Ю. П. ШЕВЕЛЕВ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЛАНЬ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2021

УДК 51
ББК 22.176я723

Ш 38 **Шевелев Ю. П.** Дискретная математика : учебное пособие для СПО / Ю. П. Шевелев. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 592 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-8114-7504-9

Представлено пять тем: теория множеств, булева алгебра логики, теория конечных автоматов, комбинаторика и теория графов. Из теории множеств освещены темы: алгебра множеств, бинарные отношения, бесконечные множества, теория нечетких множеств. Из булевой алгебры — минимизация булевых формул в дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных формах с учетом неопределенных состояний, булевы уравнения, первые сведения о булевом дифференциальном и интегральном исчислении. Из теории конечных автоматов — синтез логических (комбинационных) и многотактных схем, теорема Поста о функциональной полноте. Из комбинаторики — размещения, сочетания и перестановки с повторениями и без повторений, разбиение множеств и др. Из теории графов — графы и ориентированные графы, сети, деревья и др. Приведено более 2600 задач и упражнений для самостоятельной работы и 620 задач для контрольных работ. Ко всем упражнениям для самостоятельной работы приведены ответы.

Для студентов технических специальностей колледжей и техникумов, школьников старших классов общеобразовательных школ и всех желающих самостоятельно пройти вводный курс прикладной дискретной математики.

УДК 51
ББК 22.176я723

Рецензенты:

Я. Н. НУЖИН — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета (г. Красноярск);

Ю. В. КАРЯКИН — кандидат технических наук, зав. отделом информатизации образования Томского политехнического университета.

Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Что такое **дискретная математика**? Какими признаками характеризуются входящие в нее разделы? Хотя в целом границы, определяющие дискретную математику, в значительной степени являются условными, все же можно указать на признак, позволяющий достаточно четко разделить всю современную математику на две составляющие. Суть этого признака заключена в самом названии «дискретная математика», где дискретность выступает как противоположность непрерывности, обозначающая отсутствие понятия предельного перехода. С этой точки зрения в дискретную математику могут быть включены такие разделы, как теория множеств, теория дискретных автоматов, математическая логика, теория графов и сетей, комбинаторика, векторная и матричная алгебры, теория чисел, теория конечных групп, колец и полей, теория алгебраических систем, теория алгоритмов и многие другие. С позиций «чистой» математики среди этих разделов нет второстепенных. С прикладной же точки зрения не все разделы одинаково важны. Это обстоятельство накладывает определенные ограничения на подбор материала для учебного пособия, чтобы не слишком обременять студентов избыточной информацией, особенно на начальном этапе знакомства с элементами дискретной математики.

Данное пособие предназначено не для математиков, оно ориентировано на студентов, обучающихся в **технических** колледжах и техникумах, в учебных программах которых предусмотрены предметы, связанные с электроникой, информатикой и вычислительной техникой. В связи с этим в пособие включены разделы дискретной математики, имеющие прямое отношение к электронике, вычислительной технике и информатике: теория множеств, булева алгебра логики, теория конечных автоматов, комбинаторика и теория графов. Эти разделы отличаются наиболее яркой прикладной направленностью.

Раздел «Теория конечных автоматов» представлен примерами применения булевой алгебры для синтеза электронных логических схем — комбинационных и многотактных. Некоторое внимание уделено синтезу контактных структур.

Всего пособие содержит около 3200 задач и упражнений: 2600 из них предназначены для самостоятельной работы и 620 — для контрольных работ. В основном упражнения просты, и для их выполнения достаточно ознакомиться с соответствующими теоретическими положениями, но есть и трудные задачи, для решения которых могут потребоваться значительные усилия и повторные обращения к теории. Пропускать такие задачи не следует, так как именно они определяют глубину изучения материала и качество его усвоения.

Данное пособие входит в дидактический фонд информационно-дидактической системы «Символ» (разработка ТУСУРа), отличающейся тем, что в ее концептуальную основу заложен принцип интеграции традиционных и компьютерных учебников. Компьютерная составляющая всех пособий системы «Символ» представлена возможностью самоконтроля при помощи технических средств — компьютеров или специализированных устройств «Символ-Тест», разработанных в ТУСУРе для автоматизации контроля (и самоконтроля) самостоятельной работы. Для этого перед условием каждого упражнения (вопроса, задачи) приводится определенный код, называемый кодом задания (КЗ). В этом коде содержится информация о том, в каких случаях введенный ответ должен признаваться правильным, и в каких — неправильным, причем ответом может быть число, формула, слово, фраза и др., и вообще произвольная последовательность знаков, имеющихся на компьютерной клавиатуре. В частности представление ответов возможно и в любых выборочных системах. Действия при самоконтроле крайне просты. Чтобы проверить, правильно ли решена та или иная задача, достаточно набрать на клавиатуре компьютера или устройства «Символ-Тест» код задания, а затем ввести ответ.

В традиционных (издаваемых в полиграфическом исполнении) учебниках и учебных пособиях для самоконтроля обычно применяются системы открытых ответов, отличающиеся только одним достоинством: для их реализации не требуется никаких технических средств. Недостатков же гораздо больше. Во-первых, при наличии открытых ответов характер учебной деятельности существенно деформируется. Так как ответ к задаче известен, то решать ее не надо. Обучающийся, знающий ответ еще до решения задачи, должен лишь обосновать его путем каких-либо рассуждений. Очевидно, что рассуждения могут быть и неверными, но обнаружить это может только преподаватель во время индивидуальной беседы с обучающимся. Во-вторых, в случае простых задач вообще не требуется никаких обоснований. Если обучающийся прочитает условие задачи и тут же посмотрит в раздел «Ответы», то дальше делать ему ничего не надо. Если же он сначала решит задачу, а затем сверит полученный результат с открытым ответом, то и в этом случае действия его закончатся независимо от того, правильно решена задача или неправильно. В-третьих, самопроверка во время внешнего контроля полностью исключена.

Чтобы устранить перечисленные недостатки и тем самым повысить эффективность самостоятельной работы, обучающемуся на каждый его ответ необходимо сообщать только один бит информации вида «правильно-неправильно». Тогда дидактически состоятельными окажутся все задачи, даже самые простые. Однако в рамках существующих бескомпьютерных систем критерий «правильно-неправильно» без сообщения самого ответа реализовать невозможно. Именно поэтому во всех дидактических материалах системы «Символ» предусмотрен автоматизированный самоконтроль при помощи кодов заданий. В данном пособии все задачи также закодированы. В принципе для реализации самоконтроля вполне можно ограничиться только кодами заданий. Однако в пособии наряду с кодами решено привести и открытые ответы ко всем упражнениям (за исключением контрольных работ). Такое решение объясняется тем, что автоматизация самоконтроля в учебных заведениях нашей страны все еще находится на начальной стадии и массовостью пока не отличается. Благодаря открытым ответам пособие можно применять и в бескомпьютерных системах обучения (хотя и с недостаточно высокой эффективностью), не обращая внимания на коды заданий. При наличии же устройств «Символ-Тест» или их компьютерных аналогов следует действовать наоборот, т. е. самоконтроль осуществлять только на основе кодов заданий, не обращая внимания на открытые ответы. Особенно эта рекомендация относится к лицам, стремящимся не только получить определенные сведения в области дискретной математики, но и максимально развить свое комбинаторное мышление.

Данное пособие содержит только вводные сведения по вышеперечисленным темам дискретной математики. Вообще же необходимо отметить, что по всем разделам дискретной математики существует обширная литература. В основном это монографии, журнальные статьи и учебные пособия. И монографии, и журнальные статьи не могут быть рекомендованы студентам технических вузов, особенно при первом знакомстве с основами тех или иных направлений дискретной математики, поскольку они предназначены, как правило, для математиков-профессионалов. Существующие учебные пособия (например, [16; 28; 32; 43; 44]), написаны не так академично, как журнальные статьи и монографии, то есть в гораздо более доступном изложении, но все же надо отметить, что их авторы больше ориентируются на студентов университетов, изучающих математику как свою будущую специальность, чем на студентов технических вузов, для которых математика — инструмент для практической деятельности.

Кроме учебных пособий, существуют научно-популярные издания, например [8; 34; 49]. В большинстве случаев они не содержат сведений, необходимых инженеру в его практической работе. По ним невозможно изучить какой-либо раздел математики. Но это не значит, что читать их бесполезно. Даже сложные понятия (типа простой импликанты в булевой алгебре или функционально полной системы в теории комбинационных схем), если они описаны достаточно популярно, легко воспринимаются при чтении, после чего без особого труда узнаются при изучении специальных изданий.

При подготовке данного пособия автор стремился в основном к доступному изложению материала (за счет определенного снижения строгости), чтобы его с малыми затратами труда и времени могли освоить как студенты технических вузов, так и школьники старших классов общеобразовательных школ, и вообще каждый, кто изъявит желание ознакомиться с вводными понятиями дискретной математики. Пособие написано в соответствии с программой подготовки и выпуска учебных пособий, разработанной кафедрой высшей математики ТУСУРа.

Автор выражает глубокую благодарность заведующему кафедрой высшей математики ТУСУРа, профессору Леониду Иосифовичу Магазинникову за активное содействие в работе над пособием на всех ее этапах — от замысла до опубликования; доктору физико-математических наук, профессору кафедры МОДУС (математическое обеспечение дискретных устройств и систем) Института фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета (г. Красноярск) Якову Нифантьевичу Нужину, внимательно прочитавшему рукопись и высказавшему ряд замечаний, что во многом способствовало улучшению содержания пособия; доктору технических наук, профессору кафедры защиты информации и криптографии Томского государственного университета Александру Михайловичу Оранову за участие в обсуждении вопросов, относящихся к информационному наполнению пособия; начальнику СКБ «Импульс», кандидату технических наук, доценту кафедры промышленной электроники ТУСУРа Михаилу Юрьевичу Шевелеву, проверившему решения и коды большей части задач пособия и разработавшему систему автоматического кодирования заданий, применение которой позволило многократно сократить трудозатраты на кодирование упражнений, и заведующему отделом информатизации образования Томского политехнического университета кандидату технических наук Юрию Васильевичу Карякину, рассмотревшему пособие с позиций автоматизации самоконтроля и внесшему ряд рекомендаций по его представлению в виде компьютерного учебника.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

ВВЕДЕНИЕ

Основные положения теории множеств впервые были разработаны чешским философом, математиком и логиком, профессором теологии (г. Прага) Бернардом Больцано (1781–1848), немецким математиком Рихардом Дедекиндом (1831–1916) и немецким математиком, профессором (с 1872 г.) Галльского университета Георгом Кантором (1845–1918). Г. Кантор внес в теорию множеств (особенно бесконечных) наибольший вклад, поэтому теория множеств в основном связана с его именем.

В дальнейшем теория множеств развивалась благодаря усилиям многих исследователей. Среди них такие видные ученые, как Альфред Норт Уайтхед (1861–1947) — английский математик, логик и философ; Лейтзен Эгберт Ян Брауэр (1881–1966) — голландский математик, основоположник интуиционистской математики; Герман Вейль (1885–1955) — немецкий математик, физик и философ; Хаскелл Брукс Карри (род. 1900) — американский математик, логик и философ; Бертран Рассел (1872–1970) — английский философ и логик и др.

Исследуя бесконечные множества, Г. Кантор ввел понятие трансфинитного числа для количественной оценки множества, содержащего бесконечно много элементов. Бесконечное множество он рассматривал как некоторый вполне определенный объект подобно конечным множествам. В связи с этим для количественной оценки множеств он применял трансфинитные числа наряду с натуральными. Такое представление о бесконечности по тем временам было настолько большой новостью, что далеко не все математики признавали работы Г. Кантора. Например, против его теории множеств выступали интуиционисты во главе с Л. Брауэром, по мнению которых главный порок теории Г. Кантора состоит в том, что на бесконечные множества переносятся правила, относящиеся к конечным множествам [25].

Официально теория множеств была признана лишь в 1897 г., когда Ж. Адамар (1865–1963) и А. Гурвиц на Первом международном конгрессе математиков в своих докладах привели многочисленные примеры применения теории множеств в различных математических работах [16, с. 46], вследствие чего она была признана в качестве самостоятельного раздела математики.

В дальнейшем обнаружилось, что канторовский подход к теории множеств не лишен изъянов, проявляющихся в виде парадоксов. В связи с этим теорию Г. Кантора стали называть «наивной» теорией множеств, чтобы отличать ее от теории множеств, построенной на аксиоматической основе.

В современном представлении теория множеств — это раздел математики, в котором изучаются общие свойства конечных и бесконечных множеств.

Главным в теории множеств является вопрос о том, как определить множество, т. е. указать способ, при помощи которого можно было бы однозначно установить, принадлежит ли данный объект заданному множеству или не принадлежит.

В настоящее время теория множеств быстро развивается в различных направлениях и проникает во многие области современной науки. В данном же пособии она представлена лишь четырьмя разделами: алгебра множеств, бинарные отношения, бесконечные множества и элементы теории нечетких множеств. Для начального знакомства с теорией множеств этих разделов при надлежащем их освоении вполне достаточно. В дальнейшем они могут составить основу для более глубокого изучения тех или иных разделов современной теории множеств, если в углубленном их освоении возникнет необходимость.

1 АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

1.1. МНОЖЕСТВА

Понятию множества невозможно дать точное определение, поскольку оно является первичным, предельно широким по содержанию. Его можно лишь пояснить. О том, какой смысл вкладывал в это понятие сам Георг Кантор, можно получить представление из следующих цитат, авторы которых ссылаются на Г. Кантора:

«Под *множеством* понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью» [16, с. 6];

«Под *множеством* S будем понимать любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое» [32, с. 5];

«*Множество* есть многое, мыслимое нами как единое целое» [8, с. 21] и т. д.

Объекты, из которых состоят множества, называются их **элементами**. Принадлежность элемента a множеству P записывают так:

$$a \in P,$$

где $\in$ — **знак принадлежности**. Он представляет собой видоизмененную букву ε греческого алфавита, с которой начинается слово εστι, по-русски обозначающее «есть» [25, с. 355].

Читается запись следующим образом: «a есть элемент множества P», либо «a является элементом множества P», либо «элемент a принадлежит множеству P».

При необходимости указать несколько элементов, принадлежащих множеству P, все их перечисляют перед знаком $\in$. Например, запись $a, b, c \in P$ говорит о том, что

$$a \in P, \text{ и } b \in P, \text{ и } c \in P.$$

Если же элемент a не принадлежит множеству P, то пишут $a \notin P$.

Если множеству P не принадлежит несколько элементов, например, a, b, c, то записывают

$$a, b, c \notin P.$$

Множество может содержать любое число элементов, **конечное** и **бесконечное**. Множество может содержать один элемент и не содержать ни одного. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** множеством и обозначается символом $\varnothing$.

Множество, содержащее один элемент, называется **синглетоном** [25, с. 542] (от англ. *single* — одиночный).

Задают множества двумя основными способами:

а) путем прямого перечисления его элементов. При этом перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки и отделяются один от другого запятыми. Например, запись

$$P = \{a, b, c, d\}$$

говорит о том, что множество P состоит из четырех элементов a, b, c, d;

б) при помощи специально сформулированного правила, или свойства, в соответствии с которым всякий объект либо входит в множество, либо не входит (интуитивный принцип абстракции [32, с. 6]). В [32] такое правило называют формой $P(x)$. Множество, задаваемое формой $P(x)$, имеет вид

$$A = \{x \mid P(x)\}.$$

Например, множество десятичных цифр можно задать следующим образом:

$$P = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 9 \wedge x \text{ — целое число}\},$$

где слева от вертикальной черты записана переменная x, а справа — правило (форма $P(x)$, согласно [32]), указывающее, какие значения x образуют элементы, принадлежащие множеству P, и какие не образуют. Читается запись так: «множество P — это все те значения x, которые больше нуля или равны ему, но меньше или равны девяти и являются целыми числами». Знак $\wedge$ обозначает союз И. Вместо него можно ставить знак &, который также обозначает союз И:

$$P = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 9 \;\&\; x \text{ — целое число}\}. \tag{1}$$

Допускается и такая запись, где вместо логических знаков $\wedge$ и & ставится запятая либо точка с запятой:

$$P = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 9,\ x \text{ — целое число}\}.$$
$$P = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 9;\ x \text{ — целое число}\}.$$

При этом необходимо помнить, что и запятая, и точка с запятой заменяют союз И.

Вместо вертикальной черты, отделяющей переменную x от формы $P(x)$, в литературе встречается двоеточие [25, с. 355]:

$$P = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 9,\ x \text{ — целое число}\},$$

а также точка [37, с. 205]:

$$P = \{x \cdot P(x)\}.$$

Буква x в записи множества сама по себе не является элементом множества P. Она представляет собой переменную, которая может принимать различные значения из некоторой области. В случае выражения (1) вместо переменной x можно подставлять любые числа. Но из них в множество P войдут лишь десять чисел: 0, 1, 2, ..., 9. Число 10 в множество P не входит, поскольку оно не удовлетворяет свойству $x \leqslant 9$. Не войдет в множество P и число 3,5, так как в P могут входить лишь целые числа.

Множества называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов (интуитивный принцип объемности [32, с. 5]). Например:

$$\{a, b, c, d\} = \{b, c, a, d\}.$$

Элементы этих множеств записаны в различных последовательностях, но наборы элементов совпадают, поэтому множества равны, так как **порядок** записи элементов, образующих множество, **не имеет значения**.

Равными могут быть также множества, заданные различными способами. Например:

$$P = \{x \mid 0 < x < 10, x \text{ — простое число}\},$$
$$Q = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Здесь множество P образуют все значения x, меньшие 10 и входящие в множество простых чисел. Это числа — 2, 3, 5, 7. Множество Q образуют те же простые числа, но указанные прямым перечислением. Следовательно, $P = Q$.

В некоторых случаях, когда множества задаются прямым перечислением, для того чтобы выяснить, равны ли множества, необходимо уточнять понятие равенства элементов. Например, являются ли равными следующие множества:

$$P = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\};$$
$$Q = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81}, \sqrt{256}\right\}?$$

Эти множества не равны, поскольку по форме представления их элементы не совпадают. Но эти множества будут равными, если считать, что их элементы представляют собой натуральные десятичные числа, заданные с использованием математических операций. Достаточно выполнить эти операции, и мы в обоих случаях получим одно и то же множество $\{1, 4, 9, 16\}$, откуда и следует, что $P = Q$.

Для обозначения множеств в общем случае можно использовать любые знаки, но в основном их обозначают прописными буквами латинского алфавита, возможно с применением цифровых или буквенных индексов.

Всякое множество характеризуется величиной, которую называют (по Г. Кантору) **кардинальным числом**, показывающим, сколько элементов содержит множество. Для обозначения числа элементов множества часто используют две вертикальные черты, между которыми записывается само множество или его обозначение.

Например, если

$$P = \{a, b, c\},$$

то его кардинальное число равно

$$|P| = |\{a, b, c\}| = 3.$$

Множества с одинаковыми кардинальными числами (имеющими поровну элементов) называются **эквивалентными.**

Для записи числа элементов множества A используют и другие обозначения. Например, в [20, с. 11] читаем: «Будем обозначать через $N(A)$ количество элементов множества A».

Завершим данный подраздел замечанием о **повторяемости** элементов в множестве. Могут ли в множество входить одни и те же элементы более одного раза? Нет, не могут. Все элементы множества должны отличаться один от другого, поэтому **каждый элемент может входить в множество только один раз.** Тогда возникает вопрос, можно ли считать множеством, например, следующее:

$$P = \{1, 1, 2\}?$$

Это множество, но состоящее не из трех элементов, а только из двух, т. е.

$$P = \{1, 1, 2\} = \{1, 2\},$$

и его кардинальное число равно двум. Таким образом, в записи множества некоторые элементы, в принципе, могут быть указаны многократно, но учитываться они должны только по одному разу.

В тех случаях, когда требуется показать, что те или иные элементы входят в множество неоднократно, следует применять термин «семейство» и вместо фигурных скобок использовать круглые скобки.

Упражнения

1. (ВХМ). Пусть A — множество простых чисел. Укажите номера верных записей:

1) $1 \in A$; 2) $2 \in A$; 3) $0 \in A$; 4) $19 \in A$; 5) $23 \in A$.

2. (ШИВ)! Сколько элементов в множествах:

а) $\{a, b, c, aa, bc\}$; в) $\{1, 2, 3, 123, 12\}$; д) $\{11, 22, 11, 12\}$;
б) $\{a, b, c, a, b, c\}$; г) $\{111, 22, 2, 33\}$; е) $\{1, 11, 111, 1\}$?

3. (ТИ.ШК). Известно, что $a, b, c \in Q$. Кроме того, известно, что $1, 5, 7 \in Q$. Других элементов в множестве Q нет. Перечислите все элементы множества Q.

4. (Ш6.Ш6). Укажите элементы множества, составленного из букв слова ЭЛЕМЕНТ.

5. (30.56). Укажите все элементы множества, составленного из всех цифр десятичного числа 1274327.

6. (500). Элементами множества $S = \{P, Q, R\}$ являются:

$$P = \{a, b, c\}; \quad Q = \{1, 2, 3\}; \quad R = \{11, 12, 13\}.$$

Укажите верные записи:

а) $P \in S$; в) $\{a, b, c\} \in \{P, Q, R\}$; д) $\{1, 2, 3\} \in S$;
б) $a \in S$; г) $11 \notin S$; е) $\{P, Q\} \in S$.

7. Укажите: 1) (ВР8) пустые множества; 2) (ФТО) синглетоны:
а) $\{x \mid x \geqslant 1 \wedge x \leqslant 0\}$; в) $\{\varnothing\}$; д) $\{x \mid x < 0 \wedge x = 1\}$;
б) $\{x \mid x > 0 \wedge x = 0\}$; г) $\{x \mid x > 2 \wedge x = 5\}$; е) $\{x \mid x \geqslant 0 \wedge x = 1\}$.

8. Укажите: 1) (ВЗН) пустые множества; 2) (25П) синглетоны:
а) $B = \varnothing$;
б) $B = \{x \mid x = n^2 + 2n - (n + 1)^2 + 1$, n — целое число$\}$;
в) $B = \{x \mid x = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{(n-1)^2}$, n — целое число, $n > 1$, $1 \notin B\}$;
г) $B = \{\varnothing\}$;
д) $B = \{0\}$;
е) $B = \{x \mid x = 2n + 1 \wedge x$ — четное число, n — целое число$\}$.

9. (РУС)! Найдите кардинальные числа каждого из множеств, указанных в предыдущем упражнении.

10. Найдите кардинальные числа множеств.
1) (021). $P = \{x \mid x < 10$, x — натуральное число$\}$.
2) (ЭШУ)! $P = \varnothing$; $P = \{0, \varnothing\}$; $P = \{\varnothing, \{\varnothing\}, 0\}$.
3) (8Д4). $P = \{x \mid x$ — целое число, $|x| < 8\}$.

11. Укажите элементы множеств.
1) (АК.5К). $P = \{x \mid x \in \{a, b, c\}\}$.
2) (68.56). $P = \{x \mid x > 4 \wedge x \in \{3, 4, 5, 7, 8\}\}$.
3) (ЦУ.56). $P = \{x \mid x$ — натуральное число, $x \leqslant 3\}$.

12. (УЖИ). Укажите верные равенства:
а) $\{\{1, 2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$;
б) $\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$;
в) $\{0\} = \{x \mid x$ — целое неотрицательное число $\wedge$ x — ненатуральное число$\}$;
г) $\{1, 2, 3, 5, 7\} = \{x \in A \mid x < 10 \wedge A$ — множество простых чисел$\}$;
д) $\{0, 2, 4, 6, 8\} = \{x \mid x < 9$, x — неотрицательное четное число$\}$;
е) $\{2, 4\} = \{x \mid x$ — решение уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0\}$.
ж) $\{1, 2\} = \{\{1, 2\}, \{2\}\}$.

13. (МО.ШК). Укажите элементы множества:
$P = \{x \mid x$ — название месяца, которое начинается с буквы М$\}$.

14. (ЦВК). Укажите множества, равные множеству $\{2, 4, 6, 8\}$:
а) $P = \{x \mid x = 2n$, n — натуральное число $\wedge$ $n < 5\}$;
б) $P = \{x \mid x = 2n$, n — неотрицательное целое число $\wedge$ $n < 5\}$;
в) $P = \{x \mid x = 2n + 2$, n — неотрицательное целое число $\wedge$ $n < 5\}$;
г) $P = \{x \mid x = 2(n + 1)$, n — неотрицательное целое число $\wedge$ $n \leqslant 3\}$;
д) $P = \{x \mid x = 2n + 2$, n — натуральное число $\wedge$ $n < 5\}$;
е) $P = \{x \mid x = 2n + 2$, n — неотрицательное целое число $\wedge$ $n < 4\}$.

15. (580). Укажите множества с кардинальным числом 5:
а) $Q = \{x \mid x$ — целое число $\wedge$ $|x| \leqslant 2\}$;
б) $Q = \{x \mid x$ — целое неотрицательное число $\wedge$ $x < 6\}$;
в) $Q = \{x \mid x = 3n$, n — целое число $\wedge$ $|n| < 3\}$;
г) $Q = \{x \mid x = n^2$, n — целое неотрицательное число $\wedge$ $n \leqslant 4\}$;

д) $Q = \{x \mid x = n^2, n$ — натуральное число $\wedge\ n \leqslant 4\}$;
е) $Q = \{x \mid x = n^3 - 1, n$ — натуральное число $\wedge\ 6 \leqslant n \leqslant 10\}$;
ж) $Q = \{x \mid x = n^2, n$ — целое число $\wedge\ |n| \leqslant 3\}$;
з) $Q = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2\}, \{1\}\}$.

1.2. ПОДМНОЖЕСТВА

Множество B называется **подмножеством** множества A, если все элементы множества B принадлежат множеству A.

Будем различать следующие две записи:

$$B \subseteq A \text{ и } B \subset A,$$

где символы $\subseteq$ и $\subset$ представляют собой знаки **включения**. Запись $B \subseteq A$ читается следующим образом: «множество B включено в множество A, причем множество A является подмножеством самого себя». Запись $B \subset A$ говорит о том, что все элементы множества B входят в множество A, но само множество A не является своим подмножеством. Здесь просматривается аналогия со знаками $<$ и $\leqslant$, применяющимися при сравнении чисел, где знак $<$ обозначает строгое неравенство, в то время как знак $\leqslant$ допускает и равенство сравниваемых чисел. (Некоторые авторы не различают знаки $\subseteq$ и $\subset$. Например, в [16, с. 6] используется только знак $\subset$ независимо от того, является ли множество своим подмножеством или не является.)

Выясним, сколько всего существует подмножеств данного множества. Запишем элементы заданного множества P в каком-либо порядке и каждому элементу поставим в соответствие двоичный разряд (о двоичных числах см. подраздел 1.1 раздела «Булева алгебра»). Пусть 0 (нуль) обозначает, что соответствующий элемент отсутствует в подмножестве, а 1 — что этот элемент входит в подмножество. Тогда каждому $|P|$-разрядному двоичному числу будет соответствовать определенное подмножество. Известно, что всего существует $2^{|P|}$ $|P|$-разрядных двоичных чисел. Следовательно, число всех подмножеств также равно $2^{|P|}$. Поясним это на примере множества

$$P = \{a, b, c\}.$$

В табл. 1 указаны элементы a, b, c, и под каждым элементом записаны двоичные цифры. В левой колонке приведены десятичные эквиваленты двоичных трехразрядных чисел. В правой части таблицы перечислены сами подмножества. В верхней строке под элементами a, b, c записаны нули. Это значит, что в подмножество с нулевым номером не входит ни один элемент множества P. Следовательно, получаем пустое подмножество.

Таблица 1

№	*abc*	Подмножества	
0	000	$\varnothing$	Несобственное подмножество
1	001	$\{c\}$	Собственные подмножества
2	010	$\{b\}$	
3	011	$\{b, c\}$	
4	100	$\{a\}$	
5	101	$\{a, c\}$	
6	110	$\{a, b\}$	
7	111	$\{a, b, c\}$	Несобственное подмножество

Заметим, что при табличном представлении подмножеств в таблице всегда будет присутствовать строка с номером 0 (нуль), которой соответствует $|P|$-разрядное двоичное число, состоящее из $|P|$ нулей. Следовательно, **пустое множество является подмножеством любого множества**.

В строке с номером 1 под элементом c записана единица. Это значит, что в подмножество с номером 1 входит элемент c, и подмножество имеет вид $\{c\}$. В строке с номером 2 единица соответствует элементу b, следовательно, подмножество номер 2 имеет вид $\{b\}$, и т. д. В последней строке нет нулей. Это значит, что в подмножество входят все элементы множества P. Такое подмножество совпадает с множеством P. Таким образом, рассмотренный прием позволяет не только найти все подмножества, но и пронумеровать их.

Подмножества бывают двух видов: **собственные** и **несобственные**. Само множество P и пустое множество называются несобственными подмножествами. Все остальные подмножества называются собственными. Следовательно, всякое непустое множество P содержит два несобственных подмножества и $2^{|P|} - 2$ собственных подмножеств. Согласно табл. 1 несобственные подмножества имеют вид $\varnothing$ и $\{a, b, c\}$, все остальные шесть подмножеств являются собственными. (Американский логик и математик Стефан Коул Клини (род. в 1909 г.) множество P называет неистинным подмножеством множества P, а все остальные подмножества — истинными [25, с. 449].)

Множество всех подмножеств множества P называют его **булеаном** [16; 25] и обозначают $B(P)$. Например, булеан множества $P = \{a, b, c\}$ имеет вид

$$B(P) = \{\varnothing, \{c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}.$$

Кардинальное число любого собственного подмножества множества P меньше $|P|$. Чтобы убедиться в этом, поставим в соответствие каждому элементу множества P двоичный разряд, как показано в табл. 1. Среди всех $|P|$-разрядных двоичных чисел существует только одно число, не содержащее нулей. Ему соответствует несобственное подмножество, совпадающее с множеством P. Удалим это число. В каждом из оставшихся $|P|$-разрядных чисел содержится хотя бы один нуль, показывающий, какой элемент множества P не входит в соответствующее подмножество. А это значит, что в каждом из собственных подмножеств число элементов меньше, чем $|P|$.

Упражнения

1. (ШСС). Сколько одноэлементных подмножеств содержится в множестве вида

$$Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}?$$

2. Дано множество вида $A = \{a, b, c, d\}$. Укажите верные записи:

1) (ОАП).	2) (БМБ).	3) (ТАФ).
а) $a \in A$;	а) $\{a\} \subset \{a, b\}$;	а) $a, b \in \{a, b, c\}$;
б) $d \subset A$;	б) $\{c\} \subseteq \{c\}$;	б) $\varnothing \notin \{a, b, c\}$;
в) $\varnothing \in A$;	в) $\varnothing \in \{a, b, c\}$;	в) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
г) $\{a, b, c, d\} \subseteq A$;	г) $\varnothing \subset \{a\}$;	г) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$;
д) $\varnothing \subset A$;	д) $A \subseteq \{a, b, c, d\}$;	д) $a = \{a\}$;
е) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$.	е) $a, b \subseteq \{a, b\}$.	е) $\varnothing = \{\varnothing\}$.

3. (ЗОМ). Сколько собственных подмножеств имеет множество

$$M = \{x \mid x \text{ — натуральное число} \wedge x < 6\}?$$

4. (НА). Известно, что число собственных подмножеств некоторого множества K равно числу его несобственных подмножеств. Найдите $|K|$ и кардинальное число булеана множества K.

5. (800). В множестве R отсутствуют собственные подмножества. Определите кардинальное число множества R и кардинальное число булеана множества R.

6. (ШТК). Известно, что число собственных подмножеств некоторого множества P в 15 раз больше числа его несобственных подмножеств. Найдите кардинальное число множества P.

7. (ТТЮ). Некоторое множество имеет 62 собственных подмножества. Найдите число элементов булеана этого множества.

8. (ЗМА). Некоторое множество содержит пять одноэлементных подмножеств. Найдите кардинальное число булеана этого множества.

9. (ББХ). Кардинальное число множества S равно 7. Найдите число собственных подмножеств множества S.

10. (ТУФ). Булеан некоторого множества P содержит 256 элементов. Найдите число собственных подмножеств множества P.

11. (5П7). Булеан множества P состоит из 128 элементов. Найдите кардинальное число множества P.

12. (23У). Дано множество P. Когда из него удалили три элемента, получилось множество, булеан которого содержит 64 элемента. Найдите $|B(P)|$.

13. (454). Булеан множества M имеет 16 элементов. В множество M добавили несколько элементов. Получилось новое множество P, для которого $|B(P)| = 1024$. Найдите разность $|P| - |M|$.

14. (ШЛШ). Множество P имеет 56 собственных подмножеств, среди которых нет ни одного одноэлементного подмножества. Найдите $|B(P)|$.

15. (ТШХ). Множество P имеет 27 подмножеств, среди которых нет ни одного одноэлементного подмножества. В множество P добавили два элемента. Получилось множество M. Найдите $|B(M)|$.

16. (РА)! Дано множество $S = \{a, b, 1, 2, 3, 4\}$. Сколько существует подмножеств этого множества, не содержащих букв? Сколько существует подмножеств, не содержащих цифр? Сколько существует подмножеств, не содержащих ни букв, ни цифр?

17. (ЯТН)! Сколько собственных и сколько несобственных подмножеств имеет синглетон?

1.3. ДИАГРАММЫ ВЕННА. УНИВЕРСАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО

Венн Джон (1834–1923) — английский логик, профессор, член Королевского общества [25, с. 82].

Чтобы повысить наглядность представления множеств и отношений между ними, используют **диаграммы Венна** (иногда их называют диаграммами

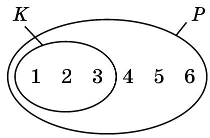


Рис. 1

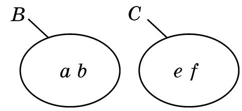


Рис. 2

Эйлера [16], кругами Эйлера [18], диаграммами Эйлера–Венна [43]) в виде замкнутых кривых, ограничивающих области, которым ставятся в соответствие элементы тех или иных множеств. На рис. 1 показаны два множества:

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};\ K = \{1, 2, 3\}.$$

Непосредственно из диаграммы видно, что $K \subset P$.

Если требуется показать, что множества не имеют общих элементов, то их изображают непересекающимися кругами. На диаграмме Венна (рис. 2) множества $B = \{a, b\}$ и $C = \{e, f\}$ не пересекаются, так как не имеют общих элементов.

Одним из важнейших понятий теории множеств является понятие **универсального** множества (полного множества, согласно [25, с. 454], и универсума по [16, с. 7]). Обозначается оно обычно символом I (либо U). Множество I — это множество всех тех элементов, которые участвуют в данном рассуждении. Любое рассматриваемое при этом множество является подмножеством универсального множества. Например, если рассматриваются различные множества целых положительных чисел, за исключением нуля, то универсальным можно считать множество всех натуральных чисел.

На диаграммах Венна универсальные множества изображаются в виде прямоугольников, внутри которых размещаются круги, обозначающие подмножества соответствующих универсальных множеств. На рис. 3 показан пример универсального множества

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

и двух его подмножеств $P = \{2\}$ и $Q = \{2, 3, 5, 7\}$, где P — множество четных простых чисел, а Q — множество всех простых чисел, меньших 10.

В общем случае универсальным может быть любое непустое множество.

Упражнения

1. (РУ.ШК). На рис. 3 укажите элементы универсального множества, не входящие в множество Q.

2. (ОМ). Найдите $|I|$ на рис. 3.

3. (ХЛИ). По рис. 3 найдите $|B(I)|$.

4. (ХХ). Перечислите все элементы, которые останутся в множестве I (рис. 3), если из него удалить все элементы, не входящие в множество Q.

5. На рис. 4 универсальное множество образуют гласные буквы русского алфавита. Все они записаны внутри прямоугольника. (ПК.56). Укажите буквы, не входящие ни в множество M, ни в множество N.

6. (ЖУ). Перечислите буквы (в алфавитном порядке), которые останутся в множестве M (рис. 4), если все элементы множества N удалить.

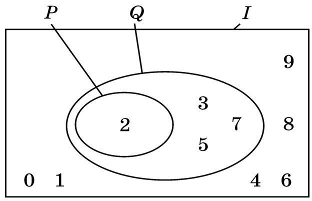


Рис. 3

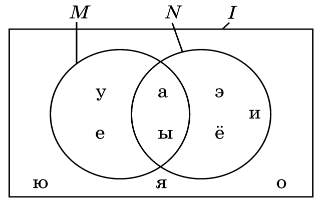


Рис. 4

7. (ОЙО). По рис. 4 найдите $|B(I)|$.

8. (ЭЮЮ). По рис. 4 найдите $|B(N)|$.

9. Даны множества:

$A = \{2, 20, 120, 16, 52, 502\}$; $E = \{120, 502\}$;
$B = \{10, 2, 5\}$; $F = \{12, 16, 25\}$;
$C = \{2, 20, 16\}$; $K = \{20, 120, 502, 52, 16\}$;
$D = \{20, 16, 52\}$; $M = \{502\}$.

1) (ОТС). Перечислите множества, являющиеся подмножествами множества A.

2) (ОН). Укажите сначала все истинные утверждения из нижеследующих, а затем — все ложные:

а) $B \subset A$; в) $D \subset A$; д) $F \subset E$; ж) $\{512\} \subset A$;
б) $C \subset A$; г) $E \subset M$; е) $M \subset A$; з) $\{121, 512\} \subset M$.

3) (Т56). Какие элементы множества C останутся в нем, если из него удалить все элементы множества K?

4) (А4). Элементы множества C объединили с элементами множества D. В результате получилось новое множество S. Перечислите элементы множества S (в порядке возрастания).

10. Множество I состоит из двузначных чисел, кратных 9 и не содержащих цифры 0.

1) (ХО)! Найдите кардинальное число множества I. Найдите наименьшее число, входящее в множество I.

2) (88). Найдите $|B(C)|$, где C — множество, состоящее из чисел множества I, кратных 18.

3) (ДО). Перечислите элементы множества $D \subset I$, представляющие собой числа, делящиеся на 4 без остатка.

11. (ВЛЕ). Известно, что $A \subset B$ и $a \in A$. Какие из следующих записей верны:

а) $a \subset A$; в) $a \in B$; д) $A \in B$;
б) $\{a\} \subset B$; г) $a \notin B$; е) $\{a\} \subset A$?

1.4.
ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Объединением или **суммой** n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из этих n множеств:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

где знак $\cup$ обозначает операцию объединения множеств.

Формально операция объединения множеств определяется следующим образом:

$$A = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\},$$

где $\vee$ — логический знак, обозначающий союз ИЛИ. Читается эта запись так: множество A — это все те значения x, которые принадлежат множеству A_1, или множеству A_2 и так далее до множества A_n.

Например, пусть даны множества:

$$A_1 = \{a, b, c\};\ \ A_2 = \{4\};\ \ A_3 = \{b, 54\}.$$

Применив к ним операцию объединения, получаем

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, 4, 54\}.$$

На диаграммах Венна объединение множеств обозначают сплошной штриховкой областей, соответствующих этим множествам. На рис. 5 заштрихована область множества $P \cup Q$. На рис. 6 показана штриховкой область множества $(P \cup Q) \cup R$. На рис. 7 изображены три множества P, Q и R. Штриховкой отмечено множество $Q \cup R$.

Операция объединения множеств обладает следующими свойствами:

а) объединение **коммутативно**:

$$A \cup B = B \cup A;$$
$$A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C \text{ и т. д.};$$

б) объединение **ассоциативно**:

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = (B \cup C) \cup A = A \cup B \cup C.$$

Благодаря ассоциативности при записи нескольких множеств, соединенных знаком объединения, скобки можно не использовать;

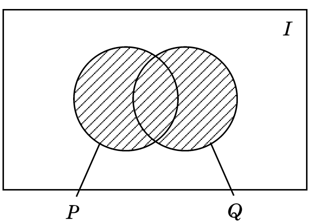


Рис. 5

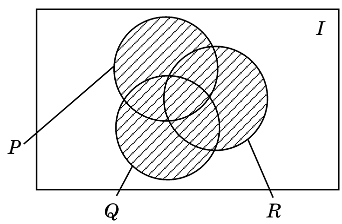


Рис. 6

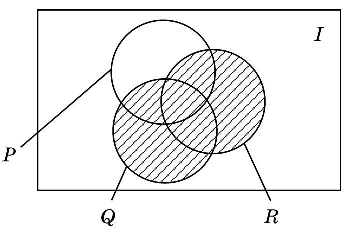


Рис. 7

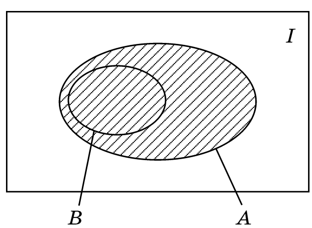


Рис. 8

в) если $B \subseteq A$ или $B \subset A$, то $A \cup B = A$. На рис. 8 приведена диаграмма Венна для случая, когда $B \subset A$. Штриховкой отмечена область множества A, которая одновременно относится и к множеству $A \cup B$.

Из свойства «в» следует, что

$$A \cup A = A; \tag{2}$$
$$A \cup \varnothing = A; \tag{3}$$
$$A \cup I = I. \tag{4}$$

Упражнения

1. (РВ). Найдите элементы множества $A \cup B$, если $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d\}$.

2. (ПЫ). Найдите элементы множеств: сначала A, затем — A_1, после этого — A_2 (числа упорядочить по возрастанию), если:

$$A = \{x \mid x \in I \wedge (x \in A_1 \vee x \in A_2)\};$$

$A_1 \subset I$ — множество чисел, кратных трем; $A_2 \subset I$ — множество чисел, кратных четырем; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

3. (ГУМ). Дано три множества A, B, C. Известно, что $a \in A$. Укажите все верные утверждения:

а) $a \subset B$;
б) $a \in A \cup B$;
в) $a \subset B \cup C$;
г) $a \in A \cup B \cup C$;
д) $\{a\} \subseteq A$;
е) $\{a\} \in B$;
ж) $\{a\} \subseteq A \cup B$;
з) $\{a\} \in B \cup C$;
и) $\{a\} \subseteq A \cup B \cup C$.

4. (ОР)! На рис. 9 приведена диаграмма Венна для трех множеств. Найдите элементы множеств $A \cup B$, затем — $A \cup C$.

5. (НЕ). Перечислите элементы множества M (рис. 9):

$$M = \{x \mid x \notin A \wedge x \in I\}.$$

6. (ШБ). Перечислите элементы множества N (рис. 9):

$$N = \{x \mid x \in A \cup B, x > 4\}.$$

7. (ПВ). Перечислите элементы множества K, если

$$K = \{x \mid x \in A \cup B \cup C, x \text{ — четное число}\} \text{ (рис. 9).}$$

8. (63). Перечислите элементы множества T (рис. 9):

$$T = \{x \mid x \notin A \cup C, x \in I\}.$$

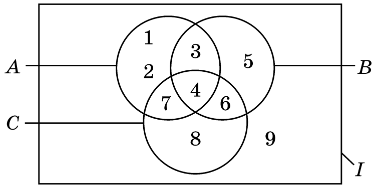


Рис. 9

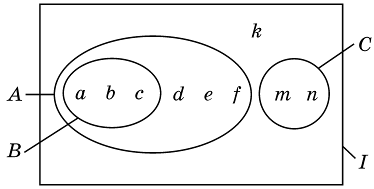


Рис. 10

9. (56С). Найдите кардинальное число множества $A \bigcup B$, если

$$A = \{a, b, c\}; \quad B = \{6, 7, 8, 9\}.$$

10. (ЯРР). Найдите кардинальные числа множеств $A \bigcup B$, $A \bigcup C$, $B \bigcup C$ по диаграмме Венна (см. рис. 10).

11. (НТО). Найдите кардинальное число множества $A \bigcup B$, если

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; \quad B = \{2, 3, 4, 5\}.$$

12. (МУФ). Найдите кардинальное число множества $A \bigcup B$, если

$$A = \{\varnothing\}; \quad B = \{a, b, c\}.$$

13. (ОМУ). Найдите кардинальное число множества $B(P) \bigcup B(Q)$, где

$$P = \{a, b, c\}; \quad Q = \{b, c, d\}.$$

14. (ЯВЕ). Найдите кардинальное число множества $B(K) \bigcup B(M)$, где

$$K = \{x \mid x \text{ — четное натуральное число}, x \leqslant 8\};$$
$$M = \{x \mid x \text{ — нечетное натуральное число}, x < 6\}.$$

15. (ТЕК). Сколько собственных подмножеств имеет множество $P = A_1 \bigcup \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n$, если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — синглетоны, попарно не равные между собой?

1.5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Пересечением или произведением n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество A, каждый элемент которого принадлежит каждому из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap \ldots \bigcap A_n,$$

где знак $\bigcap$ обозначает операцию пересечения множеств.

Формально операция пересечения определяется следующим образом:

$$A = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\},$$

где $\wedge$ — логический знак, обозначающий союз И.

Читается эта запись так: множество A — это все те значения x, которые входят и в множество A_1, и в множество A_2, и так далее до множества A_n.

Например, пусть даны множества:

$$A = \{a, b, c, d\}; \quad B = \{b, c, d, e\}; \quad C = \{c, d, e, f\}.$$

Применив к ним операцию пересечения, получим новое множество K:

$$K = \{a, b, c, d\} \bigcap \{b, c, d, e\} \bigcap \{c, d, e, f\} = \{c, d\}.$$

Как и в случае объединения множеств, их пересечение на диаграммах Венна обозначается штриховкой. На рис. 11 заштрихована область, относящаяся одновременно к обоим множествам P и Q, где

$$P = \{1, 3, 5, 7\}; \quad Q = \{5, 6, 7, 8\}.$$

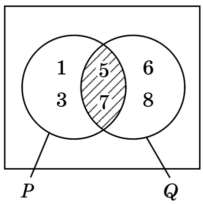


Рис. 11

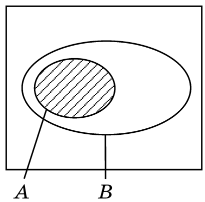


Рис. 12

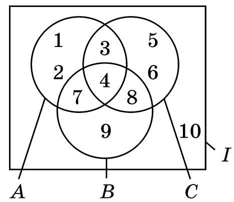


Рис. 13

Из диаграммы видно, что $P \cap Q = \{5, 7\}$.

Операции пересечения множеств присущи те же свойства, что и операции объединения:

а) **пересечение коммутативно**:

$$A \cap B = B \cap A;$$
$$A \cap B \cap C = B \cap A \cap C = C \cap A \cap B \text{ и т. д.};$$

б) **пересечение ассоциативно**:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B = A \cap B \cap C.$$

Благодаря ассоциативности при записи нескольких множеств, объединенных знаком пересечения, скобки можно не ставить;

в) если $A \subseteq B$ или $A \subset B$, то $A \cap B = A$. На рис. 12 приведена диаграмма Венна для случая, когда $A \subset B$. Заштрихована область, относящаяся к обоим множествам A и B. Так как $A \subset B$, то все элементы множества A одновременно являются элементами множества B. Из этого свойства следует, что

$$A \cap A = A; \quad (5)$$
$$A \cap I = A; \quad (6)$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing. \quad (7)$$

Необходимо отметить еще два свойства: **дистрибутивность пересечения относительно объединения**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (8)$$

и **дистрибутивность объединения относительно пересечения**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (9)$$

Свойство (9) можно получить из свойства (8), если все знаки объединения заменить знаками пересечения, а все знаки пересечения заменить знаками объединения. Аналогично можно получить формулу (8) из формулы (9).

В литературе по дискретной математике принято: если в одном и том же выражении встречаются операции объединения и пересечения, то первой выполняется операция пересечения, а затем — объединения. Благодаря этому многие формулы можно записывать без скобок.

Для примера рассмотрим формулу

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) = A \cap B \cup B \cap C.$$

Если учесть принятое соглашение, то обе части этого выражения будут восприниматься однозначно.

Если же сначала должна выполняться операция объединения, а затем — пересечения, то необходимо использовать скобки. Например: $(A \cup B \cup C) \cap D$. В этом выражении первой выполняется операция объединения и лишь затем — пересечения.

Упражнения

1. Найдите элементы множества $A \cap B$, если:

1) (БК). $A = \{b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$;

2) (МБМ). $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$;

3) (ЦК). $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$;

4) (БАР). $A = \{$март, апрель, май$\}$, $B = \{$май, июнь$\}$.

2. Найдите элементы множества $P \cap Q$, если:

1) (ДОТ). $P = \{x \mid x < 12, x$ — натуральное число$\}$,
$Q = \{x \mid x > 10, x$ — натуральное число$\}$;

2) (ТЛ). $P = \{x \mid x \leqslant 12, x$ — натуральное число$\}$,
$Q = \{x \mid x \geqslant 10, x$ — натуральное число$\}$;

3) (ТИС). $P = \{x \mid x$ — натуральное простое число$\}$,
$Q = \{x \mid x$ — четное натуральное число$\}$.

3. Найдите элементы множества $A \cup B \cap C$, если:

1) (ЫН). $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x < 10, x$ — натуральное число$\}$, $C = \{x \mid x > 8, x$ — натуральное число$\}$;

2) (АМ). $A = \{b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{a, b, c, d\}$;

3) (РВ). $A = B = C = \{b, c, d\}$.

4. (ДЫВ). Найдите кардинальное число множества $A \cap B \cup C$, если:

$A = \{x \mid x < 100, x$ — натуральное число, оканчивающееся нулем$\}$;
$B = \{x \mid x > 50, x$ — натуральное число$\}$;
$C = \{x \mid x < 20, x$ — простое число$\}$.

5. (ОТ)! Найдите элементы множеств $X \cap Y$, $X \cap Z$, $Y \cap Z$, если:

$$X = \{3, 4, 5, 7\};\quad Y = \{5, 7, 8\};\quad Z = \{7, 8, 9\}.$$

6. (АНУ). Укажите верные выражения:

а) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$;

б) $(B \cup C) \cap A = A \cap B \cup A \cap C$;

в) $A \cap B = B \cap A$;

г) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cap (B \cup C)$;

д) $A \cap B \cup A \cap C = A \cup B \cap C$;

е) $A \cap (B \cup C) = A \cup B \cap C$.

7. (ЛЛЛ). Найдите $|B(Q)|$, где $Q = A \cap B \cup A \cap C$, если:

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\};\quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\};\quad C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

8. (ФОК). Найдите $|B(Q)|$, где $Q = A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C$, если:

$$A = \{a, b, c, d, e\};\quad B = \{b, c, d, e, f\};\quad C = \{c, d, e, f, k\}.$$

9. (КЕН)! По диаграмме Венна (см. рис. 13) найдите элементы множеств $A \cap B$ и $B \cap C$.

10. (АИМ). По диаграмме Венна (см. рис. 13) найдите элементы множества $A \cup B \cap C$.

11. (25 К). Найдите $|B(Q)|$, где $Q = A \cap B \cup A \cup C$ (см. рис. 13).

12. (ЛИО). Укажите номера верных выражений:

1) $A \cap A \cap (A \cup B) = A \cup A \cap B \cup A \cap B \cap C$; 4) $(A \cap I) \cup B = A \cup B$;

2) $(A \cup B) \cap \varnothing = \varnothing$; 5) $A \cap \varnothing \cup B = B$;

3) $\varnothing \cup A \cap B = \varnothing \cap (A \cup B) \cup \varnothing \cap C$; 6) $A \cap \varnothing \cap B = A \cap B$.

13. (АОИ). Укажите пустые множества, если $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $I \neq \varnothing$:

а) $A \cup \varnothing$; в) $(A \cup B) \cap I \cap \varnothing$; д) $I \cup \varnothing \cap A$;

б) $A \cap B \cap \varnothing$; г) $\varnothing \cup \varnothing \cap A$; е) $I \cap \varnothing \cup \varnothing$.

14. (ЛИС). Найдите кардинальное число множества $P = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$, если множества A_1, A_2, A_3, A_4 — синглетоны, попарно не равные между собой.

1.6. ДОПОЛНЕНИЕ МНОЖЕСТВА

Если I — универсальное множество, то **дополнением** множества A называется множество всех элементов множества I, не входящих в множество A. Пусть I — множество домов. Выделим в нем множество A деревянных одноэтажных домов. Тогда в дополнение войдут все недеревянные и все неодноэтажные дома, как деревянные, так и не деревянные.

Обозначается дополнение: $\overline{A}$. Читается: не A. (В литературе встречаются и другие обозначения: $-A$, A', $\sim A$, NA, $\neg A$ и др.).

Формально операцию дополнения можно определить следующим образом:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A \wedge x \in I\}.$$

Читается эта запись так: множество $\overline{A}$ — это все те значения x, которые не входят в множество A, но являются элементами универсального множества I. Например, если I — множество десятичных цифр и $A = \{1, 3, 4\}$, то $\overline{A} = \{0, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

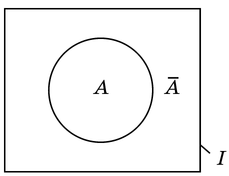


Рис. 14

На рис. 14 приведена диаграмма Венна для дополнения. Из диаграммы видно, что:

$$A \cup \overline{A} = I; \quad (10)$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing; \quad (11)$$

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ (инволюция)}, \quad (12)$$

если $A = \varnothing$, то

$$\overline{A} = I, \text{ т. е. } \overline{\varnothing} = I; \quad (13)$$

если $A = I$, то

$$\overline{A} = \varnothing, \text{ т. е. } \overline{I} = \varnothing. \quad (14)$$

Дополнение множества A возможно не только до универсального, но и до любого множества Q, если $A \subseteq Q$:

$$\overline{A}^Q = \{x \mid x \notin A,\ x \in Q,\ A \subseteq Q\},$$

где знак Q при символе $\overline{A}$ (т. е. $\overline{A}^Q$) говорит о том, что операция дополнения осуществляется до множества Q [5]. Например, если

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ и } Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \text{ то } \overline{A}^Q = \{4, 5\}.$$

Упражнения

1. Пусть $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Укажите элементы, входящие в множество $\bar{A}$, если:

1) (ШУЛ). $A = \{3, 4\}$; 3) (950). $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

2) (ЛВВ). $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 4) (ГИЧ). $A = \varnothing$.

2. (361). Найдите элементы множества $\bar{A}$, если A — множество всех простых чисел, не превышающих 7, $I = \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

3. (ПКМ). Найдите $|\bar{A}|$, если $I = \{1, 2, 3, ..., 30\}$; $A = \{x \mid x < 20,\ x$ — простое число$\}$.

4. (ФУХ). Дано: $|\bar{A}| = 12$. Найдите $|A|$, если $|I| = 50$.

5. (А28). Найдите элементы множества $\bar{A}$, если $A = \{1, 4, 7\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 7\}$.

6. (ЦКП). Дано: $|A| = 24$; $|I| = 42$. Найдите $|\bar{\bar{A}}|$.

7. (750)! Найдите сначала элементы множества $\bar{A}^B$, затем элементы множества $\bar{A}$, если

$$A = \{1, 2\};\ \ B = \{1, 2, 3, 4\};\ \ I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

8. (353)! Дано: $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Найдите элементы множества A, если $\bar{A}^B = \{6, 7\}$.

Найдите элементы множества C, если $\bar{C}^B = \{3, 4, 5\}$.

Найдите элементы множества D, если $\bar{D}^B = \varnothing$.

9. (ТКС)! Дано: $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Найдите кардинальное число множества $B(\bar{A})$, если A — синглетон. Найдите $|\bar{A}|$.

1.7. ЗАКОНЫ ДЕ МОРГАНА

Огастес де Морган (1806–1871) — шотландский математик и логик.

Законы де Моргана устанавливают связь между операциями объединения, пересечения и дополнения:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \tag{15}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \tag{16}$$

Закон (15) формулируется следующим образом: **дополнение объединения есть пересечение дополнений.** Аналогично формулируется закон (16): **дополнение пересечения есть объединение дополнений.**

Убедиться в справедливости соотношений (15) и (16) можно при помощи диаграмм Венна. Обратимся к выражению (15). На рис. 15 заштрихована область, соответствующая левой части формулы (15). Она обозначает дополнение множества $A \cup B$.

Правая часть равенства (15) состоит из пересечения множеств $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Множество $\bar{A}$ нанесем на диаграмму Венна горизонтальной штриховкой (рис. 16), а множество $\bar{B}$ — вертикальной. Тогда двойная штриховка будет соответствовать пересечению множеств $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Из рис. 15 и 16 видно, что множества $\overline{A \cup B}$ и $\bar{A} \cap \bar{B}$ занимают на диаграммах Венна одну и ту же область, следовательно, соотношение (15) справедливо.

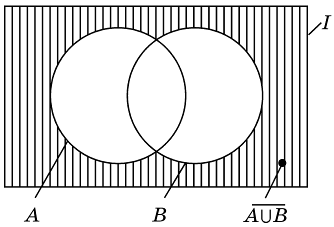


Рис. 15

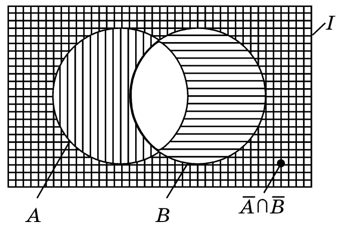


Рис. 16

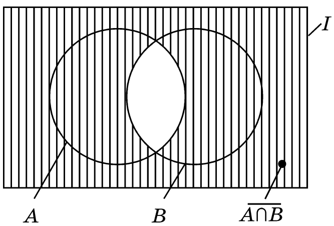


Рис. 17

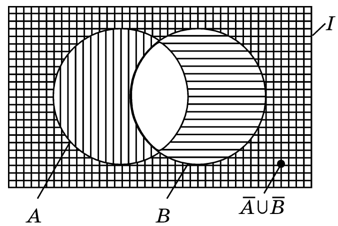


Рис. 18

Аналогично можно убедиться в справедливости формулы (16). На рис. 17 приведена диаграмма Венна для левой части равенства (16). Вертикальной штриховкой на ней обозначено дополнение множества $A\cap B$. Правая часть равенства (16) есть объединение множеств: $\bar A$ и $\bar B$. Множество $\bar A$ (рис. 18) обозначим горизонтальной штриховкой, множество $\bar B$ — вертикальной. Незаштрихованной осталась область, относящаяся к пересечению $A\cap B$. Все, что заштриховано, является дополнением множества $A\cap B$. Таким образом, заштрихованные области на рис. 17 и 18 совпадают, что и доказывает справедливость утверждения (16).

Правила де Моргана применимы не только к двум, но и к большему числу множеств. Например:

$$\overline{A\cup B\cup C}=\bar A\cap\bar B\cap\bar C;$$
$$\overline{A\cap B\cap C}=\bar A\cup\bar B\cup\bar C.$$

Упражнения

1. Даны множества:

$$A=\{1, 2, 3\};\ B=\{2, 3, 4\};\ I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Найдите элементы следующих аналитически заданных множеств, применяя к ним теорему де Моргана:

1) (ИНА). $\overline{A\cup B}$;
3) (РОВ). $\overline{A\cap B}$;
5) (УВД). $\overline{\bar A\cap B}$;
2) (ТВВ). $\overline{\bar A\cup B}$;
4) (МЕТ). $\overline{\bar A\cap\bar B}$;
6) (ЯВЕ). $\overline{\bar A\cup\bar B}$.

2. Упростите выражения, если $A\subset B$:

1) (861). $\overline{A\cup B}$;
3) (ОИЗ). $\overline{A\cap B}$;
5) (737). $\overline{\bar A\cup B}$;
2) (ФАХ). $\overline{\bar A\cup\bar B}$;
4) (РТК). $\overline{\bar A\cap\bar B}$;
6) (438). $\overline{A\cup\bar B}$.

3. Вместо точек поставьте знак = или ≠:

1) (ФИР)!

$A\cup B\ldots\bar A\cup\bar B$;

$\overline{\bar A\cup\bar B}\ldots A\cup B$;

$A\cup\overline{B\cap C}\ldots A\cup\bar B\cup\bar C$;

$P\cup\overline{Q\cup P}\cup Q\ldots\overline{\varnothing\cap A}$;

$\overline{\overline{A\cup I}\cup I}\ldots\overline{\bar A\cup\varnothing}$;

$\overline{\overline{A\cup A}\cup\overline{A\cup A}}\ldots A$.

2) (ВАС)!

$\overline{A\cup\bar I}\ldots\bar A$;

$\overline{A\cap B}\cup\bar A\ldots\overline{A\cap B}$;

$\overline{A\cap\varnothing}\cup\overline{B\cap I}\ldots\bar I$;

$A\cap\varnothing\cup\overline{P\cap\bar P}\ldots A\cup\bar A$;

$\overline{A\cup I}\cap\overline{B\cup\varnothing}\ldots\overline{A\cup\bar A}$;

$\overline{\overline{A\cap\bar A}\cap\overline{\bar B\cap B}}\ldots I$.

4. (УУФ). Найдите $|B(P)|$, где $P=\overline{A\cup\bar B}$, если

$$A=\{0, 1, 2, 3, 4\};\ \ B=\{3, 5, 7, 8, 9\}.$$

5. (342). Найдите $|B(Q)|$, где $Q=\overline{A\cup B}$, если

$$A=\{0, 1, 2, 3\};\ \ B=\{1, 2, 3, 4\};\ \ I=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

6. Упростите выражения, если $A\subset B$, $B=C$.

1) (КВЗ)! $\overline{\bar A\cup\bar B\cup\bar C}$; $\overline{A\cup B\cap\bar C}$; $A\cup\overline{\overline{B\cup\bar C}}$.

2) (884)! $\overline{A\cup A\cap B\cup A\cap C}$; $\overline{A\cup\overline{\bar B\cap C}}$; $\overline{A\cap\bar B\cap C}\cup I$.

1.8. РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Разностью «$A-B$» называется множество всех элементов, принадлежащих множеству A, но не входящих в множество B:

$$A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}=A\cap\bar B.$$

Рассмотрим пример. Пусть

$$A=\{1, 2, 3\};\ \ B=\{3, 4, 5\},$$

тогда

$$A-B=\{1, 2\};\ \ B-A=\{4, 5\}.$$

На рис. 19 штриховкой обозначена область $A-B=A\cap\bar B$.

Если $A\subset B$ или $A\subseteq B$, то $A-B=\varnothing$. Пусть $A=\{1, 2\}$; $B=\{1, 2, 3, 4\}$. Чтобы найти множество $A-B$, из множества A необходимо удалить все элементы, принадлежащие множеству B. В результате получится пустое множество.

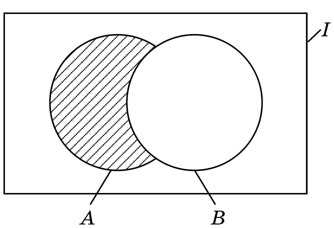


Рис. 19

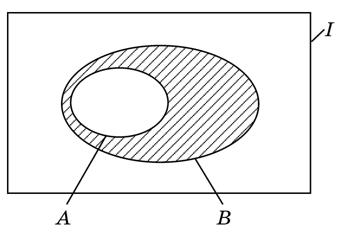


Рис. 20

Если $A \subset B$, то $B - A = \bar{A}^B$, то есть при $A \subset B$ разность $B - A$ совпадает с дополнением множества A до множества B (рис. 20).

Если $A = B$, то очевидно, что $A - B = B - A = \varnothing$.

Если $B = I$, то $I - A = \bar{A}$, т. е. разность универсального множества и множества A есть дополнение множества A до универсального.

В тех случаях, когда разность множеств применяется к трем и более множествам, необходимо использовать скобки, поскольку

$$(A - B) - C \neq A - (B - C),$$

т. е. разность множеств неассоциативна. Если же условиться выполнять эту операцию в строгом порядке слева направо, то скобки можно не ставить:

$$A - B - C = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}; \quad A - B - C - D = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}.$$

Упражнения

1. (НУ). Найдите элементы множества $A - B$, если

$$A = \{3, 4, 6, 7\}; \; B = \{6, 7, 8\}.$$

2. (604). Найдите элементы множества $A \cup B$, если

$$A - B = \{2, 4, 5\}; \; B = \{6, 7, 8\}.$$

3. Дано: $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$; $B = \{3, 4, 6, 7, 9\}$; $C = \{0, 5, 6, 7, 8\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Найдите элементы множеств:

1) (ХМА). $A - (B \cup C)$; 3) (КЦК). $A - (B - C)$; 5) (ЦОС). $C - (\bar{A} \cap B)$;

2) (ТРТ). $B - (A \cap \bar{C})$; 4) (КЭР). $A - (B \cup C)$; 6) (АРО). $(A \cup B) - (A \cup B)$.

4. Дано: $A = \{0, 1, 2, 5\}$; $B = \{1, 2\}$; $C = \{2, 5, 7\}$; $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Найдите элементы множеств:

1) (ТМЕ). $(A \cup B \cup C) - B$; 3) (029). $(A \cup B) - (A - B)$;

2) (Р34). $A - (B \cap \bar{B})$; 4) (ЗЕЛ). $I - (A \cup B \cup C)$.

5. (ЗРЯ). Укажите пустые множества, если известно, что $A \subset B \subset C, A \neq \varnothing$, $\bar{C} \neq \varnothing$:

а) $(B - C) \cap (A \cup B)$; в) $C \cup (\bar{A} - \bar{B})$; д) $(A \cap \bar{B}) \cup (B - C)$;

б) $[\bar{C} \cap (A \cup B \cup C)] - B$; г) $C \cap (B - \bar{A})$; е) $A \cup (B - C)$.

1.9. СИММЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Симметрическая разность множеств A и B — это множество вида

$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B, \text{ или } x \notin A \wedge x \in B\},$$

где знак $\oplus$ обозначает операцию симметрической разности (используют и другие знаки, например $A \,\Delta\, B$ [5]).

Симметрическую разность можно выразить через дополнение, пересечение и объединение:

$$A \oplus B = A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B. \tag{17}$$

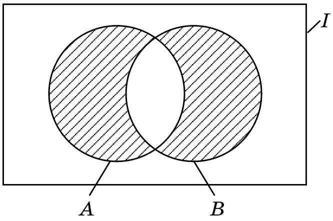


Рис. 21

На рис. 21 приведена диаграмма Венна, иллюстрирующая симметрическую разность множеств. Из диаграммы видно, что симметрическая разность может быть выражена через разность множеств и операцию объединения:

$$A \oplus B = (A - B) \bigcup (B - A).$$

Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, то $A \oplus B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$.

Симметрическая разность множеств обладает следующими свойствами (их нетрудно проиллюстрировать с помощью диаграмм Венна):

а) **коммутативность**:

$$A \oplus B = B \oplus A;$$

б) **ассоциативность**:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C;$$

в) **дистрибутивность** пересечения относительно симметрической разности:

$$A \bigcap (B \oplus C) = (A \bigcap B) \oplus (A \bigcap C).$$

Если условиться считать, что первой всегда выполняется операция пересечения, а затем — симметрической разности, то скобки можно не ставить:

$$A \bigcap (B \oplus C) = A \bigcap B \oplus A \bigcap C.$$

Благодаря свойству дистрибутивности можно раскрывать скобки в сложных выражениях и записывать формулы в виде симметрической разности пересечений. Например:

$$(A \oplus B \oplus C) \bigcap (D \oplus E) = A \bigcap D \oplus A \bigcap E \oplus B \bigcap D \oplus B \bigcap E \oplus C \bigcap D \oplus C \bigcap E.$$

Операция симметрической разности множеств не является дистрибутивной относительно пересечения:

$$A \oplus B \bigcap C \neq (A \oplus B) \bigcap (A \oplus C). \tag{18}$$

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, выразим обе части неравенства (18) через операции объединения, пересечения и дополнения и результаты представим в виде диаграмм Венна.

Левую часть преобразуем в соответствии с формулой (17):

$$A \oplus B \bigcap C = A \bigcap \overline{B \bigcap C} \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C =$$
$$= A \bigcap (\bar{B} \bigcup \bar{C}) \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C = A \bigcap \bar{B} \bigcup A \bigcap \bar{C} \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C.$$

На рис. 22 приведена диаграмма Венна, на которой штриховкой обозначено полученное множество.

Аналогично преобразуем правую часть выражения (18):

$$(A \oplus B) \bigcap (A \oplus C) = (A \bigcap \bar{B} \bigcup \bar{A} \bigcap B) \bigcap (A \bigcap \bar{C} \bigcup \bar{A} \bigcap C) = A \bigcap \bar{B} \bigcap \bar{C} \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C.$$

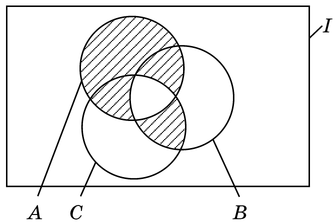


Рис. 22

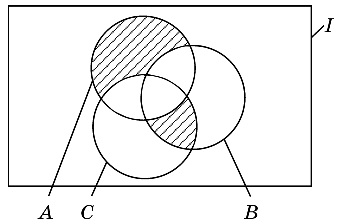


Рис. 23

На рис. 23 приведена диаграмма Венна, на которой заштрихована область, соответствующая полученному выражению. Из диаграмм (рис. 22 и 23) видно, что отмеченные на них множества не совпадают, следовательно, неравенство (18) справедливо.

Рассмотрим еще несколько свойств симметрической разности множеств:

а) $A \oplus \varnothing = \varnothing \oplus A = A$;

б) если $A = B$, то $A \oplus A = \varnothing$, что следует из (17);

в) если $A \subset B$, то $A \oplus B = B - A = \bar{A} \cap B$;

г) если $A \supset B$, то $A \oplus B = A - B = A \cap \bar{B}$;

д) если $A \cap B = \varnothing$, то $A \oplus B = A \cup B$;

е) $A \oplus B \oplus (A \cap B) = A \cup B$.

Упражнения

1. (ТМ). Найдите элементы множества $A \oplus B$, если

$$A = \{a, b, c\};\quad B = \{a, c, d, e\}.$$

2. (ЮАЛ)! Известно, что $A - B = \{1, 2\}$; $B - A = \{3, 4\}$; $A \cap B = \{5, 6\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$. Найдите элементы множества A.

3. (УЗО). Даны множества: $A \cap \bar{B} = \{a, b, c\}$; $B = \{d, e, f\}$; $A \cap B = \{d\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$.

4. (ЗТТ). Найдите элементы множества $\overline{A \oplus B}$, если $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A - B = \{1, 6\}$, $B - A = \{3\}$.

5. (ОИХ). Дано: $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; $A \cap B = \{c, d\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$ (лат.).

