мы продолжаем таким образом до тех пор, пока не получим столько пар, сколько требуется.

Пример 2. Медицинская задача. *Врач, проводящий медицинский эксперимент с десятью парами пациентов* (пример 3 § 9), может поступить следующим образом. Сначала он выпишет 10 пар пациентов по порядку в две колонки:

Джонс	Смит
Джонсон	Вильямс
Гофман	Вуд
Росс	Ферлоу
Жанетти	Вильсон
. . . .	. . . .

Предположим, что мы уже использовали первые два ряда случайных чисел в табл. 21 для решения предыдущего примера. Будем рассматривать случайные числа в таблице начиная с третьей строки первого столбца. При этом если нам встретится одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, то для испытания нового курса лечения мы отберем соответствующего пациента из первой колонки; в противном случае — из второй колонки. Последовательность случайных чисел в таблице, которую мы теперь будем использовать, равна 25267. Поэтому в первых пяти парах будут отобраны Джонс, Вильямс, Гофман, Ферлоу и Вильсон.

Пример 3. Задача о четырех владельцах лодки. *Предположим, что 4 юношей приобрели лодку, причем Джо внес 10% стоимости лодки, Билл — 20% стоимости, Том — 30% стоимости и Сэм — 40%. Четвертого июля*) каждый из них хотел бы воспользоваться лодкой, и они решают бросить жребий для определения того, кому достанется это право. Сэм и Том утверждают, что, поскольку они внесли больше всех денег, их шансы получить лодку должны быть большими, нежели шансы других: они хотят, чтобы их шансы были равны той части стоимости лодки, которую они внесли.*

По существу Сэм и Том хотят, чтобы пространство событий эксперимента, состоящее из четырех элементарных событий: Джо, Билл, Том, Сэм, было таково, чтобы этим исходом были приданы вероятности 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4 соответственно. Если использовать таблицу случайных чисел, то этого легко достигнуть следующим образом. Завяжем глаза одному из мальчиков и попросим его поставить точку в таблицу случайных чисел. Отметим теперь число, расположенное ближе всего к этой точке. Если это число равно 0, то лодку получит Джо; если оно равно 1 или 2, то лодку получит Билл; если оно равно 3, 4 или 5, то лодку получит Том; если же оно равно 6, 7, 8 или 9, то лодку получит Сэм.

Пример 4. Использование не всех чисел. *Предположим, что мы хотим получить последовательность случайных чисел, по которой мы бы смогли сделать выборку в пространстве событий, состоящем из трех элементарных событий A, B и C, причем вероятность этих событий должна равняться* 1/6, 2/6 *и* 3/6 *соответственно.*

---

*) Четвертого июля — национальный праздник США, день провозглашения независимости. — *Прим. перев.*

Для выполнения этого применима следующая методика:

Число в таблице	Элементарное событие
0	A
1	B
2	B
3	C
4	C
5	C
6, 7, 8, 9 (опускаются)	Никакого события.

Таким образом, если нам в таблице встретится одно из чисел 6, 7, 8, 9, мы его опускаем. Нас интересуют только случайные числа 0, 1, 2, 3, 4, 5. Их общая вероятность равна 1 и, поскольку они равновероятны, вероятность каждого из них равна 1/6.

Пример 5. Получение более точных вероятностей. *Предположим, что нам необходимо отобрать последовательность элементарных событий из пространства событий, состоящего из* 4 *элементарных событий* A, B, C, D, *так, чтобы вероятности оказаться отобранными в последовательность для этих событий равнялись соответственно* 0,11; 0,25, 0,34; 0,30.

Несмотря на то что пространство событий для построения случайных чисел состоит из 10 элементов, мы можем рассматривать два последовательных числа в таблице как одно из 100 равновозможных двухзначных чисел: 00, 01, 02, 03, ..., 10, 11, ..., 20, ..., 99. Каждое из таких чисел может встретиться в таблице с вероятностью 1/100. (Почему?)

После этого установим соответствие следующим образом:

Двухзначное случайное число	Элементарное событие
00—10	A
11—35	B
36—69	C
70—99	D.

Удобнее выписывать двузначные числа из таблицы по столбцам, чем по строчкам. Например, если мы начинаем с первого и второго столбца четвертой строки, мы получаем случайные числа 88, 60, 30, 60, ..., которые соответствуют последовательности элементарных событий D, C, B, C, ...

Пример 6. Выборка элементов из списка. *Предположим, что для некоторого исследования нам необходимо отобрать* 200 *из* 800 *учеников какой-то школы.*

Мы можем поступить так: припишем каждому ученику один из трехзначных номеров 001, 002, ..., 800. Затем обратимся к таблице случайных чисел и отберем последовательные трехзначные числа. Если, например, мы начнем это делать с первой строки таблицы 21, используя 6, 7 и 8-й столбцы, то первые 3 случайных числа будут равны 925, 883 и 359.

Каждое трехзначное число либо равно какому-то номеру, использованному при составлении списка учеников, либо не равно. Если трехзначное число совпадает с номером какого-либо ученика, то мы включаем его в число отобранных, если он, конечно, еще туда не включен. В противном случае мы опускаем это число и переходим к следующему. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут отобраны 200 учеников. Эти ученики представляют собой случайную выборку из данного списка, содержащего 800 учеников.

Упражнения к § 9, 10, 11

1. Опишите какой-либо физический процесс для организации случайного отбора двух человек из данных десяти. Постройте соответствующее пространство событий и определите вероятности в нем.

2. Придумайте самостоятельно какую-либо задачу о случайной выборке и опишите ее. Постройте пространство событий этого эксперимента и определите вероятности элементарных событий. Опишите физический процесс, при помощи которого можно получить эту выборку.

3. Вычислите вероятности элементарных событий в задаче о случайном выборе упорядоченной пары различных чисел из чисел 1, 2, ..., 10. Чему равна вероятность того, что большее

число в паре превосходит 5? Выполните соответствующий эксперимент.

4. Нарисуйте квадрат (с вершинами в точках с координатами в декартовой прямоугольной системе координат): (0,0); (0,1); (1,0); (1,1). Проведите дугу окружности радиуса 1 с центром в точке (0,0), расположенную внутри квадрата. Как использовать эту фигуру, метод Монте-Карло и таблицу случайных чисел для оценки числа π?

5. Организуйте случайную выборку, состоящую из 30 страниц этой книги. Запишите число тех из них, которые содержат таблицу или рисунок. Оцените количество страниц в этой книге, содержащих таблицу или рисунок.

6. Вернемся к примеру 6 из § 11. Какое пространство событий отвечает описанному в нем эксперименту? Каковы вероятности элементарных событий?

7. Вы хотите выбрать наугад три имени в большой телефонной книге для того, чтобы обсудить с выбранными лицами телевизионную программу. Каким образом вы можете отобрать эти три имени?

8. Предложите метод использования таблицы случайных чисел для решения задачи о выборе призывных номеров. (См. пример 2 § 9.)

9. Вернитесь к задаче о четырех владельцах лодки (пример 3 § 11). Как вы измените схему проведения жребия, если владельцев лодки будет трое с паями соответственно 20%, 30% и 50%.

10. Как вы измените методику проведения эксперимента примера 4 § 11, если пространство событий будет состоять из четырех элементарных событий A, B, C и D с вероятностями 0,2; 0,3; 0,4; 0,1 соответственно?

11. Измените схему решения примера 5 § 11 для случая пяти элементарных событий A, B, C, D и E с вероятностями 0,23; 0,32; 0,35; 0,06 и 0,04 соответственно.

§ 12. Заключение

Целью этой главы было ознакомление с первоначальными идеями теории вероятности и статистики на интуитивном уровне. В результате этого

(1) вы получили некоторое представление о вероятностях и познакомились с тем, каким образом они используются;

(2) вы подготовились к тому, чтобы принять определенные допущения, которые нам предстоит сделать при изложении более формальной математической модели;

(3) вы ознакомились с понятиями и обозначениями, которые будут использованы впоследствии.

Теперь вы понимаете, что математическая теория, когда она применяется к анализу реальных ситуаций, «работает» не всегда достаточно хорошо и что ее значение зависит от того, найдены ли условия, при которых эта теория представляет собой хорошее приближение к реальной жизни. Так, при рассуждениях, связанных с бросанием игральной кости, мы использовали понятие математического куба, представляющего собой совершенно однородный идеальный куб; вероятность выпадения любой грани такого куба равнялась 1/6. Если же мы возьмем какой-либо реальный кубик, тщательно изготовленный из однородного материала, то этот кубик будет достаточно хорошим приближением к нашему теоретическому кубу. Мы можем ожидать в этом случае, что, хотя вероятность выпадения каждой грани не будет в точности равна 1/6, она будет очень близка к этому значению. Разумеется, если кубик неправильной формы или неоднороден, то эта вероятность может сильно отличаться от 1/6.

Однако, если мы не знаем вероятностей исходов опыта и интересующих нас событий, потеряно еще не все. Одной из функций теории вероятностей является установление частот реализации различных исходов опыта, если известны относящиеся к рассматриваемой задачи вероятности. Но другой функцией теории вероятности и статистики является получение достоверных заключений о величинах вероятностей на основе экспериментальных данных в том случае, когда эти вероятности нам известны.

Все вышеописанные понятия и законы *остаются в силе*, даже если мы совсем забудем об эксперименте с бросанием кости и о вероятностях выпадения той или иной ее грани. Позднее мы продолжим наше знакомство с теорией вероятностей в ее более полном виде. При этом нам придется рассматривать вероятности, которые нам заранее неизвестны, и неравновозможные события. И из этой более полной теории мы выведем статистические методы, которые применяются при решении многих важных задач.

Применимость методов теории вероятностей и в таких ситуациях, где вероятности заранее неизвестны, имеет очень большое значение, поскольку большинство научно-технических задач имеет именно этот характер. В реальных ситуациях мы редко базируемся на предположении о том, что вероятности, полученные подсчетом числа благоприятных случаев, совпадают с «идеальными» вероятностями, отражающими истинное положение дела. Например, бессмысленно точно вычислять вероятность получения исправной электрической лампочки в процессе ее производства; вместо этого достаточно предположить, что рассматриваемое событие имеет некоторую вероятность, которую мы пока не знаем, и оценить эту вероятность на основе наблюдений за процессом производства лампочек.

В практической работе идеализированные вероятности, полученные, например, подсчетом, используются в качестве гипотез, пригодность которых определяется на основе проверки. Мы можем полагать, что мальчиков рождается столько же, сколько девочек, и поэтому можем считать вероятность рождения мальчика равной 1/2. После изучения статистических данных о рождаемости в Соединенных Штатах мы убедимся в том, что в промежутке с 1935 по 1952 г. мальчиков родилось больше, чем девочек: так, например, в 1950 г. родилось 1 823 555 мальчиков и 1 730 594 девочки[1]). Поэтому мы можем оценить вероятность рождения мальчика числом 1 823 555/3 554 149, приблизительно равным 0,513, и на этой основе изменить свое первоначальное мнение о том, что эта вероятность равна 0,5, ибо число 0,5 является лишь приближением к истинному значению искомой вероятности и притом довольно грубым.

Остальная часть этой книги посвящена более формализованному развитию идей теории вероятностей и статистики.

[1]) The World Almanac, 1956, New York, World Telegram, 1956, стр. 302.

ГЛАВА IV

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБЫТИЙ

§ 1. Введение

В гл. III мы получили несколько общих результатов, относящихся к пространству событий с равновозможными исходами. Например, мы нашли, что для событий A и B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (1)$$

В этой главе мы примем некоторое количество аксиом и определений, которыми можно воспользоваться также и в том случае, когда исходы эксперимента неравновозможны. Эти аксиомы можно счесть естественными и убедительными; кроме того, они достаточны для получения на их основе общих результатов, подобных соотношению (1). Однако перед тем как сформулировать эти аксиомы, мы рассмотрим простой опыт, иллюстрирующий необходимость этих аксиом или допущений. Этот опыт

(1) имеет в точности два исхода;

(2) каждый исход имеет определенную вероятность, заключенную между нулем и единицей;

(3) исходы эксперимента неравновозможны;

(4) не существует явного способа определить вероятности каждого из двух исходов.

Опыт с волчком. Вообразим, что волчок, изображенный на рис. 10, подбрасывается вверх и затем падает на твердую поверхность, на которой он вращается, пока не остановится. Остановившийся, волчок может оказаться в двух положениях: (U) и (D) рис. 10.

Здесь мы также имеем два возможных исхода эксперимента, подобно опыту с бросанием монеты, где исходами являлось выпадение герба или выпадение цифры. Каждый раз при бросании какого-либо волчка кажется разумным предположить, что исходы U и D имеют определенные вероятности $P(U)=p$ и $P(D)=1-p$. Но даже тщательно осмотрев волчок, невозможно сказать, какое именно значение имеет число p, заключенное между 0 и 1. В частности, нет никаких причин полагать, что $p=1/2$, поскольку исходы

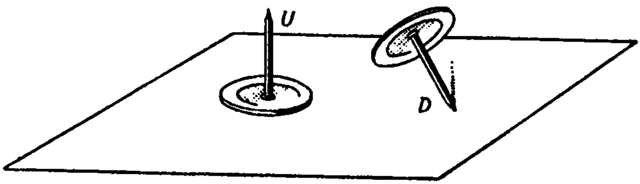


Рис. 10. Волчок.

U и D совсем не равноправны и в силу этого не обязательно равновозможны.

Каким же образом можно установить величину $P(U)$? Давайте в одних и тех же условиях повторим бросание волчка, например 50 раз; затем вычислим долю числа случаев, когда волчок оказался в положении U. Эта доля не равна точно $P(U)$; она представляет собой некоторую *оценку* для $P(U)$. Мы не можем рассчитывать получить точное значение $P(U)$ при помощи такого рода экспериментов. Даже для абсолютной симметричной монеты доля числа выпадения гербов в серии из 50 бросаний, как правило, не окажется равной 1/2. Однако если мы будем считать, что монета представляет тонкий плоский диск, который энергично подбрасывается в воздух, причем перед падением на плоскую поверхность он совершает достаточно много оборотов, то кажется резонным считать, что два исхода — герб и цифра — равновозможны, т. е. что $P(Г)=P(Ц)=1/2$. Если бы бросание волчка стало популярной игрой, то безусловно нашлись бы ученые или статистики, развившие теорию, которая предсказывала бы величину $P(U)$ для данных размеров волчка, материала, из которого он сделан, и для заданных условий бросания. Обстоятельство, к которому мы пришли, заключается в следующем: в экспериментах с монетами, игральными костями и картами разумно предсказывать вероятности теоретически, однако в опыте с волчком это сделать весьма трудно, что, впрочем, не мешает нам верить в существование определенной вероятности $P(U)$.

Предположим, что наш волчок падает в положение U приблизительно 40 раз из 100: тогда мы можем оценить $P(U)$ дробью 0,4. Если 0,4 — это точное значение искомой вероятности, то мы можем применить к ней идеи и методы, которые были разработаны выше при исследовании экспериментов с бросанием монеты или кости. Но если это и не так, то мы во всяком случае можем предположить, что существует неизвестное нам значение вероятности $P(U)$, которое мы обозначим через p.

Пример 1. Два бросания. *Бросим волчок дважды. Пусть вероятность остановиться в положении U при каждом бросании равна p. Какова вероятность того, что волчок оба раза остановится в положении U?*

Решение. Предположим, что бросания независимы. Наше пространство событий состоит из упорядоченных пар, которые можно представить так:

		Второе бросание	
		U	D
Первое бросание	U	(U, U)	(U, D)
	D	(D, U)	(D, D)

Пусть событие A заключается в получении U при первом бросании, а событие B — в получении U при втором бросании. Элементарное событие (U, U), вероятность которого мы хотим найти, представляет собой событие $A \cap B$. Следовательно, вероятность того, что волчок оба раза окажется в положении U, равна $P(A \cap B)$.

Из опыта, накопленного при изучении пространств событий с равновозможными исходами, мы знаем, что в таких пространствах вероятность пересечения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Мы можем предположить, что это справедливо и в более общем случае определения вероятности

$$P(A) \cdot P(B) = p^2$$

элементарного события (U, U). Для получения этого результата можно применить и другой способ рассуждений. Рассмотрим долгую последовательность опытов, каждый из которых состоит в бросании двух волчков. В этой последовательности доля случаев, когда первый волчок окажется в положении U, приблизительно равна p. А *среди них* доля случаев, когда и второй волчок окажется в положении U, также приблизительно равна p. Следовательно, мы можем ожидать, что общая доля случаев, когда *оба* волчка оказались в положении U, приблизительно равна p^2. Таким образом, оба способа рассуждения приводят нас к одному значению вероятности исхода (U, U):

$$P(\{(U, U)\}) = p^2. \tag{2}$$

Обозначения. Разные скобки в равенстве (2) используются в различных смыслах. Внутренние скобки (U, U) имеют тот же смысл, что и скобки, в которые заключаются координаты точки плоскости, скажем $(3, 4)$: под (U, U) понимается определенное элементарное событие. Следующие за ними фигурные скобки охватывают множество, единственным элементом которого является $\{(U, U)\}$. Наконец, внешние скобки имеют тот же смысл, что и скобки в выражении $P(E)$, означающем вероятность множества E. Однако эта коллекция скобок в равенстве (2) оказывается слишком разнообразной и с ней трудно обращаться, поэтому мы позволим себе употреблять логически менее аккуратную, но куда более приемлемую в типографском отношении запись $P(U, U)$ и будем просто писать

$$P(U,\ U) = p^2.$$

Подобным же образом определим вероятность исхода (U, D):

$$P(U,\ D) = pq,$$

где

$$q = 1 - p,$$

— вероятность того, что волчок остановился «острием вниз».

Если положить, что, скажем, 0,4 есть истинное значение вероятности $p = P(U)$, то

$$P(U,\ U) = (0{,}4)(0{,}4) = 0{,}16.$$

Аналогичные рассуждения убеждают нас, что

$$P(U,\ D) = P(U) \cdot P(D) = (0{,}4)(0{,}6) = 0{,}24,$$
$$P(D,\ D) = (0{,}6)(0{,}6) = 0{,}36.$$

Упражнения к § 1

1. В примере с волчком найдите вероятности четырех возможных исходов двух бросаний, предположив, что $P(U) = 0{,}3$.

2. Используйте результаты упражнения 1 для определения вероятностей того, что из двух бросаний (а) по крайней мере один раз волчок остановился в положении U; (б) второй раз волчок остановился в положении D; (в) второй раз волчок остановился в положении D, если известно, что первый раз он остановился в положении U (сравните ваш ответ с ответом на вопрос (б)); (г) оба волчка остановились в одном положении.

3. Чему равна вероятность того, что оба волчка остановились в положении U, если известно, что они упали одинаковым образом?

4. Предположим, что некоторый волчок бросается три раза подряд, причем эти бросания независимы; обозначим $P(U) = p$ и $P(D) = q = 1 - p$. Выпишите пространство событий всех возможных исходов этого эксперимента. Определите вероятности элементарных событий.

5. В условиях упр. 4 положите $P(U) = p = 0{,}4$. Найдите вероятность того, что волчок дважды окажется в положении U и один раз в положении D.

6. Некоторый волчок, для которого $P(U)=p=0{,}2$, бросается четыре раза. Определите вероятности следующих исходов:

(а) $UUUD$; (б) $UUDU$; (в) $UDUU$; (г) $DUUU$; (д) $UUDD$; (е) $UDUD$; (ж) $DUUD$; (з) $UDDU$; (и) $DUDU$; (к) $DDUU$; (л) трижды U и один раз D; (м) дважды U и дважды D.

7. Предположим, что длина острия волчка на рис. 10 меняется от 0 до некоторого большого положительного значения L. Что будет происходить с вероятностью $P(U)$, когда длина волчка будет стремиться к 0? Когда длина волчка будет стремиться к L? Обсудите это.

8. В упр. 4 вы определили вероятности элементарных событий. Равна ли сумма этих вероятностей 1, как это следует ожидать?

§ 2. Пространство событий и вероятность

В этом параграфе мы опишем аксиомы, которым подчиняются вероятности; при этом понятие отвечающего данному эксперименту *пространства событий* мы будем считать известным. Напомним, что пространством событий, отвечающим некоторому эксперименту, называется такое множество элементов, что любое выполнение эксперимента приводит к исходу, соответствующему в точности одному элементу множества. Мы ограничимся рассмотрением только *конечных* пространств событий, т. е. таких пространств, которые содержат конечное число элементарных событий. В конечном пространстве событий каждое множество элементарных событий называется *событием*. *Элементарные* события выделяются из числа всех событий тем, что они содержат ровно *один* элемент пространства событий[1]).

Если выполнение эксперимента приводит к исходу, который соответствует элементарному событию, входящему в подмножество E, мы говорим, что реализовалось событие E. Пустое множество также является событием; однако, поскольку оно не имеет элементов, это событие никогда не реализуется.

---

[1]) Так определенные элементарные события будут обязательно *попарно несовместимыми*. Система элементарных событий образует *разбиение* пространства событий.

Следующий пример иллюстрирует понятие события в пространстве событий, состоящем из четырех элементарных событий.

Пример 1. Статистика зрелищных мероприятий. *Производится опрос, связанный с планами улучшения обслуживания населения зрелищными мероприятиями. Каждому из 100 опрашиваемых задаются два вопроса:*

(1) *Регулярно ли вы посещаете кинотеатры?*

(2) *Регулярно ли вы смотрите телевизионные передачи?*

Обсуждение. Каждый опрашиваемый принадлежит к одной из следующих четырех групп:

e_1: регулярно посещает кинотеатры и смотрит телевизионные программы;

e_2: регулярно посещает кинотеатры, но не смотрит телевизор;

e_3: не посещает кинотеатров, но телевизор смотрит;

e_4: не ходит в кино и не смотрит телевизор.

Эксперимент, заключающийся в опросе 100 человек и классификации их по четырем группам, можно рассматривать как 100 выполнений более простого эксперимента, заключающегося в опросе одного человека и отнесении его к той или иной группе. Множество

$$S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

представляет собой пространство событий для этого более простого эксперимента, поскольку каждое выполнение его приводит в точности к одному из элементов этого множества. Изучение этого пространства событий S дает нам также схему для получения результатов, относящихся к исходному эксперименту.

Непустыми подмножествами S являются

$$\begin{array}{llll}
\{e_1\}, & \{e_1, e_2\}, & \{e_2, e_4\}, & \{e_1, e_3, e_4\}, \\
\{e_2\}, & \{e_1, e_3\}, & \{e_3, e_4\}, & \{e_2, e_3, e_4\}, \\
\{e_3\}, & \{e_1, e_4\}, & \{e_1, e_2, e_3\}, & \{e_1, e_2, e_3, e_4\}. \\
\{e_4\}, & \{e_2, e_3\}, & \{e_1, e_2, e_4\}, &
\end{array}$$

Каждое из этих подмножеств есть *событие.* Теоретически пустое множество также является событием, хотя и тривиальным. Подмножества

$$E_1 = \{e_1\}, \quad E_2 = \{e_2\}, \quad E_3 = \{e_3\}, \quad E_4 = \{e_4\}$$

содержат в точности по одному элементу; это *элементарные события.* Каждое событие, отличное от пустого множества, представляет собой объединение одного или нескольких различных элементарных событий. Эти события можно также описать словесно; например, выражение «регулярно посещает кинотеатры» описывает событие $E_1 \cup E_2 = \{e_1, e_2\}$; а выражение «не посещает кино регулярно или часто смотрит телевизор» описывает событие $\{e_1, e_3, e_4\}$. Событие $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ совпадает со всем пространством событий S; оно может быть также описано выражением «участвует в опросе».

Позднее мы увидим, каким образом можно приписать вероятности событиям в этом пространстве событий, и снова вернемся к этому примеру. Однако пока мы не будем этого делать, отложив соответствующую процедуру до изложения общих идей определения вероятностей в произвольных конечных пространствах событий.

Замечание. В теории множеств различают множество E_1, состоящее из одного элемента e_1, и сам этот элемент. Мы отмечаем это логическое различие, записывая $E_1 = \{e_1\}$; здесь E_1 является *множеством*, состоящим из единственного *элемента* e_1; при этом вероятность события E_1 мы сможем записать как $P(E_1)$, а не как $P(\{e_1\})$. Однако мы не всегда будем столь дотошны в обозначениях, позволяя себе иногда записывать эту вероятность просто как $P(e_1)$ без фигурных скобок. Такая запись, конечно, является сокращением.

Вероятность. Пусть дано пространство событий S, в котором необходимо определить вероятности некоторых событий. Предположим, что пространство событий состоит из конечного числа n элементарных событий:

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}.$$

Каждому событию из S мы припишем число, называемое его *вероятностью*. Примем теперь следующие аксиомы, которым должны удовлетворять эти вероятности.

Аксиомы вероятностей в конечных пространствах событий

Аксиома I. Неотрицательность. *Вероятность любого события неотрицательна.*

Аксиома II. Реализуемость. *Вероятность всего пространства событий равна* 1.

Аксиома III. Объединения. *Если A и B — несовместимые события, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

Мы называем первую из этих аксиом аксиомой *неотрицательности*; в силу этой аксиомы вероятности не могут быть отрицательными — они либо положительны, либо равны нулю. Во многих случаях события с нулевыми вероятностями в конечных пространствах событий можно просто игнорировать.

Вторая аксиома называется аксиомой *реализуемости*: по существу, она утверждает, что какое-то из элементарных событий, составляющих пространство событий, реализуется, поскольку вероятность выполнения хотя бы одного из этих событий равна единице. Эта аксиома определяет величину вероятности, отнесенной нашему пространству событий, содержащему все исходы данного эксперимента.

Третья аксиома называется аксиомой *объединения*: она трактует о вероятности объединения двух несовместимых событий и позволяет нам при определении вероятностей задержаться лишь на анализе элементарных событий. Следующая теорема показывает, что как только нам становятся известны вероятности элементарных событий, так сразу же мы можем определить и вероятности любых других событий.

Теорема 1. *Пусть A есть событие в конечном пространстве событий S. Если A — пустое множество, то $P(A) = 0$. Если A непустое, то $P(A)$*

равна сумме вероятностей элементарных событий, составляющих A.

Доказательство. Сначала положим $A=\emptyset$, где $\emptyset$ — пустое множество. В аксиоме III возьмем $A=\emptyset$ и $B=S$. Поскольку $A=\emptyset$ — пустое множество, то A и B несовместимы и

$$P(\emptyset \cup S)=P(\emptyset)+P(S). \tag{1}$$

Далее, поскольку объединение $\emptyset$ и S совпадает с S, то

$$\emptyset \cup S=S.$$

Следовательно,

$$P(\emptyset \cup S)=P(S). \tag{1'}$$

Вычитая из равенства (1) равенство (1′), получаем

$$0=P(\emptyset),$$

и поэтому $P(A)=0$, когда $A=\emptyset$.

Далее, предположим, что A непусто и представляет собой объединение m различных элементарных событий $E_1, E_2, \ldots, E_m$, где $E_i=\{e_i\}$, $i=1, 2, \ldots, m$. Без ограничения общности можно предположить, что эти m элементарных событий, составляющих A, являются первыми по порядку индексов событиями в S.

Если $m=1$, то $A=E_1$ и $P(A)=P(E_1)$. Если $m=2$, то $A=E_1 \cup E_2$ есть объединение двух несовместимых событий, поскольку E_1 и E_2 — различные элементарные события. Из аксиомы III получаем

$$P(A)=P(E_1)+P(E_2). \tag{2}$$

Если $m=3$, то $A=(E_1 \cup E_2) \cup E_3$, и снова из аксиомы III следует

$$P(A)=P(E_1 \cup E_2)+P(E_3).$$

Используя формулу (2), получаем отсюда

$$P(A)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3).$$

Это доказательство легко распространить на значения $m>3$ с помощью метода математической индукции. Предположим, что теорема справедлива для $m-1$ элементарных событий. Запишем A как объединение E_m и $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{m-1}$. Применяя аксиому III и предположение индукции, получаем

$$P(A) = P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{m-1}) + P(E_m) =$$
$$= P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_{m-1}) + P(E_m). \quad \square$$

В некоторых приложениях оказывается известным, что n элементарных событий равновозможны; тогда вероятность каждого элементарного события равна $1/n$. Но существует очень много задач, в которых элементарные события имеют разные вероятности. В примере со статистикой зрелищных мероприятий мы можем определить вероятность того, что некто принадлежит к определенной группе, отношением числа людей, входящих в эту группу, к общему числу опрошенных лиц, если, конечно, это первое число известно. Так, если 40% опрошенных регулярно посещают кинотеатры и смотрят телевизионные передачи, 20% посещают кинотеатры, но телевизор не смотрят, 30% не ходят в кино, но смотрят телевизионные программы и 10% не посещают кино и не смотрят телевизор, то мы можем определить вероятности элементарных событий следующим образом:

$$P(E_1) = 0{,}4; \quad P(E_2) = 0{,}2; \quad P(E_3) = 0{,}3; \quad P(E_4) = 0{,}1.$$

Мы также можем записать эту информацию в виде таблицы с двумя входами, в которой собраны элементы пространства событий и их вероятности (см. табл. 22). Такое расположение фокусирует наше внимание на двух характеристиках, которые изучаются в процессе опроса: это, во-первых, отношение к посещению кино, и, во-вторых, отношение к телепро-

Таблица 22

	Смотрит телевизор O	Не смотрит телевизора $\bar{O}$
Ходит в кино, F	E_1, $p_1 = 0{,}4$	E_2, $p_2 = 0{,}2$
Не ходит в кино, $\bar{F}$	E_3, $p_3 = 0{,}3$	E_4, $p_4 = 0{,}1$

граммам. Каждый человек, принимающий участие в опросе, либо ходит, либо не ходит в кино; он также либо смотрит, либо не смотрит телепередачи. Положительные и отрицательные ответы на поставленные вопросы определяют описанные выше четыре группы лиц. Подобные таблицы с двумя входами часто используются для изучения отношений между какими-либо характеристиками интересующих нас объектов.

Пример 2. *Пусть вероятности элементарных событий имеют значения, указанные в табл. 22. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный человек, участвующий в опросе,* (а) *регулярно ходит в кино;* (б) *регулярно посещает кино или смотрит телевизионные передачи;* (в) *не ходит в кино или не смотрит телевизор?*

Решение. Каждое событие в пространстве событий можно выразить через события O и F и их дополнения $\bar{O}$ и $\bar{F}$, где событие

$F = \{e_1, e_2\} = E_1 \cup E_2$ соответствует регулярному посещению кино,

а событие

$O = \{e_1, e_3\} = E_1 \cup E_3$ соответствует просмотру телепередач.

Тогда искомые вероятности равны:

P (этот человек регулярно ходит в кино) =

$$= P(F) = P(E_1) + P(E_2) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6;$$

P (этот человек ходит в кино или смотрит телевизор) =

$$= P(F \cup O) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}9;$$

P (этот человек не ходит в кино или не смотрит телевизор) $= P(\bar{F} \cup \bar{O}) =$

$$= P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}6.$$

Теоремы. В § 5 главы III мы доказали следующие теоремы. (Заметим, что их доказательства не опирались на предположения о равновозможности исходов в S: эти доказательства сохраняют силу для любого конечного пространства событий, так что нам нет нужды повторять их здесь; другими словами, рассматриваемые теоремы могут быть легко выведены непосредственно из определяющих вероятности аксиом.)

Теорема 2. А или В или то и другое вместе.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{3}$$

Теорема 3. Несовместимые события. *Если $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — попарно несовместимые события, то*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m). \tag{4}$$

Теорема 4. Дополнительные события.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{5}$$

В примере со статистикой зрелищных мероприятий школы мы использовали элементарные события для нахождения вероятности того, что случайно выбранный человек ходит в кино или смотрит телевизор:

$$P(F \cup O) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 0{,}9.$$

Можно получить ответ и иначе: только одно элементарное событие в S не принадлежит $F \cup O$, т. е. не принадлежит ни F, ни O; следовательно, оно принадлежит $\bar{F} \cap \bar{O}$. Поэтому дополнение к $F \cup O$ есть $\bar{F} \cap \bar{O}$, и по теореме 4

$$P(F \cup O) = 1 - P(\bar{F} \cap \bar{O}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$$

Можно получить этот результат еще одним способом, используя формулу (3):

$$P(F \cup O) = P(F) + P(O) - P(F \cap O) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}9.$$

Заметим, что мы получили бы абсурдный результат $P(F \cup O) = 1{,}3$, если бы забыли вычесть из правой части $P(F \cap O)$, потому что события F и O не являются несовместимыми.

Упражнения к § 2

1. Пусть A и B суть события в пространстве событий S, причем

$$P(A)=0{,}4; \qquad P(B)=0{,}3; \qquad P(A\cap B)=0{,}2.$$

Найдите вероятности следующих событий:

(а) $A\cup B$; (г) $\overline{A}\cap B$;

(б) $\overline{A}$; (д) $A\cup\overline{B}$;

(в) $\overline{B}$; (е) $\overline{A}\cup\overline{B}$.

2. Рассмотрим эксперимент с бросанием двух игральных костей (гл. III, табл. 15). Пространство событий этого эксперимента

$$S=\{(\kappa, б);\ \kappa \text{ и } б \text{ целые числа и } 1\leqslant \kappa, б\leqslant 6\}.$$

Пусть A означает событие, описываемое условием $\kappa\leqslant 3$, а B означает событие, описываемое условием $б\geqslant 4$. Найдите вероятности событий

(а) A; (в) $A\cap B$; (д) $\overline{A}$; (ж) $\overline{A}\cup\overline{B}$;

(б) B; (г) $A\cup B$; (е) $\overline{B}$; (з) $\overline{A}\cap\overline{B}$.

3. В условиях упр. 2 опишите каждое из следующих событий другими математическими символами или словами:

(а) $A\cap B$; (в) $\overline{A}\cup\overline{B}$;

(б) $A\cup B$; (г) $\overline{A}\cap\overline{B}$.

4. *Дальтонизм.* Предположим, что 5% новорожденных мальчиков и 1% новорожденных девочек обладают наследственной цветовой слепотой (дальтонизмом). Предположим, кроме того, что 50% новорожденных — мальчики, и 50% — девочки. Наугад выбирается один новорожденный. Отмечаются его пол и наличие или отсутствие у него дальтонизма. Выпишите пространство событий, отвечающее этому эксперименту. Определите вероятности элементов этого пространства событий. Какова вероятность того, что новорожденный (а) мальчик и страдает дальтонизмом; (б) девочка и страдает дальтонизмом; (в) страдает дальтонизмом. [Генетика позволяет заключить, что если p есть доля мальчиков, страдающих дальтонизмом, то соответствующая доля девочек будет равна p^2. Таким образом, если мы предположили, что 5% (0,05) новорожденных мальчиков обладают наследственным дальтонизмом, то на самом деле дальтонизмом будут страдать не 1%, а 0,25% (0,0025) всех новорожденных девочек.]

5. Пусть три события несовместимы, и их объединение совпадает со всем пространством событий. Шансы в пользу каж-

дого из этих событий относятся, как 3 : 2 : 1. Найдите вероятности этих трех событий.

6. Пространство событий состоит из n несовместимых событий, причем $n-1$ из них имеют равные вероятности, а последнее имеет вероятность, равную вероятности $r+1$ других. Найдите вероятность элементарного события каждого типа.

7. Вероятность двух несовместимых событий A и B связаны соотношением $P(B)=[P(A)]^2$; кроме того, $A \cup B = S$, где S — полное пространство событий. Найдите $P(A)$: (а) точно, (б) с точностью до 2 знаков после запятой.

8. Событие C в два раза более вероятно, нежели A, а событие B столь же вероятно, как события A и C вместе. Эти события несовместимы, и их объединение совпадает со всем пространством событий. Найдите вероятности событий A, B и C.

9. Наугад выбираются по одной букве из слов *дама* и *мама*. Какова вероятность того, что эти буквы будут одинаковыми? (Прежде всего постройте пространство событий и определите вероятности его элементов.)

10. Наугад выбираются две буквы из буквы слова *барабан*. Какова вероятность того, что это будут буквы *б* и *а*?

11. Рассмотрим пример со статистикой зрелищных мероприятий (табл. 22). Если все опрашиваемые, которые не смотрят телепередачи, присоединятся к любителям телевидения, которые не ходят в кино, и если провести голосование о походе в кино, то за какое предложение — идти или не идти в кино — будет подано больше голосов?

12. Докажите следующую теорему: если A есть подмножество B и $P(B)=0$, то $P(A)=0$.

13. Выражение «A влечет B» означает, что если реализуется событие A, то обязательно реализуется и B. Объясните, почему это то же самое, что сказать: «A есть подмножество B в пространстве событий». Докажите, что если A влечет B, то $P(A) \leqslant P(B)$.

§ 3. Независимые события

Определения зависимых и независимых событий, данные в § 6 главы III, также могут быть перенесены на случай пространства событий с неравновозможными исходами.

Пример 1. *Покажите, что в примере со статистикой зрелищных мероприятий F и O — зависимые события.*

Решение. Напомним, что

$$F=\{e_1, e_2\}; \quad O=\{e_1, e_3\}; \quad F \cap O=\{e_1\}.$$

Поэтому

$$P(F)=0{,}6;\quad P(O)=0{,}7;\quad P(F\cap O)=0{,}4$$

и

$$P(F\cap O)\neq P(F)\cdot P(O),$$

поскольку

$$0{,}4\neq 0{,}6\times 0{,}7=0{,}42.$$

Пример 2. *Волчок, для которого $P(U)=0{,}4$, бросается дважды. Пусть E означает событие, заключающееся в том, что волчок в первый раз упал острием вверх (U), а F — событие, заключающееся в том, что он во второй раз упал острием вверх (U). Докажите, что следующие пары событий состоят из независимых событий:*

(а) E *и* F; (в) $\bar{E}$ *и* F;

(б) E *и* $\bar{F}$; (г) $\bar{E}$ *и* $\bar{F}$.

Решение. Все возможные исходы и их вероятности были найдены в § 1 гл. IV. Для справок соберем эти данные в следующую таблицу:

Таблица 23

		Исход второго бросания		
		F (U)	$\bar{F}$ (D)	Сумма по строкам
Исход первого бросания	E (U)	0,16	0,24	0,40
	$\bar{E}$ (D)	0,24	0,36	0,60
	Сумма по столбцам	0,40	0,60	

Если E означает событие «волчок первый раз упал острием вверх», а F — событие «волчок второй раз упал острием вверх», то

$$P(E)=P(F)=0{,}4,$$

и

$$P(E\cap F)=P(U,U)=0{,}16=P(E)\cdot P(F),$$

следовательно, события E и F — независимы. Легко также проверить, что независимы события E и $\bar{F}$, $\bar{E}$ и F, $\bar{E}$ и $\bar{F}$:

$$P(E \cap \bar{F}) = P(U,\ D) = 0{,}24 = P(E) \cdot P(\bar{F});$$

$$P(\bar{E} \cap F) = P(D,\ U) = 0{,}24 = P(\bar{E}) \cdot P(F);$$

$$P(\bar{E} \cap \bar{F}) = P(D,\ D) = 0{,}36 = P(\bar{E}) \cdot P(\bar{F}).$$

Теперь снова приведем формальное определение независимости и докажем теорему, содержание которой легко предугадать из внимательного анализа решения последнего примера.

Определение 1. Независимые события. Два события E и F называются *независимыми* тогда и только тогда, когда

$$\boxed{P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F).} \qquad (1)$$

Теорема 5. Независимые события. *Пусть E и F — события в пространстве событий S. Если события E и F независимы, то независимы также и события E и $\bar{F}$; $\bar{E}$ и F; $\bar{E}$ и $\bar{F}$.*

Доказательство. Рассмотрим табл. 24. Докажем, что элементы этой таблицы указывают вероятности соответствующих сложных событий.

Таблица 24

Независимые события

	F	$\bar{F}$	Суммы по строкам
E	$P(E) \cdot P(F)$	$P(E) \cdot P(\bar{F})$	$P(E)$
$\bar{E}$	$P(\bar{E}) \cdot P(F)$	$P(\bar{E}) \cdot P(\bar{F})$	$P(\bar{E})$
Суммы по столбцам	$P(F)$	$P(\bar{F})$	1

По условию, E и F — независимые события. Тогда из равенства (1) следует, что

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F),$$

и элемент табл. 24, стоящий в левом верхнем углу, равен значению $P(E \cap F)$, как и должно быть. Далее суммы по строкам и по столбцам должны равняться $P(E)$, $P(\bar{E})$, $P(F)$ и $P(\bar{F})$, как указано ниже:

	F	$\bar{F}$	
E	$P(E) \cdot P(F)$		$P(E)$
$\bar{E}$			$P(\bar{E})$
	$P(F)$	$P(\bar{F})$	1

Поскольку сумма элементов первой строки должна равняться $P(E)$, получаем

$$P(E \cap \bar{F}) = P(E) - P(E) \cdot P(F) =$$
$$= P(E) \cdot [1 - P(F)] = P(E) \cdot P(\bar{F}), \quad (2)$$

откуда следует, что события E и $\bar{F}$ — независимые.

Аналогичным образом можно показать независимость $\bar{E}$ и F:

$$P(\bar{E} \cap F) = P(\bar{E}) \cdot P(F), \quad (3)$$

однако это доказательство мы оставляем читателям в качестве упражнения. Тем же способом докажем независимость $\bar{E}$ и $\bar{F}$:

$$P(\bar{E} \cap \bar{F}) = P(\bar{E}) - P(\bar{E} \cap F) = P(\bar{E}) - P(\bar{E}) \cdot P(F) =$$
$$= P(\bar{E}) \cdot [1 - P(F)] = P(\bar{E}) \cdot P(\bar{F}). \quad (4)$$

Поэтому, если E и F — независимы, то вероятности сложных событий равны произведениям соответствующих вероятностей, как это и указано в табл. 24. □

Заметим, что вероятности, стоящие в любой из четырех клеток табл. 24, представляют собой произведения вероятностей событий, отвечающих соответствующей строке и столбцу таблицы. Это свойство вероятностей независимых событий легко проверить: если какой-либо один элемент таблицы, аналогичной табл. 23, равен произведению суммы всех элементов соответствующей строки на сумму всех элементов соответствующего столбца, то любой другой элемент таблицы также обладает этим свойством.

Пример 3. *Для событий E и F соответствующие вероятности приведены в следующей таблице:*

	F	$\bar{F}$	
E	0,04	0,06	0,10
$\bar{E}$	0,08	0,82	0,90
	0,12	0,88	1,00

Будут ли эти события независимыми?

Ответ на этот вопрос отрицателен, поскольку

$$0{,}04 \neq 0{,}12 \cdot 0{,}10 = 0{,}012.$$

Мы также можем заметить, что каждый элемент в таблице отличен от произведения суммы элементов его строки на сумму элементов его столбца.

Замечание. В примере со статистикой зрелищных мероприятий мы обсуждали две характеристики опрашиваемых лиц: отношение к телевизионным передачам и отношение к кино. Если события «смотрит телепередачи» и «регулярно ходит в кино» независимы, то по теореме 5 будут независимы и другие пары событий, например «смотрит телепередачи» и «не ходит в кино». И в этом случае представляется более удобным говорить не о независимости событий, а о независимости *характеристик*: отношения к телепередачам и отношения к кино. И в общем случае, когда для соответствующей таблицы из 4 элементов с двумя входами будут выполнены условия, вытекающие из независимости событий, мы будем говорить, что характеристики, связанные со строками и со столбцами таблицы, независимы. Также и в случае большой таблицы, состоящей из m строк и n столбцов, будем говорить, что характеристики, связанные со строками, не зависят от характеристик, связанных со столбцами, если каждый элемент, стоящий на пересечении некоторой строки и некоторого столбца, равен произведению суммы элементов в этой строке и суммы элементов в этом столбце.

Независимость трех и более событий. Перейдем к изучению трех или более событий, которые мы будем обозначать через $E_1, E_2, \ldots, E_m$.

(Здесь E_i не должны являться элементарными событиями.) Естественно говорить, что эти m событий *независимы*, если вероятность их пересечения равна *произведению их* вероятностей:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_m) = P(E_1) \cdot P(E_2) \ldots P(E_m). \tag{5}$$

Однако при $m \geqslant 3$ одного соотношения (5) недостаточно для того, чтобы гарантировать возможность замены одного или нескольких событий в обеих частях уравнений (5) их дополнениями, как это всегда можно сделать в случае $m=2$. Для того чтобы это было возможно, необходимо, чтобы события были *взаимно независимы.*

Определение 2. В з а и м н а я н е з а в и с и м о с т ь. Данные m событий называются *взаимно независимыми* тогда и только тогда, когда независимы между собой любые k (где $k \leqslant m$) из этих событий.

В случае $m=3$ взаимная независимость событий E_1, E_2, E_3 означает, что выполняются следующие равенства:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3);$$
$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2);$$
$$P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3);$$
$$P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3). \qquad (6)$$

В каждом из равенств (6) мы можем заменить любое событие на его дополнение; при этом также получится верное равенство. Например,

$$P(E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(\bar{E}_2) \cdot P(E_3). \qquad (7)$$

Мы можем также заменить любые два или три события в обеих частях какого-либо из соотношений (6) на их дополнения, и снова получим правильный результат.

Замечание. Часто ошибочно предполагают, что если любые два из трех событий независимы, то независимы и все три события. Однако из такой попарной независимости не следует независимость всех трех событий, как показывает следующий пример.

Пример 4. *Три зависимых, но попарно независимых события.*

Обсуждение. Бросаются две монеты. Пусть E_1 означает событие «на первой монете выпал герб», E_2 означает событие «на второй монете выпал герб» и E_3 означает событие «обе монеты упали одинаковым образом», т. е. либо обе гербом вверх, либо обе цифрами вверх. Тогда

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{2}$$

и

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_3) = P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, эти события попарно независимы. Но

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{4} \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3),$$

поэтому в своей совокупности события E_1, E_2 и E_3 не являются независимыми.

Пример 5. *Независимо один от другого проводятся три опыта: бросание монеты, бросание игральной кости и вытаскивание карты из колоды. Чему равна вероятность того, что результаты этих трех опытов таковы: первого опыта — герб, второго опыта — 5 очков и третьего опыта — туз?*

Решение.

$$P\ (\text{выпадение герба}) = \frac{1}{2},$$

$$P\ (\text{выпадение 5 очков}) = \frac{1}{6},$$

$$P\ (\text{извлечение туза}) = \frac{1}{13},$$

$$P\ (\text{выпадение герба, выпадение 5 очков, и извлечение туза}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{13} = \frac{1}{156}.$$

Пример 6. Бракованная обувь. *На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подметки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 1% каблуков, 4% подметок и 5% верхов. Произведенные каблуки, подметки и верхи случайным образом комбинируются в цехе, где шьются ботинки. Какой процент пар ботинок будет испорчен, т. е. будет содержать дефекты?*

Решение. Пусть U, S и H означают соответственно события, заключающиеся в том, что не испорчены верх, подметка и каблук, а $\bar{U}$, $\bar{S}$ и $\bar{H}$ — в том, что они испорчены. Для одного ботинка

$$P(U) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95;$$

$$P(S) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96;$$

$$P(H) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99;$$

$$P(U \cap S \cap H) = 0{,}95 \times 0{,}96 \times 0{,}99 \approx 0{,}903.$$

Это вероятность того, что не испорчен один ботинок.

Предполагая, что ботинки в пару соединяются случайно, находим:

P(не испорчены оба ботинка) =
= P(не испорчен левый ботинок и не испорчен правый ботинок) =
= P(не испорчен левый ботинок)$\cdot P$ (не испорчен правый ботинок) $\approx 0{,}903 \times 0{,}903 \approx 0{,}815$,

соответственно чему

P (пара ботинок является бракованной) $\approx$

$$\approx 1-0{,}815=0{,}185.$$

Пример 7. Электрические лампочки. *Электрические лампочки производятся на одной машине. При этом в среднем одна лампочка из тысячи оказывается неисправной. Производство одной лампочки не зависит от производства другой. Чему равна вероятность того, что две последовательные лампочки окажутся исправными?*

Решение. Пусть E означает событие «исправность первой лампочки», а F — событие «исправность второй лампочки». Тогда

$$P(E)=P(F)=1-0{,}001=0{,}999$$

и

$$P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F)=0{,}999\cdot 0{,}999=$$
$$=(1-0{,}001)^2\approx 1-2\cdot 0{,}001=0{,}998.$$

В дальнейшем, говоря о *независимости* многих событий, мы всегда будем подразумевать под этим то, что они взаимно независимы.

Упражнения к § 3

1. Докажите, что если два события E и F с положительными вероятностями несовместны, то они зависимы.

2. Приведите примеры событий E и F, удовлетворяющих условиям упр. 1, используя эксперимент с бросанием двух костей (табл. 15).

3. Докажите, что если независимы события E и F, то независимы и события $\bar{E}$ и F.

4. Докажите, что если $P(E \cap F) \neq P(E) \cdot P(F)$, то

$$P(\bar{E} \cap F) \neq P(\bar{E}) \cdot P(F);$$
$$P(E \cap \bar{F}) \neq P(E) \cdot P(\bar{F});$$
$$P(\bar{E} \cap \bar{F}) \neq P(\bar{E}) \cdot P(\bar{F}).$$

5. Бросаются три игральные кости. Предположите полную независимость исходов этих бросаний. Чему равна вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5?

6. Некоторый автомат производит болты и наполняет ими ящики. Известно, что в среднем один ящик из ста содержит по крайней мере один неисправный болт. Предположим, что наличие неисправных болтов в одном ящике никак не связано с наличием неисправных болтов в другом ящике. Чему равна вероятность того, что в каждом из трех ящиков окажутся неисправные болты? Что все три ящика содержат только исправные болты?

7. Вероятность того, что случайно выбранный человек в течение следующего месяца попадет в больницу, равна 0,01. Какова вероятность того, что из трех случайно выбранных на улице людей в течение следующего месяца в точности один будет положен в больницу?

8. На шоссе, соединяющем города A и B, на большом расстоянии друг от друга расположены три светофора. Цикл переключения каждого из них равен одной минуте, т. е. между двумя последовательными включениями зеленого цвета проходит одна минута. Эти три светофора показывают зеленый свет в течение 30, 40 и 50 секунд соответственно. Из города A в город B отправляется машина, водителю которой не известно, когда какой светофор горит зеленым светом, т. е. результат появления машины перед светофором случаен, а циклы горения трех светофоров независимы один от другого. Какова вероятность того, что эта машина не будет стоять ни у одного светофора? Что она будет стоять в точности у одного светофора? Что она будет стоять в точности у двух светофоров. У всех светофоров? (Мы считаем, что по дороге следует только эта машина.)

9. Независимо одна от другой бросаются две игральные кости. Покажите, что события

E_1: на первой кости выпало четное число очков;

E_2: на второй кости выпало нечетное число очков;

E_3: сумма очков на костях — нечетная

попарно независимы, но в своей совокупности зависимы.

10. Пусть $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ — пространство событий некоторого эксперимента. Предположим, что вероятности элементарных событий равны

$$p_1 = \frac{1}{8}; \quad p_2 = \frac{5}{16}; \quad p_3 = \frac{1}{16}; \quad p_4 = \frac{3}{8}; \quad p_5 = p_6 = \frac{1}{16},$$

где $p_i = P(\{e_i\})$. Пусть $E = \{e_1, e_4\}$; $F = \{e_1, e_2, e_3\}$; $G = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Докажите, что E, F и G — попарно независимы, но не независимы в своей совокупности.

11. Для команд A, B и C вероятности забить определенное число голов независимо от того, с кем они играют, указаны в следующей таблице:

Количество голов

Команда	0	1	2	3	4	5
A		0,5			0,5	
B	0,2			0,8		
C			0,8			0,2

Команда, забившая больше всего голов, выигрывает. Покажите, что все вероятности $P(A$ выигрывает у $B)$, $P(B$ выигрывает у $C)$, $P(C$ выигрывает у $A)$ больше $1/2$. Это означает, что A обычно выигрывает у B, B обычно выигрывает у C, C выигрывает у A. Таким образом, отношение «обычно выигрывает» не обладает свойством транзитивности.

Дополнительные упражнения к § 3

Спортивные состязания

В некоторых спортивных соревнованиях команды A и B играют между собой до тех пор, пока одна команда не выиграет четыре игры *). Пусть p означает вероятность того, что команда A выиграет одну игру у команды B; тогда $q=1-p$ есть вероятность того, что выигрывает команда B. Используйте эти данные для ответов на упр. 1—9.

1. Чему равна вероятность того, что A выиграет первые четыре игры? Что B выиграет первые четыре игры? Что соревнования закончатся после первых четырех игр? [*Ответ*: p^4, q^4, p^4+q^4.]

2. Какова вероятность того, что A выиграет соревнования на пятой игре? Что соревнования кончатся на пятой игре? [*Ответ*: $4p^4q$, $4pq(p^3+q^3)$.]

3. Какова вероятность того, что A выиграет соревнования на шестой игре? Что соревнования кончатся на шестой игре? [*Ответ*: $10p^4q^2$, $10p^2q^2(p^2+q^2)$.]

4. Какова вероятность того, что A выиграет соревнования на седьмой игре? Что соревнования кончатся на седьмой игре? [*Ответ*: $20p^4q^3$, $20p^3q^3$.]

*) Таковы условия основных спортивных соревнований в США: розыгрыша первенства страны по бейсболу (знаменитые игры World Series).

5. Используя результаты упражнений 1—4, постройте пространство событий для эксперимента со спортивными соревнованиями и определите вероятности элементарных событий. Чему равна вероятность того, что A выиграет соревнования? Что B выиграет соревнования? Вероятность выигрыша B подсчитайте двумя различными способами.
[*Ответ*: P (выигрыша A) $= p^4(1+4q+10q^2+20q^3$.]

6. В условиях упражнения 5 положим, что $p=2/3$, $q=1/3$, т. е. что команда A «в два раза лучше» команды B. Будут ли в этом случае шансы команды A выиграть соревнования в два раза больше шансов команды B? Если нет, то каковы шансы в пользу выигрыша соревнования командой A?

$$\left[\textit{Ответ}: P\ (\text{выигрыша } A) = \frac{1808}{2187};\ P\ (\text{выигрыша } B)\ \frac{379}{2187};\ \approx 4{,}71:1.\right]$$

7. Если в условиях упражнения 5 $p=q=1/2$, то какова вероятность того, что соревнования закончатся через четыре игры? Через пять? Шесть? Семь?

$$\left[\textit{Ответ}:\ \frac{2}{16},\ \frac{4}{16},\ \frac{5}{16},\ \frac{5}{16}.\right]$$

8. В условиях упражнения 5 положим, что $p=2/3$. Какова вероятность того, что соревнование закончится через четыре игры? Через пять? Шесть? Семь?

$$\left[\textit{Ответ}:\ \frac{153}{729},\ \frac{216}{729},\ \frac{200}{729},\ \frac{160}{729}.\right]$$

9. В условиях упражнения 8, где $p=2/3$, что является более вероятным: то, что соревнования закончатся до шестой игры или то, что они не закончатся до шестой игры? Каковы относительные шансы в пользу того и другого предположения?

§ 4. Условная вероятность

В § 7 гл. III мы изучали условные вероятности в пространствах событий с равновозможными элементарными событиями. В этом параграфе мы распространим понятие условной вероятности на случай более общих пространств событий. В оставшихся двух параграфах этой главы мы изучим две группы применений понятия условной вероятности:

(а) использование этого понятия для определения вероятностей в пространстве событий;

(б) его использование для изменения «степени правдоподобности» различных взаимоисключающих друг друга гипотез после определенных экспериментов.

Пример 1. *В воздух бросается неправильный тетраэдр. Четыре его грани пронумерованы числами* 1, 2, 3, 4; *вероятности того, что тетраэдр упадет на плоскость гранью* 1, 2, 3 и 4 *соответственно равны* 0,1; 0,2; 0,3 *и* 0,4. *Известно, что тетраэдр упал на грань* 1 *или на грань* 2; *какова в этом случае вероятность, что он упал на грань* 1?

Решение. Поскольку нам *дано*, что тетраэдр упал либо на грань 1, либо на грань 2, мы можем не обращать внимание на остальные две возможности и рассматривать *приведенное* пространство событий, состоящее только из исходов «внизу грань 1» и «внизу грань 2». Соответствующая вероятность для грани 2 в два раза больше, чем для грани 1. Следовательно, при большом количестве проведений этого эксперимента, если рассматривать только те случаи, когда внизу оказалась одна из этих двух граней, мы можем ожидать, что грань 1 окажется нижней приблизительно в 1/3 всех возможных случаев, а грань 2 — приблизительно в 2/3 всех возможных случаев. Поэтому

$$P\,(\text{внизу грань } 1 \mid \text{внизу грани } 1 \text{ или } 2) = \frac{1}{3} = \frac{0{,}1}{0{,}1 + 0{,}2}.$$

Этот результат имеет вид

$$P(A \mid A \text{ или } B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)},$$

где A и B представляют собой несовместимые события «внизу грань 1» и «внизу грань 2».

Пример 2. Дальтонизм. *Предположим, что* 5% *новорожденных мальчиков и* 1% *новорожденных девочек страдают наследственным дальтонизмом и что* 50% *новорожденных — мальчики, а остальные* 50% — *девочки. Научный работник, изучающий дальтонизм, выбирает наугад одного новорожденного, который страдает этой болезнью. Какова вероятность того, что этим новорожденным окажется* (а) *мальчик,* (б) *девочка?*

Решение. Условия задачи приводят нас к вероятностям, собранным в табл. 25. Например, 5% от

50% всех новорожденных, или 2,5%,— страдающие дальтонизмом мальчики, а 47,5% — мальчики с нормальным зрением. Аналогично 1% от 50%, или 0,5%

Таблица 25

Дальтонизм

		Дальтонизм	Нормальное зрение	
		С	*Н*	Сумма по строкам
Мальчик	*М*	0,025	0,475	0,500
Девочка	*Д*	0,005	0,495	0,500
Сумма по столбцам		0,030	0,970	1,000

всех новорожденных — страдающие дальтонизмом девочки, а 49,5% — девочки с нормальным зрением. В выборке из 1000 новорожденных, имеющей указанное процентное отношение, окажется 25 страдающих дальтонизмом мальчиков и 5 страдающих дальтонизмом девочек; таким образом, всего 30 новорожденных будут страдать дальтонизмом. Поскольку мальчики составляют 25/30 из них, а девочки 5/30 из них, то кажется разумным предположить, что вероятность отобрать мальчика равна 25/30, а вероятность отобрать девочку равна 5/30.