6. Упростите выражения:

1) (ОЦН). $A \oplus A \oplus A \oplus A$;

2) (ЧЕШ). $A \oplus \bar{A} \cap \bar{B} \oplus \bar{A} \cap B$;

3) (МАМ). $I \oplus B \oplus B \oplus B$;

4) (ОВУ). $A \oplus \bar{A} \oplus I$.

7. (756). Найдите элементы множества $A \cap B$, если

$$A \oplus B = \{1, 2, 3, 4, 5\};\quad \overline{A \cup B} = \{8\};$$
$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

8. Укажите верные выражения.

1) (26).

а) $A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C$;

б) $A \oplus B \cap C = A \oplus B \cap C \oplus \varnothing$;

в) $A \oplus B \oplus I = A \oplus B$;

г) $A \oplus I \oplus I = A \oplus I$;

д) $A \oplus \varnothing \oplus \varnothing = A \oplus \varnothing$;

е) $A \oplus \bar{A} = A \cup \bar{A}$.

2) (AX).

а) $A \cap (B \oplus C) = A \cap B \oplus A \cap C$;

б) $A \oplus B \oplus A \cap B = A \cup B$;

в) $A \oplus \bar{B} \oplus A \cap \bar{B} = A \cup \bar{B}$;

г) $(A \oplus I) \cap A = \varnothing$;

д) $(A \oplus I \oplus I) \cap A = \varnothing$;

е) $(A \cup B) \oplus A = \bar{A} \cap B$.

1.10. ЗАКОН ПОГЛОЩЕНИЯ

Закон **поглощения** имеет две формы записи (дизъюнктивную и конъюнктивную соответственно):

$$A \cup A \cap B = A; \quad (19)$$

$$A \cap (A \cup B) = A. \quad (20)$$

На рис. 24 приведена диаграмма Венна для дизъюнктивной формы $A \cup A \cap B = A$. Вертикальной штриховкой на диаграмме обозначена область A, горизонтальной — область $A \cap B$. Штриховка не выходит за пределы области A, следовательно, все элементы множества $A \cup A \cap B$ входят также и в множество A, что и доказывает справедливость равенства (19).

Из рис. 24 видно, что множество A не изменяется от добавления к нему элементов множества $A \cap B$, т. е. множество A как бы поглощает все элементы множества $A \cap B$, откуда и происходит название закона.

На рис. 25 приведена диаграмма Венна для конъюнктивной формы. Вертикальной штриховкой обозначено множество A, горизонтальной — множество $A \cup B$. Двойная штриховка обозначает множество $A \cap (A \cup B)$, что соответствует левой части выражения (20). Она занимает всю область множества A и не выходит за ее пределы. Следовательно, множества $A \cap (A \cup B)$ и A состоят из одних и тех же элементов, откуда следует справедливость формулы (20).

Законы поглощения дают возможность упрощать аналитические выражения, описывающие множества. Проиллюстрируем это на примере:

$$P = A \cap B \cup A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap C \cap D.$$

Пересечение $A \cap B \cap C$ встречается в этом выражении два раза. Обозначим его $Q = A \cap B \cap C$. Тогда заданное множество P примет вид:

$$P = A \cap B \cup Q \cup Q \cap D.$$

Согласно выражению (19) имеем: $Q \cup Q \cap D = Q$, следовательно,

$$P = A \cap B \cup Q = A \cap B \cup A \cap B \cap C.$$

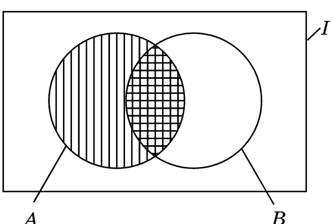


Рис. 24

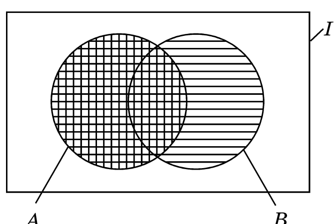


Рис. 25

Снова введем обозначение: $A \cap B = R$, тогда $P = R \cup R \cap C = R$.

В результате получаем окончательно:

$$P = A \cap B.$$

Рассмотрим еще один пример. Упростим выражение

$$S = P \cap \bar{Q} \cap (P \cap \bar{Q} \cup R).$$

Введем обозначение: $P \cap \bar{Q} = V$, тогда множество S представится в виде $S = V \cap (V \cup R)$. Согласно формуле (20) получаем:

$$S = V \cap (V \cup R) = V = P \cap \bar{Q}.$$

Упражнения

При самоконтроле знак $\cap$ не набирать, то есть вместо $A \cap B$ надо набирать AB.

1. Упростите выражения (лат.):

1) (539). $\bar{A} \cap B \cap C \cup \bar{A} \cap B$;
2) (ОИО). $A \cap B \cap \bar{D} \cup \bar{D}$;
3) (ДИР). $\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{A}$;
4) (ХСС). $A \cap \bar{B} \cap C \cup \bar{B}$;
5) (АЧА). $A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap C$;
6) (2ИВ). $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{C}$.

2. Дано: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $C = \{2, 3, 6, 7\}$; $D = \{2, 5, 6, 7, 8\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Найдите элементы множеств:

1) (962). $A \cap B \cap C \cup A \cap C$;
2) (НАЖ). $B \cap \bar{C} \cup \bar{C} \cup A \cap \bar{C}$;
3) (ЦАЙ). $A \cap C \cup A \cap B \cap C \cup A \cap C \cap D$.

3. Упростите выражения (лат.):

1) (АСС). $A \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap D$;
2) (РВР). $B \cap C \cap D \cup C \cap D \cup A \cap C \cap D$;
3) (438). $B \cap (\bar{A} \cap B \cup \bar{B} \cap B)$;
4) (УФУ). $A \cap \bar{C} \cap (A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B})$;
5) (МАГ). $(A \cup \bar{B}) \cap (A \cup \bar{B} \cup C) \cap (A \cup \bar{B} \cup D)$;
6) (ЕГО). $(\bar{A} \cup B) \cap B \cap (B \cup \bar{C})$.

4. (РНК). Найдите элементы множества $A \cap B \cap \bar{C} \cup A \cap B \cup B$, где $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{1, 2\}$.

5. (ТЫН). Найдите элементы множества:

$$A \cap B \cap C \cup A \cap C \cap \bar{D} \cup A \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap C \cap D,$$

если $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$; $B = \{2, 3, 6\}$; $C = \{2, 4, 6, 7\}$; $D = \{4, 5, 7\}$.

1.11. ЗАКОН СКЛЕИВАНИЯ

Закон (операция) **склеивания**, как и закон поглощения, имеет дизъюнктивную и конъюнктивную формы:

$$A \cap B \cup A \cap \bar{B} = A; \tag{21}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A. \tag{22}$$

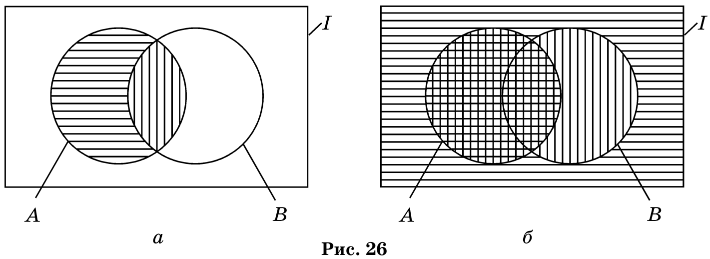


Рис. 26

Рассмотрим дизъюнктивную форму (21). На рис. 26, *а* множество $A \cap B$ обозначено вертикальной штриховкой (это общая часть множеств), а множество $A \cap \bar{B}$ — горизонтальной. Область A оказалась полностью заштрихованной, при этом вне области A никакой штриховки нет. Следовательно, все элементы множества $A \cap B \cup A \cap \bar{B}$ образуют и множество A. Это значит, что множества $A \cap B \cup A \cap \bar{B}$ и A состоят из одних и тех же элементов, откуда следует справедливость равенства (21).

Перейдем к выражению (22). Оно представляет собой пересечение двух множеств: $A \cup B$ и $A \cup \bar{B}$.

Обозначим множество $A \cup B$ вертикальной штриховкой на диаграмме Венна (рис. 26, *б*). Горизонтальной штриховкой на той же диаграмме обозначим множество $A \cup \bar{B}$.

Двойной штриховкой заполнена область, соответствующая пересечению множеств $A \cup B$ и $A \cup \bar{B}$. Из диаграммы видно, что двойной штриховкой обозначена только область A, причем она заштрихована полностью, следовательно, A и $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$ — это множества, состоящие из одних и тех же элементов, что и доказывает справедливость конъюнктивной формы склеивания, то есть выражения (22).

Истинность выражений (21) и (22) можно доказать и аналитически. Вынесем за скобки букву A в формуле (21), тогда в скобках получим объединение множества B и его дополнения. Объединение этих множеств, согласно формуле (10), есть универсальное множество.

Пересечение универсального множества и множества A, согласно формуле (6), есть множество A:

$$A \cap B \cup A \cap \bar{B} = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap I = A.$$

Аналогичным образом докажем справедливость выражения (22), раскрыв сначала скобки:

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \cap A \cup A \cap \bar{B} \cup A \cap B \cup B \cap \bar{B} =$$
$$= A \cup A \cap \bar{B} \cup A \cap B = A \cup A \cap (\bar{B} \cup B) = A \cup A \cap I = A \cup A = A.$$

Законы склеивания используются при упрощении аналитических выражений для множеств. Например:

$$A \cap B \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup B \cap C \cup \bar{B} \cap C =$$
$$= A \cap C \cap (B \cup \bar{B}) \cup C \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap C \cap I \cup C \cap I =$$
$$= A \cap C \cup C = C \cap (A \cup I) = C \cap I = C.$$

Упражнения

1. Упростите выражения:

1) (449). $A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap \bar{C}$;

2) (В66). $A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap B \cap C$;

3) (У65). $\bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B}$;

4) (ДАЧ). $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

2. Найдите элементы множеств:

1) (ВВ). $A \cap B \cap C \cup B \cap C \cup B \cap \bar{C}$;

2) (221). $(A \cap B \cup C) \cap (A \cap B \cup \bar{C})$;

3) (76). $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \bar{C})$;

4) (ТТ). $(A \cup \bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap B$,

если $A = \{1, 2, 4, 5\}$; $B = \{1, 3, 6, 7\}$; $C = \{2, 3, 6, 7\}$.

3. Расставьте вместо троеточий знаки = или ≠.

1) (СИМ).

$A \cup B \cap C \cup \bar{B} \cap C \ldots A \cup C$;

$A \cap B \cup A \cap \bar{B} \ldots A \cap \bar{B} \cup A \cap B$;

$\bar{B} \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cup B \ldots B$;

$A \cap B \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap B \ldots B \cap C$;

$(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \ldots \overline{(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})}$;

$(A \cap B \cup C) \cap (\overline{A \cap B} \cup C) \ldots C$.

2) (ЛЫН).

$\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap C \ldots B \cup C$;

$A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap C \ldots A \cup C$;

$A \cap B \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap \bar{B} \ldots \varnothing$;

$(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \ldots \varnothing$;

$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \ldots A \cap B$;

$(A \cap B \cup \bar{A} \cap B) \cap \bar{B} \ldots \varnothing$.

4. Упростите, если $A \subset B \subset C$:

1) (РИС). $A \cup B \cup A \cap C \cup \bar{A} \cap C$;

2) (ЦК). $B \cap C \cup B \cap \bar{C} \cup A \cup \bar{C}$;

3) (ЯГО). $(B \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap \bar{C}) \cap A$;

4) (УВД). $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cup (A \cap C)$.

1.12. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Обычно под теоретико-множественными преобразованиями понимают выполнение таких операций над множествами, в результате которых получается новое выражение, тождественно равное исходному, но внешне отличающееся от него набором символов, их числом, порядком записи и др. Часто целью преобразований является упрощение формул, сводящееся к уменьшению числа входящих в них знаков. Упрощенные выражения могут подвергаться дальнейшим преобразованиям с учетом каких-либо дополнительных условий. Такими условиями могут быть: учет отношений между множествами, замена одного множества другим, удаление того или иного множества и др. Все подобные преобразования осуществляются на основе свойств операций объединения, пересечения и дополнения с применением формул поглощения и склеивания, а также законов де Моргана.

Например, пусть требуется упростить формулу для множества P, выраженного через множества A, B, C, D, с учетом дополнительных условий: $C \subset D$ и $B = \varnothing$:

$$P = A \cap B \cup A \cap \bar{B} \cup B \cap D \cup C \cap D.$$

Сначала упростим заданное выражение без учета дополнительных условий:

$$P = A \cap (B \cup \bar{B}) \cup B \cap D \cup C \cap D = A \cup B \cap D \cup C \cap D.$$

При $C \subset D$ возможно дополнительное упрощение: $P = A \cup B \cap D \cup C$.

При $B = \varnothing$ и $C \subset D$ получаем искомый результат: $P = A \cup D \cap \varnothing \cup C = A \cup C$.

Упражнения

1. Упростите выражения:

1) (556). $A\cap B\cap \bar{C}\cup A\cap B\cap C\cup C$;
2) (УЭЛ). $A\cap C\cup A\cap \bar{C}\cup \bar{A}\cap C$;
3) (ЦАМ). $B\cap \bar{C}\cup \bar{B}\cap \bar{C}\cup B\cap C$;
4) (ТИН). $\bar{A}\cap \bar{B}\cup A\cap B\cup \bar{A}\cap B$.

2. Упростите выражения, если $C = I$, $D = \varnothing$.

1) (УТТ). $(A\cup B)\cap (C\cup D)$;
2) (ХТБ). $\bar{A}\cap \bar{B}\cap C\cup B\cap C\cap D$;
3) (ШАВ). $(\bar{A}\cup B\cup C)\cap (C\cup D)$;
4) (МКП). $A\cap C\cup \bar{B}\cap C\cup A\cap D$;
5) (826). $\bar{A}\cap (B\cup C\cup D)\cap B\cap C$;
6) (МИН). $(A\cup B\cup C)\cap (\bar{B}\cup D)$.

3. Упростите, если $C\subset D, A\subset B$.

1) (АИ). $A\cap B\cap C\cap D$;
2) (УТ). $\bar{A}\cap \bar{B}\cap \bar{C}\cap \bar{D}$;
3) (АЮ). $(A\cup B)\cap (C\cup D)$;
4) (ОТЫ). $A\cap \bar{B}\cup C\cap \bar{D}$;
5) (УРУ). $\overline{A\cup B}\cap \overline{C\cup D}$;
6) (ББ). $(A\cup B\cup C)\cap (B\cup C\cup D)$.

4. Чему равны выражения, если $A = B = C = D = I$?

1) (МУФ). $(\bar{A}\cup B)\cap (\bar{C}\cup D)$;
2) (МАХ). $A\cap B\cap \bar{E}\cup \bar{A}\cap E$;
3) (ЗУЗ). $(\bar{A}\cup \bar{B}\cup E)\cap (B\cup E)$;
4) (КВА). $(\bar{A}\cup E)\cap (\bar{B}\cup \bar{E})$;
5) (265). $A\cap B\cap \bar{E}\cup \bar{B}\cap E$;
6) (НЕП). $A\cap \bar{B}\cup C\cup E$.

5. Чему равны выражения, если принять $B = C = \varnothing$?

1) (РЛА). $A\cup B\cup C\cup D$;
2) (УЛА). $\bar{A}\cap \bar{B}\cap \bar{C}\cap \bar{D}$;
3) (РИД). $\bar{A}\cup B\cup D$;
4) (БКТ). $B\cap C\cup A\cap \bar{D}$;
5) (МАД). $(\bar{A}\cup B)\cap (\bar{C}\cup D)$;
6) (ЮХЕ). $(A\cup \bar{B})\cap (B\cup C)$.

6. Даны множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $I = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Какие элементы необходимо удалить из множества I, чтобы выполнялись следующие равенства?

1) (657). $A\cap B = \varnothing$;
2) (ЛВС). $A - B = \varnothing$;
3) (ББТ). $A\oplus B = \varnothing$;
4) (57). $B - A = \varnothing$;
5) (МВ). $A\cup \bar{B} = \varnothing$;
6) (ЮГ). $\overline{A\cup B} = \varnothing$.

7. Даны множества: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2\}$; $C = \{3, 4, 5\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Укажите номера пустых множеств:

I. (В7).
1) $\bar{A}\cap \bar{B}\cap \bar{C}$;
2) $\bar{A}\cap \bar{B}\cap C$;
3) $\bar{A}\cap B\cap \bar{C}$;
4) $\bar{A}\cap B\cap C$;
5) $A\cap \bar{B}\cap \bar{C}$;
6) $A\cap \bar{B}\cap C$.

II. (ВТ).
1) $A\cap B\cap \bar{C}$;
2) $A\cap B\cap C$;
3) $A\cap B\cup \bar{B}\cap C$;
4) $B\cap C\cup A\cap \bar{B}\cap \bar{C}$;
5) $A\cap B\cap C\cup A\cap \bar{B}\cap \bar{C}$;
6) $A\cup B\cup C$.

III. (ИЙ).
1) $(A\cup B)\cap \bar{C}$;
2) $(B\cup \bar{C})\cap (A\cup C)$;
3) $(A\cup B)\cap A\cap C$;
4) $\bar{A}\cap B\cup B\cap C$;
5) $\overline{(A\cup B)}\cap (\bar{A}\cup \bar{B})$;
6) $\overline{\bar{A}\cup \bar{B}\cup \bar{C}}\cap A$.

8. Даны множества: $A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$; $B = \{1, 2, 4\}$; $C = \{6, 7, 8\}$; $I = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Найдите элементы множеств:

1) (156). $A\cap B\cup \bar{A}\cap \bar{C}$;
2) (ЛБЛ). $A\cap \bar{B}\cap C\cup B\cap C$;
3) (ЕНЫ). $(A\cup B)\cap (B\cup \bar{C})$;
4) (ФФ). $B\cup A\cap \bar{B}\cap C\cup \bar{A}\cap C$;
5) (ЯК). $(A\cup \bar{C})\cap (B\cup C)$;
6) (ЭХ). $A\cap B\cap C\cup \bar{A}\cap \bar{B}\cap \bar{C}$.

2 БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

2.1. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Декарт Рене — французский философ и математик, один из первых создателей формального языка математики — жил в XVII веке (1596–1659). Теория множеств появилась через 200 лет, поэтому Р. Декарт о ней никогда не слышал и заниматься ею не мог.

Название операции «декартово произведение» появилось в связи с тем, что в теории множеств нашел применение метод координат, разработанный Р. Декартом.

Рассмотрим два непересекающихся множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. Выберем какой-либо элемент из множества A и припишем к нему справа некоторый элемент множества B. Получим **упорядоченную** пару. Ее элементы будем записывать в круглых скобках, отделяя один элемент от другого запятой: (a_i, b_j), где $a_i \in A$; $b_j \in B$; $i = 1, 2, 3, ..., n$; $j = 1, 2, 3, ..., m$. (Некоторые авторы упорядоченную пару обозначают иначе: $<a_i, b_j>$ [32]; $\langle x, y\rangle$ [21; 31].) Множество всех упорядоченных пар (a_i, b_j) обычно называют **декартовым произведением** множеств A и B (иногда — прямым произведением [21; 31]). Для обозначения этой операции используется знак арифметического умножения: $A \times B$.

Формально операция декартова произведения множеств A и B определяется следующим образом:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Читается эта запись так: декартово произведение множеств A и B — это множество упорядоченных пар (x, y), где x — элемент множества A, y — элемент множества B.

Точно так же определяется декартово произведение множеств $B \times A$:

$$B \times A = \{(y, x) \mid y \in B \wedge x \in A\}.$$

Рассмотрим пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Тогда

$$A\times B=\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\};$$
$$B\times A=\{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 3), (a, 4), (b, 4), (c, 4)\}.$$

Из этих двух выражений следует, что

$$A \times B \neq B \times A,$$

то есть операция декартова произведения некоммутативна. Кроме того:

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \varnothing,$$

если $A \cap B = \varnothing$. При этом множество $A \times B$ содержит те же пары, что и множество $B \times A$, но порядок записи элементов в парах другой. Если же $A \cap B \neq \varnothing$, то и $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \varnothing$. Например, пересечение множеств $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{c, d\}$ непусто: $A \cap B = \{c\}$. Найдем $A \times B$ и $B \times A$:

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d)\};$$
$$B \times A = \{(c, a), (d, a), (c, b), (d, b), (c, c), (d, c)\}.$$

По этим выражениям видно, что множество $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(c, c)\}$, т. е. непусто.

Операция декартова произведения применима и к бо́льшему числу множеств:

$$M = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Так как в общем случае декартово произведение некоммутативно, то всякая перестановка множеств в его записи дает новое множество упорядоченных пар. Всего возможно $n!$ таких перестановок, следовательно, существует $n!$ множеств:

$$M_1 = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n;$$
$$M_2 = A_2 \times A_1 \times A_3 \times \ldots \times A_n;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$M_{n!} = A_n \times A_{n-1} \times \ldots \times A_2 \times A_1,$$
$$M_i \cap M_j = \varnothing,\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3, \ldots, (n! - 1), n!, \text{ если } A_v \times A_s = \varnothing,$$

где $v, s = 1, 2, \ldots, n;\ v \neq s$.

Операция декартова произведения множеств ассоциативна:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C,$$

благодаря чему декартово произведение нескольких множеств можно записывать без скобок.

Для декартова произведения множеств справедливы следующие законы дистрибутивности:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$
$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C),$$

что позволяет раскрывать скобки в выражениях, содержащих операцию декартова произведения и операции объединения либо разности множеств. Если $|A|$ и $|B|$ — кардинальные числа множеств A и B, то

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|,$$

где точка обозначает операцию арифметического умножения. Например, при $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ имеем:

$$|A| = 3; \ \ |B| = 5; \ \ |A \times B| = 3 \cdot 5 = 15.$$

В общем случае, если $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|$ — кардинальные числа множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то кардинальное число их декартова произведения равно

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|. \tag{23}$$

Пусть, например, $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{a, b, c\}$; $C = \{x, y, z, v, w\}$, тогда $|A| = 4$, $|B| = 3$, $|C| = 5$ и $|A \times B \times C| = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Упражнения

1. (УЛ). Найдите элементы множества $(A \times B) \cap (B \times A)$, если $A = \{a, b\}$; $B = \{b, c\}$. (При наборе элементов пар используйте запятую. Например: a, c. Скобки не вводить.)

2. (5Б). Найдите $|A \times B|$ и $|(A \times B) \cap (B \times A)|$, если $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c\}$.

3. (АТ). Найдите элементы множеств A и B, если

$$A \times B = \{(b, m), (c, m), (e, m), (b, n), (c, n), (e, n)\}.$$

4. (РЯО). Известно, что $|A \times B| = 49$. Множество B увеличили на три элемента. Получили множество B'. Найдите $|A \times B'|$, если A и B — не синглетоны.

5. (ПХВ). Найдите $|(A \times B) \cup (B \times C)|$, если $A = \{2, 3, 4\}$; $B = \{a, b, c, d, e\}$; $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

6. (БРУ). Найдите $|B(A \times C)|$, если $A = \{m, n, k\}$; $C = \{2, 4\}$, где $B(A \times C)$ — булеан множества $A \times C$.

7. (ДОН). Декартово произведение $A \times B$ содержит 12 элементов. Сколько собственных подмножеств в множестве B, если известно, что

$$A = \{a, b, c\}; A \cap B = \varnothing.$$

8. (МЕН). Даны множества $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d, e\}$. Найдите $|P \times Q|$, если

$$P = A \cap B; \quad Q = \bar{A} \cap B.$$

9. (279)! Даны множества: $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{b, c, e, f\}$. Найдите $|P \times Q|$, если $P = A \oplus B$; $Q = A \cap B$. Найдите $|P \times Q|$, если $P = A$; $Q = \bar{A} \cap B$.

10. (137). Дано: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Укажите номера пар, являющихся элементами множества $A \times B$:

1) $a, 1$; 2) $3, c$ 3) b, c; 4) $c, 5$; 5) $2, 3$; 6) $4, a$; 7) $b, 4$.

11. (ЛГ)! Найдите: $|B \times (\bar{B} \cap C)|$; $|A|$; $|B|$; $|C|$, если $A \subset B \subset C$; $A \neq \varnothing$; $|A \cup B \cup C| = 3$.

12. (ЧА)! Даны множества I, A, B. Известно, что $I = \{0, 1, \ldots, 7\}$; $\overline{A \cup B} = \{2, 3\}$; $A \oplus B = \{0, 1, 4\}$. Найдите элементы множества $A \cap B$. Определите $|\overline{A \oplus B} \times (A \cap B)|$.

2.2.
СТЕПЕНЬ МНОЖЕСТВА

Если в декартовом произведении n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ принять

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A,$$

то получим

$$M = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}} = A^n,$$

где A^n — **степень** множества A.

Элементы множества A^n называются **кортежами** длины n. Пусть, например, $A = \{a, b, c\}$, тогда

$A^1 = \{(a), (b), (c)\}$;
$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$;
$A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), (a, b, a), \ldots, (c, c, c)\}$;
$A^4 = \{(a, a, a, a), (a, a, a, b), (a, a, a, c), \ldots, (c, c, c, c)\}$ и т. д.

Согласно (23) кардинальные числа этих множеств равны:

$|A^1| = 3 = 3^1$;
$|A^2| = 3 \cdot 3 = 3^2$;
$|A^3| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$;
$|A^4| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ и т. д.

Отсюда видно, что множество A^1 содержит три кортежа, где каждый кортеж состоит из одного элемента и имеет длину, равную единице. Множество A^2 содержит 9 кортежей длины 2, множество A^3 состоит из 27 кортежей длины 3 и т. д.

В общем случае справедливо соотношение

$$|A^n| = |A|^n.$$

Если элементами множества A являются цифры 1, 2, ..., k, то элементы множества A^n представляют собой n-значные кортежи. Например, при $k = 9$ и $n = 3$

$$A^3 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), \ldots, (7, 2, 7), \ldots, (9, 9, 9)\},$$

т. е. элементами множества A^3 являются все трехзначные десятичные числа (если кортежи записывать без запятых), не содержащие нулей. Всего существует $9^3 = 729$ таких чисел.

Упражнения

1. (ПА). Найдите $|A^4|$, если $A = \{3, 4, 5, 7, 8\}$.

2. (АЛ). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых нет цифр 0, 1, 2, 3, 4?

3. (УХС). Найдите n, если $|A^n| = 2048$.

4. (ЦМП)! Найдите $|A|$, если $|A^n| = 243$. Найдите n.

5. (ВИГ). Найдите $|B(A)|$, если $|A^2| = 49$.

6. (ВИК). Известно, что $|B(A)| = 64$. Найдите $|A^3|$.

7. (МЫС). Найдите длину кортежа, если $A = \{2, 3\}$ и $|A^n| = 1024$.

2.3.
ПОНЯТИЕ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ

Пусть дано декартово произведение двух непустых множеств A и B, при этом множества могут быть любыми: непересекающимися, равными, входящими одно в другое и т. д. Элементами множества $A \times B$ являются упорядоченные пары вида (a_i, b_j), где $a_i \in A$; $b_j \in B$; $i = 1, 2, \ldots, |A|$; $j = 1, 2, 3, \ldots, |B|$. Всякое подмножество декартова произведения $A \times B$ называется **бинарным отношением**, определенным на паре множеств A и B (по латыни «бис» обозначает «дважды»). Термин «бинарное отношение» не является единственным, например, в [23; 25] используется название «диадическое отношение», в [18] — «двухместное отношение». А некоторые авторы произвольное подмножество множества $A \times B$ называют не отношением, а соответствием, используя термин «бинарное отношение» в более узком смысле [9]. В общем случае по аналогии с бинарными можно рассматривать и n-арные отношения как упорядоченные последовательности n элементов, взятых по одному из n множеств.

Для обозначения бинарного отношения применяют знак R. Поскольку R — это подмножество множества $A \times B$, то можно записать $R \subseteq A \times B$. Если же требуется указать, что $(a, b) \in R$, т. е. между элементами $a \in A$ и $b \in B$ существует отношение R, то пишут aRb. Пусть, например,

$$A = \{1, 2, 3\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \tag{24}$$

Множество $A \times B$ содержит 18 упорядоченных пар. Выделим на этом множестве отношение «больше»: $a > b$, где $a \in A$ и $b \in B$, тогда

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\},$$

т. е. из 18 пар множества $A \times B$ три упорядоченные пары принадлежат отношению aRb, где R обозначает слово «больше». Если вместо букв подставить их значения, то получим верные утверждения: $2 > 1$; $3 > 1$; $3 > 2$.

Очевидно, что в этом случае справедливо равенство:

$$aRb = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть R обозначает «меньше простого числа» на множествах (24). Тогда

$$aRb = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}.$$

Если вместо всех трех букв a, R, b подставить их значения, то получим шесть верных утверждений:

1 меньше простого числа 2;

1 меньше простого числа 3 и т. д.

При подстановке других значений a и b будем получать ложные утверждения.

Среди подмножеств множества $A \times B$ имеется $2^{|A \times B|} - 2$ собственных подмножеств и два несобственных: одно из них пусто, а второе совпадает с самим множеством $A \times B$. Формально оба эти несобственные подмножества

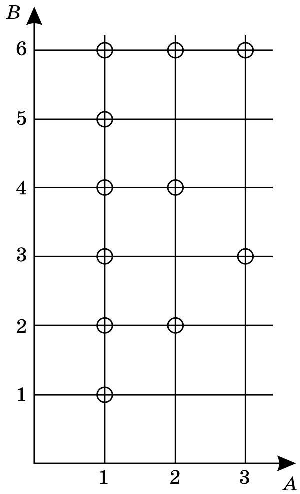


Рис. 27

также представляют собой некоторые отношения между элементами множеств A и B.

Задаются бинарные отношения разными способами. Один из них мы уже рассмотрели. Это применение правила, определяющего элементы, входящие в отношение. Вместо правила можно непосредственно перечислить все элементы заданного отношения. В [43, с. 20] указаны еще три способа задания отношений — табличный, в виде графов и с помощью сечений. Основу табличного способа составляет прямоугольная система координат, где по одной оси откладываются элементы одного множества, по второй — другого. Пересечения координат обозначают элементы декартова произведения.

На рис. 27 изображена координатная сетка для двух множеств (24). Точкам пересечения вертикальных линий с горизонтальными соответствуют элементы множества $A \times B$. Кружочками отмечены элементы отношения aRb, где $a \in A$, $b \in B$.

Бинарные отношения задаются двумерными системами координат. Все элементы декартова произведения трех множеств могут быть представлены в трехмерной системе координат, четырех множеств — в четырехмерной системе и т. д.

Для изложения второго способа представления отношений — в виде графов — необходимо привлечение таких понятий, как орграф, дуга, двудольный граф и др., в связи с чем данная тема перенесена в раздел «Теория графов» данного пособия.

Способ задания отношений с помощью сечений используется реже, поэтому рассматривать его не будем. При необходимости можно обратиться к специальной литературе, например [43].

Упражнения

1. (82 Р). Найдите $|R|$, если R определено следующим образом: x делит y (без остатка); $x \in A$; $y \in B$, где

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$
$$B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}. \qquad (26)$$

2. (ПХС). Найдите $|R|$, если R на паре множеств (26) определено следующим образом: $x < y$; где $x \in A$; $y \in B$.

3. (ФКТ). Определите $|aRb|$ для множеств (26), если R — это отношение: $a \in A$ — нечетное число; $b \in B$.

4. (38У). Определите $|aRb|$ для множеств (26), если R — это отношение: $a \in A$ — простое число; $b \in A \cup B$ — четное или простое число.

5. (ФОЕ). Найдите $|\overline{R}|$ для множеств (26), если R — отношение: $a = b$, где $a \in A$; $b \in B$.

6. (ДМХ). Найдите $|R|$, если R определено следующим образом: $x \in \bar{A} \cap B$; $y \in A \cap \bar{B}$, где

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}. \qquad (27)$$

7. (415). Укажите номера всех пар, являющихся элементами отношения: $a - b = 2$, где $a \in A$; $b \in B$, A и B — множества (27):

1) (3, 1); 2) (6, 4); 3) (4, 6); 4) (5, 3); 5) (4, 2); 6) (7, 5); 7) (8, 6).

8. (ХАХ). Укажите номера всех пар, являющихся элементами отношения: $2a - b = 0$, где $a \in A$; $b \in B$, A и B — множества (27):

1) (4, 2); 2) (1, 2); 3) (4, 8); 4) (3, 6); 5) (6, 12); 6) (2, 4).

9. На множестве букв русского алфавита найдите элементы отношений T, R, S.

1) (УМ). Определите $|T|$, если T — множество двухбуквенных слогов, где первая буква согласная, а вторая — гласная.

2) (ТЮ). Определите $|R|$, если R — множество пар букв, в каждой из которых обе буквы различные.

3) (ХАФ). Определите $|S|$, если S — множество пар букв, где обе буквы гласные.

2.4. СИММЕТРИЯ ОТНОШЕНИЙ

Пусть дано множество M. Его квадратом является множество $M \times M = M^2$. Выделим в этом квадрате подмножество R, представляющее собой некоторое отношение. Всякое бинарное отношение R в множестве M может быть либо **симметричным**, либо **асимметричным**, либо **несимметричным** [25].

Пусть между элементами $a \in M$ и $b \in M$ имеется отношение R. Переставим местами a и b. Если отношение R сохранится, то такое отношение называется **симметричным**. Примером может служить отношение «быть братом» на множестве мальчиков: если Костя брат Толи, то и Толя брат Кости.

Отношение называется **асимметричным**, если оно имеет место между элементами a и b, но отсутствует между элементами b и a. Например: «находится в...». Если «книга находится в шкафу» — верное утверждение, то «шкаф находится в книге» — утверждение ложное.

Отношение называется **несимметричным**, если оно не является симметричным и не является асимметричным, то есть если имеет место отношение aRb, то отношение bRa может быть, но может и не быть. Пример — отношение «a увидел b»: если Саша увидел Игоря, то возможно, что и Игорь увидел Сашу, но мог и не увидеть.

Кроме симметричных, асимметричных и несимметричных отношений в математической литературе рассматривается еще один вид симметрии — **антисимметричность**. Определяется этот вид симметрии следующим образом. Если отношения aRb и bRa имеют место лишь при $a = b$, то отношение R называют **антисимметричным** [9; 16; 32; 43; 44]. Примером может служить отношение «меньше или равно». (В [3] термин «антисимметричность» используется для обозначения асимметричности).

Упражнения

1. (НА). Укажите симметричные отношения:

1) Таня — сестра Пети;

2) прямая A перпендикулярна прямой B;

3) город Томск расположен севернее города Новосибирска;

4) тетрадь находится в портфеле;

5) Зина — сестра Оли;

6) $25 + 10 = 15 + 20$;

7) прямая A параллельна прямой B.

2. (ЕНУ). Укажите асимметричные отношения в упр. 1.

3. (ХВУ). Укажите асимметричные отношения:

1) я встретился со своим другом;

2) Иван пришел в гости к своему другу Петру;

3) дерево свалилось на дорогу;

4) Иванов проиграл в шахматы Петрову;

5) Андрей уважает Сергея;

6) Останкинская башня выше Эйфелевой башни;

7) Сидоров хорошо относится к Петрову;

8) Петров поприветствовал Иванова.

4. (ООЗ). Укажите несимметричные отношения в упр. 3.

5. (323). Укажите симметричные отношения в упр. 3.

6. (ЕЛТ). Укажите несимметричные отношения:

1) Иван узнал Петра;

2) лесоруб спилил дерево;

3) столяр изготовил оконную раму;

4) Иванов поздоровался с Орловым;

5) олень увидел в зарослях тигра;

6) число a не больше числа b, где $a, b \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$;

7) число 325 содержит столько же цифр, что и число 891.

7. (881). Укажите антисимметричные отношения в упр. 6.

8. (ЯВЕ). В упр. 6 укажите асимметричные отношения.

9. (МОФ). В упр. 6 укажите симметричные отношения.

10. (152). Укажите номера вопросов, на которые Вы дадите утвердительный ответ. Верно ли, что:

1) существуют отношения, одновременно являющиеся асимметричными и несимметричными?

2) существуют отношения, не являющиеся симметричными и не являющиеся асимметричными?

3) если отношение асимметрично, то оно не является несимметричным?

4) если отношение не является симметричным, то оно может быть асимметричным, либо несимметричным?

5) если отношение aRb симметрично, то оно останется симметричным при перестановке элементов a и b?

6) если отношение несимметрично, то оно не может быть асимметричным?

7) если отношение несимметрично, то оно одновременно является асимметричным?

2.5.
ТРАНЗИТИВНОСТЬ ОТНОШЕНИЙ

Любое бинарное отношение R в множестве M является либо **транзитивным**, либо **интранзитивным**, либо **нетранзитивным** [23; 25].

Отношение R называется транзитивным, если из aRb и bRc следует aRc. Например, отношение «больше» на множестве положительных чисел является транзитивным, поскольку если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Отношение называется интранзитивным, если из aRb и bRc следует, что утверждение aRc является ложным. Примером может служить отношение «больше на 4». Если «a на 4 больше b» и «b на 4 больше c», то утверждение «a на 4 больше c» ложно.

Отношение называется **нетранзитивным**, если оно не является транзитивным и не является интранзитивным, то есть если имеют место отношения aRb и bRc, то утверждение aRc может быть и истинным, и ложным. Например, пусть «A знаком с B» и «B знаком с C», тогда относительно истинности утверждения «A знаком с C» ничего определенного сказать нельзя.

Упражнения

1. (РФО). Укажите транзитивные отношения:

1) равно;
2) больше или равно;
3) не равно;
4) быть другом;
5) меньше на 5;
6) быть южнее;
7) быть врагом;
8) быть логарифмом.

2. (А30). Укажите интранзитивные отношения в упр. 1.

3. (220). Укажите нетранзитивные отношения в упр. 1.

4. (ШМП). Укажите интранзитивные отношения:

1) квадратный корень;
2) старше, чем;
3) больше в три раза;
4) дружит;
5) равно половине;
6) является предком;
7) является матерью;
8) здоровается.

5. (С51). Укажите нетранзитивные отношения в упр. 4.

6. (ФАФ). Укажите транзитивные отношения в упр. 4.

7. (581). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли отношение быть интранзитивным и нетранзитивным одновременно?

2) верно ли, что если отношение является нетранзитивным, то оно может быть транзитивным?

3) существуют ли отношения, которые не являются транзитивными, не являются интранзитивными и не являются нетранзитивными одновременно?

4) может ли отношение быть одновременно транзитивным и симметричным?

5) существуют ли отношения, не являющиеся транзитивными и не являющиеся симметричными одновременно?

6) верно ли, что если отношение нетранзитивно, то оно всегда несимметрично?

7) может ли асимметричное отношение быть интранзитивным?

2.6. РЕФЛЕКСИВНОСТЬ ОТНОШЕНИЙ

Отношение R в множестве M называется **рефлексивным**, если для всякого $a \in M$ утверждение aRa является истинным. Например, отношение параллельности прямых является рефлексивным, так как всякая прямая параллельна самой себе. Отношение быть однокурсником также является рефлексивным, поскольку каждый студент является однокурсником по отношению к самому себе.

Отношение называется **антирефлексивным**, если ни один элемент $a \in M$ не находится в отношении R с самим собой. (В [39] такие отношения называются **иррефлексивными**.) Например, отношение перпендикулярности прямых является антирефлексивным, поскольку всякая прямая не является перпендикулярной самой себе. Отношение «автомобиль a следует за автомобилем b» также является антирефлексивным, так ни один автомобиль не может следовать за самим собой.

Существуют отношения, не являющиеся ни рефлексивными, ни антирефлексивными. Пусть, например, M — множество точек на плоскости. Рассмотрим отношение: «точка a симметрична точке b относительно прямой, лежащей в той же плоскости». Если точки лежат не на прямой, то утверждения aRa и bRb являются ложными. Но все точки, лежащие на прямой, симметричны сами себе. Следовательно, данное отношение не является рефлексивным и не является антирефлексивным.

Упражнения

1. (ЖЛВ). Укажите рефлексивные отношения:

1) Таня — сестра Зины;

2) $a \leqslant b$, где a и b — натуральные числа;

3) $a \neq b$, где a и b — натуральные числа;

4) треугольник a подобен треугольнику b;

5) площадь круга a больше площади круга b;

6) Иван написал письмо Петру;

7) выражения a и b имеют одно и то же значение в множестве числовых выражений.

2. (ЛОЙ). Укажите транзитивные отношения в упр. 1.

3. (Р65). Укажите симметричные отношения в упр. 1.

4. (АЭЛ). Укажите рефлексивные отношения:

1) точка a удалена от точки b на 4 см;

2) по количеству жителей город A равен городу B;

3) дробь a равна дроби b в множестве дробей;

4) число a делится на b без остатка в множестве целых положительных чисел;

5) площадь фигуры a равна площади фигуры b в множестве геометрических фигур на плоскости;

6) числа a и b при делении на 5 дают одинаковые остатки;

7) $a - b \neq 0$, где a, $b \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$; $a - b$ — положительное число.

5. (Б37). Укажите симметричные отношения в упр. 4.

6. (БКМ). Укажите транзитивные отношения в упр. 4.

7. (697). Укажите рефлексивные отношения:

1) a похож на b (в множестве людей);
2) в книге a в два раза больше страниц, чем в книге b;
3) фраза a имеет тот же смысл, что и фраза b;
4) Петров и Сидоров имеют одинаковый рост;
5) дорога a имеет ту же длину, что и дорога b;
6) Смирнов и Васильев живут на третьем этаже;
7) поезд a идет быстрее, чем поезд b.

2.7. ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Если отношение R в множестве M обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, то оно называется **отношением эквивалентности**.

Пусть M — множество студентов. Тогда отношение aRb, где a, $b \in M$, а R обозначает «быть однокурсником», является отношением эквивалентности, поскольку оно рефлексивно, так как каждый студент является однокурсником по отношению к самому себе (см. предыдущий подраздел), симметрично (если a — однокурсник по отношению к b, то и b — однокурсник по отношению к a), транзитивно (если a — однокурсник по отношению к b, b — однокурсник по отношению к c, то a — однокурсник по отношению к c).

Отношение эквивалентности разбивает множество M на непересекающиеся **классы эквивалентности**. В рассмотренном примере отношение «быть однокурсником» разбивает все множество студентов на пять непересекающихся классов (при пятилетней системе обучения), где первый класс образуют все студенты первого курса, второй — второго курса, третий — третьего и т. д.

Множество всех классов эквивалентности образует **фактор-множество** M/R множества M, где M — исходное множество (в рассмотренном примере M — множество студентов всех курсов). Очевидно, что классы фактор-множества являются непересекающимися.

Упражнения

1. (УЛЭ). Укажите отношения эквивалентности:

1) быть попутчиком в одном вагоне;
2) $a + b = 100$, где a, $b \in \{1, 2, \ldots, 100\}$;
3) $a = b$, где a, $b \in \{1, 4, 8, 9\}$;
4) прямая a перпендикулярна прямой b;
5) треугольник a подобен треугольнику b;
6) Сидоров живет двумя этажами выше Михайлова;
7) a сердит на b.

2. (146). Укажите отношения эквивалентности:

1) Иванов задал вопрос Петрову;

2) книга a имеет такую же цену, что и книга b;

3) Смирнов попрощался с Федоровым;

4) Саша позвал в гости Игоря;

5) Павлов и Васильев смотрят один и тот же фильм;

6) высота горы a равна высоте горы b;

7) Ухин и Орлов окончили вуз в одном и том же году.

3. (ЕЦЛ). Укажите отношения эквивалентности:

1) солдат Петров идет в ногу с солдатом Ивановым в одном и том же отряде;

2) Смирнов позвонил на работу Чичикову;

3) Павлов встретил своего друга Васильева;

4) автомобиль «Москвич» едет по той же дороге, что и автомобиль «Жигули»;

5) автомобиль a столкнулся с автомобилем b;

6) Иванов прочитал книгу, написанную Соколовым;

7) Юра прилетел в Москву одновременно с Борисом.

4. (АПО). На множестве всех жителей 50 штатов США задано отношение: «a и b — жители одного и того же штата». Найдите $|M/R|$.

5. (42Р). Определите $|M/R|$, если на множестве M всех жителей пятиэтажного дома задано отношение: «a и b живут на одном и том же этаже».

2.8. ОТНОШЕНИЯ СТРОГОГО ПОРЯДКА

Если элементы некоторого множества мы располагаем в определенном порядке, то сначала выбираем первый элемент, затем второй и т. д., т. е., в сущности, как сказано в [9], элементы множества упорядочены, если они каким-либо образом пронумерованы. Очевидно, что в этом случае между элементами существует отношение «следовать за»: элемент a следует за элементом b. Отношение следования обладает свойством транзитивности (если a следует за b, а b следует за c, то a следует за c), но является асимметричным (если a следует за b, то b не может следовать за a) и не является рефлексивным (элемент a не может следовать за самим собой).

Если отношение R в множестве M является транзитивным и асимметричным и не является рефлексивным, то оно называется **отношением строгого порядка**. Примером может служить отношение «a больше b» на множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Упражнения

1. (22Р). Укажите отношения строгого порядка:

1) Иванов выше Сидорова;

2) Лена — сестра Наташи;

3) отрезок a короче отрезка b;

4) отрезок a длиннее отрезка b на 2 см;

5) Васильев знает Петрова;
6) Иванов живет этажом выше Соколова;
7) лыжник Ухин бежит непосредственно за Ивиным.

2. (43Р). Укажите отношения строгого порядка:
1) число a непосредственно следует за числом b, где a, $b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$;
2) число a на 4 больше числа b, где a, $b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$;
3) между числами a и b находится точно одно число (a, $b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$);
4) число a равно числу b, где a, $b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$;
5) число a следует за числом b, где a, $b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$;
6) число a больше в два раза числа b, где a, $b \in \{1, 2, \ldots, 20\}$;
7) Саша старше Димы.

3. (ОХШ). Найдите $|aRb|$, где a, $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, если R — отношение «меньше».

2.9. ОТНОШЕНИЯ НЕСТРОГОГО ПОРЯДКА

Если отношение R в множестве M рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то оно называется **отношением нестрогого порядка**. Например, отношение «не больше» на множестве натуральных чисел является отношением нестрогого порядка: $a \leqslant b$, так как оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Это отношение представляет собой объединение двух отношений R_1 и R_2, где R_1 — асимметричное отношение «меньше»; R_2 — отношение «равно»:

$$R = R_1 \cup R_2 = a\, R_1\, b \cup a\, R_2\, b.$$

Если a, $b \in \{1, 2, 3, 4\}$, то

$$R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\};$$
$$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Объединив эти два множества, получим:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\},$$

где каждую пару образуют элементы, находящиеся в отношении «меньше или равно», т. е. «не больше».

Упражнения

1. (СПИ). Укажите отношения нестрогого порядка:
1) автомобиль a едет быстрее автомобиля b;
2) число a не меньше числа b, где a, $b \in \{1, 2, \ldots, 50\}$;
3) натуральные числа a и b не равны числу 6;
4) число a без остатка делится на число b, где a, $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
5) $a > 5$ и $b > 5$, где a, $b \in \{1, 2, \ldots, 8\}$;
6) Петров и Иванов — друзья;
7) угол α не больше угла β.

2. (ВУУ). Укажите отношения нестрогого порядка:

1) числа a и b не являются двузначными;
2) точка a на числовой оси находится левее точки b;
3) самолет a летит не быстрее самолета b;
4) расстояние между городами равно 100 км;
5) дом a не выше дома b;
6) отрезок a не короче отрезка b;
7) хорошее лучше плохого.

2.10. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Согласно [43] множество M называется **линейно упорядоченным**, если для любых двух его элементов a и b имеет место либо только aRb, либо только bRa.

Если же отношение aRb (либо bRa) справедливо не для любых элементов $a, b \in M$, то множество M называется **частично упорядоченным**.

Пример 1. Пусть $M = \{1, 3, 4, 7\}$. Рассмотрим отношение aRb, где R обозначает «меньше»:

$$R = \{(1, 3), (1, 4), (1, 7), (3, 4), (3, 7), (4, 7)\}.$$

Для каждого элемента множества R справедливо $a < b$, следовательно, отношение $a < b$ есть отношение линейного порядка. Говорят, что отношение $a < b$ множество M упорядочивает линейно.

Пример 2. Пусть дано множество

$$M = \{c, d, e, f\}.$$

Тогда отношение $P \subset Q$ есть отношение **частичного порядка** в булеане $B(M)$, где P и Q — подмножества множества M. Чтобы убедиться в этом, перечислим все элементы булеана множества M:

$$B(M) = \{\varnothing, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, e\},$$
$$\{d, f\}, \{e, f\}, \{c, d, e\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\}, \{c, d, e, f\}\}.$$

Отсюда видно, что отношение $P \subset Q$ выполняется не для всех элементов булеана. Например:

$$\{d\} \subset \{c, d\}, \quad \{e, f\} \subset \{d, e, f\}, \quad \{c, f\} \not\subset \{d, f\}.$$

Следовательно, отношение $P \subset Q$ упорядочивает булеан $B(M)$ частично.

Упражнения

1. (УЖУ). Пусть $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Определите $|K|$, где K — множество подмножеств, кардинальное число которых равно двум.

2. Сколько существует пар элементов $a, b \in M$ (см. упр. 1), для которых справедливо отношение:

1) (ООТ). $a < b$? 2) (МОР). $a > b$? 3) (ЕКТ). $a \geqslant b$? 4) (ЗКР). $a \leqslant b$?

3. (781). Укажите, в каких случаях отношения упорядочивают множества линейно?

1) «a выше, чем b», где a, $b \in$ { рост Петрова — 180 см, Сидорова — 175 см, Данилова — 174 см, Орлова — 171 см, Васильева — 176 см};

2) «a ниже, чем b», где a, $b \in$ {рост Николаева — 168 см, Иванова — 170 см, Алексеева — 178 см, Афанасьева — 170 см, Владимирова — 172 см};

3) «a делитель b», где a, $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

4) «a длиннее b», где a, b — элементы множества отрезков различной длины;

5) «a находится левее b на числовой оси», где a и b — натуральные числа;

6) «a едет быстрее b», где a и b — элементы множества автомобилей, движущихся по дороге;

7) «a знаком с b», где a, $b \in N$; N — множество учащихся школы.

2.11. ОТНОШЕНИЯ СООТВЕТСТВИЯ

Понятие соответствия ясно интуитивно. Например, если требуется закодировать сообщение заменой букв алфавита их порядковыми номерами, то каждой букве необходимо поставить в соответствие определенное десятичное число. Если в кассе кинотеатра продают билеты на какой-либо сеанс, это значит, что каждому билету соответствует определенное место в зрительном зале. Если цветные карандаши упаковывают в коробки, то каждому набору цветных карандашей соответствует некоторая коробка, и т. д. Этот интуитивно ясный смысл вкладывается в слово «соответствие» и в том случае, когда говорят о каких-либо двух множествах.

В общем случае между элементами множеств A и B могут быть четыре вида соответствия в зависимости от того, один или несколько элементов множества A соответствуют элементу множества B и один или несколько элементов множества B ставятся в соответствие элементу множества A [25]:

1) **взаимно однозначное соответствие**, когда каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие единственный элемент $b \in B$ и когда каждому элементу $b \in B$ соответствует только один элемент $a \in A$. Например, если 33 буквы русского алфавита пронумеровать, то получим два множества A = {А, Б, В, ..., Я} и $B = \{1, 2, 3, \ldots, 33\}$, между которыми существует взаимно однозначное соответствие. Взаимно однозначные соответствия называют **биективными отображениями**, или **биекциями**;

2) **одно-многозначное соответствие**, когда каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие несколько элементов множества B, но каждому элементу $b \in B$ соответствует только один элемент $a \in A$. Примером может служить следующее отношение: «a есть квадрат b». Пусть $A = \{1, 4, 9\}$, $B = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3\}$. Тогда элементу $1 \in A$ ставятся в соответствие элементы $1 \in B$ и $-1 \in B$. То же самое относится и к элементам $4 \in A$ и $9 \in A$;

3) **много-однозначное соответствие**, когда для каждого элемента $a \in A$ существует только один элемент $b \in B$, но каждому элементу множества B соответствует более одного элемента множества A. Примером может служить отношение «a есть квадратный корень числа b». Пусть $A = \{1, 2, 3, -1, -2, -3\}$ и $B = \{1, 4, 9\}$. Тогда двум элементам 1 и −1 множества A соответствует один

элемент $1 \in B$, так как квадратным корнем из 1 является и 1 и -1. То же самое относится и к остальным элементам множеств A и B;

4) **много-многозначное соответствие**, когда каждому элементу $a \in A$ соответствует более одного элемента множества B и каждому элементу $b \in B$ соответствует также более одного элемента множества A. Примером много-многозначного соответствия может служить отношение вида «a не равно b», т. е. «$a \neq b$». Допустим, что $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Тогда элементу $1 \in A$ соответствуют элементы $2, 3, 4, 5 \in B$, элементу $2 \in A$ — $3, 4, 5 \in B$, элементу $3 \in A$ — $2, 4, 5 \in B$. Аналогично: элементу $2 \in B$ соответствуют элементы $1, 3 \in A$, элементу $3 \in B$ — $1, 2 \in A$, элементу $4 \in B$ — $1, 2, 3 \in A$, элементу $5 \in B$ — $1, 2, 3 \in A$.

Упражнения

1. (219). Даны множества: $A = \{a, \alpha, \beta, t, m\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Каждой букве множества A поставили в соответствие некоторую цифру множества B, т. е. буквы пронумеровали. Сколько существует способов установления этого соответствия?

2. (300). Укажите взаимно однозначные отношения:

1) «$a \in A$ на 4 больше, чем $b \in B$», где A — множество всех целых чисел; $A = B$;

2) «$a \in A$ есть делитель $b \in B$», где $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{4, 8, 9, 25, 27, 125\}$;

3) «пассажир $a \in A$ едет в вагоне $b \in B$», где A — множество пассажиров поезда; B — множество вагонов; $|B| > 1$; в каждом вагоне более одного пассажира;

4) «$a \in A$ слушает лекцию в аудитории $b \in B$», где A — множество студентов; B — множество аудиторий; $|B| > 1$; в каждой аудитории более одного студента;

5) «$2a \neq 3b$», где $a, b \in \{1, 2, 3\}$;

6) «$a - b = 0$», где a и b — натуральные числа;

7) «$a \geqslant b$», где $a \in \{6, 7, 9\}$; $b \in \{3, 4\}$;

8) «$a + b$ — нечетное число», где $a \in \{2, 3, 4, 5\}$; $b \in \{6, 7, 8, 9\}$;

9) «скрипка $a \in A$ находится в футляре $b \in B$», где A — множество скрипок, B — множество футляров.

3. (258). В упр. 2 укажите номера одно-многозначных отношений.

4. (ПО7). В упр. 2 укажите номера много-однозначных отношений.

5. (ЯЛК). В упр. 2 укажите много-многозначные отношения.

2.12. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть даны множества X и Y. Бинарное отношение xRy является **функциональным (функцией)**, если каждому элементу $x \in X$ соответствует не более одного элемента $y \in Y$ [16; 43]. Из этого определения следует, что одно-многозначные и много-многозначные отношения функциональными быть не могут.

Для обозначения функции используются различные записи: $X \xrightarrow{f} Y$, $f : X \to Y$ [39]; $f(x)$ [43]; $(x, y) \in F$, $y = F(x)$, где $F \subset X \times Y$ [16]. В [43] значение функции $y \in Y$ называют образом элемента $x \in X$, а сам элемент $x \in X$ — прообразом. Множество X — область определения функции, Y — область значений.

Функция $y = F(x)$ называется **всюду определенной**, если каждому элементу $x \in X$ соответствует один элемент $y \in Y$. В этом случае функцию называют также **отображением** (или **инъекцией**) множества X в множество Y [43]. Функция называется **недоопределенной (частично определенной)**, если имеется хотя бы один элемент $x \in X$, которому не соответствует никакой элемент $y \in Y$. Отсюда следует, что недоопределенные функции отображениями не являются. Однако не все математики придерживаются этого положения. Например, Бурбаки считает, что функция и отображение — это полные синонимы [43]. (Никола Бурбаки — не один человек. Это псевдоним, под которым группа французских математиков в 1939 г. предприняла попытку изложить различные математические теории с позиций формального аксиоматического метода [25; 38].)

Пример 1. Пусть даны два множества:

$$X = \{а, б, в, г, д, е\}; \quad Y = \{1, 2, 3, 4\}. \tag{28}$$

Выделим в множестве $X \times Y$ подмножество вида

$$F = \{(а, 1), (б, 3), (в, 4), (г, 2), (д, 2), (е, 3)\}.$$

Первый элемент каждой пары множества F — это элемент множества X, второй — элемент множества Y. Все первые элементы различны, следовательно, каждому значению $x \in X$ соответствует точно один элемент $y \in Y$. Это значит, что множество F есть функциональное отношение и, следовательно, является отображением множества X в множество Y.

Пример 2. Выделим в декартовом произведении множеств (28) множество вида

$$M = \{(а, 1), (а, 2), (б, 3), (в, 4), (г, 3), (д, 2), (е, 4)\}.$$

В него входят пары $(а, 1)$ и $(а, 2)$, у которых первые элементы одинаковы. Это значит, что элементу $а \in X$ соответствуют два элемента множества Y: $1 \in Y$ и $2 \in Y$. Но по определению функционального отношения каждому элементу множества X может соответствовать не более одного элемента множества Y. Следовательно, отношение M не является функцией.

Пример 3. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{а, б, в\}$ и пусть отношение F имеет вид «буквам русского алфавита ставятся в соответствие их порядковые номера», т. е.

$$F = \{(1, а), (2, б), (3, в)\}. \tag{29}$$

Элементу $4 \in X$ в множестве Y не соответствует никакой элемент, следовательно, отношение (29) есть неполностью определенная функция. Расширим область определения функции до множества $\{а, б, в, г\}$, тогда получим всюду определенную функцию:

$$F = \{(1, а), (2, б), (3, в), (4, 2)\}.$$

Пример 4. Пусть дано выражение

$$y = \sqrt{x}\ . \qquad (30)$$

Известно, что, например, $\sqrt{9} = 3$ и $\sqrt{9} = -3$, т. е. одному и тому же значению x соответствуют два различных значения y. Следовательно, по определению выражение (30) функцией не является. Если же ограничиться только неотрицательными числами, то выражение (30) является функцией с областью определения и областью значений в множестве неотрицательных чисел.

Таким образом, понятие функционального отношения в теории множеств является обобщением известного из курса школьной математики понятия функции и распространяется не только на числовые множества, но и на объекты, не являющиеся числовыми.

Упражнения

1. (НАТ). Чему равно значение функции $y = 3x^2 - 7$, если значение аргумента равно трем?

2. Дано: $y = F(x)$, где $F \subset X \times Y$; $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Функция y задана следующим образом:

$$y = 1, \text{ если } x \in X \text{ — четное число;}$$
$$y = 2, \text{ если } x \in X \text{ — нечетное число.}$$

1) (УУТ). Определите область значений функции y.

2) (МЕТ). Определите область определения функции y.

3. (САД). Дано: $y = F(x)$, где $F \subset X \times Y$; $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Укажите функциональные отношения:

1) $F = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5)\}$;
2) $F = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}$;
3) $F = \{(3, 1), (4, 5), (1, 5), (2, 2), (5, 3)\}$;
4) $F = \{(5, 1), (1, 5), (2, 4), (4, 2)\}$;
5) $F = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$;
6) $F = \{(2, 2), (3, 3), (4, 3), (5, 3)\}$.

4. (АШУ). В предыдущем упражнении укажите неполностью определенные функции.

2.13. РЕЛЯЦИОННАЯ АЛГЕБРА

Объектами, над которыми в реляционной (лат. *relatio* — сообщение) алгебре выполняются операции, являются n-арные отношения. Так как отношения — это множества, то над ними можно выполнять теоретико-множественные операции, такие как объединение, пересечение, разность, симметрическая разность и дополнение. Проиллюстрируем это примерами.

Пример 1. Пусть даны бинарные отношения:

$$P = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 3)\};$$
$$Q = \{(1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\},$$

являющиеся подмножествами множества $A \times A = A^2$, где $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Объединение множеств P и Q образуют все пары, входящие в эти множества:

$$P \cup Q = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}.$$

Пересечение множеств P и Q — это множество, элементы которого входят одновременно в оба множества:

$$P \cap Q = \{(1, 3), (3, 4), (4, 3)\}.$$

Разность множеств $P - Q$ имеет вид $P - Q = \{(1, 2), (2, 3)\}$.

Аналогично находим: $Q - P = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Симметрическая разность множеств $P \oplus Q$:

$$P \oplus Q = (P - Q) \cup (Q - P) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Для нахождения дополнений множеств P и Q сначала необходимо определить универсальное множество I:

$$I = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Следовательно:

$$\bar{P} = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\};$$
$$\bar{Q} = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(4,1),(4,2),(4,4)\}.$$

В реляционной алгебре кроме теоретико-множественных используются и другие операции. Рассмотрим некоторые их них.

Обмен позициями [26]. Пусть n-арное отношение представлено множеством F кортежей длины n. Пронумеруем все элементы, входящие в кортеж. Суть операции обмена позициями, обозначаемой $(i \leftrightarrow j)\, F$, заключается в том, что знаки, стоящие в одном и том же кортеже на местах i и j, меняются местами ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$). Эта операция выполняется над всеми кортежами множества F.

Пример 2. Рассмотрим отношение вида

$$F = \{(0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 1)\},$$

являющееся подмножеством множества A^5, где $A = \{0, 1\}$. В множестве F три кортежа. Применим к ним операцию обмена позициями, приняв $i = 3$, $j = 5$. Тогда получим новое отношение

$$(3 \leftrightarrow 5)\, F = \{(0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0)\},$$

не совпадающее с F. Очевидно, что если к множеству $(3 \leftrightarrow 5)\, F$ снова применить ту же операцию при $i = 3$, $j = 5$, то получим множество F.

Расширение отношения. Эта операция имеет обозначение $\nabla_a F$, где F — множество кортежей длины n, a — некоторый элемент, записываемый слева в каждый кортеж множества F.

В результате получится новое множество с тем же числом кортежей, но длина каждого кортежа равна $n + 1$.

Пример 3. Пусть $F = \{(a, b, c), (a, b, b), (b, b, b)\}$. Выберем в качестве элемента a цифру, например 6. Тогда

$$R = \nabla_6 F = \{(6, a, b, c), (6, a, b, b), (6, b, b, b)\}.$$

Если операцию расширения отношения применить к двум множествам F и T, используя в качестве элемента a эти же символы F и T, а затем к новым множествам применить операцию объединения, то получим отношение Q, представляющее собой композицию отношений F и T:

$$Q = (\nabla_F F) \cup (\nabla_T T).$$

Исключение позиции. (В [26] эта операция названа проекцией отношения.) Обозначение этой операции имеет вид $(i, j, ..., k)\, F$, где $i, j, ..., k$ — номера позиций кортежа, из которых удаляются элементы. Эту операцию применяют ко всем кортежам множества F. В результате длина каждого кортежа уменьшится, и могут появиться повторы одних и тех же укороченных кортежей. Повторы необходимо удалить. Тогда останется множество, являющееся результатом операции исключения позиции.

Пример 4. Исключив 2-й и 4-й элементы в каждом кортеже множества

$$F = \{(a, b, b, c, d), (a, a, b, c, d), (a, c, c, c, d)\},$$

получим множество

$$M = (2, 4)\, F = \{(a, b, d), (a, c, d)\}.$$

Удвоение позиции. Пусть F — множество кортежей длины n. Выберем j-ю позицию какого-либо кортежа и повторно запишем находящийся в этой позиции элемент в заранее указанное место в том же кортеже. Тем самым мы выполним операцию удвоения позиции. Условное обозначение этой операции имеет вид D_jF. Выполняется она для каждого кортежа множества F.

Пример 5. Рассмотрим отношение вида

$$F = \{(1, 3, 4), (1, 3, 5), (5, 6, 8), (4, 5, 7)\}.$$

Допустим, что j-й элемент повторно записывается в каждый кортеж справа. Пусть $j = 2$, тогда

$$D_2F = \{(1, 3, 4, 3), (1, 3, 5, 3), (5, 6, 8, 6), (4, 5, 7, 5)\}.$$

Этих операций достаточно для того, чтобы получить представление о том, что является объектом изучения в реляционной алгебре. Для знакомства с другими операциями следует обратиться к специальной литературе.

Упражнения

1. Дано множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. На его основе заданы отношения в виде двух множеств P и Q:

$$P = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\} \subset A^2;$$
$$Q = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\} \subset A^2.$$

1) (БЭС)! Сколько элементов содержат: объединение множеств P и Q; пересечение множеств P и Q?

2) (ТХС)! Сколько элементов содержат множества:

$$P - Q? \quad Q - P? \quad P \oplus Q?$$

3) (PPP)! Сколько элементов содержат множества: $\bar{P}$? $\bar{Q}$?

2. (ПХР). Отношение F состоит из одного кортежа, представляющего собой пятизначное двоичное число:

$$F = \{(0, 0, 1, 1, 0)\}.$$

К этому отношению три раза применили операцию обмена позициями: сначала $(2 \leftrightarrow 3)F$, к получившемуся новому отношению — $(1 \leftrightarrow 4)F$, после чего — $(2 \leftrightarrow 5)F$. Укажите получившийся кортеж.

3. (БОР)! Дано отношение

$$F = \{(3, 3, 4, 5, 5, 6), (3, 3, 5, 5, 5, 5), (3, 4, 5, 5, 5, 6)\}.$$

Примените к нему операцию исключения позиции вида $(2, 3, 6)F$. Сколько кортежей в новом отношении? Какие элементы в него входят?

4. (ЖУР). Отношение F задано в виде $F = \{(4, 4, 5), (1, 0, 1), (2, 0, 0)\}$. Примените к нему операцию удвоения позиции D_1F, записывая повторный элемент справа в каждый кортеж. Укажите все элементы, из которых состоит каждый кортеж нового отношения.

5. (ЗУЛ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли n-арное отношение содержать кортежи различной длины?

2) может ли измениться число кортежей в множестве F, если к нему применить операцию обмена позициями?

3) может ли получиться пустое множество в результате применения операции исключения позиции?

4) верно ли, что если операцию удвоения позиции последовательно применять к одному и тому же отношению, то кортежи с каждым применением этой позиции будут удлиняться?

5) возможны ли случаи, когда в результате применения операции обмена позициями множество F остается неизменным?

6) возможны ли случаи, когда в результате применения операции расширения отношения множество F остается неизменным?

7) применима ли операция исключения позиции к синглетону, представляющему собой кортеж из одного элемента?

3

БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

3.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Того, кто начинает изучать теорию бесконечных множеств, ожидают настолько удивительные факты, что приобретенный жизненный опыт вполне может заявить протест против ее утверждений, которые с позиции здравого смысла покажутся попросту нелепыми. Сам Георг Кантор, случалось, приходил в изумление от результатов своих исследований, настолько они не соответствовали его интуитивным представлениям.

Существует два подхода к понятию бесконечности. Основой первого является **актуальная бесконечность**, второго — **потенциальная**. В первом случае бесконечность рассматривается как множество, содержащее бесконечно много элементов, но при этом предполагается, что оно задано в готовом, сформированном виде и его можно представить как некоторый объект. Именно так представлял себе бесконечное множество Г. Кантор. Потенциальная же бесконечность рассматривается как процесс, у которого нет последнего шага, как процесс непрерывного увеличения числа элементов. Нам при дальнейшем изложении материала не потребуется учитывать особенности этих подходов, вполне достаточно представления о бесконечности как о множестве, число элементов которого больше любого наперед заданного числа. (Лишь при выполнении упражнений подраздела 3.10 придется основательно вникнуть в понятия актуальной и потенциальной бесконечности.)

В подразделе 1.1 сказано, что конечное множество в общем случае может быть задано двумя способами — прямым перечислением и описанием свойств его элементов. В случае бесконечных множеств прямое перечисление элементов исключено, поэтому задавать их можно только описанием признаков, характерных для элементов данного множества. Например:

$A = \{x \mid x$ — натуральное число, $x > 1$, x — число, делящееся только на себя и на единицу$\}$.

Согласно этой записи элементами множества A являются простые числа.

В теории бесконечных множеств широко используются понятия **натурального числа** и **натурального ряда**. Однако необходимо отметить, что в математической литературе нет однозначности в определении натурального числа. Например, в [25, с. 375] говорится: «0 является натуральным числом». В [38, с. 863] читаем: «Натуральные числа — числа, возникающие в процессе простого счета, целые положительные числа 1, 2, 3, ...». В дальнейшем во избежание неопределенности будем считать, что число 0 натуральным не является и что натуральный ряд начинается с единицы: 1, 2, 3, 4, 5, ...

Свойства конечных множеств хорошо согласуются с нашей интуицией и приобретенным опытом. Например, нам кажется совершенно очевидным, что всякое собственное подмножество любого конечного множества A не является эквивалентным множеству A. В случае сомнений можно поставить «эксперимент» — взять какое-либо множество, перечислить все его собственные подмножества, для каждого подмножества найти кардинальное число и сравнить его с числом $|A|$. Если не обнаружится ни одного случая равенства сравниваемых кардинальных чисел, то мы получим экспериментальное подтверждение того, что среди подмножеств данного множества A нет ни одного эквивалентного ему подмножества.

Иное дело в случае бесконечных множеств. При их изучении нашим инструментом могут служить только логически правильные рассуждения, и если результаты рассуждений придут в противоречие со здравым смыслом, то нам придется выполнить определенную психологическую работу, принимая истинным то, что интуитивно кажется ложным.

3.2. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Как сравнивать бесконечные множества? Например, очевидно, что простых чисел гораздо меньше, чем, допустим, нечетных, поскольку все простые числа нечетны (за исключением числа 2), но существует бесконечно много нечетных чисел, не являющихся простыми. Верно ли это утверждение? Чтобы доказать его справедливость (или ложность), множества необходимо как-то сравнить.

Для сравнения конечных множеств A и B достаточно знать их кардинальные числа либо выяснить, нет ли между элементами множеств A и B взаимно однозначного соответствия. Например, какое множество больше — множество A кресел в зале театра или множество B зрителей в нем? Если все кресла заняты, в проходах нет ни одного зрителя и каждое кресло занимает только один зритель, то ясно, что между множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие и, следовательно, они эквивалентны.