Мы запишем условную вероятность события «выбранный новорожденный — мальчик» при условии, что «выбранный новорожденный страдает дальтонизмом» так:

$$P\,(\text{мальчик} \mid \text{дальтоник}) = P\,(M \mid C) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Заметим, что 25/30 равно

$$\frac{0{,}025}{0{,}030} = \frac{P\,(M \cap C)}{P\,(C)},$$

так что в этом примере мы имеем

$$P(M \mid C)=\frac{P(M \cap C)}{P(C)}. \qquad (1)$$

Подобным же образом

$$P(Д \mid C)=\frac{P(F \cap C)}{P(C)}=\frac{0{,}005}{0{,}030}=\frac{1}{6}.$$

Поскольку при формулировке наших аксиом мы не пользовались понятием условной вероятности, требуется определить его.

Определение 3. Условная вероятность. *Условной вероятностью* события A при условии B [обозначается $P(A \mid B)$] называется число, определяемое формулой

$$\boxed{P(A \mid B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)},} \qquad (2)$$

где A, B и $A \cap B$ — события в пространстве событий S и $P(B) \neq 0$.

Замечание. Если мы умножим обе части равенства (2) на $P(B)$, то получим

$$\boxed{P(A \cap B)=P(B) \cdot P(A \mid B).} \qquad (3)$$

В записанном слева пересечении $A \cap B$ неважен порядок множеств, поскольку

$$A \cap B=B \cap A.$$

Следовательно, мы также получаем

$$P(B \cap A)=P(B) \cdot P(A \mid B) \qquad (4)$$

и, значит,

$$\boxed{P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B \mid A).} \qquad (5)$$

Равенство (5) используется в § 5 для определения вероятностей. Его можно также обобщить на случай трех или более событий. Например, вероятность выполнения трех событий A, B и C равна

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B). \qquad (6)$$

Может оказаться полезным другой путь анализа формулы (2). Рассмотрим пространство событий S и события A, B и их пересечение $A \cap B$ (заштриховано на рис. 11). Поскольку нам дано, что выполнено

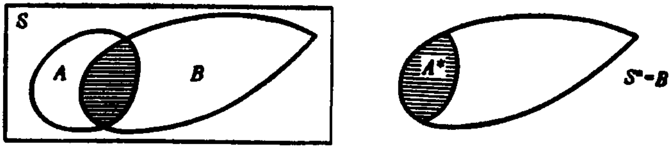


Рис. 11. Новое пространство событий $S^* = B$.

событие B, мы можем игнорировать все остальные возможные исходы в S и рассматривать B как *приведенное* пространство событий S^* (рис. 11 справа). Если мы определим для элементарных событий, составляющих S^*, их вероятности в S, то сумма этих вероятностей должна равняться $P(B)$. Мы же хотим, чтобы в новом пространстве событий S^*, которое есть не что иное, как B, эта сумма равнялась 1. Мы можем достигнуть этого, «пронормировав» вероятности элементарных событий в B, т. е. умножив их все на постоянный множитель $1/P(B)$. Таким образом, новые вероятности элементарных событий в B мы определим так:

$$p_i^* = \frac{p_i}{P(B)}; \qquad (7)$$

при этом сумма обеих частей равенства (7), распространенная по всем значениям i, соответствующим элементарным событиям в $B = S^*$, т. е. «полная вероятность» в пространстве S^*, будет равна

$$\sum p_i^* = \frac{\sum p_i}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1,$$

чего мы и добивались.

Наконец, для того чтобы найти вероятность любого события A при условии B, сложим все вероятности p^* тех из входящих в A элементарных событий, которые входят также и в приведенное пространство событий $S^* = B$. Это суть элементарные события, входящие в пересечение $A \cap B$; обозначим их вероятности в S через $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Суммируя теперь обе части равенства (7) по всем значениям i от 1 до m, получаем

$$P(A \mid B) = \sum_{i=1}^{m} p_i^* = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Заметим, что условная вероятность A при условии B пропорциональна вероятности $A \cap B$ с коэффициентом пропорциональности $k = 1/P(B)$, который совпадает с коэффициентом пропорциональности в равенстве (7), определяющем «новую» вероятность одного элементарного события.

Пример 3. *Монета бросается либо до выпадения герба, либо до троекратного выпадения цифры. При условии, что результатом первого бросания была цифра, найти вероятность того, что монета будет брошена три раза.*

Решение. Пространство событий представляет собой множество

$$S = \{Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦ\}$$

с вероятностями элементарных событий

$$P(Г) = \frac{1}{2}, \quad P(ЦГ) = \frac{1}{4}; \quad P(ЦЦГ) = P(ЦЦЦ) = \frac{1}{8}.$$

Их сумма равна 1. Пусть B означает условие «появление цифры при первом бросании». Тогда

$$B = \{ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦ\}$$

и

$$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Далее, пусть A означает событие «монета бросается три раза». Тогда

$$A = \{ЦЦГ,\ ЦЦЦ\}; \quad P(A) = \frac{1}{4}$$

и

$$A \cap B = A; \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 4. *Всем целым числам от* 1 *до n приписаны вероятности, пропорциональные их величинам.* (а) *Найти эти вероятности;* (б) *найти условную вероятность числа* 1 *при условии, что исходом эксперимента является либо* 1, *либо n.*

Решение. (а) «Полная» вероятность должна равняться единице, а вероятность, приписанная любому целому числу i, $1 \leqslant i \leqslant n$, пропорциональна i:

$$P(i) = k \cdot i; \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} ki = k[1 + 2 + 3 + \ \ldots \ + n] = 1.$$

Поскольку

$$1 + 2 + 3 + \ \ldots \ + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

то

$$k = \frac{2}{n(n+1)}$$

и, значит,

$$P(i) = \frac{2i}{n(n+1)}.$$

(б)

$$P(1 \mid 1 \text{ или } n) = \frac{P(1 \cap 1 \text{ или } n)}{P(1 \text{ или } n)} = \frac{P(1)}{P(1) + P(n)} =$$

$$= \frac{k \times 1}{k \times 1 + k \times n} = \frac{1}{1+n}.$$

Заметим, что при решении задачи (б) нам не потребовалось знание величины коэффициента пропорциональности k.

Упражнения к § 4

1. Если A и B *несовместимые* события и $P(B) \neq 0$, то что можно сказать относительно $P(A|B)$? Объясните ваш результат.

2. Если A выполняется всегда, когда выполняется B, то каждое элементарное событие в B входит также и в A, т. е. B есть подмножество A. Что можно в этом случае сказать относительно $P(A|B)$? Объясните ваш результат.

3. Если A и B независимы и $P(B) \neq 0$, то что можно сказать относительно $P(A|B)$? Кажется ли вам результат разумным?

4. В условиях примера 1 какова вероятность того, что внизу оказалась грань 3, если известно, что тетраэдр не упал на грань 1?

5. В условиях примера 2 случайным образом выбирается один новорожденный среди тех, которые обладают нормальным зрением. Какова вероятность того, что этот новорожденный (а) мальчик, (б) девочка?

6. В условиях примера 3 известно, что монета была брошена не менее двух раз. Какова вероятность того, что она была брошена в точности два раза?

7. Монета бросается несколько раз либо до выпадения первого герба, либо до четырехкратного выпадения цифры. Если известно, что в первых двух бросаниях выпала цифра, найти вероятность того, что (а) монета была брошена четыре раза, (б) монета была брошена только три раза.

8. Из равенства (3) при $P(B) \neq 0$ следует, что $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. Если же $P(B) = 0$, то $P(A|B)$ не определено. Но в некотором смысле равенство $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ сохраняет силу и в этом случае. Почему?

9. 180 студентов одного курса сдавали экзамены по английскому языку и истории. 15 из них не сдали экзамен по истории, 10 не сдали экзамен по английскому языку и 5 не сдали обоих экзаменов. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент не сдал экзамен по истории и сдал экзамен по английскому языку. Что он сдал экзамен по истории и не сдал экзамен по английскому языку?

10. 20 мальчиков поехали на пикник. При этом 5 из них обгорели, 8 были сильно покусаны комарами, а 10 остались всем довольны. Какова вероятность того, что обгоревший мальчик не был покусан комарами? Какова вероятность того, что покусанный комарами мальчик также и обгорел?

11. Страховая компания установила, что в среднем один вексель из тысячи не подлежит оплате, причем этот вексель обязательно бывает просрочен. Также установлено, что один вексель из ста, подлежащих оплате, просрочен. Компания получает просроченный вексель. Какова вероятность того, что он не подлежит оплате?

12. Предположим, что имеются две неисправные электрические лампочки и десять исправных. Эти лампочки испытывают

одну за другой до тех пор, пока не будут обнаружены обе неисправные лампочки. Какова вероятность того, что последняя неисправная лампочка будет обнаружена на седьмом испытании?

13. Рассмотрим эксперимент с бросанием двух костей (табл. 15). (а) Если известно, что на одной кости выпало меньше 3 очков, то какова вероятность того, что на другой выпало не менее 3 очков. (б) Найти вероятность того, что $к+б=10$ при условии, что $к \leqslant б+2$.

14. Вы знаете, что в семье, имеющей четырех детей, есть один мальчик. Какова вероятность того, что в этой семье имеется в точности два мальчика? (Предположите, что шансы рождения мальчика и девочки одинаковы.) Какие еще дополнительные, несформулированные допущения мы сделали при решении этой задачи?

15. Целым числам от 1 до $2n$ приписаны вероятности, пропорциональные логарифмам этих чисел. (а) Найдите эти вероятности. (б) Покажите, что условная вероятность числа 2 при условии, что эксперимент показал четное число, равна

$$\frac{\log 2}{n \log 2 + \log (n!)}.$$

16. Докажите следующую теорему: если A и B — несовместимые события и $P(A \cup B) \neq 0$, то

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

Какой пример в тексте иллюстрирует применение этой теоремы?

§ 5. Использование правила произведения для определения вероятностей в пространстве событий

В этом параграфе мы проиллюстрируем, как используется правило

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B \mid A) \qquad (1)$$

для определения вероятностей событий в том случае, когда события A и B *не обязательно независимы*.

Пример 1. *Джимми любит ходить со своей мамой по магазинам, потому что в этом случае он может иногда уговорить ее купить какую-либо игрушку. Вероятность того, что мама возьмет сегодня с собой Джимми, равна* 0,4; *если же это произойдет, то вероятность покупки новой игрушки равна* 0,8. *Какова* *вероятность того, что мама возьмет сегодня Джимми с собой в магазин и купит ему новую игрушку?*

Решение.

P (возьмет в магазин и купит игрушку) =
= P (возьмет в магазин) · P (купит игрушку | возьмет в магазин) = 0,4 × 0,8 = 0,32.

Пример 2. *Заведующий рекламным отделом журнала оценивает вероятность того, что подписчик прочтет некоторую рекламу, как* 0,4, *а вероятность того, что после этого подписчик купит рекламируемый товар, как* 0,01. *Используя эти оценки, найти вероятность того, что подписчик прочтет рекламу и купит рекламируемый товар.*

Решение.

P (прочтет рекламу и купит товар) =
= P (прочтет рекламу) · P (купит товар | прочтет рекламу) = 0,4 × 0,01 = 0,004.

Пример 3 (а). Выборка без возвращения. *Урна содержит* 5 *черных мячей и* 10 *красных мячей. Из урны вынимаются один за другим два мяча, после чего они не возвращаются в урну. Постройте пространство событий для возможных исходов этого эксперимента. Определите вероятности его элементов.*

Решение. Пространство событий эксперимента — это множество

$$S = \{(Ч,\ Ч);\ (Ч,\ К);\ (К,\ Ч);\ (К,\ К)\},$$

где, например, пара ($Ч$, $К$) означает, что «первый мяч черный, а второй — красный». Поскольку мячи вынимаются случайно, шансы любой пары мячей оказаться вынутыми равны. Для того чтобы оба мяча были черными, первый из них должен быть черным ($p_1 = 5/15$) и второй также должен быть черным ($p_2 = 4/14$). Поэтому

$P(Ч, Ч) = P$(1-й мяч черный) ×
× P(2-й мяч черный | 1-й мяч черный) =
= 5/15 × 4/14 = 2/21.

Подобным же образом:

P(*Ч*, *К*) = P (1-й мяч черный) · P (2-й мяч красный | 1-й мяч черный) = 5/15 × 10/14 = 5/21.

P(*К*, *Ч*) = P (1-й мяч красный) · P (2-й мяч черный | 1-й мяч красный) = 10/15 × 5/14 = 5/21;

P(*К*, *К*) = P (1-й мяч красный) · P (2-й мяч красный | 1-й мяч красный) = 10/15 × 9/14 = 9/21.

Эти результаты сведены в табл. 26.

Таблица 26

Выборка без возвращений

		Второй шар: *Ч*	Второй шар: *К*	Сумма по строкам
Первый шар	*Ч*	$\frac{2}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{3}$
	К	$\frac{5}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{2}{3}$
	Сумма по столбцам	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Заметим, что $1/3 \times 1/3 \neq 2/21$: цвет второго мяча зависит от цвета первого вытянутого мяча.

Пример 3 (б). Выборка с возвращением. *Если выборка в примере* 3(а) *производится с возвращением мяча после его извлечения (при условии тщательного перемешивания мячей перед вторичным извлечением мяча), то вероятность того, что второй мяч окажется черным, не зависит от того, каким оказался первый мяч:*

$$P(\text{2-й мяч черный}) = P(\text{1-й мяч черный}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Таблица 27

Выборка с возвращением

		Второй шар: Ч	Второй шар: К	Сумма по строкам
Первый шар	Ч	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
	К	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$
Сумма по столбцам		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Вероятности элементарных событий в этом новом эксперименте собраны в табл. 27. Каждый элемент таблицы представляет собой произведение суммы элементов соответствующей строки и столбца.

Пример 4. Две урны. *Бросается игральная кость. Если на ней выпало* 1 *или* 6 *очков, вынимается шар из первой урны; в противном случае вынимается шар из второй урны. Первая урна* (*урна* I) *содержит* 3 *красных* (*К*), 2 *белых* (*Б*) *и* 1 *синий* (*С*) *шар. Вторая урна* (*урна* II) *содержит* 4 *белых и* 2 *синих шара. Построить пространство событий всех возможных исходов этого эксперимента и найти вероятность того, что* (а) *вынут белый шар;* (б) *белый шар вынут из первой урны.*

Решение. Из условий эксперимента следуют такие значения вероятностей:

$$P(\mathrm{I})=\frac{1}{3};\quad P(К\,|\,\mathrm{I})=\frac{1}{2};\quad P(Б\,|\,\mathrm{I})=\frac{1}{3};\quad P(С\,|\,\mathrm{I})=\frac{1}{6};$$

$$P(\mathrm{II})=\frac{2}{3};\quad P(К\,|\,\mathrm{II})=0;\quad P(Б\,|\,\mathrm{II})=\frac{2}{3};\quad P(С\,|\,\mathrm{II})=\frac{1}{3}.$$

Используя эти данные, мы построим пространство событий, отмечая номер использованной урны и цвет вынутого шара. В табл. 28 представлены вероятности

Таблица 28

Две урны

Цвет шара

		$К$	$Б$	$С$	Сумма по строкам
Урна	I	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
	II	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$
Сумма по столбцам		$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{18}$	1

всех возможных исходов эксперимента. Следовательно,

$$P(Б)=\frac{5}{9};$$

$$P(\mathrm{I}\mid Б)=\frac{P(I\cap Б)}{P(Б)}=\frac{1/9}{5/9}=\frac{1}{5}.$$

Шансы того, что белый шар вынут из первой урны, не равны отношению 1 к 3; они равны лишь отношению 1 к 5.

Пример 5. Полная колода карт и колода для игры в пинекл*). *В комнате для игры в карты некоторого клуба лежат* 5 *полных колод карт и* 3 *колоды для игры в пинекл. Карты и в тех, и в других колодах одного размера и имеют одинаковую «рубашку» (изнанку). Наугад отбирается одна из этих колод; из нее случайным образом вынимается одна карта. Если эта карта — червовый валет, то какова вероятность того, что он вынут из колоды для игры в пинекл?*

*) Пинекл — карточная игра. Полная колода карт содержит 52 карты — по 13 карт каждой масти. Колода для игры в пинекл состоит из карт тех же четырех мастей: червей, бубен, треф и пик; карты каждой масти — это 2 туза, 2 короля и т. д. до двух девяток включительно, всего 12 карт каждой масти; колода состоит из 48 карт. — *Прим. перев.*

Решение. Поскольку эксперимент состоит, во-первых, в выборе колоды и, во-вторых, в выборе карты из нее, пространство событий представляет собой множество упорядоченных пар (x, y), где можно считать, что

$x =$ бридж, если выбрана полная колода карт *),

$x =$ пинекл, если выбрана колода для игры в пинекл

и

$$y = \text{название карты.}$$

Вероятность вынуть червового валета из колоды для игры в пинекл равна 2/48; из колоды для игры в бридж — 1/52. Теперь ответим на наш вопрос:

$$P\,(\text{пинекл}\,|\,\text{червовый валет}) = \frac{P\,(\text{пинекл} \cap \text{червовый валет})}{P\,(\text{червовый валет})}$$

и

$$\begin{aligned} P\,(\text{червовый валет}) &= P\,(\text{пинекл} \cap \text{червовый валет}) + \\ &\quad + P\,(\text{бридж} \cap \text{червовый валет}) = \\ &= P\,(\text{пинекл}) \cdot P\,(\text{червовый валет}\,|\,\text{пинекл}) + \\ &\quad + P\,(\text{бридж}) \cdot P\,(\text{червовый валет}\,|\,\text{бридж}) = \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{2}{48} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{52} = \frac{23}{832} = \frac{23}{8 \cdot 8 \cdot 13}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$P\,(\text{пинекл}\,|\,\text{червовый валет}) = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{48}}{\frac{23}{8 \cdot 8 \cdot 13}} = \frac{13}{23}.$$

Аналогично

$$P\,(\text{бридж}\,|\,\text{червовый валет}) = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{52}}{\frac{23}{8 \cdot 8 \cdot 13}} = \frac{10}{23}.$$

Эту последнюю вероятность можно найти другим способом, заметив, что «бридж» и «пинекл» — дополнительные события: $\frac{10}{23} = 1 - \frac{13}{23}$.

---

*) Весьма распространенная в США и Западной Европе карточная игра *бридж* требует полной колоды карт. — *Прим. перев.*

В табл. 29 эти результаты записаны в другом виде.

Таблица 29

Бридж и пинекл

	Червовый валет	Другие	Сумма по строкам
Бридж	$\frac{5}{8}\times\frac{1}{52}$	$\frac{5}{8}\times\frac{51}{52}$	$\frac{5}{8}$
Пинекл	$\frac{3}{8}\times\frac{2}{48}$	$\frac{3}{8}\times\frac{46}{48}$	$\frac{3}{8}$
Сумма по столбцам	$\frac{5}{8\times52}+\frac{6}{8\times48}=\frac{23}{832}$	$\frac{809}{832}$	1

Итак,

$$P\text{ (пинекл | червовый валет)}=\frac{\frac{3}{8}\times\frac{2}{48}}{\frac{23}{832}}=\frac{13}{23};$$

$$P\text{ (бридж | червовый валет)}=1-\frac{13}{23}=\frac{10}{23}.$$

Заметим, что информация о том, что вынут червовый валет, сразу же поднимает шансы за то, что вынутая карта лежала в колоде для игры в пинекл (т. е. за то, что была отобрана колода для игры в пинекл), с 3/8 (что меньше 1/2) до 13/23 (а это уже больше 1/2). Естественно, если бы было известно, что вынута одна из карт со значением 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 8, то стало бы сразу ясно, что колода, из которой мы эту карту извлекли, есть полная колода (колода для игры в бридж). Вопрос: какова вероятность того, что вынута одна из названных карт?

Упражнения к § 5

1. В примере с двумя урнами найдите вероятности следующих событий и сравните их с вероятностями, указанными в табл. 28:

(а) $\mathrm{II}\cap Б$; (в) $\mathrm{I}\cap К$;
(б) $\mathrm{I}\cap Б$; (г) $\mathrm{II}\cap С$.

2. В примере с двумя урнами (табл. 28) найдите следующие условные вероятности:

(а) $P(\mathrm{II} \mid Б)$; (г) $P(\mathrm{I} \mid C)$;

(б) $P(\mathrm{I} \mid K)$; (д) $P(\mathrm{II} \mid C)$.

(в) $P(\mathrm{II} \mid K)$;

3. Предположим, что урна в примере 3(а) (табл. 26) содержит m черных шаров и n красных шаров. Постройте пространство событий и определите вероятности его элементов. Используйте эти вероятности для вычисления:

(а) P (2-й шар красный | 1-й шар черный);

(б) P (2-й шар красный);

(в) P (1-й шар красный | 2-й шар красный).

4. Выполните упражнение 3, предполагая, что выборка шаров производится с возвращением.

5. (Это упражнение рекомендуется выполнить перед тем, как переходить к чтению § 6.) На некоторой фабрике 30% продукции производится на машине A, 25% продукции — на машине B, а остальная продукция производится на машине C. У машины A в брак идет 1% всей производимой ею продукции, у машины B — 1,2% производимой ею продукции, а у машины C — 2%. В течение дня эти три машины производят 10 000 единиц продукции. Какова вероятность того, что случайно выбранная единица продукции окажется бракованной? Если она окажется бракованной, то какова вероятность того, что она произведена на машине A? На машине B? На машине C?

6. Предположим, что $P(E)=0{,}3$; $P(F)=0{,}2$ и $P(E \cup F)=0{,}4$. Постройте таблицу с двумя входами для указания вероятностей событий $E \cap F$, $\bar{E} \cap F$, $E \cap \bar{F}$, $\bar{E} \cap \bar{F}$. Чему будут равны следующие вероятности:

(а) $P(E \cap F)$; (в) $P(F \mid E)$; (д) $P(E \cup \bar{F})$;

(б) $P(E \mid F)$; (г) $P(\bar{E} \mid \bar{F})$; (е) $P(\bar{E} \cup \bar{F})$.

7. Несколько раз бросается игральная кость. Какова вероятность того, что одно очко появится впервые при четвертом бросании?

8. Открываются одна за другой карты тщательно перемешанной полной колоды карт. Какова вероятность того, что первой картой пиковой масти окажется пятая карта?

9. В условиях примера 1 предположите, что вероятность покупки игрушки для Джимми в случае, когда мама не берет его с собой, равна 0,3. Если все остальные вероятности не изменяются, то какова вероятность того, что Джимми будет куплена игрушка?

10. В условиях примера 2 предположим, что вероятность прочтения рекламы лицом, не являющимся подписчиком журнала, равна 0,003, причем если он это сделает, то вероятность покупки им рекламируемого товара равна 0,008. Какова вероятность

того, что случайно выбранный человек прочтет рекламу и купит рекламируемый товар? Предположите, что есть один шанс из двадцати на то, что этот человек является подписчиком журнала.

11. Из двенадцати билетов, пронумерованных от 1 до 12, один за другим (без возвращения) выбираются два билета. Какова вероятность того, что на этих билетах (а) оба номера четные, (б) оба номера нечетные; (в) первый номер четный, а второй номер нечетный; (г) один номер четный, а второй нечетный?

12. Готовясь к экзамену, студент должен подготовить ответы на две серии вопросов по 5 вопросов в каждой серии. Однако он подготовил ответы на все вопросы первой серии и только на четыре из пяти вопросов второй серии. Экзамен заключается в ответе на три вопроса, причем два из них случайно выбираются из одной серии, а третий случайно выбирается из другой, причем то, из какой серии выбираются два вопроса, а из какой — один, экзаменатор также решает наугад. Какова вероятность того, что этот студент сможет ответить на все три вопроса? Что он сможет ответить только на два вопроса?

13. Предположим, что в условиях упражнения 12 каждая серия вопросов содержит по 10 вопросов, причем студент знает ответы на 9 вопросов первой серии и на 8 вопросов второй серии. Если остальные условия упражнения 12 не меняются, то какова вероятность того, что студент сможет ответить на все три вопроса? Что он не сможет ответить ни на один вопрос?

14. В условиях примера, связанного с полными колодами карт и колодами для игры в пинекл, положим, что в комнате имеется одинаковое число колод обоего рода. Наугад отбирается одна колода и из нее случайным образом вынимается одна карта. Этой картой оказалась десятка пик. Какова вероятность того, что она вынута из колоды для игры в пинекл? Из полной колоды (колоды для игры в бридж)?

15. Ответьте на вопросы упражнения 14, предполагая, что в комнате имеется 8 колод для игры в пинекл и 4 полные колоды карт.

§ 6. Теорема Байеса

В начале эксперимента из § 5 с колодами карт вероятности отобрать полную колоду и колоду для игры в пинекл равнялись соответственно 5/8 и 3/8. Этими числами измерялись шансы в пользу того, что *будет* отобрана та или другая колода. Соответствующие вероятности часто называют *априорными* *), или предварительными, «доопытными» вероятностями; они

*) a priori (*лат.*) — заранее. — *Прим. перев.*

предшествуют любой информации, которую можно получить в результате выполнения эксперимента.

Предположим теперь, что результат эксперимента нам известен, мы имеем возможность увидеть одну вынутую карту. Если бы предлагался приз за правильную догадку о том, из колоды какого типа вынута эта карта, то следовало бы нам сразу сказать «полная» на том основании, что вероятность выбора полной колоды равна 5/8, тогда как вероятность выбора колоды для игры в пинекл всего лишь равна 3/8? Очевидно, нет, поскольку, например, если была вынута «картинка» (т. е. туз, король, дама или валет), то имелось бы больше шансов за то, что ее вынули из колоды для игры в пинекл, чем за то, что эта карта извлечена из полной колоды. Поэтому мы и интересуемся условными вероятностями событий «бридж» и «пинекл», которые возникают при условии знания значения вынутой карты. Это так называемые *апостериорные* *), или «послеопытные», вероятности: эти вероятности определяются *после* того, как стал известен результат эксперимента, т. е. после того, как нам стало известно наименование вынутой карты.

Таблица 39

Априорные и апостериорные вероятности

	Априорные	Апостериорные при условии, что вынутая карта есть:	
		от 2 до 8	от 9 до туза
Бридж	5/8	1	10/23
Пинекл	3/8	0	13/23

*) A posteriori (*лат.*) — из последующего, здесь в смысле «из опыта». — *Прим. перев.*

В табл. 30 приведены апостериорные вероятности событий «бридж» и «пинекл» для любой возможной карты. Там же для сравнения указаны и априорные вероятности этих событий. Заметим, что исходы «от девятки до туза» заставляют нас отдать предпочтение колоде для игры в пинекл. Если же выбрана карта «от двойки до восьмерки», то вероятность того, что она извлечена из колоды для игры в бридж, равна 1.

Пример 1. Две урны. *В примере с двумя урнами (пример* 4 *из* § 5) *найти апостериорные вероятности событий «выбрана урна* I» *и «выбрана урна* II», *если выбор двух шаров из одной урны производится с возвращением, и оба вынутых шара оказались белыми.*

Решение. Сначала выпишем пространство событий S, состоящее из таких элементарных событий, как (I; $К, К$), (I; $К, Б$) и т. д. до (II; $С, С$), где (I; $К, Б$), например, означает, что «выбрана первая урна, первый шар — красный, а второй — белый». Мы не будем полностью выписывать все элементарные события этого пространства; покажем только, что вероятности его элементов определяются по правилам, которые связаны с понятием условной вероятности. Например, поскольку первый шар возвращается перед тем, как вынимается второй шар, то

$$P(\mathrm{I},\ К,\ Б) = P(\mathrm{I}) \cdot P(К \mid \mathrm{I}) \cdot P(Б \mid \mathrm{I}) = \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}.$$

Целью этого примера является ознакомление с обозначениями, используемыми в общей теореме Байеса; поэтому мы позволим себе не доводить решение до численного ответа.

Пусть E означает событие «вынуты два белых шара»:

$$E = \{\mathrm{I};\ Б, Б),\ \ (\mathrm{II};\ Б, Б)\}.$$

Далее, пусть H_1 означает событие «выбрана урна I», а H_2 означает событие «выбрана урна II». Заметим, что H_1 и H_2 — несовместимы и что их объединение совпадает с S. Мы хотим определить условные вероятности

$$P(H_1 | E) \text{ и } P(H_2 | E).$$

Формула для условных вероятностей дает нам

$$P(H_1 | E) = \frac{P(H_1 \cap E)}{P(E)}, \tag{1}$$

и мы можем написать такую же формулу, где H_1 заменено на H_2. Легко вычислить $P(H_1 \cap E)$ и $P(H_2 \cap E)$; вот их значения:

$$P(H_1 \cap E) = P(\text{I}; \text{Б}, \text{Б}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{27}, \tag{2а}$$

$$P(H_2 \cap E) = P(\text{II}; \text{Б}, \text{Б}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{27}. \tag{2б}$$

Более того,

$$P(E) = P(H_1 \cap E) + P(H_2 \cap E) = \frac{9}{27}, \tag{3}$$

поскольку E совместимо с H_1 и с H_2, но не с H_1 и с H_2 одновременно. Если мы теперь подставим выражения (2) и (3) в формулу (1), то получим

$$P(H_1 | E) = \frac{P(H_1 \cap E)}{P(H_1 \cap E) + P(H_2 \cap E)} = \frac{1/27}{9/27} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11,$$

$$P(H_2 | E) = \frac{P(H_2 \cap E)}{P(H_1 \cap E) + P(H_2 \cap E)} = \frac{8/27}{9/27} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89.$$

Заметим, что информация, доставляемая нам сообщением «оба извлеченные шара — белые», приводит к большей апостериорной вероятности выбора урны II, поскольку в урне II больше белых шаров.

Теорема Байеса, которая обобщает результаты примеров, подобных этому, используется следующим образом. Предположим, что в нашем распоряжении имеются несколько несовместимых гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ для объяснения некоторого явления, причем хотя бы одна из них должна его объяснять. Эти гипотезы проверяются при помощи некоторого эксперимента. Перед началом этого эксперимента может быть очень трудно определить вероятности (априорные вероятности) этих гипотез. Экспериментатор приписывает этим гипотезам вероятности, пропорциональные «степени правдоподобия» этих гипотез для него лично. (Другой исследователь может приписать им совершенно другие вероятности!) Целью эксперимента является разумная коррекция этих доопытных вероятностей. Результатом опыта является замена доопытных вероятностей *послеопытными*, причем вероятности каких-либо гипотез могут существенно уменьшиться или даже совсем выпасть из дальнейших рассмотрений: так, например, если из колоды была вынута восьмерка, то этот результат эксперимента полностью исключает гипотезу о том, что вынутая карта принадлежит колоде для игры в пинекл.

Каждый новый эксперимент можно начинать с *априорными* вероятностями оставшихся гипотез, пропорциональными их *апостериорным* вероятностям, полученным в результате предыдущего эксперимента. Таким образом на основе нашего опыта аккумулируется и меняется наша вера в различные гипотезы, ослабляется степень доверия к одним из них и усиливается вера в другие. И чем больше накапливается оснований для изменения степени доверия к различным гипотезам, тем меньше остается произвола в выборе какой-либо гипотезы, т. е. в том, что какой-либо гипотезе заранее приписывается вероятность 1, а остальным — вероятность 0.

Теорема 6. Теорема Байеса. *Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — несовместимые события, объединение которых совпадает со всем пространством событий S эксперимента, и E — произвольное событие из S, такое, что $P(E) \neq 0$. Тогда*

$$\boxed{P(H_1 \mid E) = \frac{P(H_1 \cap E)}{P(H_1 \cap E) + P(H_2 \cap E) + \ldots + P(H_n \cap E)}.} \qquad (4)$$

Аналогично выражаются вероятности $P(H_2 \mid E)$, $P(H_3 \mid E)$ и т. д.

Доказательство. Рассмотрим случай $n=3$. Его иллюстрируют рис. 12 и табл. 31 и 32. Три гипотезы H_1, H_2 и H_3 несовместимы, и их объединение совпадает с S. Та часть E, которая принадлежит H_1, есть $H_1 \cap E$; часть E в H_2 есть $H_2 \cap E$, и часть E в H_3 есть $H_3 \cap E$. Все событие E — это объединение этих трех несовместимых событий; то же справедливо и для дополнительного события $\bar{E}$, которое мы включили в

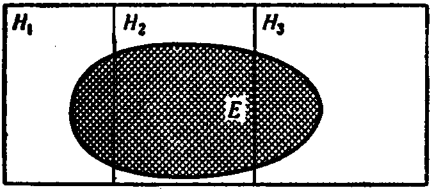


Рис. 12. Разбиение при $n=3$: $S = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, $E = (H_1 \cap E) \cup (H_2 \cap E) \cup (H_3 \cap E)$.

таблицы для полноты, хотя в доказательстве оно не используется.

Таблица 31

Разбиение пространства событий

Гипотеза	Событие E	Событие $\bar{E}$	Объединение по строкам
H_1	$H_1 \cap E$	$H_1 \cap \bar{E}$	H_1
H_2	$H_2 \cap E$	$H_2 \cap \bar{E}$	H_2
H_3	$H_3 \cap E$	$H_3 \cap \bar{E}$	H_3
Объединение по столбцам	E	$\bar{E}$	S

В табл. 32 собраны вероятности событий-пересечений, фигурирующих в табл. 31.

Таблица 32

Вероятности для таблицы 31

Гипотеза	Событие E	Событие $\overline{E}$	Сумма по строкам
H_1	$P(H_1 \cap E)$	$P(H_1 \cap \overline{E})$	$P(H_1)$
H_2	$P(H_2 \cap E)$	$P(H_2 \cap \overline{E})$	$P(H_2)$
H_3	$P(H_3 \cap E)$	$P(H_3 \cap \overline{E})$	$P(H_3)$
Сумма по столбцам	$P(E)$	$P(\overline{E})$	1

Поскольку все гипотезы H_i образуют разбиение пространства событий S, сумма элементов в первом столбце табл. 32 равна $P(E)$:

$$P(E)=P(H_1 \cap E)+P(H_2 \cap E)+P(H_3 \cap E). \tag{5}$$

По определению условной вероятности,

$$P(H_1 \mid E)=\frac{P(H_1 \cap E)}{P(E)}=\frac{P(H_1 \cap E)}{P(H_1 \cap E)+P(H_2 \cap E)+P(H_3 \cap E)}.$$

Этим завершается доказательство для случая $n=3$. Доказательство теоремы Байеса для случаев $n=2$ и $n \geqslant 4$ не отличается от приведенного. □

Пример 2. (*См. упражнение* 5 *из* § 5.) *На некоторой фабрике* 30% *продукции производится машиной A,* 25% *продукции — машиной B, а остальная продукция производится машиной C. У машины A в брак идет* 1% *всей производимой ею продукции, у машины B —* 1,2% *производимой ею продукции, а у машины C —* 2%. *В течение дня эти три машины производят* 10 000 *единиц продукции. Какова вероятность того, что случайно выбранная из этих* 10 000 *единица продукции окажется бракованной? Если она окажется* *бракованной, то какова вероятность того, что она была произведена машиной A? Машиной B? Машиной C?*

Решение. По сути дела мы уже применили теорему Байеса, когда решали это упражнение в § 5. Обозначим через E, H_1, H_2 и H_3 следующие события:

E: выбрана бракованная единица продукции;

H_1: выбранная единица продукции произведена машиной A;

H_2: выбранная единица продукции произведена машиной B;

H_3: выбранная единица продукции произведена машиной C.

Тогда $P(H_1|E)$ есть вероятность того, что выбранная единица продукции произведена машиной A при условии, что эта единица бракована. $P(H_1 \cap E)$ есть вероятность события «произведена машиной A и бракованная», подобный же смысл имеют $P(H_2 \cap E)$ и $P(H_3 \cap E)$. Из условий задачи легко находятся следующие вероятности для некоторой единицы продукции, выбранной случайно из всей дневной продукции:

$$P(H_1) = 0{,}30; \qquad P(E \mid H_1) = 0{,}010;$$
$$P(H_2) = 0{,}25; \qquad P(E \mid H_2) = 0{,}012;$$
$$P(H_3) = 0{,}45; \qquad P(E \mid H_3) = 0{,}020.$$

Воспользовавшись этими данными мы найдем

$$P(H_1 \cap E) = P(H_1) \cdot P(E \mid H_1) = 0{,}003;$$
$$P(H_2 \cap E) = P(H_2) \cdot P(E \mid H_2) = 0{,}003;$$
$$P(H_3 \cap E) = P(H_3) \cdot P(E \mid H_3) = 0{,}009.$$

Всего: $P(E) = 0{,}015$.

Перед тем как единица продукции выбрана из всей дневной продукции и проверена, вероятности того, что эта наугад выбранная единица произведена машинами A, B и C, равны соответственно 0,30, 0,25 и 0,45. Используя теорему Байеса, мы видим, как меняются эти вероятности после получения дополнительной информации о том, что выбранная единица продукции — бракованная. Эти новые вероятности равны

$$P(H_1 | E) = \frac{P(H_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}003}{0{,}015} = 0{,}20;$$

$$P(H_2 | E) = \frac{P(H_2 \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}003}{0{,}015} = 0{,}20;$$

$$P(H_3 | E) = \frac{P(H_3 \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}009}{0{,}015} = 0{,}60.$$

Объединим все результаты:

	Машина		
	A	*B*	*C*
Априорная вероятность (до получения информации о том, что выбранная единица продукции бракованная)	0,30	0,25	0,45
Апостериорная вероятность (после получения этой информации)	0,20	0,20	0,60

Этим примером иллюстрируется одна из самых важных областей применения теоремы Байеса. Мы начинаем с множества априорных вероятностей гипотез H_1, H_2 и т. д. Далее мы выполняем эксперимент и отмечаем реализованное в нем событие E. Затем используем эту информацию для изменения множества вероятностей и получения послеопытных, апостериорных вероятностей:

$$P(H_1) \text{ заменяем на } P(H_1 | E),$$
$$P(H_2) \text{ заменяем на } P(H_2 | E),$$

и так далее, используя для этих замен выражение (4).

Замечание 1. Для вычисления $P(H_1 \cap E)$ мы используем *априорную* вероятность $P(H_1)$ и условную вероятность E при условии H_1, поскольку

$$P(H_1 \cap E) = P(H_1) \cdot P(E | H_1). \tag{6a}$$

Таким же образом эти вычисления проделываются и для остальных «гипотез» — H_2, H_3 и т. д.:

$$P(H_i \cap E) = P(H_i) \cdot P(E \mid H_i). \tag{6б}$$

Если мы используем выражения (6а) и (6б) для вычисления числителя и знаменателя стоящей в правой части формулы (4) дроби, то получим также

$$P(H_1 \mid E) = \\ = \frac{P(H_1) \cdot P(E \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(E \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(E \mid H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(E \mid H_n)}. \tag{7}$$

В левой части выражения (7) стоит *апостериорная* вероятность гипотезы H_1 при условии реализации E; в правой части стоят *априорные* вероятности гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и условные вероятности события E при условии выполнения гипотез H_1, H_2 и т. д.

Замечание 2. В примере с карточными колодами *априорные* шансы в пользу полной колоды карт равнялись 5 : 3. После появления валета червей *апостериорные* шансы в пользу полной колоды изменились до 10 : 13, или 13 : 10 в пользу колоды для игры в пинекл. Результат теоремы Байеса всегда можно выразить в терминах *шансов*, как это здесь и сделано. *Априорные* шансы пропорциональны *априорным* вероятностям:

$$P(H_1), \quad P(H_2), \quad \ldots, \quad P(H_n).$$

Апостериорные шансы пропорциональны числителям выражений, подобных выражению (4) для $H_1, H_2, \ldots$ $\ldots, H_h$, поскольку все они имеют одинаковые знаменатели. Следовательно, апостериорные шансы пропорциональны вероятностям

$$P(H_1 \cap E), \quad P(H_2 \cap E), \quad \ldots, \quad P(H_n \cap E).$$

Упражнения к § 6

1. 60% учащихся в школе — мальчики. 80% мальчиков и 75% девочек имеют билеты на школьный вечер. В школьное бюро находок принесли кем-то потерянный билет. Какова вероятность того, что он принадлежал девочке? Мальчику?

2. На трех дочерей — Алису, Бетти и Шарлотту — в семье возложена обязанность мыть тарелки. Поскольку Алиса старшая, ей приходится выполнять 40% всей работы. Остальные 60% работы Бетти и Шарлотта делят поровну. Когда Алиса моет посуду, вероятность для нее разбить по крайней мере одну тарелку равна 0,02; для Бетти и Шарлотты эта вероятность равна 0,03, соответственно 0,02. Родители не знают, кто мыл тарелки вечером, но они слышали звон разбитой тарелки. Какова вероятность того, что посуду мыла Алиса? Бетти? Шарлотта?

3. Эксперимент состоит в бросании игральной кости, противоположные грани которой отвечают одинаковому числу очков и последующей выборке одного шара из какой-то из двух урн. Если на кости выпадает 1 или 2 очка, то выбирается шар из урны, содержащей 1 красный и 4 черных шара; если на кости выпадает 3 очка, то шар выбирается из урны, содержащей 3 красных и 2 черных шара. Вы не видели, какой стороной упала кость; однако вы знаете, что в результате опыта извлечен красный шар. Какова вероятность того, что он выбран из первой урны? Из второй урны?

4. Предположим, что в условиях задачи о двух урнах примера 1 первый шар не возвращается в урну, а второй шар вынимается из той же урны, что и первый. Если оба шара оказались белыми, то какова вероятность того, что их вынули из урны I? Из урны II?

5. (Продолжение.) В условиях упр. 4 выбраны два синих шара. Каковы *апостериорные* вероятности для каждой из урн?

6. (Продолжение.) В условиях упр. 5 первый шар перед выбором второго шара возвращается в урну. Найти апостериорные вероятности для каждой из урн.

7. Бросается монета, и если она выпадает кверху гербом, мы вынимаем один шар из урны I; в противном случае — из урны II. Урна I содержит 3 красных и 1 белый шар. Урна II содержит 1 красный и 3 белых шара. Каковы априорные и апостериорные вероятности для каждой из этих урн при условии, что (а) вынут красный шар; (б) вынут белый шар?

8. Решите упр. 7, предполагая, что априорная вероятность для урны I равна 0,1, а для урны II — 0,9.

9. В условиях упр. 8 предположим, что после выбора урны выбор шара из нее производится n раз подряд, причем каждый раз шары возвращаются в урну и содержимое урны тщательно перемешивается. Если все n шаров оказались красными, то какова *апостериорная* вероятность каждой из урн? Для какого значения или значений n эти апостериорные вероятности приблизительно равны? Что происходит с этими вероятностями при увеличении n? Как вы можете объяснить ваш результат?

10. Предположим, что одна монета из 10 000 000 имеет герб с обеих сторон, остальные монеты — обычные. Наугад выбран-

ная монета бросается 10 раз, причем при всех бросаниях она падает гербом кверху. Какова вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами?

11. (Продолжение.) В условиях упр. 10 предположим, что выбранная монета падает гербом кверху n раз подряд. Как велико должно быть n для того, чтобы шансы в пользу обычной и «двухгербовой» монеты были приблизительно равны?

12. Служащий, работающий в Бостоне, может возвращаться домой либо Самнер-туннелем, либо мостом через Таинственную Реку. Он ездит по-разному, в 1/3 всех случаев выбирая туннель, а в 2/3 случаев — мост. Если он едет через туннель, то в 75% всех случаев он возвращается домой к 6 часам вечера, если же он едет по мосту, то только в 70% всех случаев он возвращается к 6 часам вечера, однако последняя дорога ему больше нравится. Если он возвращается домой после 6 часов вечера, то какова вероятность того, что он ехал по мосту?

13. Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: класс A (мало рискует), класс B (рискует средне), класс C (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у нее, 30% принадлежат к классу A, 50% — к классу B и 20% — к классу C. Вероятность того, что в течение 12 месяцев водитель класса A попадет хотя бы в одну автомобильную катастрофу, равна 0,01, для водителя класса B эта вероятность равна 0,03, а для водителя класса C — 0,10. Мистер Джонс страхует свою машину у этой компании и в течение 12 месяцев попадает в автомобильную катастрофу. Какова вероятность того, что он относится к классу A? К классу B? К классу C?

14. (Продолжение.) Если владелец застрахованной машины (упр. 13) ездит в течение n лет без происшествий и автомобильные катастрофы в течение какого-либо года не зависят от того, были ли они у этого водителя в любой другой год, то каковы шансы в пользу того, что этот водитель относится к классу A? К классу B? К классу C?

15. На некоторой фабрике машина A производит 40% продукции, а машина B производит 60% продукции. В среднем 9 единиц из 1000 единиц продукции, произведенных машиной A, оказываются бракованными, а у машины B — 1 единица из 250. Некоторая единица продукции, выбранная случайным образом из всей дневной продукции фабрики, оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она произведена на машине A? На машине B?

16. Ваши друзья могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В одной игре используется 1 игральная кость, а в другой игре — 2 игральные кости. Счет в любой игре равен количеству очков, выпавших на одной кости, или на обеих костях вместе. Вы слышите, что в какой-то игре у них выпало 2 очка. Каковы шансы в пользу того, что они играют в игру с одной костью?

17. Ответьте на вопрос упр. 16, если вы услышали счет 6. Если вы услышали счет 7. Если вы услышали счет 1.

18. По гипотезе H_1 некоторое редкое событие E имеет малую вероятность p реализации, в то время как по второй гипотезе H_2 эта вероятность равна p^2. Эти две гипотезы равновозможны и из них справедлива только одна. (а) Если событие E реализовалось, то найдите $P(H_1 \mid E)$. Объясните ваш результат. (б) Предположите теперь, что выполнено событие $\bar{E}$. Найдите $P(H_1 \mid \bar{E})$, сравните ее с $P(H_1)$ и прокомментируйте результат этого сравнения.

19. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — несовместимые и равновозможные апрнорные гипотезы, объединение которых совпадает со всем пространством событий. Условные вероятности события E при условии A_i равны

$$P(E \mid A_i) = \frac{i}{n}; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если в двух независимых испытаниях оба раза реализовалось событие E, то найдите $P(A_i \mid EE)$. Вычислите эту вероятность для $i=n$, $n=10$ [Вы можете воспользоваться формулами

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.]$$

Дополнительные упражнения к гл. IV

В упражнениях 1—3 используйте следующие данные: ящик содержит 5 книг. Мальчик наугад берет из ящика одну книгу, а затем возвращает ее в ящик. Это повторяется 5 раз.

1. Какова вероятность того, что среди выбранных книг оказались все пять, содержащихся в ящике?

2. Какова вероятность того, что в число отобранных вошли в точности 4 книги из числа лежащих в ящике?

3. Какова вероятность того, что число различных книг, попавших в выборку, в точности равно трем? В точности двум? В точности одной?

В упражнениях 4—7 условия таковы: бросаются 4 игральных кости. Найдите вероятности следующих событий:

4. На всех четырех костях выпали одинаковые количества очков.

5. Выпадения очков ни на каких двух костях не совпадают.

6. На двух костях выпало одинаковое количество очков, а на двух других также одинаковое количество очков, отличное от первого.

7. На двух костях выпало одинаковое количество очков, а значения количества очков, выпавших на остальных двух костях, различны между собой и отличны от числа очков, выпавших на первых двух костях.

В упр. 8—15 используйте следующую информацию относительно некоторой игры, которая проводится при помощи двух правильных игральных костей: игрок бросает две кости, и если на них выпадает 7 или 11 очков, то он выигрывает. Если на них выпадает 2, 3 или 12 очков, он проигрывает. Если же на них выпадает 4, 5, 6, 8, 9 или 10 очков, он бросает эти кости еще и еще до тех пор, пока на них не выпадет 7 очков. В этом случае он проигрывает. Если же при некотором бросании выпадет то же число очков, которое выпало при первом бросании костей, то он выигрывает. Найти вероятности следующих событий:

8. Проигрыша игрока при первом бросании.

9. Выигрыша игрока при первом бросании.

10. Выпадения 4 очков при первом бросании и выигрыша при втором.

11. Выпадения 5 очков при первом бросании и выигрыша при втором. [*Замечание.* Условия задачи требуют, чтобы при втором бросании также выпало 5 очков.]

12. Выпадения 8 очков при первом бросании и выигрыша впоследствии.

13. Выпадения 9 очков при первом бросании и выигрыша впоследствии.

14. Выпадения 10 очков при первом бросании и выигрыша впоследствии.

15. Выигрыша игрока.

В упр. 16—19 предположим, что из обычной колоды карт (в 52 карты) выбираются без возвращения 4 карты. Каковы вероятности следующих событий:

16. В выборке представлены все масти.

17. В выборке представлены карты в точности трех мастей.

18. Все карты в выборке принадлежат одной масти.

19. В выборке представлены в точности две масти.

20. Тщательно перемешайте колоду карт и сдайте из нее 4 карты. Запишите число различных мастей в вашей сдаче. Возвратите карты в колоду, тщательно ее перемешайте и снова выполните этот эксперимент. Так поступите 25 раз. Сравните экспериментальные относительные частоты с теоретическими результатами, которые вы получили при решении упр. 16—19.

В упр. 21—26 предположим, что из колоды для игры в пинекл производится выборка без возвращения пяти карт. Найдите вероятность того, что число красных карт в выборке равно:

21. Пяти? **22.** Четырем? **23.** Трем?
24. Двум? **25.** Одной? **26.** Нулю?

27. Возьмите колоду для игры в пинекл или замените ее тузами, королями, валетами, дамами, десятками и девятками двух обычных колод карт. Сдайте из колоды 5 карт и отметьте число красных карт в этой сдаче. Возвратите эти 5 карт в колоду и тщательно ее перетасуйте. Выполните этот эксперимент 25 раз. Сравните полученные относительные частоты с теоретическими вероятностями, полученными в упр. 21—26.

В упр. 28—31 используйте следующую информацию: три школьника A, B и C предъявляют одинаковые претензии на некий приз. Они решают, что каждый из них бросит монету и приз получит тот, чья монета упадет не той стороной, которой она выпала у двух других (приз получает «нечетный»). Если же все три монеты выпадут одной стороной, то школьники повторяют бросания.

28. Опишите пространство событий для результата первого бросания трех монет и определите вероятности его элементов. Какова вероятность того, что при первом бросании выиграет A? Выиграет B? Выиграет C? Что при первом бросании никто не выиграет приза?

29. При условии, что при первом бросании приз достался кому-либо из школьников, какова вероятность того, что он достался A?

30. Какова вероятность того, что приз не будет разыгран в первых двух бросаниях? В первых n бросаниях?

31. Известно, что приз не был разыгран в первых n бросаниях. Какова вероятность того, что в следующем бросании приз достанется A?

ГЛАВА V

ЧИСЛА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТОМ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Случайные величины и таблицы вероятностей

В этой главе будут введены два важных новых понятия: *случайной величины* и *таблицы вероятностей.* С понятием пространства событий мы уже освоились; примеры, основанные на этом понятии, мы используем для ознакомления со случайными величинами и таблицами вероятностей. От этих примеров мы перейдем к общим определениям, а затем изучим некоторые свойства случайных величин.

Пример 1. Бросаются три монеты. *Сколько из них выпадет гербом кверху?*

Обсуждение. Ответом этой задачи является число, определяемое исходом эксперимента. Это число может равняться 0, 1, 2 или 3. Хотя мы не можем точно предсказать исхода эксперимента, мы можем указать все возможности для этого и их вероятности. Пространство событий эксперимента выписано в первом столбце табл. 33. Во втором столбце приведено количество гербов для каждого элементарного события, а в третьем столбце — вероятности элементарных событий.

Информация относительно возможных количеств выпадения «гербов» и соответствующие вероятности собраны в табл. 34. Например, вероятность получения в точности двух гербов находится сложением вероятностей событий *ГГЦ*, *ГЦГ*, *ЦГГ*; аналогично находятся другие вероятности.

Пусть переменная величина X представляет количество гербов. В табл. 34 приведены все возможные значения, принимаемые X, и вероятности каждого зна-

Таблица 33

Три монеты

Элементарное событие	Число гербов	Вероятность
ГГГ	3	$\frac{1}{8}$
ГГЦ	2	$\frac{1}{8}$
ГЦГ	2	$\frac{1}{8}$
ЦГГ	2	$\frac{1}{8}$
ГЦЦ	1	$\frac{1}{8}$
ЦГЦ	1	$\frac{1}{8}$
ЦЦГ	1	$\frac{1}{8}$
ЦЦЦ	0	$\frac{1}{8}$

Таблица 34

Три монеты. Таблицы вероятностей для числа гербов

Вероятность	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
Число гербов	0	1	2	3

чения. Это множество упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид

(количество гербов, вероятность этого числа)

и есть *таблица вероятностей* величины X. Поскольку значение X есть число, определяемое зависящим от случая исходом эксперимента, то X называется *слу-*

чайной величиной. Таблица вероятностей представляет собой *функцию,* сопоставляющую каждому значению случайной величины вероятность этого значения; ее иногда называют также *функцией вероятностей.*

Нам часто придется различать между собой случайную переменную X и значения этой переменной, хотя на первый взгляд это может произвести впечатление излишнего педантизма. Поэтому мы условимся использовать заглавную букву X для обозначения случайной величины, а строчную букву x для обозначения любого из ее значений. Мы также используем символ $f(x)$ (читается: f от x) для обозначения функции вероятностей, т. е. вероятности того, что случайная величина X принимает значение x:

$$f(x)=P(X=x).$$

Так, в эксперименте с бросанием трех монет

$$f(0)=P(X=0)=\frac{1}{8}; \qquad f(2)=P(X=2)=\frac{3}{8};$$

$$f(1)=P(X=1)=\frac{3}{8}; \qquad f(3)=P(X=3)=\frac{1}{8}.$$

Замечание. В этом примере значения $f(x)$ равны

$$1\times\frac{1}{8}; \quad 3\times\frac{1}{8}; \quad 3\times\frac{1}{8}; \quad 1\times\frac{1}{8}.$$

Коэффициенты 1, 3, 3, 1 — суть биномиальные коэффициенты $\binom{3}{x}$, где $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$. Следовательно, все значения $f(x)$ задаются следующим выражением:

$$f(x)=P(X=x)=\binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3!}{x!\,(3-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Пример 2. Суммы. *Бросается трехсторонняя кость, сделанная из трехгранной линейки, грани которой пронумерованы числами* 1, 2, 3. *Если такая кость бросается дважды, то какова таблица вероятностей случайной величины X, где X равна сумме чисел, выпавших на нижних гранях кости при двух бросаниях?*

Решение. Любые пары нижних граней равновозможны. Пространство событий эксперимента удобно

Таблица 35

Пространство событий для двух бросаний трехсторонней кости

		Исход второго бросания		
		1	2	3
Исход первого бросания	1	(1,1) 2	(1,2) 3	(1,3) 4
	2	(2,1) 3	(2,2) 4	(2,3) 5
	3	(3,1) 4	(3,2) 5	(3,3) 6

выписать как на табл. 35, где, например, пара чисел (2,1) означает, что число 2 было исходом первого бросания, а число 1 — исходом второго бросания. Значение X указано под соответствующим исходом. Поскольку каждое элементарное событие имеет вероятность 1/9, то таблицу вероятностей величины X — суммы номеров нижних граней в двух бросаниях — можно найти, подсчитав число способов получения этой суммы и разделив его затем на 9. В результате мы приходим к следующей таблице вероятностей этой случайной величины:

Вероятность, $f(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
Сумма, x	2	3	4	5	6

Можно заметить, что в этом примере X представляет собой сумму двух других случайных величин — исхода первого бросания и исхода второго бросания; если обозначить эти величины через U и V, то $X = U + V$.

Пример 3. *Выбирается наугад одно из натуральных чисел от 1 до 10 и подсчитывается число его делителей. Какова вероятность того, что выбранное число имеет в точности два делителя? В точности один делитель? В точности четыре делителя? Более четырех делителей?*

Решение. Напомним терминологию, принятую в теории чисел. Мы говорим, что натуральное число b является *делителем* натурального числа a, если существует такое натуральное число c, что $a=bc$. Так, делителями числа 6 являются числа 1, 2, 3 и 6; делителями числа 7 являются числа 1 и 7.

В первой строке табл. 36 выписаны все элементарные события пространства событий рассматриваемого эксперимента, т. е. натуральные числа от 1 до 10. Обозначим через X число делителей выбранного натурального числа. Во второй строке приведены значения случайной величины X для каждого элементарного события. Так как выбор любого числа от 1 до 10 равновозможен, то вероятность выбора каждого числа равна 0,1.

Таблица 36

Число делителей натуральных чисел от 1 до 10

Натуральные числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число делителей	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

Далее, мы объединяем исходы, соответствующие одинаковому количеству делителей, и складываем их

Таблица 37

Числа делителей и их вероятности (для случайно выбранных натуральных чисел от 1 до 10)

Вероятность, $f(x)$	0,1	0,4	0,2	0,3
Число делителей, x	1	2	3	4

вероятности; так получается табл. 37. Через x здесь обозначено произвольное возможное число делителей, а через $f(x)$ — вероятность того, что X принимает значение x. Так, для значения $x=2$ легко находится вероятность $f(2) = P(X = 2) = 0{,}4$.

На рис. 13 изображен график *функции вероятностей* $f(x)$, т. е. совокупность точек с координатами x и

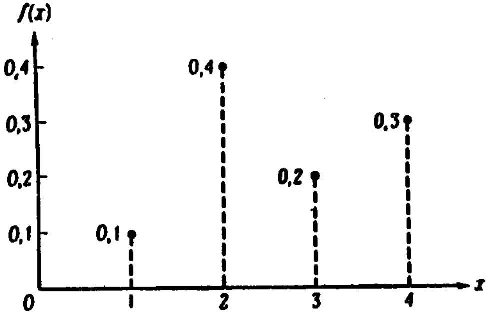


Рис. 13. График функции вероятностей числа делителей натуральных чисел от 1 до 10.

$f(x)$. Это график функции вероятностей случайной величины X, где X есть «число делителей выбранного наугад натурального числа, заключенного между 1 и 10». Вертикальные линии на этом графике, длины которых пропорциональны соответствующим вероятностям, облегчают пользование графиком. Сам график состоит только из четырех точек в концах этих линий.

Используя табл. 37, легко ответить на четыре поставленные вопроса:

$$P(X=2) = f(2) = 0{,}4;$$
$$P(X=1) = f(1) = 0{,}1;$$
$$P(X=4) = f(4) = 0{,}3;$$

и, поскольку никакое натуральное число от 1 до 10 не имеет более четырех делителей,

$$P(X > 4) = 0.$$

Эти примеры приводят нас к следующим общим определениям.

Определение 1. (1) Случайная величина. Переменная величина, значение которой есть число, определяемое исходом некоторого эксперимента, называется *случайной величиной.*

(2) Таблица вероятностей. Пусть X есть случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_t$, вероятности которых соответственно равны $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_t)$. Тогда множество f, элементами которого являются упорядоченные пары $(x_i, f(x_i))$, $i=1, 2 \ldots, t$, называется *таблицей вероятностей* (или *функцией вероятностей*) величины X.