Так как понятие взаимно однозначного соответствия позволяет определить, являются ли заданные множества эквивалентными, то Г. Кантор предложил распространить это понятие и на бесконечные множества: если найдется способ показать, что каждому элементу бесконечного множества A соответствует вполне определенный элемент бесконечного множества B и каждому элементу множества B соответствует вполне определенный элемент бесконечного множества A, то множества A и B являются эквивалентными. Если же взаимно однозначное соответствие между элементами множеств A и B не установлено, то нет оснований считать, что эти множества эквивалентны.

Например, пусть A — множество всех натуральных чисел, делящихся на 50, B — множество всех четных натуральных чисел. Эквивалентны ли эти множества?

Запишем множества A и B в виде:

$$A = \{50, 100, 150, 200, 250, \ldots\}; \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$

Отсюда видно, что множество A является подмножеством множества B: $A \subset B$. Но с другой стороны, если числа — элементы множеств A и B — представить в виде таблицы, расположив числа в порядке возрастания, то между ними хорошо просматривается взаимно однозначное соответствие (табл. 2).

Таблица 2

50	100	150	200	250	300	350	...
2	4	6	8	10	12	14	...

Элементу $2 \in B$ соответствует элемент $50 \in A$, элементу $4 \in B$ соответствует элемент $100 \in A$ и т. д. Следовательно, множества A и B эквивалентны. Говоря языком конечных множеств, четных натуральных чисел столько же, сколько натуральных чисел, делящихся без остатка на 50.

Таким образом, положение «часть меньше целого», справедливое для конечных множеств, в случае бесконечных множеств перестает быть безусловно верным. Нашему сознанию, воспитанному на догмах конечных множеств, кажется противоестественной мысль, что существует огромный класс множеств, для которых положение «часть равна целому» является истиной, и приходится затрачивать значительные усилия, чтобы психологически с этим согласиться. Впрочем, подобные случаи в науке — не редкость. Достаточно вспомнить, что кванты света — это одновременно и частицы, и волны, что с возрастанием скорости тела увеличивается его масса (по теории относительности А. Эйнштейна), что не Солнце вращается вокруг Земли, а, вопреки очевидному, Земля вращается вокруг Солнца, что Земля не плоская, а (также вопреки очевидному) шарообразная, и др. Во всех этих случаях освоение истины сопровождалось преодолением психологического сопротивления.

Важной характеристикой конечного множества является понятие кардинального числа. Аналогичную характеристику Г. Кантор предложил и для бесконечных множеств, введя понятие **мощности** множества. Представление о содержании этого понятия можно получить из следующего утверждения. Два бесконечных множества A и B имеют одну и ту же мощность, если между их элементами существует взаимно однозначное соответствие [43, с. 45]. Очевидно, что для конечных множеств кардинальное число и мощность — это одно и то же.

Понятие взаимно однозначного соответствия было введено до Г. Кантора чешским ученым Б. Больцано. Однако, обнаружив трудности, к которым вело это понятие в случае бесконечных множеств, он отступил. Поэтому все понятия и определения теории множеств связывают только с именем Г. Кантора.

В начале данного подраздела сформулирован вопрос, являются ли эквивалентными множество A простых чисел и множество B нечетных чисел. Теперь ответить на этот вопрос легко. Запишем в порядке возрастания простые числа и каждому из них поставим в соответствие элемент из множества B следующим образом:

$$\begin{array}{rcccccccc} A = & \{2, & 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & \ldots\}; \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B = & \{1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & 13, & \ldots\}, \end{array}$$

откуда видно, что множества A и B эквивалентны.

Рассмотрим еще два примера.

Пример 1. Пусть даны два множества:

$$N = \{x \mid x \text{ — натуральное число}\};$$
$$M = \{x \mid x \geqslant 8, x \text{ — натуральное число}\}.$$

Являются ли эти множества эквивалентными?

В множестве M отсутствуют семь элементов, которые содержатся в множестве N. Остальные числа 8, 9, 10, 11, 12, ... являются элементами обоих множеств. Следовательно, $M \subset N$. Чтобы выяснить, эквивалентны ли эти множества, запишем их элементы один под другим:

$$\begin{array}{rcccccc} N = & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots\}; \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ M = & \{8, & 9, & 10, & 11, & 12, & \ldots\}. \end{array}$$

Между элементами хорошо просматривается взаимно однозначное соответствие, следовательно, множества A и B равномощны, т. е. эквивалентны.

Пример 2. Найдите элементы множества $N \cap \bar{M}$, где M и N — множества, указанные в примере 1. Очевидно, что множество $N \cap \bar{M}$ образуют те числа множества N, которые отсутствуют в множестве M, т. е.

$$N \cap \bar{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Упражнения

1. Укажите элементы множества $A \cap \bar{B}$, если:

1) (Я5О). $A = \{x \mid x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $B = \{x \mid x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$;

2) (ЗАМ). $A = \{x \mid x > 28, x \text{ — натуральное число}\}$, $B = \{x \mid x \geqslant 30, x \text{ — натуральное число}\}$;

3) (ТОН). $A = \{x \mid x = n^2, n \text{ — натуральное число}\}$, $B = \{x \mid x \text{ — натуральное число}, x > 9\}$.

2. (КИЛ). Укажите элементы множества $A \cap B$, если:

$$A = \{x \mid x > 10, x \text{ — натуральное число}\};$$
$$B = \{x \mid x \leqslant 14, x \text{ — натуральное число}\}.$$

3. (236). Укажите номера множеств, являющихся бесконечными:

1) $A = \{x \mid x < 100,\ x$ — натуральное число$\}$;

2) $B = \{x \mid x < 100,\ x$ — целое отрицательное число$\}$;

3) $C = \{x \mid 20 < x \leqslant 120,\ x$ — целое неотрицательное число$\}$;

4) $D = \{x \mid x = n^n,\ n$ — натуральное число$\}$;

5) $E = \{x \mid x$ — число, при котором выполняется равенство $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2\}$;

6) $F = \{x \mid x$ — число, при котором выполняется равенство $x^2 = 2x\}$;

4. (303). В упр. 3 укажите множества, эквивалентные множеству $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

5. (723). Укажите множества, эквивалентные множеству натуральных чисел (см. упр. 3), если $K = 1000$:

1) $A \cup B \cup K$;	3) $C \cup F \cup K$;	5) $D \cap E \cup B$;	7) $F \cup K \cup A \cap D$;
2) $B \cup E \cup F$;	4) $C \cap D \cap F$;	6) $C \cap D \cup E \cap F$;	8) $D \cap E \cup C$.

6. (05Р). Найдите элементы множества $A \cap D$ (см. упр. 3).

7. (ОЯР). Найдите кардинальное число множества $A \cap E$ (см. упр. 3).

3.3. СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Всякое множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называется **счетным** [25]. Мощность счетного множества обозначается знаком $\aleph_0$, читается: а́леф нуль. Алеф — первая буква финикийского (древнесемитского) алфавита.

В подразделе 1.1 сказано, что кардинальное число конечного множества A обозначается знаком $|A|$. Это обозначение будем использовать и в случае бесконечных множеств. Например, если E — счетное множество, то $|E| = \aleph_0$.

Приведем некоторые теоремы о счетных множествах.

Теорема 1. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Докажем это утверждение. Пусть задано некоторое бесконечное множество E. Выберем среди его элементов, например, элемент e_1. В множестве E останется бесконечно много элементов. Выберем из них элемент e_2. Останется по-прежнему бесконечно много элементов. Выберем элемент e_3 и т. д. до бесконечности. Выбранные элементы образуют счетное подмножество B, поскольку его элементы можно пронумеровать. От того что мы из множества E удалили множество B, мощность множества E не изменилась, так как после удаления элементов $e_1, e_2, e_3, \ldots$ всякий раз в множестве E оставалось бесконечно много элементов. Таким образом, для всякого бесконечного множества E справедливо: $B \subset E$, где B — счетное множество, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно. Для доказательства этой теоремы запишем натуральный ряд и каждому натуральному числу поставим во взаимно однозначное соответствие элементы заданного счетного множества K. Отметим каким-либо способом элементы бесконечного множества $T \subset K$. Очевидно, что отмеченные элементы можно пронумеровать, следовательно, множество $T \subset K$ является счетным, что и доказывает теорему.

Теорема 3. Множество всех целых чисел счетно. Чтобы доказать это утверждение, целые числа расположим в два ряда следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & \ldots \end{array}$$

Получилась матрица из двух строк с бесконечным числом колонок. Нумеруя элементы матрицы по колонкам сверху вниз и слева направо, мы каждому целому числу поставим во взаимно однозначное соответствие натуральное число, что и доказывает теорему.

Теорема 4. Объединение счетного множества A и конечного множества B счетно. Чтобы доказать это утверждение, достаточно сначала пронумеровать элементы конечного множества B, а затем остальные натуральные числа поставить во взаимно однозначное соответствие элементам счетного множества.

Теорема 5. Объединение конечного множества счетных множеств счетно. Пусть дано конечное множество $\{A, B, \ldots, L\}$, где $A, B, \ldots, L$ — счетные множества. Найдем их объединение: $Q = A \cup B \cup \ldots \cup L$.

Чтобы доказать теорему, запишем элементы множеств $A, B, \ldots, L$ одно под другим:

$$\begin{array}{llllll} A = & \{a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots\}; \\ B = & \{b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & \ldots\}; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ L = & \{l_1, & l_2, & l_3, & l_4, & \ldots\}. \end{array}$$

Получилась матрица с конечным числом строк и бесконечным числом колонок. Пронумеруем сверху вниз элементы первой колонки, затем также сверху вниз продолжим нумерацию элементов второй колонки, третьей и т. д. При таком варианте нумерации каждый элемент множества Q получит порядковый номер, следовательно, множество Q счетно, что и требовалось доказать.

Теорема 6. Декартово произведение двух счетных множеств A и B счетно. Представим элементы множества $A \times B$ в виде матрицы. Колонкам матрицы поставим во взаимно однозначное соответствие элементы множества A, строкам — элементы множества B. Тогда на пересечении колонок и строк разместятся элементы множеств $A \times B$ (рис. 28). Нумерацию этих элементов выполним методом треугольника (рис. 28).

Согласно рис. 28 в нумерации участвуют элементы, расположенные на гипотенузах равнобедренных треугольников. Счет всегда начинается с верхней точки

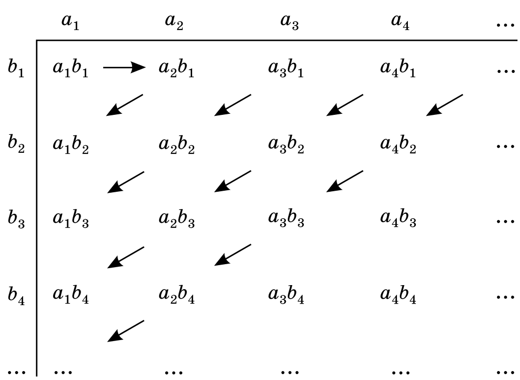


Рис. 28

гипотенуз. Ведя счет таким путем, мы будем проходить по все удлиняющимся гипотенузам. В результате каждый элемент множества $A \times B$ получит свой порядковый номер, а это значит, что множество $A \times B$ счетно, что и требовалось доказать.

Теорема 7. Объединение счетного множества счетных множеств $A, B, C, \ldots$ счетно.

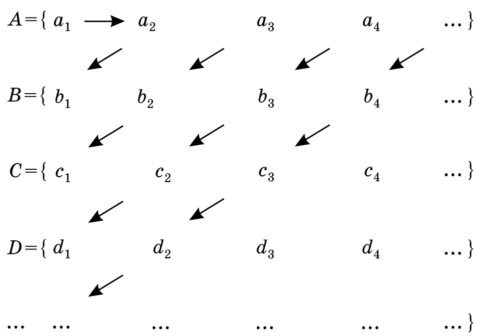


Рис. 29

Докажем эту теорему. Запишем элементы множеств $A, B, C, \ldots$ в виде матрицы (рис. 29), после чего элементы множества

$$Z = A \cup B \cup C \cup \ldots$$

пронумеруем методом треугольника точно так же, как и в случае теоремы 6. При таком обходе элементов матрицы рано или поздно каждый элемент множества Z получит свой порядковый номер, что и доказывает теорему.

Последняя теорема (теорема 7) является, вероятно, самой впечатляющей из всех рассмотренных. Трудно согласиться с тем, что если взять бесконечно много элементов множества A, добавить к ним бесконечно много элементов множества B, затем туда же включить бесконечно много элементов множества C и так повторить бесконечно много раз, то в результате получится всего лишь счетное множество. Получается, что мощность счетного множества нисколько не изменится, если количество его элементов увеличить в бесконечное число раз.

Сформулируем еще две теоремы о счетных множествах, не приводя их доказательств.

Теорема 8. Множество всех рациональных чисел счетно. Рациональными называют все положительные и отрицательные дроби вида P/q, где P и q — натуральные числа. К рациональным относятся не только дроби, но и все целые положительные и отрицательные числа, а также нуль.

Теорема 9. Множество всех алгебраических чисел счетно. Алгебраическими называются числа, которые являются корнями уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0,$$

где a_0, a_1, a_2, …, a_n — целые числа (т. е. они могут быть положительными, отрицательными и равными нулю). Числа, которые не являются алгебраическими, называются **трансцендентными** [25, с. 616].

Упражнения

1. (15 Р). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) является ли счетным множество $\{15, 16, 17, \ldots, 100\}$?

2) верно ли, что если множество счетно, то все его элементы можно сосчитать?

3) известно, что декартово произведение двух счетных множеств A и B счетно. Является ли счетным множество $A \times B \times C$, если C — счетное множество?

4) мощность некоторого множества A равна $\aleph_0$. Мощность другого множества B также равна $\aleph_0$. Верно ли, что мощность множества $A \bigcup B$ равна $\aleph_0$?

5) дано конечное множество A_1. К его элементам добавили все элементы конечного множества A_2. К получившемуся множеству добавили все элементы конечного множества A_3 и так далее до бесконечности. Получили множество Q в виде $Q = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots$. Является ли счетным множество Q?

6) является ли конечным множество Q из предыдущего вопроса?

7) из множества натуральных чисел удалили все числа, которые делятся без остатка на какое-нибудь целое число. Является ли конечным множество, состоящее из оставшихся элементов?

8) является ли конечным множество атомов Солнца?

2. (ЛКС). Укажите номера множеств, мощность которых равна $\aleph_0$:

1) множество всех простых чисел;

2) $\{x \mid x < 1000,\ x$ — целое число$\}$;

3) множество атомов земного шара;

4) множество натуральных чисел, без остатка делящихся на $\sqrt[3]{1331}$;

5) $\{x \mid x < 10^{1000},\ x$ — натуральное число$\}$;

6) множество натуральных чисел, без остатка делящихся на $\sqrt[4]{1441}$;

7) $\{x \mid x > 1000^{1000},\ x$ — натуральное число$\}$.

3. (ЖАО). Укажите номера конечных множеств в предыдущем упражнении.

4. (УШС). Укажите элементы множества $A \bigcap \bar{B} \bigcap \bar{C}$, если множества A, B, C являются счетными и имеют вид

$$A = \{1, 2, 3, \ldots\}; \quad B = \{6, 7, 8, \ldots\}; \quad C = \{11, 12, 13, \ldots\}.$$

5. (96). Укажите элементы множества $A \bigcap B \bigcap \bar{C}$, где A, B, C — множества из предыдущего упражнения.

6. (Е46). Найдите элементы множества $\{x \mid x$ — число, без остатка делящееся на 23, x — простое число$\}$.

7. (336). Укажите номера тех вопросов, на которые Вы дадите утвердительные ответы:

1) дано счетное множество A. Среди его элементов выбрали конечное множество элементов, и все их удалили из множества A. В оставшемся множестве снова выбрали некоторым образом конечное множество и все его элементы удалили из множества A. Такую операцию удаления конечных множеств повторили бесконечно много раз. Останутся ли в множестве A какие-нибудь элементы?

2) тот же вопрос, что и предыдущем случае, но с условием, что всякий раз удаляли счетное множество элементов;

3) дано n множеств, где n — натуральное число. Известно, что объединение этих n множеств есть счетное множество. Возможно ли при этом, что все n заданных множеств конечны?

4) в множество $\{1, 2, ..., 20\}$ между элементами 6 и 7 вставили все дробные числа вида $6/n$, где n — натуральное число, превосходящее 6. Будет ли счетным получившееся множество?

5) является ли пустым множество $A \bigcap B$, где A — множество четных чисел; B — множество простых чисел?

6) является ли счетным множество квадратных уравнений?

7) является ли число $\sqrt{17}$ элементом множества алгебраических чисел?

8) даны множества:

$A = \{x \mid x$ — натуральное число, делящееся без остатка на $17\}$;
$B = \{x \mid x$ — натуральное число, делящееся без остатка на $23\}$.

Является ли бесконечным множество $A \bigcap B$?

3.4.
НЕСЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Если A — конечное множество, то $|A| < |B(A)|$, т. е. булеан всякого конечного множества A содержит больше элементов, чем множество A, так как

$$|B(A)| = 2^{|A|}.$$

Всякое бесконечное множество также имеет подмножества, и можно говорить о мощности его булеана.

Пусть дано счетное множество E. Чтобы найти все его подмножества, поступим так же, как и в случае конечных множеств (см. подраздел 1.2), т. е. поставим в соответствие каждому элементу множества E двоичный разряд. Тогда всякому подмножеству множества E будет соответствовать двоичное число бесконечной длины. Пусть единица в записи двоичного числа обозначает вхождение в подмножество соответствующего элемента $e \in E$, а нуль — что соответствующий элемент в подмножество не входит. Тогда по аналогии с конечными множествами можно утверждать, что мощность булеана $B(E)$, т. е. множество всех двоичных чисел бесконечной длины, представится кардинальным числом вида

$$|B(E)| = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}.$$

Теорема 1. Мощность булеана бесконечного множества E превышает мощность множества E.

Это очень важная теорема. Одно из наиболее простых ее доказательств приведено в [8, с. 66].

Если E — счетное множество, то согласно приведенной теореме

$$|B(E)| > |E|, \text{ т. е. } \aleph_1 > \aleph_0.$$

Множество $B(E)$ **несчетно** и его мощность равна мощности **континуума** (*continuum* — в переводе с латинского — непрерывное; примером континуума может служить множество точек отрезка).

Теорема 2. Множество всех действительных чисел в интервале $0 \leqslant x < 1$ несчетно.

Для доказательства этого сначала предположим, что все действительные числа можно пронумеровать. Запишем одну под другой бесконечные десятичные дроби:

$$
\begin{aligned}
&0{,}a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots \\
&0{,}b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots \\
&0{,}c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \ldots \\
&0{,}d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

где a_i, b_i, c_i, d_i, ... — десятичные цифры ($i = 1, 2, 3, 4, \ldots$).

Получили матрицу, содержащую счетное множество строк, в каждой из которых бесконечное число десятичных цифр (для строгости изложения десятичные цифры следовало бы заменить символами Кенига [43], однако для простоты мы пожертвуем этой строгостью).

Допустим, что в матрице нет ни одной пары равных между собой чисел. Все ли действительные числа окажутся в матрице? Нет, не все. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся диагональным методом, разработанным Г. Кантором, и найдем число, которое отсутствует в матрице, т. е. не получит номера. Суть метода Г. Кантора применительно к данному случаю состоит в следующем. Если в первом числе первая после запятой цифра (цифра a_1) не равна, например, 3, то в искомое число после запятой записываем цифру 3. Если же $a_1 = 3$, то записываем, допустим, 2. Переходим ко второму числу матрицы. Если $b_2 \neq 3$, то записываем на втором месте искомого числа цифру 3. Если $b_2 = 3$, то записываем 2. Перейдя к третьему числу, записываем в искомое число 3, если $c_3 \neq 3$, и т. д. до бесконечности. Очевидно, что получившееся число отсутствует в списке, так как оно отличается от первого числа первой после запятой цифрой, от второго числа отличается второй цифрой, от третьего — третьей и т. д. Таким образом, полученное число отсутствует в списке, но принадлежит множеству действительных чисел интервала $0 \leqslant x < 1$.

Так как мощность булеана $B(E)$ равна мощности множества всех действительных чисел интервала $0 \leqslant x < 1$, то эти множества эквивалентны. Оба они характеризуются кардинальным числом $\aleph_1$. Такие множества условимся называть $\aleph_1$-множествами.

Мощность континуума — не самая большая мощность среди бесконечных множеств. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся двоичными числами так же, как и в случае счетных множеств. Поставим в соответствие каждому элементу $\aleph_1$-множества двоичный разряд. Если единица в числе обозначает вхождение элемента в подмножество, а нуль — отсутствие в подмножестве данного элемента, то каждому двоичному числу будет соответствовать некоторое подмножество $\aleph_1$-множества. Мощность множества таких подмножеств обозначим буквой $\aleph_2$. Очевидно, что

$$\aleph_2 = 2^{\aleph_1},$$

откуда следует, что мощность булеана $\aleph_1$-множества (т. е. мощность множества всех подмножеств $\aleph_1$-множества) превышает мощность $\aleph_1$-множества: $\aleph_2 > \aleph_1$.

Точно так же можно утверждать, что

$$\aleph_3 = 2^{\aleph_2},$$

т. е. мощность $\aleph_3$-множества превышает мощность булеана $\aleph_2$-множества.

Далее по аналогии получаем:

$$\aleph_4 = 2^{\aleph_3}, \ \aleph_5 = 2^{\aleph_4}, \ \ldots, \ \aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}},$$

откуда следует, что множества с наибольшей мощностью не существует.

В завершение подраздела приведем одну теорему о множествах мощности континуума: объединение множества мощности континуума и счетного множества имеет мощность континуума [43].

Упражнения

1. (ВДК). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Является ли несчетным множество, если его кардинальное число имеет вид:

1) $2^{\aleph_0}$; 2) $\aleph_1^2$; 3) $680^{\aleph_0}$; 4) $\aleph_0^{200}$; 5) $\aleph_1^{200}$; 6) ${\aleph_0}^{\aleph_0}$; 7) $(2^{200})^{\aleph_0}$; 8) $\aleph_0^3$?

2. (178). Укажите множество мощности континуума:

1) объединение счетного и несчетного множеств;

2) объединение счетных множеств, множество которых счетно;

3) разность несчетного и счетного множеств;

4) разность $A - B$, где A и B — несчетные множества;

5) $A \cup B$, где A — счетное множество, B — множество мощности континуума;

6) разность $A - B$, где A — несчетное множество, B — счетное множество;

7) разность $A - B$, где $|A| = \aleph_1$, $|B| = \aleph_0$.

3. (279). Укажите номера множеств, мощность которых превышает $\aleph_3$:

1) $A \cup B$, где $|A| = \aleph_3$; $|B| = \aleph_0$;

2) $A \cup B$, где $|A| = \aleph_5$; $|B| = \aleph_8$;

3) $A - B$, где $|A| = \aleph_6$; $|B| = \aleph_4$;

4) $A \cup B \cup C$, где $|A| = \aleph_0$; $|B| = 2^{|A|}$; $|C| = 2^{|B|}$;

5) $A \cup B \cup C$, где $|A| = \aleph_1$; $|B| = 2^{|A|}$; $|C| = 2^{|B|}$;

6) $(A - B) \cup C$, где $|A| = |B| = \aleph_2$; $|C| = 2^{|A|}$;

7) $A \cup B \cup C$, где $|A| = |B| = \aleph_2$; $|C| = 2^{2^{|B|}}$.

3.5.
ГИПОТЕЗА КОНТИНУУМА

В 1878 г. Г. Кантор высказал предположение, что всякое множество действительных чисел либо конечно, либо счетно, либо несчетно (т. е. эквивалентно множеству всех действительных чисел) [25, с. 261]. Оставим в стороне конечные множества, тогда по Г. Кантору всякое бесконечное десятичное число принадлежит либо счетному множеству N, либо несчетному множеству M с кардинальным числом $|M| = \aleph_1 = 2^{|N|} = 2^{\aleph_0}$.

В предыдущем подразделе было показано, что

$$\aleph_1 > \aleph_0, \text{ т. е. } |M| > |N|,$$

где M — первое после счетного множество, мощность которого превышает мощность счетного множества. Первое ли? Откуда это следует? А вдруг между ними существует множество E с промежуточной мощностью:

$$|N| \leqslant |E| \leqslant |M|?$$

Несчетное множество M с большей мощностью получено по аналогии с конечными множествами путем нахождения булеана счетного множества N. Очень уж непохожи свойства конечных и бесконечных множеств, поэтому вполне естественно задать вопрос: верно ли, что мощность множества всех подмножеств счетного множества есть первая мощность, превосходящая мощность множества всех натуральных чисел? Это и есть знаменитая **гипотеза континуума**, которая десятки лет оставалась удивительно неподатливой, хотя над ней работали лучшие математики мира.

В 1900 г. на Втором международном конгрессе в Париже немецкий математик, профессор Геттингенского университета Давид Гильберт (1862–1943) опубликовал обращение к математикам мира, в котором сформулировал более двух десятков наиболее важных и не решенных в то время проблем. В этом списке проблему (гипотезу) континуума Д. Гильберт поставил на первое место. До 30-х годов прошлого столетия все попытки решить ее оканчивались нулевым результатом. Лишь в 1938 г. Курт Гедель (1906–1978) — австрийский математик — показал, что континуум-гипотеза не может быть опровергнута традиционными средствами теории множеств.

Более существенный результат получил в 1966 г. профессор Станфордского университета (США, штат Иллинойс) П. Коэн. Он доказал независимость гипотезы континуума от других аксиом теории множеств: можно считать, что между счетным множеством и множеством всех его подмножеств существует промежуточное множество, но можно считать, что его не существует. В любом случае это не противоречит всем остальным аксиомам теории множеств [37]. Здесь просматривается аналогия с пятым постулатом о параллельных прямых. Его можно принять, можно и отвергнуть. В любом случае он не противоречит всем остальным аксиомам геометрии.

В заключение подраздела отметим, что не все математики одинаково формулируют гипотезу континуума. Например, в [43, с. 52] говорится: «Гипотезой континуума называют утверждение $\aleph_1 = 2^{(\aleph_0)} = C$» (здесь C — мощность континуума). Если Вы обратитесь к упр. 3 подраздела 3.10, то возможно, что эта формулировка гипотезы континуума Вам покажется более загадочной, чем ее первый вариант о множестве промежуточной мощности.

3.6. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА

Множество действительных чисел делится на два непересекающихся класса. Первый класс образуют алгебраические числа, второй — трансцендентные. Алгебраические числа, как сказано в подразделе 3.3, — это числа, которые являются корнями алгебраических уравнений с целыми коэффициентами. А что такое трансцендентные числа? В [25, с. 616] дается такое определение: «Трансцендентные числа (лат. *transcendens* — выходящий за пределы) — числа, которые не могут быть корнями никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами; например, число $\pi = 3{,}14159....$». Понятие трансцендентного числа в этой цитате поясняется только одним примером — числом π. В [38, с. 1342] приводится число π и еще два примера: «Трансцендентными числами являются: число $\pi = 3{,}14159...$; десятичный логарифм любого целого числа, не изображаемого единицей с нулями, число $e = 2,\ 71828$ и др.»

Складывается впечатление, что трансцендентные числа представляют собой величайшую редкость в множестве действительных чисел по отношению к алгебраическим (им даже имена дают!). На самом деле все наоборот. Если E — множество действительных чисел, R — множество алгебраических чисел, то $E \cap \bar{R}$ — множество трансцендентных чисел. Но множество R счетно, следовательно, множество $E \cap \bar{R}$, т. е. множество всех трансцендентных чисел, несчетно.

Это рассуждения Г. Кантора. Ими он доказал существование трансцендентных чисел, не приводя ни одного их примера, что в свое время (1873 г.) произвело на математиков мира большое впечатление.

Очень интересная ситуация: мощность множества трансцендентных чисел превышает мощность множества алгебраических чисел, а математики имеют дело в основном с алгебраическими числами, в то время как трансцендентные числа почти полностью находятся «в тени» и приходится затрачивать значительные усилия, чтобы «высветить» хотя бы несколько из них. В этом состоит своеобразный парадокс трансцендентных чисел. Впрочем, его нетрудно объяснить. Дело в том, что понятие трансцендентного числа сформулировано так, что его совершенно невозможно использовать в качестве критерия, позволяющего по виду произвольно заданного числа однозначно признать его алгебраическим или трансцендентным. Если бы множество всех алгебраических уравнений было конечным, то, по крайней мере теоретически, можно было бы перебрать все уравнения, в каждое из них подставить заданное число и выяснить, является ли оно его корнем. Но множество алгебраических чисел бесконечно. Поэтому решать вопрос о трансцендентности того или иного числа приходится другими и довольно трудными путями. Например, когда была доказана трансцендентность числа π (в 1882 г.), то это явилось заметным событием в науке.

3.7. ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В подразделе 3.4 показано, что множество действительных чисел в интервале $0 \leqslant x < 1$ несчетно. Так как любому числу из этого интервала соответствует точка на отрезке $[0; 1)$ числовой оси, то множество точек отрезка $[0; 1)$ эквивалентно множеству всех действительных чисел в интервале $0 \leqslant x < 1$.

Пусть даны два отрезка AB и CD различной длины. Эквивалентны ли множества их точек? Интуиция нам подсказывает, что отрезок, равный радиусу атомного ядра, содержит гораздо меньше точек по сравнению с отрезком, длина которого равна расстоянию от Земли до Солнца.

Г. Кантор предложил очень остроумный способ, при помощи которого легко доказать, что между элементами множеств P и Q существует взаимно однозначное соответствие, если P — множество точек отрезка длины p, Q — множество точек отрезка длины q; при этом возможно, что $p \neq q$.

Расположим отрезки AB и CD так, как показано на рис. 30 (параллельность отрезков — требование необязательное). Проведем из точки O прямую, пересекающую оба отрезка. Получим точки a и a'. Если сместить прямую, выходящую из точки O, то получим новую пару точек пересечения b и b' (на рис. 30 они не показаны). При этом если точка b не совпадает с точкой a, то не совпадает и точка b' с a'.

Таким способом любой точке отрезка AB можно однозначно поставить в соответствие точку отрезка CD и наоборот: всякой точке отрезка CD однозначно соответствует точка отрезка AB. Следовательно, множества точек отрезков AB и CD эквивалентны.

Г. Кантор доказал и более «сильное» утверждение: множество точек конечного отрезка AB и множество точек всей числовой оси эквивалентны. Но на этот раз он воспользовался другим графическим способом. Пусть дан открытый отрезок AB. Найдем его середину O и проведем полуокружность с центром в точке O и диаметром, равным отрезку AB (рис. 31). Параллельно отрезку AB расположим числовую ось. Выберем на отрезке AB какую-либо точку a и проведем из нее перпендикуляр до пересечения с полуокружностью. Получим точку a'. Через точки O и a' проведем прямую до пересечения с числовой осью. Получим точку a''. Эта точка однозначно соответствует точке a числового отрезка AB. Очевидно, что любой точке числовой оси также однозначно соответствует точка отрезка. Следовательно, множество точек отрезка AB эквивалентно множеству точек числовой оси.

Следующий результат Кантора является еще более удивительным. Он доказал, что множество точек отрезка эквивалентно множеству точек квадрата, сторона которого равна этому отрезку. Вообще-то Г. Кантор искал доказательство того, что мощность множества точек квадрата не эквивалентна множеству точек отрезка, и когда нашел доказательство прямо противоположного утверждения, то был так удивлен этим, что в письме математику Р. Дедекинду писал: «Я вижу это, но не верю этому» [8, с. 62].

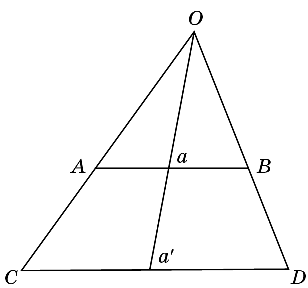


Рис. 30

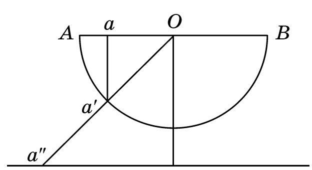


Рис. 31

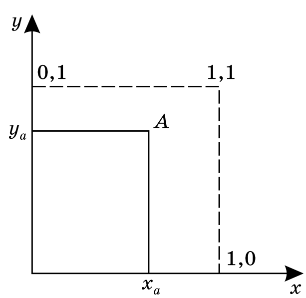


Рис. 32

Принцип доказательства Г. Кантора состоит в следующем (заметим, что эти рассуждения являются не более чем иллюстрацией, демонстрирующей лишь идею доказательства. При более строгих рассуждениях необходимо пользоваться символами Кенига [43]). Проведем оси декартовых координат x и y, отложим на каждой из них отрезок [0; 1) и построим квадрат (на рис. 32 он обозначен пунктирными линиями). Тогда некоторая точка A квадрата может быть представлена двумя бесконечными десятичными дробями:

$$x_a = 0,\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \dots$$
$$y_a = 0,\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \dots$$

Образуем из этих чисел новую дробь, расположив цифры числа y_a между цифрами числа x_a:

$$V_A = 0,\, a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3\, a_4\, b_4 \dots$$

Очевидно, что число V_A принадлежит отрезку [0; 1).

Рассмотренным способом каждой точке квадрата можно поставить в однозначное соответствие определенную точку отрезка [0; 1). Если же взять какую-нибудь точку отрезка, то, представив соответствующую ей десятичную дробь в виде чисел x_A и y_A, мы найдем точку квадрата, находящуюся в однозначном соответствии с заданной точкой отрезка.

Таким образом, множество точек отрезка [0; 1) эквивалентно множеству точек квадрата, сторона которого совпадает с заданным отрезком.

Пользуясь приемом, разработанным Г. Кантором, нетрудно убедиться в следующем:

а) множество точек любого конечного отрезка эквивалентно множеству точек куба, ребро которого равно данному отрезку. Для доказательства этого достаточно к числам x_A и y_A (две координаты) добавить число z_A (третья координата) и тем же приемом, что и в случае квадрата, найти число V_A, принадлежащее отрезку [0; 1).

б) множество точек отрезка длиной в 1 микрон эквивалентно множеству точек куба, длина ребра которого равна расстоянию от Земли до Полярной звезды (сначала множество точек микронного отрезка отобразим на ребро куба, а затем на весь куб).

И так далее, подобных утверждений можно сформулировать и доказать сколько угодно.

3.8. ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА

Согласно Г. Кантору, всякое множество называется вполне упорядоченным, если любое его подмножество имеет первый элемент.

Пусть на числовой полуоси x (рис. 33) отмечены точки a_1, a_2, a_3, ..., соответствующие натуральным числам 1, 2, 3, ... Отобразим их на отрезок AB единичной длины так же, как на рис. 31. Из рис. 33 видно, что точке a_1 числовой оси соответствует точка b_1 отрезка AB, точке a_2 — точка b_2 и т. д. По мере движения по числовой оси вправо точки на отрезке AB будут прибли-

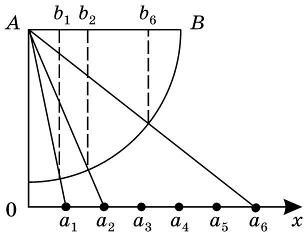


Рис. 33

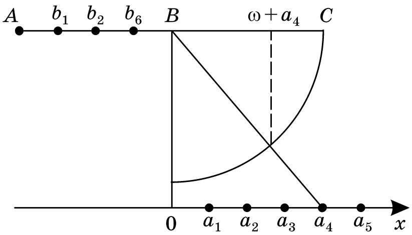


Рис. 34

жаться к точке B. А что соответствует самой точке B? Ведь прямая, проходящая через точки A и B до пересечения с числовой полуосью, является параллельной этой оси и нигде ее не пересекает. Чтобы занумеровать и эту точку, необходимо ввести новое число. Так как оно не может быть конечным, то его назвали **трансфинитным** [8; 25; 43] (от лат. *trans* — за пределами, через; *finitus* — ограниченный, определенный, законченный). Для его обозначения используется знак ω [4; 43]. Таким образом, точка B отрезка AB получит порядковый номер ω — наименьшее трансфинитное число.

Передвинем влево отрезок AB, а на его месте изобразим такой же отрезок BC единичной длины (рис. 34) и снова отобразим на него натуральные числа. Но теперь номера на отрезке BC будут иметь вид:

$$\omega + 1,\ \omega + 2,\ \omega + 3,\ \ldots,\ 2\omega,$$

где число 2ω соответствует точке C на отрезке BC.

Передвинем влево оба отрезка AB и BC, а на освободившемся месте расположим отрезок CD и отобразим на него натуральные числа и т. д. В результате получим новую числовую ось, составленную из отрезков AB, BC, CD, DE и т. д., на которой в строгом порядке расположены трансфинитные числа:

$$\omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2, \ldots,\ 2\omega,\ 2\omega + 1,\ 2\omega + 2, \ldots,\ 3\omega,\ 3\omega + 1, \ldots,\ \omega^2.$$

Заменим на рис. 33 и 34 числовую ось новой осью с трансфинитными числами и выполним все те же процедуры. Тогда получится еще одна ось с трансфинитными числами:

$$\omega^2 + 1,\ \omega^2 + 2,\ \omega^2 + 3,\ \ldots,\ \omega^2 + \omega,\ \ldots,\ 3\omega^2,\ \ldots,\ \omega^3,\ \ldots.$$

Продолжая аналогичным образом заменять числовые оси, мы будем получать новые трансфинитные числа:

$$\omega^{\omega}, \omega^{\omega} + 1, \ldots, 2\omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega+1}, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots,$$

множество которых является упорядоченным.

3.9. ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Парадокс (на греческом языке: *para* — против, *doxa* — мнение) — это высказывание, утверждение, резко расходящееся с общепринятым мнением, не согласующееся со здравым смыслом. Парадокс — это рассуждение, приводящее к взаимоисключающим выводам, одинаково доказуемым.

В логике парадоксы называют **антиномиями** [25, с. 43]. Термин «антиномия» впервые ввел в обиход немецкий философ Рудольф Гоклен (1547–1628). Используется также термин **«апория»** (на греческом языке *a* — отрицающая частица, *poros* — выход; *aporia* — безвыходность, безвыходное положение, затруднение, недоумение) [25, с. 47].

Всякий парадокс привлекает к себе внимание и вызывает стремление разобраться в причинах его возникновения. В этом состоит положительная роль парадоксов в науке.

Теория множеств, созданная Г. Кантором, давала основание считать, что наконец-то математика обрела надежный фундамент. Однако прошло некоторое время — и математику потрясли сообщения о том, что в теории множеств обнаружены парадоксы. Один их них был открыт самим Г. Кантором. Чтобы пояснить его суть, сначала рассмотрим две теоремы.

Теорема 1. Для любого кардинального числа m справедливо неравенство вида $m < 2^m$ [27, с. 50].

Теорема 2. Мощность m' подмножества множества, имеющего мощность m, удовлетворяет неравенству $m' \leqslant m$. Для бесконечных множеств справедливость теоремы следует из теоремы 2 подраздела 3.3. В случае же конечных множеств справедливость теоремы очевидна, если считать, что само множество является своим подмножеством (см. подраздел 1.2), для которого $m' = m$.

Перейдем к парадоксу Кантора. Пусть M — множество всех множеств. Его кардинальное число — $|M|$. Согласно теореме 1 имеем

$$|M| < 2^{|M|},$$

то есть мощность множества M меньше мощности его булеана.

А теперь внимательно рассмотрим множество M. Какие элементы в него входят? Все множества. Это значит, что в него входят и все подмножества. В множество M входят и такие подмножества, мощность которых равна $2^{|M|}$. Согласно теореме 2 имеем

$$2^{|M|} \leqslant |M|.$$

Таким образом, с одной стороны, $|M| < 2^{|M|}$, а с другой — $|M| \geqslant 2^{|M|}$. В этом и состоит парадокс Кантора.

Парадокс Кантора обусловлен тем, что рассматриваемое множество является своим элементом. В 1902 г. Б. Рассел открыл парадокс, основанный на обратном явлении, т. е. когда рассматриваемое множество не является своим элементом. (Бертран Рассел (1872–1970) — английский философ, математик и логик, общественный деятель, лауреат Нобелевской премии 1950 г.)

Прежде чем рассматривать **парадокс Б. Рассела**, введем два теоретико-множественных понятия:

1) множество, не содержащее себя в качестве своего элемента, условимся называть обычным. Таких множеств большинство. Например, стадо коров — это не корова, следовательно, стадо коров не является элементом множества коров; множество домов — не дом и т. д.;

2) множество, которое содержит себя в качестве своего элемента, будем называть необычным. Примеры необычных множеств: множество списков — это тоже список, множество групп — это группа и т. д.

А теперь рассмотрим множество S, в которое входят все обычные и только обычные множества. Каким является множество S — обычным или необычным? Допустим, что оно обычное. Если оно обычное, то должно быть своим элементом. Но тогда (по второму определению) оно станет необычным. Следовательно, множество S нельзя назвать обычным. Предположим, что оно необычное. Но в этом случае оно должно содержать себя в качестве элемента, что невозможно, так как в множество S входят только обычные множества.

Таким образом, множество S не является обычным и не является необычным. Каким же оно является, если согласно определениям любое множество может быть либо обычным, либо необычным и третьего не дано? В этом и заключается парадокс Б. Рассела.

В литературе широко известен **парадокс брадобрея**, суть которого в следующем. Одному солдату, оказавшемуся по профессии парикмахером, командир приказал брить тех и только тех солдат, которые сами не бреются. Солдат-брадобрей побрил всех, кто сам не брился, и остановился перед вопросом: должен ли он брить самого себя? Если он будет брить себя, то окажется среди тех, кто сам бреется. Согласно приказу таких брить ему нельзя. Если не брить, то будет считаться, что он сам не бреется, а таких надо брить. Этот парадокс является своеобразным вариантом парадокса Б. Рассела, только без привлечения понятия множества [8; 27].

Рассмотренных примеров вполне достаточно для первого знакомства с теоретико-множественными парадоксами, потрясшими казавшийся таким прочным фундамент математики. Вообще же, кроме вышеприведенных, существуют и другие парадоксы, например: «парадокс оценки каталогов» [27], «крокодиловский софизм», «парадокс лжеца» [25], парадокс кучи и др.

В чем же кроется опасность парадоксов? Почему математиков так неприятно поразило их открытие?

Понять это нетрудно. Если сами основы математики противоречивы, то где гарантии, что доказанные теоремы являются истинными и что среди них нет утверждений, которые можно строго доказать и столь же убедительно опровергнуть?

Математики-профессионалы отнеслись к парадоксам по-разному. Одни вообще не обратили на них внимания, другие стали искать дефекты в самой логике, третьи пытались уточнить понятие множества, четвертые (их называют формалистами) решили, что теорию множеств надо аксиоматизировать [31], пятые отвергали понятие актуальной бесконечности и призывали заменить его понятием потенциальной бесконечности [27] и т. д.

В каждом из сформировавшихся направлений получены серьезные результаты, однако в целом до завершения работ еще далеко, поэтому исследования в области оснований математики и других вопросов теории множеств продолжаются.

3.10.
УПРАЖНЕНИЯ НА ТЕМУ «ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ»

Вся теория бесконечных множеств является полностью умозрительной наукой, поэтому истину мы можем получить только на основе логики. Но логика — это тонкий инструмент, и пользоваться им надо крайне осторожно, иначе очень легко допустить ошибку и получить более чем странный вывод. Для иллюстрации этого рассмотрим пример, который вполне можно назвать логическим анекдотом.

Некто пришел в магазин «Одежда» и попросил продавца показать свитер. Осмотрев полученный свитер, Некто сказал:

— Нет, свитер возьмите, а взамен покажите куртку.

Куртка ему понравилась, он надел ее и пошел к выходу.

— А кто платить будет? — закричал ему вслед продавец.

— За что? — обернулся Некто.

— Как это за что? За куртку, разумеется! — сказал продавец.

— Но я же Вам за нее отдал свитер, — возразил Некто.

— Да ведь Вы и за свитер не платили! — возмутился продавец.

— А почему я должен платить за свитер, если я его не взял и он находится у Вас? — спросил Некто и поставил этим продавца в тупик.

Подобные ситуации возможны и в умозрительных построениях теории бесконечных множеств. В данном подразделе приведен ряд упражнений, которые автор сформулировал для того, чтобы дать учащемуся (студенту) тренировочный материал, способствующий развитию его способностей к логическим умозаключениям. Упражнения представлены в виде рассуждений, которые завершаются выводами, противоречащими либо здравому смыслу, либо теоремам, доказанным в предыдущих разделах. Ответы к упражнениям не даны. Их необходимо найти самостоятельно. Если Вы владеете логикой хотя бы на уровне повседневных рассуждений и хорошо усвоили идеи Г. Кантора о бесконечных множествах, упражнения окажутся Вам по силам.

1. Счетно ли множество натуральных чисел?

Известно, что множество натуральных чисел счетно (см. подраздел 3.3). Посмотрим, так ли это.

Запишем одно под другим в некоторой последовательности все возможные положительные целые числа (не обязательно в порядке возрастания). Получим матрицу с бесконечно большим числом строк и, следовательно, с бесконечно большим числом колонок (рис. 35). Очевидно, что множество строк в списке счетно, поскольку в каждой строке записано некоторое натуральное число.

Воспользуемся диагональным методом, разработанным Г. Кантором для доказательства несчетности множества всех действительных чисел в интервале $0 \leqslant x < 1$, и рассмотрим число, отмеченное на рис. 35 стрелками. В соответствии с идеей диагонального метода найдем не одно, а все числа, которые будут отсутствовать в списке. Поскольку первая цифра в диагонали — это 5, то все отсутствующие в списке числа будут начинаться с любых цифр, кроме пяти. Аналогично все отсутствующие числа будут отличаться от второго числа матрицы (рис. 35) второй цифрой, если в них вторая цифра — не нуль, и т. д. Сколько же существует чисел, которые будут отсутствовать в списке? Первую цифру в диагональном числе можно заменить любой из девяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, вторую — также из девяти: 1, 2, ..., 9, третью — по-прежнему из девяти: 0, 1, ..., 8 и т. д. Тогда общее число N искомых чисел равно

$$N = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots = 9^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Каждое из этих чисел отличается от первого числа матрицы первой цифрой, от второго — второй, от третьего — третьей и т. д. Таким образом, существует несчетное множество (см. подраздел 3.4) натуральных чисел, которые отсутствуют в списке всех натуральных чисел и которые невозможно занумеровать. Следовательно, множество натуральных чисел несчетно. Такой вывод справедлив независимо от того, в каком порядке расположены числа на рис. 35. Что Вы думаете обо всем этом?

2. Верно ли, что всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно?

Обратимся к рис. 35. Удалим из таблицы все числа, в записи которых встречается хотя бы один раз четная цифра: 0, 2, 4, 6, 8. Каждое из оставшихся чисел состоит только из нечетных цифр. Все эти числа образуют бесконечное множество натуральных чисел. Удастся ли их пронумеровать?

Рассмотрим диагональное число (рис. 36). Так как теперь можно использовать лишь пять нечетных цифр, то все непронумерованные числа будут начинаться с одной из четырех цифр 1, 5, 7, 9. На втором месте в непронумерованных числах могут располагаться цифры 3, 5, 7, 9 и т. д. Всего получится M непронумерованных натуральных чисел:

$$M = 4^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

5	6	9	4	3	7	7	...
0	0	7	2	6	5	4	...
3	6	9	9	7	1	1	...
5	0	0	0	0	6	0	...
1	1	1	1	1	9	1	...
0	0	0	0	0	0	2	...
1	0	9	9	3	3	1	...
	...			...			

Рис. 35

3	5	9	9	7	1	1	...
1	1	1	1	1	9	1	...
3	1	7	7	3	3	3	...
7	3	3	3	5	5	1	...
7	3	1	3	7	5	3	...
7	1	1	7	7	3	5	...
5	5	3	5	7	1	1	...
	...			...			

Рис. 36

Все они образуют несчетное множество. Отсюда по сравнению с первым упражнением еще более странный вывод: бесконечное подмножество счетного множества несчетно! А между тем теорема 2 (подраздел 3.3) утверждает, что всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно. Как же быть? Где истина? Нельзя же считать, что оба взаимоисключающих вывода являются истинными.

3. Верно ли, что существуют несчетные множества?

Известно, что множество всех подмножеств счетного множества несчетно (см. подраздел 3.4), то есть мощность булеана счетного множества E превышает мощность множества E. Это утверждение основано на том, что подмножества счетного множества не поддаются нумерации. Посмотрим, в самом ли деле подмножества счетного множества невозможно пронумеровать.

Запишем в ряд элементы счетного множества E:

$$E = \{\dots\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\}.$$

Каждому элементу этого множества поставим в соответствие двоичный разряд. Пусть единица обозначает, что соответствующий элемент множества E входит в подмножество, а нуль — что не входит (этим приемом мы уже пользовались в подразделе 1.2, когда рассматривали подмножества конечных множеств). Тогда каждому двоичному числу будет соответствовать вполне определенное подмножество (рис. 37).

…	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	
…	0	0	0	0	0	— пустое множество
…	0	0	0	0	1	— подмножество $\{a_1\}$
…	0	0	0	1	0	— подмножество $\{a_2\}$
…	0	0	0	1	1	— подмножество $\{a_1, a_2\}$
…	0	0	1	0	0	— подмножество $\{a_3\}$
…	0	0	1	0	1	— подмножество $\{a_1, a_3\}$
			…			

Рис. 37

Двоичные числа образуют натуральный ряд. Следовательно, каждое подмножество рано или поздно получит свой порядковый номер, представленный в двоичном коде. Мало того, по двоичному коду мы всегда можем однозначно найти все элементы, из которых состоит подмножество, соответствующее этому номеру, и по любому набору элементов множества E найдем соответствующее ему двоичное число, т. е. порядковый номер подмножества. Таким образом, подмножества счетного множества имеют строгую нумерацию. Отсюда вывод: множество всех подмножеств счетного множества счетно!

А как же диагональный метод Г. Кантора? Диагональный метод здесь не поможет. Начиная с первой цифры (рис. 37), диагональ уходит влево, где никогда не встретится ни одной единицы, и чем больше номер строки, тем дальше диагональ уходит от единиц. Поэтому диагональное число, отсутствующее в списке, известно заранее. Это последовательность единиц, множество которых счетно (так как счетно множество E). Но об этом числе нельзя сказать, что оно отсутствует в списке, поскольку в нем будут все двоичные числа вида

$$0\ldots01; \quad 0\ldots011; \quad 0\ldots01\ldots1,$$

среди которых будет и число, состоящее из бесконечного числа единиц.

Если Вы согласитесь с этими выводами, то Вам придется признать, что в мире бесконечных множеств существуют только счетные множества, что исчезнет вся арифметика бесконечного, потеряет смысл гипотеза континуума и вообще от теории бесконечных множеств мало что останется.

4. Верно ли, что множество действительных чисел несчетно?

В подразделе 3.4 приведена теорема: «Множество всех действительных чисел в интервале $0 \leqslant x < 1$ несчетно». Что представляет собой число из интервала $0 \leqslant x < 1$? Это десятичная дробь. Согласно приведенной теореме невозможно указать способ нумерации всех десятичные дробей из интервала $0 \leqslant x < 1$, поэтому их множество является несчетным. Верно ли, что все дроби действительно нельзя пронумеровать? Давайте рассуждать.

Известно, что множество натуральных чисел счетно. Если взять любое натуральное число и приписать к нему слева нуль с запятой, то получим дробь x из диапазона $0 \leqslant x < 1$. А теперь поступим так: возьмем некоторое натуральное число a и запишем входящие в него цифры в обратном порядке. К полученному зеркальному числу припишем слева нуль с запятой. Получится дробь x также из диапазона $0 \leqslant x < 1$. Например, если $a = 275$, то $x = 0{,}572$; если $a = 1000$, то $x = 0{,}0001$; если $a = 300700$, то $x = 0{,}007003$, и т. д. Очевидно, что всякому натуральному числу однозначно соответствует его зеркальное число и, следовательно, всякому натуральному числу соответствует дробь из диапазона $0 \leqslant x < 1$ вида $0{,}a'$, где a' — зеркальное число. Эту дробь образуют только зеркальные числа, и других чисел нет, т. е. во всякой дроби $0{,}a'$ из диапазона $0 \leqslant x < 1$ число a' — это зеркальное число некоторого натурального числа a. Но множество зеркальных чисел счетно и их легко пронумеровать. При этом всякая дробь получит вполне определенный порядковый номер. Процесс формирования списка зеркальных чисел не ограничен, следовательно, потенциально в списке окажутся дроби, соответствующие и таким трансцендентным числам, как π, e и др. Диагональный метод здесь, как и в предыдущем случае, не поможет. Запишем подряд все дроби (на основе чисел натурального ряда) и рассмотрим диагональное число. Очевидно, что оно будет состоять из одних нулей. Чтобы найти числа, которые будут отсутствовать в списке, достаточно все нули заменить какими-либо другими цифрами. Согласно диагональному методу любое число, не содержащее нулей, является непронумерованным. Например, дробь $0{,}777\ldots$ отличается от первого числа в первом разряде (после запятой), от второго — во втором разряде и т. д. Но число $777\ldots$ входит в множество натуральных чисел. Оно совпадает со своим зеркальным представлением, и, следовательно, дробь $0{,}777\ldots$ не является непронумерованной. Таким образом, множество всех действительных чисел из диапазона $0 \leqslant x < 1$ счетно! Такой вывод — это еще один «подкоп» под фундамент теории бесконечных множеств, и если Вы не разберетесь, в чем тут дело, то Вам придется признать, что вся теория бесконечных множеств — псевдонаука, не стоящая внимания.

5. Верна ли теорема Г. Кантора о несчетности множества всех действительных чисел из интервала $0 \leqslant x < 1$?

Согласно Г. Кантору, теорему о несчетности множества всех действительных чисел можно доказать диагональным методом (см. п. 3.4 данного раздела). Следует отметить, что диагональный метод Г. Кантора весьма остроумен, прост и на редкость убедителен. Основу его составляет матрица, представляющая собой список действительных чисел, где в каждой строке записано определенное действительное число. Из цифр этой матрицы составляется число d, отличающееся от первого числа матрицы цифрой первого разряда, от второй — цифрой второго разряда и т. д. Этой процедурой выявляется число, отсутствующее в матрице. Таким способом можно найти и другие числа, которых нет в списке. Очевидно, что отсутствующие в матрице числа образуют несчетное множество (см. рассуждения под номером 1 «Счетно ли множество натуральных чисел» данного подраздела). Так и должно быть: список содержит счетное множество чисел, тогда отсутствующих чисел должно быть несчетное множество. Очень убедительно. Однако возможны и другие рассуждения. Число d отличается от первого числа матрицы в первом разряде. Согласимся с этим очевидным фактом. Но существует бесконечно много **других чисел** в матрице, с которыми число d в первом разряде совпадает. Число d отличается от второго числа во втором разряде. Но существует бесконечно много других чисел, у которых первые два разряда совпадают с числом d. Точно так же можно утверждать, что существует бесконечное множество чисел, у которых совпадают первые три цифры и так далее до бесконечности. Таким образом, число d содержится в матрице. Рассуждая подобным образом относительно других чисел, которые согласно рассуждениям Г. Кантора отсутствуют в списке, приходим к выводу, что все они присутствуют в матрице. Следовательно, в соответствии с диагональным методом верным является и другое утверждение, противоположное теореме Г. Кантора: множество всех действительных чисел счетно, что ставит под сомнение справедливость теоремы Г. Кантора. Попробуйте разобраться в этом противоречии.

6. Является ли синглетон счетным множеством?

Очень странный вопрос. Синглетон — это конечное множество, содержащее только один элемент. А счетное множество является бесконечным. Имеет ли смысл говорить об их эквивалентности? Докажем, что имеет.

Возьмем множество A натуральных чисел. Удалим из него множество A_1, состоящее только из тех чисел, которые делятся без остатка на простое число 2. Затем удалим множество A_2, содержащее все те и только те числа, которые без остатка делятся на простое число 3. После этого удалим все числа, делящиеся на простое число 5, и т. д. Поскольку каждое натуральное число, за исключением единицы, делится на какое-нибудь простое число, то из множества A будут удалены все числа, превосходящие число 1. Тогда от всего множества A останется множество, содержащее единственный элемент — число 1:

$$\{1\} = A - A_1 - A_2 - A_3 - \ldots = A - (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots).$$

С другой же стороны, если из множества A удалить множество A_1, то останется по-прежнему счетное множество $A - A_1$. Из множества $A - A_1$ удалим все элементы множества A_2. Останется также бесконечное счетное множество. Устремим этот процесс в бесконечность. Ясно, что всякий раз будет оставаться счетное множество и множество $A - A_1 - A_2 - A_3 - \ldots$ всегда будет счетным. Следовательно, синглетон $\{1\}$, т. е. множество, содержащее только один элемент, является счетным (бесконечным!) множеством. Но здравый смысл протестует против такого вывода. Где же истина?

7. Является ли счетным пустое множество?

По сравнению с предыдущим этот вопрос кажется еще более странным. Но посмотрим, что скажет логика.

Пусть дано множество A натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Оно является счетным. Удалим из него сначала число 1, затем удалим число 2, далее — 3, 4 и т. д. Устремим этот процесс в бесконечность и в результате вместо множества A получим пустое множество. Элементы, которые были удалены из множества A, образуют счетное множество B. В сущности, мы выполнили операцию разности множеств: $A - B$. Поскольку множество B состоит из тех же элементов, что и множество A, то

$$A - B = \varnothing. \tag{31}$$

Повторим эту процедуру снова, но заметим, что после удаления любого числа из множества A в нем всегда будет оставаться счетное множество элементов. Тогда

$$A - B = C, \tag{32}$$

где C — счетное множество элементов, оставшихся в множестве A после удаления из него элементов множества B. Сопоставляя выражения (31) и (32), получаем: $C = \varnothing$, т. е. счетное множество является пустым! Утверждение настолько несуразно, что Вам, вероятно, не потребуется много времени для восстановления истины.

8. Существуют ли пересекающиеся прямые?

Пусть на плоскости дана прямая y (в смысле Евклида). Выберем на той же плоскости какую-нибудь точку a вне этой прямой (см. рис. 38). Через точку a можно провести несчетное множество прямых. Пересечет ли хотя бы одна из них прямую y? Что за вопрос! Конечно, пересечет. Только одна не пересечет, когда $\alpha = \pi/2$, а все остальные пересекут. Это говорит здравый смысл. А теперь послушаем логику.

Пусть прямая x проведена так, что угол $\alpha < \pi/2$. Проведем прямую z перпендикулярно к прямой y (хотя требование перпендикулярности не является обязательным). Получим точки m и n. Очевидно, что между точками m и n континуум точек. При том же значении α плавно переместим вправо прямую z. Точки m и n сблизятся, но между ними по-прежнему будет континуум точек. Еще переместим вправо прямую z. Сколько бы мы ее ни перемещали, между точками m и n всегда будет континуум точек. Если же Вы считаете, что в момент пересечения прямой x с прямой y, точки m и n все же совпадут, то Вам придется признать, что существует некое настолько «маленькое» несчетное множество, за которым непосредственно следует синглетон, то есть

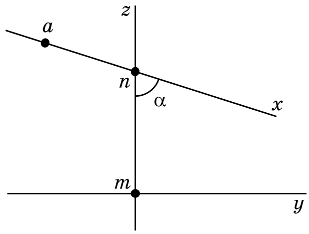


Рис. 38

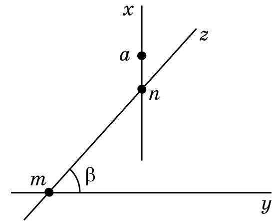


Рис. 39

конечное множество, состоящее из одного элемента. Очевидно, что такое предположение совершенно несостоятельно. Во-первых, множество точек любого отрезка является просто несчетным, оно не может быть большим или маленьким. Все такие множества эквивалентны независимо от длин отрезков. Во-вторых, между несчетным и конечным множествами существует промежуточное множество — счетное, а между счетным множеством и синглетоном существуют конечные множества с кардинальными числами, превосходящими единицу.

Все это говорит о том, что несчетное множество никак не может следовать непосредственно за синглетоном. Следовательно, точки m и n никогда не совпадут и прямые x и y не пересекутся. По определению [35, с. 12] непересекающиеся прямые параллельны. Так как угол α может быть любым, то всякая прямая, проходящая через точку a, параллельна прямой y. Угол α может быть равным $0°$ (по Евклиду это значит, что прямые x и y перпендикулярны), следовательно, перпендикулярные прямые параллельны!

Если случай, когда $\alpha = 0°$, Вам кажется сомнительным, то обратитесь к рис. 39.

Прямая x проведена через точку a перпендикулярно прямой y. Прямая z проходит через точки m и n, между которыми континуум точек. При перемещении прямой z вправо (угол β не меняется) точки m и n начнут сближаться, но никогда не совпадут по той же причине, что и в предыдущем случае.

Таким образом, если на плоскости расположена прямая y и точка a, находящаяся вне прямой, то никакая прямая, проходящая через точку a, не может пересечь прямую y. А это значит, что пересекающихся прямых не существует вообще! Не существует, следовательно, и всей геометрии, которую изучают в средней школе!

Как Вы думаете, почему возникло такое расхождение между здравым смыслом и логикой?

9. Существуют ли трансфинитные числа?

В подразделе 3.8 показано, что существуют. Посмотрим, достаточно ли обоснованно их существование.

Обратимся к рис. 33. На нем показано, что какую бы точку a мы ни взяли на числовой полуоси x, этой точке всегда можно поставить в соответствие единственную точку на отрезке AB (заметим, что отрезок AB параллелен полуоси x). Из рис. 33 следует также, что всякой точке отрезка AB можно поставить в соответствие вполне определенную точку на полуоси x. В подразделе 3.8 задан вопрос: что будет соответствовать точке B отрезка AB? Странный вопрос. Разве ей может что-либо соответствовать? Говорить о соответствии можно лишь в случае параллельности прямой $A–a$ и отрезка AB. А могут ли они стать параллельными? Чтобы прямая $A–a$, выходящая из точки A до пересечения с полуосью x, оказалась параллельной этой полуоси, она должна где-то от нее оторваться и совпасть с прямой, на которой лежит отрезок AB и которая продолжена вправо параллельно полуоси x. Но точка a, в которой пересекается прямая $A–a$ с полуосью x, изначально лежит на полуоси x и оторваться от нее в принципе не может. Даже в бесконечности она будет находиться на полуоси x, и прямая $A–a$ никогда не станет ей параллельной. Угол между прямой $A–a$ и отрезком AB будет бесконечно стремиться к нулю, но никогда не будет ему равным. Поэтому точке B отрезка AB не может соответствовать никакое число на полуоси x, ни конечное, ни трансфинитное. Даже если прямая $A–a$ оторвется от полуоси x, то это не значит, что она совпадет с прямой, проходящей по отрезку AB. Она может находиться между этими прямыми и в бесконечности, не проходя при этом через точку B отрезка AB. Причем таких «неприкаянных» прямых возможно бесконечно много. Все это говорит о том, что обоснование существования трансфинитных чисел является надуманным и неубедительным, следовательно, их не существует! А Вы что думаете об этом?

10. Чем отличается точка от отрезка?

Наш здравый смысл точку настолько хорошо отличает от отрезка, что такой вопрос может показаться бессмысленным. Но вопрос задан. Предлагается ответ.

Обратимся к рис. 30. На нем изображены два отрезка различной длины и показан способ, позволяющий каждой точке короткого отрезка поставить во взаимно однозначное соответствие определенную точку другого (длинного) отрезка. Но это не все. Из рисунка видно, что точке a' соответствует не только точка a, но и точка O. Очень интересный момент: если провести другую прямую из вершины O треугольника OCD до пересечения с отрезком CD, то новой паре точек на отрезках AB и CD будет соответствовать все та же точка O. Это относится к любым парам таких точек, следовательно, синглетон эквивалентен множеству точек отрезка любой длины. Но это значит, что отрезок и точка неразличимы. Если Вас не устраивает такой вывод, найдите в рассуждениях все отклонения от истины.

На этом главу о бесконечных множествах закончим. Каждый, кто заинтересуется теорией множеств Г. Кантора, может углубить свои знания, ознакомившись со специальной литературой.

4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

4.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Считается, что элементами канторовской теории множеств могут быть любые объекты — деревья, насекомые, атомы, окна, числа, фразы и т. д. По утверждению Р. Столла, «множество может состоять, например, из зеленых яблок, **песчинок** или простых чисел» [39, с. 11]. На первый взгляд, это действительно так. Например, почему нельзя говорить о множестве песчинок на левом берегу реки Томи в районе города Томска? Интуитивно кажется, что можно. А на самом деле?

Выйдем в указанный район и возьмем камешек диаметром, допустим, в 1 мм. Это песчинка? Допустим, что да. Тогда возьмем камешек с бóльшим диаметром. Это песчинка? Допустим, что снова да. Тогда возьмем камешек еще больше и т. д. После нескольких итераций наступит момент, когда мы окажемся не в состоянии признать с достаточной уверенностью, что данный камешек является песчинкой. Следовательно, с математической точки зрения нельзя говорить о **множестве** песчинок, если отсутствует формальный критерий, при помощи которого все объекты можно было бы однозначно разделить на песчинки и не песчинки.

А что такое берег? В двух метрах от воды — это берег? Допустим, что да. А в пяти, десяти, ста и так далее метрах от воды — это берег? Где начинается берег, если уровень воды в Томи колеблется? И что считать районом города Томска?

Пусть требуется задать множество домов. Как определить элементы, принадлежащие этому множеству? Если по признаку — живут ли в доме люди, то и землянка — дом. По наличию окон? Но у вагона тоже есть окна, а он не дом. Можно ли говорить о множестве хороших книг в библиотеке, множестве интересных фильмов, о множестве высоких людей, о множестве дней, когда была пасмурная погода, и т. д.? С интуитивной точки зрения — это множества, а с математической —

нет, и все по той же причине: из-за отсутствия формальных признаков, позволяющих отличать хорошие книги от плохих, интересные фильмы от неинтересных, пасмурную погоду от непасмурной и т. д.

Таким образом, утверждение о том, что в канторовские множества могут входить элементы любой природы, мягко выражаясь, не совсем верно, а это значит, что общность теории множеств Г. Кантора распространяется далеко не на все объекты, с которыми человеку приходится иметь дело в повседневной практике.

Стремясь преодолеть ограниченность теории множеств Г. Кантора и распространить математические методы на объекты с размытыми, расплывчатыми, нечеткими границами, профессор университета г. Беркли (США) Лофти Заде в 60-х годах прошлого века создал теорию, которую в математической литературе стали называть **теорией нечетких множеств**.

Основу теории Л. Заде составляет понятие **функции принадлежности нечеткого множества**. Областью ее значений является интервал [0; 1]. Каждое значение этой функции называется **степенью принадлежности** элемента a данному нечеткому множеству. Например, пусть A — множество высотных домов и пусть понятие «высотный» определяется на интуитивном уровне. Принадлежит ли 10-этажный дом множеству A? Теория Г. Кантора ответа на этот вопрос не дает. А согласно теории Л. Заде можно сказать: 10-этажный дом является элементом множества высотных домов со степенью принадлежности к высотным домам, равной 0,35.

Откуда взялось это число 0,35? Можно ли вместо него взять другое число, например 0,1 или 0,9? Можно. Выбирается оно либо на основе статистических сведений, либо интуитивно в зависимости от обстоятельств. Если в городе много домов, насчитывающих 50 и более этажей, то степень принадлежности 10-этажного дома множеству A можно снизить и до 0,1. Но если, например, 11-этажные дома в городе являются самыми высокими, то степень принадлежности к высотным домам 10-этажного дома может быть равной и 0,8 или 0,9.

Между теориями Г. Кантора и Л. Заде существует прямая связь: теория множеств Г. Кантора является частным случаем теории нечетких множеств Л. Заде. Этот частный случай имеет место всякий раз, когда функция принадлежности принимает одно из крайних ее значений и не принимает никаких других. Если степень принадлежности элемента a множеству A равна единице, то по Г. Кантору $a \in A$. Если же степень принадлежности равна нулю, то $a \notin A$.

Упражнения

1. (ХСС). Укажите канторовские множества:

1) множество автомобилей с большой грузоподъемностью;
2) множество тропинок в лесу;
3) множество продавцов обувного отдела в Томском универмаге;
4) множество студентов в группе;
5) множество хороших баянов;

6) множество сотрудников ТУСУРа, имеющих ученые степени;

7) множество выдающихся артистов России;

8) множество экспонатов на выставке;

9) множество студентов ТУСУРа, хорошо разбирающихся в радиоэлектронике.

2. (ХПС). Укажите нечеткие множества:

1) множество слов, произнесенных лектором за 2 часа аудиторных занятий;

2) множество интересных телепередач;

3) множество асфальтированных дорог в южной части города Томска;

4) множество книг различных наименований, проданных магазином;

5) множество взрослых щук в реке;

6) множество бурых медведей в зоопарке;

7) множество кентавров, обитающих в Томской области;

8) множество спелых яблок на яблоне.

3. (ЕДУ). Какие из следующих чисел могут быть (в принципе) степенью принадлежности элемента нечеткому множеству?

1) 0,001;	4) 2,53;	7) 0,999...;
2) $0{,}01 \cdot 10^{-3}$;	5) $\sqrt{1{,}111}$;	8) $0{,}1 \cdot 10^{20}$;
3) $10 \cdot 10^{-4}$;	6) 14/15;	9) $10^{-17} \cdot 10^{18}$.

4.2. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА

Нечеткие множества необходимо как-то отличать от обычных «четких» множеств Г. Кантора. Условимся считать, что заглавная буква обозначает нечеткое множество, если над ней указан знак ~ (тильда), а если тильды нет, то будем считать, что буква обозначает канторовское множество [30].

Как задать конечное нечеткое множество? В случае канторовских множеств достаточно перечислить их элементы. Аналогично можно задавать и нечеткие множества, но с некоторыми особенностями. Эти особенности поясним сначала на примере, а затем перейдем к обобщениям.