Так, число делителей натурального числа, выбранного наугад из чисел от 1 до 10, есть случайная переменная с $t=4$ возможными значениями:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4.$$

Соответствующие вероятности приведены в табл. 37. Таблицы вероятностей в этом примере представляют собой множество упорядоченных пар чисел, указанных жирными точками на графике, изображенном на рис. 13:

$$f = \{(1;\ 0{,}1),\ (2;\ 0{,}4),\ (3;\ 0{,}2),\ (4;\ 0{,}3)\}.$$

В этой книге мы редко будем понимать таблицу или функцию вероятностей как множество упорядоченных пар. Для нас будет более удобно задавать эту таблицу формулой для $f(x)$ или выписывать таблицу, аналогичную табл. 37. Все эти способы задания величин $f(x)$, разумеется, эквивалентны.

Вся совокупность вероятностей событий (т. е. множеств элементарных событий) в данном пространстве событий называется *распределением вероятностей* в этом пространстве. В пространстве событий, состоящем из n элементарных событий, существует 2^n множеств; поэтому если n велико, то неудобно или даже невозможно выписывать вероятности для всех 2^n множеств. Взамен задания распределения вероятностей мы обычно задаем таблицу вероятностей, определяющую вероятности каждого из n элементарных событий. Таким образом, задание таблицы вероятностей есть один из способов определения распределения вероятностей *). Обычно в теории вероятностей при обсуждении различных проблем говорят не о таблице вероятностей, а о распределении вероятностей.

Комментарий. Случайная переменная во всем подобна любой другой переменной величине, за исключением того, что о случайной переменной обычно бывает известно больше, чем о других переменных; мы знаем вероятности того, что она принимает то или иное значение.

Пример 4. Угадывание дат исторических событий. *Школьник должен определить дату каждого из трех исторических событий (битвы при Лексингтоне и Конкорде* **), *открытия Америки Колумбом, битвы при Гастингсе* ***)), *пользуясь списком из трех дат*: 1775, 1492, 1066. *Не зная правильного ответа, он подбирает даты наугад. Составьте таблицу вероятностей для числа правильно подобранных дат.*

Решение. Пространство событий эксперимента выбора школьником трех дат можно представить себе как множество шести перестановок этих трех дат:

e_1: 1066, 1492, 1775; e_4: 1492, 1775, 1066;
e_2: 1066, 1775, 1492; e_5: 1775, 1066, 1492;
e_3: 1492, 1066, 1775; e_6: 1775, 1492, 1066.

*) Другой способ состоит в указании так называемой *функции распределения*, указывающей для каждого x вероятность того, что $X<x$. [В случае конечных пространств событий функция распределения есть «ступенчатая функция», число «ступенек» которой равно числу элементарных событий.]

**) Битва при Лексингтоне и Конкорде произошла в 1775 г. во время войны английских колоний за независимость, которая закончилась образованием США. — *Прим. перев.*

***) В 1066 г. в битве при Гастингсе нормандские феодалы во главе с Вильгельмом Завоевателем разгромили англосаксов, что привело к завоеванию Англии норманнами. — *Прим. перев.*

Если даты выбираются случайно, то вероятность каждой перестановки равна 1/6.

Далее, свяжем с каждым элементом e_i число правильно угаданных дат X. Без ограничений общности мы можем предположить, что события у школьника выписаны в таком порядке: (1) битва при Гастингсе, (2) открытие Америки Колумбом, (3) битва при Лексингтоне и Конкорде. Если школьник выберет перестановку e_1, он правильно угадает все три даты. Если он выберет e_2, e_3 или e_6, он правильно угадает одну дату, если он выберет e_4 или e_5, то он не угадает ни

Таблица 38

Угадывание дат исторических событий

Перестановка e_i	Вероятность $P(e_i)$	Число правильно угаданных дат
e_1	$\frac{1}{6}$	3
e_2	$\frac{1}{6}$	1
e_3	$\frac{1}{6}$	1
e_4	$\frac{1}{6}$	0
e_5	$\frac{1}{6}$	0
e_6	$\frac{1}{6}$	1

Таблица 39

Таблица вероятностей

Вероятность, $f(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$
Число правильно угаданных дат x	0	1	3

одной даты. В табл. 38 приведены все перестановки $e_1, e_2, \ldots, e_6$ и числа правильно угаданных дат, отвечающие каждой из них. Табл. 39 — это полученная на основе предыдущей таблицы таблица вероятностей X (X — число правильно угаданных дат).

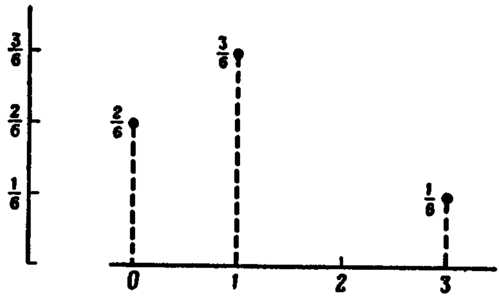


Рис. 14. График функции вероятностей числа правильно угаданных дат.

Замечание. Случайная величина часто определяется как *функция*, ставящая в соответствие каждому элементарному событию некоторое действительное число. Табл. 38 иллюстрирует этот метод: случайную величину X можно рассматривать как функцию, определенную на области

$$\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\}$$

со значениями (см. третий столбец табл. 38):

$$X(e_1)=3, \quad X(e_3)=1, \quad X(e_5)=0,$$
$$X(e_2)=1, \quad X(e_4)=0, \quad X(e_6)=1.$$

С этой точки зрения наша случайная величина X есть множество, элементами которого является шесть упорядоченных пар:

$$\{(e_1, 3);\ (e_2, 1);\ (e_3; 1);\ (e_4, 0);\ (e_5, 0);\ (e_6, 1)\}.$$

Значения X равны всевозможным количествам правильно угаданных дат: 3, 1, 0. Задав пространство событий, представляющих исходы нашего эксперимента, можно определить значения X. Задав только пространство событий, мы уже определяем *возможные* значения X и их *вероятности, т. е. таблицу вероятностей* (см. табл. 39).

Для наших целей достаточно рассматривать случайную величину как некую переменную, значениями которой являются числа, определяемые исходами эксперимента.

Понятие серии. Пусть мы подбросили монету 9 раз; девять ее выпадений образуют следующую последовательность:

$$ЦГГГГГГГЦ.$$

Рассматривая эту последовательность, мы видим, что в ней слишком редко встречается символ $Ц$, что возможно связано с особенностями самой (материальной) монеты или того, как ее бросали. Мы видим, что эта последовательность состоит из трех *серий* одинаковых букв: первая серия состоит из одной буквы $Ц$ (ее длина равна 1), следующая серия состоит из семи букв $Г$ (ее длина равна 7) и, наконец, последняя серия (длины 1) состоит из одной буквы $Ц$. Таким образом, *серией* называется последовательность одинаковых букв, количество букв в серии называется ее *длиной.* Некоторые статистические испытания основаны на понятии серии. Так, например, в следующем примере большое число серий может быть связано с тем, что люди, посещающие источник минеральной воды, обычно предпочитают не сидеть рядом друг с другом.

Пример 5. Серии элементов двух типов. *Рядом с небольшим источником минеральной воды в один ряд стоят 5 стульев, на трех из которых обычно сидят люди, пользующиеся источником. Предполагая, что все размещения трех лиц на стульях равновозможны, найти таблицу вероятностей числа серий занятых стульев З и пустых стульев П. Например, размещение* $\underline{З}\ \underline{П\,П}\ \underline{З\,З}$ *трех лиц содержит три серии, которые подчеркнуты.*

Решение. Наш эксперимент состоит в том, что 3 человека рассаживаются случайным образом на 5 пустых стульях. Пространство событий этого эксперимента представляет собой список всех возможных размещений из трех букв *З* и двух букв *П*, соответствующих трем занятым и двум пустым стульям. Число элементарных событий равно

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10,$$

поскольку оно совпадает с числом перестановок из пяти объектов, из которых три объекта принадлежат типу *З*, а два — типу *П*. Поскольку люди садятся на стулья случайным образом, каждое элементарное событие имеет вероятность 1/10.

Случайная величина, которая интересует нас в этом эксперименте, представляет собой число серий из *З* и *П* в каждой последовательности, отвечающей элементарному событию, т. е. в каждой перестановке. Список всех элементарных событий вместе с количеством соответствующих серий приводится ниже. Нас интересует только то, «занят» ли стул или «пуст», и не интересует, где какой человек сидит. Так, перестановка, обозначаемая *З З З П П*, означает, что первые три стула заняты, а последние два пусты.

Перестановка	Количество серий
З З З П П	2
З З П З П	4
З З П П З	3
З П З З П	4
З П З П З	5
З П П З З	3
П З З З П	3
П З З П З	4
П З П З З	4
П П З З З	2

Подсчитывая в этом списке количество перестановок, соответствующих каждому возможному значению числа серий, мы находим таблицу вероятностей величины X (см. табл. 40).

Понятие об экстремальных точках. Следующий пример касается исследований, проводимых при изуче-

Таблица 40

Таблица вероятностей числа серий из пяти элементов, три из которых одного типа, а два — другого

Вероятность, $f(x)$	0,2	0,3	0,4	0,1
Число серий, x	2	3	4	5

нии длинных последовательностей в экономической статистике, например последовательности ежедневных биржевых курсов или последовательности чисел, характеризующих еженедельное производство автомобилей. Такие последовательности представляют собой множества результатов каких-либо наблюдений или измерений, причем эти результаты расположены в порядке их получения. Если в такой последовательности нет тенденции к возрастанию или убыванию ее элементов, то эти элементы чаще всего, группируются около некоего среднего значения, будучи то больше него, то меньше. В том случае, когда эти элементы все время увеличиваются или уменьшаются, или когда они изменяются циклически, можно предсказывать будущее поведение элементов последовательности.

Если среди трех последовательных чисел, представляющих результаты какого-либо измерения, среднее число является наибольшим или наименьшим из них, то это число называется *экстремальной точкой* данной последовательности. Так, в последовательности

$$3,\ 5,\ 4,\ 7$$

числа 5 и 4 являются экстремальными точками, потому что число 5 — наибольшее в тройке 3, 5, 4, а число 4 — наименьшее в тройке 5, 4, 7. В последовательности случайных чисел обычно бывает больше экстремальных точек, чем в последовательности, элементы которой, вообще говоря, возрастают или убывают.

Пример 6. Экстремальные точки. *Рассмотрим четыре различных числа, представляющих собой результаты какого-либо измерения. Если все переста-*

новки этих четырех чисел равновозможны, то какова таблица вероятностей случайной величины X, где X есть число экстремальных точек в перестановке?

Решение. Для того чтобы подсчитать количество экстремальных точек, мы можем, нисколько не пожертвовав общностью рассуждения, считать, что результаты измерения, расположенные в возрастающем порядке, — это числа 1, 2, 3 и 4. Тогда любой последовательности четырех различных результатов соответствует некоторая перестановка из четырех чисел 1, 2, 3, 4. Так, перестановка 1 4 2 3 означает, что первое измерение дало самый маленький результат, второе — самый большой и т. д. В этой перестановке имеются две экстремальные точки: 4 и 2. В табл. 41 выписаны все 4! перестановок и соответствующие количества экстремальных точек.

Таблица 41

Перестановки цифр 1, 2, 3, 4 и число экстремальных точек

Перестановка	Число экстремальных точек	Перестановка	Число экстремальных точек	Перестановка	Число экстремальных точек	Перестановка	Число экстремальных точек
1 2 3 4	0	2 1 3 4	1	3 1 2 4	1	4 1 2 3	1
1 2 4 3	1	2 1 4 3	2	3 1 4 2	2	4 1 3 2	2
1 3 2 4	2	2 3 1 4	2	3 2 1 4	1	4 2 1 3	1
1 3 4 2	1	2 3 4 1	1	3 2 4 1	2	4 2 3 1	2
1 4 2 3	2	2 4 1 3	2	3 4 1 2	2	4 3 1 2	1
1 4 3 2	1	2 4 3 1	1	3 4 2 1	1	4 3 2 1	0

Таблица 42

Вероятность, $f(x)$	$\frac{2}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{10}{24}$
Число экстремальных точек, x	0	1	2

Подсчитывая для каждого числа экстремальных точек его частоту, мы получаем таблицу вероятностей этого числа (см. табл. 42). Так, экстремальные точки отсутствуют только в 1/12 всех перестановок, одну экстремальную точку имеет половина всех перестановок, а две экстремальные точки — около половины всех перестановок.

Предыдущий пример снова иллюстрирует этапы составления таблицы вероятностей некоторой случайной величины.

1. Построить для данного эксперимента пространство событий, состоящее из всех возможных исходов, и определить в нем вероятности.

2. Выписать значение случайной величины, соответствущее каждому элементарному событию.

3. Выписать все возможные значения $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_t$ случайной величины и отвечающие им вероятности $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_t)$. (Вероятности, соответствующие значению x_i, находятся сложением вероятностей всех элементарных событий, отвечающих значению x_i.)

Тогда множество упорядоченных пар

$$(x_i, f(x_i)), \qquad i = 1, 2, \ldots, t,$$

представляет собой таблицу вероятностей для данной случайной величины. Эта таблица может быть также задана формулой для $f(x)$.

Дополнительные замечания об обозначениях. Символом $P(X=x_i)$ мы обозначаем вероятность того, что случайная величина X принимает значение x_i. Чаще мы будем пользоваться таблицами вероятностей и записывать вероятность $P(X=x_i)$, как $f(x_i)$. В тех случаях, когда не возникнет опасности смешения, мы будем для удобства иногда сокращать запись $P(X=x_i)$ до $P(x_i)$. Если мы будем говорить о нескольких случайных величинах, то будем пользоваться разными буквами: например, будем говорить о случайных величинах Y или Z с значениями y или z и функциями вероятностей g или h. Другими словами, мы будем обозначать $f(x_i) = P(X = x_i)$, $g(y_i) = P(Y = y_i)$ и $h(z_k) = P(X = z_k)$.

Упражнения к § 1

1. Один раз бросается обычная игральная кость. Выпишите таблицу вероятностей для числа очков, выпадающих при бросании кости. Постройте график функции вероятностей.

2. Бросьте обычную игральную кость 50 раз и отметьте число бросаний, при которых на ней выпало 1, 2, ..., 6 очков. (Можно также использовать для проведения этого эксперимента табл. I случайных чисел в конце книги.) Разделить полученные вами числа на 50, получив тем самым относительные частоты выпадения того или иного количества очков. Нанесите на координатную сетку множество точек $[x, r(x)]$, где $r = 1, 2, \ldots, 6$, а $r(x)$ равно относительной частоте выпадения x очков. Сравните этот график с графиком функции вероятностей упр. 1.

3. Предположим, что из чисел от 1 до 20 наугад выбирается одно. Обозначим через X число его делителей. Определите случайную функцию величины X и соответствующую ей таблицу вероятностей. Какова вероятность того, что выбранное число имеет не менее четырех делителей?

4. Монета бросается три раза. Пусть X означает число серий в последовательности исходов: первое бросание, второе бросание, третье бросание. Найдите случайную функцию величины X и составьте для нее таблицу вероятностей. Какие значения X наиболее вероятны?

5. Разберите вопрос об экстремальных точках для случая трех измерений. Каково наиболее вероятное число экстремальных точек? Наименее вероятное?

6. Бросаются две обычные игральные кости (см. табл. 15). Найдите случайную функцию суммы очков на этих костях и составьте для нее таблицу вероятностей и график. Обсудите, не лежат ли точки графика на одной или нескольких известных простых линиях.

7. (Продолжение.) Одновременно бросаются белая и красная кости и вычисляется разность $к - б$, где $к$ означает число очков, выпавших на красной кости, а $б$ — число очков, выпавших на белой кости. Найдите функцию вероятностей для этой разности и постройте ее график. Какие значения $к - б$ наиболее вероятны? Наименее вероятны? Сравните полученную вами функцию и ее график с функцией и графиком упр. 6. Прокомментируйте результаты этого сравнения.

8. Трехгранная линейка из примера 2 бросается три раза. Рассмотрите случайную величину, равную сумме очков, выпавших на нижних гранях линейки. Составьте для нее таблицу вероятностей и обсудите ее. (*Указание.* Пусть X есть сумма

очков, полученных при первых бросаниях; Y есть количество очков при третьем бросании; рассмотрите пары значений X и Y как составляющие пространство событий; затем образуйте сумму $X+Y$. Используйте таблицу вероятностей величины X, полученную в примере 2.)

9. С помощью таблицы случайных чисел в конце книги выпишите последовательность из 25 чисел. Эта последовательность соответствует случайной выборке с возвращением из чисел 0, 1, ..., 9. Будем, однако, рассматривать «0» как обозначение для «10». Рядом с каждым числом выпишите число его делителей. Вычислите относительные частоты различных количеств делителей и постройте график зависимости относительной частоты от числа делителей. Сравните результат с функцией вероятностей примера 3 и ее графиком.

10. Бросается обычная игральная кость. При этом отмечаются количество очков на верхней грани, далее количество на грани, ближайшей к вам, далее — на нижней грани и, наконец, на грани, самой далекой от вас. Повторите эту операцию 10 раз, каждый раз отмечая последовательность из четырех указанных чисел. После этого вычислите количество экстремальных точек в каждой последовательности и нанесите их относительные частоты на график. Сравните его с графиком функции вероятностей числа экстремальных точек примера 6 и прокомментируйте это сравнение.

11. Постройте график функции вероятностей числа серий из примера 5.

12. Замените эксперимент примера 5 с расположением людей у источника следующим экспериментом: перетасуйте три красных карты и две черных карты из любой карточной колоды и затем разложите их в один ряд. Буквой K будем отмечать красную карту, а буквой $Ч$ — черную. Будем рассматривать красные карты, как соответствующие занятым местам, а черные — пустым. Выполните эту операцию 25 раз, каждый раз тщательно тасуя карты. Сосчитайте число серий в каждой последовательности из 5 карт и относительные частоты различного числа серий. Постройте соответствующий график и сравните его с графиком функции вероятностей примера 5.

13. Бросаются четыре монеты. Если X означает число выпавших гербов, то найдите функцию вероятностей величины X и постройте ее график.

14. Выполните упражнение 13 при условии, что X означает число выпавших гербов минус число выпавших цифр.

15. Партия из 10 телевизоров содержит 4 неисправных телевизора. Из этой партии выбираются наугад три телевизора. Обозначим через X количество неисправных телевизоров в выборке. (а) Опишите пространство событий этого эксперимента. (б) Из скольких элементарных событий оно состоит? (в) Постройте таблицу вероятностей для случайной величины X. (г) Постройте график, соответствующий функции вероятностей.

16. 4 человека сосчитали количество студентов в аудитории, и у них получились результаты: 51, 52, 52, 53. Если все перестановки этих чисел равновозможны, то какова таблица вероятностей величины X, где случайная величина X выражает число экстремальных точек в перестановке?

17. Дана следующая таблица вероятностей

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	c	$2c$	$2c$	$3c$	c^2	$2c^2$	$7c^2+c$

(а) Найдите c. (б) Вычислите $P(X\geqslant 5)$ и $P(X<3)$. (в) Найдите наименьшее значение k, при котором $P(X\leqslant k)>1/2$.

§ 2. Математическое ожидание случайной величины: среднее значение

В этом параграфе мы введем понятие *среднего значения* случайной величины. Оно тесно связано с понятием среднего арифметического.

Пример 1. *Ящик содержит* 300 *одинаковых листков бумаги. На* 150 *из них проставлено число* 1, *на* 100 — *число* 2, *на остальных* 50 — *число* 3. *Случайным образом из ящика вынимается один листок и отмечается написанное на нем число* x, *после чего листок возвращается в ящик, и его содержимое тщательно перемешивается. Этот процесс повторяется* 500 *раз. Чему равно среднее арифметическое выписанных значений случайной величины* X?

Решение. Обозначим через n_1 число выбранных листков, на которых стоит число 1; через n_2 — число вынутых листков, на которых стоит число 2; через n_3 — число листков с числом 3. Тогда среднее арифметическое $\bar{x}$ (читается: «x с чертой») равно

$$\bar{x}=\frac{1\times n_1+2\times n_2+3\times n_3}{n_1+n_2+n_3}. \tag{1}$$

Числитель этого выражения представляет собой «взвешенную сумму» чисел 1, 2, 3 с «весами» n_1, n_2, n_3. Число $\bar{x}$ можно также выразить через *отношения* n_1/n, n_2/n, n_3/n, где $n=500=n_1+n_2+n_3$:

$$\bar{x}=1\times\frac{n_1}{n}+2\times\frac{n_2}{n}+3\times\frac{n_3}{n}. \tag{2}$$

В выражении (2) среднее арифметическое представлено в виде взвешенной суммы чисел 1, 2, 3 с весами, равными относительным долям этих чисел. Конечно, мы не знаем точных величин этих долей (по крайней мере, пока мы не выполнили эксперимент); поэтому мы не можем заранее сказать, чему будет равняться среднее арифметическое в каком-либо эксперименте. Но поскольку вероятность выбора листка с числом 1 равна $f(1)=1/2$, вероятность выбора листка с числом 2 равна $f(2)=1/3$, а вероятность выбора листка с числом 3 равна $f(3)=1/6$, то мы можем предположить, что отношения n_1/n, n_2/n, n_3/n *приблизительно* равны $f(1)$, $f(2)$ и $f(3)$. Таким образом, для значений n таких больших, как, скажем, 500, мы можем ожидать, что искомое среднее арифметическое будет близко к числу

$$1\times f(1)+2\times f(2)+3\times f(3)=$$
$$=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}.$$

Среднее арифметическое всех чисел в ящике также равно 5/3:

$$\frac{1\times 150+2\times 100+3\times 50}{150+100+50}=\frac{500}{300}=\frac{5}{3}.$$

Для небольшого количества выбранных листков мы не можем рассчитывать на то, что среднее арифметическое чисел на выбранных листках будет обязательно близко к среднему арифметическому по всей совокупности листков; однако для больших значений n почти все сочтут это естественным — и эксперимент подтверждает справедливость этого.

Пример 2. *Обозначим через X случайную величину, равную количеству делителей наугад выбранного натурального числа, заключенного в пределах от* 1 *до* 10. *Каково ожидаемое значение X?*

Решение. Выше мы уже выписывали таблицу вероятностей числа X (см. табл. 37). Используем эту таблицу для вычисления «среднего по совокупности» способом, указанным в примере 1. Мы получим

$$1\times 0{,}1+2\times 0{,}4+3\times 0{,}2+4\times 0{,}3=2{,}7.$$

Это число представляет собой средний результат, который мы можем ожидать при *большом количестве* выполнений эксперимента. Конечно, никакое число не имеет ровно 2,7 делителей; более того, при одном выполнении эксперимента мы скорее всего получим 2 делителя, поскольку именно это значение X является наиболее вероятным.

Эти примеры приводят нас к следующим определениям.

Определение 2. Среднее выборки. Пусть X есть случайная величина со значениями $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_t$. Предположим, что в выборке из n наблюдений за случайной величиной X эта величина n_1 раз принимала значение x_1, n_2 раз значение x_2, ..., n_t раз значение x_t:

Частота	n_1	n_2	...	n_t	Всего: n
Значение	x_1	x_2	...	x_t	

Тогда *средним значением* X в этой *выборке* называется число

$$\bar{x} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_tn_t}{n_1 + n_2 + \ldots + n_t} = \frac{\sum x_in_i}{\sum n_i}$$

или

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} x_in_i.} \qquad (3)$$

(См. приложение II, в котором объясняется употребление знака суммирования Σ.)

Множество упорядоченных пар (x_i, n_i), $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, t$, представленное в таблице, фигурирующей в определении 2, называется частотным распределением, или *распределением частот* значений случайной величины в выборке. При рассмотрении выборок распределения частот играют важную роль, аналогичную роли таблиц вероятностей при рассмотрении случайных величин.

Определение 3. Математическое ожидание: среднее значение. Пусть X — случайная величина со следующей таблицей вероятностей:

Вероятность, $f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_t)$
Значение X, x	x_1	x_2	...	x_t

Математическое ожидание случайной величины X, обозначаемое через $E(X)$, по определению равно

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_t f(x_t),$$

или

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{t} x_i f(x_i).} \tag{4}$$

$E(X)$ также называется *средним значением* X, или *средним значением в совокупности*.

Замечание. Часто для обозначения среднего значения случайной величины используется строчная греческая буква μ (читается: «мю»). При одновременном рассмотрении нескольких случайных величин $X, Y, \dots$ эти буквы обычно используются в качестве индексов при μ для указания соответствующего среднего значения. Так, мы можем написать

$$\mu_X = E(X) \quad \text{и} \quad \mu_Y = E(Y).$$

Когда рассматривается только одна случайная величина, индекс обычно опускается.

Итак,

для вычисления среднего значения случайной величины необходимо каждое значение случайной величины умножить на вероятность этого значения и сложить все произведения.

Выражения (3) и (4) хотя и похожи, но не идентичны. В частности, отношения n_i/n в выражении (3) меняются от одной выборки к другой; полное совпадение имеет место только в том случае, когда для всех i n_i/n равно вероятности $f(x_i)$. Однако справедливо, что

$$\frac{n_i}{n} \approx f(x_i),$$

и поэтому

$$\bar{x} \approx \mu.$$

Эти приближения обычно тем лучше, чем больше n; разумеется, они превращаются в точные равенства, когда выборка совпадает со всей совокупностью.

Пример 3. *Бросается игральная кость. Каково математическое ожидание числа выпавших очков?*

Решение. Обозначим через X случайную величину, равную числу выпавших очков при бросании кости. Возможные значения этой величины равны $1, 2, \ldots, 6$, а их вероятности все равны $1/6$. Следовательно, формула (4) в этом случае дает:

$$\mu = E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5.$$

Пример 4. *Три объекта одного типа и два объекта другого типа располагаются в ряд. Каково математическое ожидание числа серий?*

Решение. Таблица 40 — это таблица вероятностей случайной величины X — числа серий в рассматриваемом опыте. Используя эту таблицу, получаем

$$\mu = E(X) = 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}4 + 5 \times 0{,}1 = 3{,}4.$$

Замечание. Заметим, что и в этом примере математическое ожидание числа серий равно нецелому числу 3,4; но никакое значение случайной величины не равняется этому числу. То же самое справедливо для математического ожидания числа выпавших очков в примере 3 и числа делителей в примере 2. Мы обращаем на это внимание, поскольку термин «математическое ожидание» часто заменяется просто словом «ожидание», или «ожидаемая величина». Эти примеры показывают, что *«ожидаемая величина» не есть та величина, которую мы «ожидаем» или рассчитываем получить в результате выполнения эксперимента* в обычном смысле слова «ожидаем», математическое ожидание приблизительно равно среднему значению случайной величины при достаточно большом числе выполнений эксперимента. Из того, что термин «ожидаемое значение» зачастую используется как синоним термина «математическое ожидание», не следует, что понимаемое так ожидаемое значение — это наиболее частое, наиболее обычное или возможное, наиболее вероятное значение случайной величины; «ожидаемое значение» есть не более как взвешенная сумма всех возможных значений случайной величины с весами, равными их вероятностям.

Пример 5. *Согласно американским статистическим таблицам смертности, вероятность того, что 25-летний человек проживет еще один год, равна* 0,992, *а вероятность того, что он умрет в течение следующего года, равна* 0,008. *Страховая компания предлагает такому человеку застраховать свою жизнь на год на сумму* 1000 *долларов. Страховой взнос равен* 10 *долларам. Какую прибыль ожидает получить компания?*

Решение. Величина прибыли X есть случайная переменная со значениями $+10$ долларов (если застрахованный человек не умрет) и -990 долларов (если он умрет). Таблица вероятностей этой случайной величины такова:

$f(x)$	0,992	0,008
x	$+10$	-990

Следовательно,

$$\mu = E(X) = 10 \times 0{,}992 - 990 \times 0{,}008 = 2.$$

Важно отметить, что ожидаемая прибыль положительна, что дает возможность страховой компании продолжать дело, оставлять резервный капитал для выплаты страховых премий, производить административные расходы.

Пример 6. Однорукий бандит. *Игральный автомат (в Америке их называют «однорукими бандитами») имеет два окошка, в каждом из которых появляются картинки. В каждом окошке может появиться одна из трех картинок, которые называются «колокольчики», «яблоки» и «вишни». Машина устроена так, что картинки в окошках появляются независимо одна от другой. После того как автомат запущен, в каждом окошке появляется одна картинка, причем вероятности картинок для каждого окошка равны:*

Исход	*Колокольчики*	*Вишни*	*Яблоки*
Вероятность	0,4	0,5	0,1

Для запуска автомата необходимо заплатить 5 центов. После запуска в окошках может появиться любая из 9 возможных комбинаций двух картинок, по одной в каждом окошке. Игрок, заплативший 5 центов, получает в случае появления

двух картинок «яблоки»	*50 центов*
двух картинок «колокольчики»	*10 центов*
двух картинок «вишни»	*5 центов*

и ничего не получает во всех остальных случаях. Найти математическое ожидание чистого выигрыша для игрока, заплатившего 5 центов за право включить автомат.

Решение. Пусть случайная величина X означает число выигранных центов. В табл. 43 представлены элементарные события — исходы игры, их вероятности и соответствующие значения выигрыша в центах. Например, в верхней левой клетке таблицы стоит

$$\begin{gathered}(\text{я, я}):45\\0{,}01\end{gathered}$$

что означает: две картинки «яблоки», чистый выигрыш 45 центов, вероятность выигрыша 0,01. Ожидаемая ве-

Таблица 43

Однорукий бандит

Второе окошко

		Яблоки 0,1	Колокольчики 0,4	Вишни 0,5
Первое окошко	Яблоки 0,1	я, я : 45 0,01	я, к : −5 0,04	я, в : −5 0,05
	Колокольчики 0,4	к, я : −5 0,04	к, к : 5 0,16	к, в : −5 0,20
	Вишни 0,5	в, я : −5 0,05	в, к : −5 0,20	в, в : 0 0,25

личина чистого выигрыша X в одной игре равна

$$\mu_X = E(X) = 45 \times 0{,}01 + 5 \times 0{,}16 + 0 \times 0{,}25 - 5 \times 0{,}58 = = 0{,}45 + 0{,}80 - 2{,}90 = -1{,}65 \text{ цента.}$$

Таким образом, за 10 игр игрок в среднем теряет 16,5 центов; за 100 игр игрок потеряет 1 доллар 65 центов.

Упражнения к § 2

1. В эксперименте с трехгранной линейкой примера 2 из § 1 найти ожидаемое значение суммы чисел на двух нижних гранях.

2. В примере 4 из § 1 найти ожидаемое количество правильно угаданных дат.

3. В примере 5 из § 1 найти математическое ожидание числа серий.

4. Из урны, содержащей 7 шаров — 5 красных и 2 синих, выбираются случайным образом без возвращения 3 шара. Проверьте, что математическое ожидание числа синих шаров среди выбранных равно $3 \times 2/7$.

5. В упражнении 17 из § 1 найти математическое ожидание X.

6. В упражнении 15 из § 1 найти математическое ожидание числа неисправных телевизоров в выборке.

7. Вернитесь к примеру с одноруким бандитом (пример 6). Внесем следующие изменения в условия:

Исход	Колокольчики	Вишни	Яблоки
Вероятность	0,3	0,6	0,1

Выплаты автомата:

две картинки «яблоки» 25 центов,
две картинки «колокольчики» 10 центов,
две картинки «вишни» 5 центов.

Найдите математическое ожидание выигрыша игрока за одну игру.

8. *Задача об очках.* Решив разыграть приз в 4 доллара, A и B участвуют в следующей игре. Бросается монета. Если она выпадает гербом кверху, то A получает одно очко; в противном случае одно очко получает B. Тот из них, кто первым наберет три очка, выигрывает приз. После трех бросаний A набрал два очка, а B — одно очко. Постройте пространство событий для оставшейся части игры. Обозначим через X случайную величину — выигрыш A. Каково математическое ожидание X в тот момент, когда A набрал два очка, а B — одно очко?

9. В лотерее продано 100 билетов стоимостью 25 центов каждый. Разыгрываются четыре денежных приза в 10, 3, 2 и 1 доллар. Каково математическое ожидание чистого выигрыша для человека, купившего два билета?

10. Четыре одинаковые электрические лампочки временно выворачивают из патронов и кладут в ящик. Затем их случайным образом вынимают из него и вворачивают в патроны. Каково математическое ожидание числа лампочек, попавших в тот патрон, из которого они были вывернуты?

11. Вычислите математическое ожидание числа выпадений герба при бросании монеты n раз при (а) $n=1$; (б) $n=2$, (в) $n=3$; (г) $n=4$. Попытайтесь угадать ответ для произвольного значения n. Можете ли вы доказать, что ваш ответ правилен?

12. Найдите математическое ожидание суммы очков, выпавших при одновременном бросании двух игральных костей.

13. *Рулетка.* На колесе рулетки имеется 38 одинаково расположенных гнезд, которые нумеруются так: 00, 0, 1, 2, 3, ..., 35, 36. Игрок может поставить один доллар на любой номер. После того как все ставки поставлены, крупье бросает на вращающееся колесо рулетки шарик, который в конце концов попадает в какое-либо одно гнездо. Игрок, поставивший на этот номер, получает 36 долларов (35 долларов выигрыша плюс 1 доллар своей ставки); все поставившие на другие номера теряют свои ставки. Найти математическое ожидание выигрыша одного игрока.

14. Найти математическое ожидание числа экстремальных точек в последовательностях четырех измерений (см. таблицу 41).

15. В промежуток времени от 16 часов 30 минут до 18 часов 30 минут в четверг может произойти либо 0, либо 1, либо 2, либо 3 автомобильные катастрофы; вероятности этого соответственно равны 0,94; 0,03; 0,02; 0,01. Найти математическое ожидание числа катастроф в указанный период. В течение 100 таких периодов?

16. Игрок *A* платит игроку *B* один доллар, после чего бросаются три игральные кости. Если ровно на одной из них выпадает 1 очко, *A* получает от *B* 2 доллара; если 1 очко выпадает ровно на двух костях, *A* получает 4 доллара; если 1 очко выпадает на всех трех костях, *A* получает от *B* 8 долларов; в противном случае *A* не получает ничего. Справедлива ли эта игра (т. е. одинаковы ли математические ожидания чистого выигрыша для *A* и *B*)? Если нет, то сколько должен получить *A* от *B* в случае выпадения на всех трех костях 1 очка для того, чтобы игра была справедливой?

17. Вернемся к дополнительным упражнениям к § 3 гл. IV. Предположим, что одна команда сильнее другой и вероятность выигрыша ею игры независимо от исхода любой другой игры равна 2/3. Из этих условий можно вывести, что вероятности окончания соревнований ровно через 4, 5, 6 или 7 игр равны соответственно 0,21; 0,30; 0,27; 0,22. Найти математическое ожидание числа игр в соревнованиях.

18. Вероятность того, что 50-летний мужчина проживет еще один год, равна 0,988. Какую премию должна назначить страховая компания этому мужчине, если он купил страховой полис стоимостью 1000 долларов (мы не учитываем административных расходов, прибыли и т. д.)?

19. В одной игре, называемой «чак-а-лак», игрок выигрывает 15, 10, 5 или —5 центов (выигрыш —5 центов означает проигрыш 5 центов) с вероятностями 1/216, 15/216, 75/216, 125/216 соответственно. Найти математическое ожидание выигрыша игрока в одной игре. В 100 играх?

20. Выборка, состоящая из четырех шаров, производится из урны, содержащей три красных и пять белых шаров. Если в выборке не менее двух красных шаров, то игрок получает один доллар; в противном случае он теряет 50 центов. Каково математическое ожидание выигрыша этого игрока? (Начните с построения пространства события для этого эксперимента.)

21. Правильная монета бросается до тех пор, пока она не выпадет цифрой кверху, либо до трех последовательных выпадений герба. Выпишите пространство событий этого эксперимента и определите вероятности его элементов. Найдите математическое ожидание числа бросаний при одном выполнении этого эксперимента.

22. Фермер считает, что в текущем году куры на его птицеферме принесут 10 000 дюжин яиц. Кроме того, он считает, что, принимая во внимание различные потери и колебания цен, он сможет выручить не более 6 центов за дюжину яиц и потерять не более 2 центов за дюжину яиц и что вероятности возможных выигрышей и потерь цен таковы:

Цена в центах за дюжину яиц	6	4	2	0	-2
Вероятность	0,20	0,50	0,20	0,06	0,04

Как ему оценить ожидаемую прибыль (а) от продажи одной дюжины яиц, (б) от продажи всех 10 000 дюжин яиц?

23. Возможными значениями случайной величины X являются все натуральные числа от значения n и до $n+m$. Если все эти значения равновозможны, то каково $E(X)$?

24. Случайная величина X принимает значения 0 и n с вероятностями соответственно $\frac{n-1}{n}$ и $\frac{1}{n}$. Найдите $E(X)$. Как выглядит график функции вероятностей величины X (а) при $n=5$, (б) при $n=20$, (в) при $n=1000$, (г) при $n\to\infty$. Чему равен предел $E(X)$ при $n\to\infty$?

25. Возможными значениями случайной величины X являются натуральные числа 1, 2, 3, ..., n и $P(X=x)=cx$, где c есть некоторая константа. (Точки графика функции вероятностей принадлежат одной прямой.) Покажите, что $c=\frac{2}{n(n+1)}$. Найдите $E(X)$. Справедливо ли приблизительное равенство $E(X)\approx\approx\frac{2}{3}n$ при большом n? Обсудите этот результат и поясните его.

§ 3. Математическое ожидание функции случайной величины

Предположим, что X есть случайная величина, т. е. величина, значение которой равно числу, определяемому зависящим от случая исходом эксперимента. Если каждое значение X увеличить на 5, то в результате мы снова получим некие числа, определяемые исходами эксперимента, — значения случайной величины $X+5$. Вот другой пример: если значения X возводятся в квадрат, то мы получаем значения случайной величины X^2. В этом параграфе мы изучим случайные величины, определяемые величиной X и подобные aX, $X+c$, $aX+c$, X^2 или $(X-c)^2$, где a и c — константы, таблицы вероятностей каждой из этих случайных величин, которые можно получить из таблицы вероятностей величины X, и среднее значение, т. е. математическое ожидание каждой из этих величин.

В следующем примере мы покажем, как можно находить эти средние значения, исходя непосредственно из таблицы вероятностей величины X, без промежуточного обращения к таблице вероятностей зависимой от X случайной величины.

Пример 1. *Случайная величина X имеет следующую таблицу вероятностей*:

Вероятность, $f(x)$	0,2	0,3	0,5
Значения X, x	−1	0	1

Вычислите следующие математические ожидания:

$E(X)$, $E(2X)$, $E(X+1)$, $E(2X+1)$, $E(X^2)$, $E[(X-0{,}3)^2]$.

Решение. (а) $E(X)=-1\times 0{,}2+0\times 0{,}3+1\times 0{,}5=$ $=0{,}3$.

Таким образом, среднее значение X равно 0,3.

(б) Заметим, что $P(2X=-2)=P(X=-1)$, и т. д.; поэтому возможные значения величины $2X$ и их вероятности таковы:

Вероятности, $f(x)$	0,2	0,3	0,5
Значения $2X$	−2	0	2

Если мы умножим каждое возможное значение $2X$ на его вероятность и сложим все полученные произведения, то мы придем к среднему значению или математическому ожиданию случайной величины $2X$:

$$\mu_{2X}=E(2X)=-2\times 0{,}2+0\times 0{,}3+2\times 0{,}5=$$
$$=0{,}6=2E(X).$$

Таким образом, удвоение значений случайной величины удваивает ее математическое ожидание:

$$\text{(в)}\ \mu_{X+1} = E(X+1) = (-1+1)\times 0{,}2 + (0+1)\times 0{,}3 + (1+1)\times 0{,}5 = 1{,}3 = E(X)+1.$$

Очевидно, увеличивая каждое значение случайной величины на 1, мы увеличиваем на 1 и среднее значение этой случайной величины.

$$\text{(г)}\ E(2X+1) = (-2+1)\cdot 0{,}2 + (0+1)\cdot 0{,}3 + (2+1)\cdot 0{,}5 = 1{,}6 = 2E(X)+1.$$

Удвоение значений случайной величины и добавление к ним 1 приводят к удвоению математического ожидания и увеличению результата на 1.

$$\text{(д)}\qquad E(X^2) = (-1)^2\cdot 0{,}2 + 0^2\cdot 0{,}3 + 1^2\cdot(0{,}5) = 0{,}7 \neq [E(X)]^2.$$

Заметим, что математическое ожидание квадрата случайной величины *не совпадает* с квадратом математического ожидания этой величины.

$$\text{(е)}\ E[(X-0{,}3)^2] = (-1{,}3)^2\cdot 0{,}2 + (-0{,}3)^2\cdot 0{,}3 + (0{,}7)^2\cdot 0{,}5 = 0{,}61 = 0{,}7 - 0{,}09 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

В таком виде представить $E[(X-c)^2]$ можно не всегда: здесь важно, что 0,3 есть математическое ожидание величины X.

Во всех этих примерах мы делали следующее: мы вычисляли значение функции от X подстановкой в формулу для этой функции всех возможных значений величины X (в нашем случае $-1, 0, 1$), умножали каждый результат на вероятность соответствующего значения величины X (здесь 0,5; 0,3; 0,2) и складывали полученные произведения. Формализуем эту процедуру.

Определение 4. Математическое ожидание функции. Пусть X есть случайная величина, таблица вероятностей которой такова:

Вероятность, $f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_t)$
Значение X, x	x_1	x_2	...	x_t

Пусть H есть некоторая функция величины X. Тогда *среднее значение*, или *математическое ожидание*, новой случайной величины $H(X)$, по определению, равно

$$E[H(X)] = H(x_1)f(x_1) + H(x_2)f(x_2) + \ldots + H(x_t)f(x_t), \tag{1}$$

или

$$\boxed{E[H(X)] = \sum_{i=1}^{t} H(x_i)f(x_i).} \tag{2}$$

Замечание. Математическое ожидание новой случайной величины $Y=H(X)$ может быть вычислено при помощи случайной функции величины Y умножением каждого возможного значения Y на его вероятность и сложением этих произведений. В примере 1(б) мы проиллюстрировали это для случая $Y=2X$. Возможные значения Y были таковы:

$$y_1 = 2x_1 = 2\times(-1) = -2,$$
$$y_2 = 2x_2 = 2\times 0 = 0,$$
$$y_3 = 2x_3 = 2\times 1 = 2,$$

а их вероятности равнялись

$$P(Y=y_1) = P(Y=-2) = P(X=-1) = f(x_1),$$
$$P(Y=y_2) = P(Y=0) = P(X=0) = f(x_2),$$
$$P(Y=y_3) = P(Y=2) = P(X=1) = f(x_3).$$

Следовательно, в этом примере мы получаем

$$\begin{aligned}E(Y) &= y_1P(Y=y_1)+y_2P(Y=y_2)+y_3P(Y=y_3)=\\&= y_1f(x_1)+y_2f(x_2)+y_3f(x_3)=\\&= 2x_1f(x_1)+2X_2f(x_2)+2x_3f(x_3),\end{aligned}$$

что соответствует результату, задаваемому выражением (1). Отметим также, что мы *не* получили

$$2x_1f(2x_1)+2x_2f(2x_2)+2x_3f(2x_3),$$

поскольку вероятность того, что $2X$ принимает значение $2x_i$, совпадает с вероятностью того, что X принимает значение x_i, и равна $f(x_i)$, а не $f(2x_i)$.

Иногда два или несколько значений X дают одно и то же значение новой случайной величины $H(X)$. Например, как $X=-1$, так и $X=1$ в примере 1 (д) давали одно и то же значение 1 величины X^2. В общем случае предположим, что $Y=H(X)$ принимает значение y_1 при m различных значениях X, например при $X=x_1, x_2, \ldots x_m$. Тогда

$$y_1=H(x_1)=H(x_2)=\ldots=H(x_m). \tag{3}$$

Соответствующее слагаемое в выражении для математического ожидания Y равно

$$y_1\cdot P(Y=y_1).$$

Но

$$P(Y=y_1)=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_m),$$

так что

$$y_1P(Y=y_1)=y_1f(x_1)+y_1f(x_2)+\ldots+y_1f(x_m),$$

и, учитывая равенства (3), получаем

$$\begin{aligned}y_1P(Y=y_1)=H(x_1)f(x_1)+H(x_2)f(x_2)+\ldots\\ \ldots+H(x_m)f(x_m).\end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично, если другому множеству значений X соответствует y_2, третьему множеству — y_3 и т. д., мы можем сгруппировать все члены в правой части выражения (1) в группы членов, соответствующих слагаемым в левой части следующего выражения:

$$y_1P(Y=y_1)+y_2P(Y=y_2)+\ldots=E(Y).$$

Таким образом, выражение (1) позволяет нам использовать случайную функцию величины X для получения того же самого результата, который мы могли бы получить, используя случайную функцию величины Y.

Пример 1 иллюстрирует некоторые результаты, которые справедливы в общем случае и которые мы теперь сформулируем в качестве теорем. Мы также приведем алгебраическое доказательство этой теоремы.

Теорема 1. *Пусть X есть случайная величина. Тогда для любых чисел a и b*

$$\boxed{E(aX+b)=aE(X)+b.} \tag{5}$$

Доказательство. Предположим, что функция вероятностей величины X имеет вид

$$\{(x_i;\ f(x_i)):\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ t\}.$$

Тогда, по определению 4,

$$E(aX+b)=(ax_1+b)f(x_1)+(ax_2+b)f(x_2)+\ldots$$
$$\ldots+(ax_t+b)f(x_t).$$

Преобразуем правую часть этого выражения, вынеся за скобки множители a и b:

$$E(aX+b)=a[x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+\ldots+x_tf(x_t)]+$$
$$+b[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_t)].$$

Первое из выражений, заключенных в квадратные скобки, представляет собой $E(X)=\sum x_if(x_i)$; второе из этих выражений равно 1, поскольку $\sum f(x_i)=1$. Поэтому мы получаем требуемый результат:

$$E(aX+b)=aE(X)+b. \ \square$$

Следствие 2. *Пусть X есть случайная величина с математическим ожиданием $E(X)=\mu$. Тогда $E(X-\mu)=0$.*

Доказательство. Положим в теореме 1 $a=1$, $b=-\mu$:

$$E(X-\mu)=E(X)-\mu=\mu-\mu=0. \ \square \tag{6}$$

Замечание. Математическое ожидание $X-c$ часто называют *первым моментом* величины X относительно c. Причина употребления такого названия заключается в следующем: выражению

$$(x_1-c)f(x_1)+(x_2-c)f(x_2)+\ldots+(x_t-c)f(x_t) \qquad (7)$$

можно придать такую физическую интерпретацию: вообразим легкий, но абсолютно жесткий стержень, к которому в точке x_1 прикреплен груз веса $f(x_1)$, в точке x_2 — груз веса $f(x_2)$ и т. д., в точке x_t прикреплен груз веса $f(x_t)$. На стержне выбран какой-либо масштаб, а веса измеряются в некоторой системе единиц. Тогда формула (7) представляет собой сумму

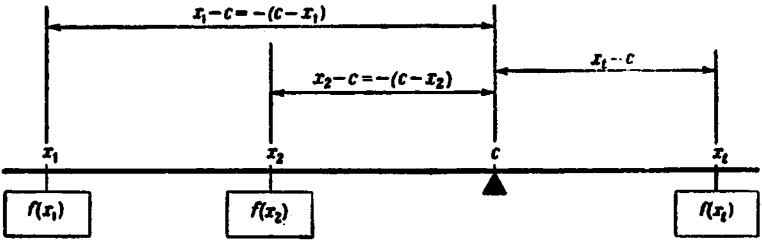


Рис. 15. Момент сил $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_t)$ относительно c.

произведений веса каждого груза на длину «плеча» от точки приложения этого груза до точки c (см. рис. 15).

В физике выражение (7) называется первым моментом системы масс (сил) относительно c. Если c есть центр тяжести системы, то первый момент относительно c равен нулю. В этом случае система, на которую не действуют никакие силы, кроме сил тяжести, приложенных к изображенным на рис. 15 массам, будет находиться в равновесии, если она закреплена в точке c. Так, эквилибрист в цирке сохраняет равновесие, располагая точку опоры доски, на которой он стоит, прямо под центром тяжести. Из выражения (6) следует, что если мы помещаем точку опоры в точку $\mu=E(X)$, то первый момент относительно μ равен нулю. Наоборот, если $E(X-c)=0$, то $c=E(X)$; поэтому среднее значение есть единственная точка, относительно которой первый момент равен нулю. Это одна из причин, по которой полезно использовать среднее значение для представления «расположения» или «центра» области определения случайной функции. Среднее значение не обязательно расположено на равных расстояниях от концов области определения — подобно тому, как два мальчика, качающихся на доске, располагают точку опоры не в середине доски: точка опоры доски располагается ближе к тому из них, который тяжелее. Аналогично если «все вероятности» группируются вблизи одного из концов области определения случайной функции, то среднее значение случайной величины будет также расположено ближе к этому концу.

Упражнения к § 3

В упражнениях 1—5 используйте случайную величину X со следующей таблицей вероятностей:

Вероятность, $f(x)$	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1
Значение X, x	-2	-1	0	1	2

1. Вычислите $E(X)$.

2. Найдите таблицу вероятностей для функции $3X-1$ и вычислите $E(3X-1)$. Сравните ваш результат с $3E(X)-1$.

3. Найдите таблицу вероятностей для функции $2X+3$. Вычислите $E(2X+3)$ и сравните ваш результат с $2E(X)+3$.

4. Найдите таблицу вероятностей для величины X^2 и вычислите $E(X^2)$.

5. Найдите таблицу вероятностей для величины X^2+1 и вычислите $E(X^2+1)$.

В упражнениях 6—9 используйте следующие данные:

Вероятность, $f(x)$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1
Значение X, x	1	2	3	4	5

6. Найдите $E(X)$.

7. Вычислите по возможности более простым способом
(а) $E(3X-7)$; (б) $E(X-2,7)$; (в) $E(10X)$.

8. Вычислите $E(X^2)$.

9. Вычислите $E(X-2,7)^2$ и затем докажите, что $E(X-2,7)^2=E(X^2)-[E(X)]^2$.

Упражнения на тему «Санкт-Петербургского парадокса» *)

Описание игры. Игрок бросает монету либо до выпадения первой цифры, либо до появления n раз подряд герба. Обозначим через X количество гербов, выпавших в одной игре.

1. Выпишите таблицу вероятностей величины X для $n=2$.

2. Выпишите таблицу вероятностей величины X для $n=3$.

3. Выпишите таблицу вероятностей величины X для $n=4$.

4. Найдите функцию вероятностей для произвольного значения n.

Описание платежа. В игре, описанной выше, сумма, которую получает игрок, есть случайная величина $Y=2^X$.

5. Найдите $E(Y)$ для $n=2$.

6. Найдите $E(Y)$ для $n=3$.

7. Найдите $E(Y)$ для $n=4$.

8. Найдите $E(Y)$ для произвольного значения n. (*Указание*: Заметьте, что $p+p^2+\ldots+p^{n-1}$ есть сумма членов геометрической прогрессии.)

9. Обсудите поведение $E(Y)$ при возрастании n.

10. Не будем никак ограничивать число n выпадений герба, т. е. будем считать, что игра продолжается до выпадения первой цифры. Рассмотрите, чему будет равно в этом случае математическое ожидание выигрыша. (В этом и заключается знаменитый Санкт-Петербургский парадокс; можно сказать, что математическое ожидание выигрыша бесконечно.)

Справедливая игра. Напомним, что игра, в которой участвуют два игрока, называется справедливой, если математическое ожидание выигрыша каждого игрока равно нулю. В нашей игре вторым партнером является банк или игорный дом. Игрок бросает монету до появления первой цифры. Если до этого выпало X гербов, то игрок получает от банка $Y=2^X$ долларов.

11. Если банк обладает неограниченным капиталом, то сколько должен заплатить в банк игрок перед игрой для того, чтобы игра была справедливой?

12. Предположим, что банк обладает капиталом в 2^{20} долларов (1 048 476 долларов). Сколько должен заплатить игрок в банк для того, чтобы игра стала справедливой?

13. Выполните упр. 12 при условии, что банк обладает капиталом в 4×10^{11} долларов, что приблизительно равно размеру национального долга США в 1960 г.

---

*) «Санкт-Петербургский парадокс» был указан в 1713 г. Николаем Бернулли в письме к французскому математику П. Р. Моимору; обсуждению этого парадокса посвящена статья Даниила Бернулли, помещенная в 1738 г. в «Комментариях Санкт-Петербургской (Российской) Академии наук»; с этой статьей и связано название «Санкт-Петербургская игра, или Санкт-Петербургский парадокс».

Замечание. Хотя и странно было бы ожидать, что с небольшими ресурсами можно вступать в справедливую игру с банком, капиталы которого выражаются астрономическими цифрами, все же результат упражнения 11 поражает: за участие в этой игре можно заплатить любую сумму денег. При этом игра будет справедливой лишь тогда, когда игрок заплатит бесконечную сумму денег. Важность этого результата не в его буквальной интерпретации, т. е. не в том, что никто не сможет заплатить бесконечную сумму. Рассмотрение этой и подобных задач приводит людей к пониманию того, что ожидаемая величина выигрыша не является единственной мерой цены, поскольку никто не вложит большой суммы денег в предприятие с еще большим ожидаемым выигрышем, если вероятность хотя бы вернуть назад свои деньги будет очень мала. Большинство из нас не рискнут поставить 10 000 долларов в игре, выигрыш в которой равен 1 миллиарду долларов, а вероятность выигрыша есть всего 1/10 000, и это несмотря на то, что математическое ожидание выигрыша равно 90 000 долларам. Для объяснения такого поведения экономисты ввели понятие *полезности*.

§ 4. Изменчивость

Напомним, что таблица вероятностей случайной величины X представляет собой совокупность возможных значений X и вероятностей этих значений. Для многих практических целей удобно иметь, быть может, и не полную информацию, доставляемую нам таблицей вероятностей, но зато в более концентрированном виде. Частично этой цели служит математическое ожидание, или среднее значение, $E(X)$; *математическое ожидание сообщает нам о том, где расположен центр масс функции вероятностей.* Так, например, среднее число очков, выпавших при бросании кости, равно 3,5; среднее число делителей натурального числа, заключенного между 1 и 10, равно 2,7; среднее число выпадений гербов при бросании двух монет равно 1. Среднее значение полезно в том случае, когда нас интересуют результаты «в среднем», реализующиеся при многократном выполнении некоторого эксперимента. Однако оно ничего не говорит нам о том, насколько могут расходиться друг с другом разные исходы однократного выполнения эксперимента. Теперь мы рассмотрим различные альтернативные способы измерения такой изменчивости, или расходимости, связанные с понятием *стандартного отклонения* и *дисперсии*. (Задание одной из этих величин определяет другую, поскольку дисперсия равна квадрату стандартного отклонения.)

Понятие о разбросе, или изменчивости. Для того чтобы получить некоторое представление об изменчивости, рассмотрим шесть случайных величин X_A, X_B, ..., X_F, графики функций вероятностей которых в порядке A, B, ..., F изображены на рис. 16. Эти графики все симметричны относительно точки $x=0$; поэтому математические ожидания всех случайных величин равны нулю. Мы рассмотрим различные способы измерения разброса значений этих величин по отношению к их общему среднему значению.

Первой величиной, которой измеряется разброс, или изменчивость, является *размах,* определяемый следующим образом. Рассмотрим все значения X, которые имеют положительные вероятности; *размахом* X называется разность между наибольшими и наименьшими из этих значений. В примерах A, B, C размах равен 2; в примерах D и E размах равен 4; в примере F размах равен 6. Однако мы предпочли бы иметь такой метод измерения изменчивости, который различал бы случаи A, B и C хотя бы потому, что поскольку мы собираемся измерять изменчивость по отношению к среднему значению, то в случае A это среднее значение имеет вероятность 6/8, тогда как в случае C это среднее значение вообще не принадлежит к возможным значениям случайной величины.

Каким образом мы можем сравнить между собой разброс значений случайных величин X_A и X_B по отношению к их (общему) среднему значению? Сначала рассмотрим случайную величину X_A — исход эксперимента A. Выполняя этот эксперимент 1200 раз, мы ожидаем получить значение 0 приблизительно 900 раз, значение $+1$ приблизительно 150 раз и значение -1 также приблизительно 150 раз. Наоборот, в эксперименте B мы ожидаем получить около 400 значений 0, около 400 значений $+1$ и около 400 значений -1, т. е. результаты, которые кажутся более разнообразными, менее сосредоточенными, нежели результаты экспе-

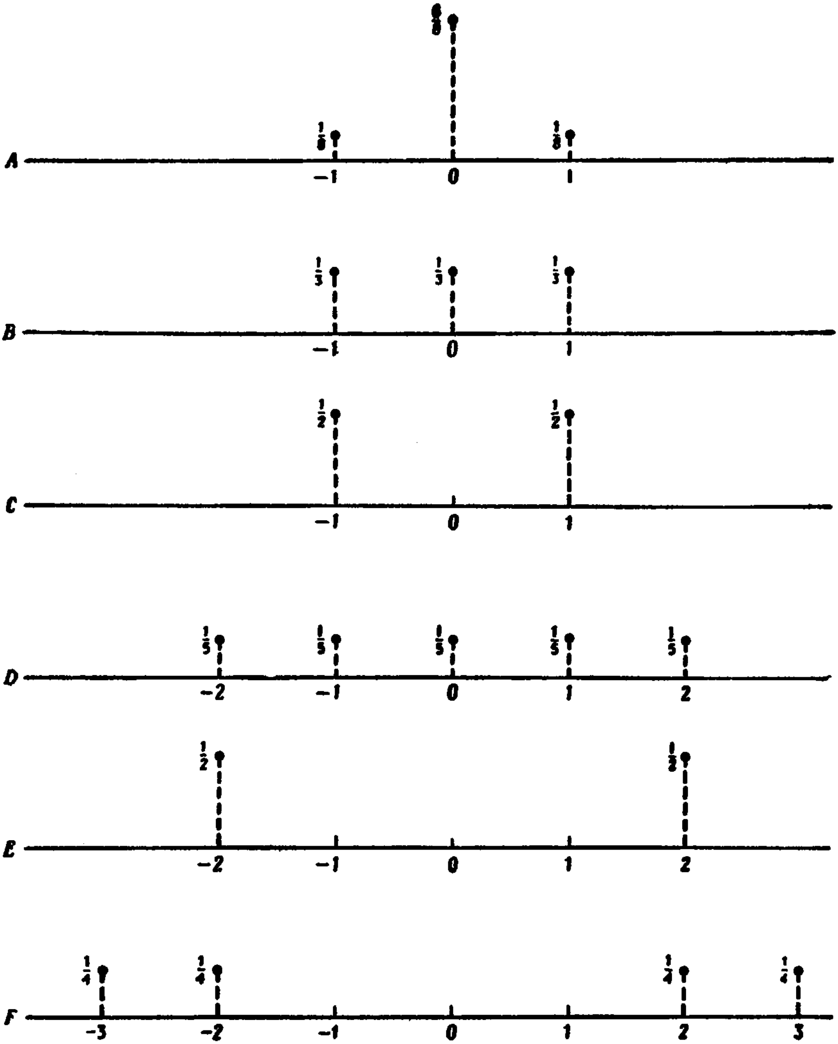


Рис. 16. Графики шести функций вероятностей, иллюстрирующие изменчивость.

римента A. Таким образом, кажется резонным требовать, чтобы мера изменчивости, которую мы собираемся предложить, говорила о большей изменчивости B по сравнению с A.

Сравнение между B и C менее очевидно. Однако поскольку мы используем *среднее значение* как меру *расположения* распределения вероятностей, мы должны измерять *изменчивость относительно среднего значения*. В нашем случае B дает результат, равный среднему значению, 0 приблизительно в 1/3 всех случаев, тогда как значения $+1$ и -1 получаются в остальных 2/3 всех случаев. Наоборот, C всегда приводит к этим последним результатам. Поэтому в том случае, когда изменчивость измеряется по отношению к среднему значению, случайная величина C более изменчива, нежели B.

Ясно, что E более изменчива, чем C, а F более изменчива, чем E, а вот D и C сравнивать труднее.

Попробуем сравнить C и D. Для случайной величины C исходы опыта равны либо $+1$, либо -1; следовательно, они расположены на расстоянии 1 от среднего значения 0. С другой стороны, случайная величина D принимает среднее значение 0 приблизительно в 1/5 всех случаев; значение, удаленное от среднего значения на расстояние 1, оно принимает приблизительно в 2/5 всех случаев; значение, удаленное от среднего значения на расстояние 2, — в оставшихся 2/5 всех случаев. Следовательно, математическое ожидание «расстояния от среднего значения» равно

$$0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5},$$

что несколько больше, чем соответствующее число для случайной величины C. Таким образом, рассуждая, как описано выше, мы заключаем, что величина D более изменчива, чем C.

Этот способ рассуждения приводит к мысли о том, чтобы принять в качестве меры изменчивости *математическое ожидание расстояния X от ее среднего значения*. Применяя выражение (1) определения 4 к функции

$$H(X)=|X_D-\mu|,$$

мы получаем

$$E(|X_D-\mu|)=|-2-0|\cdot\frac{1}{5}+|-1-0|\cdot\frac{1}{5}+$$
$$+|0-0|\cdot\frac{1}{5}+|1-0|\cdot\frac{1}{5}+|2-0|\cdot\frac{1}{5}=$$
$$=2\left(\frac{1}{5}\right)+1\cdot\left(\frac{1}{5}\right)+0\cdot\left(\frac{1}{5}\right)+1\left(\frac{1}{5}\right)+2\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{6}{5}.$$

Среднее абсолютное отклонение определяется следующим образом.

Определение 5. Среднее абсолютное отклонение. Пусть X есть случайная величина со средиим значением μ:

$$E(X)=\mu.$$

Тогда *средним абсолютным отклонением* величины X от μ называется математическое ожидание величины $|X-\mu|$:

$$\boxed{\textit{среднее абсолютное отклонение } X=E(|X-\mu|).} \tag{1}$$

В третьем столбце табл. 44 представлены средние абсолютные отклонения для случайных величин, графики функций вероятностей которых изображены на рис. 16.

Хотя среднее абсолютное отклонение представляет собой удачную меру изменчивости, с ним не совсем удобно работать. При алгебраических выкладках знак абсолютной величины часто сильно осложняет подсчеты — и это первая причина, по которой желательно было бы выбрать другую меру разброса значений случайной величины. Однако просто среднее отклонение такой мерой служить не может, поскольку в силу следствия 2 (стр. 255) среднее отклонение случайной величины от ее математического ожидания всегда равно нулю.

Таблица 44

Меры изменчивости для примеров на рис. 16

Пример	Таблица вероятностей	Среднее абсолютное отклонение	Дисперсия	Стандартное отклонение
A	$f(x)$: $\frac{1}{8}\ \frac{6}{8}\ \frac{1}{8}$ x: $-1\ 0\ 1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0,500
B	$f(x)$: $\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$ x: $-1\ 0\ 1$	$\frac{2}{3}$		0,816
C	$f(x)$: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ x: $-1\ 1$	1		1,000
D	$f(x)$: $\frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}$ x: $-2\ -1\ 0\ 1\ 2$	$\frac{6}{5}$	2	1,414
E	$f(x)$: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ x: $-2\ 2$	2		2,000
F	$f(x)$: $\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}$ x: $-3\ -2\ 2\ 3$	$\frac{5}{2}$		2,550

Преимуществом измерения отклонений по абсолютной величине является неотрицательность получаемых значений отклонений; следовательно, отклонения взаимно не уничтожают друг друга. Другой функцией, обладающей этим свойством, является *квадрат отклонения* $(X-\mu)^2$. Работа с этой функцией математически значительно более удобна. Когда мы ознакомимся со свойствами *дисперсии*, которая представляет собой математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от ее среднего значения, мы увидим, что существуют две основные причины, по которым дисперсию следует предпочесть любой другой мере изменчивости:

(1) *Аддитивность.* Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий; даже и тогда, когда эти две величины зависимы, для дисперсии их суммы существует простое выражение.

(2) *Центральная предельная теорема.* Предельное поведение некоторой случайной величины, которая является суммой большого числа независимых случайных величин, зависит от *дисперсий* этих случайных величин.

Конечно, дисперсия не есть квадрат самого большого отклонения, — это есть взвешенное среднее квадратов всех отклонений с весами, соответствующими вероятностям. Статистики называют это число также *средним квадратичным отклонением* $E[(X-\mu)^2]$. Дисперсия случайной величины X обычно обозначается $D(X)$ или Var (X)*).

Для случайной величины x_D (рис. 16) дисперсия вычисляется так (напомним, что $\mu = 0$):

Вероятность, $f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
Значение X, x	-2	-1	0	1	2
Значение $X-\mu$, $(x-0)$	-2	-1	0	1	2
Значение $(X-\mu)^2$, (x^2)	4	1	0	1	4
Значение $x^2 \cdot f(x)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

$$D(X) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 2.$$

Следовательно, для случая D нашего примера дисперсия равна 2. Аналогичные вычисления для случайной величины C (упр. 2) дают результат 1.

*) От английского термина variance — дисперсия.

Определение 6. Дисперсия. Пусть X есть случайная величина со средним значением $E(X)=\mu$. *Дисперсия* X, обозначаемая через $D(X)$, по определению равна

$$\boxed{D(X)=E[(X-\mu)^2]=\sum_{i=1}^{t}(x_i-\mu)^2 f(x_i).} \tag{2}$$

Иными словами, дисперсия X равна математическому ожиданию квадрата отклонения X от ее среднего значения.

В некоторых случаях необходимо иметь такую меру изменчивости X, которая была бы выражена в тех же единицах измерения, что и X. Поскольку размерность дисперсии $D(X)$ совпадает с квадратом размерности самой случайной величины X, мы можем получить требуемую характеристику, извлекая арифметический квадратный корень из дисперсии. Число, получаемое таким образом, носит название *стандартного отклонения* величины X. Стандартное отклонение X обозначается σ_X (σ — строчная греческая буква, которая читается «сигма»). В том случае, когда ясно, о какой случайной величине идет речь, индекс при букве σ опускается.

Определение 7. Стандартное отклонение. Пусть X есть случайная величина, математическое ожидание которой равно μ. *Стандартным отклонением* величины X называется арифметический квадратный корень из ее дисперсии:

$$\boxed{\sigma_X=\sqrt{D(X)}=\sqrt{E[(X-\mu)^2]}.} \tag{3}$$

Замечание. Очевидно, что дисперсия X равна квадрату стандартного отклонения:

$$\boxed{D(X)=\sigma_X^2.} \tag{4}$$

Пример 1. *В пятом столбце табл. 44 представлены стандартные отклонения для всех случайных величин*

A — F примера (см. рис. 16). Заметим, что как среднее абсолютное отклонение в столбце 3, так и стандартное отклонение в столбце 5 измеряют разброс значений случайной величины таким образом, что он увеличивается при движении по таблице сверху вниз.

Пример 2. *Пусть X обозначает число гербов, выпавших при бросании одной монеты, а Y обозначает число гербов, выпавших при бросании двух монет. Требуется сравнить дисперсии случайных величин X и Y.*

Таблицы вероятностей случайных величин X и Y имеют следующий вид:

Вероятность, $f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Значение X, x	0	1

Вероятность, $f(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Значение Y, y	0	1	2

Решение. Сначала вычислим средние значения:

$$\mu_X = E(X) = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\mu_Y = E(Y) = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1.$$

Затем найдем дисперсии:

$$D(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \left(0-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4};$$

$$D(Y) = \sigma_Y^2 = E\left[(Y-\mu_Y)^2\right] = (0-1)^2\cdot\frac{1}{4} + (1-1)^2\cdot\frac{1}{2} + (2-1)^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 2\sigma_X^2.$$

Дисперсия числа гербов при двух бросаниях в два раза больше дисперсии числа гербов при одном бросании.

Пример 3. *Бросается (обычная) игральная кость. Найти среднее значение и дисперсию числа выпавших очков.*

Решение. Пусть случайная величина X представляет число выпавших очков. Выпишем таблицу вероятностей величины X:

Вероятность, $f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Значение X, x	1	2	3	4	5	6

Среднее значение, как мы уже находили раньше, равно

$$\mu_X = E(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \\ = 21\times\frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Дисперсия равна

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \\ = \left(1-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(2-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(3-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \\ + \left(4-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(5-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(6-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{35}{12}.$$

Через несколько строк мы докажем общую формулу, которая часто упрощает вычисление дисперсии. Эта формула имеет следующий вид:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{5}$$

Проверим, что выражение (5) дает правильный результат для дисперсии числа очков при бросании кости:

$$E(X^2) = 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{1}{6} + 3^2\cdot\frac{1}{6} + 4^2\cdot\frac{1}{6} + \\ + 5^2\cdot\frac{1}{6} + 6^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6},$$

$$[E(X)]^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4},$$

так что

$$E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{182-147}{12}=\frac{35}{12}.$$

Этот результат совпадает с ранее вычисленным значением дисперсии.

Из формулы (5) следует, что *дисперсия величины X равна математическому ожиданию квадрата величины X минус квадрат ее математического ожидания.* Мы сформулируем этот важный результат в качестве теоремы и докажем ее для произвольной случайной величины, принимающей только три различных значения; обобщение этого доказательства на случай произвольного конечного числа возможных значений не представляет труда.

Теорема 3. Дисперсия. *Пусть X есть случайная величина с математическим ожиданием $E(X)=\mu$ и дисперсией $D(X)=\sigma^2$. Тогда*

$$\boxed{\sigma^2=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)-\mu^2.} \tag{6}$$

Доказательство. Пусть таблица вероятностей случайной величины X имеет вид:

Вероятность, $f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_t)$
Значение X, x	x_1	x_2	...	x_t

Мы временно предположим, что число t значений X равно 3. Доказательство теоремы для больших или меньших значений t почти не отличается от проведенного ниже.

По определению,

$$D(X)=\sigma^2=E[(X-\mu)^2]=$$
$$=(x_1-\mu)^2f(x_1)+(x_2-\mu)^2f(x_2)+(x_3-\mu)^2f(x_3). \tag{7}$$

Возводя в квадрат, получаем

$$(x_1-\mu)^2f(x_1)=x_1^2f(x_1)-2\mu x_1f(x_1)+\mu^2f(x_1),$$
$$(x_2-\mu)^2f(x_2)=x_2^2f(x_2)-2\mu x_2f(x_2)+\mu^2f(x_2),$$
$$(x_3-\mu)^2f(x_3)=x_3^2f(x_3)-2\mu x_3f(x_3)+\mu^2f(x_3).$$

Сложив все эти равенства и объединив в правой части члены, содержащие μ в одной и той же степени, получим

$$\begin{aligned}\sum (x_i-\mu)^2 f(x_i) = {} & [x_1^2 f(x_1)+x_2^2 f(x_2)+x_3^2 f(x_3)] - \\ & -2\mu\,[x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)+x_3 f(x_3)] + \\ & +\mu^2\,[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)] = \\ = {} & \sum x_i^2 f(x_i) - 2\mu \sum x_i f(x_i) + \mu^2 \sum f(x_i). \end{aligned} \tag{8}$$

По определению математического ожидания,

$$\sum x_i^2 f(x_i) = E(X^2), \tag{9а}$$

$$\sum x_i f(x_i) = E(X) = \mu, \tag{9б}$$

и, поскольку сумма вероятностей равна 1,

$$\sum f(x_i) = 1. \tag{9в}$$

Если мы подставим правые части выражений (9а, б, в) в правую часть выражения (8) и заменим $E(X)$ на μ, то получим

$$\begin{aligned}\sum (x_i-\mu)^2 f(x_i) &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = \\ &= E(X^2) - 2E(X)\cdot E(X) + [E(X)]^2 = \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \\ &= E(X^2) - \mu^2. \end{aligned} \tag{10}$$

При $t=3$ индекс суммирования i в выражениях (8), (9), (10) меняется от 1 до 3; в общем случае он меняется от 1 до t. Поскольку в левой части выражения (10) стоит, по определению, $E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$, то мы получили требуемый результат. □

Пример 4. *Найти математическое ожидание и дисперсию числа делителей X произвольного наугад выбранного натурального числа, заключающегося в пределах от 1 до 10.*

Решение. Таблица вероятностей для величины X имеет вид:

Вероятность, $f(x)$	0,1	0,4	0,2	0,3
Значение X, x	1	2	3	4

Выше мы уже видели, что математнческое ожндание, нли среднее значение, велнчнны X равно

$$\mu = E(X) = \sum x_i f(x_i) = 2{,}7.$$

Вычислять непосредственно $E[(X-2{,}7)^2]$ не очень удобно. Но мы можем воспользоваться теоремой 3:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E(X^2) - \mu^2 = \\ &= (1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}4 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}3) - 2{,}7^2 = \\ &= 8{,}3 - 7{,}29 = 1{,}01.\end{aligned}$$

Иногда можно упростить вычнсление дисперсии, изменив либо начало отсчета на оси координат, по которой откладываются значения случайной величины, либо масштаб измерения длин вдоль этой оси. Добавление константы к каждому значению случайной величины, эквивалентное сдвигу начала отсчета, приводнт к увеличению математнческого ожидания на эту же константу, но не меняет дисперсии. По-иному обстоит дело в случае умножения всех значений случайной величины на некоторый положительный множитель, эквивалентного изменению масштаба измерений (например, переходу от тонн к килограммам или от метров к километрам). Такое изменение масштаба приводит к тому, что как среднее значение случайной величины, так и ее стандартное отклонение умножаются на один и тот же множнтель; но дисперсия при этом умножается на *квадрат* этого множителя, ибо дисперсия измеряется в *квадратах* тех единиц, в каких измеряется сама случайная величина.

Следующие теоремы показывают, как меняются дисперсия н стандартное отклонение при опнсанных преобразованиях случайной величнны. Доказательство этих теорем (оно составляет содержание упр. 9) читателю предстоит выполнить самостоятельно.

Теорема 4. *Пусть X есть случайная величина с дисперсией σ^2, а c — некоторое число. Тогда*

$$\boxed{\sigma^2_{X+c} = \sigma^2_X; \quad \sigma_{X+c} = \sigma_X} \tag{11}$$

и

$$\boxed{\sigma^2_{cX} = c^2\sigma^2_X; \quad \sigma_{cX} = |c|\,\sigma_X.} \tag{12}$$

Пример 5. *Таблица вероятностей случайной величины X имеет вид*

Вероятность, $f(x)$	0,3	0,2	0,5
Значение X, x	2025	2050	2075

Найти дисперсию σ^2_x.

Решение. Вычтем из каждого значения X 2050; затем разделим результат на 25. Мы получили новую величину:

$$Y = \frac{X - 2050}{25}, \tag{13}$$

таблица вероятностей которой проще:

Вероятность, $g(y)$	0,3	0,2	0,5
Значение Y, y	-1	0	$+1$

Вычислим математические ожидания Y и Y^2:

$$\mu_Y = E(Y) = -1\cdot 0{,}3 + 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}5 = 0{,}2,$$

$$\mu_{Y^2} = E(Y^2) = (-1)^2\cdot 0{,}3 + 0^2\cdot 0{,}2 + 1^2\cdot 0{,}5 = 0{,}8.$$

Следовательно, дисперсия Y равна

$$\sigma^2_Y = E(Y^2) - \mu^2_Y = 0{,}8 - 0{,}04 = 0{,}76.$$

Так как в силу (13)

$$X = 25Y + 2050,$$

то

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \sigma^2_{(25Y+2050)} = \\ &= \sigma^2_{25Y} = \qquad \text{[см. формулу (11)]}\\ &= 625\sigma_Y^2 = \qquad \text{[см. формулу (12)]}\\ &= 625 \cdot 0{,}76 = 475.\end{aligned}$$

Следствие 5 теоремы 4 можно доказать методом, использованным в этом примере.

Следствие 5. *Пусть X есть случайная величина с дисперсией σ_X^2, а a и b — некоторые числа. Тогда дисперсия случайной величины $aX+b$ равна $a^2\sigma_X^2$:*

$$\boxed{D(aX+b)=a^2D(X),} \tag{14а}$$

или

$$\boxed{\sigma^2_{aX+b}=a^2\sigma_X^2.} \tag{14б}$$

Упражнения к § 4

1. (а) Вычислите дисперсию и стандартное отклонение для примера B табл. 44. (б) Вычислите среднее абсолютное отклонение и сравните ваш ответ с приведенным в таблице.

2. (а) Вычислите дисперсию и стандартное отклонение для примера C табл. 44. (б) Вычислите среднее абсолютное отклонение и сравните ваш ответ с приведенным в таблице.

3. (а) Вычислите дисперсию и стандартное отклонение для примера E табл. 44 и сравните их с соответствующими результатами для примера C. Прокомментируйте результат сравнения. (б) Вычислите среднее абсолютное отклонение для примера E табл. 44. Сравните ваш ответ с приведенным в таблице. Также сравните его с ответом примера C и прокомментируйте это сравнение.

4. Случайная величина X принимает значения -1, 0, $+1$ с вероятностями 0,3; 0,2; 0,5 соответственно. Найти (а) математическое ожидание μ, (б) среднее абсолютное отклонение X от μ, (в) дисперсию σ^2, (г) стандартное отклонение σ.

5. Вернемся к задаче о медицинском эксперименте (пример 2 из § 3 гл. III, табл. 17). Обозначим через X случайную величину, принимающую значение 0, когда a не входит в число отобранных лекарств, и 1 в противном случае. Вычислите $E(X)$ и $D(X)$.

6. В примере 5 из § 1 о сериях в последовательностях из двух букв *П* и трех букв *З* обозначим через X количество серий в одной перестановке этих букв. Вычислите $E(X)$ и σ_X^2.

7. В примере 6 из § 1 (табл. 42) относительно экстремальных точек последовательности четырех измерений найдите $E(X)$ и $D(X)$, если X представляет число экстремальных точек для одного элементарного события. Пусть $\sigma=\sqrt{D(X)}$. Какова вероятность того, что $X\geqslant\mu+\sigma$? Что $\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma$?

8. Используя выражение (5) и формулы

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

покажите, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины, которая принимает значения 1, 2, 3, ..., n, каждое с вероятностью $1/n$, равны

$$\mu=\frac{n+1}{2}, \qquad \sigma^2=\frac{n^2-1}{12}.$$

9. (а) Докажите, что $D(cX)=c^2D(X)$. (б) Докажите, что $D(X+c)=D(X)$.

10. Используйте теорему 4 для доказательства следствия 5.

В каждом из следующих упр. 11—18 задана таблица вероятностей для некоторой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение этой величины.

11.

Вероятность, $f(x)$	0,1	0,2	0,3	0,4
Значение X, x	9998	9999	10 000	10 001

12.

Вероятность, $f(x)$	0,6	0,3	0,1
Значение X, x	0,0016	0,0032	0,0064

13.

Вероятность, $f(x)$	0,25	0,35	0,15	0,25
Значение X, x	−300	−200	−100	0

14.

Вероятность, $f(x)$	0,3	0,3	0,3	0,1
Значение X, x	2,75	3,00	3,25	4,00

15.

Вероятность, $f(x)$	0,4	0,2	0,4
Значение X, x	−1	0	+1

16.

Вероятность, $f(x)$	0,1	0,3	0,4	0,2
Значение X, x	1	2	3	4

17.

Вероятность, $f(x)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
Значение X, x	-2	-4	6	4	2

18.

Вероятность, $f(x)$	0,1	0,4	0,5
Значение X, x	650	700	750

19. Грани трехгранной линейки пронумерованы числами 1, 2 и 3. Обозначим через X номер грани, оказавшейся внизу при бросании линейки на пол. Используйте результаты, полученные в упр. 8, для нахождения среднего значения, дисперсии и стандартного отклонения случайной величины X.

20. Рассмотрим опыт упр. 19, только с двумя одинаковыми линейками. Обозначим через Y сумму чисел на нижних гранях этих линеек. Найти среднее значение и дисперсию величины Y.

21. Правильный тетраэдр представляет собой симметричный четырехгранник. Его грани пронумерованы числами 1, 2, 3 и 4. Тетраэдр бросается на пол. Обозначим через X номер нижней грани тетраэдра. Используйте результаты упр. 8 для нахождения среднего значения, дисперсии и стандартного отклонения величины X.

22. Рассмотрим бросание двух тетраэдров, подобных описанному в упр. 21. Обозначим через Y наибольший из номеров их нижних граней. Найти среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение величины Y.

23. (Продолжение.) Пусть Z — наименьший номер нижних граней тетраэдров упр. 22. Найдите среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение величины Z.

24. Дисперсия случайной величины X равна 0,76. Найти дисперсию случайных величин $10X$, $2X$, $X/2$.

25. Дисперсия случайной величины Y равна 15. Найти дисперсию случайных величин $Y+7$, $Y-3$.

§ 5. Выборочные среднее значение и дисперсия

В первых четырех параграфах этой главы мы изучили понятия случайной величины, случайной функции, среднего значения и дисперсии. Эти понятия применяются к анализу *теоретических* исходов эксперимента. При помощи них можно предсказать, что *может произойти* при выполнении эксперимента, поскольку мы знаем функцию вероятностей для интересующей нас случайной величины. Однако мы редко можем сказать заранее, каков в действительности будет исход.

В этом параграфе мы изучим реальные результаты, к которым приводят определенные эксперименты. Для такого изучения есть две основные причины:

(1) Сравнение наблюдаемых результатов с предсказанными теоретическими результатами поможет нам лучше понять теорию и оценить применимость этой теории для предсказания действительного поведения.

(2) Во многих экспериментах мы заранее не знаем распределения вероятностей случайной величины. Например, в задаче о статистике зрелищных мероприятий до проведения опроса неизвестны доли людей, регулярно посещающих кинотеатры и смотрящих телевизионные программы. Поэтому мы не можем использовать имеющуюся заранее информацию для предсказания результатов опроса, а вынуждены поступать наоборот: мы используем результаты опроса для оценки долей людей, входящих в каждую из четырех возможных групп. Другой пример: пусть нам требуется оценить распределение вероятностей для случайной величины — роста американского гражданина в возрасте 20 лет. Полный анализ роста всех американских граждан в возрасте 20 лет обойдется очень дорого и займет много времени. Поэтому мы основываем анализ на рассмотрении некоторой выборки; выводы относительно среднего роста и разброса величины роста для всей совокупности 20-летних американских граждан основываются на соответствующих данных, полученных для этой выборки.

Пример 1. *Из обычной колоды карт (в 52 карты) сдается 5 карт. Отмечается число красных карт в сдаче. После этого карты тасуются, и эксперимент повторяется еще 29 раз. В результате мы получаем 30 сдач. Соответствующее количество красных карт в сдаче и количество сдач представлены в табл. 45. Каково среднее число карт красной масти в одной сдаче? Каково стандартное отклонение этого числа?*

Таблица 45

Красные карты в сдачах из пяти карт

Число красных карт	Число сдач
0	1
1	6
2	10
3	7
4	5
5	1
Всего	30

Решение. Среднее число красных карт в одной сдаче находится следующим образом:

$$\text{Среднее} = \frac{\text{Общее число красных карт во всех 30 сдачах}}{\text{Общее число сдач}} =$$

$$= \frac{0 \times 1 + 1 \times 6 + 2 \times 10 + 3 \times 7 + 4 \times 5 + 5 \times 1}{30} =$$

$$= \frac{70}{30} = 2{,}4.$$

Мы обозначим это среднее число через $\bar{x}$ (читается: «x с чертой»). Итак, $\bar{x}=2{,}4$.

Далее вычислим «выборочную дисперсию», т. е. среднее квадрата отклонения от $\bar{x}$ для этой выборки. В табл. 45 в первом столбце приведены возможные значения $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$ числа красных карт в одной

Таблица 46

Вычисление дисперсии по данным таблицы 45 ($\bar{x} = 2{,}4$)

Число красных карт, x_i	Число сдач, n_i	Отклонение, $x_i - \bar{x}$	Квадрат отклонения, $(x_i - \bar{x})^2$	Произведение, $(x_i - \bar{x})^2 n_i$
0	1	$-2{,}4$	5,76	5,76
1	6	$-1{,}4$	1,96	11,76
2	10	$-0{,}4$	0,16	1,60
3	7	$+0{,}6$	0,36	2,52
4	5	$+1{,}6$	2,56	12,80
5	1	$+2{,}6$	6,76	6,76
Всего	30			41,20

сдаче; во втором столбце представлены количества n_i сдач, в которых встретилось ровно x_i красных карт. Квадраты отклонений $(x_i - \bar{x})^2$ этих значений от $\bar{x}$ представлены в четвертом столбце табл. 46. Умножая квадрат каждого отклонения на число сдач, в которых это отклонение наблюдалось, и затем складывая все произведения, мы получаем 41,20 — *сумму квадратов отклонений* для всех 30 сдач. Среднее квадратов отклонений называется *выборочной дисперсией* и обозначается через s^2. Так, в этом примере

$$s^2 = \frac{41,20}{30} \approx 1,37.$$

Выборочное *стандартное отклонение* есть арифметический квадратный корень из дисперсии:

$$s \approx \sqrt{1,37} \approx 1,17.$$

Так, по данным табл. 45, мы получаем:

среднее число красных карт в одной сдаче $= \bar{x} = 2,4$,

стандартное отклонение числа красных карт в одной сдаче $= s \approx 1,17$.

Выборочное среднее значение и стандартное отклонение дают нам полезную и легко получаемую информацию относительно распределения частот в выборке. *Среднее* есть характеристика *местоположения*; оно говорит нам, где расположен «центр» значений случайной величины в выборке. *Стандартное отклонение* измеряет *разброс* значений относительно среднего. В настоящем примере $\bar{x} = 2,4$ почти в точности совпадает с серединой отрезка между крайними значениями 0 и 5. Наоборот, эти крайние значения расположены от $\bar{x}$ на расстояниях 2,4 и 2,6. Если мы измерим эти расстояния в новом масштабе, единица которого равна стандартному отклонению, то получим $2,4/1,17 \approx 2,05$ и $2,6/1,17 \approx 2,22$. Таким образом, в этом примере все значения x расположены от *выборочного среднего* в выборке на расстоянии, не превышающем 2,22 стандартного отклонения. Практически во всех наблюдениях над выборками значения случайной величины расположены от выборочного среднего на расстоянии, не превышающем 3 стандартных отклонений.

Примем теперь следующее формальное определение.

Определение 8. Выборочные дисперсия и стандартное отклонение. Пусть дано множество n наблюдений или измерений, в которых значение x_1 встречается n_1 раз, x_2 встречается n_2 раз и т. д., x_t встречается n_t раз:

Частота, n_i	n_1	n_2	...	n_t	Всего:
Значение, x_i	x_1	x_2	...	x_t	n

Пусть $\bar{x}$ обозначает среднее по всем измерениям:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i.} \tag{1}$$

Выборочная дисперсия s_x^2, по определению, равна

$$s_x^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 n_1 + (x_2-\bar{x})^2 n_2 + \ldots + (x_t-\bar{x})^2 n_t}{n_1+n_2+\ldots+n_t},$$

или

$$\boxed{s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}(x_i-\bar{x})^2 n_i.} \tag{2}$$

Выборочное стандартное отклонение равно арифметическому квадратному корню из (выборочной) дисперсии.

Вычислительная формула. Выборочная дисперсия [формула (2)] представляет собой среднее всех квадратов отклонений результатов наблюдений от их среднего значения, или коротко — *среднее квадратичное отклонение*. Для его вычисления часто бывает полезным воспользоваться следующей формулой, которая аналогична формуле (5) из § 4:

$$\boxed{s_x^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 n_i - \bar{x}^2,} \tag{3a}$$

или

$$\boxed{s_x^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2.} \tag{3б}$$

В выражении (3а) опущены пределы суммирования; на самом же деле здесь, как и в формулах (1) и (2), i меняется от 1 до t. (См. в § 1 приложения II сразу после формулы (4) обсуждение возможности опускать пределы суммирования.) В выражении (3б) мы использовали обозначение $(\bar{x}^2)$ для записи среднего значения x^2:

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 n_i.$$

Доказательство формулы (3а) мы предоставляем читателям провести самостоятельно (см. упр. 1 в конце параграфа).

Замечание. Если случайная выборка, состоящая из n элементов, производится из совокупности с дисперсией σ^2, то выборочная дисперсия s^2 может меняться от выборки к выборке. Можно показать, что ее среднее значение равно $(n-1)\sigma^2/n$. Некоторые авторы определяют выборочную дисперсию иначе, приняв, что знаменатель в выражении (2) равен $(n-1)$, а не n. Тогда среднее значение выборочной дисперсии совпадает с σ^2. Однако поскольку $(n-1)/n$ при возрастании n стремится к 1, то для больших выборок эти два определения практически совпадают.

Числа $\bar{x}$, s_x^2 и s_x называются *выборочным средним* в выборке, *выборочной дисперсией* и *выборочным стандартным отклонением* в выборке; их надо отличать от среднего значения, дисперсии и стандартного отклонения *во всей совокупности*. Значения выборочной случайной величины могут не совпадать со всеми возможными значениями случайной величины. Любое множество измерений можно рассматривать как «выборку» из «совокупности» всех возможных измерений, которые можно произвести или вообразить проведенными при определенных условиях выполнения эксперимента. В примере с 30 сдачами 5 карт (пример 1 этого параграфа) рассматриваемые 30 сдач представляют собой «выборку» без возвращения из «совокупности» $\binom{52}{5}$ всех возможных сдач, причем каждые две из этих сдач различны. В другой выборке тридцати сдач значение выборочного среднего и выборочной дисперсии могут оказаться другими. Кроме того, выборочные среднее и дисперсия обычно отличаются от теоретического среднего значения и дисперсии для *всей совокупности*.

Пример 2. *Сравнить выборочные среднее и дисперсию со средним значением и дисперсией в совокупности для примера* 1.

Решение. В примере 1 выборка характеризовалась количеством красных карт в одной сдаче, состоящей из 5 карт. Это число есть случайная величина X со значениями 0, 1, 2, 3, 4, 5. Колода состоит из 26 красных карт и 26 черных. Сдача из 5 карт может быть произведена $\binom{52}{5}$ способами. Сдачу из 5 карт, содержащую x красных карт и $5-x$ черных, можно произвести $\binom{26}{x}\cdot\binom{26}{5-x}$ различными способами. Следовательно,

$$P(X=x)=\frac{\binom{26}{x}\binom{26}{5-x}}{\binom{52}{5}}. \tag{4}$$

Значения этой вероятности для $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$ приведены в следующей таблице (вероятности вычислены с точностью до 3 знаков после запятой):

Вероятность, $f(x)$	0,025	0,150	0,325	0,325	0,150	0,025
Значение X, x	0	1	2	3	4	5

Теоретическое *среднее значение* числа красных карт в одной сдаче равно

$$\mu\approx 0\cdot 0{,}025+1\cdot 0{,}150+2\cdot 0{,}325+3\cdot 0{,}325+ \\ +4\cdot 0{,}150+5\cdot 0{,}025=2{,}5.$$

Этот результат можно получить немедленно, заметив, что функция вероятностей симметрична относительно прямой $x=2{,}5$.

Найдем дисперсию по формуле

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

Для вычисления $E(X^2)$ возведем в квадрат каждое значеие X, умножим полученный результат на вероятность соответствующего значения и сложим все произведения:

$$E(X^2) \approx 7{,}400.$$

Поэтому теоретическая дисперсия в совокупности (с точностью до трех знаков после запятой) равна

$$\sigma^2 \approx 7{,}400 - 6{,}250 = 1{,}150.$$

Напомним, что выборочные среднее и дисперсия для выборки из тридцати сдач равнялись

$$\bar{x} = 2{,}4 \quad \text{и} \quad s^2 \approx 1{,}37,$$

тогда как

$$\mu = 2{,}5 \quad \text{и} \quad \sigma^2 \approx 1{,}15.$$

Мы видим, что выборочные среднее и дисперсия дают разумные *оценки* теоретическому среднему значению и дисперсии во всей совокупности.

В этом месте хорошо подытожить и сравнить соответствующие характеристики совокупности и выборок:

Совокупность	*Выборка*
Возможные значения:	Наблюдаемые значения:
$x_1, x_2, \ldots, x_t$	$x_1, x_2, \ldots, x_t$
Вероятности:	Относительные частоты:
$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_t)$	$\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_t}{n}$
Среднее значение:	Выборочное среднее:
$\mu = \sum x_i f(x_i)$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i n_i$
Дисперсия:	Выборочная дисперсия:
$\sigma_x^2 = \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i)$	$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 n_i$

Замечание. Группировка наблюдений, например для подсчета частот, заключается в том, что мы выписываем только *различные* значения x_i от x_1 до x_l.

Однако часто мы не производим этой группировки, а выписываем все наблюдаемые значения в том порядке, в котором они появлялись:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Затем можно для любого i от 1 до n рассматривать x_i как наблюдаемое значение случайной величины X_i. Таким образом, любая выборка значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дает нам значения случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

представляет собой наблюдаемое значение случайной величины

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i.$$

Обычно в выборках все случайные величины X_i имеют одинаковые таблицы вероятностей, совпадающие с таблицей вероятностей величины X в совокупности, из которой производилась выборка.

Упражнения к § 5

Вычислите $\bar{x}$, s^2 и s для каждого из следующих множеств результатов измерений:

1. $\{1, 1\}$.
2. $\{1, 2, 3\}$.
3. $\{-1, 0, +1\}$.
4. $\{+2, -2\}$.
5. $\{4, -5, -6\}$.
6. $\{0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}6\}$.

7. Результат пяти измерений равен 1, трех измерений равен 2 и одного измерения равен 3. Найдите $\bar{x}$, s^2 и s.

8. В половине наблюдений случайная величина равнялась 1, а в другой половине она равнялась 3. Найдите дисперсию и стандартное отклонение.

В каждом из следующих упр. 9—13 заданы значения числа n наблюдений, составляющих выборку, $\sum x_i$ и $\sum x_i^2$. Используя эти данные, найдите $\bar{x}$, s^2 и s. Если вы считаете, что некоторые данные противоречивы, объясните, почему?

	n	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$
9.	10	35	140
10.	8	−56	408
11.	25	100	400
12.	12	30	65
13.	100	3	0,90

В упражнениях 14—17 используются следующие обозначения: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть множества результатов измерений со средними значениями $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и стандартными отклонениями s_x и s_y соответственно; c и k — числа.

14. Если $y_i = x_i + k$, то докажите, что $\bar{y} = \bar{x} + k$, $s_y = s_x$ и $s_y^2 = s_x^2$.

15. Докажите, что если $y_i = cx_i$, то $\bar{y} = c\bar{x}$, $s_y = |c|\, s_x$, $s_y^2 = c^2 s_x^2$.

16. Докажите, что если $y_i = cx_i + k$, то $\bar{y} = c\bar{x} + k$, $s_y = |c| s_x$ и $s_y^2 = c^2 s_x^2$.

17. Докажите, что если $z_i = x_i + y_i$, то $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$.

18. Не прибегая к вычислениям, объясните, почему для выборок 100, 101, 200 и 1000, 1001, 1100 выборочные дисперсии совпадают.

19. Не прибегая к вычислениям, объясните, почему выборочная дисперсия для группы чисел 1, 2, 3, 4 равна половине выборочной дисперсии для группы чисел 2, 4, 6, 8.

20. В некотором доме 3 семьи не имеют автомашины, 20 имеют по одной машине, 15 семей имеют по две машины и 2 семьи имеют по три машины. Найдите среднее значение и стандартное отклонение числа машин, находящихся в распоряжении одной семьи.

21. Следующее распределение частот было получено на основе эксперимента с разведением мышей:

Количество мышей в одном помете	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	7	11	16	17	26	31	11	1	1

Найдите среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение этого распределения.

22. В следующей таблице представлено распределение частот, соответствующих длинам початков кукурузы, измеренным в дюймах с точностью до половины дюйма. Распределение получено на основе анализа выборки, состоящей из 800 початков.

Длина початка	Частота	Длина початка	Частота
4,0	1	7,5	172
4,5	1	8,0	124
5,0	8	8,5	61
5,5	33	9,0	32
6,0	70	9,5	10
6,5	110	10,0	2
7,0	176		

(а) Вычислите среднее значение и значение стандартного отклонения этого распределения. (б) Для какого процента початков длина початка отличается от $\bar{x}$ не более чем на s? Не более чем на $2s$? Не более чем на $3s$?

23. В «Северных прериях» Э. Сетон-Томпсон рассказывает, что на протяжении 70 миль из окна вагона поезда канадской Тихоокеанской железной дороги в районе Альберты он видел 26 стад антилоп. В книге указываются количества животных в каждом стаде:

8, 4, 7, 18, 3, 9, 14, 1, 6, 12, 2, 8, 10,

1, 3, 4, 6, 18, 4, 25, 4, 34, 6, 5, 16, 4.

Найдите (а) среднее число животных в стаде, (б) стандартное отклонение s, (в) процент таких стад, в которых число животных отклоняется от $\bar{x}$ не более чем на s, (г) не более чем на $2s$.

24. Докажите справедливость формул (3а, б) в тексте. Сравните их с формулой (5) из § 4.

§ 6. Теорема Чебышева о распределении вероятностей

До сих пор мы обсуждали понятия среднего значения, дисперсии и стандартного отклонения для *распределения вероятностей* и выборочных среднего, дисперсии и стандартного отклонения для *множества результатов наблюдений или измерений*. Однако мы не показали, как можно использовать стандартное отклонение для получения информации относительно того, как располагаются вероятности в интервале, центром которого является среднее значение μ, и относительно ширины этого интервала. У нас есть интуитивное ощущение того, что, когда стандартное отклонение мало, основная «масса» вероятности располагается вблизи μ, а когда стандартное отклонение велико, то велик и разброс вероятностей. При помощи принадлежащей Чебышеву замечательной теоремы, которой посвящен этот параграф, мы сможем ответить на вопросы, подобные следующим:

Какова вероятность попадания исхода эксперимента в данный интервал с центром μ?

Какова должна быть ширина интервала с центром μ для того, чтобы можно было ожидать попадания исхода эксперимента внутрь этого интервала, скажем, с вероятностью 3/4.

Перед тем как сформулировать теорему Чебышева, мы рассмотрим один простой пример.

Пример 1. *Рассмотрим случайную величину X со следующей таблицей вероятностей:*

Вероятность, $f(x)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$
Значение X, x	0	1	2	3

Найти вероятность тех значений X, которые удалены от среднего значения на расстояние:

(а) *не превышающее одного стандартного отклонения;*

(б) *не превышающее двух стандартных отклонений;*

(в) *не превышающее трех стандартных отклонений.*

Решение. Вычисления среднего значения и стандартного отклонения дают

$$\mu = E(X) = \frac{3}{4}, \qquad \sigma = \frac{3}{4}.$$

На рис. 17 изображен график функции вероятностей. Среднее значение $\mu = \frac{3}{4}$ отмечено черным треугольником, изображающим «точку опоры». Тонкими стрелками изображены концы интервалов длины 2σ, 4σ и 6σ с центром в точке μ.

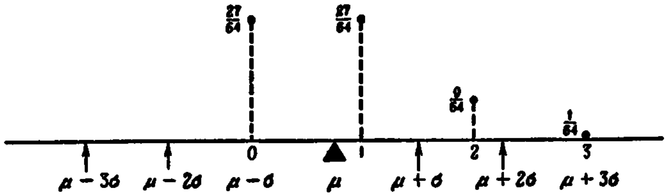


Рис. 17. Интервалы длины 2σ, 4σ и 6σ с центром в μ.

(а) Вероятности значений, удаленных от μ не более чем на величину $\pm 1\sigma$, равны

$$\frac{27}{64}+\frac{27}{64}=\frac{27}{32}\approx 0{,}84.$$

(б) Вероятности значений, удаленных от μ не более чем на $\pm 2\sigma$, равны

$$\frac{27}{64}+\frac{27}{64}+\frac{9}{64}=\frac{63}{64}\approx 0{,}984.$$

(в) Вероятности значений, удаленных от μ не более чем на $\pm 3\sigma$, равны

$$\frac{27}{64}+\frac{27}{64}+\frac{9}{64}+\frac{1}{64}=1.$$

Теорема 6. Теорема Чебышева. *Суммарная вероятность всех значений, удаленных от среднего значения μ не более чем на h стандартных отклонений, не меньше* $1-\frac{1}{h^2}$.

Обсуждение. Эта теорема утверждает, что, скажем, для любой случайной величины вероятность отклонения от среднего значения μ не более чем на 2σ не меньше $1-1/4$, или $3/4$. В предыдущем примере мы нашли, что действительная величина вероятности значений, расположенных на интервале между $\mu-2\sigma$ и $\mu+2\sigma$, равна $63/64$, что много больше, чем $3/4$. Из теоремы также следует, что вероятность значений, лежащих на расстоянии 3σ от среднего значения, не меньше 8/9; в нашем примере интервал от $\mu-3\sigma$ до $\mu+3\sigma$ содержал *все* возможные значения случайной величины, т. е. вероятность попадания в этот интервал была равна 1.

Эту теорему можно также использовать для доказательства того, что некоторые данные, обнаруженные в достаточно большой выборке из совокупности, достаточно хорошо характеризуют истинное положение вещей, связанное со свойствами всей совокупности, а это дает основание для использования выборок в целях оценки характеристик совокупностей.

Доказательство теоремы Чебышева. Предположим, что случайная величина X имеет среднее значение μ и стандартное отклонение σ. На рис. 18 представлена

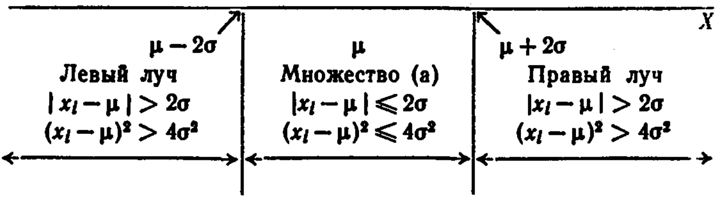


Рис. 18. Иллюстрация к доказательству теоремы Чебышева для $h=2$.

область определения ее функции вероятностей. Сначала докажем теорему для случая $h=2$. Для этого разделим множество значений X на 2 множества:

(а) множество значений, лежащих на отрезке от $\mu-2\sigma$ до $\mu+2\sigma$, включая и концы отрезка;

(б) множество значений, не принадлежащих этому отрезку.

Мы хотим доказать, что суммы вероятностей всех значений X, принадлежащих множеству (а), не меньше 3/4. Для удобства мы называем множеством (а) совокупность всех значений X, *принадлежащих отрезку* $\mu-2\sigma$, $\mu+2\sigma$, и множеством (б) совокупность всех значений X, *не принадлежащих указанному отрезку.* Все значения X, расположенные вне данного отрезка, это те, которые расположены слева от $\mu-2\sigma$ (совокупность таких значений X мы назовем *левым лучом*), и те, которые расположены справа от $\mu + 2\sigma$; их совокупность мы назовем *правым лучом*.

Из рис. 18 видно, что каждая точка оси x, которая лежит вне отмеченного отрезка, удалена от μ на расстояние, большее 2σ. Поэтому квадрат расстояния этой точки от среднего значения μ заведомо больше чем $4\sigma^2$.

Напомним определение дисперсии:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{t} (x_i - \mu)^2 f(x_i), \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_t$ — возможные значения X, а $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_t)$ — их вероятности. Поскольку нумерация значений x (индексы) может быть произвольной, мы для удобства предположим, что значения $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_r$ расположены *вне* нашего отрезка, а значения $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_t$ — *внутри* него.

Случай 1. Если $r = 0$, т. е. никакое значение x_i не лежит вне нашего отрезка, то все значения X удалены от среднего значения на расстояние, не превышающее 2σ; поэтому суммарная вероятность всех значений, принадлежащих множеству (а), равна 1, а значит не меньше 3/4.

Случай 2. Пусть не все значения случайной величины лежат внутри отрезка, т. е. $r \geqslant 1$. Разобьем сумму в правой части выражения (1) на две части:

$$\sigma^2 = [(x_1-\mu)^2 f(x_1) + (x_2-\mu)^2 f(x_2) + \ldots + (x_r-\mu)^2 f(x_r)] + \\ + [(x_{r+1}-\mu)^2 f(x_{r+1}) + \ldots + (x_t-\mu)^2 f(x_t)]. \tag{2}$$

Квадрат каждого отклонения $(x_i - \mu)^2$ неотрицателен; это же можно сказать и про величину $f(x_i)$. Если любой квадрат отклонения заменить меньшим числом, то правая часть выражения (2) только уменьшится. Мы произведем такие замены и в результате получим неравенство, доказывающее теорему.

Заменим каждый из первых r квадратов отклонений (соответствующих значениям x_i *вне* отрезка) меньшим числом $4\sigma^2$. Все остальные квадраты отклонений (соответствующие значениям x_i на отрезке) заменим числом 0, которое их заведомо не превосходит. Произведя эти замены, мы получим неравенство

$$\sigma^2 \geqslant 4\sigma^2 [f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_r)]. \qquad (3)$$

Если $\sigma^2=0$, то вероятность среднего значения равна 1, т. е. все вероятности «сосредоточены» в точке μ, а следовательно, на расстоянии от μ, не превышающем 2σ. (Почему?)

Если $\sigma^2>0$, то, разделив обе части неравенства (3) на $4\sigma^2$, мы получим

$$\frac{1}{4} \geqslant [f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_r)] = P(|X-\mu|>2\sigma). \qquad (4)$$

Последнее равенство в выражении (4) следует из определения $P(|X-\mu|>2\sigma)$: это есть вероятность того, что X расположена от среднего значения μ на расстоянии, большем 2σ; последняя же вероятность равна сумме вероятностей значений $x_1, x_2, \ldots, x_r$, расположенных вне отрезка. Поэтому из неравенства (4) следует, что вероятность значения, лежащего вне нашего отрезка, не превосходит 1/4. Следовательно, сумма вероятностей всех значений, удаленных от среднего значения на расстояние, не превышающее 2σ, *не меньше* чем $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Этим завершается доказательство теоремы Чебышева для $h=2$.

Приведенное доказательство легко обобщить на случай произвольного $h>0$ и интервала от $\mu-h\sigma$ до $\mu+h\sigma$. Для этого надо только заменить 2σ на $h\sigma$, а $4\sigma^2$ на $h^2\sigma^2$; все остальное остается без изменений. После соответствующих замен мы получим неравенство, аналогичное неравенству (4):

$$\boxed{\frac{1}{h^2} \geqslant P(|X-\mu|>h\sigma).} \qquad (5)$$

Из него следует, что сумма вероятностей значений X, расположенных вне отрезка от $\mu-h\sigma$ до $\mu+h\sigma$, не превосходит $1/h^2$. Следовательно, сумма вероятностей значений X, расположенных от μ на расстоянии, не превышающем $h\sigma$, не меньше $1-\frac{1}{h^2}$. □

Упражнения к § 6

Решите упражнения 1—4, предполагая, что $\mu_X=0$ и $\sigma_X=1$.

1. Что можно сказать о величине суммы вероятностей значений X, расположенных на отрезке от -2 до $+2$?

2. Оцените снизу величину $P(-3\leqslant X\leqslant 3)$ (т. е. укажите число, меньшее этой величины).

3. Оцените сверху величину $P(|X|\geqslant 3)$.

4. Укажите значения k, при которых выполнено неравенство $P(|X|\leqslant k)\geqslant 0{,}96$.

Выполните упражнения 5—8, предполагая, что $\mu_X=7$ и $\sigma_X=2$.

5. Оцените снизу величину $P(3<X<11)$. Оцените снизу величину $P(1\leqslant X\leqslant 13)$.

6. Оцените сверху величину $P(|X-7|>2)$. Величину $P(|X-7|>3)$.

7. Оцените снизу величину $P(|X-7|\leqslant 5)$.

8. При каком значении k выполнено неравенство $P(|X-7|\leqslant k)\geqslant 0{,}99$?

9. При $h\leqslant 1$ теорема Чебышева становится бесполезной. Почему?

10. Видоизмените приведенные в тексте рассуждения, с тем чтобы доказать теорему Чебышева для произвольного h.

11. Используя теорему Чебышева, определите, при каком значении h вероятность попадания значения случайной величины на отрезок от $\mu-h\sigma$ до $\mu+h\sigma$ не меньше 0,9. Тот же вопрос для вероятности 0,99.

12. Оцените снизу величину вероятности значений случайной величины, удаленных от среднего значения на расстояние, большее 2σ. Большее 3σ? Большее 5σ?

13. В каком случае дисперсия случайной величины X равна нулю?

Какова сумма вероятностей значений, удаленных от среднего значения μ на расстояние, превышающее $0{,}01\sigma$?

В упражнениях 14—22 случайная величина X принимает значения $-c$, 0, $+c$ с вероятностями, равными соответственно p, $1-2p$, p.

14. Найдите μ и σ^2.

15. Найдите зависимость, связывающую σ и c при условии $P(|X-\mu|\geqslant\sigma)=1$.

16. Докажите, что если $p=1/2$, то $c=\sigma$.

17. Пусть $c=2\sigma$, чему равняется p?

18. Пусть $c=3\sigma$, чему равняется p?

19. В условиях упр. 16 найти вероятность того, что абсолютное отклонение $|X-\mu|$ не меньше стандартного отклонения σ. Не меньше 2σ?

20. В условиях упр. 17 найти вероятность того, что абсолютное отклонение не меньше 2σ? Не меньше 3σ?

21. В условиях упр. 18 найти вероятность того, что абсолютное отклонение не меньше 3σ? Не меньше 4σ?

22. Можно ли, подбирая p, добиться того, чтобы равенство $c=h\sigma$ выполнялось для любого положительного значения h? Если да, то как надо подобрать p? Выразите p через h и найдите вероятность того, что абсолютное отклонение не меньше чем $h\sigma$.

Замечание. Из результата упражнения 22 следует, что если h задано, то можно подобрать такую случайную величину X, что вероятность того, что X принимает значения, удаленные от среднего значения μ на расстояние, превышающее $h\sigma$, будет в точности равна $1/h^2$, т. е. минимальному числу, которому она может равняться по теореме Чебышева. В этом смысле заключение теоремы Чебышева является наиболее сильным. Но при заданном распределении вероятностей этот нижний предел может достигаться лишь при одном каком-то значении h, но не при нескольких. Прелесть теоремы Чебышева заключается, в частности, в том, что она применима к любому распределению вероятностей с конечными средним значением и дисперсией.

§ 7. Теорема Чебышева для распределения частот результатов измерений

Мы видели, как при помощи стандартного отклонения σ можно измерять отклонение случайной величины от ее среднего значения. Из теоремы Чебышева следует, что в худшем случае величина суммы вероятностей значений, расположенных от среднего значения на расстоянии, превышающем h стандартных отклонений, равна $1/h^2$ для любого положительного h. Нас может удивить существование аналогичной теоремы для результатов измерений или наблюдений *в выборке*. Однако такая теорема существует. Мы сформулируем здесь соответствующий результат, но не будем приводить доказательства, поскольку оно почти идентично доказательству теоремы Чебышева.

Теорема 7. Теорема Чебышева для результатов измерений. *Доля результатов измерений, удаленных от выборочного среднего значения на расстояние, не превышающее h выборочных стандартных отклонений, не меньше* $1-\frac{1}{h^2}$.

Пример 1. *Предположим, что результаты измерений таковы:* —8, —1, —1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 8. *Проверьте, что по крайней мере* 3/4 *этих результатов удалены от* $\bar{x}$ *на расстояние, не превышающее двух стандартных отклонений, и что по крайней мере* 8/9 *этих результатов удалены от* $\bar{x}$ *на расстояние, не превышающее трех стандартных отклонений.*

Решение. Сумма всех десяти измерений равна 0; следовательно, $\bar{x}=0$. Сумма квадратов результатов измерений равна 132. Следовательно, среднее квадратов отклонений равно $s^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2=13{,}2-0=13{,}2$, а стандартное отклонение $s \approx 3{,}6$. Отрезок, содержащий все результаты, расположенные на расстоянии двух стандартных отклонений от выборочного среднего, имеет концами точки —7,2 и +7,2. В него попадает 80% всех результатов, что заведомо превосходит 3/4 всех результатов. Отрезок, содержащий все результаты, удаленные от выборочного среднего на расстояние, не превосходящее трех стандартных отклонений, имеет концами точки —10,8 и +10,8, и, значит, ему принадлежат *все* результаты измерений.

Замечание. Когда результатов измерения слишком много, можно воспользоваться более сильными результатами, нежели те, которые следуют из теоремы Чебышева. В табл. 47 приводится грубое правило для определеиия доли числа измерений, результаты которых расположены на соответствующих отрезках, серединами которых является среднее значение. Числа, приведенные в таблице, совпадают с аналогичными числами, полученными для так называемого *нормального распределения вероятностей*, на котором мы, однако, не можем здесь остановиться*).

*) По этому поводу см., например, гл. XII книги [1] или любой из учебников [21]—[29].

Таблица 47

Процентное количество измерений, расположенных в заданных интервалах с центром в точке μ

	Эмпирическое правило	Теорема Чебышева
Интервал	Содержится всех измерений приблизительно	Содержится всех измерений не менее
от $\bar{x}-s$ до $\bar{x}+s$	68%	0%
от $\bar{x}-2s$ до $\bar{x}+2s$	95%	75%
от $\bar{x}-3s$ до $\bar{x}+3s$	99,7% (почти все)	89%

Теорема Чебышева *оценивает* нижнюю границу доли тех результатов, которые удалены от выборочного среднего на расстояние, не превышающее h стандартных отклонений. Эта теорема может помочь нам (а) обнаружить ошибку в вычислениях или (б) интерпретировать и использовать стандартное отклонение. Однако из среднего столбца табл. 47 можно извлечь еще больше информации относительно множества результатов измерений. Впрочем, величины 68%, 95% и 99,7% не следует воспринимать буквально. Если результаты некоторых измерений, расположенные от срединего значения на расстоянии, не превышающем одного стандартного отклонения, составляют 64% или 73% всех результатов измерений, то это не должно вас смущать. В самом деле, возможно, что даже все 100% результатов измерений будут располагаться на расстоянии не более одного стандартного отклонения от среднего результата.

Упражнения к § 7

Известно, что для множества из n результатов измерений $\bar{x}=0$ и $s_x=1$. Используйте теорему Чебышева для решения следующих упражнений.

1. Каково минимальное число результатов измерений, лежащих на отрезке от -3 до $+3$?

2. Каково минимальное число результатов измерений, лежащих на отрезке от -2 до $+2$?

3. Каково максимальное число измерений, результаты которых лежат либо правее точки $+2$, либо левее точки -2?

4. При каком значении $k>0$ по крайней мере 96% результатов измерений лежат между $-k$ и k включительно?

Пусть $\bar{x}=5$ и $s_x=2$. Используйте эмпирическое правило, приведенное в табл. 47, для решения следующих упражнений.

5. Каков процент всех результатов измерений, которые заключены между 3 и 7 включительно? Между 1 и 9 включительно?

6. Каков процент измерений, результаты которых больше 9 или меньше 1?

Пусть $\bar{x}=1$ и $s_x=3$. Используйте теорему Чебышева для решения следующих упражнений.

7. Каково минимальное число измерений, результаты которых лежат между -5 и $+7$ включительно? Между -8 и $+10$ включительно?

8. Каково наибольшее число измерений, результаты которых лежат либо правее $+7$, либо левее -5? Правее $+10$ или левее -8?

ГЛАВА VI

ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ С ДВУМЯ ИСХОДАМИ; БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

§ 1. Примеры биномиальных экспериментов

Некоторые эксперименты состоят из повторения независимых испытаний, каждое из которых имеет всего два возможных исхода. При помощи биномиального распределения вероятностей можно описать особенности различных последовательностей испытаний в такого рода «биномиальных экспериментах». Мы посвящаем эту главу биномиальному распределению не только потому, что оно является математической моделью огромного количества реальных жизненных ситуаций, но и потому, что оно обладает некоторыми важными свойствами, присущими другим вероятностным моделям. Мы начнем с некоторых примеров биномиальных экспериментов.

Пример со стрелком. Тренированный стрелок совершает пять выстрелов по мишени, причем все выстрелы производятся практически в одних и тех же условиях. При этом число попаданий в яблоко мишени может меняться от 0 до 5. При повторении серии из пяти выстрелов число попаданий в яблоко может меняться. Что можно сказать относительно вероятностей различных чисел попаданий в яблоко?

Наследственность у мышей. В помете, состоящем из 8 мышей, происходящих от одних родителей, число мышей, имеющих прямую, а не волнистую шерсть, может равняться произвольному целому числу от 0 до 8. Какие вероятности следует приписать этим возможным исходам?

Выпадение одного очка. Одна за другой бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что 1 очко выпало ровно на одной кости? Ровно на двух костях? На всех костях? Ни на одной кости?

Общая биномиальная задача. Предположим, что некоторый эксперимент состоит из какого-то количества независимых испытаний, результатами которых являются либо «успех», либо «неуспех» («неудача»), и что вероятность успеха не меняется от испытания к испытанию. В предыдущих примерах попадание в яблоко мишени, наличие у мыши прямой шерсти или выпадение 1 очка можно рассматривать как «успех». В общем «успехом» можно называть любой выбранный нами исход.