Пусть дано множество

$$M = \{x \mid x \text{ — число выловленных рыб}\}.$$

Это обычное множество. Построим на его основе нечеткое множество «очень маленький улов», обозначив его буквой $\tilde{K}$ (будем считать, что рыбу ловили удочкой и что поймана хотя бы одна рыба):

$$\tilde{K} = \{(1/1), (0{,}95/2), (0{,}9/3), (0{,}8/4), (0{,}7/5), (0{,}6/6)\}. \qquad (33)$$

Согласно этой записи элементами множества $\tilde{K}$ являются пары чисел, указанные в круглых скобках. Числа отделены одно от другого косой (наклонной) чертой. Справа от черты записаны элементы «четкого» множества M, образующие подмножество:

$$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset M.$$

Слева указаны значения функции принадлежности. Прочитать запись множества $\tilde{K}$ можно следующим образом. Улов в одну рыбу является очень маленьким со степенью принадлежности к очень маленьким уловам, равной единице. Это первый элемент множества $\tilde{K}$. Если пойманы две рыбы, то такой улов является очень маленьким со степенью принадлежности к очень маленьким уловам, равной 0,95. Это второй элемент множества $\tilde{K}$ и т. д. Таким образом, нечеткое множество $\tilde{K}$ — это обычное канторовское множество $H \subset M$, но каждый его элемент снабжен числом, показывающим степень принадлежности элемента нечеткому множеству $\tilde{K}$.

Теперь все это же представим в общем виде. Нечетким подмножеством $\tilde{A}$ называется множество пар

$$\tilde{A} = \{(\mu / x) \mid x \in H \subset M,\ \mu \in [0;1]\}, \tag{34}$$

где M — произвольное непустое канторовское множество.

Буквой μ в этом выражении обозначена **функция принадлежности** нечеткого множества $\tilde{A}$. Она принимает значения из интервала [0; 1] и зависит от переменной x, значения которой выбираются из множества H. Множество M называется **базовым множеством** (базовой шкалой). Значение функции принадлежности при выбранном $x \in H$ называется **степенью принадлежности** элемента $x \in H$ нечеткому множеству $\tilde{A}$.

Функция принадлежности может быть представлена аналитически как функция аргумента x, но может быть задана набором своих значений, как это записано в выражении (33). В выражении (34) указано множество $H \subset M$. Согласно [30] множество H называется **носителем нечеткого множества** $\tilde{A}$. Можно говорить просто — носителем.

Таким образом, мы ввели следующие понятия:

1) базовое множество M, на основе которого строится нечеткое множество. Оно может содержать любое число элементов. В случае вышеприведенного примера об очень маленьком улове M — это множество натуральных чисел. Базовому множеству в теории Кантора соответствует универсальное множество;

2) носитель нечеткого множества — подмножество H базового множества: $H \subset M$. Носитель образуют в основном те элементы множества M, для которых степень принадлежности не равна нулю;

3) функция принадлежности, зависящая от переменной $x \in H$ (можно считать, что $x \in M$). В выражении (34) первое число каждой пары — это не сама функция (как аналитическое выражение), а ее значение;

4) степень принадлежности — значение функции принадлежности при $x \in H$;

5) нечеткое множество — это множество пар, каждая из которых содержит элемент $x \in H$ и значение функции принадлежности на $x \in H$. В аналитической записи нечеткого множества элемент $x \in H$ указывается справа от наклонной черты, а значение функции принадлежности — слева.

Упражнения

1. (ШИР). Укажите элементы, образующие носитель в выражении (33).

2. (129). Укажите степень принадлежности элемента 4 множеству (33).

3. (МЭН). Какой элемент в выражении (33) имеет наименьшую степень принадлежности множеству $\tilde{K}$?

4. (ЗЫН). Какое значение имеет функция принадлежности для элемента $5 \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ в выражении (33)?

5. (НЭП). Найдите $\left|\tilde{K}\right|$ (то есть число элементов) по выражению (33).

4.3. ОБЪЕДИНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Согласно Г. Кантору в объединение множеств $A \cup B$ входят элементы множества A и элементы множества B. При этом элемент, входящий в оба множества, в объединение множеств включается только один раз. Тот же смысл вкладывается и в операцию объединения нечетких множеств, но с учетом функции принадлежности. Поясним это на примерах, полагая, что

$$M = \{1, 2, \ldots, 8\}.$$

Пример 1. Рассмотрим простейший случай, когда нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ содержат по одному элементу. Пусть

$$\tilde{A} = \{(0{,}3/2)\}; \quad \tilde{B} = \{(0{,}7/4)\},$$

тогда их нечеткое объединение примет вид

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(0{,}3/2), (0{,}7/4)\}.$$

Пример 2. В предыдущем примере элементы множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ являются различными. Теперь рассмотрим случай, когда множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ содержат один и от же элемент:

$$\tilde{A} = \{(0{,}3/2)\}; \quad \tilde{B}\{(0{,}8/2)\}.$$

Очевидно, что в объединение $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ войдет этот же единственный элемент. Но с какой степенью принадлежности? Если несколько нечетких множеств содержат один и тот же элемент, но с различными степенями принадлежности, то в объединение множеств этот элемент войдет с той степенью принадлежности, которая является наибольшей среди всех нечетких множеств, входящих в объединение. Следовательно,

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(0{,}3/2)\} \cup \{(0{,}8/2)\} = \{(0{,}8/2)\}.$$

Пример 3. Пусть нечеткие множества имеют вид:

$$\tilde{A} = \{(0{,}3/1), (0{,}9/2), (0{,}5/4)\}; \tag{35}$$

$$\tilde{B} = \{(0{,}6/2), (0{,}3/3), (0{,}9/4), (0{,}75/8)\}. \tag{36}$$

Найдем их объединение:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(0{,}3/1), (0{,}9/2), (0{,}3/3), (0{,}9/4), (0{,}75/8)\}. \tag{37}$$

Упражнения

1. (ИМШ). Укажите все элементы носителя множества (35) и множества (36).

2. (ТКШ). Укажите все элементы носителя множества (37).

3. (СПИ). Укажите наименьшую и наибольшую степени принадлежности в (37).

4. (ЕИФ). Укажите все элементы в выражении (37), которые имеют наибольшую степень принадлежности.

5. (ЛЭФ). Даны базовое множество $M = \{1, 2, \ldots, 9\}$ и нечеткие множества:

$$\tilde{A} = \{(0{,}1/1), (1/2), (0{,}9/3), (0{,}81/6)\};$$
$$\tilde{B} = \{(1/2), (0{,}8/5), (0{,}81/6), (0{,}5/8)\};$$
$$\tilde{C} = \{(0{,}8/3), (0{,}81/6), (0{,}81/7), (0{,}5/8)\}.$$

Найдите элементы множества M, которые образуют носитель нечеткого множества $\tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}$.

6. (КУФ). Укажите элементы носителя множества $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ (см. упр. 5).

7. (АДИ). Укажите элементы носителя множества $\tilde{B} \cup \tilde{C}$ (см. упр. 5).

8. (654). Укажите наименьшую и наибольшую степени принадлежности в выражении $\tilde{A} \cup \tilde{C}$ (см. упр. 5).

9. (ЯЛС)! Сколько элементов (упр. 5) в нечетких множествах $\tilde{A} \cup \tilde{B}$? $\tilde{A} \cup \tilde{C}$? $\tilde{B} \cup \tilde{C}$?

4.4. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Согласно Г. Кантору пересечение множеств A и B — это множество элементов, которые одновременно входят в множества A и B. В таком же смысле пересечение понимается и в теории нечетких множеств, но с учетом особенностей, вносимых функциями принадлежности. Поясним эти особенности, как и в случае объединения нечетких множеств, на примерах, считая, что базовое множество M имеет вид

$$M = \{1, 2, \ldots, 9\}.$$

Пример 1. Найти пересечение нечетких множеств:

$$\tilde{A} = \{(0{,}6/4)\}, \quad \tilde{B} = \{(0{,}2/4)\}.$$

В оба множества входит элемент $4 \in M$, но в первом случае его степень принадлежности равна 0,6, а во втором — 0,2. С какой степенью принадлежности элемент $4 \in M$ войдет в множество $\tilde{A} \cap \tilde{B}$? Если несколько нечетких множеств содержат некоторый элемент a с различными степенями принадлежности, представленными дробными числами из замкнутого интервала [0; 1], то наименьшее из этих чисел есть степень принадлежности элемента a, входящего в пересечение заданных множеств. Следовательно:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(0{,}6/4)\} \cap \{(0{,}2/4)\} = \{(0{,}2/4)\}.$$

Пример 2. Найти пересечение нечетких множеств:

$$\tilde{A} = \{(0{,}6/1), (1/2), (0{,}4/5), (0{,}6/6)\};$$
$$\tilde{B} = \{(0{,}35/2), (0{,}3/3), (0{,}9/6), (0{,}25/7)\}.$$

Общими для обоих нечетких множеств являются элементы $2 \in M$ и $6 \in M$. Следовательно:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(0{,}35/2), (0{,}6/6)\}.$$

Пример 3. Найти элементы множества $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{C} \cap \tilde{D})$, если

$$\tilde{A} = \{(0{,}2/2), (0{,}3/4), (0{,}6/6)\}; \quad \tilde{C} = \{(1/3), (0{,}1/4), (0{,}9/6), (0{,}9/8)\};$$

$$\tilde{B} = \{(0{,}2/2), (0{,}6/7), (0{,}7/8)\}; \quad \tilde{D} = \{(1/3), (0{,}1/5), (0{,}2/6), (0{,}9/9)\}.$$

Сначала находим пересечения нечетких множеств:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(0{,}2/2)\};$$

$$\tilde{C} \cap \tilde{D} = \{(1/3), (0{,}2/6)\}.$$

Затем выполняем операцию объединения:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{C} \cap \tilde{D}) = \{(0{,}2/2), (1/3), (0{,}2/6)\}.$$

Пример 4. Найти элементы нечеткого множества $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, если

$$\tilde{A} = \{(0{,}3/1)\}; \quad \tilde{B} = \{(0{,}6/2)\}.$$

Эти множества не имеют общих элементов. Представим их в таком виде, чтобы формально они содержали общие элементы:

$$\tilde{A} = \{(0{,}3/1), (0/2)\};$$

$$\tilde{B} = \{(0/1), (0{,}6/2)\}.$$

Находим пересечение множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(0/1), (0/2)\} = \varnothing.$$

Очевидно, что если нечеткие множества не имеют общих элементов, то пересечение их пусто.

Упражнения

Пусть базовое множество имеет вид $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$, и пусть даны нечеткие множества:

$$\tilde{A} = \{(0{,}2/1), (0{,}2/2), (0{,}5/5), (0{,}7/8)\}; \quad \tilde{C} = \{(0{,}2/4), (0{,}5/5), (0{,}7/8)\};$$

$$\tilde{B} = \{(0{,}3/3), (0{,}7/4), (0{,}7/6)\}; \quad \tilde{D} = \{(0{,}1/6), (0{,}8/7), (0{,}8/8)\}.$$

Используя эти множества в качестве исходных данных, выполните упражнения 1–3.

1. Найдите наименьшее значение функции принадлежности для множеств:

1) (ПШО). $\tilde{A} \cap \tilde{B}$; 3) (38 Н). $\tilde{C} \cap \tilde{D}$; 5) (КНШ). $\tilde{B} \cap \tilde{C} \cap \tilde{D}$;
2) (ТУП). $\tilde{A} \cap \tilde{C}$; 4) (288). $\tilde{A} \cap \tilde{C} \cap \tilde{D}$; 6) (ПИХ). $\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{D}$.

2. Найдите носитель для нечетких множеств:

1) (ЧАФ). $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C})$; 3) (П23). $\tilde{C} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{D})$; 5) (ТЕШ). $\tilde{B} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C})$;
2) (АФХ). $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C})$; 4) (АНИ). $\tilde{B} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$; 6) (АМК). $(\tilde{A} \cap \tilde{C}) \cup \tilde{B}$.

3. Найдите наименьшую и наибольшую степени принадлежности:

1) (ШЕЛ)! $\tilde{A} \bigcup (\tilde{A} \bigcap \tilde{B})$; 3) (РНО)! $\tilde{B} \bigcup (\tilde{B} \bigcap \tilde{C})$; 5) (ЯРБ)! $\tilde{B} \bigcap \tilde{C} \bigcap \tilde{D}$;

2) (РЯМ)! $\tilde{A} \bigcup (\tilde{A} \bigcap \tilde{C})$; 4) (ФТЯ)! $\tilde{A} \bigcap \tilde{B} \bigcap \tilde{C}$; 6) (КАГ)! $\tilde{A} \bigcap \tilde{C} \bigcap \tilde{D}$.

4. (ООД). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что носитель — это канторовское множество?

2) возможны ли случаи, когда $M \subset H$, где M — базовое множество, H — носитель?

3) верно ли, что пустое множество — это любое нечеткое множество с функцией принадлежности, равной нулю на всем базовом множестве?

4) возможны ли случаи, когда $M = H$, где M — базовое множество, H — носитель?

5) может ли функция принадлежности принимать значения, большие единицы?

6) верно ли, что значение функции принадлежности и степень принадлежности — это одно и то же?

7) может ли функция принадлежности принимать целые значения?

4.5. ДОПОЛНЕНИЕ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Пусть даны базовое множество $M = \{1, 2, \ldots, 7\}$ и нечеткое множество

$$\tilde{A} = \{(0{,}3/1), (0{,}7/3), (0{,}9/6)\}.$$

Носителем этого нечеткого множества является канторовское множество $H = \{1, 3, 6\}$. Чтобы найти дополнение множества $\tilde{A}$, сначала необходимо расширить носитель до базового множества. Для этого в множество $\tilde{A}$ включим все недостающие элементы и каждому из них присвоим нулевые значения функции принадлежности:

$$\tilde{A} = \{(0{,}3/1), (0/2), (0{,}7/3), (0/4), (0/5), (0{,}9/6), (0/7)\}.$$

Но это еще не дополнение. Для его нахождения заменим в каждой паре множества $\tilde{A}$ число μ_i на разность $1 - \mu_i$, где μ_i — значение функции принадлежности элемента $i \in M$. Тогда получим искомое дополнение:

$$\bar{\tilde{A}} = \{(0{,}7/1), (1/2), (0{,}3/3), (1/4), (1/5), (0{,}1/6), (1/7)\}.$$

В этом примере степень принадлежности каждого элемента множества $\bar{\tilde{A}}$ не равна нулю, так как в $\tilde{A}$ функция принадлежности ни для одного элемента не принимает единичное значение. Следовательно, если в заданное нечеткое множество $\tilde{A}$ входит элемент $x \in M$ со степенью принадлежности, равной единице, то в дополнение этот элемент войдет с нулевой степенью принадлежности.

Рассмотрим пример для $M = \{1, 2, \ldots, 7\}$:

$$\tilde{A} = \{(1/1), (0{,}2/2), (0{,}9/4), (1/5), (1/6)\}.$$

В дополнение этого нечеткого множества не входят элементы $1, 5, 6 \in M$:

$$\bar{\tilde{A}} = \{(0/1), (0{,}8/2), (1/3), (0{,}1/4), (0/5), (0/6), (1/7)\} =$$
$$= \{(0{,}8/2), (1/3), (0{,}1/4), (1/7)\}.$$

Упражнения

Дано: $M = \{1, 2, ..., 8\}$. Исходными данными являются нечеткие множества:

$$\tilde{A} = \{(0{,}6/2), (0{,}6/3), (0{,}1/5), (0{,}9/7)\};$$

$$\tilde{B} = \{(1/1), (1/2), (0{,}1/4), (0{,}7/6), (0{,}9/8)\};$$

$$\tilde{C} = \{(0{,}3/1), (0{,}4/3), (1/4), (1/5), (1/6), (0{,}8/8)\};$$

$$\tilde{D} = \{(0{,}2/1), (1/2), (1/3), (0{,}4/4), (0{,}7/6), (1/8)\}.$$

1. Найдите носитель для множеств:

1) (КЛЕ). $\bar{\tilde{A}}$; 2) (МУХ). $\bar{\tilde{B}}$; 3) (ТЛЗ). $\bar{\tilde{C}}$; 4) (634). $\bar{\tilde{D}}$.

2. Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна 1, для множеств:

1) (ИК5). $\bar{\tilde{A}}$; 2) (ХТК). $\bar{\tilde{B}}$; 3) (ПАЛ). $\bar{\tilde{C}}$; 4) (АН8). $\bar{\tilde{D}}$.

3. Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна нулю, в случае множеств:

1) (ЮХН). $\bar{\tilde{B}}$; 2) (860). $\bar{\tilde{C}}$; 3) (АРП). $\bar{\tilde{D}}$.

4. Найдите носители множеств:

1) (ЭЦБ). $\bar{\tilde{A}} \cup \bar{\tilde{B}}$; 3) (ДВВ). $\bar{\tilde{B}} \cup \bar{\tilde{D}}$; 5) (ТЕТ). $\bar{\tilde{B}} \cap \bar{\tilde{D}}$;

2) (ПФУ). $\bar{\tilde{B}} \cup \bar{\tilde{C}}$; 4) (ТКФ). $\bar{\tilde{A}} \cap \bar{\tilde{C}}$; 6) (ХОХ). $\bar{\tilde{C}} \cap \bar{\tilde{D}}$.

5. Найдите множество $\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}}$. Укажите степень принадлежности множеству $\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}}$ элементов:

1) (ЦИД). $1, 2 \in M$; 2) (ЯЖД). $3, 4, 5 \in M$; 3) (МХЕ). $6, 7 = M$.

6. Найдите множество $\tilde{B} \cup \bar{\tilde{B}}$.

1) (АРЗ). Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна единице.

2) (ЖНИ). Укажите наименьшее значение функции принадлежности.

3) (АЙЦ). Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна 0,9.

7. Найдите множество $\tilde{D} \cap \bar{\tilde{D}}$.

1) (ТЭЛ). Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна нулю.

2) (5ПЛ). Укажите наименьшую (не равную нулю) и наибольшую степени принадлежности.

3) (АУМ). Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых не равна нулю.

4.6. РАЗНОСТЬ И СИММЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Для нахождения разности $\tilde{A} - \tilde{B}$ нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ никакой новой информации не потребуется, так как разность может быть выражена через вышеуказанные операции дополнения и пересечения:

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}}.$$

Проиллюстрируем это на примере. Пусть

$$M = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\};$$
$$\tilde{A} = \{(0{,}6/1), (0{,}5/2), (1/4), (0{,}2/6)\};$$
$$\tilde{B} = \{(0{,}8/1), (0{,}5/2), (1/3), (0{,}4/5)\}.$$

Найдем их дополнения:

$$\bar{\tilde{A}} = \{(0{,}4/1), (0{,}5/2), (1/3)(1/5), (0{,}8/6)\};$$
$$\bar{\tilde{B}} = \{(0{,}2/1), (0{,}5/2), (1/4), (0{,}6/5), (1/6)\}.$$

Тогда разности $\tilde{A} - \tilde{B}$ и $\tilde{B} - \tilde{A}$ примут вид

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}} = \{(0{,}2/1), (0{,}5/2), (1/4), (0{,}2/6)\};$$
$$\tilde{B} - \tilde{A} = \tilde{B} \cap \bar{\tilde{A}} = \{(0{,}4/1), (0{,}5/2), (1/3), (0{,}4/5)\}.$$

Для нахождения симметрической разности нечетких множеств также не требуется никакой новой информации, так как симметрическая разность может быть выражена через рассмотренные выше операции пересечения, объединения и дополнения:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (\tilde{A} - \tilde{B}) \cup (\tilde{B} - \tilde{A}) = (\tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}}) \cup (\tilde{B} \cap \bar{\tilde{A}}).$$

4.7. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Все нижеперечисленные свойства операций над нечеткими множествами почти не отличаются от рассмотренных в первом разделе свойств операций над канторовскими множествами, поэтому материал данного подраздела представлен в кратком изложении.

При обозначении множеств будем считать, что $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ — произвольные нечеткие множества, M — базовое множество (канторовское). Знак равенства будем использовать для обозначения равносильности. (В [30] для этих целей применяется знак $\approx$.)

Наиболее важными из всех изученных свойств являются следующие:

1) **инволюция**: дополнение дополнения множества $\tilde{A}$ есть само это множество $\tilde{A}$:

$$\bar{\bar{\tilde{A}}} = \tilde{A};$$

2) **идемпотентность** пересечения и объединения:

$$\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}, \qquad \tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A};$$

3) **коммутативность** пересечения и объединения:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}, \quad \tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A};$$

4) **ассоциативность** пересечения и объединения:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = \tilde{B} \cap (\tilde{A} \cap \tilde{C}) = \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C},$$
$$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = \tilde{B} \cup (\tilde{A} \cup \tilde{C}) = \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C};$$

5) **дистрибутивность пересечения** относительно объединения:

$$\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{C})=(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{A}\cap\tilde{C})$$

и **дистрибутивность объединения** относительно пересечения:

$$\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})=(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cap(\tilde{A}\cup\tilde{C});$$

6) законы де Моргана:

$$\overline{\tilde{A}\cap\tilde{B}}=\bar{\tilde{A}}\cup\bar{\tilde{B}},\quad \overline{\tilde{A}\cup\tilde{B}}=\bar{\tilde{A}}\cap\bar{\tilde{B}}.$$

Кроме перечисленных, приведем еще ряд свойств:

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=\tilde{B}\oplus\tilde{A};\quad \tilde{A}\cup\varnothing=\tilde{A};\quad \tilde{A}\cap\varnothing=\varnothing;\quad \tilde{A}\cup M=M;\quad \tilde{A}\cap M=\tilde{A}.$$

Идеи, заложенные в основу теории нечетких множеств Л. Заде, получили дальнейшее развитие в логических исчислениях, например в логике высказываний. В двузначных логических системах высказывания могут быть либо истинными, либо ложными. В случае же нечеткой логики степень истинности высказываний можно задавать десятичными дробями из диапазона [0; 1] по аналогии с нечеткими множествами. Исчисления с нечеткой логикой находят применение при создании диагностических, экспертных и советующих систем, при построении нечетких моделей, работающих в условиях неполной или неточной информации, при разработке вопросов распознавания образов и др. Все эти направления имеют большое практическое значение, однако изучение их выходит за рамки данного пособия. Каждый, кто проявит к ним интерес, может обратиться к специальной литературе, например [30].

На этом завершим не только раздел «Элементы теории нечетких множеств», но и вообще всю тему о множествах. Рассмотренного материала при надлежащем его освоении вполне достаточно для первого знакомства с вводными понятиями такого раздела современной математики, как теория множеств.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

БУЛЕВА АЛГЕБРА

ВВЕДЕНИЕ

Булева алгебра, и особенно та ее часть, которую называют прикладной **алгеброй логики**, в настоящее время получила такое развитие, что в рамках небольшого учебного пособия даже кратко осветить все ее направления совершенно невозможно, в связи с чем в пособие включены лишь те разделы, которые имеют наибольшее практическое значение.

Булевой алгебре среди других тем данного пособия уделено наибольшее внимание. Во-первых, булева алгебра является фундаментом всех без исключения информационных технологий. Во-вторых, с ее помощью решаются самые разнообразные логические задачи (о беспорядках, о расписании, о нахождении всех трансверсалей и др.). В третьих, она находит широчайшее применение в технических областях (логический синтез контактных структур, комбинационных и многотактных электронных схем, их минимизация, анализ работы и др.). Даже с чисто эстетической точки зрения ей нет равных: по выражению А. А. Шалыто, это самая «красивая» из всех наук современности.

Необходимо отметить, что в литературе наряду с термином «булева алгебра логики» используются и синонимы, такие как алгебра Буля [18], алгебра логики [6], алгебра событий [13], алгебра кнопок [25], алгебра высказываний [26], алгебра исчисления высказываний [1], пропозициональная логика [25], булева алгебра [14], логика предложений [11], математическая логика [15], бинарная булева алгебра [23], алгебра релейных цепей [24] и др. Не все эти термины являются полными синонимами (полные синонимы — вообще большая редкость). Однако с прикладной точки зрения различия между ними несущественны, поэтому практически любой из них можно взять за основу.

При подготовке данного пособия начальным ориентиром послужили книги [14; 24; 42], в которых используется термин «булева алгебра», в связи с чем этот термин принят и в данном пособии. Другие же авторы часто употребляют словосочетание «алгебра логики». Это можно объяснить тем, что с точки зрения «чистой» математики булевых алгебр, в наиболее общем случае определяемых как частично упорядоченные множества специального типа [25, с. 74], существует много и их интерпретация в виде алгебраической системы высказываний является лишь частным случаем. Однако термин «булева алгебра» также имеет право на существование, и его следует использовать хотя бы для того, чтобы во имя исторической справедливости не забывать, с чьим именем связан важнейший раздел математики, который по возможностям его практического применения не имеет себе равных среди других булевых алгебр.

В пособии булева алгебра представлена 10 главами. Некоторые из них по содержанию освещены достаточно полно, другие же являются лишь вводно-ознакомительными (подобно разделу «Теория множеств»), носящими пропедевтический характер (пропедевтика — введение в какую-либо науку, подготовительный курс. От греч. propaideuô — предварительно обучаю). К ним относятся такие темы, как «Булево дифференциальное и интегральное исчисления», «Булевы уравнения», «Пороговые функции» и др. Предполагается, что на основе полученных сведений по той или иной теме студент в дальнейшем при необходимости сможет самостоятельно глубже изучить соответствующие вопросы, обратившись к специальной литературе.

Вопросы практического применения булевой алгебры освещены главным образом в разделе «Теория конечных автоматов» данного пособия, но затрагиваются и в комбинаторике (задача о расписании, о беспорядках и др.) и теории графов (при нахождении всех трансверсалей).

5 ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

5.1. ДВОИЧНЫЕ ЧИСЛА

Всякое число N в позиционной системе счисления с основанием q можно представить в виде полинома

$$N = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + a_{n-2} q^{n-2} + \ldots + a_1 q^1 + a_0 q^0.$$

Коэффициенты a_n, a_{n-1}, ..., a_0, стоящие перед степенями, изображают цифры системы счисления. Количество цифр при основании q равно q, т. е. каждый из коэффициентов может принимать значения 0, 1, 2, 3, ..., $q - 1$. Если $q = 10$, то коэффициенты могут принимать десять значений 0, 1, 2, 3, ..., 9 (десятичная система).

В технике, наряду с десятичной, большое распространение получила двоичная система счисления. Основание двоичной системы равно двум, следовательно, в ней имеются только две цифры: 0 и 1. Этими двумя цифрами можно записать любое число.

Перевод десятичного числа в двоичную систему поясним на примере числа 37:

37	1
18	0
9	1
4	0
2	0
1	1

В левой колонке каждое следующее число меньше предыдущего вдвое. Если число не делится на два, то его необходимо уменьшить на единицу. В правой колонке единицами отмечены нечетные числа, нулями — четные. Читая снизу вверх цифры правой колонки, получаем искомое двоичное число:

$$37|_{10} = 100101|_2.$$

Для перевода $(n + 1)$-разрядного двоичного числа в десятичное можно воспользоваться развернутой записью числа двоичной системы:

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0.$$

Переведем в десятичную систему двоичное число 100101. Согласно его записи имеем:

$$n = 5;\ a_0 = a_2 = a_5 = 1;\ a_1 = a_3 = a_4 = 0.$$

Тогда получим:

$$100101|_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 4 + 1 = 37|_{10}.$$

Над двоичными числами можно выполнять те же операции, что и над десятичными. Главной из них является операция сложения. Поясним ее на примере. Найдем сумму $a + b$, где $a = 101011$, $b = 101110$.

Запишем числа a и b одно под другим, совместив младшие разряды:

$$\begin{array}{ccccccccl} & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & – \text{число } a \\ + & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & – \text{число } b \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & – \text{число } a+b \\ & & (1) & (0) & (1) & (1) & (1) & (0) & – \text{переносы} \end{array}$$

Как и в десятичной системе, суммирование начинаем с младшего разряда:

а) $1 + 0 = 1$, переноса нет, под цифрой 1 (младший разряд числа $a + b$) записываем в скобках нуль;

б) во втором разряде суммируются две единицы: $1 + 1 = 10$. Сумма равна нулю и есть единица переноса;

в) в третьем разряде $0 + 1 = 1$, но еще надо прибавить единицу переноса из второго разряда: $0 + 1 + 1 = 10$. Сумма равна нулю и есть единица переноса;

г) в четвертом разряде суммируются две единицы и к ним прибавляется единица переноса из третьего разряда: $1 + 1 + 1 = 11$. Сумма равна 1 и есть единица переноса;

д) в пятом разряде $0 + 0 + 1 = 1$, т. е. сумма равна единице, переноса нет;

е) в шестом разряде $1 + 1 = 10$. Сумма равна нулю, а единица переноса образует седьмой разряд суммы $a + b$.

Другие арифметические операции рассматривать не будем, так как в дальнейшем изложении материала они не понадобятся.

Упражнения

1. Переведите в десятичную систему счисления двоичные числа:

1) (МОЛ). 10010; 4) (ЗОИ). 10000001; 7) (ЗШУ). 10000000;
2) (ОЗН). 1011100; 5) (БВХ). 11010001; 8) (АУТ). 10001000;
3) (КВК). 1110001; 6) (ТМЕ). 10011110; 9) (ХЦС). 11111111.

2. Переведите в двоичную систему десятичные числа:

1) (УСЕ). 12; 4) (624). 17; 7) (АХ7). 30; 10) (АХА). 60;
2) (992). 10; 5) (ЛВ5). 25; 8) (968). 49; 11) (ШНБ). 31;
3) (353). 16; 6) (ПВК). 32; 9) (149). 64; 12) (ШЛВ). 63.

3. Представьте сумму двоичных чисел в двоичной системе:

1) (891). 1010 + 1101; 4) (ПТ5). 1111 + 100;
2) (РТ2). 1100 + 1000; 5) (ПВ6). 11111 + 1;
3) (К33). 1001 + 10000; 6) (ЕВ7). 10 + 10100.

4. Вместо крестиков поставьте двоичные знаки, если:

1) (ЗРА). $11{\times}0{\times}{\times}0|_2 = 112|_{10}$; 4) (КОП). ${\times}{\times}{\times}0000|_2 = 80|_{10}$;
2) (ЕЯТ). $1{\times}{\times}1{\times}{\times}11|_2 = 255|_{10}$; 5) (УИК). ${\times}0{\times}{\times}0{\times}1|_2 = 67|_{10}$;
3) (ХАН). ${\times}{\times}000{\times}{\times}0|_2 = 128|_{10}$; 6) (ОКО). ${\times}{\times}000{\times}{\times}|_2 = 96|_{10}$.

5. Перечислите все двоичные четырехзначные числа, содержащие точно одну единицу. (ГАР). Найдите их десятичные эквиваленты.

6. Представьте в десятичной системе двоичные числа:

1) (ОСС)! 0110; 0111; 1001; 0001; 1110;
2) (МХТ)! 1101; 1010; 0100; 1000; 0011;
3) (ВММ)! 0001; 1000; 0100; 1011; 0101.

7. Укажите числа, двоичные эквиваленты которых содержат точно две единицы:

1) (ТЗС). 3, 7, 9, 12, 15; 4) (ЛЕ0). 3, 8, 9, 14, 18;
2) (ММЕ). 1, 4, 6, 13, 14; 5) (КАЯ). 6, 10, 13, 17, 19;
3) (ТЗА).2, 3, 5, 8, 12; 6) (ТЗИ). 3, 10, 20, 24, 28.

8. В результате замены крестиков единицами или нулями будут получаться различные двоичные числа. Все их десятичные эквиваленты введите в устройство в порядке возрастания. (Например: запись 1××0 дает числа: 8, 10, 12, 14.)

1) (ШЛА). 11×; 4) (ИЛМ). ×0×1; 7) (УМР). 0××0; 10) (КМ2). ×00×;
2) (ИРИ). 010×; 5) (ЕКТ). ××0×; 8) (ОХС). 0×××; 11) (ШУЗ). 0××1;
3) (РЯО). 01××; 6) (ШАК). ××11; 9) (ОУФ). ×11×; 12) (КР4). ×××0.

5.2.
ПОНЯТИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Высказывание — это некоторое утверждение в виде повествовательного предложения, по содержанию которого можно сказать, истинно оно или ложно. Примеры истинных высказываний: «Река Волга впадает в Каспийское море»; «Существуют четные числа, делящиеся на 3»; «Луна — спутник Земли». Примеры ложных высказываний: «В Томске водятся кентавры»; «Варшава — столица Японии»; «Всемирно известную сказку «Конек-горбунок» написал один из десятиклассников 30-й школы г. Томска».

Существуют утверждения, которые меняли свою истинность по мере развития науки. Например: «Солнце вращается вокруг Земли». Это высказывание длительное время считалось истинным. Теперь же оно ложно.

В некоторых случаях утверждения объявляются истинными без каких-либо объяснений и доказательств. Например: «На плоскости через точку, лежащую вне прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую данной». Это утверждение Евклида. А Н. И. Лобачевский [29; 46] о том же утверждает совсем другое: «На плоскости через точку, лежащую вне прямой, можно провести сколько угодно прямых, не пересекающих данной». Во втором высказывании утверждается нечто, противоположное первому. Однако оба высказывания истинны! Возможно ли это? Да. Оба высказывания являются аксиомами, которые, как известно, принимаются истинными без доказательств.

Мы в дальнейшем будем рассматривать только такие утверждения, которые являются либо истинными, либо ложными. Высказывания условимся обозначать большими (прописными) латинскими буквами. Например, пусть A — это высказывание «Идет дождь». Если оно является истинным, то пишут $A = 1$. Соответственно запись $A = 0$ обозначает: высказывание «Идет дождь» ложно.

Всякая буква, обозначающая некоторое высказывание, — это переменная величина, принимающая одно из двух значений — либо 0, либо 1. Такую переменную называют **двоичной**.

Упражнения

1. (ОАВ). Укажите номера, соответствующие истинным высказываниям:

1) если оно упадет, то оно разобьется;

2) река Лена впадает в море Лаптевых;

3) широкая лента шире узкой;

4) А. С. Пушкин — русский поэт XIX века;

5) случается, что стреляет и незаряженное ружье;

6) знание только тогда знание, когда оно приобретено усилием мысли, а не памятью.

2. (ЗШМ). Укажите номера, соответствующие истинным высказываниям:

1) в нашей Галактике, кроме планеты Земля, существуют другие планеты, на которых есть жизнь;

2) квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов;

3) операция арифметического сложения коммутативна;

4) все делать честно — выгоднее;

5) существует загробная жизнь;

6) на ровном месте можно упасть и сломать ногу.

3. (БМК). Укажите номера утверждений, которые не являются истинными и не являются ложными:

1) человек произошел от обезьяны;

2) мы с вами все — очень хорошие люди;

3) и куда это тебя занесло?

4) инопланетяне когда-нибудь посетят нашу Землю;

5) в ночь на 1 января всегда идет снег.

4. (УКР). Укажите номера утверждений, которые могут быть истинными (при определенных условиях):

1) на улице идет дождь;

2) $101 + 11 = 1000$;

3) все простые числа нечетные;

4) и заяц научится спички зажигать, если его долго бить;

5) площадь прямоугольника равна половине произведения его диагоналей.

5.3. АКСИОМЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

Джордж Буль — ирландский математик и логик (1815–1864) — впервые сформулировал основные положения алгебры логики.

В булевой алгебре операции выполняются не над числами, а над высказываниями, представленными двоичными переменными. В результате получаются сложные высказывания. Эти сложные высказывания записываются в виде формул, также носящих двоичный характер.

Двоичная переменная в булевой алгебре определяется следующими аксиомами [24]:

$$A = 1, \text{ если } A \neq 0; \qquad A = 0, \text{ если } A \neq 1.$$

В обычной алгебре (школьной) над переменными выполняются операции сложения, вычитания, умножения, деления и т. д. В булевой же алгебре основными являются только три операции. Их называют **дизъюнкция**, **конъюнкция**, **инверсия**.

Операция дизъюнкции обозначается знаком $\vee$, который ставится между двумя переменными: $A \vee B$. Однако, если учесть некоторое сходство операции дизъюнкции с арифметическим сложением, то вместо знака $\vee$ можно писать знак арифметического сложения: $A + B$. Этим знаком мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Дизъюнкция, называемая иногда логическим сложением, определена следующими аксиомами:

$$0 + 0 = 0; \;\; 0 + 1 = 1; \;\; 1 + 0 = 1; \;\; 1 + 1 = 1.$$

В связи с тем, что в сложном высказывании два простых высказывания соединены союзом ИЛИ, дизъюнкцию иногда называют операцией ИЛИ.

Вторая операция — конъюнкция. Она обозначается знаками $\wedge$, &. Но в применении эти знаки не очень удобны. Конъюнкция — «родня» арифметическому умножению, поэтому вместо знака $\wedge$ будем использовать точку: $A \cdot B$, либо вообще не указывать никакого знака:

$$A \wedge B = A \cdot B = AB.$$

Конъюнкция (логическое умножение) определяется следующими аксиомами:

$$0 \cdot 0 = 0; \;\; 0 \cdot 1 = 0; \;\; 1 \cdot 0 = 0; \;\; 1 \cdot 1 = 1.$$

Третья операция — инверсия, или отрицание. Она обозначается чертой над буквой: $\bar{A}$. Читается: не A. Например, если A — это «На улице темно», то $\bar{A}$ — «На улице не темно».

Инверсия определяется следующими аксиомами:

$$\bar{0} = 1; \quad \bar{1} = 0.$$

т. е. отрицание лжи есть истина, отрицание истины есть ложь.

Таким образом, полный список аксиом алгебры логики, которыми будем пользоваться в дальнейшем, имеет вид:

$$0+0=0; \qquad (1)$$
$$0+1=1; \qquad (2)$$
$$1+0=1; \qquad (3)$$
$$1+1=1; \qquad (4)$$
$$0\cdot 0=0; \qquad (5)$$
$$0\cdot 1=0; \qquad (6)$$
$$1\cdot 0=0; \qquad (7)$$
$$1\cdot 1=1; \qquad (8)$$
$$\overline{0}=1; \qquad (9)$$
$$\overline{1}=0. \qquad (10)$$

В литературе по математической логике встречаются иные системы аксиом булевой алгебры. Например, Р. Сикорский [25, с. 75] в список своих аксиом включает свойства коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и др. Еще одним примером является система аксиом Хантингтона, изложенная в [42]. По мнению автора, наиболее естественной является система аксиом, приведенная в [24]. По этой причине она и взята за основу в данном пособии.

Упражнения

1. (1ПЛ). Укажите номера аксиом, относящихся к дизъюнкции:
1) $0 + 0 = 0$; 2) $1 \cdot 1 \neq 0$; 3) $\overline{1}=0$; 4) $1 + 0 = 1$; 5) $1 + 1 = 1$; 6) $1 \cdot 0 = 0$.
2. (ЛКК). Укажите номера верных записей:
1) $1 + 0 = 1$; 2) $1 \cdot 0 = 0$; 3) $0 + 1 = 0$; 4) $1 + 1 = 1$; 5) $1 \cdot 1 = 1$; 6) $0 \cdot 1 \neq 0$.
3. (АДМ). Укажите номера аксиом, относящихся к конъюнкции:
1) $0 \cdot 1 = 0$; 2) $1 + 0 = 1$; 3) $\overline{1}=0$; 4) $0 \cdot 0 = 0$; 5) $0 + 0 = 0$; 6) $1 \cdot 1 = 1$.
4. (ЖИУ). Укажите номера верных записей:
1) $1 + 0 = 1 \cdot 0$; 3) $1 + 1 = 1 \cdot 1$; 5) $1 + 0 = 0 + 1$;
2) $0 + 1 \neq 0 \cdot 1$; 4) $1 \cdot 1 = 1 + 0$; 6) $1 + 0 \neq 1 + 1$.
5. (2ДБ). Укажите номера верных записей:
1) $\overline{1}=1\cdot 1$; 2) $\overline{0}=1+1$; 3) $\overline{0}\neq 0\cdot 1$; 4) $\overline{1}\neq\overline{0}$; 5) $\overline{1}\neq 0\cdot 1$; 6) $\overline{1}=1+0$.
6. (РОН). Укажите номера верных записей:
1) $1+0+\overline{1}=1\cdot 1+\overline{1}$; 3) $0+1+\overline{0}=0\cdot 0+\overline{0}$; 5) $0+\overline{0}+1=1+\overline{1}+0$;
2) $\overline{1}+0=\overline{0}+\overline{1}$; 4) $0+\overline{0}=1\cdot 0+0\cdot 1$; 6) $0\cdot 1\cdot 1=\overline{1}+0\cdot 1$.

5.4. СВОЙСТВА ДИЗЪЮНКЦИИ И КОНЪЮНКЦИИ

Рассмотрим следующие основные свойства:

а) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством **коммутативности**:

$$A + B = B + A; \quad AB = BA;$$

б) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством **ассоциативности**:

$$(A + B) + C = A + (B + C); \ \ (AB)C = A(BC),$$

что позволяет удалять скобки во всех случаях, когда знаками дизъюнкции или конъюнкции соединяются более двух переменных:

$$(A + B) + C = A + B + C; \ \ (AB)C = ABC;$$

в) **конъюнкция дистрибутивна** относительно дизъюнкции:

$$A(B + C) = AB + AC,$$

что позволяет раскрывать скобки в выражениях, например:

$$A(B + C + D + E) = AB + AC + AD + AE,$$

и выносить общий множитель за скобки:

$$ABC + ABD + ABEF = AB(C + D + EF);$$
$$AB + ADE + ACD + BCD = A(B + DE) + CD(A + B);$$

г) **дизъюнкция дистрибутивна** относительно конъюнкции:

$$A + BC = (A + B)(A + C);$$
$$A + BCD = (A + B)(A + C)(A + D);$$
$$A + BCDE = (A + B)(A + C)(A + D)(A + E);$$

д) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством **идемпотентности**:

$$A + A = A; \ \ A \cdot A = A.$$

Таблица 3

A	B	C	$A + BC$	$(A + B)(A + C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Эти свойства легко доказываются при помощи системы аксиом. Докажем, например, справедливость утверждения: дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции. Доказательство представим в виде табл. 3.

В левой части таблицы перечислены все возможные наборы значений трех переменных, в правой выделены две колонки. Первую озаглавим выражением $A + BC$, вторую — $(A + B)(A + C)$. Подставим в эти выражения значения $A = B = C = 0$. Тогда получим:

$$A + BC = 0; \ \ (A + B)(A + C) = 0,$$

т. е. на наборе 000 утверждение справедливо.

Точно так же перебираем остальные наборы значений переменных и заполняем правую часть таблицы. Получим две равные между собой колонки. Это значит, что на каждом наборе значений переменных выражения $A + BC$ и $(A + B)(A + C)$ принимают одинаковые значения. Следовательно, утверждение «дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции» справедливо.

5.5. ТЕОРЕМЫ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Список теорем одной переменной имеет вид:

$$A + 0 = A; \tag{11}$$

$$A \cdot 0 = 0; \tag{12}$$

$$A + 1 = 1; \tag{13}$$

$$A \cdot 1 = A; \tag{14}$$

$$A + A = A; \tag{15}$$

$$A \cdot A = A \tag{16}$$

$$A + \overline{A} = 1; \tag{17}$$

$$A \cdot \overline{A} = 0; \tag{18}$$

$$\overline{\overline{A}} = A, \tag{19}$$

где теорема (19) отражает свойство инволюции.

Все теоремы одной переменной доказываются при помощи аксиом путем перебора значений переменной. Например, докажем теорему (11).

Пусть $A = 0$, тогда получим $0 + 0 = 0$, что является верным утверждением согласно аксиоме (1). Пусть теперь $A = 1$. Получаем $1 + 0 = 1$. Согласно аксиоме (3) также получаем верный результат.

Рассмотрим еще одну теорему: $A + A = A$. Пусть $A = 0$, тогда $0 + 0 = 0$. Согласно аксиоме (1) это верный результат. Если $A = 1$, то $1 + 1 = 1$. Это также верное равенство согласно аксиоме (4).

Кроме перечисленных девяти теорем, можно рассматривать и другие теоремы одной переменной. Все они могут быть доказаны с применением как аксиом, так и теорем (11)–(19). Например, докажем, что

$$A \cdot 1 \cdot A + A \cdot \overline{A} + A = A \cdot \overline{\overline{A}} + \overline{0} \cdot A \cdot A. \tag{20}$$

Преобразуем левую часть. По теореме (18), которую будем считать доказанной, $A \cdot \overline{A} = 0$, следовательно:

$$A \cdot 1 \cdot A + A \cdot \overline{A} + A = A \cdot 1 \cdot A + 0 + A.$$

По теореме (11) $0 + A = A$, следовательно, $A \cdot 1 \cdot A + 0 + A = A \cdot 1 \cdot A + A$.

Согласно теореме (14) $A \cdot 1 = A$, тогда $A \cdot 1 \cdot A + A = A \cdot A + A$.

По теореме (16) $A \cdot A = A$, следовательно, $A \cdot A + A = A + A$.

Наконец, согласно теореме (15) получаем окончательно:

$$A + A = A.$$

Преобразуем теперь правую часть. Согласно теореме (19) $\overline{\overline{A}} = A$, тогда

$$A \cdot \overline{\overline{A}} + \overline{0} \cdot A \cdot A = A \cdot A + \overline{0} \cdot A \cdot A.$$

В соответствии с аксиомой (9) $\overline{0} = 1$, следовательно:

$$A \cdot A + \overline{0} \cdot A \cdot A = A \cdot A + 1 \cdot A \cdot A.$$

По теореме (16) $A \cdot A = A$. Применяя ее дважды, получаем

$$A \cdot A + 1 \cdot A \cdot A = A + 1 \cdot A.$$

По теореме (14) $1 \cdot A = A$, следовательно, $A + 1 \cdot A = A + A$.

Наконец, применяя теорему (15), получаем окончательно

$$A + A = A.$$

Левая и правая части совпали, следовательно, выражение (20) является верным.

Упражнения

1. (РЭХ). С помощью аксиом найдите номера выражений, равных единице:

1) $0\cdot\overline{0}+\overline{0}\cdot\overline{\overline{0}}+\overline{1}+\overline{\overline{1}}\cdot\overline{0}$;

2) $1\cdot1\cdot\overline{1}+1\cdot\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}+1\cdot\overline{0}\cdot1\cdot0$;

3) $1\cdot\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}+\overline{0}\cdot\overline{\overline{1}}+\overline{0}\cdot1\cdot\overline{1}$;

4) $0\cdot0\cdot\overline{1}+1\cdot1\cdot\overline{0}+0\cdot\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}$;

5) $0\cdot1\cdot1+\overline{1}\cdot\overline{1}\cdot\overline{0}+\overline{0}\cdot\overline{0}\cdot\overline{1}$;

6) $1\cdot1\cdot\overline{\overline{0}}+0\cdot\overline{\overline{1}}\cdot0+\overline{0}\cdot\overline{\overline{1}}\cdot\overline{1}$.

2. (ТРЮ). Найдите выражения, равные нулю:

1) $\overline{0}\cdot\overline{\overline{1}}\cdot0+1\cdot\overline{0}+0\cdot1$;

2) $1\cdot0+\overline{0}\cdot1\cdot0+0\cdot\overline{1}$;

3) $1\cdot\overline{0}\cdot\overline{1}+\overline{\overline{0}}\cdot\overline{1}+\overline{\overline{1}}\cdot\overline{\overline{0}}$;

4) $0\cdot1\cdot1+\overline{0}\cdot\overline{1}\cdot\overline{1}+\overline{0}\cdot\overline{1}\cdot\overline{0}$;

5) $\overline{0}\cdot1\cdot\overline{0}\cdot1+\overline{1}\cdot\overline{0}\cdot\overline{1}\cdot\overline{0}+0\cdot\overline{1}\cdot\overline{1}$;

6) $1\cdot1\cdot\overline{0}\cdot\overline{\overline{0}}+\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}\cdot1+\overline{0}\cdot\overline{0}\cdot\overline{\overline{1}}\cdot1$.

3. (ХХФ). Найдите значение выражения

$$A+A\cdot\overline{A}+1\cdot\overline{A}+0\cdot A\cdot\overline{A}+\overline{A}\cdot\overline{\overline{A}}\cdot1\cdot\overline{A}.$$

4. (2ДЯ). Найдите номера выражений, равных нулю:

1) $A\cdot\overline{A}\cdot A+1\cdot\overline{0}\cdot A+\overline{A}\cdot\overline{0}\cdot1$;

2) $A\cdot\overline{A}\cdot1+A\cdot\overline{A}\cdot\overline{\overline{A}}+A\cdot\overline{1}$;

3) $1\cdot\overline{1}\cdot\overline{A}+\overline{0}\cdot\overline{A}\cdot1+A\cdot\overline{\overline{A}}\cdot\overline{0}$;

4) $0+1\cdot0+A\cdot0+\overline{A}\cdot0+A\cdot\overline{A}$;

5) $A\cdot\overline{A}+\overline{\overline{A}}\cdot\overline{A}+A\cdot\overline{1}+\overline{A}\cdot\overline{1}$;

6) $\overline{0}\cdot A\cdot A\cdot\overline{1}+\overline{0}\cdot A\cdot1\cdot\overline{A}+\overline{1}\cdot A\cdot A$.

5.6. ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ ФОРМЫ

Булевы формулы могут быть записаны в виде дизъюнкции либо в виде конъюнкции каких-либо выражений. В первом случае говорят о **дизъюнктивной** форме, во втором — о **конъюнктивной.** Например, выражения

$$AB + CDE,\ \ A + B + CD,\ \ A + B + C + D$$

представлены в дизъюнктивной форме, а выражения

$$(A + B)(C + D),\ \ (A + C)(C + D + E)DF$$

— в конъюнктивной.

Если булева формула записана в виде дизъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо конъюнкцию некоторых аргументов, то эта формула является представленной в **дизъюнктивной нормальной форме** (ДНФ). Например, выражения

$$AB+C\overline{D};\ \ A+\overline{B}+CD\overline{E};\ \ A+B+C+\overline{D}$$

представлены в ДНФ, а формула $A+B(C+\overline{D})$ к ДНФ не относится, так как второе слагаемое, имеющее вид $B(C+\overline{D})$ не является ни отдельным аргументом, ни конъюнкцией переменных.

Если булева формула записана в виде конъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо дизъюнкцию некоторых аргументов, то эта формула является представленной в **конъюнктивной нормальной форме** (КНФ). Например, выражения

$$(A+\overline{B})(C+\overline{A}+D); \qquad AB(C+D+\overline{E})$$

записаны в КНФ, а формула

$$(A+\overline{B}C)(D+E)$$

КНФ не является, поскольку в первой паре скобок содержится конъюнкция $\overline{B}C$.

Выражение, представленное отдельным аргументом или его инверсией либо дизъюнкцией или конъюнкцией нескольких переменных, одновременно входит в класс ДНФ и КНФ. Например:

$$A;\ \overline{D};\ B+C+D;\ ABC;\ B+\overline{C}+\overline{E}+F;\ A\overline{C}E\overline{F}.$$

Упражнения

1. Укажите номера формул, представленных в ДНФ.

I. (ХНМ).	II. (ТХС).	III. (ЕЙК).
1) $AB+C\overline{D}$;	1) $AB+A(B+C)$;	1) A;
2) $A+B+C$;	2) $AB+ABAA$;	2) AA;
3) $A+BC+\overline{E}$;	3) $B+C+B+CA$;	3) AB;
4) $P+Q(P+R)$;	4) $A+A(A+A)$;	4) $A+\overline{A}$;
5) $A+A$.	5) $AAA+A$.	5) $A+BC$.

2. Укажите номера формул, представленных в КНФ.

I. (ТТР).	II. (ЛСС).	III. (ЛКК).
1) $(AC+B)A$;	1) $(A+B)(A+B)$;	1) $A+B$;
2) $A(B+C)$;	2) A;	2) $A+\overline{B}+\overline{C}$;
3) $B(AB+AB)$;	3) $ABC(D+EF)$;	3) $(A+AA)A$;
4) ABC;	4) $ABC(D+D)$;	4) $(A+\overline{A})\overline{A}$;
5) $A+B$.	5) $ABC(D+\overline{D})$.	5) BB.

5.7. ТЕОРЕМЫ ПОГЛОЩЕНИЯ, СКЛЕИВАНИЯ И ДЕ МОРГАНА

Теорема поглощения записывается в двух формах — дизъюнктивной и конъюнктивной, соответственно:

$$A+AB=A; \tag{21}$$

$$A(A+B)=A. \tag{22}$$

Выражение (22) можно получить из (21), если знаки дизъюнкции и конъюнкции поменять местами. Докажем первую теорему. Вынесем за скобки букву A:

$$A + AB = A(1 + B).$$

Согласно теореме (13) $1 + B = 1$, следовательно

$$A(1 + B) = A \cdot 1 = A.$$

Чтобы доказать вторую теорему, раскроем скобки:

$$A(A + B) = A \cdot A + AB = A + AB.$$

Получилось выражение, только что доказанное.

Рассмотрим несколько примеров на применение теоремы поглощения при упрощении булевых формул.

$$ABC + BC = BC(A + 1) = BC;$$
$$\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}D = \overline{A}B\overline{C}(1 + D) = \overline{A}B\overline{C};$$
$$A + AB + ABC = A + AB(1 + C) = A + AB = A;$$
$$A(A + B + CD) = A + AB + ACD = A(1 + B + CD) = A;$$
$$B(A + B + CD) = AB + B + BCD = B(A + 1 + CD) = B.$$

Теорема склеивания также имеет две формы — дизъюнктивную и конъюнктивную:

$$AB + A\overline{B} = A; \tag{23}$$
$$(A + B)(A + \overline{B}) = A. \tag{24}$$

Докажем первую теорему:

$$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A \cdot 1 = A,$$

поскольку согласно теоремам (17) и (14)

$$B + \overline{B} = 1; \quad A \cdot 1 = A.$$

Для доказательства второй теоремы раскроем скобки:

$$(A + B)(A + \overline{B}) = A + A\overline{B} + AB + B\overline{B}.$$

Согласно теореме (18) $B\overline{B} = 0$, следовательно:

$$A + A\overline{B} + AB + B\overline{B} = A + A\overline{B} + AB.$$

По теореме поглощения

$$A + A\overline{B} + AB = A(1 + \overline{B} + B) = A.$$

Теорема поглощения, как и теорема склеивания, применяется при упрощении булевых формул, например:

$$\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B = \overline{A}(\overline{B} + B) = \overline{A};$$
$$A\overline{B}C + ABC = AC(\overline{B} + B) = AC;$$
$$(AB + C)(AB + \overline{C}) = AB + AB\overline{C} + ABC + C\overline{C} = AB.$$

Теорема де Моргана связывает все три основные операции булевой алгебры — дизъюнкцию, конъюнкцию и инверсию:

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}; \tag{25}$$

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}. \tag{26}$$

Первая теорема читается так: инверсия конъюнкции есть дизъюнкция инверсий. Вторая: инверсия дизъюнкции есть конъюнкция инверсий.

Теорема де Моргана применима и к большему числу переменных:

$$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}; \qquad \overline{ABCD}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D};$$

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}; \qquad \overline{A+B+C+D}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D};$$

$$\overline{A+\overline{B}+\overline{C}}=\overline{A}BC; \qquad \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{D}}=A+B+C+D.$$

Упражнения

1. (153)! Примените теорему поглощения: $\overline{A}+\overline{A}B$; $K+KP$.

2. Упростите выражения:

1) (ФЕА). $PQ+SPQ+PQRST$;

2) (Н0Б). $XYZ+XZ+XZV$;

3) (ВМВ). $ABC\overline{D}+ABCD+\overline{A}BC$.

3. Упростите:

1) (РХГ). $(B+C)(B+\overline{C})$;

2) (ИМД). $(BC+\overline{D})(BC+D)$;

3) (ИЖЕ). $(B+C)(B+\overline{C})D$;

4) (БКФ). $V(X+YZ)(\overline{X}+YZ)$.

4. Найдите инверсию: 1) (УЮК). $\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{D}}$; 2) (ДЖЛ). $\overline{\overline{\overline{B}}+\overline{C}+\overline{\overline{D}}}$.

5. Упростите:

1) (ЕЖМ). $\overline{A+\overline{\overline{B}}}\cdot\overline{\overline{\overline{C}}+D}\cdot\overline{A}\cdot C$;

2) (ОНН). $\overline{P+Q}\cdot(P+Q)$;

3) (ЕЛО). $\overline{A+\overline{B}+C}\cdot(A+\overline{B}+C)+D$;

4) (ПНП). $\overline{RST}\cdot(\overline{R}+\overline{S}+\overline{T})\cdot RST$.

5.8.
ИНВЕРТИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Теорема де Моргана применима не только к отдельным конъюнкциям или дизъюнкциям, но и к более сложным выражениям.

Найдем инверсию выражения $AB+CD$, представленного в виде дизъюнкции конъюнкций. Инвертирование будем считать законченным, если знаки отрицания стоят только над переменными. Введем обозначения: $AB=X$; $CD=Y$, тогда

$$\overline{AB+CD}=\overline{X+Y}=\overline{X}\,\overline{Y}. \tag{27}$$

Найдем $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ и подставим в выражение (27):

$$\overline{X}=\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}; \quad \overline{Y}=\overline{CD}=\overline{C}+\overline{D};$$

$$\overline{AB+CD}=\overline{X}\,\overline{Y}=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D}).$$

Таким образом:
$$\overline{AB+CD}=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D}).$$

Рассмотрим выражение, представленное в конъюнктивной форме:
$$(A+B)(C+D).$$

Найдем его инверсию в виде
$$\overline{(A+B)(C+D)}.$$

Введем обозначения: $A+B=X$; $C+D=Y$, тогда
$$\overline{(A+B)(C+D)}=\overline{XY}=\overline{X}+\overline{Y}. \tag{28}$$

Найдем $\overline{X}$ и $\overline{Y}$: $\overline{X}=\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{Y}=\overline{C+D}=\overline{C}\,\overline{D}$ и подставим их в выражение (28):
$$\overline{(A+B)(C+D)}=\overline{XY}=\overline{X}+\overline{Y}=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{C}\,\overline{D}.$$

Таким образом:
$$\overline{(A+B)(C+D)}=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{C}\,\overline{D}.$$

При инвертировании сложных выражений можно пользоваться следующим правилом. Чтобы найти инверсию, необходимо знаки конъюнкции заменить знаками дизъюнкции, а знаки дизъюнкции — знаками конъюнкции и поставить инверсии над каждой переменной:
$$\overline{AB+\overline{B}C+\overline{D}E}=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{\overline{B}}+\overline{C})(\overline{\overline{D}}+\overline{E})=(\overline{A}+\overline{B})(B+\overline{C})(D+\overline{E});$$
$$\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})(D+\overline{E})P}=\overline{A}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}}+\overline{D}\,\overline{\overline{E}}+\overline{P}=\overline{A}BC+\overline{D}E+\overline{P}.$$

Упражнения

1. (ОВР). Дано выражение $AB+C\overline{D}+\overline{E}$. Укажите его инверсии в следующем списке формул:

1) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)E$; 3) $E(\overline{C}+D)(\overline{A}+\overline{B})$; 5) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+\overline{E}$;

2) $(\overline{A}+\overline{B})E(\overline{C}+D)$; 4) $(A+B)(C+\overline{D})E$; 6) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+E$.

2. (Б5Ж). Найдите номера верных равенств:

1) $\overline{A(\overline{B}+C)}=\overline{A}+B\overline{C}$;

2) $\overline{ABC(\overline{D}+\overline{E})}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+DE$;

3) $\overline{ABC(P+K)L}=A+B+C+PK+L$;

4) $\overline{\overline{(A+\overline{B})(C+\overline{D})}}=(A+\overline{B})(C+\overline{D})$;

5) $\overline{AB+C\overline{D}+E+F}=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+\overline{E}+\overline{F}$;

6) $\overline{\overline{A\overline{B}+CD+\overline{E}}}=(\overline{A}+B)(\overline{C}+\overline{D})E$.

3. Найдите инверсию выражения и упростите:

1) (ВУТ). $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$;

2) (ФУУ). $(\overline{X}+\overline{Y})(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})(T+\overline{X}+\overline{Y})$;

3) (ИДФ). $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$.

6 ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ ФОРМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

6.1. ПОНЯТИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

В общем случае функция (лат. functio — исполнение, соответствие, отображение) — это некоторое правило (закон), согласно которому каждому элементу множества X, представляющего собой область значений независимого переменного x, ставится в соответствие определенный элемент множества F, под которым понимается область значений зависимого переменного f (см. подраздел 2.12 темы «Теория множеств» данного пособия). В случае булевых функций $X = F = \{0,1\}$. Правилом, при помощи которого задается функция, может служить любая булева формула, например:

$$f = A\overline{B} + C. \tag{29}$$

Символом f здесь обозначена **функция**, которая является, как и аргументы A, B, C, двоичной переменной.

Аргументы — это независимые переменные, они могут принимать любые значения — либо 0, либо 1. Функция же f — зависимая переменная. Ее значение полностью определяется значениями переменных и логическими связями между ними.

Главная особенность функции: чтобы определить ее значение, в общем случае необходимо знать значения всех аргументов, от которых она зависит. Например, функция (29) зависит от трех аргументов A, B, C. Если принять $A = 1$, то получим

$$f = 1 \cdot \overline{B} + C = \overline{B} + C,$$

т. е. получилось новое выражение, не равное ни нулю, ни единице. Пусть теперь $B = 1$. Тогда

$$f = \overline{1} + C = 0 + C = C,$$

т. е. и в этом случае неизвестно, чему равна функция, нулю или единице.

Примем, наконец, $C = 0$. Тогда получим: $f = 0$. Таким образом, если в выражении (29) принять $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, то функция примет нулевое значение: $f = 0$.

В подразделе 5.4 было использовано понятие **набора значений переменных**. В дальнейшем оно будет часто применяться, поэтому рассмотрим его более подробно.

Если всем аргументам, от которых зависит функция, присвоены некоторые значения, то говорят о наборе значений аргументов, который можно называть просто **набором**. Набор значений аргументов — это последовательность нулей и единиц, например, 110, где первая цифра соответствует первому аргументу, вторая — второму и третья — третьему. Очевидно, что необходимо заранее договориться, что такое первый, второй или, допустим, пятый аргумент. Для этого удобно пользоваться алфавитным расположением букв. Например, если

$$f = XY + P\overline{Q},$$

то согласно латинскому алфавиту первым является аргумент P, вторым — Q, третьим — X, четвертым — Y. Тогда по набору значений аргументов легко найти значение функции. Пусть, например, дан набор 1001. Согласно его записи

$$P = 1, \quad Q = 0, \quad X = 0, \quad Y = 1; \quad f = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \overline{0} = 1,$$

т. е. на наборе 1001 заданная функция равна единице.

Еще раз отметим, что набор значений аргументов — это совокупность нулей и единиц. Двоичные числа также являются наборами нулей и единиц. Отсюда возникает вопрос — нельзя ли наборы рассматривать как двоичные числа? Можно, и во многих случаях это очень удобно, особенно если двоичное число перевести в десятичную систему. Например, если

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 0,$$

то набор примет вид 0110. Если его считать двоичным числом, то:

$$0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 = 6,$$

т. е. заданный набор имеет номер 6 в десятичной системе.

Если по десятичному номеру требуется найти значения аргументов, то поступаем в обратной последовательности: сначала десятичное число переводим в двоичное, затем слева дописываем столько нулей, чтобы общее число разрядов равнялось числу аргументов, после чего находим значения аргументов. Пусть, например, требуется найти значения аргументов A, B, C, D, E, F по набору с номером 23. Переводим число 23 в двоичную систему методом деления на два:

23	1
11	1
5	1
2	0
1	1

В результате получаем $23|_{10} = 10111|_2$. Это число пятизначное, а всего аргументов шесть, следовательно, слева необходимо записать один нуль: $23|_{10} = 010111|_2$. Отсюда находим:

$$A = 0,\ \ B = 1,\ \ C = 0,\ \ D = 1,\ \ E = 1,\ \ F = 1.$$

Сколько всего существует наборов, если известно число n аргументов? Очевидно, столько же, сколько существует n-разрядных двоичных чисел, т. е. 2^n.

Упражнения

1. Найдите значения функций, если $A = 1$, $C = 0$:

1) (75К). $f = \overline{A} + BC + AC$; 3) (33П). $f = A + BCD$;

2) (БКС). $f = AC + AD$; 4) (ЯНЯ). $f = BC + AC$.

2. Введите в устройство десятичные эквиваленты наборов, на которых функция равна единице:

1) (ЕХН). $f = \overline{A}BC + AB\overline{C}$; 4) (НБС). $f = AB + AC$;

2) (Т50). $f = BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; 5) (УНР). $f = \overline{A}C + B\overline{C}$;

3) (РТА). $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}C$; 6) (ТВУ). $f = A\overline{C} + \overline{A}C$.

3. Булева функция зависит от шести аргументов. Найдите наборы значений аргументов, если их десятичные номера имеют вид:

1) (С5). 16; 2) (КЛ). 4; 3) (РЖ). 22; 4) (АХ). 60; 5) (ЫН). 55.

4. (ЕМ). Укажите номера функций, принимающих единичное значение на наборе 12:

1) $f = A\overline{B} + B\overline{D} + \overline{A}C$; 3) $f = \overline{D} + \overline{A}C + \overline{B}D$; 5) $f = ABC + BD$;

2) $f = BD + AC + CD$; 4) $f = \overline{C} + BD + \overline{A}\,\overline{B}$; 6) $f = \overline{A}\,\overline{C} + AC + BD$.

5. (ТБС). Функция четырех аргументов принимает единичное значение на наборах 0, 1, ..., 12, а на остальных — нулевое. На каких наборах функция принимает нулевое значение? (Наборы указать в десятичной системе.)

6. (КАА). Функция четырех аргументов на половине наборов принимает нулевое значение, а на остальных — единичное. Сколько существует наборов, на которых функция принимает нулевое значение?

7. (ФИ). Функция трех аргументов принимает единичное значение на трех наборах, в двоичных изображениях которых только одна единица. Найти десятичные номера наборов, на которых функция равна единице.

8. (БМТ). Дана функция $f = AB + \overline{A}C + BC + AD$. Упростите эту функцию при условии, что $A = 0$.

9. (ГШЛ). Найдите аналитическое выражение функции трех аргументов X, Y, Z, если известно, что она принимает единичное значение только на наборе 6.

6.2. КАК ЗАДАТЬ БУЛЕВУ ФУНКЦИЮ

Один способ мы уже знаем. Это **аналитический**, т. е. в виде математического выражения с использованием двоичных переменных и логических операций. Кроме него существуют и другие способы, важнейшим из которых является **табличный**. В таблице перечисляются все возможные наборы

Таблица 4

№	*A*	*B*	*C*	*f*
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

значений аргументов и для каждого набора указывается значение функции. Такую таблицу называют **таблицей соответствия (истинности)**. На примере функции

$$f = A\overline{B} + \overline{A}C + \overline{A}\,B\overline{C}$$

выясним, как построить для нее таблицу соответствия. Функция зависит от трех аргументов A, B, C. Следовательно, в таблице предусматриваем три колонки для аргументов A, B, C и одну колонку для значений функции (табл. 4). Слева от колонки A полезно разместить еще одну колонку. В ней будем записывать десятичные числа, которые соответствуют наборам, если их рассматривать как трехразрядные двоичные номера. Эта десятичная колонка вводится для удобства работы с таблицей, поэтому, в принципе, ею можно пренебречь.

Заполняем таблицу. В строке с номером 000 записано:

$$A = B = C = 0.$$

Определим значение функции на этом наборе:

$$f = 0\cdot\overline{0} + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0\cdot\overline{0} = 0.$$

В колонке f записываем нуль в строке с набором 000.

Следующий набор: 001, т. е. $A = B = 0$, $C = 1$. Находим значение функции на этом наборе:

$$f = 0\cdot\overline{0} + \overline{0}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 0\cdot\overline{1} = 1.$$

На наборе 001 функция равна 1, следовательно, в колонке f в строке с номером 001 записываем единицу.

Аналогично вычисляем значения функций на всех остальных наборах и заполняем всю таблицу.

Упражнения

1. (КРВ)! Функцию $f = A\overline{B} + B\overline{C}$ представьте в виде таблицы соответствия. Сколько единиц содержится в колонке f? Сколько нулей содержится в колонке f?

2. (ПАГ). Функция $f = AB$ представлена в виде таблицы соответствия трех аргументов. Сколько единиц и сколько нулей содержится в колонке f?

3. (00Д). В таблице соответствия пяти аргументов колонка f содержит 19 единиц. Сколько нулей в колонке f?

4. (0МЕ). В колонке f таблицы соответствия шести аргументов содержится 64 единицы. Сколько в этой колонке нулей?

5. (ТРЖ). В таблице соответствия семи аргументов колонка f содержит поровну единиц и нулей. Сколько в ней нулей?

6. (2ЮИ)! Дана таблица соответствия четырех аргументов A, B, C, D. Сколько единиц содержится в колонке A? В колонке B? В колонке C? В колонке D?

7. (КБК). Сколько единиц и сколько нулей содержится в 197-й строке таблицы соответствия восьми аргументов (включая колонку f), если при этом $f = 0$?

6.3. МИНТЕРМЫ

Существуют булевы функции, которые принимают единичное значение только на одном наборе значений аргументов. В таблице соответствия эта единица может быть в любой строке, следовательно, таких функций существует 2^n. Каждая из этих функций состоит из одной конъюнкции n аргументов, инверсных или неинверсных, причем распределение инверсий находится в строгом соответствии с распределением нулей в двоичной записи того набора, на котором функция принимает единичное значение. Например, пусть функция, зависящая от четырех аргументов A, B, C, D, равна единице на наборе 0101, а на всех остальных наборах равна нулю. Представим ее в аналитической форме. Для этого запишем аргументы (в алфавитном порядке), а под ними — цифры набора:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Буквы, под которыми находятся нули, инвертируем, в результате получаем искомое выражение

$$f = \overline{A}B\overline{C}D.$$

Если построить таблицу соответствия, то в колонке f будет записана только одна единица — в строке с номером 5. (Это десятичный номер набора 0101.)