Основной вопрос, который будет нас интересовать на протяжении этой главы, таков:

Какова вероятность получения в точности x успехов в n испытаниях?

В гл. III и IV мы отвечали на аналогичные вопросы, подсчитывая элементарные события в пространстве событий. К счастью, для решения всех задач подобного типа существует общая формула с широкой областью применимости. Перед тем как вывести эту формулу, объясним, что мы понимаем под «задачами подобного типа».

Эксперименты часто состоят из нескольких одинаковых испытаний, а иногда повторяются сами эксперименты. В примере со стрелком одно испытание состоит в «одном выстреле по мишени» с исходами: попадание в яблоко мишени (успех) или непопадание (неудача). Далее, некоторый эксперимент мог состоять из последовательности пяти выстрелов, и какое-либо множество таких последовательностей можно рассматривать как некий сверхэксперимент, состоящий из нескольких повторений исходного эксперимента с пятью выстрелами. При бросании трех костей испытанием является бросание одной кости, а эксперимент состоит из трех испытаний. Или мы можем бросить трижды одну кость, рассматривая каждое бросание как одно испытание. В этом случае эксперимент также состоит из трех испытаний. Очевидно, что оба эти эксперимента приводят к одним и тем же результатам. Мы не различаем математически эксперимент с однократным бросанием трех костей и эксперимент с трехкратным бросанием одной кости. Эти примеры иллюстрируют пользу применения терминов «испытание» и «эксперимент» в том смысле, в котором они употребляются в этой главе. Однако ими следует пользоваться достаточно гибко, не налагая строгих ограничений на их употребление.

Пример 1. Представители студенческой футбольной команды. *Десять студентов вуза могут выполнять функции представителя футбольной команды, причем доля p из них имеет автомобильные права. Каждый четверг один из этих студентов, выбираемый при помощи жребия, сопровождает команду на стадион. В течение трех четвергов тренеру команды необходим водитель, имеющий права. Рассматривая только эти четверги, найти вероятность того, что тренер будет обеспечен водителем все три раза? Ровно два раза? Ровно один раз? Ни одного раза?*

Обсуждение. Заметим, что нас интересуют три испытания. Каждое испытание состоит в случайном выборе одного представителя из 10 возможных. Каждое испытание имеет два возможных исхода: «водитель» и «не водитель». Поскольку каждую неделю выбор представителя производится по жребию, исходы различных испытаний независимы. Исходная совокупность возможных представителей не меняется, так что $p=P$(водитель) остается постоянной для всех недель. Теперь обобщим эти свойства применительно к произвольному биномиальному эксперименту.

Для того чтобы некоторый эксперимент можно было назвать *биномиальным экспериментом*, он должен обладать следующими четырьмя свойствами:

(1) он должен состоять из фиксированного числа испытаний;

(2) каждое испытание должно приводить либо к «успеху», либо к «неудаче» (биномиальное испытание);

(3) вероятности успеха во всех испытаниях должны быть равны;

(4) испытания должны быть независимыми одно от другого.

Ниже мы используем различные предыдущие примеры для иллюстрации этих четырех свойств. Для каждого свойства мы также приведем один пример, в котором это свойство не выполнено. Терминология и обозначения, которые мы ввели, будут оставаться неизменными на протяжении всей главы.

1. *Эксперимент должен состоять из фиксированного числа повторяющихся испытаний.* В примере со стрельбой мы рассматриваем множество, состоящее из пяти выстрелов ($n=5$); в примере с мышами каждым испытанием является рождение одного мышонка и $n=8$; в примере с выпадением 1 очка мы бросаем три кости ($n=3$).

Эксперимент с нефиксированным числом испытаний. Производится бросание кости до тех пор, пока не выпадет 1 очко. В этом случае число испытаний не фиксировано, а является случайной величиной.

2. *Биномиальные испытания.* Каждое из n испытаний должно приводить либо к успеху, либо к неудаче. Когда мы в общем случае говорим о биномиальных испытаниях, «успех» и «неудача» есть не более чем удобные термины для обозначения двух групп исходов. Эти термины более выразительны, нежели просто A и $\bar{A}$ (A и «не A»). Для стрелка естественно назвать попадание в яблоко мишени удачей. Однако в примере с мышами мы можем произвольным образом рассматривать в качестве «успеха» рождение как мышонка с прямой шерстью, так и с волнистой. Термин «биномиальный» означает в данном случае лишь следующее: исходы разделяются на две группы, причем исходы, принадлежащие к одной группе, квалифицируются как «успех», а к другой — как «неудача»; если вероятность успеха равна p, то вероятность неудачи

равна $(1-p)$. В примере с бросанием трех костей в группу «успеха» входит только выпадение на одной кости 1 очка, а в группу «неудачи» — выпадение 2, 3, 4, 5, 6 очков.

Эксперимент, не являющийся биномиальным. Всех мышей мы разбили на два класса: имеющих прямую шерсть и имеющих волнистую шерсть. Однако встречаются и лысые мыши. Мы можем избежать возникающей в связи с этим трудности, исключив из числа испытаний мышей, которые приводят к этому исходу; однако такое решение вопроса не всегда является удовлетворительным.

3. *Вероятности успеха во всех испытаниях должны быть равны.* Вероятность выпадения 1 очка на любой кости равна 1/6; для каждого стрелка существует определенная вероятность p (хотя бы 0,1) попадания в яблоко мишени при каждом выстреле. Заметим, что для признания эксперимента биномиальным нам нет необходимости знать точное числовое значение p.

Эксперимент, в котором p не постоянно. Если стрельбы будут продолжаться так долго, что солнце, светившее ранее в спину стрелка, будет светить ему в лицо и ослеплять его, это может уменьшить шансы попадания в яблоко мишени.

4. *Независимость испытаний.* Строго говоря, это означает, что вероятность каждого возможного исхода эксперимента равна произведению соответствующих вероятностей исходов каждого биномиального испытания. Так, в примере с бросанием трех костей P (выпадение 1 очка) $= p = \frac{1}{6}$, P(невыпадения 1 очка) $= 1 - p = \frac{5}{6}$, и предположение о независимости ведет к тому, что вероятность выпадения на первой и третьей кости 1 очка и невыпадения 1 очка на второй кости должна равняться $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$. При проведении экспериментов мы ожидаем, что условие независимости выполняется в том случае, когда испытания не имеют никакого отношения одно к другому.

Примеры, в которых независимость нарушена. Семья из пяти человек собирается поехать отдыхать либо на побережье, либо в горы. Этот вопрос решается бросанием одной монеты. Мы хотим узнать число членов семьи, которые поедут в горы (либо 0, либо 5). Если рассматривать этот эксперимент состоящим из пяти биномиальных испытаний, по одному испытанию для каждого члена семьи, то исходы этих испытаний очевидным образом не будут независимы. На самом деле лучше рассматривать этот эксперимент как состоящий ровно из одного биномиального испытания сразу для всех членов этой семьи. Дадим теперь не так ярко выраженный пример зависимости испытаний. Рассмотрим пары, состоящие из одного юноши и одной девушки, которые пришли в художественный музей. Каждого юношу и каждую девушку просят проголосовать, какой из двух данных картин следует присудить приз. Голос, поданный за первую из этих картин, можно назвать «успехом» испытания, а за вторую — «неудачей». Пусть эксперимент состоит в опрашивании одной пары, т. е. из двух испытаний. Если повторять этот эксперимент с различными парами много раз, то, вероятно, обнаружится, что голоса двух людей в одной паре совпадают значительно чаще, чем это было бы в случае независимости, поскольку для людей, посещающих музей вдвоем, совпадение вкусов значительно более вероятно, чем для двух произвольным образом выбранных людей из числа

Таблица 48

Голосование пар в музее

		Голоса девушек		
		Картина *A*	Картина *B*	
Голоса юношей	Картина *A*	0,45	0,15	0,6
	Картина *B*	0,15	0,25	0,4
		0,6	0,4	1

посетителей музея. Табл. 48 иллюстрирует это. Из этой таблицы видно, что 0,6 всех юношей и 0,6 всех девушек голосуют за картину A. Поэтому при независимом голосовании $0{,}6\times 0{,}6=0{,}36$ всех пар должны были голосовать за картину A, а $0{,}4\times 0{,}4=0{,}16$ всех пар должны были голосовать за картину B. Таким образом, при независимом голосовании совпадали бы голоса юношей и девушек в $0{,}36+0{,}16=0{,}52$ всех пар. Однако из табл. 48 следует, что голоса совпадают в $0{,}45+0{,}25=0{,}70$ всех пар, что слишком много для того, чтобы считать голосования независимыми.

Каждое выполнение биномиального эксперимента, состоящего из n испытаний, дает нам некоторое число от 0 до n, представляющее собой значение случайной величины X, где X — общее число «успехов» в n биномиальных испытаниях. Мы собираемся изучить таблицу вероятностей этой случайной величины. Например, нас может интересовать число мишеней, в которые не попал стрелок. В результате биномиального эксперимента могут получиться другие случайные величины, отличные от числа успехов. Например, если стрелок совершает пять выстрелов по мишени, случайной величиной является также число выстрелов, произведенных до первого попадания в яблоко: 0, 1, 2, 3, 4 или 5, если он ни разу не попал в яблоко мишени. Однако значение этой случайной величины ничего не говорит нам о числе попаданий, и эта случайная величина не является числом «успехов».

Постоянство p и независимость — условия, которые трудно соблюдать на практике. Однако очевидно, что небольшие изменения p не оказывают большого влияния на итоговые вероятности и несущественные нарушения независимости не приводят к появлению большой разницы в ответах. (Например, см. пример 2 из § 5 гл. V, связанный с числом красных карт в одной сдаче из пяти карт). С другой стороны, даже если биномиальная модель не описывает достаточно хорошо изучаемую нами физическую ситуацию, она может служить основанием для сравнения ситуации «с эталонной»; другими словами, мы можем обсуждать ситуацию с точки зрения ее отклонения от биномиальной модели.

> *Резюме. Биномиальный эксперимент* состоит из $n (n \geqslant 1)$ независимых биномиальных испытаний, каждое из которых имеет постоянную для эксперимента вероятность успеха $p (0 \leqslant p \leqslant 1)$. В результате выполнения эксперимента мы получаем случайную величину X — число успехов. Случайная величина X принимает значения $x = 0, 1, \ldots, n$ с вероятностями $P(X = x)$, или более кратко $P(x)$.

Найдем выражение для вероятности получения ровно x успехов при данных значениях p и n. Если каждому числу успехов x сопоставить его вероятность $P(x)$, то мы получим множество пар $\{(x, P(x))\}$, $x = 0, 1, \ldots n$, которое представляет собой таблицу распределения вероятностей, называемую *биномиальным распределением*. Задание p и n определяет биномиальное распределение единственным образом, а различным значениям p и n соответствуют различные биномиальные распределения (за исключением случая $p = 0$; тогда число успехов всегда равно 0). Множество всех биномиальных распределений называется *семейством биномиальных распределений;* однако когда из контекста ясно, о чем идет речь, этот термин часто сокращают просто до «биномиального распределения». Биномиальные распределения были впервые изучены в 1700 г. Якобом Бернулли, и по этой причине биномиальные испытания иногда называют *испытаниями Бернулли* или *схемой Бернулли.*

Случайные величины. В результате каждого биномиального испытания получается либо 0, либо 1 успех. Поэтому можно считать, что каждое биномиальное испытание дает нам значение случайной величины — числа успехов, — равное либо 0, либо 1 с вероятностями $q = 1 - p$ и p соответственно. Несколько испытаний, составляющих *биномиальный эксперимент*, приводят к получению новой случайной величины X, — общего числа успехов, — которая равна сумме случайных величин, связанных с каждым испытанием.

Пример 2. *Стрелок попадает в яблоко мишени при третьем и пятом выстрелах. Числа успехов для пяти последовательных выстрелов поэтому таковы:* 0, 0, 1, 0, 1. *Число успехов при каждом выстреле есть случайная величина, принимающая значения* 0 *или* 1; *в нашем случае имеется пять таких случайных величин. Их сумма есть случайная величина* X, *— общее число успехов, — которая в нашем эксперименте принимает значение* $x=2$.

Обратимся теперь к другому простому примеру, чтобы проиллюстрировать особенности биномиального эксперимента и связанного с ним биномиального распределения.

Пример 3. Биномиальный эксперимент с тремя волчками. *При бросании вращающегося волчка он может остановиться либо острием вверх* (U), *либо острием вниз* (D). *Предположим, что бросаются три волчка — красный, белый и синий, которые одинаковы во всем, за исключением цвета. Мы хотим найти таблицу вероятностей для случайной величины* X *— числа волчков, останавливающихся в положении* U.

Пространство событий этого эксперимента состоит из 8 элементарных событий, которые представлены в табл. 49 вместе с соответствующими значениями X и вероятностями элементарных событий. Первая, вторая

Таблица 49

Элементарное событие	X, число выпадений U	Вероятность
DDD	0	q^3
DDU	1	pq^2
DUD	1	pq^2
UDD	1	pq^2
DUU	2	p^2q
UDU	2	p^2q
UUD	2	p^2q
UUU	3	p^3

и третья буквы в обозначении для каждого элементарного события означают соответственно исходы бросания красного, белого и синего волчков. Так, UDD означает, что красный волчок остановился острием вверх, а белый и синий — острием вниз.

Пусть вероятности U и D равны p и q, где, разумеется, $p+q=1$. Тогда мы получаем

$$P(U)=p, \qquad P(D)=q. \tag{1}$$

Предположим, что исходы трех бросаний независимы. В этом случае вероятность любого элементарного события находится умножением трех соответствующих вероятностей. Например,

$$P(UDU)=P(U)\cdot P(D)\cdot P(U)=pqp=p^2q.$$

Через $b(x;\ 3;\ p)$ обозначим вероятность получения ровно x исходов U при бросании трех волчков с вероятностью p для каждого волчка оказаться в положении U. [$b(x;\ 3;\ p)$ читается: «b от x при $n=3$ и вероятности успеха p».] Мы можем подытожить полученные результаты, выписав биномиальное распределение в форме таблицы вероятностей:

Вероятность, $b(x;\ 3;\ p)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3
Значение X, x	0	1	2	3

(2)

Поскольку коэффициенты 1, 3, 3, 1 есть биномиальные коэффициенты, мы можем общее выражение для $b(x;\ 3;\ p)$ записать следующим образом:

$$\boxed{b(x;\ 3;\ p)=\binom{3}{x}p^xq^{3-x}, \quad x=0,\ 1,\ 2,\ 3,} \tag{3}$$

где $\binom{3}{x}=\frac{3!}{x!\,(3-x)!}$ есть число перестановок x букв U и трех букв D (следствие 7 гл. II, стр. 76).

Полученная при решении задачи о волчках формула (3) справедлива в общем случае. Множество, состоящее из четырех вероятностей, получаемых из выражения (3), и соответствующих значений X, образует биномиальное распределение для трех независимых испытаний с вероятностями p успеха в каждом из них. Это биномиальное распределение также представлено в таблице вероятностей (2).

Заметим, что произведение в правой части выражения (3) состоит из двух сомножителей:

(1) биномиального коэффициента $\binom{3}{x}$, который равен числу различных перестановок из x «успехов» и $3-x$ «неудач» в трех испытаниях;

(2) множителя $p^x q^{3-x}$, который равен вероятности любого исхода эксперимента, состоящего из x успе-

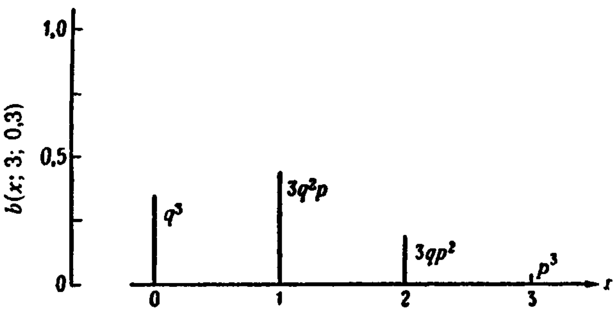


Рис. 19. График функции вероятностей биномиального распределения для $n=3$; $p=0,3$; $q=0,7$.

хов и $3-x$ неудач. В следующем параграфе, где мы обобщим формулу (3), мы убедимся, что биномиальные вероятности всегда равны произведениям такого рода сомножителей.

Сложив все вероятности, получаемые по формуле (3) при $x=0$, 1, 2, 3, получим

$$q^3+3q^2p+3qp^2+p^3.$$

Эта сумма представляет собой биномиальное разложение для $(q+p)^3$, поскольку

$$(q+p)^3=q^3+3q^2p+3qp^2+p^3. \qquad (4)$$

Последнее обстоятельство служит еще одной причиной для того, чтобы называть это распределение вероятностей биномиальным. А поскольку $q+p=1$ и $1^3=1$, то из формулы (4) следует, что сумма этих четырех вероятностей равна 1.

Напомним, что в гл. V мы представляли функции вероятностей при помощи их графиков. Мы можем поступить таким образом и теперь, нанеся на координатную плоскость точки с абсциссами $x=0$, 1, 2, 3 и ординатами q^3, $3q^2p$, $3qp^2$, p^3; при этом мы получим *график вероятностей* биномиального распределения для случая трех испытаний.

Так как сумма вероятностей q^3, $3q^2p$, $3qp^2$, p^3 равна 1, то и сумма всех ординат на графике тоже равна 1. На рис. 19 $p=0{,}3$, $q=0{,}7$.

Числовые значения. Предположим, что $P(U)=p=0{,}3$, как на рис. 19. Вычислим вероятности получения 0, 1, 2, 3 исходов при бросании трех волчков.

Для этого используем выражение (3) при $p=0{,}3$; $q=1-p=0{,}7$, подставляя в него последовательно $x=0$, 1, 2, 3. В результате вычислений получим следующую таблицу вероятностей данного биномиального распределения:

$b(x;\ 3;\ 0{,}3)$	0,343	0,441	0,189	0,027
x	0	1	2	3

(5)

Теперь мы можем вычислить и другие вероятности. Например, вероятность получения *по крайней мере* двух U равна

$$P(X \geqslant 2) = 3qp^2 + p^3 = b(2;\ 3;\ 0{,}3) + b(3;\ 3;\ 0{,}3) = 0{,}189 + 0{,}027 = 0{,}216.$$

Вероятность получения не более одного U равна

$$P(X \leqslant 1) = q^3 + 3pq^2 = b(0;\ 3;\ 0{,}3) + b(1;\ 3;\ 0{,}3) = 0{,}343 + 0{,}441 = 0{,}784.$$

Замечание. В экспериментах, подобных стрельбе по мишени или бросанию волчков, невозможно заранее указать точное значение p. Однако возможно получить хорошую оценку величины p, проведя, например, несколько сот бросаний или выстрелов по мишени и взяв в качестве этой оценки отношение числа «успехов» к общему числу испытаний.

Упражнения к § 1

1. Проверьте правильность таблицы вероятностей (5) для эксперимента с волчками и убедитесь в том, что сумма всех вероятностей равна 1.

2. Убедитесь в справедливости выражения (3), подставив в него значения $x=0$, 1, 2, 3. Сверьте ваши результаты с таблицей вероятностей (2).

3. Урна содержит один красный и два белых шара, одинаковых во всем, кроме цвета. Из урны производится выборка трех шаров так, что перед выбором следующего шара предыдущий возвращается в урну (выборка с возвращением). Найдите биномиальное распределение числа белых шаров в выборке.

4. Три кандидата участвуют в выборах на три различные должности в разных штатах. Шансы оказаться избранными для каждого из них равны 1 : 3. Какова вероятность того, что будет избран по крайней мере один из них?

5. Пусть в некотором биномиальном эксперименте $n=3$. При каких значениях p имеют место равенства $P(0)=P(1)$? $P(0)=P(3)$?

6. Три игральные кости были брошены 648 раз. При этом каждый раз отмечалось количество костей, на которых выпало 5 или 6 очков. В результате получились следующие результаты:

Число костей, на которых выпало 5 или 6	Наблюдаемая частота
0	179
1	298
2	141
3	30
	Всего 648

Получите теоретические вероятности соответствующих исходов бросаний трех идеальных костей, умножьте их на 648 и сравните найденные теоретические частоты с экспериментальными.

7. Бросьте три монеты 24 раза и сравните наблюдаемые количества бросаний, в которых выпало 0, 1, 2, 3 герба, с теоретическими частотами.

8. Для биномиального эксперимента с $n=3$ покажите, что $P(X=1 \text{ или } X=2)=3pq$.

9. (Для читателей, не знакомых с дифференциальным исчислением.) Постройте график $b(2; 3; p)$ при p, меняющемся от 0 до 1. Оцените значение p, при котором эта функция достигает максимума.

10. (Для читателей, знакомых с дифференциальным исчислением.) Найдите p, при котором $b(2; 3; p)$ достигает максимума, и вычислите этот максимум. (*Указание*: Учтите, что $q = 1 - p$.)

11. Волчок может упасть острием вверх с вероятностью $P(U) = p$ или острием вниз с вероятностью $P(D) = q = 1 - p$. Этот волчок бросается четыре раза. Выпишите пространство событий для всех возможных исходов этого эксперимента. Определите вероятности элементарных событий. Докажите, что сумма этих вероятностей равна 1. Найдите распределение вероятностей для числа падений волчка острием вверх.

12. *Ошибка в рассуждении.* Решается задача об отыскании вероятности того, что три монеты выпадут одной стороной, т. е. либо все три выпадут гербами, либо цифрами. Некто рассуждает следующим образом: при бросании трех монет по крайней мере две из них обязаны выпасть одной стороной. Тогда вероятность того, что третья монета выпадет той же стороной, что и две первые, равна 1/2. Это и есть искомое значение вероятности. Попытайтесь найти ошибку в этом рассуждении. Чему равно правильное значение этой вероятности?

§ 2. Биномиальный эксперимент, состоящий из n испытаний

Рассмотрим пример с бросанием n волчков. При бросании одного волчка могут быть реализованы два возможных исхода: U и D. Следовательно, по принципу умножения всего существуют $2 \times 2 \times \ldots \times 2$ (n сомножителей), или 2^n различных исходов нашего эксперимента (гл. II, § 1). Поэтому пространство событий S эксперимента состоит из 2^n элементарных событий. Каждое элементарное событие определяет некоторое значение случайной величины X, где X есть число выпадений U в этом элементарном событии. Какова вероятность ровно x выпадений U, где x есть любое из чисел $0, 1, 2, \ldots, n$? То есть, другими словами: чему равно $b(x; n; p)$?

В § 1 мы нашли, что биномиальные вероятности в случае трех биномиальных испытаний представляют собой произведения двух множителей: коэффициентов $\binom{3}{x}$ и множителей вида $p^x q^{3-x}$. Мы попробуем найти аналогичные сомножители для $b(x;\ n;\ p)$ в общем случае, отказавшись от терминологии, связанной с бросанием волчка, используя вместо этого термины «испытания», «успех» и «неудача».

Во-первых, сколькими различными способами мы можем получить ровно x успехов в n испытаниях? Из теории перестановок объектов двух различных типов (§ 4 гл. II) следует, что число таких способов равно $\binom{n}{x}$; пространство событий S содержит ровно $\binom{n}{x}$ элементарных событий, представляющих исходы с x успехами и $n-x$ неудачами.

Во-вторых, чему равна вероятность x успехов и $n-x$ неудач, следующих один за другим в каком-то заданном порядке? Если мы предположим, что исходы n испытаний независимы, то вероятность получения x успехов и $n-x$ неудач *в любом заданном порядке* равна произведению x сомножителей, равных p, и $n-x$ сомножителей, равных q. Аналогичным образом дело обстояло и при вычислении вероятностей в примере с волчками предыдущего параграфа [вычисления, следующие за выражением (1)]. Причина, по которой мы получаем одну и ту же вероятность для каждой перестановки x успехов и $n-x$ неудач, заключается в том, что из независимости исходов каждого испытания следует, что вероятности этих исходов надо перемножить, а произведение обладает перестановочным свойством. Таким образом, искомая вероятность для любой последовательности x успехов и $n-x$ неудач равна

$$p^x q^{n-x}. \tag{1}$$

Это выражение для вероятности справедливо при каждом значении $x=0, 1, 2, \ldots, n$.

Среди всех 2^n элементарных событий, составляющих пространство S, имеется ровно $\binom{n}{x}$ элементарных событий, состоящих из x успехов и $n-x$ неудач, причем каждое из этих элементарных событий имеет вероятность $p^x q^{n-x}$. Поэтому

$$b(x;\ n;\ p)=\binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2}$$

Заметим, что при $n=3$ формула (2) обращается в знакомую уже нам вероятность $b(x; 3; p)$ [§ 1, формула (3)].

Также можно заметить, что $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ есть $(x+1)$-й член биномиального разложения $(q+p)^n$, поскольку это биномиальное разложение (§ 5 гл. II) можно записать так:

$$(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} pq^{n-1} + \ldots + \binom{n}{x} p^x q^{n-x} + \ldots + p^n. \tag{3}$$

Поскольку $q+p=1$, то и $(q+p)^n=1$. Этот результат внушает доверие к предыдущим рассуждениям, ибо из него следует, что мы учли все вероятности в пространстве событий S. Множество упорядоченных пар

$$\left\{\left(x, \binom{n}{x} p^x q^{n-x}\right); \quad x=0, 1, \ldots, n\right\}$$

есть общее *биномиальное распределение* или биномиальная функция вероятностей. Мы доказали следующую общую теорему о биномиальных экспериментах:

Теорема 1. Биномиальное распределение. *Если некоторый эксперимент состоит из n независимых биномиальных испытаний, каждое из которых имеет вероятность p успеха и вероятность $q(=1-p)$ неудачи, то вероятность того, что в результате выполнения эксперимента мы будем иметь ровно x успехов и $n-x$ неудач, равна*

$$\boxed{b(x; n; p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x=0,1,2, \ldots, n.} \tag{4}$$

Пример 1. Бросание пяти монет. *Предположим, что при бросании монеты вероятность выпадения герба равна* 1/2. *Если бросаются пять монет, то какова вероятность того, что* (а) *выпало ровно два герба;* (б) *выпало более одного герба?*

Решение. Обозначим через X число гербов, выпавших при этих пяти бросаниях.

(а) Из выражения (4)

$$P(X=2)=b\left(2;\ 5;\ \frac{1}{2}\right)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=$$
$$=10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}.$$

(б) Для нахождения $P(X>1)$ удобнее использовать дополнительное событие. Различные несовместимые события заключаются в выпадении 0, 1, 2, 3, 4 или 5 гербов. Поэтому

$$P(X>1)=1-P(X\leqslant 1)=$$
$$=1-b\left(0;\ 5;\ \frac{1}{2}\right)-b\left(1;\ 5;\ \frac{1}{2}\right)=$$
$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^5-5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{26}{32}=\frac{13}{16}.$$

Пример 2. Задача о вратаре. *Предположим, что вероятность взятия вратарем одиннадцатиметрового штрафного удара равна 1/4. Многие лица сочтут, что наше утверждение означает следующее: из четырех одиннадцатиметровых вратарь обязательно возьмет один. Какова на самом деле вероятность того, что он возьмет хотя бы один мяч из четырех?*

Решение. Вероятность того, что вратарь парирует хотя бы один из четырех одиннадцатиметровых штрафных ударов, равна

$$P(X\geqslant 1)=1-b\left(0;\ 4;\ \frac{1}{4}\right)=$$
$$=1-\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{175}{256}.$$

Полученный ответ приблизительно равен 0,68, что достаточно далеко от 1. Ошибка проистекает из того, что среднее число взятых вратарем одиннадцатиметровых равно 1, а многие люди смешивают понятия среднего значения и вероятности. Мы подробнее обсудим это дальше, в § 3.

Пример 3. Двух- и четырехмоторные самолеты. *Пусть вероятность выхода из строя каждого* *мотора самолета равна q, причем моторы портятся независимо один от другого. Самолет может продолжать полет в том случае, если работают не менее половины его моторов. Для каких значений q двухмоторный самолет следует предпочесть четырехмоторному? (Вероятность того, что мотор не выйдет из строя, равна $p = 1 - q$.)*

Решение. Начнем с вычисления вероятностей успешного полета для двух типов самолетов. Обозначим через X число работающих моторов.

Двухмоторный самолет	Четырехмоторный самолет
P (успешный полет) $=$ $= P(X \geqslant 1) = 1 - P(0) =$ $= 1 - b(0;\ 2;\ p) =$ $= 1 - q^2$	P (успешный полет) $=$ $= P(X \geqslant 2) = 1 - P(0) - P(1) =$ $= 1 - b(0;\ 4;\ p) -$ $- b(1;\ 4;\ p) =$ $= 1 - q^4 - 4pq^3 =$ $= 1 - q^4 -$ $- 4(1-q)\,q^3 =$ $= 1 - 4q^3 + 3q^4.$

Графическое решение. На рис. 20 представлены графики вероятностей успешного полета для двух типов самолетов как функции величины q вероятности выхода из строя одного мотора. Точка пересечения двух кривых расположена вблизи $q = \frac{1}{3}$; по графикам нельзя сказать точно, чему равна абсцисса точки пересечения, и поэтому может оказаться более предпочтительным алгебраическое решение.

Алгебраическое решение. Запишем неравенство, выражающее тот факт, что вероятность успешного полета двухмоторного самолета не меньше соответствующей вероятности для четырехмоторного самолета:

$$1 - q^2 \geqslant 1 - 4q^3 + 3q^4.$$

Вычитая из обеих частей неравенства $1 - q^2$, мы получаем

$$0 \geqslant q^2 - 4q^3 + 3q^4.$$

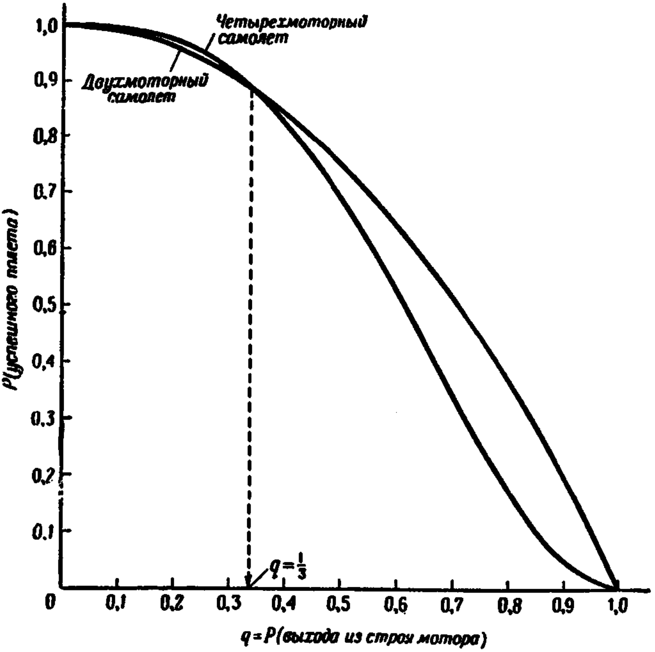


Рис. 20. Вероятность успешного полета в зависимости от вероятности q выхода из строя одного мотора.

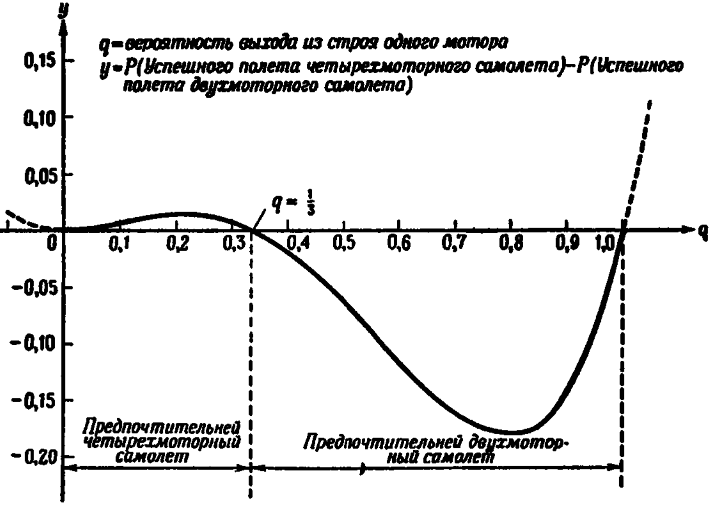


Рис. 21. График функции $y = q^2(1-q)(1-3q)$.

Вынося за скобки q^2, имеем

$$0 \geqslant q^2(1-4q+3q^2).$$

Наконец, раскладывая стоящее в правой части выражение на множители, получаем

$$0 \geqslant q^2(1-q)(1-3q). \tag{5}$$

При $q=0$, $q=1$ и $q=\frac{1}{3}$ выражение в правой части обращается в 0, т. е. два типа самолетов имеют одинаковые шансы успешного полета *).

На рис. 21 представлен график функции, стоящей в правой части неравенства (5). Из этого графика также видно, что для $q=0$, $q=1$ и $q=1/3$ шансы совершения успешного полета для двух типов самолетов одинаковы. График показывает, что при $\frac{1}{3}<q<1$ правая часть неравенства (5) меньше 0, потому что кривая расположена ниже оси q. Аналогичные рассуждения показывают, что при $0<q<1/3$ кривая расположена выше оси q — в этом случае предпочтительнее четырехмоторные самолеты. Эти же выводы можно получить, изучая знаки сомножителей в правой части неравенства (5) для различных значений q. Нет никакой необходимости говорить о том, что на практике вероятность выхода из строя одного мотора много меньше 1/3 **).

Упражнения к § 2

1. Вратарь парирует в среднем 0,3 всех одиннадцатиметровых штрафных ударов. Какова вероятность того, что он возьмет ровно два из четырех мячей? Существуют ли какие-либо соображения против того, что число взятых мячей из серии четырех одиннадцатиметровых распределено биномиально?

2. Волчок падает острием вверх в 40% всех бросаний. Найдите функцию вероятностей для числа его падений острием

---

*) Это утверждение для $q=0$ и $q=1$, разумеется, очевидно: при $q=0$ полет всегда будет успешен, а при $q=1$ самолет неминуемо разобьется (если только ему удастся взлететь).

**) И, значит, предпочтительнее четырехмоторные самолеты (что, впрочем, очевидно).

вверх при пяти последовательных бросаниях. Представьте результаты в виде таблицы вероятностей и в виде графика.

3. Две команды — местная и приезжая — играют в один день два футбольных матча. Считаете ли вы, что случайная величина — число матчей, выигранных местной командой, — может не оказаться распределенной по биномиальному закону? Почему?

4. Независимо бросаются n монет. Докажите, что вероятность выпадения одной стороной либо всех монет, либо всех, кроме одной, при $n > 2$ равна $(n+1)/2^{n-1}$. Чему равен ответ в случае $n=2$?

5. Предположим, что для стрелка-любителя вероятность поражения мишени равна 0,05. Какова вероятность того, что в серии из 20 выстрелов он ни разу не поразит мишени? (Используйте логарифмы.) Также выпишите последовательность вычислений для определения вероятности поражения стрелком мишени не менее 4 раз из 20, но не доводите их до конца. (Используя биномиальные обозначения, нетрудно выписать формулу для определения искомой вероятности; однако нахождение с помощью этой формулы значений вероятностей слишком утомительно. В следующем параграфе мы покажем, как легко выполняются подобные вычисления при помощи таблиц.)

6. Сравните целесообразность использования одно- и двухмоторного самолета, используя допущения, сделанные в условии примера 3.

7. В биномиальном эксперименте, состоящем из трех испытаний, вероятность ровно двух успехов в 12 раз больше вероятности трех успехов. Найдите p.

8. Одна треть всех юношей, поступивших в колледж, имеют рост не ниже шести футов. В одной комнате общежития живут четверо юношей, выбранных случайным образом. Какова вероятность того, что рост по крайней мере троих из них меньше шести футов? (Не учитывайте то, что на самом деле здесь выборка производится без возвращения.)

9. Две трети всех секретарей большого стенографического бюро имеют права водителя автомобиля. Для участия в поездке случайным образом выбираются четыре секретаря. Какова вероятность того, что по крайней мере двое из них имеют права шофера?

10. Экзамен состоит из 6 вопросов. На каждый вопрос дано 3 возможных ответа, среди которых необходимо выбрать один правильный. Какова вероятность того, что методом простого угадывания удастся ответить по крайней мере на 5 вопросов?

11. Обреченным на смерть пациентам в качестве последнего шанса можно предложить опасную операцию, в результате которой выживают 80% всех оперированных. Какова вероятность того, что ровно 80% из пяти оперированных пациентов выживут?

12. (Для читателей, знакомых с дифференциальным исчислением.) При фиксированных значениях x и n величина $b(x; n; p)$ является функцией p. Докажите, что она достигает максимума при $p=\frac{x}{n}$. (*Указание*: Сначала решите задачу в предположении, что x не равно ни 0, ни n; затем рассмотрите эти случаи отдельно.) *Замечание.* Это одна из причин, по которой в качестве оценки p принимается отношение наблюдаемого числа успехов к общему числу испытаний. Эта оценка x/n, $x=0, 1, \ldots, n$, называется *оценкой наибольшего правдоподобия* ввиду свойства максимальности, доказательство которого составляет содержание этой задачи.

13. Рассмотрим два биномиальных эксперимента с вероятностями $p=\frac{1}{2}$, один из которых состоит из $n=2m$ испытаний, а другой — из $n=2m-1$ испытаний, где m — натуральное число. Докажите, что $P(m)$ в этих экспериментах равны.

14. Для каких значений q одномоторный самолет следует предпочесть трехмоторному? (Используйте предположения примера 3.)

15. Для каких значений q двухмоторный самолет следует предпочесть трехмоторному? (Используйте предположения примера 3.)

16. Предположим, что самолет может продолжать полет тогда, когда работают более половины его моторов. Пусть q — вероятность выхода из строя одного мотора, которые не связаны между собой. При каких значениях q следует предпочесть трехмоторный самолет пятимоторному?

17. Два независимых биномиальных эксперимента, первый из которых состоит из n, а второй из m испытаний, имеют одинаковую вероятность p успеха в одном испытании. Докажите, что вероятность получения x успехов в *обоих* экспериментах равна

$$\binom{n+m}{x} p^x (1-p)^{n+m-x}.$$

Объясните этот результат.

§ 3. Математическое ожидание биномиальной случайной величины

До сих пор мы изучали вероятности биномиального распределения, совсем не обращаясь к понятию математического ожидания или среднего значения $\mu = E(X)$ случайной величины X — числа успехов в n испытаниях. В примере 2 предыдущего параграфа мы вычислили вероятность того, что вратарь, для которого вероятность взять пенальти равна 1/4, возьмет ровно один мяч из четырех. Для того чтобы получить среднее значение числа парированных при четырех пенальти мячей, необходимо умножить каждое возможное число взятых мячей на соответствующую вероятность и сложить эти произведения:

$$\mu = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3) + 4 \cdot P(4) =$$
$$= 0 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + 1 \cdot 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 +$$
$$+ 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 =$$
$$= 0 + \frac{27}{64} + \frac{27}{64} + \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = 1.$$

Таким образом, если взять большую серию пенальти, то вратарь в среднем будет брать один мяч из четырех. Этот результат часто получает ошибочное толкование, описанное в примере 2 предыдущего параграфа, из-за смешения понятий среднего значения и вероятности. Одним из первых ученых, работавших в области теории вероятностей, был Кардано, знаменитый своими исследованиями в области решения уравнений третьей степени[1]). Кардано также смешивал понятия математического ожидания и вероятности, что привело к забвению его исследований по теории вероятностей вплоть до 1953 г., когда О. Оре отделил ошибки в работах Кардано от действительных открытий[2]).

В примере с вратарем случайная величина X, равная числу взятых вратарем мячей в серии из четырех ударов, имеет возможные значения $x=0, 1, 2, 3, 4$. *Среднее* число взятых мячей μ есть среднее значение $E(X)$ случайной величины X. Каждое повторение эксперимента с четырьмя пенальти приводит к некоторому значению X. Например, в шести повторениях эксперимента соответствующие значения X могут равняться 0, 2, 0, 3, 1, 1. Если мы вычислим обычное

---

[1]) См. D. F. Smith, History of Mathematics, т. 1, New York, 1923, стр. 295—297. [См. также, например, В. П. Шереметьевский, Очерки по истории математики, М., Учпедгиз, 1940, стр. 89—96. — *Прим. ред.*]

[2]) См. O. Ore, Cardano, Princeton University Press, 1953.

(арифметическое) среднее $\overline{X}$ для этих значений X, то мы получим 7/6 в качестве оценки μ, что отлично от истинного значения $\mu=1$. Чем больше раз проводится эксперимент, тем ближе оценка $\overline{X}$ к среднему значению случайной величины X, равному μ.

В более общем случае мы хотим теперь получить среднее число успехов в n биномиальных испытаниях. Напомним, что X представляет собой сумму n случайных величин, каждая из которых принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $(1-p)$. Среднее значение каждой из этих случайных величин равно

$$1 \times p + 0 \times (1-p) = p.$$

Для того чтобы получить искомый результат, мы воспользуемся следующей простой теоремой, которую сформулируем без доказательства: «математическое ожидание суммы любого конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий» *). Поскольку X представляет собой сумму n случайных величин, математическое ожидание каждой из которых равно p, то

$$E(X) = \underbrace{p + p + \ldots + p}_{n \text{ членов}} = np.$$

Теорема 2. Биномиальное среднее. *Если p есть вероятность успеха в каждом испытании некоторого биномиального эксперимента, то математическое ожидание или среднее значение числа успехов в n испытаниях равно*

$$\boxed{\mu = E(X) = np.} \tag{1}$$

Пример 1. *Применим формулу* (1) *к задаче о вратаре с $p = P$(взятие мяча) $=\frac{1}{4}, n=4$. Каково математическое ожидание числа взятых мячей в серии из четырех пенальти?*

Решение. $\mu = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$, как мы и получили раньше.

*) Ср., например, Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчин [1], § 21.

Пример 2. *Бросаются 15 игральных костей. Каково математическое ожидание числа костей, на которых выпало 1 очко?*

Решение. $\mu=15\cdot\frac{1}{6}=2{,}5$.

Упражнения к § 3

1. Вероятность падения волчка острием вверх равна 0,3. Волчок бросается 15 раз. Найдите математическое ожидание числа бросаний, в которых он упал острием вверх.

2. Сколько костей необходимо бросить для того, чтобы математическое ожидание числа костей, на которых выпало 1 очко, равнялось 5?

3. Выполняются два биномиальных эксперимента: из колоды в 52 карты наугад выбирается 13 карт, причем перед выбором следующей карты предыдущая возвращается в колоду; бросается 12 игральных костей. Найдите математическое ожидание общего числа тузов и выпадений двух очков на костях в этих экспериментах.

4. В некотором биномиальном эксперименте μ удалено как от 0, так и от n на расстояние, не меньшее $3\sqrt{npq}$. Докажите, что n не менее чем в 9 раз превосходит p/q и q/p.

5. Для биномиального эксперимента с $n=2$, $p=\frac{1}{200}$ найдите вероятность получения не менее одного успеха и сравните ее значение с $\mu=np$. Проведите аналогичное сравнение для $n=3$; $p=\frac{1}{300}$; для $n=3$, $p=0{,}1$. Прокомментируйте ваши результаты.

6. (Продолжение). Докажите, что если в некотором биномиальном эксперименте μ близко к нулю, то $P(X\geqslant 1)\approx\mu$. (*Указание.* Вспомните приближение для $(1+x)^n$ из § 5 гл. II, пример 4.)

7. (Продолжение.) Используйте результат упражнения 6 для приближенного определения $P(X\geqslant 1)$ в биномиальном эксперименте с $n=50$, $p=\frac{1}{2000}$.

8. Выведите теорему 2 непосредственно из определения

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}.$$

Указание: Сначала докажите, что для $1\leqslant x\leqslant n$

$$x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=np\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}q^{(n-1)-(x-1)}.$$

Далее покажите, что поскольку член в сумме с $x=0$ равен 0, то

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} np \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{(n-1)-(x-1)} =$$
$$= np\,(q+p)^{n-1} = np.$$

§ 4. Таблицы биномиальных вероятностей

Вычислять вероятности каждого исхода большого количества биномиальных испытаний очень сложно и трудоемко. Для облегчения этой работы построены обширные таблицы вероятностей биномиального распределения. В конце этой книги представлена небольшая табл. III вероятностей биномиального распределения, которую читатель может использовать.

Эта таблица состоит из двух частей. В части А представлены вероятности получения ровно x успехов в биномиальном эксперименте, состоящем из n испытаний: $b(x;\ n;\ p)$. В этой таблице представлены все значения $b(x; n; p)$ для n от 2 до 25 и для $p = 0{,}01$; 0,05; 0,10; 0,20; 0,30; 0,40; 0,50; 0,60; 0,70; 0,80; 0,90; 0,95; 0,99.

В части Б этой же таблицы представлены для тех же биномиальных распределений вероятности получения r или более успехов. Таким образом, в этой части таблицы даны «совокупные» вероятности от r до n успехов, а не вероятности определенного числа успехов. Во многих приложениях знание таких сумм вероятностей предпочтительнее, нежели знание вероятностей слагаемых. Символически в этой части таблицы представлены

$$P(X \geqslant r) = b(r;\ n;\ p) + b(r+1;\ n;\ p) + \ldots + b(n; n; p) =$$
$$= \sum_{x=r}^{n} b(x;\ n;\ p).$$

Каждое трехзначное число в таблице следует рассматривать как дробную часть соответствующего числа, целая часть которого равна 0. Символ 1— в таблице означает, что соответствующая вероятность больше 0,9995 и меньше 1. Символ 0+ в таблице означает, что соответствующая вероятность меньше 0,0005 и больше 0.

Проверим какое-либо значение в этой таблице. Для того чтобы найти вероятность 4 или более успехов в 5 испытаниях при $p=0{,}8$, мы вычислим

$$b(4;\ 5;\ 0{,}8)+b(5;\ 5;\ 0{,}8),$$

и получим

$$\binom{5}{4}(0{,}8)^4(0{,}2)^1+\binom{5}{5}(0{,}8)^5(0{,}2)^0=$$
$$=0{,}40960+0{,}32768=0{,}73728.$$

Мы видим, что в таблице III-А $b(4;5;0{,}8)\approx 0{,}410$ и что $b(5;5;0{,}8)\approx 0{,}328$, а в таблице III-Б для $n=5$, $r=4$, $p=0{,}8$ соответствующий элемент равен 0,737. Все три вероятности в таблице совпадают с точностью до трех знаков после запятой с вычисленными нами вероятностями.

Пример 1. *Найдите вероятность не менее 3 успехов при $n=10$, $p=0{,}4$.*

Решение. Непосредственно из табл. III-Б находим, что искомая вероятность с точностью до трех знаков после запятой равна 0,833.

Пример 2. Интерполяция по таблице. *Пусть $n=25$. При каком значении p вероятность $P(X\geqslant 8)=0{,}4$?*

Решение. Используем для решения ближайшие к данному значению 0,4 значения вероятности в таблице.

	$P(X\geqslant 8),\ n=25$
$p=0{,}20$	0,109
$p=?$	0,400
$p=0{,}30$	0,488

При помощи обычной линейной интерполяции получаем

$$\frac{p-0{,}2}{0{,}3-0{,}2}\approx\frac{0{,}400-0{,}109}{0{,}488-0{,}109},$$

и отсюда

$$p \approx 0{,}2 + \frac{0{,}400 - 0{,}109}{0{,}488 - 0{,}109}(0{,}3 - 0{,}2) \approx 0{,}28.$$

Этот результат с точностью до двух знаков после запятой совпадает со значением, которое можно получить из более подробной таблицы, нежели табл. III.

Пример 3. *Пусть $n=15$, $p=0{,}05$. Найти вероятность получения не более двух успехов.*

Решение 1. $P(X \leqslant 2) = 1 - P(X \geqslant 3) \approx 1 - 0{,}036 = 0{,}964$.

Решение 2. Вместо этого мы можем обратиться к нахождению вероятности не менее чем 13 неудач, поскольку это то же самое, что и вероятность не более двух успехов. Соответствующее значение вероятности p для неудачи будет равно 0,95, и непосредственно из таблицы находим

$$P(X \geqslant 13) \approx 0{,}964.$$

Упражнения к § 4

В упражнениях 1—9 через X обозначено число успехов в n независимых биномиальных испытаниях с вероятностью успеха p в каждом испытании.

1. Для $n=15$ и $p=0{,}6$ найдите (а) $P(X \geqslant 7)$, (б) $P(X=7)$.

2. Для $n=25$ и $p=0{,}8$ найдите (а) $P(X>19)$, (б) $P(X=19)$.

3. Для $n=20$ и $p=0{,}3$ найдите (а) $P(X \geqslant 6)$, (б) $P(X=6)$.

4. Для $n=25$ и $p=0{,}65$ найдите (а) $P(X \geqslant 11)$, (б) $P(X=11)$, (в) P(11 или более неудач).

5. Для $n=22$ найдите такое значение p, при котором $P(X \geqslant 8)=0{,}4$.

6. Для $n=20$ найдите такое значение p, при котором $P(X \geqslant 7)=0{,}5$.

7. Для $n=15$ найдите такое значение p, при котором $P(X \geqslant 10)=0{,}8$.

8. Дано, что $n=12$ и $p=0{,}8$. Найдите (а) $P(X=8)$, (б) $P(X \leqslant 8)$, (в) $P(X \geqslant 8)$.

9. Для $n=6$ и $p=0{,}2$ найдите величину $P(X=2)$.

10. При одном выстреле вероятность того, что Джон попадет в мишень, равна 0,95, а что он попадает в яблоко мишени равна 0,20. Джон делает 25 выстрелов. Какова вероятность того, что он попадет в мишень не менее 20 раз? Что он попадет в яблоко мишени ровно 5 раз? Что он попадет в яблоко мишени не менее 5 раз?

11. (Продолжение.) Предположим, что Джон делает только 22 выстрела. Какова вероятность того, что он попадает в яблоко мишени ровно 10 раз? Меньше 10 раз? Больше 10 раз? Проверьте, что эти три вероятности дают в сумме 1.

12. Игральная кость бросается 12 раз. Какова вероятность того, что 1 очко выпадет более четырех раз?

13. Пусть вероятность получения не менее семи успехов в 25 испытаниях некоторого биномиального эксперимента равна 0,5. Какова вероятность успеха в каждом испытании? (Ответ дать с точностью до двух знаков после запятой.)

14. Из кошелька на стол высыпали 25 монет. Какова вероятность того, что число монет, лежащих гербами вверх, заключено между 8 и 17, включая и эти два крайних значения?

15. 40% избирателей большого города голосуют за кандидата A. Случайным образом отбираются 25 избирателей. Какова вероятность того, что большинство из них голосуют за A?

16. Перепись населения в городах США с населением в 25 000 человек показывает, что 75% всех семей имеют холодильники. Для социально-экономических исследований случайным образом отбираются 20 семей из числа проживающих в таких городах. Какова приблизительная вероятность того, что не более 10 из этих семей имеют холодильники? (Вычисления по биномиальному закону приводят здесь к приближенному ответу, поскольку мы игнорируем тот факт, что выборка 20 семей производится без возвращения. Однако, так как размер выборки весьма мал по сравнению с размером всей совокупности семей, полученное приближение будет очень близким к истинному значению искомой вероятности.)

17. Какова вероятность получения ровно 8 успехов в биномиальном эксперименте, состоящем из 11 испытаний, если вероятность успеха в каждом испытании равна 0,8?

18. Используйте табл. III для решения упр. 5 из § 2.

19. Пусть $n=25$. Используйте табл. III для нахождения двух значений p, для которых

$$P(X=8)=0{,}075.$$

20. Эксперимент состоит в выборке с возвращением пяти шаров из урны, содержащей равное количество черных и белых шаров. Этот эксперимент повторяется 819 раз. При каждом вы-

полнении эксперимента отмечается число черных шаров в выборке. В результате получается следующая таблица:

Число черных шаров в выборке	Наблюдаемая частота
0	30
1	125
2	277
3	224
4	136
5	27
	Всего: 819

Найдите соответствующие теоретические частоты в биномиальном распределении и сравните их с наблюдаемыми значениями.

21. Предположим, что вы являетесь членом совета вашей школы. Вы знаете, что среди школьников вашей школы 5% левшей. В школьном кинозале стоят 20 парт, причем каждая оборудована собственным источником освещения, расположенным с левой стороны парты, что неудобно для школьника-левши. Для посещения кинозала случайным образом отбираются 20 школьников вашей школы, и они рассаживаются по одному на каждую парту.

(а) Какова вероятность того, что в кинозале окажется хотя бы один левша?

(б) Под вашим влиянием школьный совет заменил одну парту в кинозале такой, у которой источник освещения расположен справа. Какова вероятность того, что наугад выбранные 20 школьников смогут рассесться в кинозале так, чтобы каждому было удобно писать, т. е. среди этих 20 человек окажется ровно один левша, который и сядет на новую парту?

(в) Насколько в этом случае увеличилась вероятность того, что каждому школьнику в кинозале удобно писать?

(г) Если в кинозале поставить 21 парту, причем одна из них будет с правосторонним освещением, то какова вероятность того, что 20 наугад выбранных школьников смогут сесть за эти парты так, чтобы каждому было удобно писать?

22. (а) Сравните $b(1;\ 4;\ 0{,}30)$ с $b(3;\ 4;\ 0{,}70)$. (б) Сравните $b(6;\ 18;\ 0{,}40)$ с $b(12;\ 18;\ 0{,}60)$.

23. (Продолжение.) Докажите, что если $q=1-p$, то $b(r;\ n;\ p)=b(n-r;\ n;\ q)$. Из этой формулы следует, что в таблицах, подобных табл. III-А, нет необходимости приводить величины вероятностей для значений p, превышающих 0,5.

24. (а) Используйте табл. III-Б при $n=23$ для сравнения $P(X\geqslant 11)$ при $p=0{,}6$ с $1-P(X\geqslant 13)$ при $p=0{,}4$. (б) Используйте табл. III-Б при $n=5$ для сравнения $P(X\geqslant 2)$ при $p=0{,}2$ с $1-P(X\geqslant 4)$ при $p=0{,}8$.

25. (Продолжение.) Докажите, что

$$\sum_{x=r}^{n} b(x;\ n;\ p) = 1 - \sum_{x=n-r+1}^{n} b(x;\ n;\ q).$$

Из этого следует, что в совокупные таблицы биномиальных распределений не обязательно включать значения p, превосходящие 0,5. Однако для удобства такие значения обычно включаются.

26. Предположим, что из обычной колоды карт в 52 карты производится выборка пяти карт с возвращением, причем после возвращения каждой карты колода тщательно тасуется. Какова таблица вероятностей для числа красных карт в выборке? Сравните полученные результаты с результатами, приведенными в таблице, которая следует за выражением (4) в § 5 гл. V для выборки без возвращения.

§ 5. Свойства биномиального распределения

В этом параграфе мы изучим форму графиков биномиальных распределений, построенных следующим образом: (1) для фиксированного числа испытаний n, но различных значений p; (2) для фиксированного значения p, но различных значений n. Мы особенно обратим внимание на изменение формы этих графиков при возрастании n. Такое изучение поможет нам лучше узнать семейство биномиальных распределений, а также ознакомиться со свойствами, присущими другим наборам вероятностных распределений, поскольку эти свойства имеют много общего со свойствами биномиального распределения.

Некоторые свойства будут только сформулированы и проиллюстрированы без доказательства. Числовые данные, которыми мы воспользуемся для иллюстрации различных свойств биномиального распределения, взяты из табл. III. На рисунках, которые мы будем рассматривать, величина ординаты $b(x;\ n;\ p)$ сокращенно обозначена через $b(x)$.

(1) *Фиксированное n, меняющееся p.* При изменении p меняется форма графика биномиального распределения. Это показано на рис. 22 (a — u) для $n = 5$. Когда p близко к 0 или 1 (рис. 22a, $б$), то основные по значению вероятности располагаются вблизи $x = 0$

и $x=n$. Абсцисса, соответствующая наибольшей ординате, называется *модой*. Когда же p принимает какие-то промежуточные значения, то $b(x)$ возрастает вместе с возрастанием x до достижения наибольшего значения $b(x)$ (рис. 22*в*, *г*, *ж*, *з*), а затем начинает убывать, за исключением, быть может, следующей после моды точки, где ее значение может также равняться наибольшему (рис. 22*е*, *и*). Таким образом, если никакие две соседние ординаты не совпадают по величине, то на графике есть только одна наибольшая ордината, а остальные ординаты постоянно убывают при движении в ту или другую сторону от моды. Доказательство этого факта увело бы нас в сторону от обсуждения свойств биномиального распределения; однако для читателя-энтузиаста оно может оказаться хорошим упражнением в обращении с неравенствами.

Если $p=\frac{1}{2}$ (рис. 22, *и*), то график распределения симметричен относительно $n/2$; при этом если n нечетно, то на графике две средние ординаты совпадают (рис. 22, *и*); если же n четно, то наибольшей является ордината, соответствующая среднему значению x (рис. 23). В случае $p \neq \frac{1}{2}$ график распределения не является симметричным.

На рис. 22 и 23 точкой опоры ▲ под горизонтальной осью показана точка, абсцисса которой равна математическому ожиданию для каждого распределения. Мы можем заметить, что расстояние между средним значением и модой для всех этих распределений не превосходит 1. Оказывается, что для любого биномиального распределения расстояние между средним значением и модой не больше 1. Более того, если np — целое число, то среднее значение и мода совпадают. Эти утверждения мы примем без доказательства.

2) *Фиксированное p, возрастающее n.* При возрастании n последовательные биномиальные распределения (а) «уходят вправо», (б) выравниваются, (в) «расходятся». Обсудим по порядку эти свойства.

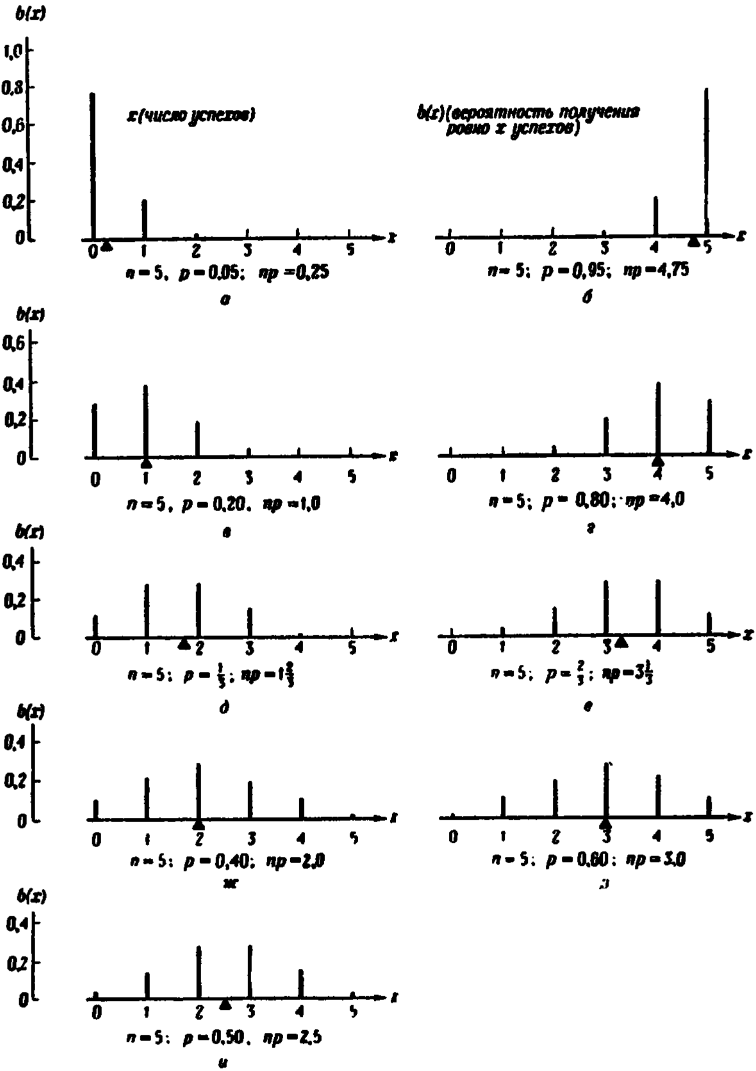


Рис. 22. Изменение формы графика биномиального распределения для $n = 5$ при изменении p.

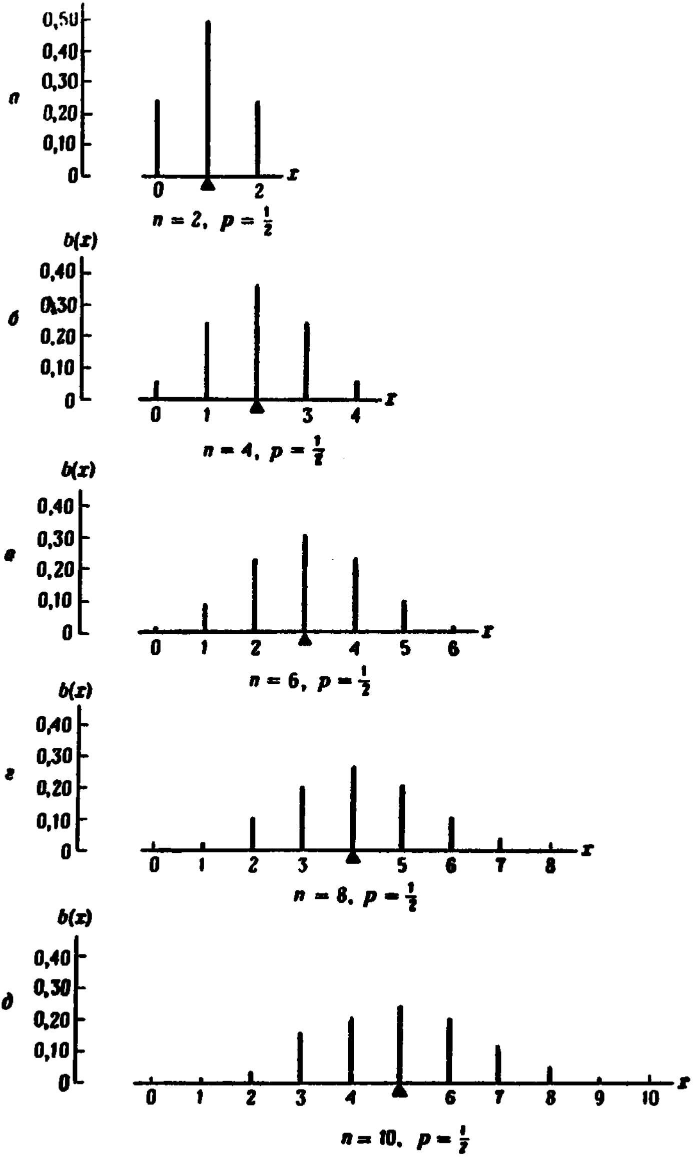


Рис. 23. Уход вправо, выравнивание и расходимость при возрастании n.

(а) *«Уход вправо»*. При возрастании n на 1 среднее значение μ передвигается вправо на величину p, поскольку $\mu=np$. Мода и другие достаточно большие ординаты расположены в сравнительной близости от среднего значения, и основные по значению вероятности нашего распределения «уходят вправо» вместе со средним значением при возрастании n.

(б) *Выравнивание*. Рассмотрим графики распределений, представленные на рис. 23. Из этих графиков видно, что при возрастании n ординаты вероятностей распределения выравниваются. Мы можем изучить скорость этого выравнивания. Можно доказать, что для больших значений n величина центральных ординат обратно пропорциональна $\sqrt{n}$. Проиллюстрируем этот факт графически. Для этого сначала напомним, что $y = mx$ есть уравнение прямой линии, проходящей через начало координат, угловой коэффициент которой (тангенс угла наклона, образованного прямой, с положительным направлением оси абсцисс) равен m. Если m положительно, то y растет вместе с x. При $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$ мы говорим, что y изменяется обратно пропорционально величине $\sqrt{n}$. Можно также сказать, что y прямо пропорционально $1/\sqrt{n}$; нанеся на график точки с абсциссами $1/\sqrt{n}$ и соответствующими ординатами, мы получим прямую линию, проходящую через начало координат. Таким образом, мы утверждаем существование линейной зависимости между величиной вероятности моды и $1/\sqrt{n}$, рассматриваемой в качестве независимой переменной. Другими словами, для того чтобы показать, что величина вероятности моды обратно пропорциональна $\sqrt{n}$, достаточно показать, что y прямо пропорционально $1/\sqrt{n}$. Мы используем это соображение при обсуждении рис. 24.

Пропорциональность между модой и $1/\sqrt{n}$. На рис. 24 показано, как убывает средняя ордината симметричного биномиального распределения $\left(p=\frac{1}{2}\right)$ при возрастании n. Аналогичное отношение между этими величинами справедливо и для нечетного n, но мы остановимся на n четном. В этом случае мода равна целому числу $n/2$. Возьмем в качестве оси абсцисс ось $1/\sqrt{n}$, а в качестве оси ординат ось P(мода). Из

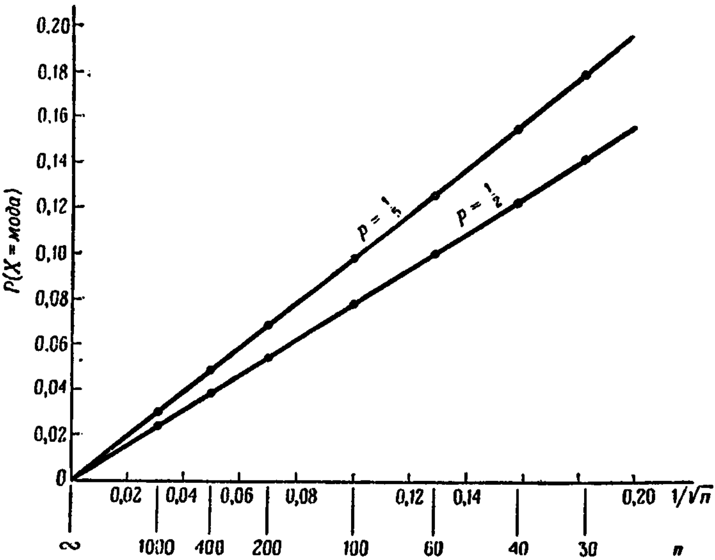


Рис. 24. График зависимости P (X = мода) от $1/\sqrt{n}$. Видно, что для $p = 1/2$ и $p = 1/5$ эта зависимость почти линейна.

нашего рисунка видно, что при возрастании n вероятность моды убывает, причем точки графика зависимости между вероятностью моды и $1/\sqrt{n}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат. (Значения n нанесены ниже оси абсцисс.) Точки этой прямой для $p = \frac{1}{2}$ и четного n имеют координаты $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, b\left(\frac{n}{2}\right)\right)$. Для проверки можно использовать табл. III-A. Пусть, например, $n = 24$; тогда $b(12) \approx 0{,}161$ и $1/\sqrt{24} \approx 0{,}204$.

Аналогичным образом отношение между вероятностью моды и $1/\sqrt{n}$ приблизительно изображается прямой, проходящей через начало координат, и для несимметричного биномиального распределения с $p=1/5$. (Так как мода в этом случае равна $n/5$, то мы выбрали лишь значения n, делящиеся на 5.) Соответствующие точки на рис. 24 выделены на прямой с $p=\frac{1}{5}$. Снова можно использовать для проверки табл. III-А. Возьмем, например, $n = 25$. Тогда $1/\sqrt{n} = 0{,}20$ и $b(5)\approx 0{,}196$. Итак, эти графики иллюстрируют следующий факт: *вероятность моды и соседних с ней значений X убывает обратно пропорционально $\sqrt{n}$.*

(в) *Расходимость.* Напомним, что сумма всех ординат должна равняться 1. Естественно, что если при возрастании n распределения выравниваются, а общая вероятность остается постоянной, то последовательные распределения должны расходиться, т. е. становиться все «шире».

Для того чтобы найти скорость расходимости, нам необходимо знать дисперсию и стандартное отклонение биномиального распределения. Чтобы их получить, примем без доказательства следующую теорему:

Дисперсия суммы n независимых случайных величин равна сумме их дисперсий *).

При помощи этой теоремы легко находится дисперсия биномиального распределения. Так, если случайная величина X означает число успехов в биномиальном эксперименте, состоящем из n испытаний, то

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n,$$

где X_i означает случайную величину — число успехов в i-м испытании. Случайные величины X_i принимают значения 0 или 1 с вероятностями $1-p$ и p соответственно:

$P(X_i = x)$	$1-p$	p
x	0	1

*) Ср., например, Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчин [1], § 25.

Поскольку среднее значение X_i равно p (§ 3), мы получаем

$$\begin{aligned} D(X_i) &= E(X_i^2) - \mu^2 = \\ &= 0^2(1-p) + 1^2(p) - p^2 = \\ &= p - p^2 = p(1-p) = \\ &= pq. \end{aligned}$$

А так как величины X_i независимы, то

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= D\left(\sum X_i\right) = \sum D(X_i) = \\ &= \underbrace{pq + pq + \ldots + pq}_{n \text{ членов}} = npq. \end{aligned}$$

Таким образом, стандартное отклонение биномиального распределения равно

$$\sigma_X = \sqrt{npq}.$$

Поскольку стандартное отклонение является мерой разброса значений случайной величины X и его значение при постоянном p пропорционально $\sqrt{n}$, мы заключаем, что при возрастании n биномиальное распределение имеет разброс или расходимость, пропорциональные $\sqrt{n}$.

Все биномиальное распределение расположено в интервале от 0 до n, и поэтому величина этого интервала пропорциональна n. Однако из теоремы Чебышева мы знаем, что основные по значению вероятности расположены вблизи среднего значения на расстоянии, не превышающем нескольких стандартных отклонений. Таким образом, стандартное отклонение является мерой разброса «основной» вероятности распределения: с вероятностью 75% или 99% исход расположен от среднего значения на расстоянии, не превышающем соответственно двух или трех стандартных отклонений.

Итак, при возрастании n (а) последовательные биномиальные распределения сдвигаются вправо со скоростью, пропорциональной n; (б) наибольшие ординаты убывают со скоростью, пропорциональной $1/\sqrt{n}$; (в) распределения «расходятся»: их стандартные отклонения растут пропорционально $\sqrt{n}$.

Упражнения к § 5

Все эти упражнения относятся к биномиальным распределениям.

1. Найдите среднее значение и стандартное отклонение биномиального распределения с (а) $n=4$, $p=1/2$; (б) $n=10, p=\frac{1}{5}$.

2. Пусть $\mu=45$ и $\sigma=\sqrt{npq}=6$. Найдите n и p.

3. Пусть $\mu=10$ и $\sigma=\sqrt{npq}=3$. Найдите n и p.

4. Докажите, что если $p=\frac{1}{2}$ и $n=2m-1$, то $b(m-1)=$ $=b(m)$.

5. Докажите, что если $p=\frac{1}{2}$ и $n=2m$, то $b(m)$ больше $b(m-1)$ и $b(m+1)$.

6. (Продолжение.) Пусть $p=\frac{1}{2}$, $n=2m$ и $m\geqslant 2$. Докажите, что $b(r-1)\leqslant b(r)$ для $1\leqslant r\leqslant m$.

7. Пусть $p=\frac{1}{3}$. Насколько сдвигается вправо среднее значение биномиального распределения при возрастании n на 1?

8. Постройте график, аналогичный графикам рис. 24, для $p=0{,}4$, используя табл. III. Для удобства нанесения точек выбирайте значения n, делящиеся на 5. Не забудьте разметить оси. Предположите, что линия, проходящая через ваши точки, также проходит через начало координат.

9. Желательно показать, что точки, аналогичные точкам на рис. 24, не обязательно лежат на прямой, т. е. что сформулированное свойство пропорциональности выполняется лишь приблизительно. Для этого удобно выбрать значения n, являющиеся точными квадратами, например, 1, 9, 25. Если $p=1/2$, то наибольшие ординаты равны $b\left(0;\,1;\,\frac{1}{2}\right)$, $b\left(4;\,9;\,\frac{1}{2}\right)$, $b\left(12;\,25;\,\frac{1}{2}\right)$ в точках $1/\sqrt{1}$, $1/\sqrt{9}$, $1/\sqrt{25}$ соответственно. Покажите, что угловые коэффициенты хорд, соединяющих эти точки, не равны между собой. Используйте табл. IV.

10. Пусть $n=2$. Найдите значения p, при которых три точки с ординатами $b(x;\,2;\,p)$ лежат на одной прямой.

11. Пусть $n=4$ и $p=0{,}2$. Используйте табл. III для построения графика функции вероятностей, подобного рис. 22. Укажите точно среднее значение.

12. Пусть $n=25$ и $p=1/2$. Используйте табл. III для нахождения вероятностей, расположенных от μ на расстоянии, не превышающем (а) σ, (б) 2σ, (в) 3σ. Сравните эти результаты с аналогичными результатами, получающимися при использовании теоремы Чебышева и эмпирического правила, представленного в табл. 47 § 7 гл. V.

13. Предположим, что рис. 24 правилен и что соответствующая кривая для любого p проходит через начало координат. Докажите, что если для фиксированного p (не равного 0 или 1) n стремится к бесконечности, то $b(x;\ n;\ p)$ стремится к 0 и, следовательно, предел последовательности биномиальных распределений равен 0. (Каверзный вопрос: сумма всех вероятностей должна равняться 1; куда она девается при n, стремящемся к бесконечности?)

*14. Пусть X есть случайная величина с $P(X=x)=b(x;n;p)$. Докажите следующим образом, что $\sigma_X^2=npq$:

(а) $\sigma_X^2=E(X^2)-[E(X)]^2$ (формула (6) § 4 гл. V).

(б) $E(X)=np$ (упражнение 8 § 3 гл. VI).

(в) по определению $E(X^2)=\sum\limits_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$.

Покажите, что $E(X^2)$ можно также представить в виде

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{n} npx\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}q^{(n-1)-(x-1)}.$$

Далее, поскольку $x=(x-1)+1$, мы можем записать

$$E(X^2)=np\sum_{x=1}^{n}(x-1)\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}q^{(n-1)-(x-1)}+$$

$$+np\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}q^{(n-1)-(x-1)}=$$

$$=np(n-1)p(q+p)^{n-2}+np\cdot(q+p)^{n-1}.$$

Так как $(q+p)=1$, то $E(X^2)=(n^2-n)p^2+np$. Следовательно,

$$\sigma_X^2=[(n^2-n)p^2+np]-(np)^2=$$

$$=n(p-p^2)=npq.$$

ГЛАВА VII

НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Оценка вероятностей и проверка гипотез

Наши знания, полученные при изучении общей теории вероятностей и при детальном исследовании семейства биномиальных распределений, мы применим в этой главе к нескольким проблемам статистики. Мы остановимся на двух связанных между собой проблемах — проблеме *оценки* и проблеме *проверки гипотез.* Каждая из этих проблем сначала исследуется без использования предварительной информации, как это обычно делают математики, принадлежащие к объективистскому направлению, а затем с использованием предварительной информации, что присуще специалистам персоналистической школы.

Начиная с экспериментов в гл. I, мы использовали экспериментальные средние для оценки среднего значения в совокупности и экспериментальные частоты для оценки величины p — биномиальной вероятности успеха. Вам теперь уже оценки такого рода кажутся знакомыми и естественными; однако мы пока не знаем степени их надежности и того, какие погрешности они дают. Если профессиональный баскетболист забрасывает в корзину со штрафных бросков 65 из 100 мячей, то мы оцениваем величину вероятности p того, что он забросит мяч в корзину со штрафного броска, отношением $\frac{65}{100}=0{,}65$. Но, предполагая, что исходы последовательных бросков независимы (не слишком надежное предположение в этом примере), насколько мы можем быть уверены в том, что $0{,}6 \leqslant p \leqslant 0{,}7$? Метод *доверительных* интервалов, изложенный в этой главе, дает нам один способ получения вероятностных утверждений, связанных с *двухсторонними оценками* подобного рода.

Предположим, что обширные статистические данные о количестве мячей, заброшенных неким баскетболистом со штрафных бросков, говорят о том, что среднее число успешных бросков есть 0,54. Пусть далее в некоторой новой серии бросков среднее число успешных бросков оказалось равным 0,65. Существуют ли достаточно веские причины для утверждения о том, что вероятность попадания в корзину изменилась? Задачи такого типа возникают при *статистической проверке гипотез*, принципы проведения которой мы также будем обсуждать в этой главе. Аналогичная проблема возникает в том случае, когда предлагается новый курс лечения от головной боли. Действительно ли новый курс лечения помогает при головной боли лучше, чем ранее применявшиеся средства? Можно ли с уверенностью утверждать, что опрыскивание зараженных деревьев определенными ядохимикатами уменьшает количество больных деревьев по сравнению с тем, когда это опрыскивание не производится?

При наличии некоторой предварительной информации как теорию оценок вероятностей исходов экспериментов, так и теорию проверки статистических гипотез можно расширить за счет использования теоремы Байеса. В § 3 и 5 мы обсудим примеры применения этой теоремы, ограничиваясь случаем дискретных распределений вероятностей.

§ 2. Оценка биномиальной вероятности p успеха

Оценка p. Для ознакомления с обозначениями напомним, как мы получали числовую оценку величины p — вероятности успеха в одном испытании некоторого биномиального эксперимента. Мы проводили n испытаний, подсчитывали в них число успехов x и для нахождения оценки p вычисляли отношение $\frac{x}{n} = \bar{p}$.

Если команда A выиграла у команды B 4 раза из 20, то мы оцениваем вероятность выигрыша команды A у команды B отношением $\frac{4}{20}=0{,}2$. Теперь мы хотим обсудить свойства этой оценки, обращая особое внимание на ее изменчивость. Чему равны ее среднее значение и ее стандартное отклонение? Ответы на эти вопросы легко вывести из результатов гл. VI.

Обычной оценкой вероятности p является число

$$\bar{p}=\frac{X}{n},$$

где X есть число успехов в испытаниях. Так как X — случайная величина, то случайной величиной является также и $\bar{p}$. Таким образом, значения $\bar{p}$ могут меняться от одного биномиального эксперимента из n испытаний к другому. Возможными значениями X являются $x=0, 1, \ldots, n$; $x/n=0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1$.

Среднее значение $\bar{p}$. Каково среднее значение $\bar{p}$? Поскольку X есть случайная величина, обозначающая число успехов, $E(X)=np$. Для получения среднего значения случайной величины $\bar{p}=\frac{X}{n}$ по определению $\bar{p}$ имеем

$$E(\bar{p})=E\left(\frac{X}{n}\right). \tag{1}$$

Напомним, что $E(cX)=cE(X)$ при любом числе c. В частности из равенства (1) следует

$$E(\bar{p})=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}(np)=p. \tag{2}$$

Итак, «в среднем» мы получаем истинное значение p, чего, конечно, большинство из нас и ожидало. Это свойство оценки $\bar{p}$ вероятности p имеет свое название: мы говорим, что $\bar{p}$ является беспристрастной или *несмещенной оценкой* для p. Отсутствие систематического отклонения от величины p подкрепляет нашу идею об использовании числа $\bar{p}$ в качестве оценки p.

Точность оценки. То, что средняя величина оценки совпадает с p, еще не является достаточным основанием для ее использования. Нам необходимо еще во всяком случае быть уверенными в том, что $\bar{p}$ достаточно часто оказывается близким к p. Для иллюстрации этого рассмотрим исход биномиального эксперимента, состоящего из 100 испытаний. Давайте нарочно отбросим результаты последних 99 испытаний и оценим вероятность успеха числом 1, если исходом первого испытания являлся успех, и числом 0 в противном случае. Этот метод оценки также беспристрастен, поскольку он сводится к оценке B/n, где $n=1$, а B — число успехов в *первом* испытании, и для этой оценки мы снова имеем

$$E\left(\frac{B}{n}\right)=\frac{1}{n}E(B)=p.$$

Но несмотря на это, такая оценка вряд ли может нам особенно понравиться. Мы охотно согласились бы использовать вместо нее оценки $X/99$ или $X/101$, где X есть число успехов в 100 испытаниях, несмотря на то что эти последние оценки уже не являются несмещенными, поскольку

$$E\left(\frac{X}{99}\right)=\frac{100}{99}p, \quad E\left(\frac{X}{101}\right)=\frac{100}{101}p.$$

Ясно, что нам понадобится какое-нибудь представление о точности оценки, отсутствующее в нашем обсуждении. Мы хотим из нескольких оценок предпочесть ту, которая в каком-либо смысле ближе к истинному значению p.

Введенное подобным образом понятие точности является, разумеется, достаточно неопределенным для того, чтобы его можно было использовать. Однако, исходя из биномиальных таблиц, мы сможем выяснить, как часто $\bar{p}$ удалено от истинного значения p не более чем на данное расстояние.

Распределение $\bar{p}$ для небольших n. Для данного значения p при $n\leqslant 25$ мы можем получить таблицу вероятностей случайной величины $\bar{p}$, воспользовавшись табл. III. Единственное отличие от аналогичной работы в гл. VI заключается в том, что по горизонтальной оси мы теперь откладываем не значения x, а величины $\bar{p}$. Рис. 25 изображает график вероятностей случайной величины $\bar{p}$ для $n=10$, $p=0{,}2$. Отвечающие значениям $x=0, 1, \ldots, 10$ ординаты найдены из табл. III. Но вместо того, чтобы сопоставить ординату $b(x;\ 10;\ 0{,}2)$ в точке с абсциссой x, мы сопоставляем ее точке x/n или в нашем случае $x/10$. Основные значения вероятностей в биномиальном распределении с $n=10$, $p=0{,}2$ заключены между 0 и $1/2\left(=\frac{5}{10}\right)$ включительно. Таким образом, практически мы можем

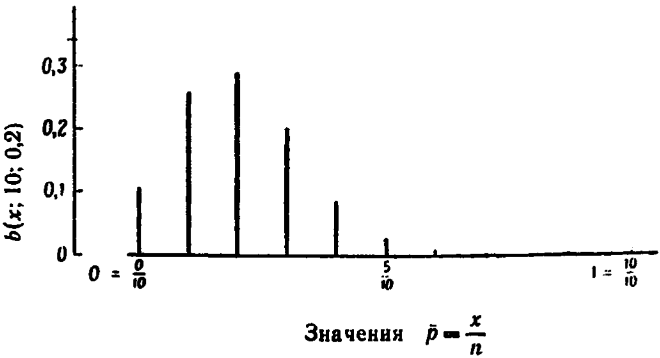


Рис. 25. **Функция вероятностей величины** $\bar{p}$ при $n=10$, $p=0{,}2$.

быть уверены в том, что при $n=10$, $p=0{,}2$ различие между p и $\bar{p}$ не превышает 0,3. Далее, из табл. III-А или III-Б мы можем вычислить для $n=10$, $p=0{,}2$ вероятности

$$P(p-0{,}1\leqslant\bar{p}\leqslant p+0{,}1)\approx 0{,}77,$$
$$P(p-0{,}2\leqslant\bar{p}\leqslant p+0{,}2)\approx 0{,}97.$$

Первая из них есть вероятность того, что разница между $\bar{p}$ и p не превосходит 0,1; вторая — что различие между $\bar{p}$ и p не превосходит 0,2. Для обозначения отклонения $\bar{p}$ от p можно также использовать символ абсолютной величины $|p-\bar{p}|$; при этом мы сможем написать

$$P(|\bar{p}-p|\leqslant 0{,}1)\approx 0{,}77,$$

и

$$P(|\bar{p}-p|\leqslant 0{,}2)\approx 0{,}97.$$

В этом примере значениями $\bar{p}$ являются целые числа десятых. Следовательно, вероятность того, что различие между $\bar{p}$ и $p=0{,}2$ не превосходит 0,1, совпадает с вероятностью того, что величина $|\bar{p}-p|$ не превосходит 0,12, 0,15 или 0,1999. Когда мы говорим о том, что $\bar{p}$ отличается от p не более чем на 0,1, мы выбираем наименьшее значение расстояния между $\bar{p}$ и p, для которого соответствующая вероятность равна 0,77. Если же мы говорим, что $\bar{p}$ отличается от p не более чем на 0,199..., то мы выбираем наибольшее значение расстояния между $\bar{p}$ и p, которому соответствует вероятность 0,77. Возможно, что для ясности картины нам следовало бы в данном случае принять за типовое расстояние между $\bar{p}$ и p величину 0,15.

При помощи аналогичных вычислений для различных значений p мы сможем построить график вероятности того, что расстояние между $\bar{p}$ и p не превосходит, скажем, 0,15. На рис. 26 изображен подобный график, отвечающий значению $n=10$. Для его построения были использованы более обширные биномиальные таблицы, нежели табл. III. Заметим, что для $p=0{,}2$ $P(|\bar{p}-p|\leqslant 0{,}15)\approx 0{,}77$, как и было вычислено выше.

Изображенный на рис. 26 график доставляет хороший пример разрывной кривой. Значению вероятности $P(\bar{p}-p|\leqslant 0{,}15)$ для $p=0{,}05$ отвечает на графике жирная точка в верхнем левом углу. Значению той же вероятности для $p=0{,}15$ отвечает изолированная жирная точка на конце пунктирной вертикальной прямой. Поясним на примере причину возникновения разрывов в точках 0,05, 0,15, 0,25 и т. д. Если, скажем, расстояние между $\bar{p}$ и $p=0{,}14$ не превосходит 0,15, то $\bar{p}$ должно принадлежать интервалу, заключенному между $p-0{,}15=-0{,}01$ и $p+0{,}15=0{,}29$, и единственные возможные значения $\bar{p}$ в этом интервале суть $\bar{p}=0{,}0$; 0,1 и 0,2, поскольку величина $\bar{p}$ при $n=10$ содержит целое число десятых. Аналогично при $p=0{,}16$ интервал возможных значений $\bar{p}$ ограничен числами $p-0{,}15=0{,}01$ и $p+0{,}15=0{,}31$, и единственные возможные значения $\bar{p}$ в этом интервале суть $\bar{p}=0{,}1$; 0,2 и 0,3. Несмотря на то что величины $p=0{,}14$ и $p=0{,}16$ близки друг к другу, им соответствуют различные наборы возможных значений $\bar{p}$, и поэтому график рассматриваемой функции в интервале между $p=0{,}14$ и $p=0{,}16$ должен совершить скачок. А вот точке $p=0{,}15$ отвечают следующие допустимые значения $\bar{p}=0{,}0$; $0{,}1$; $0{,}2$ и $0{,}3$ — это суть значения $\bar{p}$, расположенные в интервале от $p-0{,}15$ до $p+0{,}15$; по-

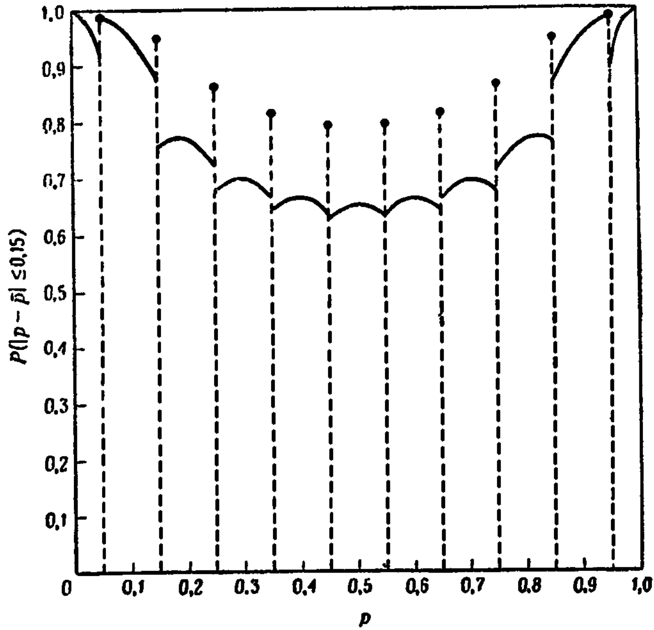


Рис. 26. Вероятность выполнения $|p-\bar{p}|\leqslant 0{,}15$ для $0\leqslant p\leqslant 1$; $n=10$.

скольку здесь мы имеем четыре возможных значения $\bar{p}$ вместо трех, которые мы имели в близких к $p=0{,}15$ точках, то значение рассматриваемой функции при $p=0{,}15$ будет отличаться от расположенных близко значений, что и иллюстрирует на графике жирная точка над кривой, отвечающая абсциссе $p=0{,}15$. Этот график также делает очевидным то, что иногда приходится использовать куда более подробную таблицу биномиальных вероятностей (таблицу с гораздо более мелким шагом по p), чем наша табл. III.

Несмотря на то что рис. 26 кажется довольно сложным, он позволяет сделать один очень простой вывод. При $n=10$ вероятность того, что расстояние между $\bar{p}$ и p не превосходит 0,15, всегда не меньше 0,64. Мы также видим, что когда p близко к 0 или 1, то вероятность того, что $\bar{p}$ попадет в интервал с границами $p \pm 0{,}15$, будет большей, чем та же вероятность при p, близком к 1/2. Аналогичные кривые можно построить для других значений отклонения $|\bar{p}-p|$ и других значений n. К счастью, для больших значений n мы не нуждаемся в утомительной работе по построению таких графиков (почему это так, мы сейчас объясним).

Большие выборки. В том случае, когда мы знаем дисперсию случайной величины $\bar{p}$ (равной X/n), мы можем пойти дальше по пути оценок относительной точности приближения $\bar{p}$ к p. При этом нам будет важно знать, что $\sigma_X^2 = npq$. (См. § 5 главы VI и упражнение 14 в конце этого параграфа.)

В § 4 гл. V мы отмечали, что для любого числа c имеет место равенство $D(cX) = c^2\sigma_X^2$. Найдем теперь дисперсию $\sigma_{\bar{p}}^2$ случайной величины $\bar{p} = X/n$. Очевидно имеем поэтому

$$\sigma_{\bar{p}}^2 = D\left(\frac{X}{n}\right) = D\left(\frac{1}{n}X\right) = \frac{1}{n^2}\sigma_X^2 = \frac{1}{n^2}(npq) = \frac{pq}{n}. \quad (3)$$

Таким образом,

$$\boxed{\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}.} \quad (4)$$

Этот результат внушает нам даже бóльшие надежды, чем те, которые мы имели ранее. Хотя при фиксированном p величина отклонения σ_X возрастает с ростом n, стандартное отклонение $\sigma_{\bar{p}}$ при возрастании n *убывает.*

Напомним, что, как известно из гл. VI, $\bar{p}$ есть *среднее* всех значений n случайных величин, каждая из которых принимает значения 0 или 1, в то время как X представляет собой сумму этих n случайных величин. Полученные результаты для σ_X и $\sigma_{\bar{p}}$ являются следствиями более общего утверждения: *суммы независимых случайных величин обычно меняются больше, нежели случайные величины-слагаемые, в то время как их средние меняются меньше.*

Пример 1. *Биолог изучает* 1000 *плодов, с тем чтобы обнаружить у них наличие или отсутствие некоторого определенного признака. В качестве оценки вероятности p того, что плод обладает этим признаком, он берет величину $\bar{p}$. Насколько могут отличаться значения $\bar{p}$ и p?*

Решение. *Грубое чебышевское приближение.* Применим теорему Чебышева к случайной величине $\bar{p}$ со средним значением p и стандартным отклонением $\sigma_{\bar{p}}=\sqrt{pq/n}$. Из этой теоремы следует, что вероятность того, что расстояние между $\bar{p}$ и p не превосходит $h\sigma_{\bar{p}}$, сама не меньше $1-\frac{1}{h^2}$. Трудность заключается в том, что мы не знаем значения $\sigma_{\bar{p}}$, поскольку нам неизвестно p. Однако мы можем найти такое значение p, при котором величина $\sigma_{\bar{p}}^2=\frac{pq}{n}$ будет больше всего. Поскольку графиком функции $pq=p(1-p)$ служит парабола, симметричная относительно прямой $p=1/2$, наибольшее значение pq достигается при $p=q=1/2$, и оно равно $1/2\cdot 1/2=1/4$ *). Таким образом,

$$\sigma_{\bar{p}}=\sqrt{\frac{pq}{n}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{4n}}=\frac{1}{\sqrt{4n}}.$$

Расстояние между $\bar{p}$ и p мы, как и раньше, будем записывать в виде $|\bar{p}-p|$. Поскольку p есть среднее значение $\bar{p}$, то, положив в теореме Чебышева $h=2$, мы получим, что вероятиость выполннмости неравенства

$$|\bar{p}-p|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4n}}$$

*) Это легко установить и чисто алгебраически: $pq=1/4[(p+q)^2-(p-q)^2]=1/4[1-(p-q)^2]=1/4-1/4(p-q)^2\leqslant 1/4$.

не меньше 0,75. Аналогично, положив $h=3$, мы заключим, что вероятность выполнимости неравенства

$$|\bar{p}-p|\leqslant\frac{3}{\sqrt{4n}}$$

не меньше 0,88 и что вообще вероятность выполнимости следующего общего неравенства

$$|\bar{p}-p|\leqslant\frac{h}{\sqrt{4n}} \tag{5}$$

не меньше $1-1/h^2$.

В нашем примере $n=1000$; положив $h=2$, мы можем утверждать, что вероятность выполнимости неравенства

$$|\bar{p}-p|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4n}}=\frac{1}{\sqrt{1000}}\approx 0{,}032$$

не меньше 0,75. Другими словами, со степенью уверенности, оцениваемой в 75%, мы можем утверждать, что различие между $\bar{p}$ и p не превосходит 0,032.

Решение этого примера иллюстрируют нам следующие две теоремы, касающиеся биномиальных экспериментов. В каждой из этих двух теорем используются следующие обозначения: X есть число успехов, p — вероятность успеха в одном испытании, n — число испытаний и $\bar{p}=X/n$ — оценка величины p.

Теорема 1. Математическое ожидание и дисперсия $\bar{p}$. *Среднее значение и стандартное отклонение случайной величины $\bar{p}$ для биномиального эксперимента задаются формулами*

$$\boxed{\mu_{\bar{p}}=E(\bar{p})=p} \tag{6}$$

и

$$\boxed{\sigma_{\bar{p}}=\sqrt{\frac{pq}{n}}.} \tag{7}$$

Теорема 2. Закон больших чисел. *Для любого положительного d или $n\to\infty$ вероят-*

ность выполнения неравенства

$$|\bar{p}-p| \leqslant d$$

стремится к 1.

Мы можем сформулировать последнюю теорему иначе: для любого положительного d и любой заранее заданной величины $1-\varepsilon$ вероятности выполнения этого неравенства можно подобрать такое достаточно большое n_0, чтобы вероятность выполнимости неравенства $|\bar{p}-p| \leqslant d$ при $n \geqslant n_0$ была не меньше заранее заданного значения

$$P(|\bar{p}-p| \leqslant d) \geqslant 1-\varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0.$$

Доказательство теоремы 2. В силу теоремы Чебышева, из теоремы 1 и того, что $pq \leqslant \frac{1}{4}$, вытекает, что при любом положительном h справедливо неравенство

$$1 \geqslant P\left(|\bar{p}-p| \leqslant \frac{h}{\sqrt{4n}}\right) \geqslant 1-\frac{1}{h^2}. \tag{8}$$

[Собственно следствием теоремы Чебышева (§ 6 гл. V) является лишь второе неравенство в (8), в то время как справедливость первого неравенства гарантируется тем, что любая вероятность не может превосходить 1.] Выберем h так, чтобы расстояние d из теоремы 2 равнялось $h/\sqrt{4n}$:

$$d=\frac{h}{\sqrt{4n}}. \tag{9}$$

Тогда

$$h=d\sqrt{4n}. \tag{10}$$

Заменим теперь в неравенстве (8) величину h на $d\sqrt{4n}$:

$$1 \geqslant P(|\bar{p}-p| \leqslant d) \geqslant 1-\frac{1}{4nd^2}. \tag{11}$$

Фиксируя d и устремляя n к бесконечности, мы заключаем из нашего последнего неравенства (11), что вероятность

$$P(|\bar{p}-p| \leqslant d)$$

также стремится к 1. □

Пример 2. *Для оценки p используется наблюдаемое среднее $\bar{p}$, причем требуется, чтобы вероятность выполнения неравенства $|\bar{p}-p|\leqslant 0{,}05$ была не меньше 0,86. Как велико должно быть n?*

Решение. Используя неравенство (11), т. е. грубое чебышевское приближение, мы получаем

$$d=0{,}05,\quad 1-\frac{1}{4nd^2}=0{,}97.$$

Решая это уравнение относительно n, находим

$$n=\frac{1}{(0{,}03)\cdot(4d^2)}\approx 3333.$$

Замечание. Использование чебышевского приближения приводит к получению завышенных оценок величины n. Поэтому мы и назвали это приближение грубым (его можно было бы также назвать осторожным). Более развитые методы, на которых мы здесь не можем остановиться [1]), дают значительно меньшее значение $n\approx 471$.

Упражнения к § 2

При решении большинства этих упражнений следует использовать таблицы III-А и III-Б.

1. Каковы дополнительные соображения, кроме требования несмещенности, влияющие на выбор метода оценки?

2. Постройте график случайной функции величины $\bar{p}$ при $n=5$, $p=0{,}2$, аналогичный графику рис. 25.

3. Используйте биномиальную табл. III-А для непосредственного вычисления $E(\bar{p})$ при $n=5$, $p=0{,}2$.

4. Дано, что $n=5$, $p=0{,}2$. Найдите $P(|\bar{p}-p|\leqslant 0{,}2)$.

5. Для $n=20$, $p=0{,}01$ постройте таблицу вероятностей случайной величины $\bar{p}$.

6. Используйте табл. III для непосредственного вычисления $E(\bar{p})$ при $n=20$, $p=0{,}01$.

7. Дано, что $n=20$, $p=0{,}01$. Найдите $P(|\bar{p}-p|\leqslant 0{,}1)$.

8. Проверьте величину ординаты графика рис. 26 для значения $p=0{,}7$.

---

1) См. Мостеллер, Рурке и Томас [19], стр. 294.

9. Вычислите величину ординаты точки графика рис. 26 для абсциссы $p=0{,}75$ (воспользуйтесь интерполяцией).

10. Пусть $n=3$. Постройте график для $P(|\bar{p}-p|\leqslant 1/6)$, аналогичный графику рис. 26.

Заполните пустые места следующей таблицы:

	n	p	$\sigma_{\bar{p}}$
11.	4	1/2	
12.	9	0,2	
13.	100		0,05
14.		0,1	0,1
15.		p	p
16.	1000		0,01

17. Найдите наибольшее возможное значение $\sigma_{\bar{p}}$ при $n=4$, 100, 1000.

18. Для $n=5$, $p=0{,}2$ вычислите непосредственно величину $\sigma_{\bar{p}}$, используя табл. III-А.

Найти грубую чебышевскую оценку величины $P(|\bar{p}-p|\leqslant d)$ для:

19. $d=0{,}1$; $n=1000$.

20. $d=0{,}05$; $n=100$.

21. $d=0{,}2$; $n=10$.

22. $d=0{,}01$; $n=400$.

23. Обозначим неизвестное нам число животных в стаде через x. Из этого стада наугад отбирают m животных, которые затем клеймятся и возвращаются в стадо. В следующий раз отбираются n животных, причем r из них оказываются клеймеными. Предложите оценку величины x.

§ 3. Грубый доверительный интервал для p при большом n

В добавление к утверждению о том, что величина $\bar{p}$ является оценкой для p, нам может быть полезным утверждение, касающееся степени неопределенности этой оценки, т. е. величины интервала, в котором лежит p. Одним из способов для этого является указание *доверительных интервалов*. Сущность понятия доверительного интервала состоит в указании некоторых вероятностных оценок для утверждения о том, что истинное значение p лежит внутри некоторого интервала, определяемого на основании результатов эксперимента. Например, при $n = 100$, $x = 40$ и при значении $\bar{p} = 0{,}4$ мы можем утверждать приблизительно с 95%-ной уверенностью, что утверждение

$$0{,}3 \leqslant p \leqslant 0{,}5$$

справедливо. Каждое выполнение эксперимента дает нам возможность высказать некоторое утверждение о том, в каком интервале заключена величина p. Некоторые из этих утверждений окажутся справедливыми, а другие — нет; выражение же «с 95%-ной уверенностью» означает, что при большом количестве утверждений, высказанных на основании проведенных экспериментов, истинными окажутся примерно 95%.

Перед тем как перейти к расчетам, позволяющим указать точные границы интервалов, о которых здесь идет речь, обсудим снова грубое чебышевское приближение. Полагая $h=2$, мы показали, что вероятность выполнения неравенства

$$|\bar{p} - p| \leqslant \frac{2}{\sqrt{4n}} \tag{1}$$

не меньше 0,75. Неравенство (1), если его сформулировать словами, означает, что расстояние между $\bar{p}$ и p не превосходит $2/\sqrt{4n}$. Мы можем переписать это неравенство так:

$$\bar{p} - \frac{2}{\sqrt{4n}} \leqslant p \leqslant \bar{p} + \frac{2}{\sqrt{4n}}. \tag{2}$$

Если n и $\bar{p}$ определены из эксперимента, то мы сразу получаем верхнюю и нижнюю числовые границы для значения p. Они называются *верхней* и *нижней доверительными границами* или *верхней* и *нижней границами доверительного интервала*. Вероятность 0,75, или, что тоже самое, 75%, называется *коэффициентом доверия*. Так, если $\bar{p}=0{,}4$, $n=100$, то коэффициент доверия к утверждению о истинности неравенства

$$0{,}3 \leqslant p \leqslant 0{,}5$$

не меньше 75%.

Между этим результатом (*не меньше* 75%) и результатом, сформулированным в начале параграфа (95%), нет никакого противоречия. Однако мы опять можем отметить, что результаты, полученные с помощью неравенства Чебышева, являются достаточно грубыми или осторожными.

Нетрудно обобщить чебышевский результат для других значений h. Так, мы можем утверждать, что

$$\bar{p}-\frac{4}{\sqrt{4n}}\leqslant p\leqslant \bar{p}+\frac{h}{\sqrt{4n}}, \tag{3}$$

причем коэффициент доверия здесь не меньше $1-\frac{1}{h^2}$.

Пример 1. Баскетбол. *В течение сезона некий баскетболист произвел* 400 *бросков по кольцу,* 120 *из которых оказались успешными. Постройте* 50%*-ный доверительный интервал для величины p вероятности попадания мяча в корзину при бросании его этим баскетболистом. (Предположите независимость бросков.)*

Решение Для получения 50%-ной уверенности в том, что неравенство (3) справедливо, необходимо положить $h=\sqrt{2}$. В этом случае мы имеем

$$0{,}300-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4\,(400)}}\leqslant p\leqslant 0{,}300+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4\,(400)}}$$

или приблизительно

$$0{,}265\leqslant p\leqslant 0{,}335.$$

Комментарий. При помощи сложных алгебраических методов возможно найти границы интервала вероятности, которые бы не были столь грубыми, а при помощи обширных таблиц можно вычислять эти границы не только для больших, но и для малых значений n. Мы не будем описывать такие методы в нашей книге. Однако в конце книги приведена номограмма 1, с помощью которой легко определять доверительные интервалы с 95%-ным коэффициентом доверия.

По горизонтальной оси номограммы отложены значения $\bar{p}$. Вертикальная прямая, отвечающая определенному значению $\bar{p}$, пересекает две кривые, рядом с которыми указаны соответствующие значения n, в двух точках. На вертикальной оси напротив этих точек мы найдем числа, характеризующие верхнюю и нижнюю границы 95%-ного доверительного интервала для величины p при данных $\bar{p}$ и n.

Пример 2. *Используйте номограмму* I *для нахождения* 95%*-ного доверительного интервала в предыдущем примере с баскетболистом.*

Решение. В этом примере $\bar{p}=0{,}3$. Однако на номограмме нет кривых, соответствующих значениям $n=400$. Ближайшими значениями n являются $n=250$ и $n=1000$. Грубо интерполируя, мы оцениваем нижнюю и верхнюю границы доверительного интервала числами 0,26 и 0,35.

Упражнения к § 3

Все упражнения относятся к биномиальному распределению.

1. В некотором большом городе произведена выборка, состоящая из 25 жителей. Оказалось, что 10 из них являются читателями газеты A. (а) Используйте неравенство (3) для нахождения 50%-ного доверительного интервала для вероятности p того, что произвольный житель города читает газету A. (б) Используйте номограмму I для нахождения соответствующего 95%-ного доверительного интервала.

2. Из большой совокупности школьников произведена выборка, состоящая из 20 человек. Оказалось, что для 16 из них способность запоминать изучаемый материал существенно повышается в том случае, когда занятиям предшествует 8-часовой сон. Найдите 75%-ный доверительный интервал для оценки доли в нашей совокупности лиц, способность которых к запоминанию существенно повышается от предшествующего занятиям восьмичасового сна.

3. Случайная выборка 50 семей, проживающих в Кембридже (штат Массачусетс), показала, что у 10 из этих семей годовой доход в 1951 г. превышал 5000 долларов. Постройте 90%-ный доверительный интервал для процента p семей в Кембридже, чей годовой доход в 1951 г. превышал 5000 долларов.

4. В течение дня секретарь директора должна позвонить по телефону 100 различным лицам. С 25 из них ей удалось соединиться с первой попытки. Используйте номограмму I для построения 95%-ного доверительного интервала для доли p числа абонентов, с которыми секретарю директора удается соединиться с первой попытки.

5. В некотором городе родители нескольких пятиклассников обнаружили, что их дети не умеют читать рукописные тексты.

Для проверки этого умения из совокупности всех пятиклассников города была произведена выборка 250 человек. Оказалось, что 225 из них умеют читать рукописные тексты $\left(\bar{p}=\frac{225}{250}=\right.$ $\left.=0{,}90\right)$. Используйте номограмму I для построения 95%-ного доверительного интервала для доли p числа пятиклассников, умеющих читать рукописные тексты.

6. Используйте номограмму I для построения 95%-ного доверительного интервала для отношения p бракованных фарфоровых чашек к общему их числу, если в случайной выборке, состоящей из 25 чашек, не оказалось ни одной бракованной.

7. Используйте неравенство (3) для установления размера выборки (обычно количества биномиальных испытаний), приводящего к получению 95%-ного доверительного интервала, величина которого не превосходит 0,04.

8. Используйте номограмму I для решения упражнения 7 (заметьте, что на номограмме I доверительные интервалы самой большой длины соответствуют значению $\bar{p}=1/2$).

§ 4. Использование теоремы Байеса при наличии предварительной информации

Рассматривая доверительные интервалы, мы получаем некоторое представление о надежности полученной оценки вероятности. В некоторых случаях мы располагаем предварительной информацией, которую можно попытаться сочетать с экспериментальными данными для исправления оценки вероятности p. При этом можно воспользоваться теоремой Байеса (теорема 6 гл. IV). Так как p может быть любым в пределах от 0 до 1, то общее количество возможных значений p бесконечно (p является так называемой «непрерывной» случайной величиной), — а мы не изучали распределения вероятностей в этих случаях. Мы рассматривали распределения вероятностей лишь для таких случайных величин, которые принимают только конечное число значений, т. е. изучали лишь *дискретные* и *конечные* распределения. Следовательно, мы можем предложить здесь лишь приближенные способы оценки p, исходящие из гипотезы о том, что p может принимать только конечное число значений.

Пример 1. *В процессе производства используется аппарат, который проверяет каждую единицу продук-*

ции для обнаружения в ней каких-либо дефектов. Различные партии продукции содержат либо 1%, либо 5%, либо 10% дефектных единиц продукции. В результате проверки большого количества партий продукции была получена следующая таблица распределения частот различных партий в зависимости от процента дефектных изделий в них. Таким образом, 60% всех партий продукции содержат 1% дефектных изделий. 30% всех партий продукции содержат 5% дефектных изделий и 10% всех партий — 10% дефектных изделий.

Таблица 50

Распределение процента дефектных изделий

Относительная частота партий	0,6	0,3	0,1
Процент дефектных изделий	1	5	10

Через некоторое время контролирующий аппарат вышел из строя и очередная партия продукции оказалась непроверенной. Выборка 20 изделий из этой большой партии показала, что в этой выборке нет ни одного дефектного изделия. Что можно сказать относительно величины $100p$ — процента дефектных изделий — в этой партии?

Решение. В этом примере мы рассматриваем это задаваемое таблицей дискретное распределение вероятностей как приближение к априорному распределению вероятностей величины $100p$ — процента дефектных изделий в случайно выбранной партии. Новая партия, из которой производилась выборка, содержит какой-то неизвестный нам процент дефектных изделий, который мы обозначим через $100p_0$. Обладая уже некоторыми предварительными данными (см. табл. 50), мы хотим использовать также и информацию о том, что в выборке 20 изделий вовсе не оказалось дефектных, на основе чего мы найдем апостериорное (или «послеопытное») распределение вероятностей для величины $100p_0$. Применяя теорему Байеса обычным образом, мы выписали в табл. 51 вероятности получения такой выборки для трех возможных типов партий продукции. Вероятности получения 0 дефектных изделий в выборке, состоящей из 20 изделий, получены из биномиальной табл. III-A.

Таблица 51

Типы партий (% дефектных изделий)	Вероятности дефектных среди 20 изделий	Апостериорные вероятности
1	$0{,}6\,(0.99)^{20} \approx 0{,}6\,(0{,}818) = 0{,}4908$	0,804
5	$0{,}3\,(0{,}95)^{20} \approx 0{,}3\,(0{,}358) = 0{,}1074$	0,176
10	$0{,}1\,(0{,}90)^{20} \approx 0{,}1\,(0{,}122) = 0{,}0122$	0,020
	0,6104	1,000

Например, предварительная (априорная) вероятность того, что новая партия содержит 5% дефектных изделий, равна 0,3. Но если новая партия принадлежит этому типу партий, то вероятность отсутствия дефектных изделий в выборке из 20 изделий равна $(0{,}95)^{20} \approx 0{,}358$. Поэтому вероятность того, что новая партия содержит 5% дефектных изделий и что в выборке из 20 изделий число дефектных оказалось равным 0, найдется как произведение вероятностей 0,3 и 0,358; она будет равна

$$0{,}3 \times 0{,}358 = 0{,}1074.$$

Апостериорная вероятность того, что новая партия содержит 5% дефектных изделий, — это условная вероятность того, что эта партия содержит 5% дефектных изделий при условии, что в выборке из нее двадцати изделий не оказалось дефектных. Следовательно, по теореме Байеса эта апостериорная вероятность равна

$$0{,}1074/0{,}6104 \approx 0{,}176$$

(см. табл. 51).

Из этой таблицы апостериорных вероятностей следует, что шансы в пользу того, что новая партия содержит 1% дефектных изделий, равны 4 к 1; шансы в пользу того, что новая партия содержит 5% дефектных изделий, равны приблизительно 1 к 5; наконец, шансы на то, что новая партия содержит 10% дефектных изделий, очень малы. Оценку величины $100p_0$ можно получить, вычислив математическое ожидание μ апостериорного распределения вероятностей. С точностью до двух знаков после запятой мы получаем

$$\mu = 1 \cdot (0{,}80) + 5 \cdot (0{,}18) + 10 \cdot (0{,}02) = 1{,}90.$$

Преимуществом байесовского приближения является то, что получаемые при его помощи вероятности находятся в результате анализа только одной партии продукции, в то время как коэффициент доверия в методе доверительных интервалов требует анализа многих партий. Трудность здесь, однако, состоит в том, что мы нуждаемся в знании априорного распределения вероятностей для p, причем мы должны быть уверены в том, что это распределение вероятностей для p сохраняет силу и для новой партии. Практические проблемы применения априорных распределений обычно изучаются специалистами по теории вероятностей и статистике.

Упражнения к § 4

1. В примере 1 замените априорные относительные частоты партий 0,6; 0,3; 0,1 на 0,7; 0,3 и 0. Найдите апостериорные вероятности и среднее значение μ для апостериорного распределения.

2. В примере 1 замените априорные относительные частоты партий 0,6; 0,3; 0,1 на 0,4; 0,4 и 0,2. Найдите апостериорные вероятности для $100\,p$ и среднее значение μ для апостериорного распределения.

3. Вернитесь к табл. 51 этого параграфа. Пусть при продаже партии производитель получает прибыль в размере 100 долларов, если партия содержит 1% дефектных изделий; если же партия содержит 5% или 10% дефектных изделий, то он теряет на этой партии соответственно 10 или 1000 долларов. Основываясь на апостериорном распределении вероятностей, выясните, стоит ли ему продавать новую партию — другими словами, будет ли математическое ожидание прибыли положительным?

4. В условиях примера 1 замените размер выборки на 25 изделий. Пусть также в этой выборке обнаружено 4 дефектных

изделия. Найдите апостериорное распределение и среднее значение μ для этого распределения. (Строго говоря, вероятность получения такой выборки при данном p равна p^4q^{21}; но поскольку значения $b(4; 25; p)$ уже затабулированы и пропорциональны p^4q^{21}, мы можем использовать эти биномиальные вероятности для вычисления апостериорных вероятностей.)

§ 5. Статистическая проверка биномиальных гипотез

Иногда мы хотим знать, согласуется ли результат выполнения некоторого биномиального эксперимента с допущением о том, что вероятность успеха в этом эксперименте равна заранее заданному числу p_0.

Пример 1. Выборочный контроль качества. *В результате некоторого производственного процесса* $p_0 \approx 0{,}05$ *всех производимых изделий оказываются дефектными. Контроль над процессом осуществляется следующим образом: производится выборка* 25 *изделий; если не менее четырех изделий в выборке оказываются дефектными, то процесс производства останавливается, в противном случае процесс считается нормальным. Насколько приемлем этот критерий «ненормальности» для различных значений истинного процента дефектных изделий* p?

Решение. Пусть случайная величина X означает число дефектных изделий в выборке. Используя табл. III-Б, можно для любого данного процента дефектных изделий p легко вычислить вероятность того, что процесс будет признан нормальным, т. е. $P(X \leqslant 3)$. На рис. 27 представлен график зависимости вероятности $P(X \leqslant 3)$ от различных значений долей p дефектных изделий для $0 \leqslant p \leqslant 0{,}30$. Ордината точки с абсциссой p на графике дает нам вероятность того, что процесс будет признан «нормальным». Такой график называется *оперативной характеристикой проверки*. Если доля эффектных изделий не превышает 5% общего количества изделий, то, как показывает наш график, указанный метод контроля редко приводит к приостановке производственного процесса: вероятность признания процесса «нормальным» в этом случае больше 0,95. С другой стороны, если величина p велика по сравнению с 0,05, например если $p=0,15$, то более чем в половине выборок будут обнаруживаться 4 или более дефектных изделия и наш выборочный контроль скоро обнаружит такое изменение вероятностей. Если же p очень велико, напри-

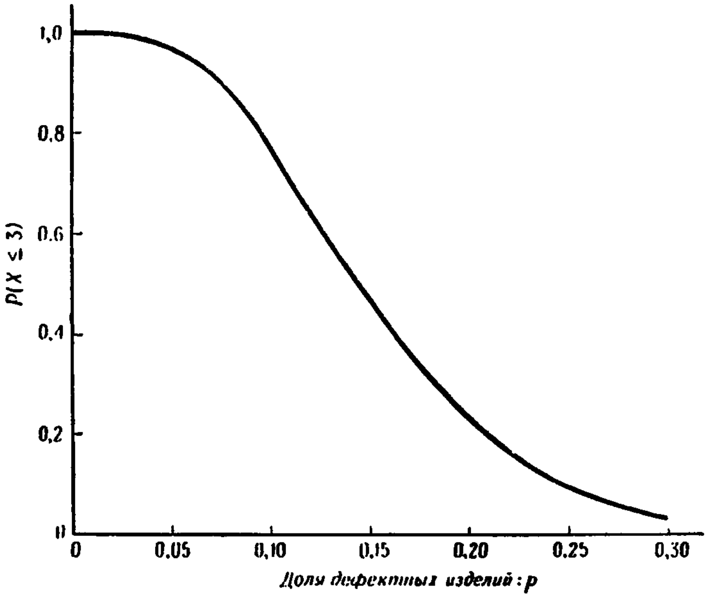


Рис. 27. Оперативная характеристика: $n=25$, контрольное число $=4$.

мер $p=0,25$, то выборочный контроль обнаружит это немедленно, после чего можно будет принять меры, направленные на уменьшение доли дефектных изделий.

Для $p=0,15$ из графика рис. 27 следует, что приблизительно в половине всех случаев то обстоятельство, что реальная доля дефектных изделий оказывается довольно большой, не обнаруживается при помощи такого выборочного контроля. Производитель может пожелать так изменить оперативную характеристику, чтобы при помощи выборочного контроля значительно быстрее и точнее определять изменение процента дефектных изделий с заданного значения 5% до, например, величины 15%. Соответствующее изменение оперативной характеристики связано с увеличением размера выборки n (в нашем примере $n=25$) и изменением контрольного числа r (в нашем примере $r=4$).