Функции, которые принимают единичное значение только на одном наборе, получили специальное обозначение. Называют их минимальными термами, а коротко — **минтермами** (минтермы нередко называют конституентами единицы). У минтермов существует и определение: минтермом n переменных называется такая конъюнкция их, в которую каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме. Обозначаются минтермы буквой m с десятичным индексом, являющимся номером минтерма [42]. Двоичный эквивалент номера минтерма — это набор, на котором минтерм принимает единичное значение. Например, если функция зависит от трех аргументов A, B, C, то

$$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\ \ m_1 = \overline{A}\,\overline{B}C,\ \ m_2 = \overline{A}B\overline{C},\ \ m_3 = \overline{A}BC \text{ и т. д.}$$

Минтермы обладают свойством: конъюнкция любых двух различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, тождественно равна нулю. Справедливость этого утверждения следует из того, что два таких минтерма могут отличаться только инверсиями аргументов, т. е. если минтермы не равны, то всегда найдется переменная, которая в один минтерм входит в прямой форме (без инверсии), а в другой — с отрицанием, конъюнкция которых равна нулю. Например, если $n = 4$, то

$$m_{12} \cdot m_5 = AB\overline{C}\overline{D} \cdot \overline{A}B\overline{C}D = 0.$$

Все символы, входящие в это выражение, соединены знаками конъюнкции. Сгруппируем буквы по парам следующим образом:

$$m_{12} \cdot m_5 = A \cdot \overline{A} \cdot B \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot D = 0.$$

Так как в конъюнкцию входят буква и ее отрицание, то вся конъюнкция принимает нулевое значение.

Если же минтермы равны между собой, то их конъюнкция дает тот же минтерм.

Упражнения

1. (КШУ). Запишите двоичный набор, на котором минтерм $\overline{A}BCD$ принимает единичное значение.

2. Запишите двоичные наборы, на которых минтермы принимают единичное значение:

1) (КХФ). $AB\overline{C}\overline{D}E$; 3) (УЛМ). $\overline{B}C\overline{D}$; 5) (ЕСЕ). $A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5$;
2) (УВЛ). $VX\overline{Y}Z$; 4) (ЛТК). $PQ\overline{R}S\overline{T}\overline{U}$; 6) (ПШН). $\overline{X}_1X_2$.

3. Даны наборы, на которых минтермы принимают единичное значение. Запишите алгебраические выражения минтермов, располагая буквы в алфавитном порядке и всякий раз начиная с буквы A:

1) (БЦА). 0011; 4) (ЫЛБ). 1100; 7) (ВШС). 00011;
2) (АУД). 111000; 5) (ДАЕ). 11111; 8) (ТАФ). 1111;
3) (ЕЫГ). 111; 6) (ЖФИ). 000; 9) (МХК). 01.

4. (БОС). Укажите номера, где записаны минтермы:

1) $AB\overline{C}$; 3) $A + B + C$; 5) $PQ\overline{RS}$; 7) $AK\overline{K}B$;
2) $ABA\overline{C}$; 4) $BC\overline{D}$; 6) $AC\overline{M}$; 8) $AB\overline{B}C$.

5. (АХТ). Укажите номера, где записаны минтермы:

1) AB; 3) SS; 5) $AB \cdot 1$; 7) $A_1A_2\overline{A}_3$;
2) $ABA\overline{C}$; 4) A; 6) $C\overline{C}$; 8) $X_1\overline{X}_2$.

6. Запишите в аналитической форме минтермы, если известно, что они зависят от аргументов A, B, C, D, E:

1) (ЦКУ). m_{10}; 3) (БЕЩ). m_{31}; 5) (ЕМЧ). m_{16}; 7) (ЛЭХ). m_0;
2) (КЛЦ). m_{20}; 4) (НКФ). m_1; 6) (ЧАЭ). m_{30}; 8) (КАШ). m_{15}.

7. Найдите десятичные индексы минтермов:

1) (ОХ1). $A\overline{B}\overline{C}D$; 3) (ЖТ8). Q; 5) (ЦМ3). $C\overline{D}$;
2) (ВТЧ). A; 4) (НВ2). $B\overline{C}D$; 6) (ЛЭ7). $\overline{P}$;

8. Чему равны конъюнкции минтермов?

1) (КИА). $AB\overline{C} \cdot A\overline{B}\overline{C}$; 3) (ИЛВ). $AB \cdot B\overline{C}D$; 5) (КОЕ). $\overline{B}C \cdot A\overline{B}C$;
2) (ЦЦБ). $AB \cdot P\overline{Q}R$; 4) (ИЮД). $A\overline{B} \cdot A\overline{B}C$; 6) (ПИЖ). $AB\overline{C} \cdot AC\overline{D}$.

9. (ПД1). Сколько существует минтермов пяти аргументов?

10. (Т52). Сколько существует минтермов семи аргументов?

11. (НУЗ). Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых начинаются с единицы?

12. (304). Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых начинаются с нуля?

13. (325). Сколько существует минтермов семи аргументов, двоичные индексы которых начинаются с двух нулей?

14. (ЮЮ6). Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых оканчиваются двумя единицами?

15. (597). Сколько инверсных аргументов содержит минтерм m_0, зависящий от аргументов A, B, C, D, E, F?

16. (А18). Сколько инверсных аргументов содержит минтерм m_3 и сколько — минтерм m_5, если оба они зависят от семи аргументов?

17. (879). Сколько прямых (неинверсных) аргументов содержит каждый из минтермов m_5, m_7, m_{11}, если они зависят от аргументов A, B, C, D, E?

18. (Д00). Сколько существует минтермов, двоичные индексы которых содержат точно две единицы, если минтермы зависят от пяти аргументов?

6.4. СОВЕРШЕННАЯ ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Если таблица соответствия содержит только одну единицу в колонке f, то функция представляет собой минтерм. Если же в колонке f содержится две единицы (в различных строках), то функцию образует дизъюнкция соответствующих минтермов. Такой случай представлен в табл. 5. В ней единицы расположены в строках 2 и 5, следовательно:

$$f = m_2 + m_5 = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C.$$

Таблица 5

№	*A*	*B*	*C*	*f*
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Аналогично рассуждая, придем к выводу о том, что в функцию могут входить три, четыре и так далее минтермов. И вообще, всякая совокупность единиц в колонке f дает некоторую булеву функцию и ее всегда можно записать в виде дизъюнкции минтермов.

Если функция представлена в виде дизъюнкции минтермов n аргументов, то говорят, что она записана в **совершенной дизъюнктивной нормальной форме**, сокращенно **СДНФ**.

Пусть дана функция, принимающая единичное значение на наборах 001, 010, 100, 101 и 110. Тогда ее аналитическое представление в СДНФ примет вид

$$f = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}.$$

Ее можно записать и через обозначения минтермов:

$$f = m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6.$$

Букву m можно удалить и указывать только номера наборов, на которых функция равна единице:

$$f = (1, 2, 4, 5, 6).$$

Всякая булева функция заданного числа аргументов представима в виде суммы минтермов единственным образом. По этой причине СДНФ называют иногда **стандартной формой**, а также **канонической**.

Сколько существует булевых функций n аргументов? На этот вопрос легко ответить, если учесть, что две функции совпадают только в том единственном случае, когда они состоят из одних и тех же минтермов. Следовательно, всякому набору минтермов соответствует отдельная булева функция. Чтобы определить число всех наборов минтермов, запишем минтермы в ряд

$$m_0 m_1 m_2 \ldots m_{2^n - 1}$$

и каждому из них поставим в соответствие двоичный разряд. Пусть единица обозначает, что относящийся к ней минтерм входит в функцию, а нуль говорит о том, что соответствующий минтерм в функцию не входит. Тогда каждое 2^n-разрядное двоичное число будет обозначать некоторую булеву функцию, а общее число N всех возможных функций $N = 2^{2^n}$, т. е. общее количество функций равно числу всех 2^n-разрядных двоичных чисел.

Упражнения

1. Сколько минтермов содержат следующие функции, если все они зависят от четырех аргументов?

1) (ИКА). $f = AB + CD$. 3) (ЛВВ). $f = P + QRS$. 5) (ЖСД). $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$.
2) (МОБ). $f = A + \bar{B} + \bar{C} + D$. 4) (ЛХГ). $f = A + \bar{B}CD$. 6) (ХХЕ). $f = VXYZ$.

2. Найдите СДНФ следующих функций, представив их в аналитической форме. Все функции зависят от аргументов A, B, C.

1) (ЖУЖ). $f = AB$. 3) (КПЛ). $f = BC + \bar{A}C$. 5) (МВК). $f = A\bar{C}$.
2) (ККИ). $f = A\bar{B} + AC$. 4) (ВЮЗ). $f = A\bar{B}C$. 6) (ГЭМ). $f = \bar{B}C + AC$.

3. (ДЕЙ). Укажите номера функций, представленных в СДНФ:

1) $f = A$; 3) $f = A\bar{B} + \bar{A}B$; 5) $f = AB\bar{C} + A\bar{B}D + \bar{A}CD + \bar{B}C\bar{D}$;
2) $f = ABCD$; 4) $f = AB\bar{C} + AC\bar{D} + BC\bar{D}$; 6) $f = XYZ + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$.

4. (Р92). Укажите номера функций, заданных в СДНФ:

1) $f = X$; 3) $f = A + \bar{A}$; 5) $f = PQ + P + \bar{Q}$;
2) $f = A \cdot \bar{A} + B \cdot \bar{B}$; 4) $f = \bar{X}$; 6) $f = X\bar{X}$.

5. (725). Укажите номера функций, заданных в СДНФ:

1) $f = X\bar{Y}\bar{Z}$; 3) $f = (X + Y)(Z + Y)$; 5) $f = R$;
2) $f = X + \bar{Y} + \bar{Z}$; 4) $f = PQ$; 6) $f = PQ + \bar{P}Q$.

6. Запишите в аналитической форме функции, зависящие от трех аргументов A, B, C:

1) (ДЦР). $f = m_1 + m_3 + m_4$; 4) (ММУ). $f = m_0 + m_1$;
2) (ГМС). $f = m_0 + m_7$; 5) (ПУФ). $f = m_1 + m_2 + m_6$;
3) (ЕМТ). $f = m_7$; 6) (НИХ). $f = m_5 + m_6 + m_7$.

7. Запишите десятичные номера минтермов, образующих функции четырех аргументов (номера упорядочить по возрастанию):

1) (НЕИ). $f = m_0 + m_1 + m_4 + m_7 + m_{10}$; 4) (МТМ). $f = A\bar{B}$;
2) (ТАК). $f = \bar{A}BCD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D$; 5) (НАН). $f = C$;
3) (ЗНЛ). $f = ABC$; 6) (УПО). $f = CD + \bar{C}\bar{D}$.

6.5.
ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ДНФ

Всякую булеву функцию можно представить в виде [24]

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = A_1 f(1, A_2, \ldots, A_n) + \overline{A}_1 f(0, A_2, \ldots, A_n).$$

Доказать это утверждение очень легко. Пусть $A_1 = 1$. Тогда

$$f(1, A_2, \ldots, A_n) = 1 \cdot f(1, A_2, \ldots, A_n) + \overline{1} \cdot f(0, A_2, \ldots, A_n).$$

На основании аксиомы (10) и теорем (12), (14), (11) получаем очевидное тождество:

$$f(1, A_2, \ldots, A_n) = f(1, A_2, \ldots, A_n).$$

Если принять $A_1 = 0$, то также получим тождество, но вместо единиц будут записаны нули.

Например, разложим по аргументу A функцию $f = A\overline{B} + \overline{B}CD$:

$$A\overline{B} + \overline{B}CD = A \cdot (1 \cdot \overline{B} + \overline{B}CD) + \overline{A} \cdot (0 \cdot \overline{B} + \overline{B}CD) = A\overline{B} + \overline{A}\overline{B}CD.$$

Разложить функцию можно по любому аргументу, например по B:

$$A\overline{B} + \overline{B}CD = B(A \cdot \overline{1} + \overline{1}CD) + \overline{B}(A \cdot \overline{0} + \overline{0}CD) = \overline{B}(A + CD).$$

Повторное разложение по одному и тому же аргументу вид функции не меняет.

Если функцию подвергнуть операции разложения последовательно (в любом порядке) по всем аргументам, то в результате получим СДНФ этой функции. Возьмем для примера функцию $f = A\overline{B} + C$ и разложим ее по аргументам: сначала по A, затем по B, C и D (заметим при этом, что аргумент D в записи функции отсутствует):

а) разложив по A, получаем

$$f = A\overline{B} + C = A(\overline{B} + C) + \overline{A}(C) = A\overline{B} + AC + \overline{A}C;$$

б) полученный результат разложим по B:

$$f = A\overline{B} + AC + \overline{A}C = B(AC + \overline{A}C) + \overline{B}(A + AC + \overline{A}C) = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B} + \overline{A}\overline{B}C;$$

в) полученное выражение разложим по C:

$$\begin{aligned} f &= ABC + \overline{A}BC + A\overline{B} + \overline{A}\overline{B}C = C(AB + \overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\overline{B}) + \overline{C}(A\overline{B}) = \\ &= ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}; \end{aligned}$$

г) осталось разложить по аргументу D:

$$\begin{aligned} f &= ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} = \\ &= D(ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}) + \overline{D}(ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \\ &+ \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}) = ABCD + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{B}\overline{C}D + ABC\overline{D} + \\ &+ \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} = (15, 7, 11, 3, 9, 14, 6, 10, 2, 8). \end{aligned}$$

Очевидно, что разложение функции можно продолжить, вводя все новые и новые аргументы, и всякий раз будут получаться СДНФ, не совпадающие с другими.

В предыдущем подразделе сказано, что всякая булева функция заданного числа аргументов представима в виде суммы минтермов единственным образом. Это утверждение справедливо только в том случае, если исходная функция и ее СДНФ зависят от одних и тех же аргументов. В общем же случае, если заданная функция содержит k аргументов, то с помощью теоремы разложения ее можно представить в СДНФ любого, большего k, числа аргументов, т. е. всякая булева функция представима в СДНФ неоднозначно, если нет ограничений на число аргументов.

Теорему разложения можно использовать при доказательстве других теорем. Например, докажем, что

$$A + \bar{A}B = A + B.$$

Это далеко не очевидное тождество. Чтобы доказать его справедливость, достаточно правую часть разложить по аргументу A:

$$A + B = A(1 + B) + \bar{A}(0 + B) = A + \bar{A}B.$$

Точно так же можно доказать, что $\bar{A} + AB = \bar{A} + B$.

Теорема разложения применима и в тех случаях, когда функцию требуется представить в виде

$$f = \varphi_1 + \varphi_2,$$

при условии, что $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 0$, т. е. функции φ_1 и φ_2 являются ортогональными [16]. Такое представление возможно для всякой функции, достаточно применить к ней теорему разложения. Найдем φ_1 и φ_2, например, для функции $f = A\bar{B} + AC$. Разложим ее по аргументу B:

$$f = B(A \cdot \bar{1} + AC) + \bar{B}(A \cdot \bar{0} + AC) = ABC + A\bar{B}.$$

Отсюда получаем:

$$\varphi_1 = ABC;\ \ \varphi_2 = A\bar{B};\ \ \varphi_1\varphi_2 = ABC \cdot A\bar{B} = 0.$$

Упражнения

1. Разложите функции по аргументу A. Результаты вводите в устройство в аналитической форме (минтермы упорядочить по возрастанию их индексов):

1) (461). $f = AB$; 2) (МТ2). $f = \bar{A}B$; 3) (РОЮ). $f = B$; 4) (ТАО). $f = BC$.

2. Сколько минтермов содержит СДНФ булевой функции вида $f = A$, если ее разложить по аргументам:

1) (С35) A? 2) (Т56) A и B? 3) (717) A, B, C, D? 4) (РТ8) A, B, C, D, E, F, K?

3. Сколько минтермов содержит функция $f = AC + D$, если ее разложить по аргументам:

1) (839) A, C, D? 3) (И5С) A, B, C, D, E, F?
2) (Д00) A, B, C, D? 4) (ХБТ) A, B, C, D, E, F, K, L?

4. Сколько минтермов содержит СДНФ функции $f = 1$, если ее разложить по аргументам:

1) (ВИА) A? 3) (200) A, B, C, D?
2) (ИРИ) A и B? 4) (ТЛЯ) A, B, C, D, E, F?

6.6. КАРТА ВЕЙЧА

Карта Вейча (ее модификацию называют **диаграммой Карно)** — это замечательное изобретение, позволяющее легко осуществлять различные преобразования булевых функций до пяти–шести аргументов.

Сначала рассмотрим карту двух аргументов (рис. 40). Левая половина карты обозначена буквой A, правая — той же буквой, но с инверсией. По горизонтали карта также разделена на две части. Верхняя половина обозначена буквой B, нижняя — буквой $\bar{B}$.

Левая верхняя клетка находится на пересечении областей A и B — записываем в нее минтерм AB. Правая верхняя клетка находится на пересечении областей $\bar{A}$ и B. Записываем в эту клетку минтерм $\bar{A}B$. Аналогично записываем $A\bar{B}$ и $\bar{A}\bar{B}$ в оставшиеся две клетки. На рис. 41 приведена та же карта, но в клетках ее указаны десятичные номера минтермов.

Рассмотрим карту Вейча трех аргументов (рис. 42). В ней также для каждого минтерма отведена одна клетка, и, как и в случае карты двух аргументов, алгебраическая запись минтермов строго соответствует системе расположения букв вокруг карты. На рис. 43 изображена та же карта, но в клетках указаны номера минтермов. Кроме того, на ней указаны только неинверсные аргументы. Это значит, что буква $\bar{A}$ не пишется, но подразумевается.

На рис. 44 приведена карта четырех аргументов, где в клетках указаны минтермы в их аналитической записи. Вокруг карты размещены переменные, для каждой из которых строго закреплена своя зона. В дальнейшем для

	A	$\bar{A}$
B	AB	$\bar{A}B$
$\bar{B}$	$A\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$

Рис. 40

	A	
B	3	1
	2	0

Рис. 41

	A		$\bar{A}$	
B	$AB\bar{C}$	ABC	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
$\bar{B}$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Рис. 42

	A			
B	6	7	3	2
	4	5	1	0
		C		

Рис. 43

	A				
B	$ABC\bar{D}$	$ABC\bar{D}$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	
B	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}B\bar{C}D$	D
	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	D
	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	
		C			

Рис. 44

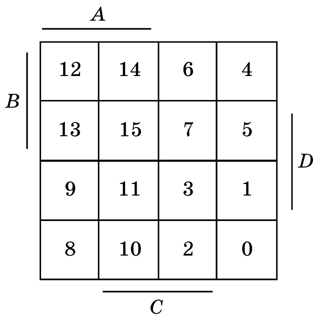


Рис. 45

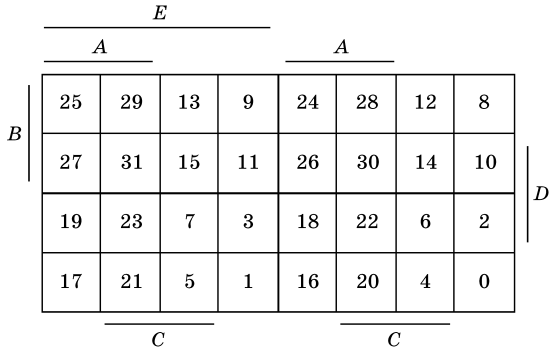


Рис. 46

всех карт будем указывать область только неинверсной буквы, полагая, что вторая половина карты обозначается буквой с инверсией.

На рис. 45 приведена карта, где размещены десятичные номера минтермов четырех аргументов.

На рис. 46 изображена карта пяти аргументов. Она получена из двух карт четырех аргументов. Левая карта обозначена буквой E, а правая соответственно буквой $\bar{E}$.

Аналогичным образом можно построить карту Вейча на любое число аргументов, однако практически дело ограничивается картами пяти, реже шести и совсем редко семи и восьми аргументов, так как с увеличением числа аргументов быстро возрастает сложность карты и соответственно снижается эффективность ее использования.

Упражнения

1. Укажите на карте Вейча номер клетки, которой соответствует минтерм:
1) (И0Б). ABC; 3) (Д0В). $AB\bar{C}D$; 5) (ГХГ). $\bar{A}B$;
2) (0СД). $A\bar{B}\bar{C}D$; 4) (20Е). $A\bar{B}\bar{C}DE$; 6) (ЦВЖ). $\bar{A}BC\bar{D}\bar{E}F$.

2. (ЕЮК). Сколько клеток имеет карта Вейча пяти аргументов?

3. (УЦЛ). Сколько клеток имеет карта Вейча n аргументов?

4. Запишите аналитическое выражение минтерма (через буквы A, B, C, D), находящегося в клетке карты Вейча с номером:
1) (ЕС1). 4; 3) (ДР2). 12; 5) (ТП3). 14;
2) (НП4). 0; 4) (Т65). 15; 6) (ЕК6). 10.

6.7. НАНЕСЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА КАРТУ ВЕЙЧА

Если функция представлена в виде суммы минтермов, то нанесение ее на карту сводится к отысканию клеток, за которыми закреплены номера соответствующих минтермов. В найденные клетки записываются единицы. Поясним это на примере функции

$$f = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC.$$

Переведем минтермы в их номера:

$$f = (2, 3, 4, 7). \qquad (30)$$

Воспользуемся картой, изображенной на рис. 43. В ее клетках записаны числа. Но их можно не писать, поскольку система расположения букв вокруг карты точно определяет место каждого минтерма. Удалим с карты номера и нанесем на нее функцию (рис. 47).

Единицы на карте обозначают номера минтермов, взятых из выражения (30). Самая правая единица (верхний ряд) занимает клетку с номером 2. Это постоянное место минтерма $m_2 = \bar{A}B\bar{C}$. Поскольку он входит в заданную функцию, то в этой клетке и поставлена единица. То же самое относится и ко всем остальным единицам карты. Пустые клетки обозначают, что соответствующие минтермы не входят в функцию.

На карту можно нанести функцию, представленную не только в СДНФ, но и в виде произвольной дизъюнкции конъюнкций. Например, пусть дана функция

$$f = AB + \bar{A}C + A\bar{B}C.$$

Она зависит от трех аргументов A, B, C. Соответствующая карта Вейча приведена на рис. 48. Первая конъюнкция, входящая в функцию, равна AB. Находим на карте эту область. Она расположена на пересечении двух областей: буквы A и буквы B. Это две верхние левые клетки. В них ставим единицы. На рис. 48 эти две единицы обведены и обозначены конъюнкцией AB.

Вторая конъюнкция имеет вид $\bar{A}C$. Находим область на карте, являющуюся общей для зон $\bar{A}$ и C. Это две клетки, расположенные вертикально. Наконец, наносим на карту конъюнкцию $A\bar{B}C$. Она на карте занимает одну клетку на пересечении зон A, $\bar{B}$ и C.

Мы рассмотрели случай, когда каждая конъюнкция на карте занимает новые области, не пересекающиеся с другими. Рассмотрим еще один пример. Нанесем на карту функцию

$$f = A + BC.$$

Первая конъюнкция состоит из одной буквы. Конечно, это не конъюнкция, но для общности и одиночную переменную, входящую в функцию, удобно называть конъюнкцией. Нанесем эту одиночную переменную на карту (рис. 49). Ей соответствует вся область A, состоящая из четырех клеток, следовательно, всю ее заполняем единицами.

Конъюнкция BC частью занимает новую клетку, а частью — уже занятую буквой A. Это значит, что седьмой минтерм нанесен на карту буквой A, поэтому вторично обозначать его нет необходимости.

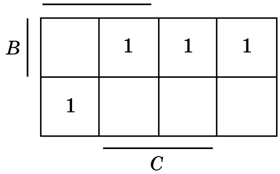


Рис. 47

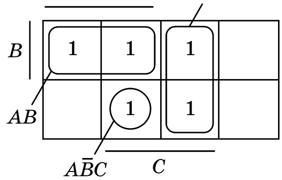


Рис. 48

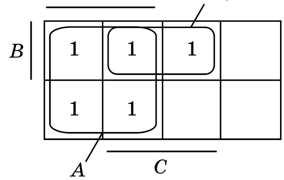


Рис. 49

Упражнения

1. Нанесите функцию на карту Вейча четырех аргументов, записывая в клетках не более чем по одной единице. Определите число клеток, занятых единицами:

1) (МЮ1). $f = AB + C\overline{D}$; 4) (284). $f = AB + C + \overline{D}$;
2) (ЖУ2). $f = A + \overline{B} + C$; 5) (XX5). $f = A + \overline{D}$;
3) (НХ3). $f = ABCD + \overline{A}\overline{D}$; 6) (УЮ6). $f = A + C$.

2. Сколько пустых клеток будет на карте Вейча четырех аргументов, если на нее нанести функцию:

1) (ОУФ). $f = AB$? 4) (ИИА). $f = A + \overline{B}C$?
2) (ЗВХ). $f = A + \overline{B} + \overline{C} + D$? 5) (2УО). $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D$?
3) (ЦОЦ). $f = A + \overline{B} + CD$? 6) (9Л0). $f = ABC + \overline{D}$?

3. (НШК)! Сколько клеток займет функция $f = A\overline{B}$, если ее нанести на карту трех аргументов? Четырех аргументов? Пяти аргументов? Шести аргументов?

4. (ЦРП)! Сколько клеток займет функция $f = A\overline{B} + C$, если ее нанести на карту трех аргументов? Четырех аргументов? Пяти аргументов? Шести аргументов?

5. (ПИБ). Некоторая функция на карте четырех аргументов занимает 7 единиц. Сколько единиц займет эта функция, если ее нанести на карту шести аргументов?

6.8. НАХОЖДЕНИЕ СДНФ ПРИ ПОМОЩИ КАРТ ВЕЙЧА

При помощи карты Вейча очень легко найти СДНФ функции, если она представлена в аналитической форме. Пусть дана функция

$$f = A + BC.$$

Чтобы найти ее СДНФ, воспользуемся картой Вейча (рис. 49). Если карту с нанесенной на нее функцией мысленно наложить на карту, где записаны номера минтермов (рис. 43), то единицы покажут номера минтермов, образующих данную функцию:

$$f = (3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7).$$

Рассмотрим еще один пример:

$$f = A\overline{B} + BC\overline{D} + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D.$$

Нанесем функцию на карту Вейча (рис. 50). Затем обратимся к рис. 45, где изображена карта Вейча с номерами минтермов четырех аргументов. Наложим эти карты одна на другую, тогда единицы покажут номера минтермов искомой СДНФ:

$$f = (1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 14).$$

В подразделе 6.4 сказано, что всякая булева функция заданного числа аргументов представима в виде суммы минтермов единственным образом.

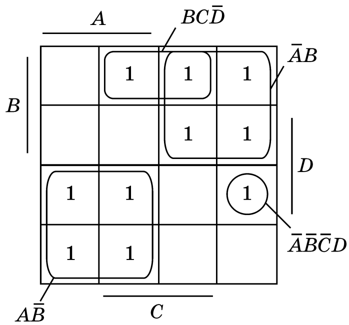


Рис. 50

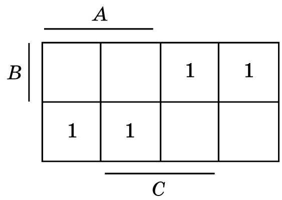


Рис. 51

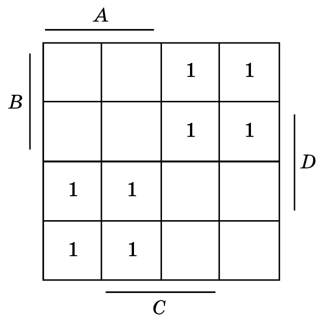


Рис. 52

Заметим, что здесь речь идет о функции заданного числа аргументов. Если этой оговорки нет, то, как отмечено в подразделе 6.5, представление функции в СДНФ неоднозначно. Пусть требуется представить в СДНФ функцию

$$f = \bar{A}B + A\bar{B}.$$

Можно считать, что она зависит от двух аргументов и ее СДНФ образуют два минтерма

$$f = m_1 + m_2 = (1, 2).$$

Но эту функцию можно нанести на карту трех аргументов (рис. 51). Тогда в ее СДНФ окажется четыре минтерма и функция примет вид $f = (2, 3, 4, 5)$.

Нанесем функцию на карту четырех аргументов (рис. 52). Тогда получим

$$f = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) \text{ и т. д.}$$

С помощью карт Вейча легко выявить равенство двух функций. Две функции являются тождественно равными, если они состоят из одних и тех же минтермов, т. е. если их СДНФ совпадают. Например, функции

$$f_1 = AB\bar{D} + \bar{A}BC + \bar{B}CD + A\bar{C}D;$$

$$f_2 = AB\bar{C} + BC\bar{D} + \bar{A}CD + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD$$

внешне не имеют ничего общего, но если их нанести на карту Вейча четырех аргументов, то окажется, что их СДНФ совпадают и, следовательно, $f_1 = f_2$.

Карты Вейча позволяют находить СДНФ инверсий функций, их дизъюнкции и конъюнкции. Чтобы найти СДНФ инверсии функции f, достаточно ее нанести на карту Вейча. Номера минтермов, которым соответствуют пустые клетки на карте, дадут искомую СДНФ инверсии функции f. Например, СДНФ функции $f = A\bar{B} + \bar{C}D$ имеет вид

$$f = (1, 5, 8, 9, 10, 11, 13).$$

Если же выписать все минтермы, соответствующие пустым клеткам, то получим искомую СДНФ инверсии:

$$\bar{f} = (0, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 15).$$

Чтобы найти СДНФ конъюнкции двух функций, достаточно нанести на карту обе функции независимо одна от другой. В некоторых клетках могут оказаться по две единицы. Это значит, что на соответствующих наборах обе функции принимают единичное значение. Выписав номера клеток с двумя единицами, мы получим СДНФ конъюнкции двух заданных функций.

Для нахождения СДНФ дизъюнкции двух и более функций каждую из них наносим на карту Вейча как одну функцию, т. е. в каждой клетке ставим не более чем по одной единице.

Упражнения

1. (ГШЦ). Функция $f = AB$ нанесена на карту восьми аргументов. Сколько минтермов содержит ее СДНФ?

2. Сколько минтермов содержит СДНФ функции, если ее нанести на карту шести аргументов:

1) (РШ1). $f = A + \bar{A}$;
2) (АЙ2). $f = B + AC$;
3) (ЕЧ3). $f = AB + AC + AD$;
4) (ПШ0). $f = A \cdot \bar{A}$;
5) (НВЧ). $f = A\bar{B} + ABC$;
6) (К37). $f = A + B + D$.

3. Сколько пустых клеток на карте шести аргументов, если на нее нанести функцию:

1) (ВИА). $f = A + B + C + D + E$;
2) (ШБЯ). $f = ABCDEF$;
3) (ЛБК). $f = X + Y + Z$;
4) (П50). $f = 1$;
5) (ТЛП). $f = 0$;
6) (ЛУТ). $f = A + B + \bar{C}$.

4. Сколько минтермов содержат функции пяти аргументов:

1) (НХП). $f = A + B + P + \bar{B}$;
2) (Н00). $f = P + Q + R + \bar{P}$;
3) (ОЙМ). $f = A \cdot \bar{A} + X \cdot \bar{X}$;
4) (ЫЫР). $f = AB + \bar{C}D$;
5) (ГЖТ). $f = ABCDE$;
6) (УУК). $f = PQ + RST$.

5. Найдите номера минтермов функций (номера упорядочить по возрастанию):

1) (ИТА). $f(A, B, C) = A\bar{B}$;
2) (ВЭО). $f(P, Q, R, S) = PQ + R\bar{S}$;
3) (ЛВР). $f(P, Q, R) = P + \bar{P}Q$;
4) (БАМ). $f(A, B, C, D) = ABC + \bar{A}CD$;
5) (ГАВ). $f(X, Y, Z) = X\bar{Y}Z + \bar{X}\bar{Z}$;
6) (ЕРК). $f(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

6. Найдите СДНФ функций четырех аргументов. Номера минтермов упорядочить по возрастанию:

1) (КН5). $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$;
2) (ЖИЗ). $f = ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$;
3) (ЛКД). $f = A \cdot \bar{A} + B \cdot \bar{B} + CD$;
4) (УЮ6). $f = CD + \bar{C}\bar{D} + AB\bar{A}$;
5) (34). $f = P + Q + R + \bar{Q}$;
6) (Д89). $f = \bar{A}$.

7. (АГЧ). Укажите номера наборов значений аргументов A, B, C, D, на которых обе функции

$$f_1 = A\bar{B} + C \text{ и } f_2 = AC + BD$$

принимают единичное значение.

8. (ЗА2). Укажите десятичные номера наборов, на которых равна единице конъюнкция следующих двух функций

$$f_1 = BC + AD; \;\; f_2 = AC + BD.$$

9. (203). Укажите номера наборов, на которых равна единице конъюнкция следующих функций:

$$f_1 = AB; \;\; f_2 = CD.$$

10. **(ЛД6).** Укажите номера функций, тождественно равных функции

$$f = \bar{A}C\bar{D} + AD + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{C}D:$$

1) $f = AD + \bar{C}D + \bar{A}B\bar{D} + \bar{A}C\bar{D}$;

2) $f = \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{D} + \bar{A}\bar{C}D + \bar{C}D + ACD$;

3) $f = \bar{A}C\bar{D} + AD + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{C}\bar{D}$;

4) $f = AD + \bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D + \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$;

5) $f = \bar{C}D + \bar{A}C\bar{D} + ACD + \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}$;

6) $f = \bar{A}C\bar{D} + AD + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{C}D + \bar{B}\bar{C}D + ABCD$.

11. **(258).** Укажите номера наборов, на которых $f_1 + f_2 = 1$, где

$$f_1 = ABC; \quad f_2 = BCD.$$

12. **(МКО).** Укажите номера наборов, на которых функция $\bar{f}$ равна единице, если

$$f(A, B, C, D) = A + \bar{B} + CD.$$

6.9. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УПРОЩЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ

В подразделе 5.7 уже упоминался термин «упрощение», но без раскрытия его содержания. Теперь уточним это понятие. Но, прежде всего, отметим, что функция и формула — это не одно и то же. Если функция задана, то все преобразования могут относиться только к представляющей ее формуле. Сама же функция при этом остается неизменной. В связи с этим здесь и в дальнейшем под **упрощением (минимизацией)** булевой функции будем понимать такие тождественные преобразования ее формулы, которые приводят к предельному уменьшению числа вхождений аргументов. В результате преобразований получается **минимальная форма**.

Выясним, что понимается под **числом вхождений аргументов**. Рассмотрим пример:

$$f = A\bar{B} + \bar{A}\bar{C}D.$$

Эта функция зависит от четырех аргументов A, B, C, D, но имеет пять вхождений аргументов. Функция

$$f = A + \bar{A}B + BC + AC \tag{31}$$

зависит от трех аргументов, но имеет семь вхождений аргументов. Таким образом, число вхождений аргументов — это общее число букв, образующих функцию.

Рассмотрим функцию (31). Нетрудно заметить, что ее можно упростить:

$$f = A + \bar{A}B + BC + AC = A(1 + C) + \bar{A}B + BC = A + \bar{A}B + BC.$$

Слагаемое A поглощает конъюнкцию AC, следовательно, сумму $A + AC$ можно заменить буквой A. Тогда число вхождений аргументов уменьшается до пяти.

Чтобы продолжить упрощение, необходимо проявить некоторую изобретательность. Запишем пока так:

$$f = A + \overline{A}B + BC = A\cdot 1 + \overline{A}B + BC = A(B+\overline{B}) + \overline{A}B + BC = AB + A\overline{B} + \overline{A}B + BC =$$
$$= AB + A\overline{B} + \overline{A}B + AB + BC.$$

Как получили это выражение? Аргумент A умножили на единицу и заменили ее дизъюнкцией $B+\overline{B}$. Затем раскрыли скобки и добавили конъюнкцию AB. В полученном выражении первая и вторая конъюнкции склеиваются, третья и четвертая — тоже:

$$f = A(B+\overline{B}) + B(\overline{A}+A) + BC = A + B + BC.$$

К сумме $B + BC$ применима теорема поглощения:

$$B + BC = B(1 + C) = B.$$

В результате получаем:

$$f = A + B + BC = A + B(1 + C) = A + B.$$

Далее упростить это выражение невозможно. Заметим, что функция (31), которую мы упростили, зависела от трех аргументов и имела семь вхождений букв, а получилась та же функция, но имеющая всего два аргумента. Это те аргументы, от которых функция действительно (существенно) зависит. Аргумент C является **фиктивным**. Функция от него зависит несущественно (т. е. вообще не зависит).

Таким образом, алгебраическая минимизация булевых функций сводится к применению теорем одного аргумента, а также теорем склеивания и поглощения.

Рассмотрим еще два примера.

Пример 1. Упростить функцию

$$f = AB\overline{C} + AC + BC + \overline{A}\overline{B}.$$

Сначала вынесем букву A за скобки и упростим скобочное выражение:

$$f = A(B\overline{C} + C) + BC + \overline{A}\,\overline{B} = A[B\overline{C} + C(B+\overline{B})] + BC + \overline{A}\,\overline{B} =$$
$$= A(B\overline{C} + BC + \overline{B}C + BC) + BC + \overline{A}\,\overline{B} =$$
$$= A[B(\overline{C}+C) + C(\overline{B}+B)] + BC + \overline{A}\,\overline{B} =$$
$$= A(B+C) + BC + \overline{A}\,\overline{B} = AB + AC + BC + \overline{A}\,\overline{B}.$$

Заметим, что выражение в скобках упрощено точно таким же образом, как в предыдущем примере.

Теперь вынесем за скобки букву C:

$$f = AB + C(A+B) + \overline{A}\,\overline{B}.$$

Выражение в скобках есть инверсия последней конъюнкции $\overline{A}\overline{B}$, т. е. $\overline{A+B} = \overline{A}\overline{B}$.

Введем обозначения:

$$Q = A + B,\ \ \overline{Q} = \overline{A+B} = \overline{A}\overline{B}.$$

С учетом этих обозначений заданное выражение примет вид

$$f = AB + CQ + \bar{Q} = AB + CQ + \bar{Q}(C + \bar{C}) = AB + CQ + C\bar{Q} + \bar{C}\bar{Q}.$$

Добавим к нему еще одну конъюнкцию $C\bar{Q}$ (равенство не нарушится):

$$f = AB + CQ + C\bar{Q} + \bar{C}\bar{Q} + C\bar{Q} = AB + C(Q + \bar{Q}) + \bar{Q}(C + \bar{C}) = AB + C + \bar{Q}.$$

Подставим вместо $\bar{Q}$ его значение:

$$f = AB + C + \bar{A}\bar{B}.$$

Это и есть минимальная форма заданной функции.

Пример 2. Упростить

$$f = A\bar{C} + BC + \bar{A}B.$$

Действуем следующим образом:

$$\begin{aligned} f &= A\bar{C} + BC(A + \bar{A}) + \bar{A}B = A\bar{C} + ABC + \bar{A}BC + \bar{A}B = A\bar{C} + ABC + \bar{A}B(C + 1) = \\ &= A\bar{C} + ABC + \bar{A}B = A(\bar{C} + BC) + \bar{A}B = A[\bar{C}(B + \bar{B}) + BC] + \bar{A}B = \\ &= A(B\bar{C} + \bar{B}\bar{C} + BC + B\bar{C}) + \bar{A}B = A[\bar{C}(B + \bar{B}) + B(C + \bar{C})] + \bar{A}B = \\ &= A(\bar{C} + B) + \bar{A}B = A\bar{C} + AB + \bar{A}B = A\bar{C} + B(A + \bar{A}) = A\bar{C} + B. \end{aligned}$$

Упражнения

1. Определите число аргументов, от которых зависит функция, и число вхождений аргументов (функцию не преобразовывать):

1) (ПХ1). $f = A + BC$;

2) (ХД2). $f = A + A + A + \bar{A}$;

3) (ЕЧ3). $f = AB + A\bar{B} + A\bar{B} + A\bar{B}$;

4) (ЭУЧ). $f = \overline{A + B} + C + \bar{C} + C$;

5) (985). $f = A + \bar{A}B + \bar{B}C$;

6) (ОХ6). $f = A \cdot \bar{A} \cdot A \cdot \bar{A}$;

7) (ПВ7). $f = A + B + AB + AB$;

8) (УХ8). $f = \overline{\bar{A} \cdot A} \cdot \overline{A \cdot \bar{A}}$.

2. Найдите минимальную форму функций:

1) (ЕЧ1). $f = A\bar{C} + B + \bar{A}\bar{C}$;

2) (М09). $f = Y + X\bar{Z} + \bar{X}\bar{Z}$;

3) (ПК2). $f = P + \bar{P}Q$;

4) (Я00). $f = Q + P\bar{Q}$;

5) (П03). $f = P\bar{Q} + PQ + P\bar{Q}\bar{R}$;

6) (ЭЭ1). $f = (PQ + \bar{P}Q\bar{R})P$;

7) (УФЧ). $f = A + \bar{A}B + \bar{B}C$;

8) (ЕЛ2). $f = \bar{A} + AB + \bar{B}C$;

9) (ГЧ5). $f = A + \bar{A}\bar{B} + BC$;

10) (ТВ3). $f = X + \bar{X}Y + \bar{X}Z$;

11) (КК6). $f = P + \bar{P}Q + \bar{Q}R + \bar{R}S$;

12) (ДЧЧ). $f = (\bar{A}B + B\bar{C} + \bar{A}C)AB$;

13) (ВВ7). $f = (R + S)(\bar{R} + \bar{S})R\bar{S}T$;

14) (Л55). $f = (XY\bar{Z} + \bar{X}YZ)(X + \bar{Y})$;

15) (ИШ8). $f = (A + B + C)(\bar{A} + \bar{B})\bar{B}C$;

16) (ШР6). $f = (A + B + C)\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{P}Q$.

6.10. ПОНЯТИЕ ИМПЛИКАНТЫ

Всякую функцию φ будем называть **импликантой** функции f, если все минтермы функции φ входят в множество минтермов функции f [6].

Например, функция $f(A,B,C) = AB + BC$ в СДНФ содержит три минтерма: $f = (3, 6, 7)$. Из них можно образовать семь импликант:

$$\varphi_1 = m_3 = \bar{A}BC;$$
$$\varphi_2 = m_6 = AB\bar{C};$$
$$\varphi_3 = m_3 + m_6 = \bar{A}BC + AB\bar{C};$$
$$\varphi_4 = m_7 = ABC;$$
$$\varphi_5 = m_6 + m_7 = AB;$$
$$\varphi_6 = m_3 + m_7 = BC;$$
$$\varphi_7 = m_3 + m_6 + m_7 = AB + BC.$$

Известно, что кроме функций, содержащих непустое множество минтермов, существует функция $\varphi = 0$, у которой минтермов нет. С учетом этой импликанты вышеприведенная функция имеет не семь, а восемь импликант.

В общем случае, если функция содержит n минтермов, то число ее импликант равно 2^n.

Если функция представлена в СДНФ, то число ее импликант определяется однозначно. Иное дело, если функция задана аналитически. Например, сколько импликант имеет функция $f = A$? Если она зависит только от одного аргумента A, то всего возможно две импликанты: $f = 0$ и $f = A$. Если же функция $f = A$ является результатом минимизации, например, выражения $AB + A\bar{B}$, то имеем два минтерма — $m_2 = A\bar{B}$ и $m_3 = AB$ и четыре импликанты:

$$\varphi_0 = 0;$$
$$\varphi_1 = AB;$$
$$\varphi_2 = A\bar{B};$$
$$\varphi_3 = AB + A\bar{B} = A.$$

Таким образом, чтобы по аналитической записи функции определить число ее импликант, необходимо знать число аргументов, от которых зависит функция.

Упражнения

1. Определите число импликант функций:

1) (825). $f(A, B, C, D) = AC$;
2) (982). $f = (10, 11, 12, 14, 15)$;
3) (МТ7). $f(A, B, C, D) = A + B$;
4) (В54). $f = (1, 2, \ldots, 8)$;
5) (УУФ). $f = (0, 1, 2, 3)$;
6) (176). $f(A, B, C, D) = 1$;
7) (323). $f = 0$;
8) (258). $f(A) = \bar{A}$.

2. Сколько минтермов входит в функцию, если число ее импликант равно:

1) (КВА). 512;
2) (НЛО). 128;
3) (МАУ). 16;
4) (ХХЭ). 1024;
5) (КШИ). 1;
6) (ОДЕ). 256.

3. Сколько существует импликант, содержащих точно два минтерма:

1) (858). $f = (1, 3, 5, 7)$;
2) (НВК). $f(A, B, C, D) = B$;
3) (ХМП). $f = (4, 9, 15, 20, 21, 30)$;
4) (ФИЛ). $f(A,B,C) = A + B + \bar{C}$;
5) (НАС). $f = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15)$;
6) (ББФ). $f(A,B,C,D) = \bar{A} + B$?

6.11. МЕТОД КВАЙНА

В подразделе 6.9 мы убедились, что алгебраическая минимизация требует очень большой изобретательности и с практической точки зрения интереса не представляет, за исключением простейших случаев. Многими специалистами предпринимались попытки разработать методы (алгоритмы), позволяющие найти минимальную форму и не требующие никакой изобретательности. Одним из них является **метод Квайна**. Проиллюстрируем его на примере функции четырех аргументов вида:

$$f = (0, 1, 3, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15).$$

Запишем минтермы в алгебраической форме:

$$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}BCD +$$
$$+ A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABC\bar{D} + ABCD.$$

Суть метода Квайна весьма проста. Основу его составляет теорема склеивания, которая применяется к каждой паре минтермов заданной функции. Чтобы не пропустить ни одной пары, начнем с нулевого минтерма и поочередно сравним его со всеми остальными. Если сравниваемые минтермы отличаются инверсией только одного аргумента, то эти минтермы отмечаем, например, подчеркиваем, а их общую часть запишем отдельно. В данном случае минтермы m_0 и m_1, а также m_0 и m_8 дают соответственно:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D = \bar{A}\bar{B}\bar{C};$$
$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} = \bar{B}\bar{C}\bar{D}.$$

Минтермы m_0, m_1 и m_8 подчеркиваем, при этом ранее подчеркнутый минтерм вторично можно не подчеркивать.

Берем минтерм m_1. Сравниваем его со всеми, кроме нулевого, в том числе и с подчеркнутыми. Получаем:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD = \bar{A}\bar{B}D.$$

Минтерм m_3 подчеркиваем. Аналогично сравниваем все остальные минтермы независимо от того, подчеркнуты они или нет, после чего заданная функция представится в виде дизъюнкции конъюнкций, полученных в результате склеивания минтермов.

На этом заканчивается первый этап минимизации по методу Квайна. Получилось выражение, все конъюнкции которого содержат не менее трех аргументов:

$$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D + \bar{A}CD + BC\bar{D} + \bar{A}BC +$$
$$+ BCD + A\bar{C}\bar{D} + AB\bar{D} + AB\bar{C} + ABD + ABC.$$

Переходим ко второму этапу. Конъюнкции полученного выражения точно так же сравниваем. Начинаем с левой конъюнкции $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Она не склеивается ни с одной конъюнкцией выражения. Поэтому ее не подчеркиваем и переходим к конъюнкции $\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. Она также не склеивается ни с одной конъюнкцией. То же самое относится и к конъюнкциям $\bar{A}\bar{B}D$ и $\bar{A}CD$. Все их не подчеркиваем и сравниваем конъюнкцию $BC\bar{D}$:

$$BC\bar{D} + BCD = BC.$$

Конъюнкции $BC\bar{D}$ и BCD подчеркиваем и переходим к конъюнкции $\bar{A}BC$:

$$\bar{A}BC + ABC = BC.$$

Получилась та же самая конъюнкция. Поскольку она является повторной, то вторично ее не записываем. Выполнив все операции сравнения, получим две неповторяющиеся конъюнкции BC и AB. Дизъюнкция этих двух и всех неподчеркнутых конъюнкций образует выражение, являющееся результатом действий второго этапа:

$$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D + \bar{A}CD + BC + AB + A\bar{C}\bar{D}.$$

Получили выражение, в котором нет ни одной пары склеивающихся конъюнкций. На этом метод Квайна заканчивается.

Выражение, полученное методом Квайна, называется **сокращенной дизъюнктивной нормальной формой** заданной функции, а каждая его конъюнкция называется **простой импликантой**. Для всякой булевой функции существует единственная сокращенная ДНФ и единственная сокращенная КНФ.

Упражнения

1. Запишите функцию в СДНФ:

$$f = AB\bar{D} + A\bar{B}D + ABC + \bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}.$$

1) (РКА). Для ее СДНФ определите количество минтермов и число вхождений аргументов.

2) (ЦУБ)! Выполните операции первого этапа метода Квайна, т. е. сравните все минтермы между собой. Найдите число минтермов, оставшихся неподчеркнутыми, и количество неповторяющихся конъюнкций, содержащих по три аргумента.

3) (ФЫВ)! Выполните операции второго этапа метода Квайна. Определите число неподчеркнутых конъюнкций трех аргументов и число конъюнкций, содержащих по два аргумента.

4) (ЛЫГ)! Найдите число простых импликант и число вхождений аргументов сокращенной формы функции.

2. Определите число простых импликант и число вхождений аргументов сокращенных форм функций:

1) (ЕЖД)! $f = AB + AC + \bar{A}\bar{C} + BC$;
2) (ЕОЕ)! $f = (0, 3, 4, 5, 6, 7)$;
3) (ЭИЖ)! $f = (0, 1, 3, 4, 5, 7)$ (три аргумента);
4) (АРО)! $f = (1, 2, 3, 4, 7)$;
5) (ЖДИ)! $f = (2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15)$;
6) (ЕКК)! $f = (1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$.

6.12. НАХОЖДЕНИЕ ПРОСТЫХ ИМПЛИКАНТ ПО КАРТЕ ВЕЙЧА

Если число аргументов функции не превышает 4, то простые импликанты можно найти по карте Вейча с гораздо меньшими затратами труда и времени, чем по методу Квайна. Для этого достаточно научиться находить на карте простые импликанты:

а) соседние минтермы всегда склеиваются. Например, на рис. 53 склеиваются минтермы 11 и 15, 3 и 11 (обведены); склеиваются также минтермы, расположенные на концах строки или колонки: 4 и 12, 8 и 12;

б) четыре единицы на карте объединяются и образуют одну конъюнкцию, если они расположены в строку или столбец, а также квадратом. На рис. 54 слева единицы дают конъюнкцию $A\overline{C}$, остальные — $\overline{A}C$. На рис. 55 единицы, расположенные в строку, образуют конъюнкцию $B\overline{D}$, в колонку — AC. На рис. 56 единицы расположены квадратами: AB и $\overline{A}\,\overline{B}$. На рис. 57 единицы также образуют квадрат $B\overline{C}$, в чем можно убедиться, если карту свернуть в трубку так, чтобы ее левая и правая стороны совпали. Аналогично на рис. 58 единицы дают квадрат $\overline{A}\,\overline{D}$, если карту свернуть в цилиндр вокруг горизонтальной оси. Размещение четырех единиц по углам карты образует конъюнкцию $\overline{C}\,\overline{D}$ (рис. 59);

в) восемь единиц на карте объединяются, если все они расположены в области, относящейся к какой-либо букве или ее инверсии. На рис. 60 восемь единиц объединяются, так как занимают всю область буквы C, поэтому дизъюнкцию соответствующих восьми минтермов можно заменить буквой C. На рис. 61 единицами занята вся область буквы $\overline{D}$, на рис. 62 — $\overline{A}$.

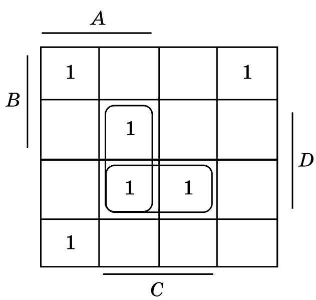


Рис. 53

1		1	
1		1	
1		1	
1		1	

Рис. 54

1	1	1	1
	1		
	1		
	1		

Рис. 55

1	1		
1	1		
		1	1
		1	1

Рис. 56

1			1
1			1

Рис. 57

		1	1
		1	1

Рис. 58

1			1
1			1

Рис. 59

	1	1	
	1	1	
	1	1	
	1	1	

Рис. 60

1	1	1	1
1	1	1	1

Рис. 61

		1	1
		1	1
		1	1
		1	1

Рис. 62

	A	A			
B	1	1	1		
B	1	1	1		D
			1	1	D
	1			1	
		C	C		

Рис. 63

Теперь можно переходить к отысканию простых импликант. Пусть задана функция:

$$f = (0, 1, 3, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15).$$

Нанесем ее на карту Вейча (рис. 63). Начнем упрощение с нулевого минтерма. Он объединяется с минтермом m_1, поскольку единицы являются соседними. Получим первую простую импликанту $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Минтерм m_0 является соседним и по отношению к минтерму m_8, что дает простую импликанту $\bar{B}\bar{C}\bar{D}$.

Минтерм m_1 объединяется и с минтермом m_0, и с m_3. Получаем две простые импликанты $\bar{A}\bar{B}D$ и $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Импликанту $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ вторично не записываем. Новой является только простая импликанта $\bar{A}\bar{B}D$.

Переходим к минтерму m_3. У него также два варианта склеивания — с минтермами m_1 и m_7. Новой является импликанта $\bar{A}CD$.

Минтерм m_6 входит в группу единиц, расположенных квадратом. Поэтому простой импликантой будет конъюнкция BC, но импликанты $BC\bar{D}$ и $\bar{A}BC$ не являются простыми.

Седьмой минтерм имеет три соседние единицы. Однако новых простых импликант он не дает, поскольку объединение его с минтермом m_3 есть простая импликанта $\bar{A}CD$, которая уже была записана ранее, а импликанты $\bar{A}BC$ и BCD не являются простыми, так как минтерм m_7 входит в квадрат единиц, представленный простой импликантой BC.

Минтерм m_{12} входит в квадрат единиц, дающих конъюнкцию AB. Это новая простая импликанта. Кроме того, минтерм m_{12} является соседним по отношению к минтерму m_8, что дает новую простую импликанту $A\bar{C}\bar{D}$. Минтерм m_{13} новых импликант не дает. Минтерм m_{14} входит в два квадрата: AB и BC. Новых импликант нет. То же самое относится к минтерму m_{15}.

Таким образом, найдены все простые импликанты, дизъюнкция которых образует сокращенную дизъюнктивную нормальную форму:

$$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D + \bar{A}CD + BC + A\bar{C}\bar{D} + AB,$$

что находится в полном соответствии с методом Квайна.

Упражнения

1. Найдите число простых импликант и число вхождений аргументов сокращенных форм функций.

1) (ЦОО)! $f = (3, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$;
2) (ЫЫП)! $f = (0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11)$;
3) (ЦВР)! $f = (0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 14, 15)$;
4) (ПХС)! $f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 14, 15)$;
5) (ИЛТ)! $f = (1, 3, 7, 9, 11, 12, 13, 15)$;
6) (ЕТУ)! $f = (3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14)$;
7) (СПХ)! $f = (0, 2, 10, 12, 14)$;
8) (ВВК)! $f = (1, 3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 15)$.

2. (ЕЙМ). Дано шесть конъюнкций:

1) AB; 2) BD; 3) AC; 4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; 5) AD; 6) $A\bar{B}C$.

Укажите номера тех конъюнкций, которые являются простыми импликантами функции

$$f = (0, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$

3. Найдите сокращенную форму функции $f = (0, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 15)$.

(414)! Найдите число вхождений неинверсных аргументов и число вхождений инверсных аргументов.

4. Найдите сокращенную форму функции $f = (1, 3, 5, 12, 15)$.

(909)! Определите число простых импликант, число вхождений неинверсных и инверсных аргументов.

5. **(ЖУ1).** Даны две простые импликанты AB и C. Сколько минтермов содержит дизъюнкция этих простых импликант на карте четырех переменных?

6.13. МЕТОД ПЕТРИКА

В подразделе 6.11 сказано, что метод Квайна на этапе нахождения сокращенной формы заканчивается. Однако сокращенная форма функции очень часто не является минимальной. В вопросах нахождения минимальных форм порядок навел Петрик, разработав свой метод нахождения всех возможных минимальных форм на основе сокращенных [13, с. 273].

Метод Петрика поясним на примере следующей функции, представленной в сокращенной форме:

$$f = \bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{D} + \bar{A}B + B\bar{D} + BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}D + ACD, \tag{32}$$

СДНФ которой имеет вид

$$f = (0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15). \qquad (33)$$

Что значит — сокращенная форма не является минимальной? Это значит, что она содержит лишние простые импликанты. Если их удалить, то функция не изменится. Например, если из выражения (32) удалить простую импликанту $A\bar{B}\bar{C}$, то функция останется той же самой. Чтобы убедиться в этом, достаточно нанести функцию на карту Вейча (рис. 64), из которой видно, что СДНФ функции не изменилась. Однако если удалить импликанту $\bar{A}\bar{D}$, то функция изменится (рис. 65), так как на наборе 0010 функция примет нулевое значение, в то время как она должна принимать единичное значение.

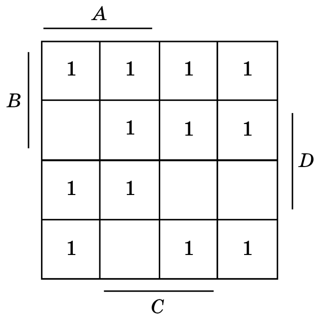


Рис. 64

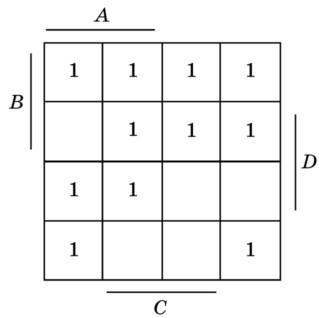


Рис. 65

Таким путем можно проверить каждую простую импликанту, т. е. поочередно удаляя их и всякий раз выясняя, изменится функция или нет. Все оставшиеся неизменными выражения можно снова проверить тем же путем и т. д. В результате будут получены все варианты **тупиковых форм**, т. е. таких выражений, из которых уже ни одной простой импликанты удалить не удается. Подобный метод хотя и возможен, но с практической точки зрения непригоден, так как очень громоздок. Метод Петрика позволяет найти все тупиковые формы гораздо более коротким путем. Основу его составляет так

Таблица 6

	0	2	4	5	6	7	8	9	11	12	14	15
$\bar{C}\bar{D}$	1		1				1			1		
$\bar{A}\bar{D}$	1	1	1		1							
$\bar{A}B$			1	1	1	1						
$B\bar{D}$			1		1					1	1	
BC					1	1					1	1
$A\bar{B}\bar{C}$							1	1				
$A\bar{B}D$								1	1			
ACD									1			1
	✓	✓	✓	✓	✓	✓						

называемая импликантная матрица (табл. 6), в которой строки озаглавлены простыми импликантами, а колонки — минтермами.

Основное поле заполняем единицами по очень простому правилу: берем какую-либо строку и выясняем, из каких минтермов состоит ее простая импликанта. Эти минтермы и отмечаем единицами. В первой строке записана простая импликанта $\bar{C}\bar{D}$. Она получена путем объединения минтермов 0, 4, 8, 12. В колонках 0, 4, 8, 12 ставим единицы.

Переходим ко второй строке. В ней записана простая импликанта $\bar{A}\bar{D}$. Она получается путем объединения минтермов 0, 2, 4, 6. В колонках с номерами 0, 2, 4, 6 ставим единицы и так далее до последней простой импликанты в конце таблицы.

В колонках находится различное число единиц. Например, в колонке 2 записана одна единица, это значит, что минтерм m_2 останется в функции, если импликанта $\bar{A}\bar{D}$ не будет удалена. Следовательно, импликанту $\bar{A}\bar{D}$ удалять нельзя. Точно так же нельзя удалять и импликанту $\bar{A}B$. На этом основании импликантную матрицу можно упростить.

Поскольку простые импликанты $\bar{A}B$ и $\bar{A}\bar{D}$ являются обязательными для всех вариантов тупиковых форм, то их из матрицы можно удалить. Вместе с ними можно удалить и образующие их минтермы, так как в функции они уже содержатся за счет импликант $\bar{A}B$ и $\bar{A}\bar{D}$. В табл. 6 эти минтермы отмечены птичками (под колонками).

После всех удалений получим упрощенную матрицу (табл. 7).

Таблица 7

		8	9	11	12	14	15
φ_1	$\bar{C}\bar{D}$	1			1		
φ_2	$B\bar{D}$				1	1	
φ_3	BC					1	1
φ_4	$A\bar{B}\bar{C}$	1	1				
φ_5	$A\bar{B}D$		1	1			
φ_6	ACD			1			1

Введем логические переменные φ_1, φ_2, ..., φ_6 (они записаны в дополнительной колонке в левой части табл. 7). Будем считать, что $\varphi_1 = 1$, если простая импликанта $\bar{C}\bar{D}$ входит в функцию, и $\varphi_1 = 0$, если не входит. Аналогично $\varphi_2 = 1$, если простая импликанта $B\bar{D}$ входит в функцию, и $\varphi_2 = 0$ в противоположном случае и т. д. Тогда если

$$\varphi_1 + \varphi_4 = 1,$$

то минтерм m_8 входит в функцию; если $\varphi_4 + \varphi_5 = 1$, то m_9 входит в функцию и т. д.

Условие, при котором все минтермы останутся в функции, запишется в виде

$$(\varphi_1 + \varphi_4)(\varphi_4 + \varphi_5)(\varphi_5 + \varphi_6)(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_2 + \varphi_3)(\varphi_3 + \varphi_6) = 1.$$

Раскроем скобки и выполним все операции согласно теореме поглощения. Для первых двух скобок имеем

$$(\varphi_1 + \varphi_4)(\varphi_4 + \varphi_5) = \varphi_1\varphi_4 + \varphi_1\varphi_5 + \varphi_4 + \varphi_4\varphi_5 = \varphi_4 + \varphi_1\varphi_5.$$

Третья и последняя скобки дают

$$(\varphi_5 + \varphi_6)(\varphi_3 + \varphi_6) = \varphi_6 + \varphi_3\varphi_5.$$

Четвертая и пятая скобки аналогично:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_2 + \varphi_3) = \varphi_2 + \varphi_1\varphi_3.$$

Тогда исходное уравнение представится в виде

$$(\varphi_4 + \varphi_1\varphi_5)(\varphi_6 + \varphi_3\varphi_5)(\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3) = 1.$$

Закончив операции по раскрытию скобок, получим

$$\varphi_2\varphi_4\varphi_6 + \varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 + \varphi_1\varphi_2\varphi_5\varphi_6 + \varphi_1\varphi_3\varphi_4\varphi_6 + \varphi_1\varphi_3\varphi_5 = 1.$$

Таким образом, мы нашли ответ на поставленную задачу, правда, пока этот ответ представлен в зашифрованном виде. Расшифруем его. Каждая конъюнкция в полученном уравнении может быть равной единице. Если $\varphi_2\varphi_4\varphi_6 = 1$, то это значит, что в функцию должны войти простые импликанты $B\overline{D}$, $A\overline{B}\overline{C}$, ACD. Следовательно, получили первый вариант тупиковой формы:

$$f_1 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + B\overline{D} + A\overline{B}\overline{C} + ACD,$$

содержащей 12 вхождений аргументов.

Если $\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 = 1$, то в функцию должны войти простые импликанты $B\overline{D}$, BC, $A\overline{B}\overline{C}$, $A\overline{B}D$. Получим вторую тупиковую форму:

$$f_2 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + B\overline{D} + BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}D.$$

Аналогично находим еще три тупиковые формы:

$$f_3 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + \overline{C}\,\overline{D} + B\overline{D} + A\overline{B}D + ACD;$$

$$f_4 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + \overline{C}\,\overline{D} + BC + A\overline{B}\overline{C} + ACD;$$

$$f_5 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + \overline{C}\,\overline{D} + BC + A\overline{B}D.$$

Таким образом, функция (32) имеет пять тупиковых дизъюнктивных нормальных форм, среди которых одна минимальная. В ней 11 вхождений аргументов.

Упражнения

Найдите все тупиковые формы функции. В устройство введите число тупиковых форм и число вхождений аргументов минимальной формы:

1) (ФЯВ). $f = (3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14)$;
2) (ППС). $f = (1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13)$;
3) (ЕС0). $f = (2, 3, 9, 10, 11, 12, 13)$;
4) (НТН). $f = (2, 4, 6, 8, 9, 10, 13, 14)$.

6.14. МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ ПРИ ПОМОЩИ КАРТ ВЕЙЧА

Минимизация при помощи карт Вейча сводится к нахождению наименьшего числа простых импликант, но не всех возможных, а только тех, которые все вместе объединяют все единицы на карте. Начинать минимизацию следует с единиц, входящих в единственную простую импликанту. Обратимся к карте, изображенной на рис. 66.

На ней имеются только три единицы, с которых необходимо начать упрощение функции. Это минтерм m_2, входящий в единственную простую импликанту $\bar{B}C$, затем минтерм m_5, входящий в единственную простую импликанту $\bar{A}BD$, и минтерм m_{14}, входящий в простую импликанту AC. Начинать минимизацию с других единиц не следует, так как каждая из них входит более чем в одну простую импликанту, вследствие чего можно выбрать «не ту» импликанту и тогда минимальная форма не будет найдена.

Например, минтерм m_{11} входит в простые импликанты AC, CD, $\bar{B}C$. Если будет выбрана импликанта CD, то минимальную форму найти не удастся, поскольку в минимальной форме

$$f = \bar{B}C + \bar{A}BD + AC$$

импликанты CD нет. Заметим, что в данном случае функция содержит только одну минимальную форму.

Рассмотрим еще один пример (рис. 67). Здесь имеются только два минтерма, входящих в единственные простые импликанты. Это минтермы m_3 и m_{10}. Соответствующие им простые импликанты обведены. На карте остались три единицы. Объединить их можно различными вариантами:

$$f = A\bar{D} + \bar{A}D + \begin{cases} AB + A\bar{C}; \\ AB + \bar{C}D; \\ BD + A\bar{C}; \\ BD + \bar{C}D. \end{cases}$$

Таким образом, данная функция имеет 4 минимальные формы, каждая из которых содержит 8 вхождений переменных.

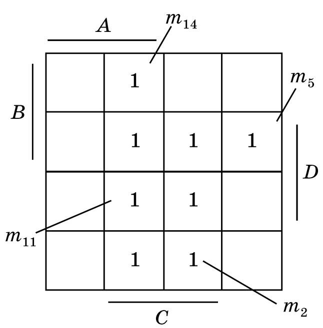


Рис. 66

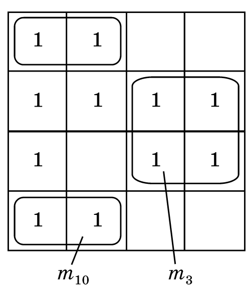
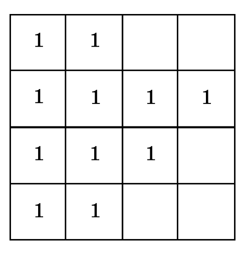


Рис. 67



$f = A + BD + CD$

Рис. 68

1	1	1	
1	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	

$f = AB + C + D$

Рис. 69

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

$f = \overline{B} + D$

Рис. 70

1		1	1
1		1	1
1		1	1
1		1	1

$f = \overline{A} + \overline{C}$

Рис. 71

	1	1	
1	1	1	
1	1		
	1	1	

$f = C\overline{D} + AD + BC$

Рис. 72

	1	1	
		1	1
		1	1
	1	1	

$f = C\overline{D} + \overline{A}D$

Рис. 73

1	1		
	1	1	
1	1		
	1	1	

$f = AB\overline{D} + BCD + A\overline{B}D + \overline{B}C\overline{D}$

Рис. 74

1	1		1
	1		
1			1

$f = \overline{C}\overline{D} + ABC$

Рис. 75

1			1
1		1	1
1	1	1	1
1			1

$f = \overline{C} + \overline{B}D + \overline{A}D$

Рис. 76

			1
1	1	1	1
			1
	1		1

$f = BD + \overline{A}\overline{C} + A\overline{B}C\overline{D}$

Рис. 77

1	1	1	1
	1		
1	1	1	1

$f = \overline{D} + A\overline{B}C$

Рис. 78

	1		
1			
		1	1

$f = \overline{A}\overline{B}D + ABC\overline{D} + AB\overline{C}D$

Рис. 79

1	1	1	

$f = A\overline{B}D + \overline{B}CD$

Рис. 80

1		1	
1	1	1	1
1		1	
1	1	1	1

$f = A\overline{C} + \overline{A}C + BD + \overline{B}\overline{D}$

Рис. 81

	1	1	
1	1	1	1

$f = \overline{B}D + BC\overline{D}$

Рис. 82

На рис. 68–82 даны еще 15 примеров. Буквы вокруг карты записывать не будем, полагая, что система их расположения такая же, как на рис. 65.

Упражнения

Минимизируйте функции. Найдите число их простых импликант и число вхождений аргументов:

1) (985). $f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15)$;
2) (ВЛО). $f = (0, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14)$;
3) (905). $f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15)$;
4) (ПС9). $f = (0, 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$;
5) (ГПЗ). $f = (4, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15)$;
6) (ПДЛ). $f = (0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13)$;
7) (МТМ). $f = (6, 8, 9, 10, 15)$;
8) (СКК). $f = (2, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 15)$;
9) (365). $f = (0, 1, 3, 7, 9, 10, 11, 13)$;
10) (343). $f = (0, 1, 2, 4, 5, 6, 9, 13)$;
11) (ЕИК). $f = (3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$;
12) (СЛЮ). $f = (0, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 14)$.
13) (ЕД2). $f = (2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 13)$;
14) (432). $f = (0, 1, 7, 10, 13, 14)$;
15) (38Ф). $f = (1, 2, 3, 6, 9, 11, 12, 14)$;
16) (32М). $f = (2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 13)$;
17) (ФУ1). $f = (0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 15)$;
18) (ЭМИ). $f = (0, 2, 3, 4, 6, 7, 13, 15)$;
19) (ЦК5). $f = (0, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14)$;
20) (926). $f = (0, 1, 4, 5, 10, 11, 13, 15)$;
21) (ПВЛ). $f = (1, 3, 5, 13)$;
22) (ФОД). $f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 13)$.

7 КОНЪЮНКТИВНЫЕ ФОРМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. ОСНОВНОЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ КНФ

Всякая булева функция может быть представлена не только в ДНФ, но и в КНФ. Например:

$$AB + BC = B(A + C).$$

Слева записано выражение в ДНФ. Если аргумент B вынести за скобки, то получим КНФ (выражение справа). Такой простой способ нахождения КНФ, основанный на вынесении букв за скобки, применим лишь в отдельных случаях для некоторых функций. В подавляющем же большинстве случаев он бесполезен. Например, в выражении $AB+\bar{B}CD$ вообще нет букв, которые можно было бы вынести за скобки, а по ее КНФ не видно никакой связи с ДНФ:

$$AB+\bar{B}CD=(B+C)(B+D)(A+\bar{B}).$$

Конъюнктивная форма, как и дизъюнктивная, может быть совершенной, сокращенной, тупиковой и минимальной. В [42] описан универсальный прием, позволяющий на основе ДНФ найти любую КНФ. Суть его состоит в двойном инвертировании заданной функции. Первое инвертирование осуществляется на уровне минтермов, в результате чего получается инверсия исходного выражения, состоящая из минтермов, отсутствующих в заданной функции. Инверсная СДНФ затем подвергается тем или иным преобразованиям и результат инвертируется по теореме де Моргана.

7.2. МАКСТЕРМЫ

Изучение конъюнктивных форм начнем с понятия макстерма (максимального терма). **Макстерм** (его называют также конституентой нуля) — это булева функция, которая, в отличие от минтерма, принимает единичное значение на всех наборах, за исключением одного. На этом единственном наборе макстерм принимает нулевое значение. В таблице соответствия для таких функций колонка f содержит точно один нуль и $2^n - 1$ единиц, где n — число аргументов, от которых зависит макстерм.

Макстермы условимся обозначать большой буквой M с десятичными индексами по аналогии с обозначением минтермов. Нетрудно заметить, что макстерм — это инверсия минтерма, и наоборот: минтерм — это инверсия макстерма (но с несовпадающими индексами). Воспользуемся этим обстоятельством и найдем аналитическое выражение макстерма.

Таблица 8

№	A	B	C	f	$\bar{f}$
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	0

Пусть функция зависит от аргументов A, B, C, и пусть в таблице соответствия в строке 5 колонки f записан нуль, а во всех остальных строках — единицы (табл. 8). Добавим справа еще одну колонку и запишем в нее ту же функцию f, но в инверсной форме. Тогда $\bar{f} = m_5 = A\bar{B}C$, откуда получаем

$$\bar{\bar{f}} = f = \bar{m}_5 = \overline{A\bar{B}C} = \bar{A} + B + \bar{C}.$$

Индекс макстерма определяется точно так же, как и в случае минтерма.

Макстерм имеет свое определение: макстермом n переменных называется такая дизъюнкция их, в которую каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме. Очевидно, что число различных макстермов такое же, как и число минтермов, т. е. 2^n, где n — число переменных макстерма.

Между индексами минтермов и макстермов имеется вполне определенная связь:

$$m_i = \bar{M}_{2^n - i - 1}; \quad M_i = \bar{m}_{2^n - i - 1},$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$.

Макстермы обладают свойством: дизъюнкция любых двух различных макстермов, зависящих от одних и тех же аргументов, равна единице. Это следует из того, что если два макстерма отличаются друг от друга только инверсиями, то всегда найдется аргумент, который в один макстерм входит в прямой форме, а во второй — в инверсной. Дизъюнкция таких переменных равна единице. Например, пусть дано $M_4 + M_5$, тогда

$$(A + \bar{B} + \bar{C}) + (A + \bar{B} + C) = A + A + \bar{B} + \bar{B} + \bar{C} + C = 1,$$

поскольку согласно теореме (17) $\bar{C} + C = 1$.

Упражнения

1. (ИРА). Запишите набор, на котором макстерм $A + B + \bar{C} + \bar{D}$ принимает нулевое значение.

2. Запишите двоичные индексы макстермов:

1) (0ТБ). $A + \bar{B} + \bar{C} + D + E$;

2) (ВАВ). $\bar{A} + \bar{C} + E + F + K$;

3) (УВЕ). $A_1 + A_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4$;

4) (КЛГ). $P + \bar{Q} + R$.

3. Запишите десятичные индексы макстермов:

1) (МОЗ). $A+\overline{B}+C+D$; 4) (С5И). $P+\overline{Q}$;

2) (ДЖЛ). $R+S+\overline{T}+\overline{K}$; 5) (ШБК). $\alpha+\overline{\beta}+\overline{\gamma}$;

3) (ОММ). $P+Q+\overline{R}+S$; 6) (МЦН). $A+\overline{B}_1+B_2$.

4. Запишите в аналитической форме макстермы, зависящие от аргументов A, B, C, D:

1) (АЧО). M_3; 3) (ЭУЛ). M_7; 5) (КИР). M_{10};

2) (ОТС). M_0; 4) (УЛТ). M_{15}; 6) (ЦОУ). M_1.

5. Найдите значения дизъюнкций макстермов:

1) (ПКФ). $(A+\overline{B}+\overline{C}+D)+(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$;

2) (ЦВХ). $(A+\overline{B}+\overline{C}+D)+(\overline{A}+D+E)$;

3) (ЦХЦ). $(P+\overline{Q}+R)+(\overline{A}+B+Q)$;

4) (НБЧ). $(A+B+D)+(C+D+\overline{E}+\overline{F})$.

6. (ЕЦА)! Макстерм $f=A+\overline{B}+\overline{C}+D+E$ представлен в виде таблицы соответствия. Сколько единиц расположено в колонке f выше нуля? Ниже нуля?

7. (ЛШТ). Сколько существует макстермов шести аргументов?

8. (ШРК). Сколько инверсных аргументов имеет макстерм M_1, зависящий от аргументов A, B, C, D, E?

9. Запишите десятичные эквиваленты наборов значений аргументов, на которых макстермы, зависящие от аргументов A, B, C, D, принимают нулевое значение:

1) (ХХА). M_4; 4) (МОБ). M_0; 7) (ЛИВ). M_{15};

2) (ШХГ). M_{10}; 5) (ХВД). M_{14}; 8) (ЮХФ). M_6;

3) (ЗКЖ). M_{12}; 6) (ИЛИ); M_8. 9) (УМК) M_2.

10. Найдите десятичные индексы макстермов пяти аргументов, если они равны нулю на наборах с номерами:

1) (ФВВ). 10; 3) (00Г). 16; 5) (ФИД). 5; 7) (УДЕ). 15;

2) (ЭХХ). 0; 4) (ЛШК). 31; 6) (ЮУЛ). 14; 8) (ФИП). 2.

11. Найдите x (число аргументов равно 5):

1) (ФА1). $\overline{m}_5=M_x$; 3) (695). $\overline{M}_{31}=m_x$; 5) (ДХ2). $\overline{m}_{12}=M_x$;

2) (903). $\overline{m}_0=M_x$; 4) (ЭВЧ). $\overline{M}_7=m_x$; 6) (ДМ6). $\overline{m}_{18}=M_x$.

12. Представьте в аналитическом виде макстерм, зависящий от аргументов P, Q, R, S:

1) (ИЛ1). M_5; 3) (Ф08). M_7; 5) (ТБ9). M_0;

2) (ДЕО). M_{10}; 4) (ЛКЮ). M_{15}; 6) (АОЯ). M_8.

13. Напишите аналитическое выражение минтерма, являющегося инверсией макстерма, если макстермы зависят от аргументов A, B, C, D:

1) (СИШ). M_6; 2) (КМК). M_{10}; 3) (ЕЕТ). M_{15}; 4) (ШСС). M_0.

14. (ЕВЮ). Укажите номера, где записаны макстермы:

1) $A+B+C+\overline{A}$; 3) $P+QR$; 5) $B+B$; 7) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$;

2) X_1+X_2; 4) D; 6) $E+F+\overline{P}$; 8) $A+B+C+A$.

7.3. СОВЕРШЕННАЯ КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Если задана СДНФ некоторой булевой функции f, то найти ее СКНФ очень легко. В соответствии с основным способом нахождения КНФ, описанным в подразделе 7.1, сначала находим СДНФ инверсии заданной функции. В $\overline{f}$ войдут все минтермы, отсутствующие в f, и ни один минтерм не войдет одновременно в f и $\overline{f}$. Затем записываем аналитическое выражение для $\overline{f}$ и результат инвертируем по теореме де Моргана. Проиллюстрируем это примером.

Пусть $f(A, B, C) = (0, 1, 2, 4, 5)$. В эту функцию, зависящую от трех аргументов, не входят минтермы с номерами 3, 6, 7. Следовательно, они войдут в инверсию функции f:

$$\overline{f} = (3, 6, 7) = \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC.$$

Инвертируем по теореме де Моргана:

$$f = (A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) = M_4M_1M_0.$$

Это и есть искомая СКНФ заданной функции f.

Если исходная функция представлена не в СДНФ, а в какой-либо другой форме — минимальной, тупиковой, сокращенной и др., то сначала необходимо найти ее СДНФ. Для этого можно воспользоваться теоремой разложения либо картой Вейча.

Для примера представим в СКНФ функцию

$$f = AB + \overline{A}D + \overline{B}C.$$

По карте Вейча находим СДНФ:

$$f = (1, 2, 3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$

Отсюда следует, что $\overline{f} = (0, 4, 6, 8, 9)$;

$$\overline{f} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D;$$

$$\overline{\overline{f}} = f = (A + B + C + D)(A + \overline{B} + C + D)(A + \overline{B} + \overline{C} + D)(\overline{A} + B + C + D)(\overline{A} +$$
$$+ B + C + \overline{D}) = M_{15}M_{11}M_9M_7M_6.$$

Упражнения

1. (ЦОП). Укажите номера функций, представленных в виде произведения макстермов:

1) $f = AB + AC + CD$;
2) $f = (A + B)(B + C)(C + D)$;
3) $f = (A + B)(\overline{A} + \overline{B})$;
4) $f = (A + B + C)(A + B + \overline{C})$;
5) $f = A + B + C + D$;
6) $f = A + B + CD + D$;

2. Найдите номера минтермов, образующих СДНФ инверсии заданных функций трех аргументов:

1) (ХЛЕ). $f = A\overline{B} + C$;
2) (ТЗО). $f = AB + \overline{B}C + \overline{A}C$;
3) (ЭШУ). $f = A + \overline{B}C$;
4) (МОА). $f = A + BC + A\overline{C}$;
5) (ЦНТ). $f = (0, 1, 3, 4, 7)$;
6) (КМР). $f = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

3. Найдите номера минтермов, образующих СДНФ инверсии заданных функций четырех аргументов:

1) (ИПА). $f = A + \bar{B} + CD$;
2) (ЦЛБ). $f = A + B + C$;
3) (ГЦВ). $f = A + B$;
4) (АКГ). $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{D}$;
5) (ЦРД). $f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$;
6) (УТС). $f = \bar{A} + BCD + ACD$.

4. Сколько макстермов содержат СКНФ функций, зависящих от четырех аргументов?

1) (КБИ). $f = A$.
2) (ЯРО). $f = \bar{B}$.
3) (МАУ). $f = A + \bar{B}$.
4) (20Я). $f = ABC$.
5) (ХМА). $f = ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.
6) (ДОЕ). $f = ABCD$.

5. Сколько вхождений аргументов содержат СКНФ функций четырех аргументов?

1) (ЦМХ). $f = AB + CD$.
2) (ШРК). $f = A + \bar{B} + C + \bar{D}$.
3) (НКК). $f = (A + B + C)(C + D)$.
4) (ЛИС). $f = 1$.
5) (ВТН). $f = (A + B)C$.
6) (ЦУР). $f = \bar{D}$.

6. Сколько минтермов и сколько макстермов содержат функции аргументов A, B, C, D?

1) (КБА). $f = A + \bar{A}(B + C)$.
2) (МБС). $f = \bar{A} + \bar{A}(B + \bar{B})$.
3) (ЦОР). $f = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}D$.
4) (ТОТ). $f = (A + BC)(\bar{A} + \bar{B}\bar{C})$.
5) (УШЕ). $f = B + \bar{B}C$.
6) (БМК). $f = \overline{BD}$.

7. Сколько вхождений инверсных аргументов в СКНФ следующих функций, зависящих от трех аргументов A, B, C?

1) (ЛУГ). $f = \bar{A}$.
2) (МУЦ). $f = 0$.
3) (УХП). $f = A\bar{B}C$.
4) (ЗКХ). $f = A + \bar{B}C$.
5) (ИШИ). $f = A\bar{B} + \bar{A}C$.
6) (00Ф). $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \overline{B + C}$.

7.4. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КНФ

Любую булеву функцию можно представить в виде

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = [A_1 + f(0, A_2, \ldots, A_n)][\bar{A}_1 + f(1, A_2, \ldots, A_n)].$$

Чтобы доказать справедливость этого утверждения, достаточно в левую и правую части равенства подставить сначала $A_1 = 1$, а затем $A_1 = 0$. В обоих случаях получится тождество.

Для примера разложим по аргументу A функцию $f = AB + CD$:

$$AB + CD = (A + 0 \cdot B + CD)(\bar{A} + 1 \cdot B + CD) = (A + CD)(\bar{A} + B + CD).$$

Как и в случае дизъюнктивных форм, разложение функции может быть продолжено. Разложим каждое выражение в скобках по переменной B:

$$(A + CD)(\bar{A} + B + CD) = (B + A + CD)(\bar{B} + A + CD)(B + \bar{A} + CD).$$

Каждое из получившихся выражений в скобках разложим по переменной C:

$$\begin{aligned}
&(A + B + CD)(A + \bar{B} + CD)(\bar{A} + B + CD) = \\
&= (C + A + B)(\bar{C} + A + B + D)(C + A + \bar{B})(\bar{C} + \\
&+ A + \bar{B} + D)(C + \bar{A} + B)(\bar{C} + \bar{A} + B + D).
\end{aligned}$$

Осталось разложить по аргументу D. Заметим, что в получившемся выражении имеется три макстерма. Если учесть, что макстерм не меняется от преобразований по теореме разложения, то разложить осталось только три дизъюнкции:

$$C + A + B = (D + C + A + B)(\bar{D} + C + A + B);$$
$$C + A + \bar{B} = (D + C + A + \bar{B})(\bar{D} + C + A + \bar{B});$$
$$C + \bar{A} + B = (D + C + \bar{A} + B)(\bar{D} + C + \bar{A} + B).$$

Окончательно получаем:

$$AB + CD = (A + B + C + D)(A + B + C + \bar{D})(A + B +$$
$$+\bar{C} + D)(A + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + D)\,\&$$
$$\&(\bar{A} + B + C + D)(\bar{A} + B + C + \bar{D})(\bar{A} + B + \bar{C} + D) =$$
$$= M_{15}M_{14}M_{13}M_{11}M_{10}M_9M_7M_6M_5.$$

Для всякой булевой функции существует единственная СКНФ, но при условии, что исходная функция и ее СКНФ зависят от одних и тех же аргументов. Если же это условие не принять во внимание, то для одной и той же функции можно найти сколько угодно различных СКНФ путем ввода новых аргументов с применением теоремы разложения.

Упражнения

1. Разложите для КНФ по аргументу A функции. В устройство введите число вхождений неинверсных и число вхождений инверсных аргументов:

1) (ВЕР). $f = A\bar{B} + CD$; 4) (ПОФ). $f = AC + AD$;
2) (ЯМК). $f = B\bar{C} + \bar{D}\bar{E}$; 5) (ФЫЛ). $f = A + B + \bar{C} + D$;
3) (ЯКЕ). $f = A + B\bar{C}$; 6) (КЗУ). $f = B + C$.

2. Разложите функции для КНФ сначала по аргументу A, затем по аргументу B. В устройство введите число вхождений неинверсных и число вхождений инверсных аргументов (после второго разложения):

1) (ЛШС). $f = A\bar{C} + AD$; 4) (ТНП). $f = B + C + \bar{D}\bar{E} + F$;
2) (ФЗО). $f = CD + \bar{C}\bar{D}$; 5) (СНА). $f = A + BC\bar{D}E$;
3) (ИШП). $f = A + B + C + \bar{A}\bar{C}D$; 6) (ЕИВ). $f = \bar{A}\bar{B} + AB$.

3. Определите число скобочных выражений функции f, последовательно разложенной по переменным A, B, C, D, E, F:

1) (55Р). $f = P$; 3) (ЛШТ). $f = P + A\bar{Q}$; 5) (КРА). $f = AB + PQ$;
2) (ЛБС). $f = EQ$; 4) (АТО). $f = AB$; 6) (ЛТК). $f = BQ + \bar{B}\bar{Q}$.

7.5. НАХОЖДЕНИЕ СОКРАЩЕННЫХ КНФ

Чтобы найти сокращенную КНФ, необходимо действовать в следующей последовательности (см. подраздел 7.1):

а) заданную функцию представляем в СДНФ;

б) находим СДНФ инверсии исходной функции;

в) методом Квайна или каким-либо другим методом находим сокращенную ДНФ для инверсии заданной функции;

г) результат инвертируем по теореме де Моргана.

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти сокращенную КНФ функции

$$f = A\bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{D} + ABC\bar{D}.$$

Условимся считать, что эта функция зависит от четырех аргументов, тогда ее СДНФ представится в виде $f = (3, 4, 6, 8, 12, 14)$.

Воспользовавшись картой Вейча, получаем сокращенную ДНФ для $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \bar{C}D + BD + AD + \bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}C + \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D}.$$

Инвертируем по теореме де Моргана полученный результат. Тогда искомая сокращенная КНФ примет вид

$$f = (C + \bar{D})(\bar{B} + \bar{D})(\bar{A} + \bar{D})(B + \bar{C} + D)(\bar{A} + B + \bar{C})(A + B + C)(A + B + D).$$

Упражнения

1. Даны СДНФ булевых функций четырех аргументов. Найдите сокращенную КНФ. При самоконтроле в устройство введите число вхождений аргументов и число инверсий:

1) (ХП0). $f = (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15)$;

2) (ВНП). $f = (0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 15)$;

3) (ЖКР). $f = (0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13)$;

4) (ЛТС). $f = (0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10)$;

5) (АРТ). $f = (0, 2, 4, 6, 9, 10, 11, 14)$.

2. Найдите сокращенные КНФ. Укажите общее число вхождений аргументов, число вхождений неинверсных и число вхождений инверсных аргументов:

1) (ФУР). $f = BC + \bar{A}B + \bar{A}\,\bar{C}D + A\bar{B}\,\bar{D}$;

2) (РПО). $f = A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\,\bar{C}\,\bar{D}$;

3) (КИС). $f = A\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\,\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D$.

7.6. НАХОЖДЕНИЕ ТУПИКОВЫХ И МИНИМАЛЬНЫХ КНФ

При нахождении тупиковых и минимальных КНФ булевых функций необходимо действовать в той же последовательности, что и в предыдущем подразделе, но с учетом того, что для инверсии заданной функции требуется найти все тупиковые формы. В общем случае последовательность действий состоит в следующем:

а) найти СДНФ заданной функции f;

б) записать СДНФ функции $\bar{f}$;

в) представить функцию $\bar{f}$ в виде сокращенной ДНФ;

г) методом Петрика (либо по карте Вейча, если число аргументов не более 5) найти все тупиковые формы для ДНФ функции $\bar{f}$;

д) все тупиковые формы проинвертировать по теореме де Моргана. Получим список тупиковых КНФ заданной функции f;

е) выбрать из тупиковых форм все минимальные по числу вхождений аргументов.

Первые три пункта представляют собой последовательность действий, описанных в предыдущем подразделе. В связи с этим воспользуемся приведенным там примером, т. е. найдем все тупиковые и минимальные КНФ функции

$$f = (3, 4, 6, 8, 12, 14).$$

Сокращенная ДНФ инверсии этой функции имеет вид

$$\overline{f} = \overline{C}D + BD + AD + \overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}.$$

Методом Петрика находим все ее тупиковые ДНФ:

$$\overline{f} = BD + \overline{C}D + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D};$$
$$\overline{f} = BD + AD + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C};$$
$$\overline{f} = BD + \overline{C}D + AD + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D};$$
$$\overline{f} = BD + AD + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D};$$
$$\overline{f} = BD + \overline{C}D + \overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}.$$

Инвертируем по теореме де Моргана все выражения. Таким образом, получаем пять тупиковых КНФ:

$$f = (\overline{B} + \overline{D})(C + \overline{D})(\overline{A} + B + \overline{C})(A + B + D);$$
$$f = (\overline{B} + \overline{D})(\overline{A} + \overline{D})(B + \overline{C} + D)(A + B + C);$$
$$f = (\overline{B} + \overline{D})(C + \overline{D})(\overline{A} + \overline{D})(B + \overline{C} + D)(A + B + D);$$
$$f = (\overline{B} + \overline{D})(\overline{A} + \overline{D})(\overline{A} + B + \overline{C})(A + B + C)(A + B + D);$$
$$f = (\overline{B} + \overline{D})(C + \overline{D})(B + \overline{C} + D)(\overline{A} + B + \overline{C})(A + B + C).$$

Первые два выражения являются минимальными. Они содержат по 10 вхождений переменных. Из остальных трех форм одна содержит 12 и две — по 13 вхождений аргументов.

Упражнения

1. Найдите минимальные КНФ. Определите число вхождений аргументов и число инверсий:

1) (КТЕ). $f = \overline{B}\,\overline{C} + A\overline{D} + A\overline{C} + \overline{B}\,\overline{D}$;

2) (ИЯЖ). $f = AB + \overline{C} + B\overline{D}$;

3) (АЯК). $f = A\overline{D} + C + \overline{B}\,\overline{D}$;

4) (БТЛ). $f = B\overline{C} + A\overline{B}D$;

5) (ОЙМ). $f = AB + AC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + B\overline{C}D$.

2. Определите число всех тупиковых КНФ заданной функции, число минимальных форм и число вхождений аргументов для одной из минимальных форм:

1) (НИС). $f = \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}BCD + A\overline{C}\,\overline{D}$; 2) (ШТУ). $f = (2, 5, 9, 13, 15)$.

7.7. ПЕРЕВОД ФУНКЦИЙ ИЗ КНФ В ДНФ

Один из универсальных способов перевода булевой функции из КНФ в ДНФ состоит в раскрытии скобок. Проиллюстрируем его на примере функции

$$f = (A + B)(C + D),$$

заданной в КНФ. Раскроем скобки:

$$f = (A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD.$$

В данном случае после раскрытия скобок получилась минимальная ДНФ той же функции.

Уместно задать вопрос: всегда ли в результате раскрытия скобок минимальной КНФ дизъюнктивная форма также является минимальной? Нет, далеко не всегда. Обычно после раскрытия скобок получается произвольная ДНФ, не являющаяся ни совершенной, ни сокращенной, ни тупиковой, ни минимальной. Например, функция

$$f = (A + B + C)(\bar{A} + B + D)$$

после раскрытия скобок дает выражение

$$f = A\bar{A} + AB + AD + \bar{A}B + B + BD + \bar{A}C + BC + CD,$$

содержащее девять конъюнкций. Очевидно, что оно не является минимальным. Упростим его. Прежде всего, удалим конъюнкцию $A\bar{A}$, так как $A\bar{A} = 0$. После этого применим теорему поглощения:

$$AB + \bar{A}B + B + BD + BC = B,$$

Удалив лишнюю простую импликанту CD, получаем минимальную ДНФ:

$$f = AD + B + \bar{A}C + CD = B + AD + \bar{A}C.$$

Таким образом, после раскрытия скобок получилась ДНФ, насчитывающая 15 вхождений аргументов (конъюнкцию $A\bar{A}$ не учитываем), в то время как минимальная ДНФ содержит всего пять букв.

Метод раскрытия скобок применим лишь в самых простых случаях, когда КНФ функции состоит из двух-трех скобочных выражений и число аргументов находится в пределах пяти-шести. Если же КНФ является более сложной, то целесообразнее пользоваться методами инвертирования. Пусть КНФ функции имеет вид

$$f = (A + \bar{C})(C + \bar{D})(B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C).$$

Проинвертируем ее по теореме де Моргана:

$$\bar{f} = \bar{A}C + \bar{C}D + \bar{B}C + AB\bar{C}.$$

Получили ДНФ инверсии заданной функции. Обозначим ее на карте Вейча нулями, а в остальные клетки запишем единицы, которые дадут СДНФ функции f. А по СДНФ нетрудно найти любую другую ДНФ.

Упражнения

1. Заданную КНФ функции представьте в минимальной ДНФ. В устройство введите общее число вхождений аргументов минимальной ДНФ, число простых импликант и число инверсий:

1) (031). $f = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(A + B + \bar{C})(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})$;

2) (732). $f = (B + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + B + \bar{C})(A + \bar{B} + \bar{C})$;

3) (АН3). $f = (\bar{B} + \bar{C})(\bar{C} + D)(A + B + D)$.

2. Заданную КНФ представьте в СДНФ. В устройство введите номера минтермов в порядке возрастания:

1) (РК4). $f = (\bar{A} + \bar{B})(A + B)(\bar{C} + \bar{D})(C + D)$;

2) (145). $f = (A + B + C)(\bar{A} + C + D)(B + C + D)$;

3) (396). $f = A(B + C)(\bar{B} + \bar{C})(B + \bar{C} + D)(\bar{B} + C + \bar{D})$.

3. (17Д). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что существуют булевы функции, минимальные ДНФ которых совпадают с минимальными КНФ?

2) верно ли, что на одних и тех же наборах значений аргументов функция, представленная в ДНФ, принимает те же значения, что и КНФ этой функции?

3) верно ли, что если заданную КНФ проинвертировать по теореме де Моргана, то получим ДНФ заданной функции?

4) верно ли, что если заданную функцию f сначала проинвертировать, а затем нанести функцию $\bar{f}$ на карту Вейча (единицами), то получим СДНФ заданной функции?

5) верно ли, что дизъюнкция функции f и функции $\bar{f}$ всегда равна единице?

6) верно ли, что конъюнкция функции f, заданной в ДНФ, и той же функции f, представленной в КНФ, всегда равна нулю?

7) верно ли, что если функцию, представленную в минимальной ДНФ, проинвертировать по теореме де Моргана, то получим минимальную КНФ этой функции?

8 НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

8.1. ПОНЯТИЕ НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОЙ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

До сих пор мы рассматривали функции, значения которых известны для всех возможных наборов значений аргументов. Такие функции называются полностью (всюду) определенными. Однако в случаях применения булевой алгебры очень часто приходится иметь дело с двоичными функциями, значения которых определены не на всех наборах, а лишь на некоторых. На остальных же наборах значения функции не указываются. Введем определение: булева функция заданного числа аргументов называется **неполностью определенной**, если существует хотя бы один набор значений аргументов, для которого не указано значение функции. В таблицах соответствия, а также на картах Вейча неопределенные состояния будем обозначать крестиками.

В табл. 9 приведена функция трех аргументов. Из таблицы видно, что если $A = B = C = 0$, то $f = 0$, или сокращенно:

$$f(0, 0, 0) = 0.$$

Аналогично:

$$f(0, 0, 1) = 1;\;\; f(0, 1, 1) = 1;\;\; f(1, 0, 0) = 1;$$
$$f(1, 0, 1) = 0;\;\; f(1, 1, 1) = 1.$$

Таблица 9

	A	*B*	*C*	*f*
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	×
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	×
7	1	1	1	1

А на наборах 010 и 110 поставлены крестики. Это значит, что никто не будет выяснять, чему равна функция, если принять $A = C = 0$, $B = 1$, либо $A = B = 1$, $C = 0$.

Наборы, на которых функция не определена, иногда называют запрещенными состояниями, а в [42] им дано название избыточных комбинаций.

Упражнения

1. (200). В некоторой таблице соответствия пяти аргументов задана булева функция. В колонке f этой таблицы находится 10 единиц и 6 нулей. Сколько существует наборов, на которых функция не определена?

2. (МИУ). Некоторая функция на 20 наборах принимает нулевое значение, на 20 — единичное и на 24 наборах функция не определена. Определите число аргументов, от которых зависит функция.

3. (ЗМА). Функция шести аргументов не определена на всех наборах, содержащих четное число единиц. Найдите число наборов, на которых функция определена.

8.2. СДНФ НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В чем главная особенность неполностью определенных функций? Чем они отличаются от функций, всюду определенных? Наиболее существенная особенность неполностью определенных функций заключается в том, что их аналитическая запись является неоднозначной даже в совершенных формах (СДНФ и СКНФ) при одних и тех же аргументах. Проиллюстрируем это на примере функции, приведенной в табл. 9. Непосредственно по таблице получаем четыре варианта представления ее в СДНФ:

1) если $f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) = 0$, то

$$f_1 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC; \tag{34}$$

2) если $f(0, 1, 0) = 1$; $f(1, 1, 0) = 0$, то

$$f_2 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC; \tag{35}$$

3) если $f(0, 1, 0) = 0$; $f(1, 1, 0) = 1$, то

$$f_3 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC; \tag{36}$$

4) если $f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) = 1$, то

$$f_4 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC. \tag{37}$$

Каким образом получены эти варианты и почему они считаются равными? Дело в том, что неопределенные состояния можно обозначать крестиками только на карте Вейча и в таблице соответствия. Но в аналитическом представлении функции крестик поставить невозможно. Всякая функция, записанная аналитически, является полностью определенной. Поэтому, прежде чем выразить функцию через операции И, ИЛИ, НЕ, ее необходимо **доопределить**, т. е. заменить крестики нулями или единицами. Функция (34) записана в предположении, что на наборах 010 и 110 она принимает нулевое значение. Поэтому в ее СДНФ отсутствуют минтермы m_2 и m_6. Выражение (35) записано в предположении, что на наборе 010 функция принимает единичное значение, т. е. $f(0, 1, 0) = 1$, а на наборе 110 — нулевое: $f(1, 1, 0) = 0$ и т. д.

Разумеется, функции (34)–(37) являются различными, если не знать, что на наборах 010 и 110 они не определены. Рассмотрим, например, выражения (34) и (35).

Подставляя различные наборы значений аргументов в ту или другую функцию, мы всякий раз будем находить, что обе функции одновременно принимают либо нулевое, либо единичное значения и лишь на наборе 010 получаем

$$f_1(0, 1, 0) = 0; \quad f_2(0, 1, 0) = 1,$$

откуда следует, что $f_1 \neq f_2$. Но, как уже упоминалось, все дело в том, что на наборе 010 (а также на наборе 110) никто не будет проверять значение функций. Значения функции будут определяться только на тех наборах, на которых она определена. А с этой точки зрения функции (34)–(37) являются тождественно равными.

Сколько существует СДНФ неполностью определенных функций? Пусть t — число наборов, на которых функция не определена, тогда всего существует 2^t способов ее доопределения и, следовательно, столько же имеется различных СДНФ. В частном случае, когда функция является полностью определенной, наборов, на которых функция не определена, нет. При этом $t = 0$ и $2^0 = 1$, т. е. существует только одна СДНФ полностью определенной функции.

Упражнения

1. (ЕМС). Сколько существует СДНФ функции, которая не определена на пяти наборах значений аргументов?

2. (КЕТ)! Функция имеет 64 различных СДНФ. На 10 наборах она принимает единичное значение, а на 16 — нулевое. Определите число аргументов, от которых зависит функция, и число наборов, на которых функция не определена.

3. (75К). Функция пяти аргументов равна единице на всех наборах, содержащих четное число единиц, и равна нулю на всех наборах, содержащих четное число нулей. Найдите число наборов, на которых эта функция не определена.

4. (ЖИР). Функция имеет 128 способов доопределения. Сколько существует СДНФ этой функции?

5. Перечислите все трехзначные наборы значений аргументов, на которых имеет место равенство (в устройство введите десятичные эквиваленты наборов в порядке возрастания):

1) (ХБМ). $AB + \bar{B}C = AB\bar{C} + A\bar{B}C$; 3) (ЭМО). $A + \bar{B}C = B + \bar{A}C$;

2) (ОЖК). $AB + BC = AC + \bar{B}C$; 4) (ПЕВ). $\bar{A} + \bar{B}C = \bar{B} + \bar{A}C$.

6. (ОЛВ). Функция пяти аргументов определена на 20 наборах. Сколько СДНФ можно записать для этой функции?

7. (Я31). Функция $f = AB + A\bar{D} + \bar{A}CD$ не определена на наборах 1, 4, 5, 14, 15. Укажите наборы, на которых функция доопределена единицами, если известно, что она зависит от четырех аргументов.

8.3.
СКНФ НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В подразделе 7.3 описан способ нахождения СКНФ для полностью определенных булевых функций. Можно ли этим способом воспользоваться для нахождения СКНФ неполностью определенных функций? Можно, следует лишь помнить, что неопределенные состояния остаются теми же при любых преобразованиях функций.

Нанесем на карту Вейча функцию, приведенную в табл. 9 (рис. 83). Инвертируем ее, оставляя крестики на тех же местах (рис. 84).

×	1	1	×
1		1	

Рис. 83

×			×
	1		1

Рис. 84

Доопределяя различным образом функцию $\overline{f}$, получим четыре варианта СДНФ ее инверсии и соответственно четыре варианта СКНФ исходной функции f:

1) если $\overline{f}(0,1,0)=\overline{f}(1,1,0)=0$, то $f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) = 1$, тогда

$$\overline{f}=\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C; \qquad f=(A+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C});$$

2) если $\overline{f}(0,1,0)=1$, $\quad\overline{f}(1,1,0)=0$, то $f(0, 1, 0) = 0$, $f(1, 1, 0) = 1$, тогда

$$\overline{f}=\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}; \qquad f=(A+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C);$$

3) если $\overline{f}(0,1,0)=0$, $\quad\overline{f}(1,1,0)=1$, то $f(0, 1, 0) = 1$, $f(1, 1, 0) = 0$, тогда

$$\overline{f}=\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C+AB\overline{C}; \qquad f=(A+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C);$$

4) если $\overline{f}(0,1,0)=\overline{f}(1,1,0)=1$, то $f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) = 0$, тогда

$$\overline{f}=\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C};$$
$$f=(A+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C).$$

Число различных СКНФ неполностью определенной функции равно 2^t, где t — число наборов, на которых функция не определена.

Упражнения

1. (КТИ). Найдите число наборов, на которых функция не определена, если она имеет 512 различных СКНФ.

2. (ШРА). Функция пяти аргументов не определена на шести наборах. Сколько существует вариантов ее представления в СКНФ?

3. (МТМ). Функция пяти аргументов имеет 32 СКНФ. Сколько существует наборов, на которых функция не определена?

4. (ВЕХ). Функция

$$f=(\overline{B}+C)(A+\overline{D})(A+B),$$

зависящая от четырех аргументов, не определена на наборах 0, 1, 5, 6, 9. Укажите наборы, на которых она доопределена нулями.

5. (Ш03). Дана функция

$$f = (A+B)(B+\bar{C})(A+\bar{D})(\bar{C}+\bar{D}).$$

В нижеприведенном списке укажите номера функций, равных функции f, если все функции не определены на наборах 0, 2, 10, 11, 15.

1) $f = A+\bar{D}$; 3) $f = \bar{D}+AC$; 5) $f = \bar{A}\bar{D}+A\bar{C}+AB$;

2) $f = A+B\bar{D}$; 4) $f = A+C$; 6) $f = \bar{D}+AD$.

6. (ВУС). Функция

$$f = (\bar{A}+B+\bar{C}+D)(\bar{A}+B+C+\bar{D})$$

не определена на наборах 2, 3, 7, 8, 11, 13, 15. Функцию доопределите нулями. Найдите номера минтермов, образующих СДНФ функции f.

8.4. МИНИМИЗАЦИЯ ДНФ НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Известно, что если функция не определена на n наборах, то существует 2^n доопределенных СДНФ и 2^n доопределенных СКНФ. Каждая из них единственным образом представима в сокращенной форме. Следовательно, всякая функция, не определенная на n наборах, имеет 2^n сокращенных ДНФ и 2^n сокращенных КНФ. Например, для функции, приведенной в табл. 9, существует четыре варианта представления в сокращенной ДНФ:

1) если $f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) = 0$, то $f_1 = A\bar{B}\bar{C}+BC+\bar{A}C$;

2) если $f(0, 1, 0) = 1$; $f(1, 1, 0) = 0$, то $f_2 = A\bar{B}\bar{C}+BC+\bar{A}C+\bar{A}B$;

3) если $f(0, 1, 0) = 0$; $f(1, 1, 0) = 1$, то $f_3 = A\bar{C}+AB+BC+\bar{A}C$;

4) если $f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) = 1$, то $f_4 = A\bar{C}+\bar{A}C+B$,

и четыре варианта представления в сокращенной КНФ:

1) если $f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) = 0$, то $f_5 = (\bar{B}+C)(\bar{A}+B+\bar{C})(A+C)$;

2) если $f(0, 1, 0) = 1$; $f(1, 1, 0) = 0$, то $f_6 = (\bar{A}+\bar{B}+C)(\bar{A}+B+\bar{C})(A+B+C)$;

3) если $f(0, 1, 0) = 0$; $f(1, 1, 0) = 1$, то $f_7 = (\bar{A}+B+\bar{C})(A+C)$;

4) если $f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) = 1$, то $f_8 = (\bar{A}+B+\bar{C})(A+B+C)$.

Получены эти варианты следующим образом. Сначала был выбран способ доопределения. Например, выражения f_1 и f_5 доопределены нулями, т. е. на неопределенных наборах значения функции приняты равными нулю. После доопределения функция стала полностью определенной, поэтому для нахождения сокращенной формы можно применить метод Квайна или карту Вейча.

Известно, что сокращенная форма функции часто не является минимальной, поэтому в общем случае каждую сокращенную форму необходимо исследовать методом Петрика, затем из всех тупиковых форм выбрать минимальные. Однако такой подход целесообразен только в случае сложных функций многих аргументов, для минимизации которых используется ЭВМ. Если же число аргументов не превышает 5–6, то, как уже упоминалось, неплохие результаты дает карта Вейча.

Пример 1. Пусть функция

$$f = A\bar{B}D + \bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}\,\bar{B}C\bar{D}$$

не определена на наборах 0, 3, 5, 6, 15. Требуется найти минимальную форму.

Если не учитывать неопределенные состояния, что эквивалентно доопределению нулями, то минимальная форма содержит 14 вхождений аргументов.

Если же выбрать иной вариант доопределения, то число вхождений аргументов можно значительно уменьшить. Нанесем функцию на карту Вейча (рис. 85) и отметим на ней неопределенные состояния. По карте видно, что три единицы, расположенные в строку, можно объединить конъюнкцией $\bar{B}D$, заменив крестик клетки 3 единицей. Две единицы, расположенные в колонку, могут быть представлены одной конъюнкцией $\bar{A}C$, если крестик клетки 6 заменить единицей. Остальные крестики заменяем нулями. Получим

$$f = \bar{B}D + \bar{A}C,$$

что представляет собой самое короткое выражение из всех возможных в классе ДНФ, содержащее всего лишь четыре буквы.

Пример 2. Пусть функция

$$f(A, B, C, D) = (3, 6, 12, 13, 14)$$

не определена на наборах 7, 15. Требуется найти минимальную форму.

Нанесем функцию на карту Вейча и отметим на ней неопределенные состояния (рис. 86). Если функцию доопределить нулями, то в минимальное выражение войдет минтерм m_3, поскольку он не объединяется ни с какими другими минтермами. Если же крестик клетки 7 заменить единицей, то вместо минтерма m_3 можно записать конъюнкцию $\bar{A}CD$. Таким образом, на наборе 0111 функцию следует доопределить единицей. Остался один крестик. Заменим его нулем, тогда в минимальную форму войдут конъюнкции $AB\bar{C}$ и $BC\bar{D}$. Если же этот крестик заменить единицей, то все шесть единиц можно представить конъюнкциями AB и BC. В результате минимальная форма примет вид

$$f = AB + BC + \bar{A}CD.$$

Таким образом, в данном случае, чтобы получить минимальную форму, функцию необходимо доопределить единицами. При доопределении нулями получается выражение, состоящее из 10 букв.

		×	
	×	1	×
1	1	×	1
		1	×

Рис. 85

1	1	1	
1	×	×	
		1	

Рис. 86

	1	1	
×		1	1
×	1	1	
		×	×

Рис. 87

Пример 3. Функция четырех аргументов

$$f = (3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 14)$$

не определена на наборах 0, 2, 9, 13. Требуется найти минимальную форму.

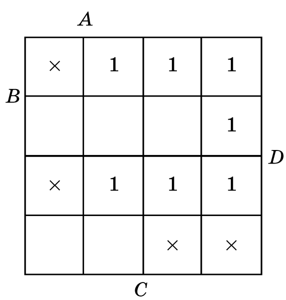
Нанесем функцию и неопределенные состояния на карту Вейча (рис. 87). Минимизацию начинаем с единиц, единственным образом образующих простые импликанты. В данном случае надо начать с минтерма 14, который объединяется только с минтермом 6, в результате чего получаем $BC\bar{D}$. Минтерм 5 имеет два варианта объединения: с крестиком 13 и минтермом 7. Объединять надо с минтермом (не с крестиком). Получаем $\bar{A}BD$. Остались две единицы, которые дают конъюнкцию $\bar{B}CD$. Таким образом, минимальная форма

$$f = BC\bar{D} + \bar{A}BD + \bar{B}CD$$

получается в том случае, если функцию доопределить нулями. Всякое другое доопределение приводит к увеличению числа вхождений аргументов.

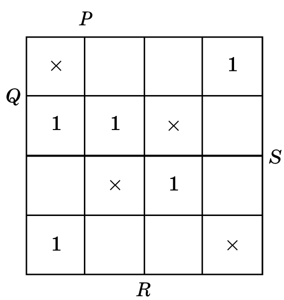
Можно ли дать какие-либо общие рекомендации по минимизации булевых функций с учетом неопределенных состояний? Можно. Во-первых, начинать необходимо с тех единиц, которые, объединяясь с единицами, дают единственную простую импликанту. Во-вторых, если есть возможность объединить какую-либо единицу с единицей или крестиком, то объединять необходимо с единицей. В-третьих, если группа единиц совместно с крестиками дает возможность представления ее более короткой конъюнкцией, то соответствующие крестики необходимо заменить единицами.

Для иллюстрации сказанного на рис. 88–93 приведены примеры нахождения минимальных форм.



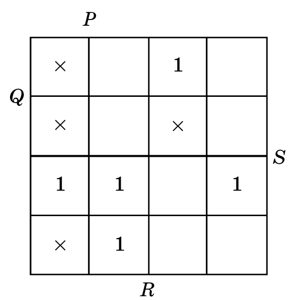
$f = B\bar{D} + \bar{B}D + \bar{A}\bar{C}$

Рис. 88



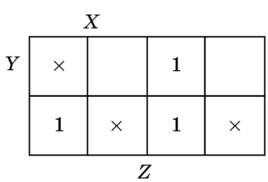
$f = \bar{R}\bar{S} + RS + PQS$

Рис. 89



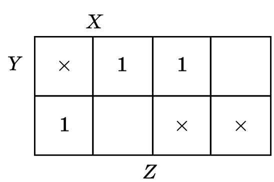
$f = P\bar{Q} + \bar{P}QR + \bar{Q}\bar{R}S$

Рис. 90



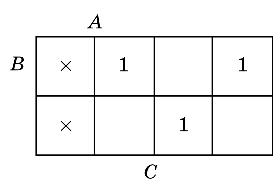
$f = \bar{Y} + \bar{X}Z$

Рис. 91



$f = YZ + \bar{Y}\bar{Z} = YZ + X\bar{Z}$

Рис. 92



$f = AB + B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$

Рис. 93

Упражнения

1. Найдите минимальные ДНФ функций трех аргументов (буквы упорядочить по алфавиту). Здесь и в дальнейшем неопределенные состояния будем указывать в фигурных скобках.

1) (ЖКМ). $f = (1, 5, 6, 7); \{0, 2, 4\}$.

2) (ЛИТ). $f = (0, 1, 2, 5, 7); \{3, 4\}$.

3) (ШКК). $f = (0, 3, 6); \{1, 2, 5, 7\}$.

4) (ФЭП). $f = (1, 3, 5, 7); \{0, 2, 4\}$.

5) (ТВР). $f = A\overline{C} + BC + \overline{A}\,\overline{B}$; $\{0, 2, 4\}$.

2. Найдите минимальные ДНФ функций четырех аргументов. Для самоконтроля укажите число простых импликант, число вхождений аргументов и число инверсий.

1) (НУС). $f = (0, 3, 5, 7, 14); \{8, 9, 12\}$.

2) (АЧУ). $f = A\overline{B}C + \overline{A}BD + AB\overline{C}D$; $\{2, 4, 8, 10, 14, 15\}$.

3) (ШИФ). $f = ABD + \overline{B}D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$; $\{0, 1, 4, 6, 11, 15\}$.

4) (МВХ). $f = (0, 3, 7, 9, 14); \{8, 10, 11\}$.

5) (ЕЦ8). $f = (3, 5, 6, 7, 10, 15); \{1, 4, 8, 9, 12\}$.

3. Найдите минимальные ДНФ функций четырех аргументов. Для самоконтроля укажите десятичные номера состояний, на которых функция доопределена единицами. Номера упорядочить по возрастанию.

1) (ВЭВ). $f = (3, 5, 6, 13); \{2, 7, 9, 11, 15\}$.

2) (ШПГ). $f = (3, 6, 13); \{1, 2, 5, 7, 9, 10, 14\}$.

3) (ВИО). $f = (2, 7, 10, 11, 13); \{1, 3, 5, 6, 9, 14, 15\}$.

4) (НШФ). $f = (4, 5, 6, 8, 11, 15); \{0, 3, 7, 9, 12\}$.

8.5. МИНИМИЗАЦИЯ КНФ НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ

При нахождении минимальных конъюнктивных нормальных форм неопределенными остаются все те же состояния, что и в случае минимизации дизъюнктивных нормальных форм. Поэтому минимизация КНФ осуществляется так же, как и в случае ДНФ, но с учетом двойного инвертирования:

1) если функция задана в ДНФ, то наносим ее на карту Вейча и отмечаем неопределенные состояния;

2) наносим на вторую карту Вейча инверсию функции. Крестиками отмечаем те же неопределенные состояния;

3) находим минимальную форму;

4) результат инвертируем по теореме де Моргана.

Пример 1. Найдем минимальную КНФ функции четырех аргументов

$$f = (1, 4, 9, 11, 12),$$

не определенной на состояниях 0, 5, 7, 8, 13, 15.

На рис. 94 изображена карта Вейча с заданной функцией и неопределенными состояниями. На рис. 95 приведена карта Вейча, на которую нанесена инверсия заданной функции и отмечены неопределенные состояния.

1			1
×	×	×	×
1	1		1
×			×

Рис. 94

	1	1	
×	×	×	×
		1	
×	1	1	×

Рис. 95

1	1		
1	×	1	×
	1	1	
	×		

Рис. 96

Анализируем карту. На ней имеется одна единица (минтерм 3), которая дает единственным образом простую импликанту $\overline{A}C$, если на состоянии 7 функцию $\overline{f}$ доопределить единицей. Оставшиеся две единицы (минтермы 10 и 14) вместе с соседними (минтермами 2 и 6) дают еще одну простую импликанту $C\overline{D}$. Таким образом, получаем

		1	1
	×		×
1			1
1	×	1	1

Рис. 97

$$\overline{f} = \overline{A}C + C\overline{D}.$$

Инвертируем по теореме де Моргана и получаем минимальную КНФ:

$$f = (A + \overline{C})(\overline{C} + D).$$

Пример 2. Найдем минимальные ДНФ и КНФ функции четырех аргументов

$$f = (3,\ 7,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14),$$

при условии, что функция не определена на наборах 5, 10, 15.

Найдем сначала минимальную ДНФ. Для этого на наборе 15 (рис. 96) функцию необходимо доопределить единицей, а на остальных двух наборах — нулями. Тогда получим:

$$f = AB + CD.$$

Переходим к карте, изображенной на рис. 97, на которую нанесена инверсия заданной функции и отмечены неопределенные состояния. Минимальная форма инверсной функции получается при доопределении ее нулями:

$$\overline{f} = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}.$$

Инвертируем по теореме де Моргана:

$$f = (A + D)(B + C).$$

Это и есть минимальная КНФ заданной функции.

Упражнения

1. Найти минимальные КНФ функций четырех аргументов. При самоконтроле указать число вхождений аргументов и число инверсий в минимальной КНФ.

1) (ВТР). $f = (0, 1, 4, 8, 9, 11, 12); \{2, 5, 7, 10, 14\}$.

2) (ЛЦС). $f = (0, 2, 3, 4, 7, 8, 12); \{1, 10, 11, 13, 14\}$.

3) (АЛТ). $f = (3, 4, 11, 12, 13, 15); \{0, 5, 6, 7, 9, 10\}$.

4) (КЛУ). $f = (3, 4, 6, 7, 12); \{0, 1, 2, 8, 9\}$.

5) (ЛТФ). $f = (1, 2, 9, 10, 13, 14); \{0, 3, 4, 5, 12, 15\}$.

6) (ИЯХ). $f = (0, 8, 9, 11); \{2, 12, 14, 15\}$.

7) (ТПЦ). $f = (1, 3, 6, 8, 9, 14); \{0, 2, 5, 13\}$.

8) (ПЛИ). $f = (3, 4, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15); \{0, 1, 2, 5, 6, 9, 10\}$.

2. Найдите минимальные КНФ. При самоконтроле укажите число вхождений аргументов и число инверсий.

1) (ТПА). $f = B\overline{D} + A\overline{C}D + \overline{A}CD + \overline{B}\overline{C}D$; $\{2, 4, 8, 14\}$.

2) (ШЭБ). $f = \overline{A}\,\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{C}D + AB\overline{C} + \overline{B}\overline{C}\,\overline{D}$; $\{2, 6, 7, 10, 15\}$.

3) (ЛЕВ). $f = A\overline{B}D + \overline{A}B\overline{D} + \overline{A}\overline{C}D$; $\{8, 10\}$.

4) (АГГ). $f = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{C}D + A\overline{B}D$; $\{0, 2, 5, 6, 8, 10, 13\}$.

5) (35Д). $f = CD + \overline{C}\,\overline{D} + AB$; $\{1, 2, 5, 6, 9, 10, 14\}$.

3. (ЦНТ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что минимальная КНФ всегда получается при том же доопределении, что и при нахождении минимальной ДНФ?

2) верно ли, что если ДНФ функции f имеет n способов доопределения, то столько же способов доопределения имеет и ее КНФ?

3) верно ли, что если в минимальной КНФ функции f раскрыть скобки, то получим минимальную ДНФ при всякой функции f?

4) верно ли, что если найти значение функции f на каком-либо из наборов, на котором функция не определена, то это значение в ДНФ всегда будет таким же, как и в случае КНФ?

5) верно ли, что минимальные КНФ, доопределенные различными способами, являются тождественно равными при условии, что на неопределенных состояниях значения функции проверяться не будут?

6) пусть функция f доопределена двумя различными способами, в результате чего получились две различные КНФ f_1 и f_2. Верно ли, что при этом всегда выполняется равенство $f_1 f_2 = f_1 + f_2$, если на неопределенных наборах значения функций f_1 и f_2 проверяться не будут?

9 ФОРМЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

9.1. ПОНЯТИЕ ПОРЯДКА БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

До сих пор мы рассматривали функции, аналитически представленные либо в виде дизъюнкции конъюнкций (суммы произведений), либо конъюнкции дизъюнкций (произведения сумм). Все такие формы называются нормальными. Кроме них, существуют **формы высших порядков**. Например:

$$f = (A + BC)(D + E).$$

Эта функция не является нормальной, так как хотя она и представлена в виде произведения сумм, но в скобочных выражениях суммируются не только одиночные аргументы: первый сомножитель представлен дизъюнкцией аргумента A и конъюнкцией аргументов B и C.

Прежде чем рассматривать формы высших порядков, выясним, что такое **порядок функции**. Функция имеет нулевой порядок, если она изображается отдельным аргументом или его инверсией, при этом аргумент не может быть функцией других аргументов. Например:

$$f = A,\ f = \overline{B},\ f = \alpha,\ f = \overline{\beta} \text{ и т. д.}$$

К выражениям нулевого порядка относятся также две функции вида

$$f = 0 \text{ и } f = 1.$$

Функция имеет первый порядок в трех случаях:

1) если она представлена в виде суммы (дизъюнкции) отдельных аргументов, взятых в прямой или инверсной форме, например:

$$f = \overline{A} + B + C; \qquad (38)$$

2) если она представлена в виде конъюнкции нескольких аргументов, взятых в прямой или инверсной форме, например:

$$f = A\overline{B}\overline{C}D; \qquad (39)$$

3) если она представлена в виде инверсии некоторого символа, изображающего функцию ненулевого порядка, например:

$$f = \overline{\varphi}, \tag{40}$$

где φ — функция не ниже первого порядка.

Если вместо какого-либо неинверсного аргумента функции (38) подставить конъюнкцию некоторых аргументов, то получим выражение второго порядка. Например:

$$f = \overline{A} + B + CD\overline{E}. \tag{41}$$

Аналогично, если вместо какого-либо неинверсного аргумента функции (39) подставить некоторую дизъюнкцию, то получим выражение также второго порядка. Например:

$$f = A\overline{B}\overline{C}(A + \overline{D}). \tag{42}$$

Если над дизъюнкцией или конъюнкцией поставить знак инверсии, то их порядок повысится на единицу и станет равным двум. Например:

$$f = \overline{AB\overline{C}}; \qquad f = \overline{A + \overline{B} + C + D}.$$

Если вместо того или иного неинверсного аргумента, входящего в конъюнкцию функции (41), подставить некоторую дизъюнкцию, то получим выражение третьего порядка. Например:

$$f = \overline{A} + B + C\overline{E}(P + \overline{Q} + R).$$

Аналогично, если вместо какого-либо неинверсного аргумента, входящего в дизъюнкцию функции (42), подставить некоторую конъюнкцию, то получим выражение 3-го порядка. Например: $f = A\overline{B}\overline{C}(PK + \overline{D})$ и т. д.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Функция

$$f = (AB + C)(CD + E)$$

представлена в форме третьего порядка. Первый порядок дает операция конъюнкции между скобками, а в каждой из скобок записано выражение второго порядка.

Пример 2. Функция

$$f = (A + BC)D + E$$

имеет четвертый порядок: первый образует дизъюнкция, находящаяся вне скобок, второй — конъюнкция, находящаяся вне скобок, третий — дизъюнкция в скобках и четвертый — конъюнкция в скобках.

Пример 3. Функция

$$f = [(A + BC)(D + E) + K]M + N$$

имеет шестой порядок: первый дает дизъюнкция вне квадратных скобок, второй — конъюнкция вне квадратных скобок, третий — дизъюнкция в квадратных скобках, четвертый — конъюнкция между круглыми скобками, пятый — дизъюнкция в круглых скобках и шестой — конъюнкция в круглых скобках.

Упражнения

1. (УМ0). Укажите номера функций нулевого порядка:

1) $f = AB$; 3) $f = A$; 5) $f = A \cdot \bar{A} + A$; 7) $f = 0$;

2) $f = AA$; 4) $f = \bar{X} \cdot X$; 6) $f = 1$; 8) $f = \bar{X}$.

2. (АВЕ). Укажите номера функций второго порядка:

1) $f = BC$; 4) $f = (AB + C)D$; 7) $f = C(C + C)(C + C)$;

2) $f = AA + A$; 5) $f = (A + A)(A + AA)$; 8) $f = A\bar{A}B\bar{B}$;

3) $f = BC + DE + FK$; 6) $f = C(C + C)$; 9) $f = A\bar{A} + 0$.

3. (ЕЙХ). Укажите номера функций первого порядка:

1) $f = A \cdot 0$; 4) $f = 1 + 1$; 7) $f = B + C$;

2) $f = A \cdot \bar{A}$; 5) $f = A + B$; 8) $f = A(A + A)$;

3) $f = C\bar{C} + 1$; 6) $f = A + 0$; 9) $f = A + AB$.

4. Найдите порядок функций:

1) (ХВД). $f = A + B + \bar{C} + D$; 5) (ТЛК). $f = (A + A)A + A$;

2) (ХХЕ). $f = PQ\bar{R}\bar{S}$; 6) (ТПЛ). $f = (A + BC)(A + BC)$;

3) (СОР). $f = PQ\overline{RS}$; 7) (МБМ). $f = (A + BC)(A + \bar{B}C)A + \bar{A}$;

4) (НВЖ). $f = \overline{\overline{AB}C} + E$; 8) (ИШИ). $f = [(A + BC)(A + \bar{B}C)A + \bar{A}]E + F$.

5. (ПУН). Укажите номера функций третьего порядка:

1) $f = AB + CD$; 4) $f = (A + \bar{A}A)A$;

2) $f = (A + BC)D + E$; 5) $f = (A + BC)(A + B)$;

3) $f = (A + AB)A$; 6) $f = (A + B)(A + B) + A$.

9.2. ГРАФ-СХЕМА БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Если порядок функции невысок, то его нетрудно определить непосредственно по выражению функции. Но в более сложных случаях возможны ошибки. Чтобы их избежать, следует воспользоваться граф-схемой булевой функции. Построение граф-схемы (порядкового дерева) поясним на примере функции вида

$$f = \overline{(\bar{A} + BC)E + AB\bar{D}} + C. \tag{43}$$

Представим ее в виде

$$f = \varphi_1 + C, \tag{44}$$

где обозначено:

$$\varphi_1 = \overline{(\bar{A} + BC)E + AB\bar{D}}. \tag{45}$$

Выражение (44) представляет собой дизъюнкцию двух аргументов, следовательно, оно имеет первый порядок. Отмечаем это на граф-схеме (рис. 98): ставим точку, обозначаем ее буквой f. Получили корень порядкового дерева. От точки f отводим две ветви согласно числу слагаемых выражения (44) и в концах ветвей записываем символы φ_1 и C, а под точкой f ставим знак дизъюнкции. Это значит, что символы, которыми оканчиваются ветви, логически суммируются и в результате дают выражение (44).

Правая ветвь оканчивается буквой C. Поскольку это аргумент функции, не являющийся функцией других аргументов, то дальше ветвь не продолжается. Переходим к левой ветви, оканчивающейся знаком φ_1. Представим выражение (45) в виде $\varphi_1 = \overline{\varphi}_2$, где

$$\varphi_2 = (\overline{A} + BC)E + AB\overline{D}.$$

Из точки φ_1 отводим только одну ветвь и заканчиваем ее символом φ_2. Знака отрицания под точкой φ_1 не ставим, условимся считать, что если из точки выходит одиночная ветвь, то символы, записанные на ее концах, являются взаимно инверсными.

Выражение φ_2 запишем в виде: $\varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_4$, где

$$\varphi_3 = (\overline{A} + BC)E; \quad \varphi_4 = AB\overline{D}.$$

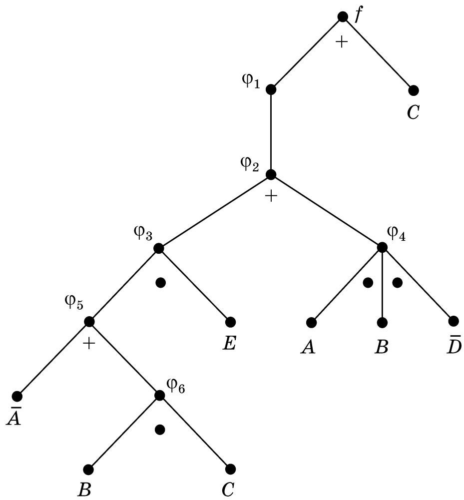


Рис. 98

От точки φ_2 отводим две ветви и заканчиваем их символами φ_3 и φ_4. Под точкой φ_2 записываем знак дизъюнкции. Выражение φ_3 в свою очередь представляем в виде $\varphi_3 = \varphi_5 \cdot E$, где $\varphi_5 = \overline{A} + BC$. В соответствии с этим от точки φ_3 отводим две ветви, заканчивая их символами φ_5 и E, а под точкой φ_3 ставим знак конъюнкции.

Выражение φ_4 имеет вид $\varphi_4 = AB\overline{D}$.

От точки φ_4 отводим три ветви, так как выражение φ_4 представляет собой конъюнкцию трех аргументов. На концах ветвей записываем аргументы A, B и $\overline{D}$, а под точкой φ_4, т. е. между ветвями, ставим знаки конъюнкции.

Буквами $E, A, B, \overline{D}$ ветви заканчиваются, продолжается только ветвь φ_5:

$$\varphi_5 = \overline{A} + \varphi_6,$$

где $\varphi_6 = BC$. От точки φ_5 отводим две ветви и заканчиваем их символами $\overline{A}$ и φ_6. Под точкой φ_5 ставим знак дизъюнкции.

Осталась одна ветвь, последняя, она заканчивается буквами B и C, поскольку $\varphi_6 = BC$.

Под точкой φ_6 ставим знак конъюнкции и на этом построение порядкового дерева заканчиваем. Порядок функции определяется числом ветвей самого длинного пути, следовательно, функция (43) имеет шестой порядок.

Упражнения

1. Постройте порядковое дерево для каждой из функций и определите:

а) порядок функции;

б) число самых длинных путей, ведущих от корня дерева к концам его ветвей, обозначенных аргументами функций:

1) (ШРА)! $f = [(AB + C)D + E]P + [Q(R + ST) + T]M$;

2) (ШТБ)! $f = [(A + BC + EF)(\overline{A} + \overline{B} + CDE) + KL]A + B$;

3) (ЛТВ)! $f = [(ABC + A\overline{C})AB + C]B + C$;

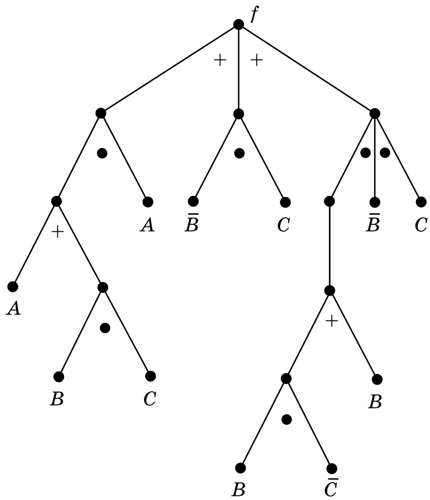


Рис. 99

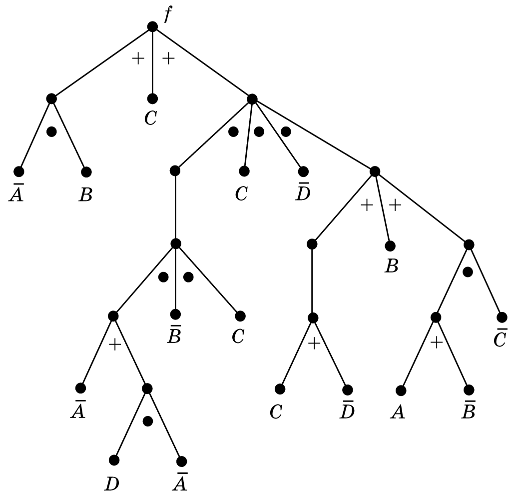


Рис. 100

4) (ИПГ)! $f = [(A + B + C + D)(D + E)AB + P][(A + B + C)D + E] + K$;

5) (ШОТ)! $f = [(A + \bar{A}B + AC)AD + \overline{(A + B + C)(C + D + E)E} + \bar{K}]P + A\bar{B}$.

2. (ИНЗ). На рис. 99 приведена граф-схема некоторой функции f. Найдите ее аналитическое выражение и представьте его в минимальной ДНФ.

3. (АТИ). На рис. 100 приведена граф-схема функции f. Запишите аналитическое выражение этой функции и найдите ее минимальную ДНФ.

9.3. АБСОЛЮТНО МИНИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Формы высших порядков привлекают исследователей тем, что очень часто повышение порядка функции приводит к уменьшению числа вхождений аргументов. Например, минимальная ДНФ функции

$$f = AB\bar{C} + AB\bar{D} + \bar{A}CD + \bar{A}\,\bar{B}D$$

имеет 12 вхождений букв, но если повысить ее порядок до третьего, то получим выражение

$$f = AB(\bar{C} + \bar{D}) + \bar{A}D(\bar{B} + C),$$

которое имеет лишь восемь вхождений аргументов.

Функция

$$f = ABCD + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

в классе ДНФ вообще не поддается минимизации, но если повысить ее порядок, то число вхождений аргументов можно уменьшить вдвое:

$$f = (AB + \bar{A}\bar{B})(CD + \bar{C}\bar{D}).$$

Возникает вопрос, не существует ли алгоритма, позволяющего для любой функции найти среди форм высшего порядка **абсолютно минимальную**

форму, которая по сравнению с любыми другими формами имела бы наименьшее число вхождений букв. Абхъянкаром был предложен такой алгоритм, однако практически его использовать невозможно даже для функций четырех аргументов с применением самой быстродействующей ЭВМ. Только на последнем этапе нахождения абсолютно минимальной формы функции четырех аргументов число t необходимых элементарных операций оценивается как

$$2^{256} \leqslant t \leqslant 2^{65536}.$$

Это значит, что алгоритм Абхъянкара практического интереса не представляет и имеет лишь теоретическое значение.

В [24, с. 189] о формах высших порядков говорится следующее: «Для получения скобочных форм можно едва ли что-либо предложить, кроме перебора всех вариантов группирования переменных. Однако даже в этом случае нет уверенности, что будет получено наилучшее решение».

Таким образом, задача нахождения абсолютно минимальных форм представляет собой одну из наиболее трудных и пока не решенных проблем булевой алгебры.

9.4. ПОВЫШЕНИЕ ПОРЯДКА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Поскольку проблема абсолютно минимальных форм пока не решена, то можно пользоваться приемами, позволяющими значительно сократить число вхождений аргументов за счет повышения порядка функций. Один из этих приемов поясним на примере следующей функции:

$$f = BCD + A\bar{B}\bar{C} + B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{B}C\bar{D}. \tag{46}$$

Запишем в ряд ее аргументы сначала в прямой форме, а затем в инверсной (табл. 10).

Слева отведем специальную колонку и в ней перечислим все простые импликанты заданной минимальной ДНФ. Затем единицами отметим буквы, из которых состоят простые импликанты: импликанта BCD состоит из букв B, C, D. В колонках B, C, D на пересечении со строкой, где записана импликанта BCD, поставим единицы. Точно таким же образом заполняем всю таблицу.

Анализируем получившуюся матрицу. В колонке A находится одна единица. Это значит, что аргумент A входит только в одну простую импликанту $A\bar{B}\bar{C}$. В колонке B находятся три единицы: буква B входит в импликанты BCD, $B\bar{C}\bar{D}$ и $\bar{A}B\bar{C}$. Это значит, что из всех трех импликант букву B можно вынести за скобки и их дизъюнкцию заменить выражением

$$B(CD + \bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{C}).$$

Таблица 10

	A	B	C	D	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{D}$
BCD		1	1	1				
$A\bar{B}\bar{C}$	1					1	1	
$B\bar{C}\bar{D}$		1					1	1
$\bar{A}\bar{B}C$			1		1	1		
$\bar{A}B\bar{C}$		1			1		1	
$\bar{B}C\bar{D}$			1			1		1

То же самое относится ко всем колонкам. Таким образом, глядя на матрицу, можно сразу сказать, какие буквы выносятся за скобки.

Пусть решено за скобки вынести букву B, тогда из оставшихся импликант можно вынести букву $\bar{B}$. В результате получим выражение четвертого порядка, имеющее 14 вхождений аргументов:

$$f = B(CD + \bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{C}) + \bar{B}(A\bar{C} + \bar{A}C + C\bar{D}),$$

в то время как минимальная ДНФ функции (46) имеет 18 вхождений букв.

Для скобочных выражений в свою очередь следует построить матрицу, но поскольку эти выражения просты, то можно непосредственно найти буквы, которые выносятся за скобки:

$$f = B[CD + \bar{C}(\bar{A} + \bar{D})] + \bar{B}[A\bar{C} + C(\bar{A} + \bar{D})].$$

Получившееся выражение имеет пятый порядок и 12 вхождений аргументов.

Можно получить другое выражение с тем же порядком и тем же числом вхождений букв, если вынести буквы C и $\bar{C}$:

$$f = C[BD + \bar{B}(\bar{A} + \bar{D})] + \bar{C}[A\bar{B} + B(\bar{A} + \bar{D})].$$

Исходное выражение имеет много минимальных ДНФ, по 18 вхождений аргументов каждая, поэтому в общем случае следует все их проверить и выяснить, не найдется ли среди них выражения, для которого форма высшего порядка имеет меньше 12 вхождений аргументов. Кроме того, можно исследовать и минимальные КНФ, для чего необходимо выполнить следующие операции:

а) находим минимальную ДНФ инверсии заданной функции;

б) повышаем ее порядок;

в) результат инвертируем по теореме де Моргана.

Минимальная КНФ выражения (46) имеет 14 вхождений аргументов:

$$f = (\bar{B} + \bar{C} + D)(A + B + C)(\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D})(\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D}).$$

Если повысить ее порядок, то найдем еще несколько форм высших порядков по 12 вхождений аргументов каждая. Одна из них имеет вид

$$f = (\bar{A} + \bar{D} + \bar{B}\bar{C} + BC)(\bar{B} + \bar{C} + D)(A + B + C).$$

Упражнения

1. Найдите минимальные ДНФ функций, представленных в формах высших порядков. Определите число простых импликант и число вхождений аргументов:

1) (НАР). $f = [(A + BC)\bar{A} + BC]D + ACD$;

2) (НАС). $f = (AB + \bar{A}\bar{B})(AC + \bar{A}\bar{C})(CD + \bar{C}\bar{D})$;

3) (ХХ0). $f = (AC + BD)(\bar{A}B + BC)(AD + \bar{A}\bar{D})$;

4) (НЮА). $f = (\bar{A}B + \bar{B}C + \bar{A}D)(A + \bar{B} + \bar{C} + D)$;

5) (МТМ). $f = [(A + BC)D + E][(\bar{A} + \bar{B}\bar{C})\bar{D} + \bar{E}]$;

6) (АЛП). $f = [A + \bar{B}(C + D)][\bar{B} + B(C + \bar{A}D)]$.

2. Найдите минимальную ДНФ. Повысьте порядок функции путем вынесения за скобки. В устройство введите число вхождений аргументов минимальной ДНФ и число вхождений аргументов выражения, получившегося после повышения порядка:

1) (ОЛК). $f = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 15)$;
2) (ЪЪТ). $f = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15)$;
3) (ВЦ0). $f = (5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$;
4) (МРР). $f = (4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$;
5) (ЗЕА). $f = (1, 4, 7, 10, 14, 15)$;
6) (ТКС). $f = (2, 3, 4, 7, 8, 12, 15)$;
7) (ЦШУ). $f = (0, 4, 8, 13, 14, 15)$.

3. Найдите минимальную КНФ. Повысьте ее порядок путем вынесения за скобки. В устройство введите число вхождений аргументов минимальной КНФ и число вхождений аргументов выражения, получившегося после повышения порядка:

1) (ЗИА). $f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11, 13, 14)$;
2) (МТР). $f = (0, 1, 2, 8, 12)$;
3) (ХШР). $f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14)$;
4) (ННК). $f = (0, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 13, 15)$.