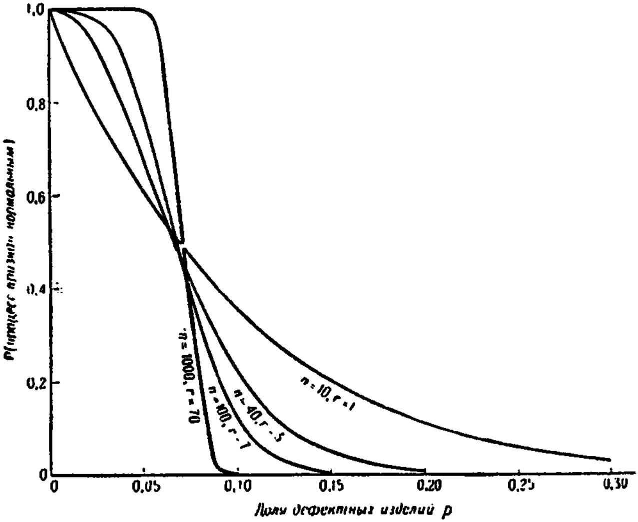


Рис. 28. Оперативные характеристики для нескольких значений параметров выборочного контроля.

На рис. 28 показано множество оперативных характеристик для нескольких допустимых значений параметров n и r, причем все эти оперативные характеристики с вероятностью около 1/2 останавливают процесс при $p=0{,}07$; при возрастании n величина r тоже возрастает, а оперативные характеристики имеют самый крутой наклон в районе значения $p=0{,}07$. Эти кривые построены при помощи подробных биномиальных таблиц.

Такие выборочные методы контроля качества продукции используются для контроля процесса либо для того, чтобы покупатель мог проверить, насколько качество партий продукции совпадает с объявленным.

В научной работе очень часто используются различные критерии выборочного контроля. Типичным является *критерий* знаков. На основе выборки из некоторой совокупности некто может решить вопрос о равенстве или неравенстве какой-то процентной характеристики совокупности, например медианы, известному стандартному значению. В этом методе проверки результаты измерений внутри выборки характеризуются знаками + или —, означающими превосходят или не превосходят результаты измерений данное стандартное значение. Если это стандартное число равно процентной характеристике совокупности, то затем к числу плюсов и минусов применяется биномиальная теория; как это делается, вы увидите из следующих примеров.

Пример 2. *Система оценок результатов национальных тестов для школьников устроена так, что половина всех школьников получает оценки, большие или равные* 100, *а другая половина — меньшие* 100. (100 *равно медиане совокупности оценок.) Учитель хочет знать, отличается ли его класс от стандартного. В его классе* 20 *учеников, причем* 16 *из них получили оценки, большие* 100, *а* 4 — *меньшие* 100. *Он сразу же видит, что более половины его класса превосходит стандартный уровень. Но он может также задаться вопросом: «Учитывая колебания в выборках», является ли допустимой гипотеза о том, что мой класс представляет собой выборку из большой совокупности школьников, половина из которых имеют оценки, большие* 100, *а половина — меньшие* 100?» *Конкретно в качестве такой совокупности он может взять совокупность всех школьников, которые посещали его школу в течение нескольких лет. Учитель собирается рассматривать свой класс как случайную выборку из этой совокупности.*

Обсуждение. Вопрос учителя связан со «стандартной совокупностью», в которой вероятность p получения 100 или более баллов равна $p_0=1/2$. Мы называем

p_0 *нулевой гипотезой*, или *стандартом* учителя. Эпитет «нулевая» означает, что о совокупности предполагается, что она не обладает никакими особенностями. В качестве *противоположной гипотезы* учитель рассматривает гипотезу о том, что истинное значение p в совокупности, из которой выбраны ученики его класса, не равно 1/2. Учитель может учитывать тот факт, что уровень оценок школьников его школы не обязательно совпадает со средним уровнем по всей стране, а может быть как лучше, так и хуже среднего уровня.

Одним из способов проверки таких гипотез является использование выборки для построения доверительного интервала для неизвестного значения p. Если доверительный интервал содержит значение $p=1/2$, то мы допускаем возможность того, что нулевая гипотеза справедлива; в противном случае мы отвергаем нулевую гипотезу в пользу противоположной. В задачах проверки гипотез употребляется выражение *уровень значимости* критерия. Он измеряется вероятностью отбрасывания нулевой гипотезы в том случае, когда она справедлива. Если для проверки гипотезы используется доверительный интервал, уровень значимости критерия равен дополнению до коэффициента доверия. Так, если коэффициент доверия выбран равным 0,95, то уровень значимости равен 0,05.

В нашем примере 95%-ный доверительный интервал для p, отвечающий случаю, когда в выборке из 20 испытаний получено 16 успехов, можно получить из номограммы I. В качестве нижней и верхней границ доверительного интервала для величины p мы получаем значения 0,56 и 0,95. Поскольку $p=1/2$ не принадлежит этому интервалу, то мы отбрасываем нулевую гипотезу о том, что рассматриваемый класс выбран из совокупности школьников с $p=1/2$; при этом вероятность нашей ошибки не превосходит 0,05.

Односторонние критерии. В только что описанной проверке величина p могла оказаться как больше 1/2, так и меньше этой величины, т. е. могла располагаться с двух сторон от значения $p_0=1/2$. Однако учитель мог бы при постановке своего вопроса принять, что нулевая гипотеза утверждает, что $p \leqslant 1/2$, а противоположная гипотеза гласит, что $p > 1/2$. Тогда ему придется отказаться от нулевой гипотезы только при достаточно больших значениях X.

С точки зрения возможности различать эти две гипотезы наиболее неприятным значением нулевой гипотезы является значение $p=1/2$. Предположим временно, что $p=1/2$, и вычислим вероятность получения результатов, которые подтверждают противоположную гипотезу не менее чем реально полученные (в нашем примере — вероятность того, что не менее 16 учеников класса получат оценки, превосходящие 100). Полученная вероятность называется *гарантированным уровнем значимости.* Если эта вероятность не превосходит уровня значимости, которым собирался воспользоваться исследователь при решении задачи, то он отвергает нулевую гипотезу в пользу противоположной. Наш гарантированный уровень значимости, вычисленный для наибольшего по нулевой гипотезе значения p (из таблицы III-Б), равен $P(X \geqslant 16) = 0{,}006$, и мы снова отбросим нулевую гипотезу при уровне значимости 0,05.

Другие нулевые гипотезы. Типы проверок, которые мы только что описали, не ограничены рассмотрением нулевых гипотез, относящихся к $p = 1/2$.

Пример 3. *Обычно применяемое лекарство снимает послеоперационные боли у 80% пациентов. Новое лекарство, применяемое для тех же целей, помогло 90 пациентам из первых 100 оперированных. Чему равен соответствующий уровень значимости?*

Решение. Мы хотим выяснить, является ли новое лекарство лучшим, чем старое. Нулевой гипотезой мы назовем неравенство $p \leqslant 0{,}8$, а противоположной — неравенство $p > 0{,}8$. Вычислим $P(X \geqslant 90)$ для $n = 100$, $p = 0{,}8$, поскольку 0,8 есть стандартное значение, превышение которого вероятностью p эффективности для нового лекарства необходимо, чтобы это лекарство было признано превосходящим старое. Используя подробные биномиальные таблицы, мы находим приблизительное значение гарантированного уровня значимости:

$$P(X \geqslant 90) \approx 0{,}0057.$$

Если исследователь пользуется пятипроцентным или однопроцентным уровнем значимости, то он отбрасывает нулевую гипотезу в пользу противоположной. На практике он, вероятно решит использовать новое лекарство взамен старого.

Принятие или отбрасывание нулевых гипотез. Почему мы отвергаем нулевые гипотезы или принимаем их? Как вы должны были заметить, мы отбрасываем нулевые гипотезы тогда, когда они дают малую вероятность реализации реально наблюдаемых событий. Но одно это еще не является причиной, которой мы руководствуемся. Мы отвергаем нулевые гипотезы потому, что данные не подтверждают их, и потому, что противоположная гипотеза представляется нам более приемлемой, ибо данные подтверждают эту противоположную гипотезу. Человек, производящий контроль качества продукции, отбрасывает гипотезу о том, что процесс производства нормален, в пользу гипотезы о том, что этот процесс не является нормальным, так как он знает, что перебои в этом процессе возникают часто, поскольку неполадки в машинах, невнимательность и погрешности в качестве сырья являются для него постоянными источниками беспокойства. Поэтому, обнаружив большое число неисправных изделий, он скорее предположит, что в процессе производства что-то разладилось, и попробует обнаружить причины увеличения брака, чем учтет возможность того, что для контроля может случайно попасться очень необычная выборка. Аналогично, учитель знает, что способности преподавателей достаточно различны и что разница между школами может быть довольно велика. На самом деле его школьники отбираются из совокупности всех школьников в стране вовсе не случайным образом; как правило, все они проживают в некоторой определенной местности, население которой может характеризоваться тем или иным уровнем культуры. Врач, изучающий новое лекарство, хорошо знает, что лекарство, действующее лучше, нежели принятые ранее, иногда удается найти; однако он также представляет себе, что это случается вовсе не часто, и поэтому он будет очень осторожным в вопросе о замене привычного ему лекарства новым. Во всех этих примерах полученные решения не являются окончательными; новые данные могут вынудить их пересмотреть.

Что означает принятие нулевых гипотез? Предположим, что в классе 12 школьников получили оценки, превышающие 100, а остальные 8 — меньшие 100. Учитель проверяет нулевую гипотезу $p=1/2$, причем противоположная гипотеза заключается в том, что $p\neq 1/2$. При обычном уровне значимости он принимает нулевую гипотезу. Однако он не верит, что равенство $p=1/2$ является абсолютно точным. Выборка, состоящая из 20 школьников, не может дать практически никакой информации, позволяющей различать гипотезы $p=0{,}500$ и $p=0{,}501$. Учитель принимает гипотезу о том, что p близко к $1/2$. В дальнейшем учитель может изменить свое мнение, но только тогда, когда в его распоряжении окажется больше данных, противоречащих гипотезе о том, что p близко к $1/2$.

Упражнения к § 5

1. Используя рис. 27, найдите вероятность того, что процесс будет признан «нормальным» при $p=0{,}10$? При $p=0{,}30$? Какова вероятность того, что, если $p=0{,}20$, процесс будет остановлен?

2. Используя рис. 27, найдите процент дефектных изделий, при котором процесс признается «нормальным» в 80% всех случаев? В 10% всех случаев?

3. Проверьте ответы упр. 2, используя биномиальные таблицы.

4. Постройте оперативную характеристику, аналогичную рис. 27, для следующего критерия: производится выборка двух изделий; процесс признается «ненормальным», если в выборке обнаруживается хотя бы одно дефектное изделие. Сравните вашу кривую с кривой рис. 27.

5. (Продолжение.) Предположим, что из партии, состоящей из 10 изделий, производится выборка двух изделий без возвращения. Партия из 10 изделий объявляется бракованной, если в выборке есть хотя бы одно дефектное изделие. Постройте

график, аналогичный графику упр. 4. Укажите на этом графике вероятности принятия партии для различного числа дефектных изделий в этой партии. (Таким образом вы окажетесь в состоянии сравнить точные вероятности этого упражнения с приближенными вероятностями упр. 4. Биномиальные вычисления часто производятся, *как если бы* выборка производилась с возвращением, что является приближением в случае реальных выборок без возвращения.)

6. Используя рис. 28, найдите для всех четырех кривых значения p, при которых партии будут приниматься в 95% всех случаев.

7. Используйте биномиальную табл. III для нахождения размера выборки n и контрольного числа r, при которых принимаются около 85% всех партий в процессе с $p=0{,}05$ и не принимаются около 90% всех партий при $p=0{,}20$.

В упражнениях 8 и 9 рассмотрите схему на рис. 27 ($n=25$, $r=4$) и предположите, что 100 больших партий содержат каждая по 1% дефектных изделий, 100 партий содержат по 5% дефектных изделий и 100 партий содержат по 20% дефектных изделий.

8. Найдите математическое ожидание числа партий, принятых при таком контроле.

9. Найдите математическое ожидание числа дефектных изделий, принятых при таком контроле, если каждая из 300 партий состоит из 1000 изделий. Вычислите процент принятых дефектных изделий и сравните его с процентом дефектных изделий во всех 300 партиях.

10. Предположим, что для проверки качества изделий покупатель использует один из методов выборочного контроля, описанных в этой главе. Предположим также, что продавец всегда предлагает покупателю предоставить любой непринятой партии «второй шанс», используя тот же метод контроля с теми же параметрами. Как связаны между собой оперативные характеристики нового и старого критериев?

11. Принятая партия изделий приносит производителю прибыль в размере 500 долларов. Переработка непринятой партии обходится в 200 долларов, так что чистая прибыль в этом случае равна 300 долларов. Параметры выборочного контроля такие же, как и на рис. 27. Производственный процесс при $p=0{,}10$ не требует никаких дополнительных затрат, а уменьшение p на $0{,}01x$ требует дополнительных капиталовложений в размере $5x$ долларов. Вероятности браковки партии для различных значений p заданы в следующей таблице:

p	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
P (брак | p)	0,236	0,183	0,135	0,094	0,060	0,034	0,017	0,006	0,0015	0,0001

При каком значении p следует проводить производственный процесс, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль? (Максимизировать ожидаемую прибыль — это значит минимизировать ожидаемые потери сравнительно с 500 долларами прибыли за принятую партию.)

12. Мадам X утверждает, что она всегда может различить по вкусу китайский и индийский чай. Ей предлагают 10 пар чашек чая, причем каждая пара состоит из одной чашки китайского чая и одной чашки индийского чая. Она правильно указывает сорт чая в девяти случаях и ошибается в одном. Каков гарантированный уровень значимости этого критерия?

13. Используя номограмму I, найдите 95%-ный доверительный интервал для вероятности p правильного определения пары чашек чая из упр. 12.

14. У Фреда есть игральная кость, относительно которой он думает, что она чаще выпадает кверху гранью с 6 очками. Он бросает кость четыре раза и все четыре раза на кости выпадает 6 очков. Используя 5%-ный уровень значимости, следует ли ему после этого отвергнуть нулевую гипотезу о том, что $p=1/6$?

15. Однажды вечером мистер Вильямс, играя в бридж, в последовательных пяти сдачах получил только одного туза *). Он считает, что карты недостаточно хорошо тасовались. При предположении о тщательной тасовке карт вероятность p получения по крайней мере одного туза в сдаче равна 0,7 (приблизительно). Достаточно ли отсутствия туза в четырех сдачах из пяти для того, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу $p=0,7$ на 5%-ном уровне значимости? (Используйте биномиальную формулу.)

16. Производитель электрических лампочек утверждает, что только 10% всех производимых им ламп с матовым покрытием имеют дефекты в покрытии и что эти лампы с дефектами встречаются случайным образом среди производимых ламп. В коробке, которую вы купили, содержатся четыре лампы, причем две из них имеют дефектное покрытие. Следует ли вам отвергнуть утверждение производителя ламп на 1%-ном уровне значимости?

17. Пациент, страдающий от хронических приступов головной боли, знает, что после применения обычного лекарства проходят 60% этих приступов. Если он к обычному лекарству добавит новое, то из 20 следующих приступов он не почувствует сильных болей в 17. Следует ли отвергнуть на 5%-ном уровне значимости нулевую гипотезу $p=0,6$? Подвергните критике применение биномиального распределения к этому эксперименту.

18. Найдите 95 %-ный доверительный интервал для p в упр. 17.

19. Из большой партии изделий выбираются наугад пять изделий. Если не более двух из них окажутся дефектными, то партия считается принятой. Вычислите приближенно оперативную характеристику этого критерия, постройте ее график

*) При игре в бридж колода в 52 карты в начале игры («сдача» карт) распределяется случайным образом между четырьмя играющими.

и найдите, для какой части дефектных изделий в партии половина всех партий будет принята, а другая половина — отвергнута.

20. Есть подозрение, что некоторая монета неправильна. Для того чтобы проверить это, один человек бросает эту монету четыре раза. Если при всех четырех бросаниях она выпадает гербом кверху, то он отвергает гипотезу о правильности монеты. Другой человек поступает следующим образом: он тщательно перемешивает содержимое урны, в которой находятся 1 красный и 15 белых шаров, которые во всем одинаковы, за исключением цвета. После этого он вынимает 1 шар. Если шар оказывается красным, то этот человек отвергает гипотезу о правильности монеты, в противном случае он принимает эту гипотезу. (а) Что является нулевой гипотезой для каждого человека? (б) Каков уровень значимости каждого критерия? (в) При каких обстоятельствах первый критерий следует предпочесть второму?

21. Для сравнительной проверки двух типов удобрений A и B выбрано пять пар смежных полей капусты. Для каждой пары полей наугад выбирается поле, на котором применяется удобрение A, а на другом — удобрение B. Разница в урожае в сотнях фунтов ($A - B$) для пяти пар полей такова: 6, 4, 2, 2, 1. Используйте критерий знаков для решения на 10%-ном уровне значимости вопроса о том, насколько эти удобрения одинаково полезны.

22. В одном психофизическом эксперименте испытуемый обнаруживал определенный сигнал в 30% всех случаев, что было установлено после проведения нескольких тысяч испытаний. После каникул он вернулся в лабораторию и в первых 20 испытаниях обнаружил сигнал только один раз. Экспериментатор может считать, что либо это произошло вследствие изменений, затронувших самого испытуемого и, может быть, оборудование эксперимента, либо является просто отклонением в выборке при прежних параметрах проверки. Предложите экспериментатору аргументы в пользу той или иной гипотезы и обоснуйте их.

23. В эксперименте с дегустированием кофе каждому испытуемому предлагается попробовать кофе в 10 парах чашек. В каждой паре в одной чашке находится кофе первого сорта, а в другой — второго сорта; испытуемый должен сказать, в какой чашке находится кофе первого сорта. В том случае, если испытуемый правильно определяет сорта кофе по крайней мере в 8 испытаниях из 10, то он считается способным работать в качестве дегустатора кофе. Рассматривая этот эксперимент как критерий, ответьте на следующие вопросы: (а) Какова нулевая гипотеза? (б) Какова противоположная гипотеза? (в) Чему равен уровень значимости критерия? (г) Если для некоторого испытуемого вероятность правильного определения сорта равна 0,8, то каковы его шансы оказаться пригодным к работе в качестве дегустатора кофе?

Данные к упражнениям 24, 25, 26. Из двух сортов стекла, выдерживающего высокую температуру, оптовый торговец хочет выбрать тот, который лучше выдерживает также и внезапное изменение температуры. Для проверки он использует печь и ванну с ледяной водой. Образцы сорта A и B одновременно проверяются следующим образом. Два образца различных сортов помещаются в ванну, а затем в печь, нагретую до 300° по Фаренгейту *). Если ни один из образцов не лопается, то оба они возвращаются в ванну. Если опять ни один из них не лопается, то они снова помещаются в печь, температура которой повышается до 350°. Этот процесс с повышением температуры на 50° по Фаренгейту **) продолжается до тех пор, пока какой-либо образец не лопнет. Будем считать, что оба образца не лопнули одновременно. Тот сорт, образец которого лопнул первым, признается худшим.

24. В 10 испытаниях образец сорта A лопнул первым 9 раз. Достаточно ли это для того, чтобы отвернуть на 5%-ном уровне значимости гипотезу о том, что оба сорта одинакового качества?

25. Другой оптовый торговец проводит длительную серию испытаний. Он отмечает, что во всех испытаниях первым лопается образец сорта A, и на этом основании он отвергает гипотезу об одинаковом качестве на 5%-ном уровне значимости. Каково наименьшее число испытаний, которое он должен провести?

26. Третий оптовый торговец утверждает, что он провел длительную серию испытаний, в которых всегда первым лопался образец сорта A. Он заключает отсюда, что образцы сорта A всегда будут лопаться первыми. Отвечая на вопрос, он сказал, что по его мнению вероятность того, что первым лопнет образец сорта A, равна 1,00. Сколько раз в 1000 испытаний должен лопнуть первым образец сорта B, чтобы это утверждение было опровергнуто?

27. 60-ваттные лампы разложены в коробки по 8 штук в каждой. Каждая коробка проверяется испытанием двух ламп из нее, выбранных наугад. Правило приемки заключается в том, что если обе испытываемые лампы горят, то вся коробка считается принятой; если же не горит хотя бы одна лампа, то коробка бракуется. На контроль поступает коробка, содержащая 2 неисправные лампы и 6 исправных. Какова вероятность того, что эта коробка окажется принятой?

§ 6. Байесовские выводы на основе персональных вероятностей

В обычной жизни мы часто отвергаем некоторые гипотезы потому, что противоположные гипотезы, по нашему мнению, имеют больше шансов оказаться

*) Приблизительно 149° С.

**) То есть приблизительно на 28° С.

истинными. Если бы мы смогли измерять в числах наше предварительное доверие к той или иной гипотезе, то при решении задач, аналогичных задачам § 5, мы могли бы воспользоваться теоремой Байеса. Для многих людей представляется неприемлемым определять таким произвольным образом их собственные персональные вероятности гипотез, однако следующий пример показывает, как такие персональные оценки вероятности могут рассматриваться в качестве степени правдоподобия той или иной гипотезы. Этот пример относится к тем, относительно которых обычно существует много различных точек зрения.

Внечувственное восприятие. Арт утверждает, что он обладает внечувственным восприятием (ВВ). Он говорит, что если Боб спрячет в одной руке красную карту, а в другой—черную, то он сможет указать в какой руке находится красная карта. Боб не верит этому. Арт соглашается с тем, что он не сможет правильно определять, в какой руке находится красная карта, во всех случаях, но ему это удастся сделать «достаточно часто».

Сначала применим к этой задаче методы § 5. При использовании этих методов задача сводится к проверке нулевой гипотезы $p=1/2$ (Арт не обладает ВВ и просто называет руку с красной картой наугад) и противоположной гипотезы $p>1/2$ (Арт обладает ВВ). Боб может предложить Арту проверку, состоящую из некоторого количества испытаний, причем критерий здесь должен быть таким, чтобы при наличии заметного ВВ, например при $p=0,7$, у Арта были бы хорошие шансы пройти проверку, а при отсутствии ВВ ($p=1/2$) шансы пройти проверку были бы невелики. Пусть X означает число успехов в n испытаниях. Тогда из биномиальной табл. III для 25 испытаний при $p=1/2$ получаем, что $P(X\geqslant 16)\approx 0,115$, а при $p=0,7$ получаем, что $P(X\geqslant 16)\approx 0,811$. Одна проверка состоит из 25 таких испытаний, причем Арт выдерживает проверку тогда, когда он правильно определяет руку с красной картой не менее чем в 16 из них. Таким образом, если Арт не обладает ВВ, то он не выдержит около 89% таких проверок, а если он обладает ВВ с $p=0{,}7$, то он выдержит около 81% проверок. Проверки, состоящие из большого количества испытаний, уменьшают риск, связанный с ошибочной интерпретацией их результатов, и увеличивают шансы прохождения проверки в том случае, если ВВ Арта не столь велико, как это утверждает гипотеза $p=0{,}7$.

До сих пор мы рассуждали как в предыдущих параграфах. Вернемся теперь к персональным вероятностям. Для того чтобы получить численное значение степени правдоподобности для Боба утверждения о том, что Арт обладает ВВ, мы можем попросить Боба сообщить нам, какие шансы он отводит той или иной гипотезе относительно вероятности прохождения Артом одного испытания. В случае отсутствия у Арта ВВ $p = 0{,}5$, если же Арт обладает ВВ, то эта вероятность может равняться $p = 0{,}6$, $p = 0{,}7$ и т. д. Собственно говоря, вероятность p является непрерывной величиной, но мы будем рассматривать ее распределение как дискретное, что мы уже делали в § 4. Для простоты предположим, что степени правдоподобия для Боба гипотезы о наличии у Арта ВВ таковы:

Гипотезы	Вероятности	Предварительные степени правдоподобия для Боба
H_1	$p=0{,}5$	0,98
H_2	$p=0{,}7$	0,02
		1,00

Если проведено n испытаний, в которых Арт имел x успехов, то послеопытные степени правдоподобности соответствующих гипотез для Боба можно вычислить по теореме Байеса следующим образом:

Вероятность исхода

$p=0{,}5$ $\quad 0{,}98 \cdot (0{,}5)^x (0{,}5)^{n-x} = P(p=0{,}5) \times P(\text{выборка} \mid p=0{,}5).$

$p=0{,}7$ $\quad 0{,}02 \cdot (0{,}7)^x (0{,}3)^{n-x} = P(p=0{,}7) \times P(\text{выборка} \mid p=0{,}7).$

В выражениях для вероятностей не выписаны биномиальные коэффициенты $\binom{n}{x}$, поскольку они одинаковы для обеих гипотез и сократятся в последующих вычислениях. Конечно, при правильном определении этих вероятностей биномиальные коэффициенты следует учитывать, но в данном случае мы можем ими пренебречь.

Перед проведением эксперимента шансы Боба в пользу того, что Арт не обладает ВВ (отношение степеней правдоподобия), равнялись 0,98 : 0,02, или 49 : 1. После проведения эксперимента шансы Боба в пользу того, что Арт не обладает ВВ, равны отношению

$$\frac{0{,}98 \times (0{,}5)^x (0{,}5)^{n-x}}{0{,}02 \times (0{,}7)^x (0{,}3)^{n-x}} = \frac{49 \times (0{,}5)^x (0{,}5)^{n-x}}{(0{,}7)^x (0{,}3)^{n-x}}$$

Пример 1. *Предположим, что $n=25$, $x=17$. Найдите послеопытные шансы Боба в пользу того, что Арт не обладает ВВ.*

Решение. Используя табл. III-А, получаем, что

$$\frac{49b\,(17;\,25;\,0{,}5)}{b\,(17;\,25;\,0{,}7)} = \frac{49 \times 0{,}032}{0{,}165} \approx 9{,}5.$$

Таким образом, если Арт правильно определил ровно 17 карт из 25, то шансы Боба против того, что Арт обладает ВВ, уменьшились от 49 : 1 до 9,5 : 1. Боб пока еще не особенно верит в способность Арта к внечувственному восприятию, но результаты опыта «уменьшили» его неверие в 5 раз.

Дополнительные данные могут еще более изменить эти шансы.

Упражнения к § 6

В первых трех упражнениях предполагается, что шансы Боба против того, что Арт обладает ВВ, равны 9,5 : 1. Все эти упражнения основаны на получении новых дополнительных данных.

1. В следующих трех испытаниях Арт правильно определил карты. Как изменились шансы?

2. В следующих трех испытаниях Арт неправильно определил карты. Как изменились шансы?

3. В последующих шести испытаниях Арт три раза правильно определял карты, а три раза неправильно. Как изменились шансы?

4. Предварительные шансы Боба против гипотезы о ВВ равны 49 : 1. При проверке, состоящей ровно из n испытаний, Арт правильно определил карту в половине испытаний. При каком значении n шансы против гипотезы о ВВ повысились до 1000 : 1?

5. Боб считает, что предварительные («априорные») шансы в пользу того, что мадам X из упражнения 12 § 5 имеет вероятность различения сортов чая $p=0{,}5$ или $p=0{,}7$, равны 1 : 1. Каковы его шансы в пользу этих гипотез после того, как она правильно определила сорт чая в 9 из 10 испытаний?

ПРИЛОЖЕНИЕ I

СОБРАНИЯ ОБЪЕКТОВ: МНОЖЕСТВА

§ 1. Понятие множества

Понятие *множества* в повседневной жизни встречается очень часто. Оно связано с нашей способностью выделять группы объектов, обладающих некоторыми общими свойствами. Мы говорим о множестве тарелок на столе, о множестве почтовых марок, о множестве книг и т. д. Мы можем говорить об этих множествах потому, что каждый человек всегда в состоянии определить, принадлежит ли данная тарелка, или марка, или книга указанному множеству или не принадлежит ему.

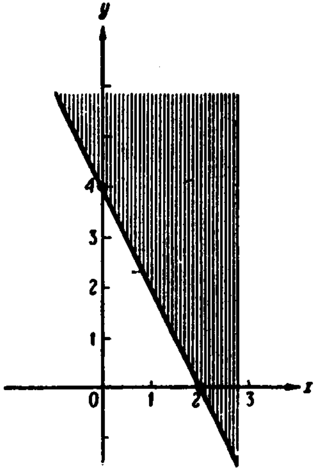


Рис. 29. Множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geqslant 4 - 2x$.

Понятие множества — основное в математике. На самом деле почти вся современная математика может быть выведена из понятия о множестве при помощи правил логики. В математике мы используем термин *множество* для обозначения любого хорошо определенного собрания объектов, вещей или символов. Когда мы говорим о хорошо определенном собрании объектов, то мы имеем в виду, что всегда можно однозначно установить, принадлежит или не принадлежит данный объект к рассматриваемому собранию. Таким образом, употребление слова *множество* в математике совпадает с его употреблением в обычной речи.

Любой объект, входящий в множество, называется *элементом* этого множества. Если множество содержит известное целое число элементов — положительное или равное нулю, — то оно называется *конечным*; в противном случае оно называется *бесконечным*. Наша цель в данном случае состоит в том, чтобы ознакомить читателя с терминами и понятиями, употребляемыми в теории множеств, поскольку эти понятия, используемые в теории вероятностей и статистике, делают изложение весьма простым и ясным. Укажем несколько примеров множеств.

Пример 1. *Следующие собрания объектов удовлетворяют требованиям, налагаемым на множество:*

(а) *члены вашей семьи* (*отец, мать, вы, ваши сестры и братья*);

(б) *ваш класс в школе (собрание учеников);*

(в) *ученики вашей школы, изучающие физику* *);

(г) *восемьдесят второй конгресс США* (*собрание конгрессменов*);

(д) *пятьдесят штатов США*;

(е) *положительные двузначные числа*;

(ж) *простые числа, меньшие* 50.

Пример 2. *На координатной плоскости указать множество точек* (x, y), *координаты которых удовлетворяют неравенству* $y \geqslant 4-2x$.

Решение. Все точки, координаты которых удовлетворяют равенству $y=-2x+4$, лежат на прямой, проходящей через точки $(2, 0)$ и $(0, 4)$. Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y>2-4x$, лежат *выше* этой прямой. Следовательно, искомое множество точек состоит из всех точек полуплоскости, ограниченной прямой $y=4-2x$ и лежащей выше нее, и из точек самой этой прямой (см. рис. 29).

Упражнения к § 1

1. Приведите два примера множеств, элементами которых являются (а) люди, (б) книги, (в) буквы алфавита, (г) числа, (д) геометрические фигуры.

*) В американских школах учащиеся в известной степени вольны сами выбирать те предметы, которые они будут изучать.

2. Каждое из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 написано на одном из шести мячей для пинг-понга, которые поместили в шляпу и тщательно перемешали. Человек с завязанными глазами вынимает из шляпы два мяча один за другим. Пусть x означает число, написанное на первом мяче, а y — число, написанное на втором мяче.

(а) Нанесите на координатную плоскость точки (x, y), соответствующие элементам множества всех возможных исходов этого эксперимента. [*Замечание.* Порядок элементов в паре следует учитывать; так, например, пара $(1, 2)$ отличается от $(2, 1)$.]

(б) Сколько точек составляют множество вопроса (а)?

(в) Выпишите всевозможные значения суммы чисел $x+y$, написанных на двух шарах, и для каждого значения укажите множество пар (x, y), соответствующих этому значению суммы.

(г) Укажите на координатной плоскости такие точки (x, y), для которых величина $x+y$ принимает определенное значение. Покажите, что точки, для которых эта сумма равна k, где k — фиксированное число ($=1, 2, 3, \ldots, 9$), лежат на одной прямой. Каково уравнение этой прямой?

3. В условиях упражнения 2 предположим, что первый мяч возвращается в шляпу перед тем, как вынимается второй мяч. Ответьте на четыре вопроса упражнения 2 в этом случае.

4. Опишите и изобразите множества точек, координаты x и y которых удовлетворяют следующим условиям:

(а) $y=x$, (б) $y>x$, (в) $y<x$, (г) $y>x+1$, (д) $x+y\leqslant 4$.

§ 2. Два способа задания множеств

В повседневной жизни мы используем два способа задания множеств.

(1) *Явный или «списочный» (с помощью перечисления всех элементов множества).* Этот метод ясен и удобен тогда, когда число элементов множества невелико. Для обозначения множества обычно используются заглавные буквы латинского алфавита A, B, $C, \ldots$; названия же элементов множества заключаются в фигурные скобки. Так, множество S, элементами которого являются количества очков на гранях игральной кости, задается следующим образом:

$$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(2) *Заданием условий, при помощи которых для любого объекта можно сказать, принадлежит или не принадлежит он к рассматриваемому множеству* (ме-

тод «правила» — неявный или описательный). При этом задании используются выражения такого типа:

«S есть множество *всех таких* элементов x, что x есть целое положительное число и x заключено между 1 и 6, включая и эти крайние значения».

Это описание множества S можно записать и более компактно:

$$S=\{x\colon x-\text{целое, и } 1\leqslant x\leqslant 6\}.$$

Двоеточие

$$«\{:\}»$$

читается обычно как «такое, что». Слева от двоеточия стоит символ, обозначающий произвольный элемент данного множества; справа от двоеточия записано правило, по которому определяются элементы множества.

Пример 1. *Задайте множество гласных латинского алфавита двумя способами.*

Решение. Мы можем записать это множество S либо так:

$$S=\{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}\ \text{(метод «списка»)},$$

либо так:

$$S=\{*\colon *\ \text{есть гласная буква латинского алфавита}\}\ \text{(метод «правила»)}.$$

Замечание. Звездочка $*$ и x использованы в предыдущих примерах как символы, на место которых можно подставить любой элемент множества. В примере 1 для обозначения произвольного элемента использована звездочка $*$, поскольку x является буквой латинского алфавита.

Пример 2. *Пусть* $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Обозначим через T множество, элементами которого являются квадраты элементов S. Задайте множество T двумя способами.*

Решение. Имеем:

$$T=\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}\ \text{(метод «списка»)},$$

$$T=\{x^2\colon x\ \text{есть элемент}\ S\}\ \text{(метод «правила»)}.$$

Пример 3. *Задайте множество точек, расположенных внутри окружности* $x^2+y^2=4$.

Решение.
$S=\{(x, y)$: x и y — действительные числа, и $x^2+y^2<4\}$.

Пример 4. *Бросаются цент и дайм*). Буквой x обозначим результат выпадения цента, буквой y — результат выпадения дайма. Задайте двумя способами множество S всех возможных пар (x, y).*

Решение. Мы можем записать

$$S=\{(Г, Г);\ (Г, Ц);\ (Ц, Г);\ (Ц, Ц)\},$$

или

$$S=\{(x, y): x \text{ есть } Г \text{ или } Ц;\ y \text{ есть } Г \text{ или } Ц\},$$

где буквой $Г$ обозначено выпадение герба, а буквой $Ц$ — выпадение цифры.

Замечание. В примере 4 мы использовали букву x для обозначения объекта, отличного от числа; x использовано как символ для представления элемента множества $\{Г, Ц\}$.

Упражнения к § 2

1. Используйте оба метода для задания следующих множеств:
(а) всех согласных первой половины латинского алфавита;
(б) всех простых чисел, меньших 25.

2. Задайте следующие множества при помощи «правила» и обсудите, почему для их задания неприемлем или вообще не применим метод «списка»: а) множество людей, живущих в вашем доме; (б) множество всех четных чисел; (в) множество квадратов целых чисел.

§ 3. Универсальное множество и подмножества

Во многих случаях нам приходится ограничивать наши рассмотрения только изучением объектов, входящих в какое-то большое заранее фиксированное множество. В планиметрии, например, в качестве та-

---

*) См. примечание к стр. 54.

кого множества выступает множество всех точек плоскости. В дальнейшем мы будем называть такое множество, которому заведомо принадлежат все рассматриваемые нами элементы, *«универсальным множеством U»*. Из универсального множества U мы можем затем выделять определенные *подмножества*, например множество точек, принадлежащих данной прямой L; множество точек внутри данного круга, множество точек пересечения прямой и окружности и т. д.

Рассмотрим множества:

U = множество всех автомашин, зарегистрированных в США в 1960 году;

A = множество всех автомашин, зарегистрированных в штате Нью-Джерси в 1960 году;

B = множество всех автомашин, зарегистрированных в США в 1960 году, которые не попали в этом году в автомобильные катастрофы.

Множества A и B являются подмножествами универсального множества U.

Диаграммы Венна. Часто полезно иметь схематические изображения универсального множества и его подмножеств. Это можно сделать при помощи так называемых *диаграмм Венна* (рис. 30). На диаграмме рис. 30 прямоугольник U изображает универсальное множество U, элементы которого изображаются точками прямоугольника. Подмножества элементов U, такие, как A или B, изображаются кругами (или другими фигурами), расположенными внутри прямоугольника (см. рис. 30).

Определение 1. Подмножество. Если каждый элемент множества A является также и элементом множества B, то множество A называется *подмножеством* B.

Так, если U есть множество всех школьников, B есть множество всех школьников нашей школы и A есть множество первоклассников вашей школы, то A представляет собой подмножество B. (См. рис. 31.)

Подмножества данного множества. Рассмотрим конечное универсальное множество U. Предположим, что число элементов в U известно. Можем ли мы ответить на вопрос о том, сколько существует различных подмножеств универсального множества U? Ответ на этот вопрос положителен, и далее мы укажем метод, при помощи которого можно подсчитать число подмножеств данного множества. Сначала проиллюстрируем этот метод для случая универсального множества, состоящего из четырех элементов, а затем распространим его на общий случай универсального множества, состоящего из n элементов.

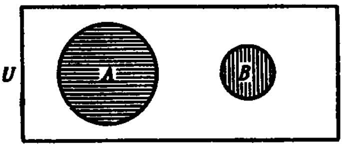


Рис. 30. Диаграмма Венна.

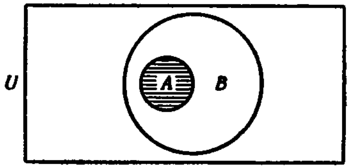


Рис. 31. A является подмножеством B.

Пример 1. *Пусть $U=\{a, b, c, d\}$. Сколько существует различных подмножеств множества U?*

Решение. При решении этой задачи мы воспользуемся принципом умножения гл. II. В самом деле, число различных подмножеств множества U есть просто число всевозможных наборов из четырех элементов a, b, c и d. Далее процедура решения такова.

Мы можем поступить с a двумя способами: включить его в подмножество или не включить. После этого мы можем поступить с b также двумя способами (включить или не включить). Аналогично мы можем поступить с c двумя способами и затем с d двумя способами. Следовательно, по принципу умножения всего существует в точности

$$2\times 2\times 2\times 2=2^4=16$$

способов отобрать несколько элементов из числа всех элементов U.

Каждый из этих 16 наборов, за исключением двух, очевидным образом представляет собой подмножество U, а для двух необходимы специальные разъяснения.

(1) Набор, в который включены и a, и b, и c, и d, дает множество

$$\{a, b, c, d\},$$

которое совпадает с U. Можем ли мы назвать U подмножеством самого себя? Поскольку каждый элемент U является элементом U, то определение подмножества выполнено — и мы можем сказать, что U есть подмножество самого себя.

(2) Набор, в который не включены ни a, ни b, ни c, ни d, не содержит никаких элементов. Такое множество мы называем *пустым множеством*, или нуль-множеством, и обозначаем через $\emptyset$. Теперь договоримся, что *мы будем рассматривать пустое множество как подмножество любого множества.* Почему мы принимаем такое соглашение? Для этого есть две причины.

(1) Пустое множество в теории множеств играет роль, аналогичную роли нуля в теории чисел; если к любому множеству добавить пустое множество, то в результате получится исходное множество. Приняв наше соглашение, мы освободим себя от необходимости делать множество оговорок при формулировке теорем.

(2) Наше соглашение не противоречит определению подмножества. По этому определению каждый элемент $\emptyset$ должен принадлежать произвольному множеству U. Поскольку пустое множество не содержит ни одного элемента, то нет ни одного элемента, для которого нарушалось бы определение подмножества.

> **Теорема 1.** *Пусть U есть конечное универсальное множество, состоящее из n элементов. Тогда существует в точности 2^n различных подмножеств множества U, включая U и $\emptyset$.*

Доказательство этой теоремы мы оставляем читателям в качестве упражнения.

Упражнения к § 3

1. Приведите несколько примеров универсальных множеств и их подмножеств, используя для этого множества людей, объектов и понятий.

2. Пусть U есть множество пальцев на вашей правой руке. Сколько различных «множеств пальцев» вашей правой руки вы можете выделить из U, если (а) в каждое множество должен входить по крайней мере один палец, (б) подмножество может быть пустым (пальцы сложены в кулак)?

3. Предположим, что некоторый код устроен так, что каждый символ вида

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{20}), \text{ где } x_i = 0 \text{ или } 1,\ i = 1, 2, \ldots 20,$$

означает в точности одно сообщение. Возможно ли таким способом закодировать миллион различных сообщений? Каково точное число сообщений, которые можно закодировать?

4. Сколько непустых подмножеств можно выделить из множества, содержащего n элементов?

5. *Собственным* подмножеством U называется такое непустое подмножество U, которое не содержит U. Сколько существует собственных подмножеств у множества, содержащего n элементов?

6. Докажите теорему 1.

§ 4. Операции над множествами

Пусть буква U означает универсальное множество, а буквы A, B, C, ... означают подмножества U. Мы можем выполнить над этими подмножествами определенные операции, в результате которых получатся новые, а быть может, те же самые подмножества U. Три особенно важные операции носят названия: *пересечение, объединение* и *дополнение*. Мы определим эти операции и проиллюстрируем их при помощи диаграмм Венна. Договоримся только, что принадлежность элемента x множеству A мы будем обозначать через $x \in A$.

Определение 2. Пересечение. *Пересечением* множеств A и B называется множество всех элементов U, которые принадлежат как A, так и B.

Мы обозначаем пересечение A и B через $A \cap B$. (Читается: «A пересечение B».) Символически:

$$A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Пересечение A и B указано на рис. 32 штриховкой.

Определение 3. Непересекающиеся множества. Два множества A и B называются *непересекающимися*, если они не имеют общих элементов.

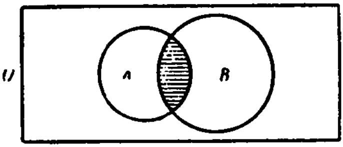


Рис. 32. Пересечение A и B.

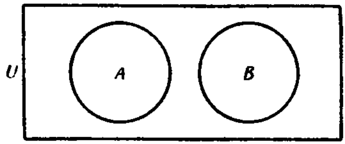


Рис. 33. Непересекающнеся множества.

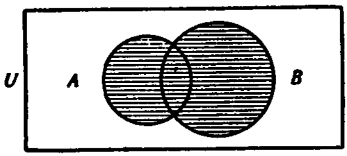


Рис. 34. Объедииение A и B.

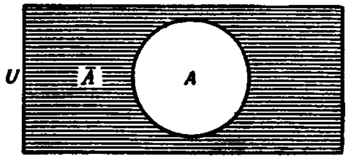


Рис. 35. Дополнение множества A.

Другими словами, A и B не пересекаются, если их пересечение — пустое множество (см. рис. 33).

Определение 4. Объединение. *Объединением* множеств A и B называется множество всех элементов U, которые принадлежат либо множеству A, либо B, либо тому и другому.

Мы обозначаем объединение A и B через $A \cup B$. (Читается: «A объединение B»). Символически:

$$A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Объединение A и B указано на рис. 34 штриховкой.

Определение 6. Дополнение. *Дополнением* множества A называется множество всех элементов U, которые не принадлежат A.

Мы обозначаем дополнение множества A через $\bar{A}$ (читается: «A с чертой»). Символически:

$$\bar{A} = \{x\colon x \notin A\}.$$

Дополнение A указано на рис. 35 штриховкой.

Пример 1. *Пусть U состоит из чисел* 1, 2, 3, ..., 9 *и* 26 *букв латинского алфавита* $a, b, c, \ldots, z$. *Если*

$$A = \{1, 3, 5, a, e, h\}$$

и

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e\},$$

найдите

(а) $\bar{B}$; (б) $A \cap B$; (в) $A \cup B$;
(г) $A \cap \bar{B}$.

Решение. Из предыдущих определений получаем

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \{6, 7, 8, 9, f, g, h, \ldots, z\}, \\ A \cap B &= \{1, 3, 5, a, e\}, \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e, h\}, \\ A \cap \bar{B} &= \{h\}. \end{aligned}$$

Пример 2. *Дано, что*

$$\begin{aligned} U &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}, \\ A &= \{3x\colon x \in U\}, \\ B &= \{5x\colon x \in U\}. \end{aligned}$$

Найти $A \cap B$.

Решение. A представляет собой множество всех натуральных чисел, делящихся на 3, а B — множество всех натуральных чисел, делящихся на 5. Поэтому элемент, принадлежащий как A, так и B, должен делиться и на 3, и на 5, а следовательно, делиться на 15. Таким образом,

$$A \cap B = \{15x\colon x \in U\}.$$

Упражнения к § 4

1. Пусть U есть множество всех точек координатной плоскости:

$$U = \{(x, y): x \text{ и } y \text{ — действительные числа}\}.$$

Дано, что

$$A = \{(x, y) : y = |x|\}, \quad B = \{(x, y) : y > |x|\},$$
$$L = \{(x, y) : x + y = 2\}, \quad M = \{(x, y) : x + y < 2\}.$$

Укажите на плоскости следующие множества:

(а) A, (г) $\overline{B}$, (ж) $B \cap M$,

(б) B, (д) L, (з) $\overline{M}$,

(в) $A \cup B$, (е) $A \cap L$, (и) $\overline{L}$.

2. Пусть A — любое подмножество универсального множества U. Докажите, что

(а) $A \cup A = A$, (в) $A \cup \overline{A} = U$,

(б) $A \cap A = A$, (г) $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

3. Пусть A и B — подмножества конечного универсального множества U. Количества элементов в некоторых подмножествах U указаны в первых четырех столбцах следующей таблицы:

Множество	U	A	B	$A \cap B$	$\overline{A} \cap B$	$A \cap \overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \cup B$
Количество элементов	20	7	8	3					

Постройте диаграмму Венна для иллюстрации этих данных, обозначая элементы множеств точками на диаграмме. Затем дополните таблицу, предварительно определив число элементов в каждом из последних пяти множеств.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

СУММИРОВАНИЕ И ИНДЕКСЫ

§ 1. Индексы и символ суммирования $\sum$

Нам часто приходится выписывать суммы нескольких результатов каких-либо измерений или наблюдений. Например, если 30 студентов сдают экзамены, то нас может интересовать их средняя оценка, которая равна 1/30 от суммы их оценок. В другом случае нас может интересовать сумма очков, выпавших на игральной кости при большом количестве бросаний. Было бы удобно иметь возможность выражать такие суммы в компактной форме. Для этой цели обычно используется греческая буква Σ (заглавная буква «сигма»), которая обозначает суммирование.

Предположим, например, что фамилии 30 студентов расположены в алфавитном порядке, и пусть x_1 означает оценку, полученную первым студентом, x_2 — оценку второго студента и т. д. до x_{30} — оценки тридцатого студента. Индексы 1, 2, ..., 30 соответствуют номерам студентов в алфавитном списке. Если первые три студента получили соответственно 3, 5, 4, то

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 5; \quad x_3 = 4.$$

Сумму этих 30 оценок можно представить в виде

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{30}, \tag{1}$$

где многоточие употребляется для замены выражения «и так далее». Другой способ представления этой суммы связан с употреблением символа суммирования Σ. В этом случае сумма записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i. \qquad (2)$$

Выражение (2) читается так: «сумма всех x_i по i от 1 до 30». Это выражение имеет то же самое значение, что и выражение (1): оба выражения означают сумму тридцати оценок x_1, x_2 и т. д. до x_{30}. Другими словами, символ

$$\sum_{i=1}^{30}$$

означает, что мы должны заменить i целыми числами от 1 до 30, расположенными в возрастающем порядке, и сложить все полученные результаты.

Индексы могут обозначаться любой подходящей буквой, однако наиболее часто употребляются для этого буквы i, j, k и n.

Пример 1. *Если* $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 6$, *то чему равны*

(а) $\sum_{i=1}^{4} x_i$, (б) $\sum_{i=2}^{4} x_i$, (в) $\sum_{j=1}^{3} x_j$,

(г) $\sum_{k=1}^{4} 5x_k$, (д) $\sum_{n=1}^{3} (x_n + x_{n+1})$, (е) $\sum_{j=1}^{4} x_i^2$?

Решение

(а) $$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 + 5 + 7 + 6 = 15.$$

(б) $$\sum_{i=2}^{4} x_i = x_2 + x_3 + x_4 = 5 + 7 + 6 = 18.$$

(в) $$\sum_{j=1}^{3} x_j = x_1 + x_2 + x_3 = -3 + 5 + 7 = 9.$$

(г) $$\sum_{k=1}^{4} 5x_k = 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 5 \cdot 15 = 75.$$

(д) $\sum_{n=1}^{3}(x_n+x_{n+1})=(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_4)=$
$=(x_1+x_2+x_3)+(x_2+x_3+x_4)=9+18=27.$

(е) $\sum_{i=1}^{4}x_i^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(-3)^2+5^2+7^2+6^2=119.$

Замечание 1. В части (б) этого примера представлена сумма по i от $i=2$ до $i=4$. Равенство «$i=2$», написанное под индексом суммирования, указывает нам значение того индекса, с которого начинается суммирование. В данном случае индекс i в первом слагаемом заменяется сначала на 2. Затем мы продолжаем суммирование, придавая индексу все *целые* значения, начиная с первого в нашем случае (с 2) до тех пор, пока не достигнем целого числа, соответствующего символу, написанному над знаком суммирования (в данном случае до значения $i=4$). Таким образом, в x_i мы заменяем i на 2, 3 и 4 и складываем результаты:

$$x_2+x_3+x_4.$$

Замечание 2. В части (в) предыдущего примера для обозначения индекса суммирования мы использовали не букву i, а букву j. Равенство $j=1$ под знаком суммирования означает, что первым значением для замены j является 1, т. е. первым слагаемым будет x_1. Затем будем придавать индексу суммирования последовательные целые значения до достижения верхнего предела суммирования, который в нашем случае равен 3. Затем мы сложим все результаты и получим

$$x_1+x_2+x_3.$$

Замечание 3. В примере 1 (г) мы заменяем индекс k на 1, 2, 3 и 4 и складываем соответствующие члены. Однако мы видим, что каждое слагаемое имеет множителем число 5. В действительности этот общий множитель можно сразу вынести за знак суммирования:

$$\sum_{k=1}^{4}5x_k=5\sum_{k=1}^{4}x_k.$$

Это правило можно легко обобщить, что мы и сделаем в следующем параграфе.

Замечание 4. В части (д) предыдущего примера индекс суммирования n принимает значения 1, 2, и 3. Индекс при x_n принимает эти же значения, но индекс при x_{n+1} принимает значение $n+1=2$, 3 и 4 соответственно. Переставляя слагаемые в сумме, можем также заметить, что

$$\sum_{n=1}^{3}(x_n+x_{n+1})=\sum_{n=1}^{3}x_n+\sum_{n=1}^{3}x_{n+1}=$$
$$=\sum_{i=1}^{3}x_i+\sum_{j=2}^{4}x_j. \tag{3}$$

Замечание 5. Выражение (3) и примеры 1 (в, г, д) иллюстрируют тот факт, что выбор буквы на роль индекса суммирования произволен. Этим объясняется то, почему этот индекс часто называют «фиктивным индексом» или «немым индексом». Единственное требование заключается в том, чтобы этот индекс заменялся последовательными целыми числами начиная с *нижнего предела суммирования* (написанного под знаком суммирования) и кончая *верхним пределом суммирования* (написанного над знаком суммирования), а затем все полученные результаты складывались. Таким образом,

$$x_2+x_3+x_4=\sum_{j=2}^{4}x_j=\sum_{k=-1}^{1}x_{k+3}=\sum_{k=-1}^{1}x_{3-k}$$

Определение 1. Суммирование. Пусть каждому (целому) номеру i от m до n сопоставлено некоторое число, обозначенное через x_i. Тогда для обозначения *суммы* всех чисел

$$x_m+x_{m+1}+\ldots+x_n$$

употребляется следующая запись:

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n}x_i=x_m+x_{m+1}+\ldots+x_n.} \tag{4}$$

Пределы суммирования. В выражении (4) n называется *верхним пределом* суммирования, а m называется *нижним пределом* суммирования.

Опускание пределов суммирования. Мы иногда будем опускать пределы суммирования и писать просто $\sum x_i$. Эта запись будет означать, что суммирование производится по всем значениям индекса i, которые мы в данный момент рассматриваем. Например, если в некоторой задаче встречаются только величины x_1, x_2, x_3, x_4, то $\sum x_i$ означает $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Пример 2. *Пусть* $x_i = i(i-1)$. *Вычислить* $\sum\limits_{i=1}^{5} x_i$.

Решение:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 =$$
$$= 1(1-1) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) + 5(5-1) =$$
$$= 0 + 2 + 6 + 12 + 20 = 40.$$

Пример 3. *Вычислить* $\sum\limits_{j=0}^{2} \frac{j+1}{j+3}$.

Решение.

$$\sum_{j=0}^{2} \frac{j+1}{j+3} = \frac{0+1}{0+3} + \frac{1+1}{1+3} + \frac{2+1}{2+3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} = \frac{43}{30}.$$

Пример 4. *Выразите следующую сумму как функцию числа n:*

$$\sum_{k=0}^{n} [(k+1)^2 - k^2]. \tag{5}$$

Решение. Заменяя k на 0, 1, 2, ..., n и складывая, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} [(k+1)^2 - k^2] = [1^2 - 0^2] + [2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \ldots$$
$$\ldots + [(n+1)^2 - n^2]. \tag{6}$$

Положительные слагаемые в правой части выражения (6) в сумме равны

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2, \tag{7}$$

и из этой суммы мы должны вычесть

$$0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2-k^2]=[1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2]-$$
$$-[0^2+1^2+\ldots+n^2]=(n+1)^2. \tag{9}$$

Упражнения к § 1

Вычислите следующие суммы (найдите численное значение или, в упр. 3, упростите):

1. $\sum_{n=1}^{3} n^2$.
2. $\sum_{n=1}^{3} 2^n$.
3. $\sum_{n=1}^{3} x^n$.
4. $\sum_{k=0}^{2} (2k+1)$.
5. $\sum_{k=0}^{3} (2k+1)$.
6. $\sum_{k=0}^{4} (2k+1)$.
7. $\sum_{i=1}^{2} (i^2+i)$.
8. $\sum_{n=-2}^{2} (n^2-4)$.
9. $\sum_{n=100}^{102} n$.
10. $\sum_{n=0}^{2} (n+100)$.

11. Используйте выражение (9) и соотношение

$$(k+1)^2-k^2=2k+1$$

для доказательства того, что сумма первых $n+1$ натуральных нечетных чисел равняется квадрату некоторого натурального числа. Какого именно?

12. Раскрывая скобки и переставляя члены в левой части следующего равенства, докажите, что

$$\sum_{k=0}^{3}(a_k+b_k)=\sum_{k=0}^{3}a_k+\sum_{k=0}^{3}b_k.$$

Попробуйте обобщить этот результат. Сколько различных обобщений вам удалось получить?

13. Раскройте сумму в левой части следующего равенства и используйте распределительный закон для доказательства

того, что

$$\sum_{i=1}^{3} 7x_i = 7 \sum_{i=1}^{3} x_i.$$

Попробуйте максимально обобщить этот результат.

14. Если все x_i равны некоторому постоянному числу c, то чему равно значение $\sum_{i=1}^{n} x_i$?

§ 2. Теоремы о суммировании

Решая упражнение 12 предыдущего параграфа, вы, возможно, сами обнаружили факт, который составляет содержание следующей теоремы.

Теорема 1.

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i.} \quad (1)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 достаточно расписать выражение в левой части равенства (1) и переставить слагаемые следующим образом:

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \ldots + (a_n + b_n) =$$
$$= (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n) =$$
$$= \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i.$$

Этот результат можно распространить на случай трех или более переменных повторным применением выражения (1). Например,

$$\sum (a_i + b_i + c_i) = \sum a_i + \sum (b_i + c_i) = \sum a_i + \sum b_i + \sum c_i,$$

где во всех суммах индекс i меняется от m до n. □

Теорема 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак суммы. Другими словами, если c — постоянная величина — константа, то*

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} cx_i = c \sum_{i=m}^{n} x_i.} \quad (2)$$

Доказательство. Расписывая левую часть выражения (2), мы получаем

$$cx_m + cx_{m+1} + \ldots + cx_n.$$

Вынося c за скобку, имеем

$$cx_m + cx_{m+1} + \ldots + cx_n = c(x_1 + x_2 + \ldots + x_n). \quad \square$$

Пример 1.

$$\sum_{i=1}^{3} 2i^2 = 2\sum_{i=1}^{3} i^2 = 2(1 + 4 + 9) = 28.$$

$$\sum_{i=1}^{3} (2i)^2 = \sum_{i=1}^{3} 4i^2 = 4\sum_{i=1}^{3} i^2 = 4(1 + 4 + 9) = 56.$$

Теорема 3. *Если все слагаемые суммы равны некоторому постоянному числу c, то сумма равна произведению этого числа c на число индексов, участвующих в суммировании, т. е. на количество целых чисел, заключенных между нижним и верхним пределами суммирования включительно. В частности,*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c = cn.} \tag{3}$$

Доказательство. Если для любого $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ все $x_i = c$, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c + c + \ldots + c = cn. \quad \square$$

Пример 2. *Используйте выражение* (9) *предыдущего параграфа и теоремы* 2, 3 *и* 4 *для вычисления* $\sum_{k=0}^{n} k$ *как функции* n.

Решение. Из выражения (9) получаем

$$\sum_{k=0}^{n} [(k+1)^2 - k^2] = (n+1)^2. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1.$$

Меняя местами левую и правую части выражения (4) и заменяя $2k+1$ на разность квадратов, мы получаем

$$(n+1)^2=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n}2k+\sum_{k=0}^{n}1=2\sum_{k=0}^{n}k+n+1. \quad (5)$$

Таким образом мы получили уравнение относительно $\sum\limits_{k=0}^{n} k$. Решая его, находим:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.}$$

Упражнения к § 2

Раскройте следующие суммы и по возможности упростите их:

1. $\sum\limits_{k=0}^{3} ka_k$. 2. $\sum\limits_{k=1}^{3} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k$. 3. $\sum\limits_{j=-1}^{2} 10^j$.

4. $\sum\limits_{i=2}^{5}(2i-5)$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{3}(a_n+b_{n-1})$. 6. $\sum\limits_{n=0}^{3}(2x_n-3y_n)$.

7. $\sum\limits_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^k$. 8. $\sum\limits_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^{2-k}y^k$. 9. $\sum\limits_{x=0}^{3}\binom{3}{x}p^xq^{3-x}$.