4. Повысьте порядок функций путем вынесения за скобки. Для самоконтроля укажите число вхождений аргументов и число инверсий:

1) (УТМ). $f = A\bar{B} + A\bar{D} + A\bar{C} + \bar{A}BCD$;
2) (ГЦО). $f = \bar{A}\bar{B} + ABD + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{D}$;
3) (ХЛП). $f = B\bar{D} + AD + \bar{B}C + \bar{A}\bar{C}$;
4) (ЛГН). $f = ABC + A\bar{B}\bar{C} + BCD + \bar{B}\bar{C}D$;
5) (ЛШУ). $f = \bar{A}BC + \bar{A}BD + A\bar{B}D + A\bar{B}C$;
6) (ДИФ). $f = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{D} + \bar{A}CD + \bar{A}BD$.

9.5. КЛАССИФИКАЦИЯ ФОРМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Используя правила тождественных преобразований, всякую булеву функцию можно представить бесконечным числом способов. Например, функцию

$$f = A + \bar{B}$$

можно представить в следующих формах:

$$\begin{aligned} f &= A + \bar{B} = \\ &= A + \bar{B} + A\bar{B} = \\ &= A + \bar{B} + AB = \\ &= A + \bar{B} + \bar{B}C = \\ &= AB + AC + \bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD = \\ &= A(B + C) + \bar{B}(\bar{C} + \bar{D} + \bar{A}CD) = \\ &= A[B(C + D) + \bar{C}(\bar{B}D + B\bar{D}) + CD] + \bar{B}(CD + \bar{A}\bar{C} + \bar{D}) \end{aligned}$$

и т. д. без ограничений.

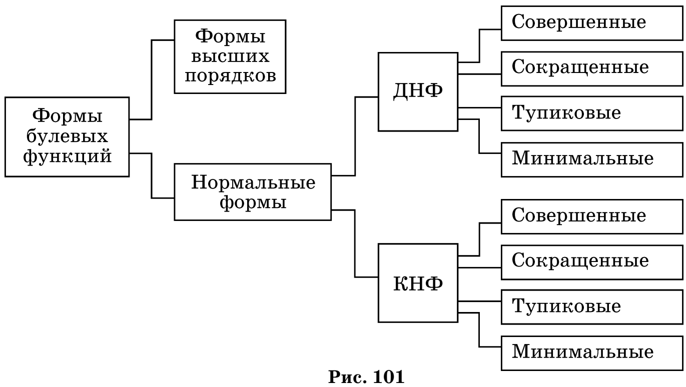


Рис. 101

Из всего многообразия форм представления булевых функций наиболее исследованы только нормальные формы, представленные в виде дизъюнкции конъюнкций (ДНФ) либо в виде конъюнкции дизъюнкций (КНФ). Следовательно, все формы представления булевых функций, прежде всего, делятся на два непересекающихся класса: нормальные формы и формы высших порядков (рис. 101).

Нормальные формы распадаются на два больших класса — дизъюнктивные и конъюнктивные, которые в свою очередь делятся на совершенные, сокращенные, тупиковые и минимальные.

Таким образом, вполне завершенную классификацию имеют лишь нормальные формы булевых функций.

9.6. О КЛАССИФИКАЦИИ ФОРМ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Возможна ли классификация форм высших порядков? Ведь их существует бесконечно много. Это еще одна из нерешенных проблем булевой алгебры. Однако на практике очень часто приходится иметь дело с формами высших порядков, поэтому здесь уделим им некоторое внимание.

Если неизвестно, существует ли классификация форм высших порядков, подобно классификации нормальных форм, то мы можем сами задать ту форму, к которой хотим свести заданную функцию. Эту форму будем задавать в виде булевой функции, аргументами которой являются функции φ_i ($i = 1, 2, \ldots, k$; $k > 1$, k — целое число), зависящие от тех же аргументов, что и функция f, и имеющие порядок не ниже первого.

Пример 1. Представим функцию $f = AB + CD$ в виде конъюнкции двух функций второго порядка:

$$f = \varphi_1 \cdot \varphi_2 = AB + CD.$$

Поскольку нет никаких ограничений на вид функций φ_1 и φ_2, кроме того, что они должны быть выражениями второго порядка, то в качестве решения можно рассматривать соотношение $\varphi_1 = \varphi_2 = f$, так как представление функции в виде $f = (AB + CD)(AB + CD)$ формально полностью удовлетворяет условию задачи. Однако мы не будем ограничиваться такими тривиальными решениями и рассмотрим случай, когда $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Обратимся к рис. 102. На нем изображены три карты Вейча. Слева находится карта для функции f. Справа, после знака равенства, — две карты, обозначенные символами φ_1 и φ_2 и соединенные знаком конъюнкции.

1	1		
1	1	1	
	1	1	

f

=

1	1	0	0
1	1	1	0
1	1	1	
1	1		

φ_1

&

1	1	1	1
1	1	1	1
0	1	1	
0	0		

φ_2

Рис. 102

Выясним, как заполнить карты φ_1 и φ_2. Прежде всего, заметим, что все минтермы функции f должны входить в обе функции φ_1 и φ_2, поскольку если на каком-либо наборе $f = 1$, то конъюнкция $\varphi_1\varphi_2$ будет равна единице лишь в единственном случае — когда на этом наборе единичное значение примут обе функции: φ_1 и φ_2. Поэтому на обеих правых картах в клетках 3, 7, 11, 12, 13, 14, 15 ставим единицы. В других клетках карты φ_1 также можно ставить единицы, но при условии, что в тех же клетках карты φ_2 будут записаны нули. Это можно сделать многими способами. В данном случае решено единицы поставить в клетках 8, 9, 10. В этих же клетках карты φ_2 записаны нули.

На карте φ_2 в оставшихся клетках также можно произвольно записывать нули и единицы. Пусть это будут клетки 4, 5, 6. Тогда на карте φ_1 в клетках 4, 5, 6 ставим нули. В клетках 0, 1, 2 обеих карт решено оставить нули. По картам получаем:

$$\varphi_1 = A + CD;$$
$$\varphi_2 = B + CD.$$

В результате искомая форма функции принимает вид

$$f = (A + CD)(B + CD).$$

Пример 2. Функцию

$$f = BCD + A\overline{B}\overline{C} + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{B}C\overline{D}$$

представить в форме вида $f = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_3$.

Согласно условию имеем

$$\varphi_1\varphi_2 + \varphi_3 = BCD + A\overline{B}\overline{C} + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{B}C\overline{D}.$$

Как и в предыдущем случае, существует много вариантов представления функций φ_1, φ_2, φ_3. Рассмотрим один из них. На рис. 103 приведены четыре карты Вейча, соединенные знаками равенства, конъюнкции и дизъюнкции. Пользуясь заданным условием, заполняем эти карты:

1			1
	1	1	1
1		1	
1	1	1	

f

=

1	×	×	×
	1	1	×
1	×	1	
1	1	1	

φ_1

&

1			×
×	1	1	×
1		1	×
1	1	1	×

φ_2

+

×			1
	×	×	1
×		×	
×	×	×	

φ_3

Рис. 103

1) на левую карту (обозначенную символом f) наносим функцию f;

2) так как φ_3 — функция не ниже первого порядка, то можно записать (разумеется, возможны и другие варианты): $\varphi_3 = \bar{A}B\bar{C}$;

3) поскольку минтермы m_4 и m_5 входят в выражение φ_3, то в конъюнкцию $\varphi_1\varphi_2$ они могут входить, а могут и не входить, т. е. на состояниях 0100 и 0101 значение конъюнкции $\varphi_1\varphi_2$ никто проверять не будет, следовательно, эти состояния являются неопределенными, поэтому в клетках 4 и 5 карт φ_1 и φ_2 ставим крестики;

4) на карте φ_3 (рис. 103) имеются только два минтерма m_4 и m_5. Чтобы остальные минтермы вошли в функцию f, они обязательно должны войти в конъюнкцию $\varphi_1\varphi_2$. Следовательно, на карты φ_1 и φ_2 переписываем единицы с карты f (кроме минтермов 4 и 5), а в карте φ_3 на этих же клетках ставим крестики, поскольку на всех наборах, на которых $\varphi_1\varphi_2 = 1$, значение функции φ_3 проверять никто не будет;

5) оставшиеся клетки на картах φ_1 и φ_2 могут заполняться произвольно, но так, чтобы в одной и той же клетке хотя бы на одной карте стоял нуль. Вариант такого заполнения приведен на рис. 103.

Искомые функции имеют вид

$$\varphi_1 = C + A\bar{B} + A\bar{D};$$
$$\varphi_2 = \bar{C} + BD + \bar{B}\,\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B};$$
$$\varphi_3 = \bar{A}B\bar{C}.$$

Если не повышать их порядок, то для функции f получим

$$f = (C + A\bar{B} + A\bar{D})(\bar{C} + BD + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}) + \bar{A}B\bar{C}. \tag{47}$$

Заметим, что исходное выражение имеет 18 вхождений аргументов, в то время как функция (47) — только 15. Если же повысить порядок функций φ_1 и φ_2, то получим выражение, имеющее всего 13 вхождений аргументов:

$$f = [C + A(\bar{B} + \bar{D})][\bar{C} + BD + \bar{B}(\bar{A} + \bar{D})] + \bar{A}B\bar{C}.$$

В общем же случае, когда функцию требуется представить в какой-либо заранее заданной форме высшего порядка, число вхождений аргументов может и возрасти. Например, если функцию $f = A\bar{B}$, представить в форме высшего порядка $f = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_3\varphi_4$, то число вхождений аргументов будет более двух, каковы бы ни были функции φ_1, φ_2, φ_3 и φ_4 (все не ниже первого порядка).

Упражнения

1. Определите наименьшее число вхождений аргументов, которое будет иметь форма высшего порядка вида:

1) (ИЧА). $f = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_3$;
2) (КУР). $f = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3$;
3) (МЫС). $f = \varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4\varphi_5)$;
4) (ДУТ). $f = (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1 + \varphi_3)(\varphi_1 + \varphi_4)$.

2. Определите наименьшее число вхождений аргументов, которое может иметь форма высшего порядка, если выражения φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 являются функциями второго порядка, представленными в ДНФ:

1) (МИУ). $f = \varphi_1\varphi_2$;
2) (МЫХ). $f = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3$;
3) (Х0Ц). $f = \varphi_1 + \varphi_2\varphi_3 + \varphi_1\varphi_4$;
4) (ОУФ). $f = \varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$.

3. Всякая булева функция представима:

1) в совершенной ДНФ;
2) в сокращенной ДНФ;
3) в тупиковой ДНФ;
4) в минимальной ДНФ;
5) в ДНФ;
6) в совершенной КНФ;
7) в сокращенной КНФ;
8) в тупиковой КНФ;
9) в минимальной КНФ;
10) в форме высшего порядка.

Укажите номера тех форм, к которым принадлежат следующие функции:

1) (ВШН). $f = AB$;
2) (ИЛМ). $f = A + \overline{B}$;
3) (ЕЧ0). $f = A$;
4) (УХП). $f = \overline{PQ}$;
5) (ИХР). $f = A + \overline{A}B$;
6) (ЮУК). $f = A + \overline{A}$;
7) (УМЖ). $f = (A + BC)(\overline{A} + B)$;
8) (ИЙС). $f = (A + B)(B + C)$;
9) (ШМТ). $f = (A + B)(\overline{A} + B)$;
10) (УЮФ). $f = AB + \overline{A}B + A\overline{B}$;
11) (УЭХ). $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}$;
12) (НЫН). $f = A(B + C)$.

10 СИММЕТРИЧЕСКИЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

10.1. ПОНЯТИЕ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В [5] симметрические булевы функции отнесены к специальным двоичным функциям наряду с такими как линейные, монотонные, вырожденные, невырожденные и др. Однако в связи с большой практической значимостью симметрические функции вполне заслуживают того, чтобы их выделить из указанного ряда. Поэтому в данном пособии им посвящена отдельная глава.

Согласно [24] булева функция n аргументов называется **симметрической**, если она инвариантна относительно всякой перестановки этих аргументов.

Простейшими примерами симметрических функций являются функции, представленные дизъюнкцией и конъюнкцией неинверсных переменных:

$$f(A, B) = A + B = B + A; \;\; f(A, B) = AB = BA.$$

Если же в дизъюнкцию или конъюнкцию входят как инверсные, так и неинверсные переменные, то такие функции не являются симметрическими. Например, функция $f(A,B,C) = AB\overline{C}$ не является симметрической, так как существуют перестановки аргументов, приводящие к изменению функции. Чтобы показать это, переставим местами переменные B и C: $f_1 = AC\overline{B}$. В результате получилось $f_1 \neq f$.

Примером более сложной симметрической функции является выражение вида

$$f = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}. \tag{48}$$

Чтобы убедиться в симметричности этой функции, достаточно проверить все варианты перестановок: A, C, B; B, A, C; C, A, B; B, C, A; C, B, A. Рассмотрим первый вариант A, C, B. Буква A остается без изменений, а вместо буквы B поставим букву C, вместо C — букву B во всех конъюнкциях функции (48). При этом необходимо иметь в виду, что меняются местами только буквы, а операции дизъюнкции, конъюнкции и инверсии остаются на своих местах. Выполнив перестановки, получаем

$$f = \bar{A}CB + A\bar{C}B + AC\bar{B}.$$

Расположим буквы в алфавитном порядке:

$$f = \bar{A}BC + AB\bar{C} + A\bar{B}C.$$

Получилось выражение, тождественно равное (48).

Рассмотрим второй вариант перестановки B, A, C. Вместо буквы A запишем B, вместо B подставим A, букву C оставим на месте: $f = \bar{B}AC + B\bar{A}C + BA\bar{C}$.

Получилось выражение, тождественно равное функции (48).

Аналогичным образом можно убедиться в том, что и все остальные перестановки аргументов оставляют выражение (48) неизменным.

Упражнения

1. (ТВЕ). Укажите номера функций, являющихся симметрическими:
1) $f = AB\bar{C}$; 3) $f = \bar{A} + B + C$; 5) $f = A + \bar{A} + B$;
2) $f = A + B$; 4) $f = A\bar{B} + \bar{A}B$; 6) $f = A\bar{B} + \bar{A}B + C$.

2. (530). Некоторая функция зависит от 6 аргументов. Чтобы доказать ее симметричность, решено проверить все варианты перестановок шести аргументов. Сколько существует таких перестановок?

3. (УДО). Укажите номера симметрических функций:
1) $f = A + \bar{A} + B$; 3) $f = A + BC$; 5) $f = A\bar{B} + AB$;
2) $f = A\bar{A} + B\bar{C}$; 4) $f = 1$; 6) $f = AB + \bar{A}\bar{B}$.

10.2. СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Запишем несколько симметрических функций:

$$f_1(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C};$$

$$f_2(A,B,C,D) = AB\bar{C}\,\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\,\bar{B}CD;$$

$$f_3(A,B,C,D,E) = \bar{A}BCDE + A\bar{B}CDE + AB\bar{C}DE + ABC\bar{D}E + ABCD\bar{E}.$$

Нетрудно заметить свойство, общее для всех этих функций, состоящее в том, что число всех минтермов, образующих функцию, равно

$$Q = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где C_n^k — число сочетаний без повторений из n по k; n — число аргументов функции; k — число неинверсных аргументов функции.

Например, для функции f_2 имеем:

$$n = 4; \quad k = 2; \quad Q = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6.$$

Отсюда следует, что функция f_2 принимает единичное значение только в том случае, если единице будут равны точно два любых аргумента.

Еще одна особенность выражений $f_1 - f_3$ состоит в том, что они не поддаются минимизации (в смысле Квайна). Их ДНФ совпадают с сокращенными, тупиковыми и минимальными формами, так как все минтермы одновременно являются и простыми импликантами. Этим обусловлены трудности представления симметрических функций. Как, например, записать функцию, принимающую единичное значение всякий раз, когда значение единицы принимают только четыре аргумента из восьми? Аналитическая запись такой функции содержит 70 минтермов, по 8 аргументов каждый, т. е. является громоздкой и совершенно необозримой. Чтобы избавиться от этих трудностей, для симметрических функций введена сокращенная запись. В [24] симметрические функции обозначаются символом $S_k(n)$, где n — число аргументов, от которых зависит функция; k — число аргументов, равных единице, при которых функция принимает единичное значение. Например, вышеприведенные три функции через S-символы представятся в виде:

$$f_1(A,B,C) = S_1(3);$$
$$f_2(A,B,C,D) = S_2(4);$$
$$f_3(A,B,C,D,E) = S_4(5).$$

По сокращенной записи легко найти развернутое аналитическое выражение симметрической функции. Например, функция $S_3(5)$ состоит из 10 пятибуквенных минтермов, в каждом из которых точно 3 неинверсных аргумента:

$$S_3(5) = ABC\bar{D}\bar{E} + AB\bar{C}D\bar{E} + A\bar{B}CD\bar{E} + \bar{A}BCD\bar{E} + ABC\bar{C}\bar{D}E +$$
$$+ A\bar{B}C\bar{D}E + \bar{A}BC\bar{D}E + A\bar{B}\bar{C}DE + \bar{A}B\bar{C}DE + \bar{A}\bar{B}CDE.$$

Таким образом, симметрические функции можно задавать двумя способами: сокращенным и развернутым аналитическим.

Нижний индекс в сокращенной записи симметрической функции, согласно [24], называется ***a*-числом**. Очевидно, что a-число может быть равным 0, 1, 2, ..., n, откуда следует, что всего существует $n + 1$ симметрических функций с одиночным a-числом. Если $n = 0$, то имеется только одна симметрическая функция с a-числом, равным нулю. Это $S_0(0) = 0$. Если $n = 1$, то имеем две функции

$$S_0(A) = \bar{A}; \qquad S_1(A) = A$$

с a-числами, равными соответственно 0 и 1.

Если $n = 2$, то

$$S_0(A,B) = \bar{A}\bar{B}; \quad S_1(A,B) = \bar{A}B + A\bar{B}; \qquad S_2(A,B) = AB,$$

где a-числа равны соответственно 0, 1, 2.

Если $n = 3$, то a-числа равны 0, 1, 2, 3:

$$S_0(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C};$$
$$S_1(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C};$$
$$S_2(A,B,C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C};$$
$$S_3(A,B,C) = ABC.$$

Упражнения

1. Найдите числа n и k для симметрических функций:

1) (ФА6). $f = A\bar{B} + \bar{A}B$; 3) (ВЛЯ). $f = ABCD$;
2) (ФОК). $f = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$; 4) (АЗП). $f = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}$.

2. Укажите номера минтермов следующих симметрических функций:

1) (756). $S_0(4)$; 2) (ЕНЫ). $S_1(3)$; 3) (ЕЙС). $S_2(4)$; 4) (ЛЫТ). $S_3(4)$.

3. Какие номера минтермов необходимо включить в функцию, чтобы она стала симметрической?

1) (ЗАЖ). $S_2(A,B,C,D) = \bar{A}\,\bar{B}CD + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + \ldots$
2) (ДЕД). $S_3(A,B,C,D) = ABC\bar{D} + A\bar{B}CD + \ldots$
3) (596). $S_2(A,B,C,D,E) = \bar{A}B\bar{C}D\bar{E} + A\bar{B}\bar{C}\,\bar{D}E + A\bar{B}C\bar{D}\,\bar{E} + \ldots$

4. Найдите число минтермов, содержащихся в следующих симметрических функциях с одиночными a-числами:

1) (ЗИФ). $S_6(8)$; 3) (ГАВ). $S_3(10)$; 5) (ВЦ5). $S_{10}(10)$;
2) (МУ0). $S_{10}(11)$; 4) (221). $S_0(12)$; 6) (КЦЛ). $S_5(8)$.

5. Найдите число вхождений аргументов функций:

1) (МУР). $S_3(4)$; 3) (ОЛК). $S_2(10)$; 5) (МЯН). $S_0(7)$;
2) (ЗЕМ). $S_2(8)$; 4) (ЛБС). $S_1(8)$; 6) (ТКС). $S_3(3)$.

6. Найдите наименьшие значения x, если задано Q — число минтермов симметрической функции:

1) (350). $S_x(5)$, $Q = 10$; 3) (ЭЭП). $S_3(x)$, $Q = 20$;
2) (370). $S_x(8)$, $Q = 56$; 4) (ПР0). $S_4(x)$, $Q = 70$.

7. Найдите a-числа симметрических функций:

1) (АЛ0)! $f_1 = ABCD$; $f_2 = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C}\,\bar{D}$;
2) (М0Ю)! $f_1 = \bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$; $f_2 = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$.

10.3. ОПЕРАЦИИ НАД СИММЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Над симметрическими функциями можно выполнять операции дизъюнкции, конъюнкции и инверсии.

Если две симметрические функции с a-числами k_1 и k_2 зависят от одних и тех же аргументов, то их дизъюнкцией является также симметрическая функция, содержащая два a-числа k_1 и k_2. Например, рассмотрим две функции:

$$f_1 = S_1(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C};$$

$$f_2 = S_2(A,B,C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C};$$

с a-числами, равными соответственно $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Их дизъюнкция содержит минтермы обеих функций:

$$f_1 + f_2 = S_1(A,B,C) + S_2(A,B,C) = \bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}.$$

Симметрические функции с несколькими a-числами во многих случаях поддаются минимизации в смысле Квайна. В данном случае имеем две минимальные ДНФ и одну минимальную КНФ:

$$f_1 + f_2 = A\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B = B\bar{C} + A\bar{B} + \bar{A}C = (A + B + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}),$$

которые содержат по шесть вхождений аргументов, в то время как до минимизации было 18 букв.

Чтобы достичь ясности в вопросах минимизации симметрических функций, рассмотрим все функции четырех аргументов с одиночными a-числами:

$$S_0(4) = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C}\,\bar{D};$$
$$S_1(4) = A\bar{B}\bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}\bar{C}D;$$
$$S_2(4) = \bar{A}\,\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D} + ABC\bar{C}\,\bar{D};$$
$$S_3(4) = \bar{A}BCD + A\bar{B}CD + AB\bar{C}D + ABC\bar{D};$$
$$S_4(4) = ABCD.$$

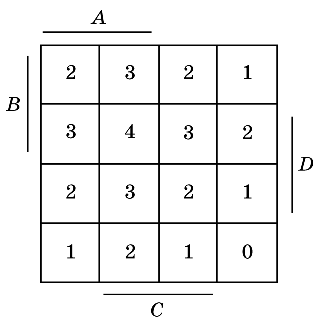


Рис. 104

Нанесем эти функции на карту Вейча (рис. 104), обозначая их a-числами. По карте видно, что дизъюнкция двух симметрических функций минимизируется только в том случае, если их a-числа в натуральном ряду являются соседними. Рассмотрим, например, функции $S_3(4)$ и $S_4(4)$. На карте Вейча их дизъюнкция представлена цифрами 3 и 4. Мысленно заменив их единицами, а все остальные цифры — нулями, получим минимальную ДНФ:

$$S_3(4) + S_4(4) = S_{3,\,4}(4) = ABC + ABD + ACD + BCD.$$

Рассмотрим общий случай. Пусть M — множество минтермов, образующих первую симметрическую функцию с одиночным a-числом, N — множество минтермов, образующих вторую симметрическую функцию также с одиночным a-числом. Склеивающихся минтермов в множестве M нет. Их нет и в множестве N. Если разность a-чисел первой и второй функций превышает единицу, то ни один минтерм множества M не склеивается ни с одним минтермом множества N, так как они отличаются инверсиями двух и более аргументов.

Если же разность a-чисел первой и второй функций равна единице и обе функции зависят от одних и тех же аргументов, то в множестве M всегда найдутся минтермы, склеивающиеся с минтермами множества N.

Таким образом, дизъюнкция двух симметрических функций с одиночными a-числами, зависящих от одних и тех же аргументов, минимизируется, если разность их a-чисел равна единице. Если же разность a-чисел превышает единицу, то дизъюнкция этих функций не поддается минимизации.

Конъюнкция двух симметрических функций с различными одиночными a-числами тождественно равна нулю. Это следует из того, что множества M и N не пересекаются. Например:

$$S_1(A,B,C)\cdot S_2(A,B,C) = (\bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C})(\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}) =$$
$$= \bar{A}\,\bar{B}C\cdot\bar{A}BC + \bar{A}\,\bar{B}C\cdot A\bar{B}C + \bar{A}\,\bar{B}C\cdot AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}\cdot\bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C}\cdot A\bar{B}C +$$
$$+\bar{A}B\bar{C}\cdot AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}\cdot\bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}\cdot A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}\cdot AB\bar{C} = 0.$$

В общем случае конъюнкция двух симметрических функций есть симметрическая функция с a-числами, являющимися общими для обеих функций. Например, найдем конъюнкцию следующих двух симметрических функций:

$$S_{1,2,3}(A, B, C, D) \cdot S_{2,3,4}(A, B, C, D) = S_{2,3}(A, B, C, D).$$

Результатом этой операции является симметрическая функция, a-числа которой входят в обе заданные функции.

Инверсия симметрической функции f, зависящей от n аргументов, есть симметрическая функция с a-числами, не входящими в функцию f, но являющимися элементами множества W всех возможных a-чисел симметрической функции n аргументов. Например:

$$\overline{S}_{0,1,2}(A,B,C,D) = S_{3,4}(A,B,C,D).$$

В данном случае $W = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Инвертируемая функция содержит a-числа 0, 1, 2, а ее инверсия — 3, 4.

Упражнения

1. Найдите a-числа функций (все функции зависят от одних и тех же аргументов):

1) (ТЭР). $f_1 = S_0(A, B, C, D) + S_{1,2}(A, B, C, D) + S_{1,2,4}(A, B, C, D)$;
2) (0ЕС). $f_2 = S_1(4) + S_{2,3}(4) + S_{2,3,4}(4)$;
3) (П0Н). $f_3 = S_5(7) + S_{5,6,7}(7) + S_0(7)$.

2. Укажите номера функций, которые могут быть минимизированы. Все функции зависят от одних и тех же восьми аргументов.

1) (ЖНИ).	2) (Р50).	3) (Л00).
1) $S_{1,3,4,7}$;	1) $S_{0,1,5}$;	1) $S_{1,3,4,7}$;
2) $S_{0,2,5,6}$;	2) $S_{1,3,8}$;	2) $S_{2,5,7}$;
3) $S_{0,3,6,7}$;	3) $S_{2,7,8}$;	3) $S_{1,6,7}$;
4) $S_{1,2,4,6,8}$;	4) $S_{1,2,3,7,8}$;	4) $S_{2,6,8}$;
5) $S_{1,3,5,7}$;	5) $S_{2,4,6,8}$;	5) $S_{4,5,7}$;
6) $S_{0,8}$.	6) $S_{0,4,8}$.	6) $S_{4,5,6,7,8}$.

3. Сколько вхождений аргументов имеют минимальные ДНФ следующих функций?

1) (ЯМУ). $S_{1,3}(4)$; 3) (ШУТ). $S_{0,1,2,3}(4)$; 5) (МАУ). $S_{1,2,3,4}(4)$;
2) (204). $S_{2,3,4}(4)$; 4) (ЛИС). $S_{0,1,2,3,4}(4)$; 6) (ШАВ). $S_0(4)$.

4. Сколько вхождений аргументов имеют минимальные КНФ следующих функций?

1) (0МС). $S_{2,3}(4)$; 3) (НУЗ). $S_4(4)$; 5) (УУТ). $S_{2,3,4}(4)$;
2) (ЧЕШ). $S_0(4)$; 4) (ПАФ). $S_{1,4}(4)$; 6) (ЛАС). $S_{0,4}(4)$.

5. Найдите номера минтермов следующих функций, зависящих от четырех аргументов:

1) (БЗП). $S_{2,3}$; 4) (ШИК). $S_{1,4} \cdot S_{1,2,3} \cdot S_{0,1,2}$;
2) (0ЛУ). $S_{0,1,2,3,4} \cdot S_{1,2,3,4} \cdot S_{1,2,3}$; 5) (ММШ). $S_{0,1,4} \cdot S_{2,3,4}$;
3) (КЭБ). $S_{0,1,4}$; 6) (ЛАТ). $S_{1,2} \cdot S_{1,2,3} \cdot S_{0,1}$.

6. Найдите номера минтермов следующих функций, зависящих от четырех аргументов:

1) (УФО). $\bar{S}_{1,2,4}$;

2) (ХАУ). $\bar{S}_{0,1,2}$;

3) (ОИК). $\overline{S_{1,2} + S_{1,3}} + S_1 + \bar{S}_{0,2,3,4}$;

4) (ВТМ). $\bar{S}_3$;

5) (ЭКБ). $\overline{S_{2,3,4} \cdot S_{1,2,3,4}} + S_0$;

6) (ЛИХ). $\overline{S_{1,2} + S_{1,3}} + \bar{S}_{0,2,3,4}$.

10.4. РАЗЛОЖЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДНФ

Пусть a-число симметрической функции n переменных равно k. Тогда по теореме разложения получаем

$$S_k(A_1, A_2, \ldots, A_n) = A_1 \cdot S_{k-1}(A_2, \ldots, A_n) + \bar{A}_1 \cdot S_k(A_2, \ldots, A_n),$$

т. е. при разложении симметрической функции по одному аргументу получаются две симметрические функции:

$$S_{k-1}(A_2, \ldots, A_n) \text{ и } S_k(A_2, \ldots, A_n).$$

Первая из них содержит a-число на единицу меньше исходной и обе зависят от $n-1$ аргументов. Разложим, например, функцию $S_2(A, B, C, D)$ по аргументу A:

$$S_2(A, B, C, D) = A \cdot S_1(B, C, D) + \bar{A} \cdot S_2(B, C, D). \tag{49}$$

Чтобы убедиться в справедливости этого выражения, запишем функцию $S_2(A, B, C, D)$ в развернутом виде:

$$S_2(A, B, C, D) = ABC̄\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\,\bar{B}CD.$$

Вынесем за скобки переменные A и $\bar{A}$:

$$S_2(A, B, C, D) = A(B\bar{C}\,\bar{D} + \bar{B}C\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D) + \bar{A}(BC\bar{D} + B\bar{C}D + \bar{B}CD).$$

Очевидно, что скобочные выражения являются симметрическими функциями:

$$B\bar{C}\,\bar{D} + \bar{B}C\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D = S_1(B, C, D);$$
$$BC\bar{D} + B\bar{C}D + \bar{B}CD = S_2(B, C, D).$$

Умножим первое из них на A, а второе — на $\bar{A}$ и объединим знаком дизъюнкции, тогда получим выражение (49).

Таким образом, разложение симметрической функции с одиночным a-числом по какой-либо переменной совпадает с операцией вынесения этой переменной за скобки.

Продолжим разложение по переменной B:

$$\begin{aligned} S_2(A, B, C, D) &= A[B \cdot S_0(C, D) + \bar{B} \cdot S_1(C, D)] + \bar{A}[B \cdot S_1(C, D) + \bar{B} \cdot S_2(C, D)] = \\ &= ABS_0(C, D) + A\bar{B}S_1(C, D) + \bar{A}BS_1(C, D) + \bar{A}\,\bar{B}S_2(C, D). \end{aligned} \tag{50}$$

Каждую из функций S_0, S_1, S_2 разложим по переменным C и D:

$$S_0(C,D)=\bar{C}\,\bar{D};$$
$$S_1(C,D)=C\cdot S_0(D)+\bar{C}S_1(D)=C\bar{D}+\bar{C}D;$$
$$S_2(C,D)=CD.$$

Подставив эти выражения в (50), получаем окончательно:

$$S_2(A,B,C,D)=ABC\bar{C}\,\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}\,\bar{B}CD.$$

Если симметрическая функция содержит несколько a-чисел, то разложение ее осуществляется точно так же, если сначала функцию представить в виде дизъюнкции симметрических функций с одиночными a-числами. Например:

$$S_{1,2,5}(A, B, C, D, E) = S_1(A, B, C, D, E) +$$
$$+ S_2(A, B, C, D, E) + S_5(A, B, C, D, E).$$

Упражнения

1. (ДКН). В выражении $S_2(A, B, C, D, E)$ вынесите за скобки переменную C. Для самоконтроля найдите a-число и все переменные, от которых зависит находящаяся в скобках симметрическая функция.

2. (ППТ). В выражении $S_2(A, B, C, D, E)$ вынесите за скобки переменную $\bar{C}$. Для самоконтроля найдите a-число и все переменные, от которых зависит находящаяся в скобках симметрическая функция.

3. (МБМ). Найдите a-числа: x, y, z, v, если известно, что в результате разложения по переменным A и B симметрической функции $S_3(A, B, C, D, E)$ получилось выражение:

$$S_3(A,B,C,D,E)=ABS_x+A\bar{B}S_y+\bar{A}BS_z+\bar{A}\bar{B}S_v.$$

4. (ОЯР). Некоторую симметрическую функцию f разложили по переменной C. В результате получилось выражение вида

$$f=CS_2(B,D,E,F)+\bar{C}S_3(B,D,E,F).$$

Найдите a-число исходной функции f и перечислите все ее аргументы (в алфавитном порядке).

5. (ДАН). В результате разложения по переменной Q симметрической функции f получилось выражение: $f = QS_4(P, R, S, T)$. Найдите a-число исходной функции f и перечислите все ее аргументы.

6. (НУН). Симметрическую функцию f разложили по аргументу C, в результате чего получилось выражение:

$$f=\bar{C}S_0(D,E,F).$$

Найдите a-число исходной функции f и перечислите все ее аргументы.

7. (РПУ). Симметрическую функцию f разложили по переменной D, в результате чего получилось выражение:

$$f=\bar{D}S_0(C,E,F)+DS_3(C,E,F).$$

Найдите a-числа исходной функции f и перечислите все ее аргументы.

10.5. РАЗЛОЖЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ КНФ

Пусть a-число симметрической функции n аргументов равно k. Тогда

$$S_k(A_1, A_2, \ldots, A_n) = [A_1 + S_k(A_2, \ldots, A_n)]\ [\bar{A}_1 + S_{k-1}(A_2, \ldots, A_n)].$$

Для примера рассмотрим функцию $S_2(A, B, C, D)$. Разложим ее по аргументу A:

$$S_2(A, B, C, D) = [A + S_2(B, C, D)][\bar{A} + S_1(B, C, D)].$$

Полученный результат разложим по аргументу B:

$$S_2(A, B, C, D) = [B + A + S_2(C, D)][\bar{B} + A + S_1(C, D)]\ [B + \\ + \bar{A} + S_1(C, D)][\bar{B} + \bar{A} + S_0(C, D)]. \qquad (51)$$

Выражения, находящиеся в скобках, разложим по переменным C и D:

$$B + A + S_2(C, D) = (A + B + C + \bar{D})(A + B + C + D)(A + B + \bar{C} + D);$$
$$\bar{B} + A + S_1(C, D) = (A + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D});$$
$$B + \bar{A} + S_1(C, D)(\bar{A} + B + C + D)(\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D});$$
$$\bar{B} + \bar{A} + S_0(C, D) = (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}).$$

Подставим найденные выражения в (51):

$$S_2(A, B, C, D) = (A + B + C + \bar{D})(A + B + C + D)\,(A + \\ + B + \bar{C} + D)(A + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})\,\& \\ \&\,(\bar{A} + B + C + D)(\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + C + \\ + \bar{D})\,(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}).$$

Получили полное разложение симметрической функции $S_2(A, B, C, D)$.

Упражнения

1. (ЛТН). Дано разложение по аргументу A:

$$S_2(A, B, C) = [A + S_x(\ldots)][\bar{A} + S_y(\ldots)].$$

Найдите числа x и y; вместо точек поставьте буквы.

2. (МТ0). В результате разложения по аргументу A получилось выражение $[A + S_0(B,C)]\bar{A}$. Найдите a-число исходной функции и перечислите ее аргументы.

3. (УЛВ). В результате разложения симметрической функции по переменной A получилось выражение $[A + S_2(B,C)][\bar{A} + S_1(B,C)]$. Разложите его по всем остальным аргументам и номера макстермов введите в устройство (по возрастанию).

4. (ОЛБ). В результате разложения симметрической функции по переменным A и B получилось выражение

$$[A + B + S_2(C,D)][A + \bar{B} + S_1(C,D)]\ [\bar{A} + B + S_1(C,D)][\bar{A} + \bar{B} + S_0(C,D)].$$

Разложите функцию по переменным C и D. Номера макстермов введите в устройство (в порядке возрастания).

(512). Найдите a-число и перечислите аргументы, от которых зависит исходная симметрическая функция.

5. (ЦПИ). Найдите a-числа и перечислите аргументы симметрической функции, представленной в виде $S = [A + S_{1,2}(B,C)][\bar{A} + S_{0,1}(B,C)]$.

10.6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ СИММЕТРИИ ФУНКЦИЙ

До сих пор мы рассматривали функции с симметрией относительно неинверсных переменных. Это частный случай. В общем случае любые переменные, относительно которых функция является симметрической, могут быть инверсными. Рассмотрим, например, функцию с симметрией относительно неинверсных переменных:

$$S_3(A,B,C,D) = \bar{A}BCD + A\bar{B}CD + AB\bar{C}D + ABC\bar{D}. \tag{52}$$

Выясним, какой вид примет аналитическое выражение функции, если, например, переменные B и C принять инверсными. Для этого над всеми буквами B и C в обеих частях выражения (52) поставим знаки отрицания:

$$\begin{aligned} S_3(A,\bar{B},\bar{C},D) &= \bar{A}\,\bar{B}\bar{C}\,D + A\bar{\bar{B}}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{\bar{C}}D + A\bar{B}\bar{C}\,\bar{D} = \\ &= \bar{A}\,\bar{B}\bar{C}D + AB\bar{C}D + A\bar{B}CD + A\bar{B}\bar{C}\,\bar{D}. \end{aligned} \tag{53}$$

Получилось выражение, не равное (52). Это совершенно новая симметрическая функция с симметрией относительно переменных A, $\bar{B}$, $\bar{C}$, D, среди которых переменные $\bar{B}$ и $\bar{C}$ являются инверсными. Симметричность ее можно установить путем перестановки аргументов. Выберем, например, следующий вариант замены переменных: D, A, B, C, т. е. вместо A запишем D, вместо B — A, вместо C — B, вместо D — C. Заметим, что перестановка осуществляется в формуле (52), а не в (53), т. е. в той функции, которая симметрична относительно неинверсных переменных:

$$S_3(A,B,C,D) = \bar{D}ABC + D\bar{A}BC + DA\bar{B}C + DAB\bar{C}.$$

После этого в левой и правой частях выражения ставим знаки инверсии над всеми буквами B и C:

$$\begin{aligned} S_3(A,B,C,D) &= \bar{D}A\bar{B}\bar{C} + D\bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + DA\bar{\bar{B}}\bar{C} + DA\bar{B}\bar{\bar{C}} = \\ &= A\bar{B}\bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}\bar{C}D + AB\bar{C}D + A\bar{B}CD. \end{aligned}$$

В результате получилось выражение, тождественно равное (53).

Аналогичным образом можно убедиться в неизменности функции (53) при всех других перестановках переменных A, $\bar{B}$, $\bar{C}$, D.

Упражнения

1. (КЛТ). На основе функции $S_2(A,\ B,\ C)$ найдите функцию $S_2(A,\bar{B},C)$. В устройство введите число инверсных и число неинверсных переменных.

2. (ГЛО). Найдите минимальную ДНФ функции $S_{3,4}(\bar{A},B,C,\bar{D})$. В устройство введите число инверсных и число неинверсных переменных.

3. (АЛБ). Определите аналитическое выражение функции $\bar{S}_{0,1,2}(B,\bar{C},\bar{D})$.

4. (СОС). Сколько инверсных и сколько неинверсных переменных содержится в аналитической записи функции $S_{1,4}(\bar{A},B,C,D)$?

11 ЧИСЛОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

11.1. ПОНЯТИЕ ИЗОБРАЖАЮЩЕГО ЧИСЛА БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

В предыдущих разделах были описаны следующие способы представления булевых функций: аналитический, табличный, матричный (карты Вейча), в виде набора номеров минтермов и графический (при помощи граф-схем). Рассмотрим еще один способ — числовой.

Пусть дана некоторая функция трех аргументов, например:

$$f = A\overline{B} + BC + \overline{B}\,\overline{C}. \tag{54}$$

Представим ее в виде набора номеров минтермов:

$$f = (0, 3, 4, 5, 7).$$

Всего существует восемь минтермов трех аргументов. Расположим их в один ряд, начиная с m_0, и единицами отметим минтермы, входящие в заданную функцию, а остальные минтермы обозначим нулями:

$$\begin{array}{cccccccc} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Единицы и нули образуют восьмизначное двоичное число, которое называют **изображающим числом** функции f и обозначают знаком # [17]:

$$\#(A\overline{B} + BC + \overline{B}\,\overline{C}) = 1001\quad 1101.$$

Если функция (54) зависит от четырех аргументов, то изображающее число представится в виде

$$\#(A\overline{B} + BC + \overline{B}\,\overline{C}) = 1100\quad 0011\quad 1111\quad 0011.$$

Таким образом, одна и та же функция может быть представлена различными изображающими числами в зависимости от **базиса**, т. е. от числа аргументов (в [17] под базисом понимается таблица, содержащая все возможные наборы значений аргументов).

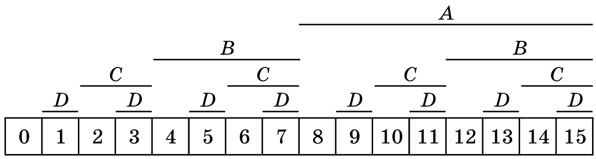


Рис. 105

1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1

Рис. 106

В связи с неоднозначностью представления функции в виде изображающих чисел необходимо ввести понятие **минимального базиса** (МБ). Базис называется минимальным, если данная булева функция существенно зависит от всех его переменных. Для определения МБ достаточно найти какую-либо из минимальных ДНФ (либо КНФ). Все входящие в нее аргументы будут являться переменными, от которых функция существенно зависит. Например, базис (A, B, C, D) для функции

$$f = A\overline{C} + \overline{A}C + AB\overline{D} + BCD$$

не является минимальным. Найдем ее минимальную ДНФ:

$$f = A\overline{C} + \overline{A}C + AB.$$

В полученном выражении нет аргумента D. Следовательно, эта функция имеет минимальный базис (A, B, C).

Изображающее число можно рассматривать как частный случай матричного представления булевой функции, как особый вид карты Вейча с линейным расположением минтермов. На рис. 105 приведена карта четырех переменных, в клетках которой записаны номера соответствующих минтермов, а на рис. 106 изображена та же карта, но вместо номеров минтермов на ней указаны единицы функции (54) точно так же, как и в случае обычных карт Вейча, описанных в подразделе 6.6. Так как карта имеет только один ряд клеток, то однозначность представления функции не нарушится, если оставить только единицы и нули, а все остальное — буквы, линии, клетки — удалить. В результате получим изображающее число.

Приведем еще несколько примеров изображающих чисел для базиса A, B, C, D.

$$\#(A+B) = 0000\quad 1111\quad 1111\quad 1111;$$
$$\#(A) = 0000\quad 0000\quad 1111\quad 1111;$$
$$\#(AB) = 0000\quad 0000\quad 0000\quad 1111;$$
$$\#(\overline{B}) = 1111\quad 0000\quad 1111\quad 0000.$$

Упражнения

1. Относительно базиса (A, B, C) найдите изображающие числа функций:
1) (КБМ). $\#(A\overline{B}+C)$; 3) (ННК). $\#(C)$; 5) (ЮАР). $\#(S_{2,3})$;
2) (МУН). $\#(\overline{B})$; 4) (ЛОС). $\#(A + BC)$; 6) (ЛАТ). $\#(S_0)$.

2. Относительно базиса (A, B) найдите изображающие числа функций:

1) (СБО). $\#(A+B)$; 3) (ППА). $\#(A+\bar{A})$; 5) (РМУ). $\#(B\bar{B})$;

2) (АГИ). $\#(A\bar{B})$; 4) (721). $\#(S_2)$; 6) (ОКО). $\#(\bar{A})$.

3. Найдите минимальный базис функций (укажите только буквы в алфавитном порядке):

1) (АТФ). $f = CD + \bar{C}\,\bar{D} + ABC + \bar{A}B\bar{D}$;

2) (УКК). $f = AB + \bar{A}D + BCD$;

3) (751). $f = PQ + \bar{Q}R + PRS$;

4) (СЕД). $f = ABCDE + AB\bar{D}E + AB\bar{C}E + \bar{A}B\bar{E}$.

4. Найдите изображающие числа (макстермы и минтермы зависят от трех аргументов):

1) (ПЗМ). m_3; 4) (ЦПП). m_5; 7) (ЛИР). m_0;

2) (ЗЭС). m_7; 5) (ВВО). M_0; 8) (ФОТ). M_3;

3) (ВАТ). M_2; 6) (ВАК). M_4; 9) (231). M_7.

5. Относительно базиса (A, B, C) найдите изображающие числа функций:

1) (ТЫФ). $f = A$; 3) (НЕЧ). $f = C$; 5) (ОУШ). $f = \bar{B}$;

2) (ЛБ2). $f = B$; 4) (ЖБИ). $f = \bar{A}$; 6) (ВВК). $f = \bar{C}$.

11.2. ОПЕРАЦИИ НАД ИЗОБРАЖАЮЩИМИ ЧИСЛАМИ

Рассмотрим три операции над изображающими числами: дизъюнкцию, конъюнкцию и инверсию.

Чтобы найти изображающее число дизъюнкции двух функций, необходимо сначала выровнять их базисы, а затем поразрядно сложить без переноса в старшие разряды по правилам:

$$0 + 0 = 0;\ \ 1 + 0 = 1;\ \ 0 + 1 = 1;\ \ 1 + 1 = 1.$$

Если базисы двух функций f_1 и f_2 совпадают, то

$$\#(f_1 + f_2) = \#f_1 + \#f_2.$$

Рассмотрим, например, две функции вида

$$f_1 = A + D + \bar{B}C; \tag{55}$$

$$f_2 = A + B\bar{C}. \tag{56}$$

Базис первой функции — (A, B, C, D), второй — (A, B, C). Общим базисом для обеих функций можно считать набор аргументов (A, B, C, D). Тогда

$$\#(A + D + \bar{B}C) = 0111\quad 0101\quad 1111\quad 1111;$$

$$\#(A + B\bar{C}) = 0000\quad 1100\quad 1111\quad 1111.$$

Изображающее число дизъюнкции функций (55) и (56) имеет вид

$$\#(f_1 + f_2) = 0111\quad 1101\quad 1111\quad 1111.$$

Дизъюнкция функций также является функцией. Следовательно, к ней применимо понятие минимального базиса. В некоторых случаях для нахождения МБ дизъюнкции двух функций f_1 и f_2, не имеющих общих аргументов, достаточно знать МБ функций f_1 и f_2. В МБ дизъюнкции $f_1 + f_2$ полностью войдет минимальный базис функции f_1 и все переменные МБ функции f_2.

Рассмотрим пример. Пусть даны две функции, представленные в минимальных дизъюнктивных нормальных формах:

$$f_1 = AB; \quad f_2 = C.$$

Тогда минимальный базис дизъюнкции этих функций примет вид (A, B, C). Относительно этого базиса найдем изображающее число дизъюнкции функций $f_1 + f_2$:

$$\begin{array}{rl} \#(AB) = & 0000 \quad 0011 \\ \#(C) = & 0101 \quad 0101 \\ \hline \#(AB+C) = & 0101 \quad 0111 \end{array}$$

В общем случае минимальный базис дизъюнкции функций может насчитывать и меньшее число переменных. Например, функции

$$f_1 = A\bar{D} + \bar{A}B; \qquad f_2 = AD + AC$$

имеют минимальные базисы соответственно (A, B, D) и (A, C, D), в то время как минимальный базис их дизъюнкции состоит из двух переменных A и B:

$$f_1 + f_2 = A\bar{D} + \bar{A}B + AD + AC = A + B.$$

Следовательно, изображающее число функции $f_1 + f_2$ можно записать не только в виде

$$\#(f_1 + f_2) = 0000 \quad 1111 \quad 1111 \quad 1111,$$

но и с учетом того, что ее минимальный базис содержит меньшее число переменных:

$$\#(f_1 + f_2) = 0111.$$

Изображающее число дизъюнкции n функций имеет вид

$$\#(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) = \#f_1 + \#f_2 + \ldots + \#f_n,$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — функции, зависящие от одних и тех же аргументов.

Чтобы найти изображающее число конъюнкции функций f_1 и f_2, необходимо выровнять их базисы и поразрядно перемножить числа по правилам (5)–(8):

$$0 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot 1 = 0; \quad 1 \cdot 0 = 0; \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Найдем, например, изображающее число конъюнкции функций

$$f_1 = B\bar{C} + D; \qquad f_2 = A\bar{B} + C.$$

Для нахождения изображающих чисел конъюнкции этих функций можно взять базис (A, B, C, D). Тогда

$$\begin{array}{rl} \#(B\bar{C} + D) = & 0101 \quad 1101 \quad 0101 \quad 1101 \\ \#(A\bar{B} + C) = & 0011 \quad 0011 \quad 1111 \quad 0011 \\ \hline \#(f_1 \cdot f_2) = & 0001 \quad 0001 \quad 0101 \quad 0001 \end{array}$$

В общем случае изображающее число конъюнкции n функций имеет вид

$$\#(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n) = \#f_1 \cdot \#f_2 \cdot \#f_3 \cdots \#f_n,$$

где функции $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ зависят от одних и тех же аргументов.

Чтобы найти изображающее число инверсии заданной функции f, достаточно заменить в этом числе нули на единицы и единицы на нули. Например:

$$\#(A + B\overline{C}) = 0010 \quad 1111; \qquad \#(\overline{A + B\overline{C}}) = 1101 \quad 0000.$$

Упражнения

1. Относительно минимального базиса найдите изображающие числа дизъюнкции следующих функций.

1) (НБО). $f_1 = BC + AC$; $f_2 = BC + \overline{A}C$.

2) (ЯВА). $f_1 = (A + B)C$; $f_2 = (A + B)(\overline{A} + \overline{B})$.

3) (АТЛ). $f_1 = A$; $f_2 = C + AB$.

2. Найдите изображающие числа конъюнкции функций (для минимального базиса).

1) (ЛББ). $f_1 = A + B$; $f_2 = B + C$.

2) (МВМ). $f_1 = PQ + R$; $f_2 = \overline{Q} + \overline{R}$.

3) (КЛВ). $f_1 = X + Y$; $f_2 = Z + X\overline{Y}$.

3. Найдите минимальный базис дизъюнкции функций (в устройство вводить только буквы в алфавитном порядке без запятых).

1) (ЯШЕ). $f_1 = CE + \overline{C}\,\overline{E} + DEF + \overline{C}D\overline{F} + \overline{C}\,\overline{D}$;

$f_2 = E\overline{K} + \overline{E}K + FK\overline{L} + EFL + E\overline{F}K$.

2) (МАУ). $f_1 = PQ + \overline{Q}R + PRS$;

$f_2 = AB\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}C + \overline{A}\,\overline{B}D + A\overline{B}C$.

4. Найдите изображающие числа инверсий функций.

1) (ОЛК). $f = A\overline{C} + BC$;

2) (УЛБ). $f = (A + B)(A + C)$;

3) (57Т). $f = BC + \overline{A}C + \overline{B}\,\overline{C}$;

4) (65С). $f = A(B + C) + \overline{A}\,\overline{C}$.

5. Найдите изображающие числа конъюнкции следующих функций.

1) (ЗЗБ). $f_1 = (\overline{A} + B)C$; $f_2 = AB$; $f_3 = A + \overline{B} + C$.

2) (МТФ). $f_1 = PQ + R$; $f_2 = RS + P$; $f_3 = PQ + \overline{R}$.

3) (АИО). $f_1 = C + D + E$; $f_2 = B + \overline{C} + E$; $f_3 = BE + \overline{C}$.

6. Найдите минимальный базис функций (указать буквы) при условии, что:

$$f_1 = (A + B)\overline{B}; \quad f_2 = B + C + D; \quad f_3 = C + D.$$

1 (ЛАП). $f = f_1 f_2 + f_3$;

2) (РАД). $f = f_1 + \overline{f_1} f_3$;

3) (ШИМ). $f = (f_1 + f_2) f_3$;

4) (АЗН). $f = f_1 \overline{f_1} + f_2 + f_3$;

5) (КВ2). $f = f_1(f_2 + f_3 + \overline{f_2}\,\overline{f_3})$;

6) (ЛКЛ). $f = (f_1 + f_1 f_2)\overline{f_3}$.

11.3. ИЗОБРАЖАЮЩИЕ ЧИСЛА ФУНКЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Для нахождения изображающих чисел функции, представленной в какой-либо из форм высших порядков, нет необходимости выполнять алгебраические преобразования, чтобы найти СДНФ. Достаточно выполнить несложные операции над изображающими числами отдельных аргументов. Проиллюстрируем это на следующем примере:

$$f = \overline{A[B + \overline{C(D + \bar{A}C)}]} + B\bar{C}.$$

Так как функция зависит от четырех аргументов, то

$$\begin{aligned}
\#A &= 0000\quad 0000\quad 1111\quad 1111\\
\#B &= 0000\quad 1111\quad 0000\quad 1111\\
\#C &= 0011\quad 0011\quad 0011\quad 0011\\
\#D &= 0101\quad 0101\quad 0101\quad 0101\\
\#\bar{A} &= 1111\quad 1111\quad 0000\quad 0000\\
\#\bar{C} &= 1100\quad 1100\quad 1100\quad 1100
\end{aligned}$$

Находим изображающее число конъюнкции $\bar{A}C$:

$$\begin{array}{r}
\&\begin{array}{cccc} 1111 & 1111 & 0000 & 0000 \\ 0011 & 0011 & 0011 & 0011 \end{array}\\ \hline
\begin{array}{cccc} 0011 & 0011 & 0000 & 0000 \end{array}
\end{array}$$

Теперь можно найти изображающее число выражения $D + \bar{A}C$:

$$\begin{array}{r}
+\begin{array}{cccc} 0101 & 0101 & 0101 & 0101 \\ 0011 & 0011 & 0000 & 0000 \end{array}\\ \hline
\begin{array}{cccc} 0111 & 0111 & 0101 & 0101 \end{array}
\end{array}$$

После умножения на C получаем:

$$\begin{array}{r}
\&\begin{array}{cccc} 0011 & 0011 & 0011 & 0011 \\ 0111 & 0111 & 0101 & 0101 \end{array}\\ \hline
\begin{array}{cccc} 0011 & 0011 & 0001 & 0001 \end{array}
\end{array}$$

Инвертируем полученный результат:

$$1100\quad 1100\quad 1110\quad 1110.$$

Находим изображающее число дизъюнкции B и предыдущего результата:

$$\begin{array}{r}
+\begin{array}{cccc} 0000 & 1111 & 0000 & 1111 \\ 1100 & 1100 & 1110 & 1110 \end{array}\\ \hline
\begin{array}{cccc} 1100 & 1111 & 1110 & 1111 \end{array}
\end{array}$$

Умножаем на A:

$$\begin{array}{r}
\&\begin{array}{cccc} 1100 & 1111 & 1110 & 1111 \\ 0000 & 0000 & 1111 & 1111 \end{array}\\ \hline
\begin{array}{cccc} 0000 & 0000 & 1110 & 1111 \end{array}
\end{array}$$

Инвертируем:

$$1111\quad 1111\quad 0001\quad 0000.$$

Находим изображающее число конъюнкции $B\bar{C}$:

$$
\begin{array}{r}
0000\quad 1111\quad 0000\quad 1111\\
\&\,\underline{1100\quad 1100\quad 1100\quad 1100}\\
0000\quad 1100\quad 0000\quad 1100
\end{array}
$$

Суммируя два последних результата, получаем искомое изображающее число заданной функции:

$$
\begin{array}{r}
1111\quad 1111\quad 0001\quad 0000\\
+\,\underline{0000\quad 1100\quad 0000\quad 1100}\\
1111\quad 1111\quad 0001\quad 1100
\end{array}
$$

В результате получаем:

$$\#\,\overline{A[B+\overline{C(D+\bar{A}C)}]}+B\bar{C}=1111\quad 1111\quad 0001\quad 1100.$$

Таким образом, в общем случае для функции, представленной в форме высшего порядка, изображающее число можно найти двумя способами: путем алгебраических преобразований и при помощи операций над изображающими числами. При этом второй способ нередко оказывается более удобным, например, когда в заданном выражении знаки инверсии содержатся над дизъюнкциями, конъюнкциями и их сочетаниями.

Упражнения

1. Найдите изображающие числа функций:

1) (АЛБ). $f_1 = A\bar{B}+\bar{A}\cdot\overline{\bar{B}C+\bar{C}\cdot\overline{\overline{D+A\bar{D}}}}$;

2) (ПКС). $f_2 = A\cdot\overline{B\bar{C}+\bar{B}C\bar{D}}+\overline{B\bar{C}D+A}\cdot CD$;

3) (ВАТ). $f_3 = (A+\overline{B+C+D})(B\cdot\overline{C+A\cdot\overline{\overline{C+BD}}})$;

4) (САД). $f_4 = \overline{\overline{\overline{A+BC}\cdot D+CD}\cdot B+\bar{B}}\cdot CD$.

2. (00.ШУ). Функция представлена изображающим числом

$$0000\quad 0000\quad 0001\quad 1111.$$

Найдите ее минимальную форму третьего порядка.

11.4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПО ИЗОБРАЖАЮЩЕМУ ЧИСЛУ

По виду изображающего числа булеву функцию легко представить в СДНФ, если воспользоваться формулой

$$f = a_0m_0 + a_1m_1 + a_2m_2 + \ldots + a_km_k,$$

где $k = 2^n - 1$; n — число аргументов функции; a_i — двоичные цифры изображающего числа ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$).

Например, для изображающего числа 0011 0111

$$a_0 = a_1 = a_4 = 0;\;\; a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = 1.$$

$$f = 0\cdot m_0 + 0\cdot m_1 + 1\cdot m_2 + 1\cdot m_3 + 0\cdot m_4 + 1\cdot m_5 + \\ + 1\cdot m_6 + 1\cdot m_7 = m_2 + m_3 + m_5 + m_6 + m_7 = (2,3,5,6,7). \quad (57)$$

Базис функции по ее изображающему числу также нетрудно определить, если воспользоваться формулой

$$S = 2^n \text{ либо } n = \log_2 S,$$

где S — число двоичных знаков изображающего числа; n — число аргументов булевой функции.

Таким образом, на основе изображающего числа однозначно определяются минтермы и аргументы функции. Но от каких именно аргументов зависит функция — по изображающему числу определить невозможно. Следовательно, аналитическое выражение функции является неоднозначным. Например, для выражения (57) имеем:

$$0011\,0111 = \#(\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC);$$
$$0011\,0111 = \#(\bar{P}Q\bar{R} + \bar{P}QR + P\bar{Q}R + PQ\bar{R} + PQR);$$
$$0011\,0111 = \#(\bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XY\bar{Z} + XYZ);$$
$$0011\,0111 = \#(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + A_1A_2A_3)$$

и т. д. без ограничений. Все эти функции зависят от различных аргументов, поэтому являются не равными между собой. Но с другой стороны, все они получены из одного и того же изображающего числа, следовательно, должны быть равными. Устранить это противоречие только по виду изображающего числа невозможно. Необходима дополнительная информация о тех аргументах, от которых зависит заданная функция.

Упражнения

1. Найдите номера минтермов по виду изображающего числа:

1) (ТВЕ). 0000 0001 1000 0001;
2) (МВХ). 1100 0110;
3) (ЗТЗ). 1000 0001;
4) (984). 0001 0001 0000 0000;
5) (ЦНК). 1001 1001 0000 0001;
6) (ОУЛ). 0000 0000 0011 1110.

2. Найдите номера минтермов инверсии функции по виду ее изображающего числа:

1) (ИКМ). 0011 0000;
2) (ОКН). 1110 1000;
3) (ПОП). 1111 0000 1010 0001;
4) (ЗЕР). 0000 0000 1111 1110;
5) (ОХО). 0101 0101;
6) (ШЭС). 0001 0111.

3. (58Г). Определите число аргументов функции, если ее изображающее число содержит 64 знака.

4. (ХМУ). Определите число аргументов функции, если ее изображающее число содержит t знаков, где $1000 < t < 2000$.

5. (МОФ). Определите число аргументов функции, если ее изображающее число содержит 100 единиц и 28 нулей.

6. (ФАХ). Определите длину изображающего числа, если m — число аргументов.

7. Запишите аналитическое выражение в СДНФ булевой функции по виду ее изображающего числа, если известно, что аргументами функции являются буквы A, B, C (минтермы упорядочить по возрастанию их индексов):

1) (А11).0000 1000; 3) (ЛУЗ).1000 0001; 5) (С85).0010 0101;
2) (УП2).1000 0000; 4) (МОИ).0001 0011; 6) (896).0101 1000.

8. Запишите аналитическое выражение в минимальной ДНФ функции по виду ее изображающего числа, если известно, что аргументами функции являются A, B, C:

1) (КОО). 0001 0001; 3) (Р5К). 0101 0101; 5) (ТЫП). 1110 1111;
2) (УШМ). 1100 0000; 4) (ИРЕ). 1111 1101; 6) (НАЯ). 1011 1011.

9. Найдите минимальную ДНФ функции по виду ее изображающего числа, если аргументами функции являются буквы X, Y, Z:

1) (УКС). 1111 0000; 3) (XXX).0000 1000; 5) (Х0Ф). 0000 1111;
2) (ЗТО). 1111 1111; 4) (ПШ0). 0000 0000; 6) (ДА8). 1010 1010.

10. (ЕМС). Сколько существует изображающих чисел булевой функции пяти аргументов, если функция не определена на пяти наборах?

11. (ХИ0). Булева функция $f(A, B, C)$ не определена на восьми наборах значений аргументов. Сколько существует ее изображающих чисел?

12. Дана некоторая булева функция f с четырехзначным изображающим числом t. Базис этой функции увеличили на три переменные, в результате чего ее изображающее число стало равным k.

1) (НАС). На сколько знаков возросло число k по сравнению с числом t?
2) (МУР). Сколько единиц в числе k, если в числе t — две единицы?
3) (ОРЫ). Во сколько раз увеличилось количество нулей в числе k по сравнению с числом t?

11.5. ЧИСЛОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть дана система трех функций:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= A\overline{C} + AB + \overline{A}\,\overline{B}C; \\ f_2 &= AB + AC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}; \\ f_3 &= \overline{C}. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Представим эти функции в виде изображающих чисел одинаковой длины:

$$\left.\begin{aligned} \#f_1 &= 0100 \quad 1011; \\ \#f_2 &= 1000 \quad 0111; \\ \#f_3 &= 1010 \quad 1010. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Получилась двоичная матрица. Она содержит три строки и восемь колонок. Числа, расположенные по колонкам, условимся называть ω-числами, а их последовательность — ω-набором. Очевидно, что количество чисел в ω-наборе равно числу колонок.

Пусть старшим разрядам ω-чисел соответствует функция f_1, тогда ω-набор для систем (58) и (59) примет вид (с учетом порядка):

$$3, 4, 1, 0, 5, 2, 7, 6.$$

Представление систем функций в виде ω-наборов является неоднозначным. Например, для системы

$$f_1 = A; \quad f_2 = AB; \quad f_3 = B \tag{60}$$

в базисе (A, B) имеем:

$$\begin{aligned} \#f_1 &= 0011 \\ \#f_2 &= 0001 \\ \#f_3 &= \underline{0101} \\ &\ 0147 \end{aligned}$$

т. е. для базиса (A, B) ω-набор имеет вид 0, 1, 4, 7.

В базисе (A, B, C) по той же системе функций (60) находим:

$$\begin{aligned} \#f_1 &= 0000 \quad 1111 \\ \#f_2 &= 0000 \quad 0011 \\ \#f_3 &= \underline{0011 \quad 0011} \\ &\ 0011 \quad 4477 \end{aligned}$$

Чтобы устранить неоднозначность представления системы функций в виде ω-набора, будем пользоваться понятием минимального базиса. Базис для системы функций называется минимальным, если он составлен из аргументов, входящих в минимальные базисы функций исходной системы, т. е. если $P_1, P_2, ..., P_k$ — множества аргументов, образующих минимальные базисы функций $f_1, f_2, ..., f_k$ соответственно, то в минимальный базис системы этих k функций войдут только элементы множества P:

$$P = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k.$$

В связи с этим для системы (60) имеем:

$$\begin{aligned} &P_1 = \{A\}; \\ &P_2 = \{A, B\}; \\ &P_3 = \{B\}; \\ &P = \{A, B\}. \end{aligned}$$

Минимальному базису соответствует минимальный ω-набор. Следовательно, ω-набор 0, 1, 4, 7 для системы (60) является минимальным.

По изображающему числу СДНФ функции восстанавливается однозначно, если известны ее аргументы. Справедливо ли такое же утверждение относительно системы функций? В общем случае — нет. Пусть дан ω-набор: 3, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 0. Судя по наибольшему числу 3 (в двоичной системе — 11), этому ω-набору соответствует система двух функций. Переведем в двоичную систему все ω-числа и запишем их в колонки, размещая внизу младшие разряды. Получим следующие изображающие числа:

$$\begin{aligned} \#f_1 &= 1110 \quad 1100; \\ \#f_2 &= 1001 \quad 0010. \end{aligned}$$

Однако ω-набору вида 3, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 0 соответствует и система трех функций:

$$\#f_1 = 0000 \quad 0000;$$
$$\#f_2 = 1110 \quad 1100;$$
$$\#f_3 = 1001 \quad 0010,$$

а также четырех, пяти и т. д. Отсюда следует, что по ω-набору изображающие числа системы функций восстанавливаются однозначно, если известно, сколько функций образуют эту систему.

Упражнения

1. Найдите минимальные ω-наборы следующих систем функций.

1) (5РТ). $f_1 = A$; $f_2 = AB$; $f_3 = ABC + \bar{A}\bar{B}$.

2) (ОПМ). $f_1 = A + B$; $f_2 = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$; $f_3 = AB$; $f_4 = A\bar{B}C$.

3) (ИКК). $f_1 = 0$; $f_2 = 1$; $f_3 = ABC$.

4) (ИЕЛ). $f_1 = AC$; $f_2 = B$; $f_3 = 0$; $f_4 = 1$.

2. Минимальный базис системы четырех функций насчитывает пять аргументов.

1) (982). Сколько чисел содержит ω-набор этой системы?

2) (НУЗ). Сколько чисел содержит ω-набор, если система состоит из трех функций при том же базисе?

3. (ТТР). Система насчитывает 6 функций. Назовите наибольшее возможное ω-число.

4. (ТМЕ). Сколько существует различных ω-наборов для системы двух функций, изображающие числа которых содержат по четыре двоичных разряда?

5. (ММС). Дан ω-набор: 2, 2, 2, 2. Найдите минимальные ДНФ функций f_1 и f_2.

6. (КТК). Найдите минимальные формы функций f_1, f_2, f_3, если их ω-набор имеет вид 0, 4, 0, 6, 0, 4, 1, 7. Базис (A, B, C).

7. (ЯР0). Найдите изображающее число функции f_2, если ω-набор для системы трех функций имеет вид 7, 3, 4, 5, 7, 0, 2, 1.

8. (МОУ). Найдите минимальный ω-набор для системы трех функций, если

$$f_1 = f_2 = f_3 = A\bar{B} + \bar{B}C.$$

9. (ЗНИ)! Минимальный базис системы трех функций содержит три аргумента. Известно, что в ω-наборе этой системы нет чисел 0, 1, 2, 3. Найдите: минимальную форму функции f_1; число вхождений ее аргументов; число входящих в нее минтермов.

10. (ЕКМ)! Сколько минтермов содержит функция f_4 системы, ω-набор которой имеет вид 8, 8, 4, 9, 9, 0, 2, 10? Сколько вхождений аргументов имеет минимальная ДНФ этой функции?

11. По заданной последовательности ω-чисел найдите СДНФ функций f_1, f_2, f_3. Для самоконтроля укажите число минтермов каждой функции, начиная с f_1.

1) (ИТР). 2 3 4 6 6 3 2 1; 3) (НЫН). 2 2 2 2 3 6 7 2; 5) (МВ0). 7 7 7 7 0 0 1 7;

2) (ЗТЛ). 7 7 3 1 7 3 0 1; 4) (МЦК). 5 2 1 0 4 3 6 7; 6) (ПКФ). 6 2 6 2 2 6 2 6.

11.6. ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Согласно [17, с. 112] «n булевых функций независимы, если в совокупности при всевозможных значениях аргументов A, B, C, ... они могут принимать 2^n комбинаций значений истинности». То есть функции системы независимы, если в ω-набор входит каждое из чисел

$$0, 1, 2, 3, ..., 2^k - 1,$$

где k — число аргументов минимального базиса системы. Например, функции системы

$$f_1 = A\overline{C} + AB + B\overline{C};$$
$$f_2 = AB + BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C};$$
$$f_3 = AC + \overline{A}B$$

являются независимыми. Чтобы убедиться в этом, достаточно найти ω-набор (старшему двоичному разряду каждого ω-числа соответствует функция f_1):

$$\begin{array}{rl} \#f_1 = & 0010 \quad 1011 \\ \#f_2 = & 1001 \quad 0011 \\ \#f_3 = & 0011 \quad 0101 \\ \hline & 2053 \quad 4167 \end{array}$$

По записи ω-набора видно, что в него входят все возможные трехзначные двоичные числа, что и доказывает независимость функций.

Примером системы, где функции зависимы, является следующий их список:

$$f_1 = A + B + \overline{C};$$
$$f_2 = \overline{B} + AC;$$
$$f_3 = \overline{A} + B\overline{C}.$$

Найдем для этой системы функций ω-набор:

$$\begin{array}{rl} \#f_1 = & 1011 \quad 1111 \\ \#f_2 = & 1100 \quad 1101 \\ \#f_3 = & 1111 \quad 0010 \\ \hline & 7355 \quad 6656 \end{array}$$

В ω-набор не входят числа 0, 1, 2, 4. Следовательно, функции данной системы зависимы.

Если $n > k$, где n — число функций, входящих в систему, k — число аргументов минимального базиса системы, то функции такой системы всегда зависимы.

Например, для системы

$$f_1 = AB + C;$$
$$f_2 = BC + \overline{A}C;$$
$$f_3 = ABC + \overline{C};$$
$$f_4 = A\overline{C} + \overline{B}C$$

имеем: $n = 4$; $k = 3$ (так как минимальный базис системы образуют три аргумента).