10. $\sum\limits_{x=0}^{2}\frac{x^2}{x!}$.

11. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2-k^2]=(n+1)^2.$$

12. (Продолжение.) Используйте результат упражнения 11 и соотношение $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ для доказательства того, что

$$3\sum_{k=0}^{n}k^2=(n+1)^3-3\sum_{k=0}^{n}k-\sum_{k=0}^{n}1.$$

13. (Продолжение.) Используйте результат упражнения 12 и формулы (3) и (6) для доказательства того, что

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.} \tag{6}$$

14. Объясните, как изменится результат выражения (6) и упражнения 13 при замене нижнего предела суммирования на $k=1$.

15. Запишите каждую из следующих сумм при помощи знака суммирования:

(а) $z_1+z_2+\ldots+z_{23}$;

(б) $x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_8y_8$;

(в) $(x_1-y_1)+(x_2-y_2)+\ldots+(x_m-y_m)$;

(г) $x_1^3f_1+x_2^3f_2+\ldots+x_9^3f_9$.

16. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2m\sum_{i=1}^{n}x_i+nm^2.$$

17. В условиях упражнения 16 предположим, что $m=\bar{x}$, среднему арифметическому чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2.$$

18. Представьте

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+by_i)^2$$

в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых есть некоторая сумма, записанная при помощи знака суммирования.

Замечание. Иногда нам приходится иметь дело с суммами вида $\sum x_iy_j$, в которых суммирование производится по всем возможным парам значений i и j. Предположим, например, что i меняется от 1 до 3, а j принимает значения 1 и 2. Тогда всего существует 3×2, или 6, возможных пар значений i, j и соответствующая сумма равна

$$\sum x_iy_j=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2+x_3y_1+x_3y_2.$$

Таблицы

Таблица I

2500 случайных чисел

00	49487	52802	28667	62058	87822	14704	18519	17889	45869	14454
01	29480	91539	46317	84803	86056	62812	33584	70391	77749	64906
02	25252	97738	23901	11106	86864	55808	22557	23214	15021	54268
03	02431	42193	96960	19620	29188	05863	92900	06836	13433	21709
04	69414	89353	70724	67893	23218	72452	03095	68333	13751	37260
05	77285	35179	92042	67581	67673	68374	71115	98166	43352	06414
06	52852	11444	71868	34534	69124	02760	06406	95234	87995	78560
07	98740	98054	30195	09891	18453	79464	01156	95522	06884	55073
08	85022	58736	12138	35146	62085	36170	25433	80787	96496	40579
09	17778	03840	21636	56269	08149	19001	67367	13138	02400	89515
10	81833	93449	57781	94621	90998	37561	59688	93299	27726	82167
11	63789	54958	33167	10909	40343	81023	61590	44474	39810	10305
12	61840	81740	60986	12498	71546	42249	13812	59902	27864	21809
13	42243	10153	20891	90883	15782	98167	86837	99166	92143	82441
14	45236	09129	53031	12260	01278	14404	40969	33419	14188	69557
15	40338	42477	78804	36272	72053	07958	67158	60979	79891	92409
16	54040	71253	88789	98203	54999	96564	00789	68879	47134	83941
17	49158	20908	44859	29089	76130	51442	34453	98590	37353	61137
18	80958	03808	83655	18415	96563	43582	82207	53322	30419	64435
19	07636	04876	61063	57571	69434	14965	20911	73162	33576	52839
20	37227	80750	08261	97048	60438	75053	05939	34414	16685	32103
21	99460	45915	45637	41353	35335	69087	57536	68418	10247	93253
22	60248	75845	37296	33783	42393	28185	31880	00241	31642	37526
23	95076	79089	87380	28982	97750	82221	35584	27444	85793	69755
24	20944	97852	26586	32796	51513	47475	48621	20067	88975	39506
25	30458	49207	62358	41532	30057	53017	10375	97204	98675	77634
26	38905	91282	79309	49022	17405	18830	09186	07629	01785	78317
27	96545	15638	90114	93730	13741	70177	49175	42113	21600	69625
28	21944	28328	00692	89164	96025	01383	50252	67044	70596	58266
29	36910	71928	63327	00980	32154	46006	62289	28079	03076	15619
30	48745	47626	28856	28382	60639	51370	70091	58261	70135	88259
31	32519	91993	59374	83994	59873	51217	62806	20028	26545	16820
32	75757	12965	29285	11481	31744	41754	24428	81819	02354	37895
33	07911	97756	89561	27464	25133	50026	16436	75846	83718	08533
34	89887	03328	76911	93168	56236	39056	67905	94933	05456	52347
35	30543	99488	75363	94187	32885	23887	10872	22793	26232	87356
36	68442	55201	33946	42495	28384	89889	50278	91985	58185	19124
37	22403	56698	88524	13692	55012	25343	76391	48029	72278	58586
38	70701	36907	51242	52083	43126	90379	60380	98513	85596	16528
39	69804	96122	42342	28467	79037	13218	63510	09071	52438	25840
40	65806	22398	19470	63653	27055	02606	43347	65384	02613	81668
41	43902	53070	54319	19347	59506	75440	90826	53652	92382	67623
42	49145	71587	14273	62440	15770	03281	58124	09533	43722	03856
43	47363	36295	62126	42358	20322	82000	52830	93540	13284	96496
44	26244	87033	90247	79131	38773	67687	45541	54976	17508	18367
45	72875	39496	08385	48458	30545	74383	22814	36752	10707	48774
46	09065	16283	61398	08288	00708	21816	39615	03102	02834	04116
47	68256	51225	92645	77747	33104	81206	00112	53445	04212	58476
48	38744	81018	41909	70458	72459	66136	97266	26490	10877	45022
49	44375	19619	35750	59924	82429	90288	61064	26489	87001	84273

Значения $n!$ и $\lg n!$

Значения $n!$ даны с пятью верными значащими цифрами, причем для $n \geqslant 9$ эти значения следует домножить на соответствующие степени десяти. Необходимые для этого показатели степени указаны справа от каждого значения и чуть выше его. Например, $15! \approx 13\,077 \times 10^8$. [Запятая в английской литературе играет роль пробела между разрядами, а точка — ту роль, которую у нас играет запятая! Точка перед цифрой заменяет опущенную нулевую целую часть; например .77815 означает 0,77815. — *Ред.*]

n	$n!$	$\log n!$	n	$n!$	$\log n!$	n	$n!$	$\log n!$
1	1	.00000	26	$40{,}329^{22}$	26.60562	51	$15{,}511^{62}$	66.19065
2	2	.30103	27	$10{,}889^{24}$	28.03698	52	$80{,}658^{63}$	67.90665
3	6	.77815	28	$30{,}489^{25}$	29.48414	53	$42{,}749^{65}$	69.63092
4	24	1.38021	29	$88{,}418^{26}$	30.94654	54	$23{,}084^{67}$	71.36332
5	120	2.07918	30	$26{,}525^{28}$	32.42366	55	$12{,}696^{69}$	73.10368
6	720	2.85733	31	$82{,}228^{29}$	33.91502	56	$71{,}100^{70}$	74.85187
7	5,040	3.70243	32	$26{,}313^{31}$	35.42017	57	$40{,}527^{72}$	76.60774
8	40,320	4.60552	33	$86{,}833^{32}$	36.93869	58	$23{,}506^{74}$	78.37117
9	$36{,}288^{1}$	5.55976	34	$29{,}523^{34}$	38.47016	59	$13{,}868^{76}$	80.14202
10	$36{,}288^{2}$	6.55976	35	$10{,}333^{36}$	40.01423	60	$83{,}210^{77}$	81.92017
11	$39{,}917^{3}$	7.60116	36	$37{,}199^{37}$	41.57054	61	$50{,}758^{79}$	83.70550
12	$47{,}900^{4}$	8.68034	37	$13{,}764^{39}$	43.13874	62	$31{,}470^{81}$	85.49790
13	$62{,}270^{5}$	9.79428	38	$52{,}302^{40}$	44.71852	63	$19{,}826^{83}$	87.29724
14	$87{,}178^{6}$	10.94041	39	$20{,}398^{42}$	46.30959	64	$12{,}689^{85}$	89.10342
15	$13{,}077^{8}$	12.11650	40	$81{,}592^{43}$	47.91165	65	$82{,}477^{86}$	90.91633
16	$20{,}923^{9}$	13.32062	41	$33{,}453^{45}$	49.52443	66	$54{,}434^{88}$	92.73587
17	$35{,}569^{10}$	14.55107	42	$14{,}050^{47}$	51.14768	67	$36{,}471^{90}$	94.56195
18	$64{,}024^{11}$	15.80634	43	$60{,}415^{48}$	52.78115	68	$24{,}800^{92}$	96.39446
19	$12{,}165^{13}$	17.08509	44	$26{,}583^{50}$	54.42460	69	$17{,}112^{94}$	98.23331
20	$24{,}329^{14}$	18.38612	45	$11{,}962^{52}$	56.07781	70	$11{,}979^{96}$	100.07841
21	$51{,}091^{15}$	19.70834	46	$55{,}026^{53}$	57.74057	71	$85{,}048^{97}$	101.92966
22	$11{,}240^{17}$	21.05077	47	$25{,}862^{55}$	59.41267	72	$61{,}234^{99}$	103.78700
23	$25{,}852^{18}$	22.41249	48	$12{,}414^{57}$	61.09391	73	$44{,}701^{101}$	105.65032
24	$62{,}045^{19}$	23.79271	49	$60{,}828^{58}$	62.78410	74	$33{,}079^{103}$	107.51955
25	$15{,}511^{21}$	25.19065	50	$30{,}414^{60}$	64.48307	75	$24{,}809^{105}$	109.39461

Таблицы биномиального распределения с тремя входами

В части А этой таблицы представлены значения функции

$$b(x;\ n;\ p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x},$$

т. е. вероятности получения ровно x успехов в n независимых биномиальных испытаниях, в каждом из которых вероятность успеха равна p.

В части Б таблицы представлены «совокупные» вероятности

$$P(X \geqslant r) = \sum_{x=r}^{n} b(x;\ n;\ p) = \sum_{x=r}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

получения не менее r успехов в n независимых испытаниях, вероятность успеха в каждом из которых равна p.

В обеих частях таблицы значения вероятностей приводятся для x (или r) $= 0, 1, 2, \ldots, n$, $n = 2, 3, \ldots, 25$ и для $p = 0{,}01$; $0{,}05$; $0{,}10$; $0{,}20$; $0{,}30$; $0{,}40$; $0{,}50$; $0{,}60$; $0{,}70$; $0{,}80$; $0{,}90$; $0{,}95$ и $0{,}99$.

В таблице заданы три первые верные значащие цифры после запятой, так что к каждому трехзначному числу в таблице следует приписать слева ноль целых и запятую. Символом 1— в таблице обозначен тот факт, что соответствующее значение вероятности лежит между 0,9995 и 1, а символ 0+ означает, что соответствующая вероятность расположена между 0 и 0,0005.

Часть А: Индивидуальные вероятности $b(x;\, n;\, p)$

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
2	0	980	902	810	640	490	360	250	160	090	040	010	002	0+	0
	1	020	095	180	320	420	480	500	480	420	320	180	095	020	1
	2	0+	002	010	040	090	160	250	360	490	640	810	902	980	2
3	0	970	857	729	512	343	216	125	064	027	008	001	0+	0+	0
	1	029	135	243	384	441	432	375	288	189	096	027	007	0+	1
	2	0+	007	027	096	189	288	375	432	441	384	243	135	029	2
	3	0+	0+	001	008	027	064	125	216	343	512	729	857	970	3
4	0	961	815	656	410	240	130	062	026	008	002	0+	0+	0+	0
	1	039	171	292	410	412	346	250	154	076	026	004	0+	0+	1
	2	001	014	049	154	265	346	375	346	265	154	049	014	001	2
	3	0+	0+	004	026	076	154	250	346	412	410	292	171	039	3
	4	0+	0+	0+	002	008	026	062	130	240	410	656	815	961	4
5	0	951	774	590	328	168	078	031	010	002	0+	0+	0+	0+	0
	1	048	204	328	410	360	259	156	077	028	006	0+	0+	0+	1
	2	001	021	073	205	309	346	312	230	132	051	008	001	0+	2
	3	0+	001	008	051	132	230	312	346	309	205	073	021	001	3
	4	0+	0+	0+	006	028	077	156	259	360	410	328	204	048	4
	5	0+	0+	0+	0+	002	010	031	078	168	328	590	774	951	5
6	0	941	735	531	262	118	047	016	004	001	0+	0+	0+	0+	0
	1	057	232	354	393	303	187	094	037	010	002	0+	0+	0+	1
	2	001	031	098	246	324	311	234	138	060	015	001	0+	0+	2
	3	0+	002	015	082	185	276	312	276	185	082	015	002	0+	3
	4	0+	0+	001	015	060	138	234	311	324	246	098	031	001	4
	5	0+	0+	0+	002	010	037	094	187	303	393	354	232	057	5
	6	0+	0+	0+	0+	001	004	016	047	118	262	531	735	941	6
7	0	932	698	478	210	082	028	008	002	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	066	257	372	367	247	131	055	017	004	0+	0+	0+	0+	1
	2	002	041	124	275	318	261	164	077	025	004	0+	0+	0+	2
	3	0+	004	023	115	227	290	273	194	097	029	003	0+	0+	3
	4	0+	0+	003	029	097	194	273	290	227	115	023	004	0+	4
	5	0+	0+	0+	004	025	077	164	261	318	275	124	041	002	5
	6	0+	0+	0+	0+	004	017	055	131	247	367	372	257	066	6
	7	0+	0+	0+	0+	0+	002	008	028	082	210	478	698	932	7
8	0	923	663	430	168	058	017	004	001	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	075	279	383	336	198	090	031	008	001	0+	0+	0+	0+	1
	2	003	051	149	294	296	209	109	041	010	001	0+	0+	0+	2
	3	0+	005	033	147	254	279	219	124	047	009	0+	0+	0+	3
	4	0+	0+	005	046	136	232	273	232	136	046	005	0+	0+	4
	5	0+	0+	0+	009	047	124	219	279	254	147	033	005	0+	5
	6	0+	0+	0+	001	010	041	109	209	296	294	149	051	003	6
	7	0+	0+	0+	0+	001	008	031	090	198	336	383	279	075	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	001	004	017	058	168	430	663	923	8

Часть А: Индивидуальные вероятности $b(x; n; p)$

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
9	0	914	630	387	134	040	010	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	083	299	387	302	156	060	018	004	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	003	063	172	302	267	161	070	021	004	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	008	045	176	267	251	164	074	021	003	0+	0+	0+	3
	4	0+	001	007	066	172	251	246	167	074	017	001	0+	0+	4
	5	0+	0+	001	017	074	167	246	251	172	066	007	001	0+	5
	6	0+	0+	0+	003	021	074	164	251	267	176	045	008	0+	6
	7	0+	0+	0+	0+	004	021	070	161	267	302	172	063	003	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	004	018	060	156	302	387	299	083	8
	9	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	010	040	134	387	630	914	9
10	0	904	599	349	107	028	006	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	091	315	387	268	121	040	010	002	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	004	075	194	302	233	121	044	011	001	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	010	057	201	267	215	117	042	009	001	0+	0+	0+	3
	4	0+	001	011	088	200	251	205	111	037	006	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	001	026	103	201	246	201	103	026	001	0+	0+	5
	6	0+	0+	0+	006	037	111	205	251	200	088	011	001	0+	6
	7	0+	0+	0+	001	009	042	117	215	267	201	057	010	0+	7
	8	0+	0+	0+	0+	001	011	044	121	233	302	194	075	004	8
	9	0+	0+	0+	0+	0+	002	010	040	121	268	387	315	091	9
	10	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	028	107	349	599	904	10
11	0	895	569	314	086	020	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	099	329	384	236	093	027	005	001	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	005	087	213	295	200	089	027	005	001	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	014	071	221	257	177	081	023	004	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	001	016	111	220	236	161	070	017	002	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	002	039	132	221	226	147	057	010	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	0+	010	057	147	226	221	132	039	002	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	002	017	070	161	236	220	111	016	001	0+	7
	8	0+	0+	0+	0+	004	023	081	177	257	221	071	014	0+	8
	9	0+	0+	0+	0+	001	005	027	089	200	295	213	087	005	9
	10	0+	0+	0+	0+	0+	001	005	027	093	236	384	329	099	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	020	086	314	569	895	11
12	0	886	540	282	069	014	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	107	341	377	206	071	017	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	006	099	230	283	168	064	016	002	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	017	085	236	240	142	054	012	001	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	002	021	133	231	213	121	042	008	001	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	004	053	158	227	193	101	029	003	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	0+	016	079	177	226	177	079	016	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	003	029	101	193	227	158	053	004	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	001	008	042	121	213	231	133	021	002	0+	8
	9	0+	0+	0+	0+	001	012	054	142	240	236	085	017	0+	9

Часть А: Индивидуальные вероятности $b(x; n; p)$

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
12	10	0+	0+	0+	0+	0+	002	016	064	168	283	230	099	006	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	017	071	206	377	341	107	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	014	069	282	540	886	12
13	0	878	513	254	055	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	115	351	367	179	054	011	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	007	111	245	268	139	045	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	021	100	246	218	111	035	006	001	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	003	028	154	234	184	087	024	003	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	006	069	180	221	157	066	014	001	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	001	023	103	197	209	131	044	006	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	006	044	131	209	197	103	023	001	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	001	014	066	157	221	180	069	006	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	0+	003	024	087	184	234	154	028	003	0+	9
	10	0+	0+	0+	0+	001	006	035	111	218	246	100	021	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	045	139	268	245	111	007	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	011	054	179	367	351	115	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	055	254	513	878	13
14	0	869	488	229	044	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	123	359	356	154	041	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	008	123	257	250	113	032	006	001	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	026	114	250	194	085	022	003	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	004	035	172	229	155	061	014	001	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	008	086	196	207	122	041	007	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	001	032	126	207	183	092	023	002	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	009	062	157	209	157	062	009	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	002	023	092	183	207	126	032	001	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	0+	007	041	122	207	196	086	008	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	0+	001	014	061	155	229	172	035	004	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	003	022	085	194	250	114	026	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	032	113	250	257	123	008	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	041	154	356	359	123	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	044	229	488	869	14
15	0	360	463	206	035	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	130	366	343	132	031	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	009	135	267	231	092	022	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	031	129	250	170	063	014	002	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	005	013	188	219	127	042	007	001	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	001	010	103	206	186	092	024	003	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	002	043	147	207	153	061	012	001	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	014	081	177	196	118	035	003	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	003	035	118	196	177	081	014	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	001	012	061	153	207	147	043	002	0+	0+	9

Часть А: Индивидуальные вероятности $b(x;\ n;\ p)$

n	r	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
15	10	0+	0+	0+	0+	004	034	151	403	722	939	998	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	001	009	059	217	515	836	987	999	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	091	297	648	944	995	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	027	127	398	816	964	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	167	549	829	990	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	206	463	860	15
16	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	149	560	815	972	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	011	189	485	859	974	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	043	211	648	901	982	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	007	068	402	754	935	989	999	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	001	017	202	550	833	962	995	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	003	082	340	671	895	981	998	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	001	027	175	473	773	942	993	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	007	074	284	598	858	974	999	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	001	026	142	402	716	926	993	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	007	058	227	527	825	973	999	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	002	019	105	329	660	918	997	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	005	038	167	450	798	983	999	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	065	246	598	932	993	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	099	352	789	957	999	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	141	515	811	989	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	028	185	440	851	16
17	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	157	582	833	977	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	012	208	518	882	981	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	050	238	690	923	988	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	009	083	451	798	954	994	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	001	022	242	611	874	975	997	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	005	106	403	736	928	989	999	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	001	038	225	552	834	965	997	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	011	105	359	685	908	987	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	003	040	199	500	801	960	997	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	013	092	315	641	895	989	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	003	035	166	448	775	962	999	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	011	072	264	597	894	995	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	003	025	126	389	758	978	999	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	046	202	549	917	991	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	077	310	762	950	999	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	019	118	482	792	988	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	023	167	418	843	17

Часть А: Индивидуальные вероятности $b\,(x;\ n;\ p)$

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	90	.95	.99	x
18	0	835	397	150	018	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	152	376	300	081	013	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	013	168	284	172	046	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	047	168	230	105	025	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	009	070	215	168	061	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	001	022	151	202	115	033	004	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	005	082	187	166	071	015	001	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	001	035	138	189	121	037	005	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	012	081	173	167	077	015	001	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	003	039	128	185	128	039	003	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	001	015	077	167	173	081	012	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	005	037	121	189	138	035	001	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	015	071	166	187	082	005	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	004	033	115	202	151	022	001	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	061	168	215	070	009	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	025	105	230	168	047	001	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	046	172	284	168	013	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	081	300	376	152	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	150	397	835	18
19	0	826	377	135	014	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	159	377	285	068	009	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	014	179	285	154	036	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	053	180	218	087	017	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	011	080	218	149	047	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	002	027	164	192	093	022	002	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	007	095	192	145	052	008	001	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	001	044	153	180	096	024	002	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	017	098	180	144	053	008	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	005	051	146	176	098	022	001	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	001	022	098	176	146	051	005	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	008	053	144	180	098	017	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	002	024	096	180	153	044	001	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	001	008	052	145	192	095	007	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	002	022	093	192	164	027	002	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	047	149	218	080	011	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	017	087	218	180	053	001	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	036	154	285	179	014	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	068	285	377	159	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	135	377	826	19
20	0	818	358	122	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	165	377	270	058	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	016	189	285	137	028	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	060	190	205	072	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	013	090	218	130	035	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4

Часть А: Индивидуальные вероятности $b\ (x;\ n;\ p)$

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
20	5	0+	002	032	175	179	075	015	001	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	009	109	192	124	037	005	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	002	055	164	166	074	015	001	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	022	114	180	120	035	004	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	007	065	160	160	071	012	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	002	031	117	176	117	031	002	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	012	071	160	160	065	007	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	004	035	120	180	114	022	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	001	015	074	166	164	055	002	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	005	037	124	192	109	009	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	001	015	075	179	175	032	002	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	130	218	090	013	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	072	205	190	060	001	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	028	137	285	189	016	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	058	270	377	165	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	122	358	818	20
21	0	810	341	109	009	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	172	376	255	048	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	017	198	284	121	022	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	066	200	192	058	009	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	016	100	216	113	026	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	003	038	183	164	059	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	011	122	188	105	026	003	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	003	065	172	149	055	009	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	001	029	129	174	097	023	002	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	010	080	168	140	050	006	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	003	041	134	168	089	018	001	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	001	018	089	168	134	041	003	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	006	050	140	168	080	010	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	002	023	097	174	129	029	001	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	009	055	149	172	065	003	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	105	188	122	011	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	059	164	183	038	003	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	113	216	100	016	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	058	192	200	066	001	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	022	121	284	198	017	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	048	255	376	172	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	109	341	810	21
22	0	802	324	098	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	178	375	241	041	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	019	207	281	107	017	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	073	208	178	047	006	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	018	110	211	096	019	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4

Часть А: Индивидуальные вероятности $b\ (x;\ n;\ p)$

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
22	5	0+	003	044	190	149	046	006	0+	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	001	014	134	181	086	018	001	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	004	077	177	131	041	005	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	001	036	142	164	076	014	001	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	014	095	170	119	034	003	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	005	053	148	154	066	010	0+	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	001	025	107	168	107	025	001	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	010	066	154	148	053	005	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	003	034	119	170	095	014	0+	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	001	014	076	164	142	036	001	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	005	041	131	177	077	004	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	001	018	086	181	134	014	001	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	046	149	190	044	003	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	019	096	211	110	018	0+	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	047	178	208	073	001	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	017	107	281	207	019	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	041	241	375	178	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	098	324	802	22
23	0	794	307	089	006	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	184	372	226	034	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	020	215	277	093	013	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	079	215	163	038	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	021	120	204	082	014	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	004	051	194	133	035	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	001	017	145	171	070	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	005	088	178	113	029	003	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	001	044	153	151	058	009	0+	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	018	109	168	097	022	002	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	006	065	157	136	046	005	0+	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	002	033	123	161	082	014	0+	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	014	082	161	123	033	002	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	005	046	136	157	065	006	0+	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	002	022	097	168	109	018	0+	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	009	058	151	153	044	001	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	003	029	113	178	088	005	0+	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	070	171	145	017	001	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	035	133	194	051	004	0+	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	082	204	120	021	0+	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	038	163	215	079	001	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	093	277	215	020	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	034	226	372	184	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	089	307	794	23

Часть А: Индивидуальные вероятности $b(x;\ n;\ p)$

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
24	0	786	292	080	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	190	369	213	028	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	022	223	272	081	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	002	086	221	149	031	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	024	129	196	069	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	005	057	196	118	027	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	001	020	155	160	056	008	0+	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	006	100	176	096	021	002	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	001	053	160	136	044	005	0+	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	024	122	161	078	014	001	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	009	079	161	117	032	003	0+	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	003	043	137	149	061	008	0+	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	001	020	099	161	099	020	001	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	008	061	149	137	043	003	0+	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	003	032	117	161	079	009	0+	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	001	014	078	161	122	024	0+	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	005	044	136	160	053	001	0+	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	002	021	096	176	100	006	0+	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	008	056	160	155	020	001	0+	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	027	118	196	057	005	0+	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	069	196	129	024	0+	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	031	149	221	086	002	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	081	272	223	022	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	028	213	369	190	23
	24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	080	292	786	24
25	0	778	277	072	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	196	365	199	024	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	024	231	266	071	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	002	093	226	136	024	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	027	138	187	057	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	006	065	196	103	020	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	001	024	163	147	044	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	007	111	171	080	014	001	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	002	062	165	120	032	003	0+	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	029	134	151	061	009	0+	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	012	092	161	097	021	001	0+	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	004	054	147	133	043	004	0+	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	001	027	114	155	076	011	0+	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	011	076	155	114	027	001	0+	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	004	043	133	147	054	004	0+	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	001	021	097	161	092	012	0+	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	009	061	151	134	029	0+	0+	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	003	032	120	165	062	002	0+	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	080	171	111	007	0+	0+	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	044	147	163	024	001	0+	19

Часть А: Индивидуальные вероятности $b(x; n; p)$

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
25	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	020	103	196	065	006	0+	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	057	187	138	027	0+	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	024	136	226	093	002	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	071	266	231	024	23
	24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	024	199	365	196	24
	25	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	072	277	778	25

Часть Б: Совокупные вероятности $\sum_{x=r}^{n} b(x;\, n;\, p)$

n	r	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	020	098	190	360	510	640	750	840	910	960	990	998	1−	1
	2	0+	002	010	040	090	160	250	360	490	640	810	902	980	2
3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	030	143	271	488	657	784	875	936	973	992	999	1−	1−	1
	2	0+	007	028	104	216	352	500	648	784	896	972	993	1−	2
	3	0+	0+	001	008	027	064	125	216	343	512	729	857	970	3
4	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	039	185	344	590	760	870	938	974	992	998	1−	1−	1−	1
	2	001	014	052	181	348	525	688	821	916	973	996	1−	1−	2
	3	0+	0+	004	027	084	179	312	475	652	819	948	986	999	3
	4	0+	0+	0+	002	008	026	062	130	240	410	656	815	961	4
5	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	049	226	410	672	832	922	969	990	998	1−	1−	1−	1−	1
	2	001	023	081	263	472	663	812	913	969	993	1−	1−	1−	2
	3	0+	001	009	058	163	317	500	683	837	942	991	999	1−	3
	4	0+	0+	0+	007	031	087	188	337	528	737	919	977	999	4
	5	0+	0+	0+	0+	002	010	031	078	168	328	590	774	951	5
6	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	059	265	469	738	882	953	984	996	999	1−	1−	1−	1−	1
	2	001	033	114	345	580	767	891	959	989	998	1−	1−	1−	2
	3	0+	002	016	099	256	456	656	821	930	983	999	1−	1−	3
	4	0+	0+	001	017	070	179	344	544	744	901	981	998	1−	4
	5	0+	0+	0+	002	011	041	109	233	420	655	886	967	999	5
	6	0+	0+	0+	0+	001	004	016	047	118	262	531	735	941	6
7	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	068	302	522	790	918	972	992	998	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	002	044	150	423	671	841	938	981	996	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	004	026	148	353	580	773	904	971	995	1−	1−	1−	3
	4	0+	0+	003	033	126	290	500	710	874	967	997	1−	1−	4
	5	0+	0+	0+	005	029	096	227	420	647	852	974	996	1−	5
	6	0+	0+	0+	0+	004	019	062	159	329	577	850	956	998	6
	7	0+	0+	0+	0+	0+	002	008	028	082	210	478	698	932	7
8	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	077	337	570	832	942	983	996	999	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	003	057	187	497	745	894	965	991	999	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	006	038	203	448	685	855	950	989	999	1−	1−	1−	3
	4	0+	0+	005	056	194	406	637	826	942	990	1−	1−	1−	4
	5	0+	0+	0+	010	058	174	363	594	806	944	995	1−	1−	5
	6	0+	0+	0+	001	011	050	145	315	552	797	962	994	1−	6
	7	0+	0+	0+	0+	001	009	035	106	255	503	813	943	997	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	001	004	017	058	168	430	663	923	8

Часть Б: Совокупные вероятности $\sum_{x=r}^{n} b(x;\ n;\ p)$

n	r	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	086	370	613	866	960	990	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	003	071	225	564	804	929	980	996	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	008	053	262	537	768	910	975	996	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	001	008	086	270	517	746	901	975	997	1−	1−	1−	4
	5	0+	0+	001	020	099	267	500	733	901	980	999	1−	1−	5
	6	0+	0+	0+	003	025	099	254	483	730	914	992	999	1−	6
	7	0+	0+	0+	0+	004	025	090	232	463	738	947	992	1−	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	004	020	071	196	436	775	929	997	8
	9	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	010	040	134	387	630	914	9
10	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	096	401	651	893	972	994	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	004	086	264	624	851	954	989	998	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	012	070	322	617	833	945	988	998	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	001	013	121	350	618	828	945	989	999	1−	1−	1−	4
	5	0+	0+	002	033	150	367	623	834	953	994	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	0+	006	047	166	377	633	850	967	998	1−	1−	6
	7	0+	0+	0+	001	011	055	172	382	650	879	987	999	1−	7
	8	0+	0+	0+	0+	002	012	055	167	383	678	930	988	1−	8
	9	0+	0+	0+	0+	0+	002	011	046	149	376	736	914	996	9
	10	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	028	107	349	599	904	10
11	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	105	431	686	914	980	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	005	102	303	678	887	970	994	999	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	015	090	383	687	881	967	994	999	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	002	019	161	430	704	887	971	996	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	0+	003	050	210	467	726	901	978	998	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	0+	012	078	247	500	753	922	988	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	0+	002	022	099	274	533	790	950	997	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	0+	004	029	113	296	570	839	981	998	1−	8
	9	0+	0+	0+	0+	001	006	033	119	313	617	910	985	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	030	113	322	697	898	995	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	020	086	314	569	895	11
12	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	114	460	718	931	986	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	006	118	341	725	915	980	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	020	111	442	747	917	981	997	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	002	026	205	507	775	927	985	998	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	0+	004	073	276	562	806	943	991	999	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	001	019	118	335	613	842	961	996	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	0+	004	039	158	387	665	882	981	999	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	001	009	057	194	438	724	927	996	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	0+	002	015	073	225	493	795	974	998	1−	9

Часть Б: Совокупные вероятности $\sum_{x=r}^{n} b(x; n; p)$

n	r	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
12	10	0+	0+	0+	0+	0+	003	019	083	253	558	889	980	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	020	085	275	659	882	994	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	014	069	282	540	886	12
13	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	122	487	746	945	990	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	007	135	379	766	936	987	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	025	134	498	798	942	989	999	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	003	034	253	579	831	954	992	999	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	0+	006	099	346	647	867	968	996	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	001	030	165	426	709	902	982	999	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	0+	007	062	229	500	771	938	993	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	001	018	098	291	574	835	970	999	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	0+	004	032	133	353	654	901	994	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	001	008	046	169	421	747	966	997	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	058	202	502	866	975	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	013	064	234	621	865	993	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	055	254	513	878	13
14	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	131	512	771	956	993	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	008	153	415	802	953	992	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	030	158	552	839	960	994	999	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	004	044	302	645	876	971	996	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	0+	009	130	416	721	910	982	998	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	001	044	219	514	788	942	992	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	0+	012	093	308	605	850	969	998	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	002	031	150	395	692	907	988	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	0+	008	058	212	486	781	956	999	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	002	018	090	279	584	870	991	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	004	029	124	355	698	956	996	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	040	161	448	842	970	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	008	047	198	585	847	992	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	044	229	488	869	14
15	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	140	537	794	965	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	010	171	451	833	965	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	036	184	602	873	973	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	005	056	352	703	909	982	998	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	001	013	164	485	783	941	991	999	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	002	061	278	597	849	966	996	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	0+	018	131	390	696	905	985	999	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	004	050	213	500	787	950	996	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	001	015	095	304	610	869	982	1−	1−	1−	9

Часть Б: Совокупные вероятности $\sum_{x=r}^{n} b(x; n; p)$

n	r	.01	.05	.10	20	.30	.40	p .50	60	.70	.80	.90	.95	.99	r
15	10	0+	0+	0+	0+	004	034	151	403	722	939	998	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	001	009	059	217	515	836	987	999	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	091	297	648	944	995	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	027	127	398	816	964	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	167	549	829	990	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	206	463	860	15
16	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	149	560	815	972	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	011	189	485	859	974	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	043	211	648	901	982	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	007	068	402	754	935	989	999	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	001	017	202	550	833	962	995	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	003	082	340	671	895	981	998	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	001	027	175	473	773	942	993	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	007	074	284	598	858	974	999	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	001	026	142	402	716	926	993	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	007	058	227	527	825	973	999	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	002	019	105	329	660	918	997	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	005	038	167	450	798	983	999	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	065	246	598	932	993	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	099	352	789	957	999	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	141	515	811	989	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	028	185	440	851	16
17	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	157	582	833	977	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	012	208	518	882	981	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	050	238	690	923	988	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	009	083	451	798	954	994	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	001	022	242	611	874	975	997	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	005	106	403	736	928	989	999	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	001	038	225	552	834	965	997	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	011	105	359	685	908	987	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	003	040	199	500	801	960	997	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	013	092	315	641	895	989	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	003	035	166	448	775	962	999	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	011	072	264	597	894	995	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	003	025	126	389	758	978	999	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	046	202	549	917	991	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	077	310	762	950	999	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	019	118	482	792	988	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	023	167	418	843	17

Часть Б: Совокупные вероятности $\sum_{x=r}^{n} b(x; n; p)$

n	r	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
18	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	165	603	850	982	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	014	226	550	901	986	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	058	266	729	940	992	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	011	098	499	835	967	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	002	028	284	667	906	985	999	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	006	133	466	791	952	994	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	001	051	278	626	881	980	999	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	016	141	437	760	942	994	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	004	060	263	593	865	979	999	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	001	021	135	407	737	940	996	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	006	058	240	563	859	984	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	020	119	374	722	949	999	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	006	048	209	534	867	994	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	001	015	094	333	716	972	998	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	033	165	501	902	989	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	008	060	271	734	942	999	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	099	450	774	986	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	150	397	835	18
19	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	174	623	865	986	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	015	245	580	917	990	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	067	295	763	954	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	013	115	545	867	977	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	002	035	327	718	930	990	999	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	009	163	526	837	968	997	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	002	068	334	692	916	988	999	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	023	182	512	820	965	997	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	007	084	333	676	912	989	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	002	033	186	500	814	967	998	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	011	088	324	667	916	993	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	003	035	180	488	818	977	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	001	012	084	308	666	932	998	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	003	032	163	474	837	991	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	070	282	673	965	998	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	023	133	455	885	987	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	046	237	705	933	999	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	083	420	755	985	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	135	377	826	19
20	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	182	642	878	988	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	017	264	608	931	992	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	075	323	794	965	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	016	133	589	893	984	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4

Часть Б: Совокупные вероятности $\sum_{x=r}^{n} b(x; n: p)$

n	r	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
20	5	0+	003	043	370	762	949	994	1−	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	011	196	584	874	979	998	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	002	087	392	750	942	994	1−	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	032	228	584	868	979	999	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	010	113	404	748	943	995	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	003	048	245	588	872	983	999	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	001	017	128	412	755	952	997	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	005	057	252	596	887	990	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	001	021	132	416	772	968	1−	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	006	058	250	608	913	998	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	002	021	126	416	804	989	1−	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	051	238	630	957	997	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	016	107	411	867	984	1−	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	035	206	677	925	999	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	008	069	392	736	983	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	122	358	818	20
21	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	190	659	891	991	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	019	283	635	942	994	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	085	352	821	973	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	019	152	630	914	989	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	003	052	414	802	963	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	014	231	637	904	987	999	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	003	109	449	800	961	996	1−	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	001	043	277	650	905	988	999	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	014	148	476	808	965	998	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	004	068	309	668	915	991	1−	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	001	026	174	500	826	974	999	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	009	085	332	691	932	996	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	002	035	192	524	852	986	1−	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	001	012	095	350	723	957	999	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	004	039	200	551	891	997	1−	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	096	363	769	986	1−	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	037	198	586	948	997	1−	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	086	370	848	981	1−	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	027	179	648	915	999	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	058	365	717	981	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	109	341	810	21
22	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	198	676	902	993	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	020	302	661	952	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	095	380	846	979	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	022	172	668	932	992	1−	1−	1−	1−	1	1−	1−	4

Часть Б: Совокупные вероятности $\sum_{x=r}^{n} b\,(x;\, n;\, p)$

n	r	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
22	5	0+	004	062	457	835	973	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	001	018	267	687	928	992	1−	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	004	133	506	842	974	998	1−	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	001	056	329	710	933	993	1−	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	020	186	546	857	979	999	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	006	092	376	738	945	996	1−	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	002	039	228	584	879	986	1−	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	014	121	416	772	961	998	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	004	055	262	624	908	994	1−	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	001	021	143	454	814	980	1−	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	007	067	290	671	944	999	1−	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	002	026	158	494	867	996	1−	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	008	072	313	733	982	999	1−	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	027	165	543	938	996	1−	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	008	068	332	828	978	1−	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	021	154	620	905	999	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	048	339	698	980	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	098	324	802	22
23	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	206	693	911	994	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	022	321	685	960	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	002	105	408	867	984	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	026	193	703	946	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	005	073	499	864	981	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	001	023	305	731	946	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	006	160	560	876	983	999	1−	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	001	072	382	763	953	996	1−	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	027	229	612	895	987	999	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	009	120	444	798	965	998	1−	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	003	055	287	661	919	993	1−	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	001	021	164	500	836	979	999	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	007	081	339	713	945	997	1−	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	002	035	202	556	880	991	1−	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	001	013	105	388	771	973	1−	1−	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	004	047	237	618	928	999	1−	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	001	017	124	440	840	994	1−	1−	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	054	269	695	977	999	1−	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	019	136	501	927	995	1−	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	054	297	807	974	1−	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	016	133	592	895	998	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	040	315	679	978	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	089	307	794	23

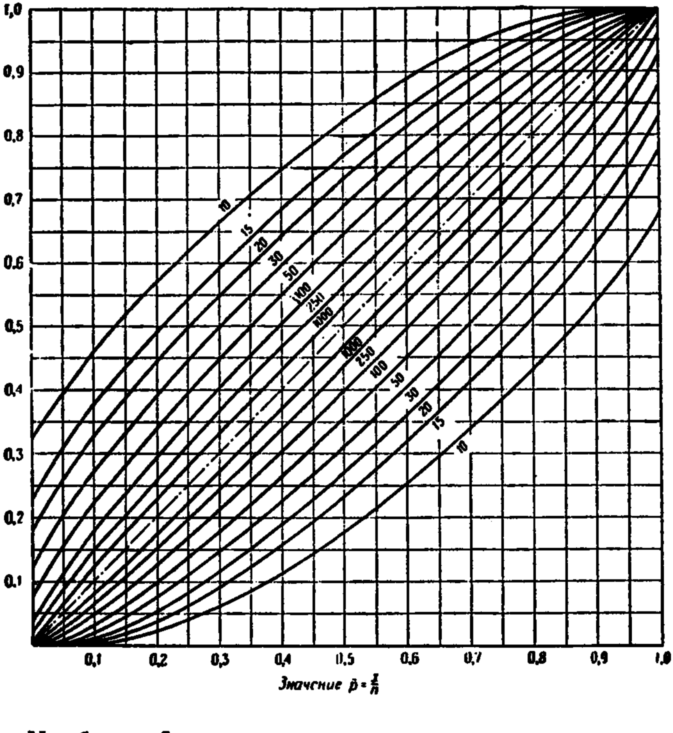
Часть Б: Совокупные вероятности $\sum_{x=r}^{n} b(x; n; p)$

n	r	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
24	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	214	708	920	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	024	339	708	967	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	002	116	436	885	988	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	030	214	736	958	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	006	085	540	889	987	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	001	028	344	771	960	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	007	189	611	904	989	999	1−	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	002	089	435	808	968	998	1−	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	036	275	672	924	992	1−	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	013	153	511	846	978	999	1−	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	004	074	350	729	947	996	1−	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	001	031	213	581	886	988	1−	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	012	114	419	787	969	999	1−	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	004	053	271	650	926	996	1−	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	001	022	154	489	847	987	1−	1−	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	008	076	328	725	964	1−	1−	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	002	032	192	565	911	998	1−	1−	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	096	389	811	993	1−	1−	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	040	229	656	972	999	1−	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	111	460	915	994	1−	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	042	264	786	970	1−	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	115	564	884	998	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	033	292	661	976	23
	24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	080	292	786	24
25	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	222	723	928	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	026	358	729	973	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	002	127	463	902	991	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	034	236	766	967	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	007	098	579	910	991	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	001	033	383	807	971	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	009	220	659	926	993	1−	1−	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	002	109	488	846	978	999	1−	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	047	323	726	946	996	1−	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	017	189	575	885	987	1−	1−	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	006	098	414	788	966	998	1−	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	002	044	268	655	922	994	1−	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	017	154	500	846	983	1−	1−	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	006	078	345	732	956	998	1−	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	002	034	212	586	902	994	1−	1−	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	013	115	425	811	983	1−	1−	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	004	054	274	677	953	1−	1−	1−	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	001	022	154	512	891	998	1−	1−	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	074	341	780	991	1−	1−	19

Часть Б: Совокупные вероятности $\sum_{x=r}^{n} b(x; n; p)$

n	r	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
25	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	029	193	617	967	999	1—	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	009	090	421	902	993	1—	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	033	234	764	966	1—	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	009	098	537	873	998	23
	24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	027	271	642	974	24
	25	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	072	277	778	25

Номограмма для нахождения 95%-ного доверительного интервала для вероятности p успеха в одном биномиальном испытании



Чтобы найти границы доверительного интервала для p, восставьте перпендикуляр к горизонтальной оси из точки, абсцисса которой равна наблюдаемому значению $\bar{p}$. После этого определите ординаты точек пересечения перпендикуляра с двумя кривыми, отвечающими заданному значению n. Пример: при $\bar{p} = 0{,}3$, $n = 50$ нижняя граница 95%-ного доверительного интервала равна 0,18, верхняя граница равна 0,45.

Литература

КНИГИ И СТАТЬИ ДЛЯ НАЧИНАЮЩИХ

1. Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, М., «Наука», 1964.

2. Колмогоров А. Н., Введение в теорию вероятностей и комбинаторику; Гнеденко Б. В., Журбенко И. Г., Теория вероятностей и комбинаторика; Вейц Б. Е., Элементы теории вероятностей и комбинаторики, Математика в школе, 1968, № 2, стр. 63—72; № 2, стр. 72—84 и № 3, стр. 30—49; № 6, стр. 37—49 и 1969, № 1, стр. 63—74.

Статьи [2] преследуют цель дать материал для факультативных занятий с учащимися старших классов средней школы.

3. Кальбертсон Дж. Т., Математика и логика цифровых устройств, М., «Просвещение», 1965.

Гл. III этой рассчитанной на начинающего читателя книги, содержащей много упражнений для самостоятельного решения, посвящена теории вероятностей.

4. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж., Введение в конечную математику, М., «Мир», 1964.

Эта книга по характеру близка к предыдущей, но несколько сложнее ее. Гл. IV книги посвящена теории вероятностей; последующие три главы содержат дальнейшее развитие намеченных в гл. IV тем.

5. Борель Э., Случай, М. — Птр., ГИЗ, 1923.

6. Борель Э., Вероятность и достоверность, М., «Наука», 1964.

Книги [5] и [6] принадлежат одному из крупнейших математиков начала нашего столетия; они рассчитаны на широкого читателя (меньшая по объему книга [6] еще заметно доступнее книги [5]) и содержат в первую очередь обсуждение связанных с теорией вероятностей общих проблем.

7. Розанов Ю. А., Теория вероятностей и ее приложения, сборник «О некоторых вопросах современной математики и кибернетики», М., «Просвещение», 1965, стр. 78—141.

Обстоятельная статья, рассчитанная на учителей средних школ.

8. Дынкин Е. Б., Успенский В. А., Математические беседы, М. — Л., Гостехиздат, 1952.

Последний из трех разделов этой общедоступной книги, представляющей собой сборник задач, сопровождаемых обстоятельным комментарием к ним и подробными решениями, собранными в конце книги, посвящен одной теме из теории вероятностей (теория цепей Маркова).

9. Кофман А. и Фор Р., Займемся исследованием операций, М., «Мир», 1966.

Несколько из многочисленных небольших глав, на которые разбита эта рассчитанная на широкого читателя книга, связаны с теорией вероятностей.

10. Яглом А. М., Яглом И. М., Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., Гостехиздат, 1954.

В первой из двух частей этой книги собраны 100 задач из комбинаторики и теории вероятностей, условия которых сопровождаются необходимыми пояснениями; в конце книги приведены подробные решения всех задач.

11. Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, сборник «Математика, ее содержание, методы и значение», т. II, М., Изд-во Академии Наук СССР, 1956, стр. 252—284.

12. Кац М., Теория вероятностей, сборник «Математика в современном мире», М., «Мир», 1967, стр. 78—93.

Принадлежащие выдающимся ученым статьи [11] и [12] содержат общую характеризацию теории вероятностей.

13. Лаплас П.-С., Опыт философии теории вероятностей, М., 1908.

Классическое сочинение одного из основоположников теории вероятностей.

14. Razzel A. G., Watts K. G. O., Probability: the science of chance, London, 1967.

15. Guerber L., Hennequin P. L., Initiation à la statistique, Paris, 1967; Guerber L., Hennequin P. L., Initiation aux probabilités, Paris, 1968.

16. Freudenthal H., Wahrscheinlichkeit und Statistik, München, 1963. (Эта книга издана также на голландском и английском языках.)

17. Hodges S. L., Lehmann E. L., Elements of finite probability, San Francisco, 1965.

18. Gangolli R. A., Ylvisaker P., Discrete probability, New York, 1967.

Книги [14]—[18] представляют собой учебники теории вероятностей, рассчитанные на начинающих — на учащихся старших классов средней школы [14]—[16] или на студентов младших курсов высшей школы [16]—[18].

19. Mosteller F., Rourke R., Tomas G. B., Probability with statistical applications, Reading Mas., 1961.

Более ранний вариант настоящей книги, содержащий, в частности, несколько больше материала по математической статистике.

20. Мизес Р., Вероятность и статистика, М. — Л., ГТТИ, 1930.

См. также книги [28] и [42].

УЧЕБНИКИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

21. Гливенко В. И., Теория вероятностей, М., Учпедгиз, 1937.

Учебник для педагогических институтов.

22. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, М., «Наука», 1965.

Учебник для университетов.

23. Венцель Е. С., Теория вероятностей, М., «Наука», 1964.

Учебник для высших технических учебных заведений.

24. Розанов Ю. А., Лекции по теории вероятностей, М., «Наука», 1968.

25. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ч. I, М., «Мир», 1964.

1-я часть обстоятельного курса выдающегося математика и педагога специально посвящена дискретным распределениям вероятностей.

26 Марков А. А., Исчисление вероятностей, М., ГИЗ, 1924.

27. Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, М., Гостехиздат, 1946.

Книги [26] и [27] — классические учебники теории вероятностей, принадлежащие ученым, внесшим фундаментальные вклады в эту науку.

28 Нейман Ю., Вводный курс теории вероятностей и математической статистики, М., «Наука», 1968.

Содержание этого доступно написанного учебника, принадлежащего выдающемуся статистику, хорошо передает последовательность глав: гл. I — Введение; гл. II — Теория вероятностей; гл. III — Вероятностные задачи генетики; гл. IV — Случайные величины; гл. V — Испытания статистических гипотез.

29. Фрай Т., Теория вероятностей для инженеров, ГТТИ, М., 1936.

См. также книги [32], [33] и [34].

ЗАДАЧНИКИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

30 Гиленко Н. Д., Задачник по теории вероятностей, М., Учпедгиз, 1943.

Задачник для студентов педагогических институтов.

31. Мешалкин Л. Д., Сборник задач по теории вероятностей, М., Изд. МГУ, 1963.

Задачник для студентов университетов.

32. Венцель Е. С., Овчаров Л. А., Теория вероятностей, М., «Наука», 1969.

Задачник для студентов ВТУЗ'ов.

33. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, ч. 3, М. — Л., ГТТИ, 1938.

Последний раздел этого обширного задачника для студентов математических отделений университетов посвящен теории вероятностей.

34. Mosteller F., Fifty challenging problems in probability with solutions, Reading (Mas.), 1965.

См. также книги [3], [4], [10], [17]—[19], [22], [25], [27], [28].

КНИГИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

35. Арлей Н. и Бух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, М., ИЛ, 1951.

36. Смирнов Н. В. и Дунин-Барковский И. В., Краткий курс математической статистики для технических приложений, М., Физматгиз, 1959.

37. Худсон Д., Статистика для физиков, М., «Мир», 1967.

См. также книги [15], [19], [20], [22] *) и [28].

*) В последнем издании этой книги материал по математической статистике исключен — см. изд. 3-е (М., Физматгиз, 1961) и более ранние.

ПОСОБИЯ ПО ТЕОРИИ ИГР И ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

38. Вентцель Е. С., Элементы теории игр, М., Физматгиз, 1961.

    Популярная брошюра, рассчитанная на учащихся средней школы.

39. Вильямс Д. Дж., Совершенный стратег или Букварь по теории стратегических игр, М., «Сов. радио», 1960.

    Элементарное введение в теорию игр.

40. Мак Кинси Дж., Введение в теорию игр, М., Физматгиз, 1960.

    Учебник для студентов-математиков; имеются упражнения для самостоятельного решения.

41. Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., «Мир», 1968.

    Обстоятельное сочинение, рассчитанное на достаточно широкий круг читателей (начиная со студентов-математиков младших курсов); имеется много ярких и подробно разобранных примеров.

42. Яглом А. М., Яглом И. М., Вероятность и информация, М., Физматгиз, 1960.

    Элементарное введение в теорию информации.

43. Бриллюэн Л., Наука и теория информации, М., Физматгиз, 1959.

44. Колмогоров А. Н., Теория передачи сообщений, сборник «Сессия Академии Наук СССР по научным проблемам автоматизации производства 15—20 окт. 1956 г.; пленарные заседания», М., Изд-во Академии Наук СССР, 1957, стр. 66—69.

См. также книги и статьи [4], [7], [9], [16], [24].

СВОДКА ФОРМУЛ

А. Методы подсчета

1. Принцип умножения. Если для k действий i-е действие ($i=1, 2, \ldots, k$) можно выполнить n_i способами, то все k действий можно выполнить $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_3 \times n_k$ способами.

2. Принцип сложения. Если два действия взаимно исключают одно другое, причем одно из них можно выполнить m способами, а другое — n способами, то какое-либо одно из них можно выполнить $m+n$ способами.

3. Число перестановок из n различных объектов по r (порядок учитывается) равно $P_n^r = n!/(n-r)!$.

Число перестановок из n (различных) объектов равно $P_n^n = P_n = n!$

Число сочетаний из n различных объектов по r (порядок не учитывается) равно $C_n^r = n!/[(n-r)!\, r!]$.

4. Число перестановок множества из n объектов, принадлежащих к k типам (i-му типу принадлежат n_i объектов; $\sum n_i = n$), равно $n!/[n_1!\; n_2! \ldots n_k!]$.

Особый случай. При $k=2$ (r объектов одного типа, $(n-r)$ — другого) число всех перестановок из n объектов равно $\binom{n}{r}$.

5. Правило Паскаля. $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$, $1 \leqslant r \leqslant n$.

Б. Биномиальные формулы

1. Формула бинома Ньютона.

$$(q+p)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

2. Биномиальное приближение. Если $|nx|$ мало, то $(1+x)^n \approx 1+nx$.

В. Множества и вероятности

[*Обозначения:* S есть пространство событий; A, B, C, A_i, H_i, E — подмножества S; $\emptyset$ — пустое множество; $P(A)$ — вероятность A; $P(\emptyset)=0$.]

1. Аксиомы. I. $P(A) \geqslant 0$. II. $P(S)=1$. III. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$.

2. Вероятность объединения.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

3. Вероятность дополнения. Если $A \cup \bar{A} \neq S$ и $A \cap \bar{A} = \emptyset$, то $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

4. Разбиения. Если подмножества A_i образуют разбиение S, то $\sum P(A_i) = 1$.

5. Условная вероятность.

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B), \quad P(B) \neq 0.$$

Правила цепочки. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$;

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

и так далее.

Независимость. Если A и B независимы, то

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

6. Теорема Байеса. Если подмножества H_i образуют разбиение S, то

$$P(H_i|E) = P(H_i \cap E) \cdot P(E) = P(H_i \cap E) / \sum P(H_i \cap E) = P(H_i) \cdot P(E|H_i) / \sum P(H_i) P(E|H_i).$$

7. Шансы. Если $P(A) = m/n$, то шансы в пользу A равны $\frac{m}{m+n}$. Если шансы в пользу A равны a/b, то $P(A) = \frac{a}{a+b}$.

Г. Совокупности: средние значения и дисперсии

[*Обозначения* : X и Y суть случайные величины со значениями x_i и y_i; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайные величины; a и b — числа; $P(X = x_i) = f(x_i)$; $E(X)$ есть среднее значение X; σ_i^2 есть дисперсия X_i.]

1. Среднее значение или математическое ожидание.

$$\mu_X = E(X) = \sum x_i f(x_i); \quad \mu_{aX+b} = a\mu_X + b.$$

2. Дисперсия. $\sigma_X^2 = D(X) = E(X - \mu_X)^2 = E(X^2) - \mu_X^2.$

$$\sigma_{aX+b}^2 = a^2\sigma_X^2.$$

Стандартное отклонение.

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}; \quad \sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X.$$

3. Стандартизованная случайная величина Z. Если $Z = (X - \mu_X)/\sigma_X$, то $\mu_Z = 0$, $\sigma_Z = 1$.

4. Теорема Чебышева.

$$P(|X - \mu| > h\sigma) \leqslant 1/h^2; \quad P(|X - \mu| \leqslant h\sigma) \geqslant 1 - 1/h^2.$$

5. Суммы.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y); \quad E\left(\sum X_i\right) = \sum E(X_i).$$

Если X и Y независимы, то

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2, \quad \sigma_{aX+bY}^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2,$$

$$\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2, \quad E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = \mu_X \cdot \mu_Y.$$

Д. Теория выборок

[*Обозначения:* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть случайные величины; среднее значение величины X_i равно μ_i, дисперсия величины X_i равна σ_i^2.]

1. Среднее значение и дисперсия суммы. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, то

$$E\left(\sum X_i\right) = \sum \mu_i,$$

$$D\left(\sum X_i\right) = \sum \sigma_i^2.$$

2. Для n одинаково распределенных независимых случайных величин X_i со средними значениями $\mu_i=\mu$ и дисперсиями $\sigma_i^2=\sigma$, если $\bar{X}=\sum X_i/n$, то $E(\bar{X})=$ $=\mu$ и $\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$.

3. Биномиальное распределение.

$$b(x;\ n;\ p)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Если X есть число успехов, а $\bar{p}$ есть доля успехов $\left(\bar{p}=\frac{X}{n}\right)$, то

$$E(X)=np;\ \sigma_X^2=np(1-p);\ E(\bar{p})=p;\ \sigma_{\bar{p}}^2=p(1-p)/n.$$

Е. Выборки

[*Обозначения*: Для сгруппированных данных значение x_i встречаются n_i раз, $\sum n_i=n$; если же данные не группируются, то $n_i=1$, но значения x_i могут совпадать при различных i, $i=1, 2, \ldots, n$.]

1. Сгруппированные данные.

$$\bar{x}=\sum x_i n_i/n,\quad s^2=\sum(x_i-\bar{x})^2 n_i/n=\sum x_i^2 n_i/n-\bar{x}^2.$$

2. Несгруппированные данные.

$$\bar{x}=\sum x_i/n,\quad s^2=(x_i-\bar{x})^2/n=\sum x_i^2/n-\bar{x}^2.$$

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\approx$	приблизительно равно
$\sum$	сумма
$\binom{n}{r}$	биномиальный коэффициент; обозначается также через C_n^r

Заглавные буквы: обычно обозначают множество или случайную величину

S	пространство событий
e_i	элементарное событие
E_i	множество, состоящее из одного элементарного события e_i
$\bar{A}$	дополнение к множеству A
$P(A)$	вероятность A
$A \cup B$	объединение множеств A и B
$A \cap B$	пересечение множеств A и B
$\mid$	при условии
$\{\ \}$	множество, состоящее из
$x \in A$	элемент x принадлежит множеству A
$\emptyset$	пустое множество
:	такой, что
H_i	гипотеза
$P(H_i)$	априорная вероятность H_i
$P(H_i \mid E)$	апостериорная вероятность H_i при условии E
$E(X)$	математическое ожидание, или среднее значение X
μ	среднее значение в совокупности, часто употребляется с индексом
$\bar{x}$	выборочное среднее

σ	стандартное отклонение для совокупности, часто с индексом
s	выборочное стандартное отклонение
σ^2	дисперсия в совокупности, часто с индексом
s^2	выборочная дисперсия
n	количество объектов в выборке
$\square$	конец доказательства

Оглавление

Ф. Мостеллер, Р. Рурке,
Дж. Томас

ВЕРОЯТНОСТЬ

Редактор *А. А. Бряндинская*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Т. А. Мирошина*

Сдано в производство 10/I 1969 г.
Подписано к печати 3/VI 1969 г.
Бумага № 3 $84 \times 108^1/_{32}$=6,75 бум. л.
21,68 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 19,78
Изд. № 1/5050. Цена 1 р. 36 к. Зак. 11

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29.