Найдем ω-набор:

$$
\begin{array}{r|cccc c cccc}
\#f_1 = & 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\#f_2 = & 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\#f_3 = & 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\#f_4 = & 0 & 1 & 0 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 2 & 13 & 2 & 12 & & 3 & 9 & 11 & 14
\end{array}
$$

Числа получившегося ω-набора представляют собой 4-разрядные двоичные коды. Всего таких кодов существует 16. А ω-набор содержит лишь 8 чисел. Отсюда следует, что при $n = 4$ и $k = 3$ всегда найдется не менее восьми чисел из ряда

$$0, 1, 2, 3, \ldots, 15,$$

которые не войдут в ω-набор, что и доказывает зависимость функций.

Упражнения

1. (АУМ). Укажите номера тех систем, функции которых независимы:

1) $f_1 = BC + \bar{A}B + A\bar{B}\bar{C}$; $f_2 = A$; $f_3 = AC + \bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$;

2) $f_1 = \bar{A}C + \bar{B}C$; $f_2 = B$; $f_3 = AB$;

3) $f_1 = A\bar{B} + \bar{A}BC$; $f_2 = A\bar{C} + AB + B\bar{C}$; $f_3 = AB\bar{C} + \bar{B}C$;

4) $f_1 = AB + A\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}C$; $f_2 = B\bar{C} + AC$; $f_3 = \bar{A}\,\bar{B} + \bar{A}\,\bar{C} + ABC$;

5) $f_1 = B(A + \bar{C}) + \bar{C}(A + B)$; $f_2 = \bar{B}C + AB\bar{C}$; $f_3 = \bar{A}BC + A\bar{B}$;

6) $f_1 = \bar{A}(\bar{B} + \bar{C}) + ABC$; $f_2 = A(B + \bar{C}) + \bar{A}\,\bar{B}C$; $f_3 = AB + AC + B\bar{C}$.

2. (А2Р). Укажите номера тех систем, функции которых зависимы:

1) $f_1 = A + B$; $f_2 = BC + A\bar{C}$; $f_3 = AC$; $f_4 = A + \bar{B} + C$;

2) $f_1 = AC + BC$; $f_2 = A + BC$; $f_3 = \bar{B}C + AC$; $f_4 = \bar{C}$;

3) $f_1 = B + C$; $f_2 = A\bar{C} + B$; $f_3 = BC + A\bar{C}$; $f_4 = \bar{B} + C$;

4) $f_1 = A$; $f_2 = AC + \bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$; $f_3 = BC + \bar{A}B + A\bar{B}\bar{C}$;

5) $f_1 = A + BC$; $f_2 = \bar{A} + \bar{B}C$; $f_3 = B + \bar{A}C$; $f_4 = C + \bar{A}B$;

6) $f_1 = B + \bar{A}C$; $f_2 = A + BC + \bar{A}\,\bar{B}$; $f_3 = \bar{C}$; $f_4 = AC$.

3. Укажите номера ω-наборов, представляющих системы, функции которых независимы:

I. (ШИТ).	II. (236).
1) 0 3 4 1 5 2 6 7;	1) 0 1 2 3 4 2 5 6;
2) 3 5 4 0 6 7 1 2;	2) 0 1 2 3;
3) 3 6 0 1 7 2 3 4;	3) 7 4 3 2 1 5 4 6;
4) 0 3 4 2 6 7 5 1;	4) 7 2 1 0 6 4 5 3;
5) 5 6 2 0 1 3 6 7;	5) 2 3 1 0;
6) 2 3 4 5 1 0 7 6.	6) 4 5 6 7.

11.7. ВИДЫ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ФУНКЦИЯМИ

Системе двух функций могут соответствовать только четыре ω-числа: 0, 1, 2, 3. Если в ω-набор входят все эти числа, то, как было сказано выше, функции независимы. Во всех остальных случаях функции связаны некоторой зависимостью. Выясним, сколько и какие виды (типы) зависимости существуют между двумя функциями.

Прежде всего отметим, что вид зависимости полностью определяется ω-набором. Для двух функций существует 16 различных ω-наборов. Сведем их все в таблицу и для каждого набора выясним, какой вид зависимости ему соответствует (табл. 11).

Введем обозначения:

$$\omega_0 = \overline{f}_1\overline{f}_2; \qquad \omega_1 = \overline{f}_1 f_2; \qquad \omega_2 = f_1\overline{f}_2; \qquad \omega_3 = f_1 f_2. \tag{61}$$

Индексы 0, 1, 2, 3 в этих записях являются ω-числами системы двух функций. Если в ω-наборе какое-либо число из 0, 1, 2, 3 отсутствует, то это значит, что соответствующая ω-функция тождественно равна нулю. Поэтому в табл. 11 колонки озаглавлены символами ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 согласно обозначениям (61). В колонках нули обозначают равенство нулю ω-функций, а крестики говорят о том, что соответствующие ω-функции не являются тождественно равными нулю. Слева в таблице приведены десятичные номера строк.

В первой сверху строке записаны четыре нуля. Это значит, что все ω-функции тождественно равны нулю, т. е. все ω-числа отсутствуют. Такой

Таблица 11

№	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	Вид зависимости
0	0	0	0	0	—
1	0	0	0	×	$f_1 \equiv f_2 \equiv 1$
2	0	0	×	0	$f_1 \equiv 1,\ \ f_2 \equiv 0$
3	0	0	×	×	$f_1 \equiv 1,\ \ f_2 \not\equiv 0,\ \ f_2 \not\equiv 1$
4	0	×	0	0	$f_1 \equiv 0, f_2 \equiv 1$
5	0	×	0	×	$f_1 \not\equiv 1,\ \ f_1 \not\equiv 0,\ \ f_2 \equiv 1$
6	0	×	×	0	взаимная инверсия
7	0	×	×	×	пересечение, $F_1 \cup F_2 = I$
8	×	0	0	0	$f_1 \equiv f_2 \equiv 0$
9	×	0	0	×	равенство функций
10	×	0	×	0	$f_1 \not\equiv 0,\ \ f_1 \not\equiv 1,\ \ f_2 \equiv 0$
11	×	0	×	×	отношение включения $F_2 \subset F_1$
12	×	×	0	0	$f_1 \equiv 0,\ \ f_2 \not\equiv 0,\ \ f_2 \not\equiv 1$
13	×	×	0	×	отношение включения $F_1 \subset F_2$
14	×	×	×	0	отношение ортогональности
15	×	×	×	×	функции независимы

случай невозможен, поэтому данной строке не соответствует никакая зависимость между функциями f_1 и f_2.

В следующей строке записано:

$$\omega_0 \equiv \omega_1 \equiv \omega_2 \equiv 0; \omega_3 \not\equiv 0.$$

Найдем изображающие числа функций f_1 и f_2. Для этого их разряды представим в виде (считая, что функции зависят от двух аргументов):

$$\begin{array}{r|cccc} \#f_1 = & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \#f_2 = & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

где x_i и y_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — цифры изображающих чисел функций f_1 и f_2. Так как при считывании по колонкам должно получаться только число 3 (все остальные ω-числа отсутствуют согласно записи строки 1 табл. 11), то нетрудно сделать вывод, что

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$$

и что $f_1 \equiv f_2 \equiv 1$.

Согласно строке 2 имеем:

$$\omega_0 \equiv \omega_1 \equiv \omega_3 \equiv 0; \omega_2 \not\equiv 1.$$

Рассуждая, как и в предыдущем случае, получаем:

$$\begin{array}{r|cccc} \#f_1 = & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \#f_2 = & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1; \quad y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0; \quad \text{т. е. } f_1 \equiv 1; \quad f_2 \equiv 0.$$

Аналогично заполнены строки 4 и 8.

В строке 3 указано, что среди ω-чисел отсутствуют числа 0 и 1. В связи с этим запишем:

$$\begin{array}{r|cccc} \#f_1 = & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \#f_2 = & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline & 2 & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

Числа 2 и 3 под колонками можно записывать в любом порядке, причем количество двоек и троек может быть другим, важно лишь, чтобы обе цифры присутствовали и общее их число было бы равным 4. Независимо от выбора ω-набора, состоящего из цифр 2 и 3, всегда будут иметь место соотношения:

$$f_1 \equiv 1, \quad f_2 \not\equiv 0, \quad f_2 \not\equiv 1.$$

Аналогично рассуждая, находим, что:

в строке 5: $f_1 \not\equiv 1, \quad f_1 \not\equiv 0, \quad f_2 \equiv 1;$

в строке 10: $f_1 \not\equiv 0, \quad f_1 \not\equiv 1, \quad f_2 \equiv 0;$

в строке 12: $f_1 \equiv 0, \quad f_2 \not\equiv 1, \quad f_2 \not\equiv 0.$

Это были тривиальные случаи. Осталось семь строк, для каждой из которых справедливы соотношения:

$$f_1 \neq 0; \quad f_1 \neq 1; \quad f_2 \neq 0; \quad f_2 \neq 1.$$

Рассмотрим строку 6. В ней указано, что ω-числа 0 и 3 отсутствуют. Следовательно,

$$\begin{array}{rcccc} \#f_1 = & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \#f_2 = & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} \#f_1 = & 0 & 1 & 1 & 0; \\ \#f_2 = & 1 & 0 & 0 & 1. \end{array}$$

Как бы мы ни распределяли числа 1 и 2 под колонками x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, 4$), изображающие числа функций f_1 и f_2 всегда будут взаимно инверсными. Это и есть **отношение взаимной инверсии**, то есть вид зависимости, соответствующий случаю, когда ω-набор системы двух функций содержит только числа 1 и 2. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что строке 9 соответствует **отношение равенства** функций.

Рассмотрим строку 11. В ней отсутствует число 1. Если в ω-набор входят числа 0, 2, 3, но нет числа 1, то всегда имеет место соотношение

$$F_2 \subset F_1,$$

где F_1 — множество минтермов функции f_1, F_2 — множество минтермов функции f_2. Это значит, что функция f_2 есть импликанта функции f_1. Такой тип зависимости назовем **отношением включения** вида $F_2 \subset F_1$.

Для примера рассмотрим ω-набор 0, 2, 3, 3, 2, 0, 2, 2. Ему соответствует система вида

$$f_1 = B + A\bar{C} + \bar{A}C = (1, 2, 3, 4, 6, 7);$$
$$f_2 = \bar{A}B = (2, 3),$$

откуда видно, что функция f_2 является импликантой функции f_1 (так как все минтермы функции f_2 входят в множество минтермов функции f_1).

Строке 13 соответствует такой же тип зависимости, с той лишь разницей, что множества F_1 и F_2 поменялись местами.

Рассмотрим строку 7. Ей соответствует наиболее сложный тип зависимости, суть которой заключается в том, что множества F_1 и F_2 минтермов, образующих функции f_1 и f_2, пересекаются, а их объединение совпадает с I, где I — универсальное множество (т. е. множество всех минтермов функций f_1 и f_2):

$$F_1 \cap F_2 \neq \varnothing; \quad F_1 \cup F_2 = I.$$

В строке 14 отражен случай, когда множества F_1 и F_2 минтермов функций f_1 и f_2 не пересекаются, т. е. $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Это, согласно [44], — **отношение ортогональности**.

Наконец, в строке 15 отмечено, что функции независимы.

Упражнения

1. Найдите ω-наборы систем функций

1) (ИЕЕ).	2) (Т32).	3) (ОВ3).
$f_1 = AB + \bar{A}\,\bar{B}$;	$f_1 = A + BC$;	$f_1 = A + \bar{B}\bar{C}\,\bar{D}$;
$f_2 = A + B$.	$f_2 = A + B$.	$f_2 = B + CD$.

2. (АП4). Найдите номера всех тех систем функций, для которых справедливо соотношение $f_2\overline{f}_1 \equiv 0$.

1) $f_1 = AB + C$; $f_2 = AB$. 4) $f_1 = \overline{A} + \overline{B}C$; $f_2 = \overline{A}\,\overline{B}$.

2) $f_1 = ABC$; $f_2 = AB$. 5) $f_1 = A + B + C$; $f_2 = ABC$.

3) $f_1 = A + B$; $f_2 = A + B + C$. 6) $f_1 = A + B + C + D$; $f_2 = B + \overline{C}$.

3. Укажите номер типа зависимости (см. табл. 11), если заданы ω-наборы:

1) (ВП5). 2, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 3; 4) (МУ0). 2, 2, 3, 0;

2) (УМ6). 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 3; 5) (0ДМ). 2, 3, 3, 0, 2, 0, 0, 3;

3) (5П7). 2, 1, 3, 2; 6) (52Т). 1, 1, 3, 3.

4. (УХС). Известно, что $f_1 = f_2$. В функцию f_1 включили еще один минтерм. Вид зависимости от этого изменился. Какой номер из табл. 11 получит этот новый тип зависимости, если в обеих системах функции константа нуль и константа единица отсутствуют?

5. Обозначим: F_1 — множество минтермов функции f_1, F_2 — множество минтермов функции f_2. Укажите номер типа зависимости (табл. 11), если известно, что

1) (МУП). $\overline{F}_2 \neq \varnothing$; $\overline{F}_2 \cap F_1 = \varnothing$; $F_1 \neq F_2$;

2) (899). $F_1 \cap F_2 = \varnothing$; $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 = \varnothing$;

3) (ЭЭЯ). $F_1 \cap F_2 = \varnothing$; $F_1 \cup F_2 = I$;

4) (220). $F_1 \cap F_2 = \varnothing$; $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \neq \varnothing$.

6. (ЕТС). Найдите минимальные формы конъюнкции и дизъюнкции функций системы, ω-набор которой имеет вид 2, 2, 1, 1.

7. (ПОФ). Даны две функции f_1 и f_2, зависимость между которыми имеет вид $F_2 \subset F_1$ (табл. 11). Функция f_1 задана: $f_1 = B + AC$. Сколько существует различных выражений для функции f_2, если (A, B, C) — базис системы?

11.8. НАХОЖДЕНИЕ ЯВНОГО ВИДА ЛОГИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Пусть дана некоторая система функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ с базисом $(A, B, C, \ldots)$. Символы $f_1, f_2, \ldots, f_k$ являются двоичными переменными и их можно рассматривать как аргументы некоторой функции $F(f_1, f_2, \ldots, f_k)$. Если аргументам $A, B, C, \ldots$ задавать различные наборы значений, то переменные (логические аргументы) $f_1, f_2, \ldots, f_k$ также будут принимать некоторые значения. На одних наборах функция F будет равна нулю, на других — единице в зависимости от функции F. Спрашивается, какой вид должна иметь функция F, чтобы она принимала единичное значение на всех наборах значений аргументов $A, B, C, \ldots$, т. е.

$$F(f_1, f_2, \ldots, f_k) = 1.$$

Функция F, удовлетворяющая этому соотношению, и определяет явный вид логической зависимости функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

Способ нахождения явной зависимости рассмотрим на примере следующей системы функций:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= AC + \bar{B}C; \\ f_2 &= AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C; \\ f_3 &= AC + A\bar{B}. \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Для базиса (A, B, C) ω-набор этой системы имеет вид 0, 4, 0, 2, 1, 7, 2, 5. В наборе отсутствуют числа 3 и 6, следовательно, функции системы (62) зависимы.

Пусть теперь символы f_1, f_2, f_3 являются аргументами функции $F(f_1, f_2, f_3)$. Как аргументы они могут принимать любые наборы значений: 0, 1, 2, ..., 7, при этом известно, что на наборах 3 и 6 функция $F(f_1, f_2, f_3)$ равна нулю, а на остальных — единице. Следовательно, изображающее число функции F представится в виде

$$\#F(f_1, f_2, f_3) = 1110 \quad 1101.$$

На основе этого изображающего числа находим явный вид функции F:

$$F = \bar{f}_2 + f_1 f_3 + \bar{f}_1 \bar{f}_3.$$

Очевидно, что $F = 1$ на всех наборах значений аргументов A, B, C. Чтобы убедиться в этом, достаточно в формулу F подставить функции f_1, f_2, f_3, выраженные через их аргументы A, B, C:

$$\begin{aligned} &\#f_1 = 0100 \quad 0101; && \#(f_1 f_3) = 0000 \quad 0101; \\ &\#f_2 = 0001 \quad 0110; && \#(\bar{f}_1 \bar{f}_3) = 1011 \quad 0010; \\ &\#f_3 = 0000 \quad 1101; && \#F(A, B, C) = 1111 \quad 1111, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\bar{f}_2 + f_1 f_3 + \bar{f}_1 \bar{f}_3 = 1.$$

Это и есть вид явной зависимости функций системы (62).

Рассмотрим еще один пример. Пусть дана система двух функций, связанных зависимостью 9 (табл. 11). Найдем явный тип зависимости этих функций.

В ω-наборе системы функций, связанных зависимостью типа равенства, отсутствуют числа 1 и 2. Следовательно, изображающее число функции $F(f_2, f_1)$ представится в виде 1001, откуда находим явный вид функции $F(f_1, f_2)$:

$$F(f_1, f_2) = \bar{f}_1 \bar{f}_2 + f_1 f_2.$$

Очевидно, что если $f_1 = f_2$, то $F(f_1, f_2) = 1$. Если же $f_1 \neq f_2$, то $F(f_1, f_2) \neq 1$. От каких бы аргументов ни зависели функции f_1 и f_2, всегда при $f_1 = f_2$ имеет место равенство

$$\bar{f}_1 \bar{f}_2 + f_1 f_2 = 1.$$

Это и есть явный вид логической зависимости системы равных функций.

Упражнения

1. (ОК.СИ). Система состоит из трех функций f_1, f_2, f_3, при этом $f_1 = f_2 = f_3$. Найдите явный вид логической зависимости этих трех функций.

2. Найдите вид явной логической зависимости, тип которой в табл. 11 имеет номер:

1) (58.СИ). 6; 3) (РХ. ВИ). 7; 5) (ШУ. В4). 9;
2) (ОМК). 11; 4) (37С). 13; 6) (МВВ). 14.

3. (8СС). Найдите вид явной логической зависимости функций:

$$f_1 = S_1(A, B, C);$$
$$f_2 = S_2(A, B, C).$$

4. На каких наборах значений аргументов f_1, f_2, f_3, функция $F(f_1, f_2, f_3)$ равна нулю, если функции системы связаны явной зависимостью вида (наборы представить в десятичной системе):

1) (П26). $f_1\overline{f}_2 + \overline{f}_1 f_3 = 1$; 3) (РУ0). $\overline{f}_1 f_2 + \overline{f}_1\overline{f}_3 + f_2 f_3 = 1$;
2) (0РН). $f_1 f_2 f_3 + \overline{f}_1\overline{f}_2 f_3 = 1$; 4) (ЛУМ). $\overline{f}_1 f_2 f_3 + f_1\overline{f}_2 = 1$.

5. (СТИ). Найдите минимальную ДНФ функции f_1 при

$$f_1 f_2 + f_1 f_3 = 1.$$

6. (ЛБ.СИ). Найдите вид явной логической зависимости функций:

$$f_1 = \overline{A}C + B;$$
$$f_2 = B;$$
$$f_3 = \overline{B} + C.$$

7. (ША.ВИ). Найдите вид явной логической зависимости функций, если

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3,$$

где F_1, F_2, F_3 — непустые множества минтермов функций f_1, f_2, f_3 соответственно; при этом считать, что $f_3 \neq 1$.

12 БУЛЕВЫ УРАВНЕНИЯ

12.1. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Примером простейшего булева уравнения является выражение вида

$$AX = 0, \tag{63}$$

где A — независимая булева переменная, X — неизвестная переменная.

При каком значении X выполняется это равенство? Очевидно, только при $X = 0$. Значение неизвестной переменной $X = 0$ и является решением уравнения (63), т. е. является его корнем.

Правая часть простейшего уравнения может быть равной не только нулю, но и единице. Например:

$$A + \overline{B} + \overline{X} = 1. \tag{64}$$

Неизвестная переменная X может принимать лишь два значения — 0 или 1. Пусть $X = 1$, тогда

$$A + \overline{B} + \overline{1} = A + \overline{B} \neq 1,$$

из чего делаем вывод, что $X = 1$ не является решением уравнения (64). Пусть $X = 0$, тогда

$$A + \overline{B} + \overline{0} = 1,$$

откуда следует, что $X = 0$ это и есть корень уравнения (64).

Рассмотренные два уравнения относятся к односторонним, так как их правая часть есть константа нуль или константа единица.

В общем случае одностороннее булево уравнение имеет вид

$$\varphi X + \psi \overline{X} + f = 1, \tag{65}$$

где φ, ψ, f — булевы функции, не зависящие от переменной X. Это дизъюнктивная форма уравнения.

По аналогии с выражением (65) можно получить конъюнктивную форму уравнения:

$$(\varphi + X)(\psi + \overline{X})f = 0.$$

Левую часть одностороннего уравнения можно подвергать любым тождественным преобразованиям — раскрывать скобки, инвертировать, минимизировать и т. д. Рассмотрим, например, уравнение вида

$$\begin{gathered} AB + BX + \overline{A}C + \overline{A}X + CX + \\ + ABC\overline{X} + B\overline{C}\,\overline{X} + A\overline{B}\,\overline{C} = 1. \end{gathered} \tag{66}$$

Приведем его к виду (65):

$$(\overline{A} + B + C)X + (ABC + B\overline{C})\overline{X} + AB + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}C = 1.$$

При $X = 0$ получаем

$$ABC + B\overline{C} + AB + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}C \neq 1,$$

следовательно, $X = 0$ не является корнем уравнения (66).

При $X = 1$ находим

$$\overline{A} + B + C + AB + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}C = 1.$$

Так как при $X = 1$ выражение (66) обращается в тождество, то $X = 1$ является корнем уравнения (66).

Решение уравнения (66) можно найти гораздо быстрее, если левую его часть минимизировать (например, с помощью карты Вейча). При этом неизвестная переменная рассматривается как обычная переменная:

$$B + X + A\overline{C} + \overline{A}C = 1.$$

По этой записи непосредственно заключаем, что равенство выполняется при $X = 1$. Если же $X = 0$, то

$$B + A\overline{C} + \overline{A}C \neq 1.$$

Рассмотрим еще один пример:

$$\begin{gathered} X(A\overline{B} + \overline{A}B + BC) + \overline{B}(\overline{A}X + A\overline{X} + C) + \\ + \overline{X}(AB + \overline{A}\,\overline{B}) + B(AX + \overline{A}\,\overline{X}) = 1. \end{gathered} \tag{67}$$

Это равенство справедливо при обоих значениях X, в чем нетрудно убедиться, если левую часть уравнения нанести на карту Вейча (она вся будет занята единицами). Следовательно, уравнение (67) имеет два решения: $X = 0$ и $X = 1$. Для проверки решения подставим в (67) сначала $X = 0$, затем $X = 1$:

$$\begin{gathered} \overline{B}(A + C) + AB + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B = 1; \\ A\overline{B} + \overline{A}B + BC + \overline{B}(\overline{A} + C) + AB = 1. \end{gathered}$$

В обоих случаях равенство единице сохраняется.

Двусторонние уравнения к виду (65) не сводятся, так как в булевой алгебре нет операции вычитания. Решить двустороннее уравнение можно путем подстановки вместо неизвестной переменной нуля или единицы. То значение, на котором имеет место тождество, и есть корень уравнения. Поясним это на примере:

$$AB + X = \bar{X}AB.$$

Пусть $X = 1$, тогда $AB + 1 \neq \bar{1} \cdot AB$. Значение $X = 1$ не является решением уравнения. Если же принять $X = 0$, то $AB + 0 = \bar{0} \cdot AB$, откуда следует, что искомое решение — это $X = 0$.

Существуют уравнения, не имеющие решений. Например, равенство

$$A + X = \bar{X}B$$

не выполняется ни при $X = 1$, ни при $X = 0$. Следовательно, это уравнение неразрешимо.

Упражнения

1. (ШБС)! Найдите корни уравнений:

$AX + B = B$; $A + \bar{X} = 1$; $A\bar{X} + X = 1$.

2. Укажите номера уравнений, не имеющих решений.

I. (Л00).	II. (23М).
1) $A + BX = C$;	1) $A + B = X$;
2) $AX + B\bar{X} = B$;	2) $A + B = X + C$;
3) $X + B\bar{X} = 0$;	3) $X + B = C + \bar{X}$;
4) $AX + \bar{A}\bar{X} = \bar{A}$;	4) $BX + C = AX + C$;
5) $(A + BX)\bar{X} = 1$;	5) $A + B\bar{X} = A + B$;
6) $(BX + C)\bar{X} = 1$.	6) $A + BX = AX + C$.

3. (АРП). Укажите уравнения, имеющие два корня:

1) $A(C + X) + A\bar{X} + B + \bar{A}\bar{B} = 1$;
2) $B(C + X) + C\bar{X} + C + \bar{A}B = 1$;
3) $A(X + B) + X(\bar{A} + C) + \bar{A}(B + \bar{X}) + A\bar{X} = 1$;
4) $\bar{C}(\bar{A} + BX) + A(X + B) + \bar{B}(X + \bar{C}) + BC = 1$;
5) $A(B + X) + \bar{C}(BX + \bar{A}) + BC + \bar{B}\bar{C} = 1$;
6) $B(A + X) + \bar{B}(\bar{C}X + \bar{A}) + A\bar{B} + \bar{A}B = 1$;
7) $A\bar{B} + BX + \bar{A}\bar{C}X + CX + BC\bar{X} = 1$.

4. (ПСС). Укажите номера уравнений (см. упр. 3), не имеющих решений.

5. (КШК). Укажите номера уравнений (см. упр. 3), имеющих один корень.

6. На рис. 107 приведены карты Вейча, на которых изображены уравнения с правой частью, равной единице.

1) (ААТ). Укажите номера карт, которым соответствуют уравнения, имеющие один корень.

2) (ВТХ). Укажите карты, которым соответствуют неразрешимые уравнения.

7. На рис. 108 приведены карты Вейча. На них представлены уравнения, правая часть которых равна единице.

1) (ИРИ). Укажите номера уравнений с корнями, равными единице.

2) (УЕЕ). Укажите номера карт Вейча, которым соответствуют уравнения с корнями, равными нулю.

A

1	1	1	1
	1		
	1	1	1
1	1	1	1

B X C

1)

A

		1	
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1		

B X C

2)

A

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

B X C

3)

A

	1	1	
	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	1

B X C

4)

A

1			1
1	1	1	1
1	1	1	
1		1	

B X C

5)

A

1	1	1	1
1		1	1
	1	1	
1	1	1	1

B X C

6)

Рис. 107

A

1	1	1	1
	1		1
	1		
1	1	1	1

B X C

1)

A

1	1		
1	1	1	1
1		1	1
		1	1

B X C

2)

A

1	1	1	1
1			1
1	1		
1	1	1	1

B X C

3)

A

	1	1	
1	1	1	1
1	1	1	1
1			1

B X C

4)

A

	1	1	
1	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	1

B X C

5)

A

1	1	1	1
1	1		
	1	1	
1	1	1	1

B X C

6)

Рис. 108

12.2. УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Примером простейшего уравнения с двумя неизвестными является выражение вида $AXY = 0$, где A — булева переменная, X и Y — неизвестные переменные.

Это уравнение имеет три решения:

$$X = Y = 0;$$
$$X = 1,\ \ Y = 0;$$
$$X = 0,\ \ Y = 1.$$

В общем случае уравнения с несколькими неизвестными можно решать так же, как и с одним неизвестным, т. е. путем перебора всех возможных решений. Если уравнение содержит две неизвестные переменные, то проверять надо четыре варианта, если три — то восемь, и т. д. Если уравнение содержит n неизвестных, то число проверок равно 2^n. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти значения X и Y, при которых имеет место равенство

$$AX + XY + \overline{X}A = 1. \qquad (68)$$

В этом уравнении две неизвестные переменные, следовательно, всего необходимо проверить четыре варианта подстановок: 00, 01, 10, 11, где первые цифры соответствуют неизвестной X, вторые — Y, т. е.

$$X = Y = 0;$$
$$X = 1,\ \ Y = 0;$$
$$X = 0,\ \ Y = 1;$$
$$X = Y = 1.$$

Допустим, что решением уравнения (68) являются следующие значения неизвестных: $X = Y = 0$. Подставим их в уравнение (68):

$$A \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \overline{0} \cdot A = A \neq 1.$$

Так как результат не равен единице, то значения $X = Y = 0$ не являются решением уравнения (68).

Проверим второй вариант: $X = 0$, $Y = 1$. Получим тот же результат.

Пусть $X = 1$, $Y = 0$. Подставим эти значения в (68):

$$A \cdot 1 + 1 \cdot 0 + \overline{1} \cdot A \neq 1.$$

Результат подстановки не равен единице, следовательно, значения $X = 1$, $Y = 0$ не являются решением уравнения (68).

При $X = Y = 1$ выражение (68) обращается в тождество, следовательно, $X = Y = 1$ — это есть искомое решение.

Пример 2. Найти все решения уравнения

$$AX + Y\overline{Z} + \overline{A}Z = 1. \qquad (69)$$

Здесь три неизвестные переменные, следовательно, проверить необходимо 8 вариантов подстановок. Сведем их в таблицу (см. табл. 12).

Таблица 12

X	Y	Z	$AX + Y\overline{Z} + \overline{A}Z$
0	0	0	$A\cdot 0 + 0\cdot\overline{0} + \overline{A}\cdot 0 \neq 1$
0	0	1	$A\cdot 0 + 0\cdot\overline{1} + \overline{A}\cdot 1 \neq 1$
0	1	0	$A\cdot 0 + 1\cdot\overline{0} + \overline{A}\cdot 0 = 1$
0	1	1	$A\cdot 0 + 1\cdot\overline{1} + \overline{A}\cdot 1 \neq 1$
1	0	0	$A\cdot 1 + 0\cdot\overline{0} + \overline{A}\cdot 0 \neq 1$
1	0	1	$A\cdot 1 + 0\cdot\overline{1} + \overline{A}\cdot 1 = 1$
1	1	0	$A\cdot 1 + 1\cdot\overline{0} + \overline{A}\cdot 0 = 1$
1	1	1	$A\cdot 1 + 1\cdot\overline{1} + \overline{A}\cdot 1 = 1$

В левой ее части перечислены все восемь наборов значений неизвестных переменных. В правой — для каждого набора указано, равна или не равна единице левая часть уравнения. Из таблицы видно, что уравнение (69) имеет четыре решения:

$$X = 0,\ \ Y = 1,\ \ Z = 0;$$
$$X = 1,\ \ Y = 0,\ \ Z = 1;$$
$$X = 1,\ \ Y = 1,\ \ Z = 0;$$
$$X = 1,\ \ Y = 1,\ \ Z = 1.$$

Пример 3. Решить двустороннее уравнение с двумя неизвестными:

$$AXY + B\overline{X}Y = A\overline{B}X + B\overline{X}. \tag{70}$$

Так как уравнение содержит две неизвестные, то всего необходимо проверить четыре варианта подстановок. Сначала примем $X = Y = 0$. Подставим эти значения в левую и правую части уравнения (70):

$$A\cdot 0\cdot 0 + B\cdot\overline{0}\cdot 0 = A\overline{B}\cdot 0 + B\cdot\overline{0}.$$

В результате получаем $0 \neq B$. Следовательно, $X = Y = 0$ не является решением уравнения (70).

На наборе $X = 0$, $Y = 1$ имеем $B = B$. Левая часть равна правой. Это значит, что одно решение найдено. Оно является и единственным, поскольку при $X = 1$, $Y = 0$ получаем $0 \neq A\overline{B}$, а при $X = Y = 1$ имеем $A \neq A\overline{B}$.

Упражнения

1. (0МС). Найдите наибольшее число решений, которое в принципе может иметь уравнение, если в нем 4 неизвестных?

2. (ФЯТ). Найдите значения X, Y, Z, V, если

$$XYZV(A\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B) = B\overline{C} + A\overline{B} + \overline{A}C.$$

3. (ЯКУ). При каких значениях X, Y, Z выполняется равенство

$$(A + X)(B + \overline{Y})(C + Z) = 1?$$

4. (ПУФ). Сколько решений имеет следующее уравнение, содержащее пять неизвестных X_1, X_2, X_3, X_4, X_5:

$$(A + \overline{A}B)(X_1X_2X_3X_4X_5 + \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3 + \overline{X}_4 + \overline{X}_5) = B + A\overline{B}?$$

5. (ПВХ). Составьте уравнение по условиям:

а) левая часть представляет собой дизъюнкцию двух конъюнкций;

б) если принять $Y = 0$, то получится $AX = 1$;

в) если принять $X = 0$, то получится $BY = 1$.

Для самоконтроля укажите левую часть уравнения.

12.3. УРАВНЕНИЯ КОНЪЮНКТИВНОГО ТИПА

В двух предыдущих подразделах рассматривались уравнения, в которых неизвестными были отдельные переменные. Решение таких уравнений сводится к отысканию корней, обращающих в тождество все выражение, если их подставить в уравнение вместо неизвестных переменных.

Теперь рассмотрим более сложный случай, когда неизвестной является не отдельная переменная, а функция нескольких переменных. Из всего множества таких уравнений выделим класс выражений, сводящихся к виду

$$X \cdot \varphi = f, \tag{71}$$

где φ и f — явно заданные функции, зависящие от некоторых логических аргументов, например, A, B, C, ...; X — неизвестная функция, зависящая от тех же аргументов.

Уравнения, сводящиеся к (71), условимся называть конъюнктивными.

Решение конъюнктивных уравнений поясним на примере. Пусть

$$\varphi = AB + BC; \quad f = ABC,$$

тогда уравнение примет вид

$$X(AB + BC) = ABC. \tag{72}$$

Согласно этой записи требуется найти такую функцию $X(A, B, C)$, чтобы конъюнкция этой функции и выражения $AB + BC$ равнялась ABC.

Представим функции φ, X, f в виде изображающих чисел:

$$\begin{array}{l|cccccccc} & \#\varphi = & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \& & \#X = & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline & f = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

где символами x_i ($i = 0, 1, 2, ..., 7$) обозначены двоичные цифры изображающего числа функции X. Решение уравнения сводится к отысканию значений переменных x_i.

Прежде всего, отметим, что на наборе значений аргументов 111, т. е. когда $A = B = C = 1$, имеем

$$f = 1 \text{ и } \varphi = 1.$$

Отсюда следует, что $x_7 = 1$.

Далее, на наборе 011

$$\varphi = 1, \text{ а } f = 0.$$

Это значит, что x_3 может быть только равным нулю. То же самое относится и к x_6: $x_3 = x_6 = 0$.

На всех остальных наборах функция φ равна нулю. Функция f на этих наборах также равна нулю. Следовательно, переменные x_0, x_1, x_2, x_4, x_5 могут принимать любые значения — либо 0, либо 1.

Таким образом, функция $X(A, B, C)$ определена на наборах 3, 6, 7, а на всех остальных наборах — 0, 1, 2, 4, 5 — не определена. Доопределить ее можно 32 способами. Каждый из вариантов доопределения представляет собой решение уравнения (72). Следовательно, уравнение (72) имеет 32 решения. Запишем некоторые из них:

$$X = AC;$$
$$X = \overline{B} + AC;$$
$$X = AC + \overline{A}\,\overline{B};$$
$$X = ABC + \overline{A}\,\overline{B}C.$$

Если все 32 решения поочередно подставлять в выражение (72), то всякий раз будет получаться тождество. Например, для $X = \overline{B} + AC$ имеем

$$(\overline{B} + AC)(AB + BC) = ABC,$$

в чем нетрудно убедиться, если в левой части уравнения раскрыть скобки.

Упражнения

1. Дано булево уравнение вида

$$X(B\overline{C} + \overline{A}C) = AB\overline{C} + \overline{A}BC.$$

1) (Н0Р). Определите количество наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена, и найдите число всех решений уравнения.

2) (УЧВ). Укажите наборы (в десятичной системе), на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

3) (И0Г). Из всех минимальных ДНФ функции $X(A, B, C)$, соответствующих различным способам доопределения, найдите самую минимальную (при самоконтроле аргументы упорядочить по алфавиту).

4) (ИМД). Укажите десятичные эквиваленты наборов, на которых минимальная ДНФ функции $X(A, B, C)$ доопределена единицами.

5) (АКЕ). Для базиса (A, B, C, D) определите количество наборов, на которых функция $X(A, B, C, D)$ не определена, и найдите число всех решений уравнения.

6) (ВУЖ). Укажите наборы, на которых функция $X(A, B, C, D)$ не определена (наборы представить в десятичной системе).

7) (ИМ3). Из всех минимальных ДНФ функции $X(A, B, C, D)$ найдите самую минимальную.

8) (В54). В нижеприведенном списке укажите номера функций, являющихся решениями заданного уравнения:

1) $X = \overline{B}C + A\overline{C}$;	4) $X = \overline{A}\,\overline{C} + AB + BC$;
2) $X = AB + BC$;	5) $X = A\overline{C} + \overline{A}BC$;
3) $X = B\overline{C} + AB\overline{C}$;	6) $X = \overline{B}\,\overline{C} + BC + A\overline{C}$.

2. Дано булево уравнение вида

$$\overline{A}(CX + \overline{B}X) + ABX = AB + BC.$$

1) (ЭХК). Определите количество наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена, и найдите число всех решений уравнения.

2) (ТВ1). Укажите наборы (в десятичной системе), на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

3) (ЕС2). Из всех минимальных ДНФ функции $X(A, B, C)$ найдите самую минимальную.

4) (0В3). Для базиса $X(A, B, C, D)$ определите количество наборов, на которых функция $X(A, B, C, D)$ не определена, и найдите число всех решений уравнения.

5) (ИЛИ). Укажите наборы значений аргументов, на которых функция $X(A, B, C, D)$ не определена (наборы представить в десятичной системе).

12.4. УРАВНЕНИЯ ДИЗЪЮНКТИВНОГО ТИПА

Булевы выражения, представленные в виде

$$X + \varphi = f,$$

где φ и f — явно заданные функции, X — неизвестная функция, зависящая от тех же аргументов, что и функции φ и f, условимся называть уравнениями **дизъюнктивного типа**. Решение таких уравнений поясним на примере уравнения

$$X + \bar{A}B + A\bar{B}C = C + A\bar{B} + \bar{A}B. \tag{73}$$

Согласно записи этого уравнения, требуется найти такую функцию $X(A, B, C)$, логическая сумма которой с $\bar{A}B + A\bar{B}C$ равнялась бы выражению $C + A\bar{B} + \bar{A}B$.

Запишем уравнение (73) с помощью изображающих чисел:

$$\begin{array}{r}
+\begin{array}{rcccccccc}
\#\varphi = & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\#X = & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
\hline
\#f = & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}
\end{array}$$

На наборе 111 (когда $A = B = C = 1$) функция $f = 1$. Но функция φ на этом наборе равна нулю. Следовательно, значение x_7 может быть равно только единице. То же самое относится и к x_1 и x_4:

$$x_1 = x_4 = x_7 = 1.$$

На наборе 000 (когда $A = B = C = 0$) функции f и φ равны нулю. Следовательно, x_0 может быть равно только нулю. То же самое относится и к x_6:

$$x_0 = x_6 = 0.$$

На наборе 010 имеем:

$$\varphi = f = 1.$$

Следовательно, значение неизвестной x_2 может быть любым. То же самое относится и к наборам 011 и 101.

Таким образом, $X(A, B, C)$ — это функция, принимающая единичное значение на наборах 1, 4, 7, равная нулю на наборах 0, 6 и не определенная на наборах 2, 3, 5. Существует восемь способов ее доопределения. Следовательно, уравнение (73) имеет восемь решений:

$$X_1 = ABC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}C;$$
$$X_2 = \bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC;$$
$$X_3 = BC + \bar{A}C + A\bar{B}\bar{C};$$
$$X_4 = BC + \bar{A}B + \bar{A}C + A\bar{B}\bar{C};$$
$$X_5 = AC + A\bar{B} + \bar{B}C;$$
$$X_6 = AC + A\bar{B} + \bar{B}C + \bar{A}B\bar{C};$$
$$X_7 = C + A\bar{B} + \bar{A}B;$$
$$X_8 = C + A\bar{B}.$$

При подстановке каждого из этих выражений в уравнение (73) получаются тождества. Например, для

$$X_8 = C + A\bar{B}$$

имеем:

$$C + A\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}C = C + A\bar{B} + \bar{A}B.$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, достаточно обе его части записать в виде изображающих чисел (они будут равными).

Упражнения

1. Дано булево уравнение вида

$$X + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}C + ABC = AB + A\bar{C} + \bar{A}C.$$

1) (ЕХП). Укажите десятичные эквиваленты наборов значений аргументов A, B, C, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

2) (ХТО)! Введите в устройство число решений уравнения. Среди всех минимальных ДНФ функции $X(A, B, C)$ найдите самую минимальную. Для самоконтроля укажите число ее вхождений аргументов.

3) (33Р). Для базиса (A, B, C, D) укажите наборы значений аргументов (в десятичной системе), на которых функция $X(A, B, C, D)$ не определена.

4) (ХСС). Укажите номера всех выражений, являющихся решениями заданного уравнения:

1) $X = AB + A\bar{C}$;
2) $X = BC + \bar{A}C$;
3) $X = AB + BC$;
4) $X = A\bar{C} + BC$;
5) $X = A\bar{C} + \bar{B}C$;
6) $X = \bar{A}C + AB$;
7) $X = \bar{A}B + A\bar{C}$;
8) $X = A\bar{C} + \bar{A}C$.

2. Дано булево уравнение вида

$$X + A\bar{B} + \bar{A}B + AC + \bar{B}C = 1.$$

1) (Д5Т). Найдите минимальную ДНФ функции $X(A, B, C)$ и определите число решений уравнения.

2) (РВУ). Перечислите наборы (в десятичной системе), на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

3. Дано: F_1 — множество минтермов функции φ, F_2 — множество минтермов тех же аргументов функции f. Известно, что $F_1 \subset F_2$ и что $|F_1| = 6$, $|F_2| = 9$.

1) (ЕМП). Для дизъюнктивного уравнения определите число его решений и укажите число наборов, на которых функция X равна единице при доопределении ее нулями.

2) (УД0). Найдите то же самое для случая, когда $F_1 = \varnothing$, а $|F_2| = 9$.

12.5. ДРУГИЕ ТИПЫ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

Кроме дизъюнктивных и конъюнктивных, существует много других типов уравнений. Например:

$$\varphi_1 + \varphi_2 X = X + \varphi_3;$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 X + \varphi_3 \bar{X} = \varphi_4 \bar{X} + \varphi_5;$$
$$\varphi_1 X + \varphi_2 \bar{X} + \varphi_3 = 1,$$

где φ_1, φ_2, ... — явно заданные функции, X — неизвестная функция, $\bar{X}$ — ее инверсия.

Все они могут быть решены с помощью изображающих чисел, как и в случае двух предыдущих типов. Поясним их решение на примере следующего уравнения:

$$\varphi_1 X + \varphi_2 \bar{X} = f,$$

где функции φ_1, φ_2 и f имеют вид

$$\varphi_1 = A + \bar{B} + \bar{C}; \quad \varphi_2 = B\bar{C} + \bar{B}C; \quad f = AB + B\bar{C} + \bar{B}C.$$

Представим заданное уравнение с помощью изображающих чисел следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} +\left\{\begin{array}{l} \&\left\{\begin{array}{llllllll} \#\varphi_1 = 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \#X = x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array}\right. \\ \&\left\{\begin{array}{llllllll} \#\varphi_2 = 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \#\bar{X} = \bar{x}_0 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 & \bar{x}_5 & \bar{x}_6 & \bar{x}_7 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \hline \quad \#f = 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \quad 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \end{array}\right\} \qquad (74)$$

Решение уравнения начнем с нулевого минтерма. На наборе 000 (когда $A = B = C = 0$) имеем

$$1 \cdot x_0 + 0 \cdot \bar{x}_0 = 0.$$

В этом выражении второе слагаемое, содержащее нуль, равно нулю независимо от значения переменной x_0. Чтобы первое слагаемое было равно нулю, необходимо принять $x_0 = 0$. Точно такая же ситуация имеет место в колонке, где находится переменная x_4. Следовательно, $x_0 = x_4 = 0$.

Переходим к минтерму m_1. Для набора 001 имеем

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot \bar{x}_1 = 1.$$

В каком случае справедливо это равенство? Пусть $x = 0$, тогда равенство сохраняется: $1 \cdot 0 + 1 \cdot \bar{0} = 1$.

Если принять $x = 1$, то равенство также сохраняется:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot \bar{1} = 1.$$

Следовательно, на наборе 001 функция $X(A, B, C)$ не определена (т. е. может принимать любые значения). Точно такая же ситуация имеет место и в колонках x_2, x_5, x_6, откуда следует, что функция $X(A, B, C)$ не определена еще на трех наборах 010, 101 и 110.

Рассмотрим колонку минтерма m_3. На наборе 011

$$0 \cdot x_3 + 0 \cdot \bar{x}_3 = 0.$$

Очевидно, что это равенство сохраняется независимо от значения переменной x_3. Следовательно, функция $X(A, B, C)$ не определена и на наборе 011.

Остался один набор 111. Согласно (74) имеем

$$1 \cdot x_7 + 0 \cdot \bar{x}_7 = 1.$$

Это равенство справедливо лишь при $x_7 = 1$.

Таким образом, искомая функция $X(A, B, C)$ равна нулю на наборах 000 и 100, равна единице на наборе 111 и не определена на пяти наборах:

$$001, 010, 011, 101, 110.$$

Аналитически эта функция может быть представлена 32 вариантами. В качестве примера приведем три решения:

$$X = ABC + \bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C};$$
$$X = C;$$
$$X = AB.$$

Подстановка любого из 32 решений в исходное уравнение обращает его в тождество.

Упражнения

1. Решите булево уравнение $\varphi_1 \cdot X + \varphi_2 = \varphi_3 + \bar{X}$, где

$$\varphi_1 = ABC + \bar{A}\,\bar{B} + \bar{B}\bar{C}; \qquad \varphi_2 = B + A\bar{C}; \qquad \varphi_3 = AB + \bar{A}\,\bar{B} + \bar{A}\,\bar{C}.$$

1) (ЦПК). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

2) (ЦБН). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна единице.

3) (ЕЖМ). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна нулю.

2. Решите уравнение вида $X \cdot \varphi_1 + \bar{X} \cdot \varphi_2 + \varphi_3 = X$, где

$$\varphi_1 = AB + \bar{A}\,\bar{B} + A\bar{C}; \qquad \varphi_2 = B\bar{C}; \qquad \varphi_3 = \bar{C} + \bar{A}B.$$

1) (ХМ0). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

2) (ЛПП). На каких наборах (в десятичной системе) функция $X(A, B, C)$ равна единице?

3) (42Р). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна нулю.

4) (ЗЫС). Доопределите нулями функцию $X(A, B, C)$ и найдите ее минимальную ДНФ.

5) (ППТ). Доопределите единицами функцию $X(A, B, C)$ и найдите ее минимальную ДНФ (буквы ответа упорядочить по алфавиту).

3. Дано булево уравнение вида

$$\overline{B} + AC + \overline{A}\,\overline{C} + X = \overline{B}\,\overline{X} + AC\overline{X} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{X} + A + B\overline{C}.$$

1) (М0У). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

2) (НЭФ). На каких наборах (в десятичном виде) функция $X(A, B, C)$ принимает нулевое значение?

3) (НИХ). На каких наборах (в десятичной системе) функция $X(A, B, C)$ равна единице?

4) (ФУЦ). Найдите самое короткое аналитическое выражение для функции $X(A, B, C)$.

5) (Д44). Функцию $X(A, B, C)$ доопределите нулями и найдите минимальную ДНФ.

6) (ФУШ). Функцию $X(A, B, C)$ доопределите единицами и найдите для нее минимальную ДНФ.

12.6. БУЛЕВЫ УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Для решения уравнения с несколькими неизвестными функциями можно использовать изображающие числа точно так же, как и в случае уравнений с одной неизвестной функцией. Однако при этом необходимо учитывать одну особенность, суть которой поясним на примере простейшего уравнения вида

$$XY = A,$$

где X и Y — функции, зависящие от аргумента A.

Представим уравнение в виде изображающих чисел:

$$\begin{array}{ll} & \#X = x_0 \quad x_1 \\ \& & \#Y = \underline{y_0 \quad y_1} \\ & \#A = 0 \quad\; 1 \end{array}$$

Поскольку $x_1 y_1 = 1$, то $x_1 = y_1 = 1$.

Для нулевого минтерма имеем

$$x_0 y_0 = 0.$$

Это равенство справедливо в нескольких случаях. Если принять $x_0 = 0$, то y_0 может принимать любые значения. Если же принять $y_0 = 0$, то x_0 может принимать любые значения. Отсюда следует, что существуют три набора значений переменных x_0 и y_0, конъюнкция которых равна нулю: 00, 01, 10. Этим трем наборам соответствуют три решения заданного простейшего уравнения:

$$\begin{cases} X = A, \\ Y = A, \end{cases} \quad \begin{cases} X = A, \\ Y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} X = 1, \\ Y = A. \end{cases}$$

Рассмотрим еще один такой же простой пример:

$$X + Y = \bar{A}.$$

Пусть базис состоит из аргументов (A, B). Тогда

$$\left.\begin{array}{r} \#X = \\ + \ \#Y = \\ \#\bar{A} = \end{array} \begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\} \qquad (75)$$

Рассмотрим колонку с нулевым минтермом:

$$x_0 + y_0 = 1.$$

Если $x_0 = 1$, то значение y_0 безразлично. Если $y_0 = 1$, то значение x_0 безразлично. Снова тот же случай неоднозначности на трех наборах значений переменных x_0 и y_0. В данном уравнении это 01, 10, 11, где первая цифра — это значение x_0, вторая — значение y_0. То же самое относится и к колонке с минтермом m_1. В остальных колонках имеем:

$$x_2 + y_2 = 0, \text{ следовательно, } x_2 = y_2 = 0,$$
$$x_3 + y_3 = 0, \text{ следовательно, } x_3 = y_3 = 0.$$

Таким образом, неоднозначность на трех наборах имеет место в двух колонках. Следовательно, уравнение имеет девять решений.

Если $x_0 = y_0 = 1$, то согласно (75):

$$+\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad +\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad +\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

В аналитическом виде эти решения имеют вид:

$$\begin{array}{lll} X = \bar{A}; & X = \bar{A}; & X = \bar{A}\,\bar{B}; \\ Y = \bar{A}. & Y = \bar{A}\,\bar{B}. & Y = \bar{A}. \end{array}$$

Если $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, то

$$+\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad +\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad +\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Отсюда также имеем три варианта:

$$\begin{array}{lll} X = \bar{A}; & X = \bar{A}; & X = \bar{A}\,\bar{B}; \\ Y = \bar{A}B. & Y = 0. & Y = \bar{A}B. \end{array}$$

Остальные три решения получаются, если принять $x_0 = 0$, $y_0 = 1$:

$$\begin{array}{lll} X = \bar{A}B; & X = \bar{A}B; & X = 0; \\ Y = \bar{A}. & Y = \bar{A}\bar{B}. & Y = \bar{A}. \end{array}$$

Рассмотрим более сложный пример. Пусть дано уравнение

$$X + Y\varphi_1 = \varphi_2,$$

где функции φ_1иφ_2 имеют вид

$$\varphi_1 = \bar{A}C + \bar{A}\bar{B} + AB\bar{C}; \qquad \varphi_2 = BC + \bar{A}B + A\bar{B}\bar{C}.$$

Представим это уравнение с помощью изображающих чисел:

$$\begin{array}{r|cccccccc}
+ & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
\& & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \\
\varphi_1 = & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\varphi_2 = & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Найдем значения x_0 и y_0:

$$x_0 + y_0 \cdot 1 = 0.$$

Это равенство справедливо лишь в единственном случае, когда $x_0 = y_0 = 0$. То же самое относится к колонкам с минтермами m_1 и m_6:

$$x_1 = x_6 = y_1 = y_6 = 0.$$

Перейдем к колонке, которой соответствует минтерм m_2:

$$x_2 + y_2 \cdot 0 = 1.$$

Чтобы левая часть этого выражения была равна 1, необходимо принять $x_2 = 1$. Значение y_2 безразлично. То же самое относится к колонкам m_4 и m_7:

$$x_2 = x_4 = x_7 = 1; \;\; y_2, y_4, y_7 \in \{0, 1\}.$$

Рассмотрим колонку пятого минтерма:

$$x_5 + y_5 \cdot 0 = 0.$$

В этом случае имеем: $x_5 = 0$; $y_5 \in \{0, 1\}$.

Осталась только одна колонка, соответствующая минтерму m_3:

$$x_3 + y_3 \cdot 1 = 1.$$

Если принять $x_3 = 1$, то $y_3 \in \{0, 1\}$. Если же принять $y_3 = 1$, то $x_3 \in \{0, 1\}$. Таким образом, на состоянии 011 имеем следующие три случая:

$$\begin{aligned}
&x_3 = 0; y_3 = 1;\\
&x_3 = 1; y_3 = 0;\\
&x_3 = y_3 = 1.
\end{aligned}$$

В результате получаем: если не учитывать набор 011, то функция $X(A, B, C)$ не имеет неопределенных состояний, а функция $Y(A, B, C)$ не определена на четырех наборах, т. е. имеет 16 вариантов представления (за счет разных способов доопределения). А так как на наборе 011 существуют три способа доопределения, то всего заданное уравнение имеет 48 решений.

Упражнения

1. Дано булево уравнение

$$X + Y = B\bar{C} + AC.$$

1) (ТГЭ). Укажите десятичные номера всех тех наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна нулю.

2) (Т5Б). Укажите десятичные номера всех тех наборов, на которых функция $Y(A, B, C)$ равна нулю.

3) (УТВ). Сколько решений имеет уравнение?

4) (ЗАГ). Укажите номера наборов значений переменных A, B, C, на которых неоднозначность характеризуется тремя состояниями.

2. Дано булево уравнение вида

$$X + Y(B\overline{C} + \overline{A}\overline{C} + A\overline{B}C) = AB + A\overline{C}.$$

1) (ВРД). Сколько всего решений имеет уравнение?

2) (651). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна нулю.

3) (ВЛЖ). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна единице.

4) (ВРЗ). Укажите номера наборов, на которых функция $Y(A, B, C)$ равна нулю.

5) (ИШИ). Укажите номера наборов значений переменных A, B, C, на которых неоднозначность характеризуется тремя состояниями.

3. Дано уравнение с тремя неизвестными функциями:

$$XYZ = A + B + C.$$

1) (576). Сколько решений имеет уравнение?

2) (ППЛ). Укажите десятичные номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна единице.

3) (33Я). Найдите минимальную форму функции $Y(A, B, C)$, если известно, что $X(A, B, C) = 0$.

4. (ЯМН). Сколько решений имеет уравнение вида

$$X_1X_2X_3X_4X_5 = A + B + C,$$

где X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 — неизвестные функции аргументов A, B, C?

5. Дано булево уравнение вида

$$XYZ = AB + \overline{A}\overline{B} + A\overline{C}.$$

1) (ЫХ0). Сколько решений имеет уравнение?

2) (ВГП). Укажите наборы (в десятичной системе), на которых функции X, Y, Z необходимо доопределять (т. е. укажите неопределенные состояния функций X, Y, Z). Наборы упорядочить по возрастанию.

12.7. ЕЩЕ РАЗ О ФОРМАХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

По своей сути задача повышения порядка функций сводится к решению булевых уравнений с несколькими неизвестными. Эти уравнения образуют особый класс. Во-первых, все они являются односторонними, т. е. в правой их части неизвестных переменных нет. Во-вторых, в левой части находятся только неизвестные переменные (явно заданных функций нет).

Рассмотрим пример, приведенный в подразделе 5.6, где требуется представить в виде конъюнкции двух функций булево выражение $AB + CD$. Очевидно, что задача сводится к решению уравнения вида

$$XY = AB + CD,$$

где X и Y — неизвестные булевы функции, зависящие от аргументов A, B, C, D.

Представим уравнение с помощью изображающих чисел:

$$\& \begin{array}{cccccccccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad (76)$$

Для первой слева колонки имеем: $x_0 y_0 = 0$.

Это хорошо знакомый случай, когда доопределение осуществляется тремя способами:

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 = 0, & y_0 = 0; \\ x_0 = 0, & y_0 = 1; \\ x_0 = 1, & y_0 = 0. \end{array}\right\} \qquad (77)$$

То же самое относится и к колонкам с номерами 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10. В остальных колонках — полная определенность, например:

$$x_3 y_3 = 1.$$

Очевидно, что это равенство справедливо только при $x_3 = y_3 = 1$.

Таким образом, уравнение (76) содержит неопределенность на девяти наборах значений аргументов A, B, C, D. Так как для каждого из них существуют три варианта доопределения, то всего имеем 19683 решений. Чтобы отыскать все эти решения, необходима какая-то система. В данном случае проще всего воспользоваться троичной системой. Перепишем уравнение (76), оставив в нем только неопределенные состояния:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & 1 & x_4 & x_5 & x_6 & 1 & x_8 & x_9 & x_{10} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y_0 & y_1 & y_2 & 1 & y_4 & y_5 & y_6 & 1 & y_8 & y_9 & y_{10} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad (78)$$

Каждая пара переменных (в колонках) доопределяется тремя способами, указанными в (77). Сокращенно их будем обозначать 00, 01, 10 или в троичной системе — 0, 1, 2.

Поставим в соответствие колонкам, не содержащим единиц, троичные разряды. Тогда всякий вариант доопределения можно закодировать 9-значным троичным числом. И наоборот, каждому 9-значному троичному числу будет соответствовать некоторый способ доопределения. Систематически перебрав все 19683 троичных чисел и найдя для каждого выражения X и Y, мы получим все возможные решения уравнения (78). Процесс декодирования поясним на примере произвольно выбранного девятизначного троичного числа 122021000 (младший разряд — справа):

$$\& \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

После минимизации получаем:

$$X(A,B,C,D) = AB + CD + \bar{A}D + \bar{A}\,\bar{B}C;$$
$$Y(A,B,C,D) = AB + BC + CD + \bar{A}\,\bar{B}\bar{C}\,\bar{D}.$$

Необходимо иметь в виду, что число 19683 — это количество решений уравнения, но число вариантов представления выражения $AB + CD$ в виде конъюнкции значительно меньше, так как операция конъюнкции коммутативна. Например, троичное число 211012000 дает тот же результат, что и число 122021000.

Поиск минимальных выражений среди форм высших порядков также сводится к решению соответствующих булевых уравнений. В общем случае этот процесс состоит из следующих этапов:

а) составляем уравнение и находим все его решения в виде изображающих чисел для каждой неизвестной функции;

б) по изображающим числам получаем минимальные ДНФ (или КНФ);

в) составляем минимальные выражения в заданной форме высшего порядка и для каждого из них находим число вхождений аргументов.

Если в полученном списке найдется хотя бы одно выражение, имеющее меньшее число вхождений аргументов по сравнению с исходной функцией, то можно считать, что задача решена. Однако такого выражения может и не быть. Тогда необходимо исследовать какую-либо другую форму высшего порядка, затем третью и т. д., пока не найдется более короткое выражение, чем исходное. Но после этого можно попытаться отыскать вариант с еще меньшим числом букв и т. д. В результате мы переходим к проблеме абсолютно минимальной формы, которая, как было отмечено в подразделе 5.3, пока не решена.

12.8. НЕРАЗРЕШИМЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как уже упоминалось в подразделе 12.1, не всякое булево уравнение имеет решение. Рассмотрим, например, такое уравнение:

$$X + AB = C + A\bar{B} + \bar{A}B. \qquad (79)$$

Запишем его с помощью изображающих чисел:

$$\begin{array}{r} x_0\ \ x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5\ \ x_6\ \ x_7 \\ +\ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 1\ \ \ 1 \\ \hline 0\ \ \ 1\ \ \ 1\ \ \ 1\ \ \ 1\ \ \ 1\ \ \ 0\ \ \ 1 \end{array}$$

Для нулевой колонки имеем: $x_0 + 0 = 0$, следовательно, $x_0 = 0$, т. е. на наборе 000 уравнение разрешимо. На наборах 001, 010, 011, 100, 101 также имеем решения $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$. На наборе 111 функция $X(A, B, C)$ не определена. Остался один набор 110, на котором

$$x_6 + 1 = 0.$$

Это равенство не выполняется ни при каком значении x_6. Следовательно, не существует такой функции, которая обратила бы выражение (79) в тождество, если ее подставить вместо X, т. е. уравнение (79) неразрешимо.

Таким образом, уравнение является неразрешимым, если существует хотя бы один набор значений аргументов, на котором отсутствует решение. Это утверждение справедливо для полностью определенных уравнений. Если же уравнение определено не всюду, а функция $X(A, B, C, ...)$ не имеет решений на наборах, на которых уравнение не определено, то нет оснований считать, что данное уравнение не имеет решения. Пусть, например, уравнение (79) не определено на наборе 110. Тогда можно считать, что функция $X(A, B, C)$ также не определена на этом наборе. Следовательно, после доопределения получаем четыре решения (на наборе 111 функция $X(A, B, C)$ также не определена):

$$X_1 = A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}C;$$

$$X_2 = C + A\overline{B} + \overline{A}B;$$

$$X_3 = \overline{A}B + \overline{B}C + A\overline{C};$$

$$X_4 = A + B + C.$$

Если любое из этих решений подставить в (79), то получим равенство, имеющее место на всех наборах за исключением набора 110.

Упражнения

1. Дано булево уравнение вида: $X + B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C = AC$.

1) (ЕЕМ). Укажите номера наборов, на которых уравнение не имеет решений.

2) (АЕН). Укажите номера наборов, на которых $X(A, B, C) = 1$.

3) (ГТ0). Укажите номера наборов, на которых $X(A, B, C) = 0$.

2. Дано булево уравнение

$$(A\overline{C} + A\overline{B} + \overline{A}BC)X + (\overline{B} + AC)\overline{X} = AB + BC.$$

1) (4ЛБ). Укажите номера наборов, на которых уравнение не имеет решений.

2) (ШБС). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна единице.

3) (ЯСТ). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена, а затем на которых она равна нулю.

3. Уравнение не определено на наборах 1 и 5:

$$(AB\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}\overline{B})X = (C + \overline{A}B)\overline{X}.$$

1) (АКУ). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ не определена.

2) (0УФ). Сколько существует решений заданного уравнения?

3) (ТЯХ). Укажите номера наборов, на которых функция $X(A, B, C)$ равна единице.

4) (УХП). Среди минимальных ДНФ для функции $X(A, B, C)$ найдите самое короткое выражение (при вводе его в устройство буквы упорядочьте по алфавиту).

13 ПОРОГОВЫЕ ФУНКЦИИ

13.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть даны n логических аргументов $A_1, A_2, ..., A_n$. Поставим в соответствие этим аргументам натуральные числа a_1, $a_2, ..., a_n$, называемые **весами**, и зададим некоторое неотрицательное число T, которое будем называть **порогом.** Условимся считать, что если на каком-либо наборе

$$A_1a_1 + A_2a_2 + \ldots + A_na_n = \sum_{i=1}^{n} A_ia_i > T, \tag{80}$$

где знак «+» обозначает арифметическое сложение, то булева функция $f(A_1, A_2, ..., A_n)$ принимает единичное значение на этом наборе. Если же на каком-либо наборе

$$\sum_{i=1}^{n} A_ia_i \leqslant T, \tag{81}$$

то функция $f(A_1, A_2, ..., A_n)$ на этом наборе принимает нулевое значение.

Функцию, представленную описанным способом, будем называть **пороговой функцией.** Записывать ее, согласно [6], условимся в виде $f = [a_1, a_2, ..., a_n; T]$.

Для примера рассмотрим функцию трех аргументов

$$f(A_1, A_2, A_3) = [3, 4, 6; 5]. \tag{82}$$

Согласно этой записи имеем:

$$a_1 = 3;\ \ a_2 = 4;\ \ a_3 = 6;\ \ T = 5.$$

Все наборы значений аргументов A_1, A_2, A_3, на которых функция принимает единичное (либо нулевое) значение, можно получить из соотношения вида

$$A_1 \cdot 3 + A_2 \cdot 4 + A_3 \cdot 6 > 5.$$

Подставим в это выражение один за другим все наборы значений аргументов и для каждого набора определим значение функции. Тогда окажется, что функция принимает единичное значение на наборах 001, 011, 101, 110, 111. Ее минимальная форма имеет вид

$$f = A_1A_2 + A_3.$$

Для всякой пороговой функции справедливо:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n; T] = [ka_1, ka_2, \ldots, ka_n; kT],$$

где k — натуральное число. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать данное выражение в развернутом виде, согласно (80) и (81):

$$ka_1A_1 + ka_2A_2 + \ldots + ka_nA_n > kT;$$
$$ka_1A_1 + ka_2A_2 + \ldots + ka_nA_n \leqslant kT.$$

Если обе части неравенств разделить на k, то получим выражения (80) и (81).

Для примера рассмотрим пороговую функцию (82).

Если $k = 2$, то $[3, 4, 6; 5] = [6, 8, 12; 10]$.

Если $k = 3$, то $[3, 4, 6; 5] = [9, 12, 18; 15]$, и т. д.

С практической точки зрения наибольший интерес представляют пороговые функции, для которых имеет минимальное значение выражение

$$L = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + T,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — веса пороговой функции; T — порог.

В общем случае задача отыскания минимальных весов и порога сводится к задаче целочисленного линейного программирования [6] и при непосредственном использовании неравенств (80) и (81) представляет собой серьезную проблему. Чтобы облегчить задачу нахождения пороговой функции (на основе булевой), систему неравенств (80) и (81) следует предварительно упростить. Для этого можно воспользоваться теоремами, главные из которых приведены в данном разделе.

Не всякая булева функция представима в виде пороговой. Если веса и порог являются целыми положительными числами, то для булевой функции, минимальная ДНФ которой содержит инверсные аргументы, пороговых функций не существует. Отсюда следует, что множество булевых выражений, представимых в виде пороговых, полностью входит в класс монотонных булевых функций (напомним, что монотонной называется функция, не содержащая инверсий в минимальных ДНФ).

Упражнения

1. (ШИФ)! Укажите пороговую величину в записи пороговых функций:

$$[2, 2, 3, 4; 7]; \quad [1, 2; 4]; \quad [7, 4, 4, 7; 10].$$

2. Укажите десятичные наборы значений аргументов, на которых пороговая функция принимает единичное значение:

1) (ШМП). [1, 1, 3; 2]; 3) (ЭХС). [1, 7, 4, 5; 12];

2) (ПХМ). [2, 2, 3; 2]; 4) (Л0Т). [2, 2, 2, 6; 9].

3. Укажите десятичные наборы, на которых пороговая функция принимает нулевое значение:

1) (ШЗ0). [2, 3, 2; 3]; 3) (ЛЕК). [2, 4, 3, 2; 3];
2) (ЦХР). [6, 7, 6; 6]; 4) (ЗЕУ). [1, 2, 4, 8; 4].

4. Найдите минимальные ДНФ функций, выразив их через аргументы A, B, C:

1) (ЕДО). [3, 4, 4; 3]; 3) (ЕКЖ). [3, 4, 4, 5; 3];
2) (К0С). [4, 2, 1; 2]; 4) (ЗЫХ). [4, 6, 2, 2; 9].

5. **(УЗФ).** Укажите все значения a_1, при которых функция $f(A_1, A_2, A_3) = [a_1, 1, 4; 5]$ равна нулю, если принять: $A_1 = A_2 = 1$; $A_3 = 0$.

6. **(МИЮ)!** Определите число, на которое можно сократить веса и порог функции вида [3, 6, 9, 3; 6]. Найдите веса и порог функции, получившейся после сокращения.

7. **(Ж6Я).** Укажите номера минтермов конъюнкции двух пороговых функций [3, 4, 6; 5] и [6, 3, 4; 5], зависящих от одних и тех же аргументов.

13.2. ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОРОГОМ ПРИ НЕИЗМЕННЫХ ВЕСАХ

В каких пределах может меняться пороговая величина при неизменных весах? Если $T = 0$, то всякая пороговая функция принимает единичное значение на всех наборах значений аргументов за исключением нулевого, на котором функция равна нулю. Минимальная ДНФ такой функции есть дизъюнкция всех ее аргументов:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n; 0] = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Если же порог равен сумме всех весов или превышает ее, то пороговая функция тождественно равна нулю:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n; a_1 + a_2 + \ldots + a_n] \equiv 0.$$

Таким образом, при заданных весах пороговая величина может меняться в пределах

$$0 \leqslant T \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i. \quad (83)$$

Заметим, что в системе принятых определений и ограничений пороговую функцию, тождественно равную единице, получить невозможно. Каждому значению порога из (83) соответствует некоторая пороговая функция. Множество всех этих функций условимся называть P-множеством. Согласно (83) существует M значений пороговой величины:

$$M = \sum_{i=1}^{n} a_i + 1.$$

В общем случае столько же существует и пороговых функций. Всегда ли они различны? Нет, не всегда. Например, сумма весов функции (82) равна 13, следовательно, путем изменения порога от 0 до 13 можно получить 14 функций. Однако различными из них являются лишь 8. Чтобы убедиться в этом, обратимся к табл. 13.

Таблица 13

№	3	4	6	Σ	Значения порога T													
	A_1	A_2	A_3		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	6	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	0	0	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	7	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

В левой части таблицы перечислены все возможные наборы значений аргументов A_1, A_2, A_3. Над ними указаны веса 3, 4, 6. Слева записаны десятичные номера наборов. Справа от наборов приведены суммы весов для каждого набора. В колонках, обозначенных «Значения порога T», записаны СДНФ функций для всех значений T. Из таблицы видно, что существует только 8 различных функций. Минимальные их ДНФ имеют вид:

$$f_0 = f_1 = f_2 = A_1 + A_2 + A_3;$$
$$f_3 = A_2 + A_3;$$
$$f_4 = f_5 = A_1A_2 + A_3;$$
$$f_6 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_1A_3;$$
$$f_7 = f_8 = A_2A_3 + A_1A_3;$$
$$f_9 = A_2A_3;$$
$$f_{10} = f_{11} = f_{12} = A_1A_2A_3;$$
$$f_{13} = 0.$$

Примером, когда число всех функций P-множества равно M, может служить пороговая функция [2, 1, 4; T]. Для этой функции имеем:

$$M = 2 + 1 + 4 + 1 = 8.$$

Столько же существует и функций, среди которых нет одинаковых. Их полный список имеет вид:

$f_0 = A_1 + A_2 + A_3;$ $\quad f_4 = A_1A_3 + A_2A_3;$
$f_1 = A_1 + A_3;$ $\quad f_5 = A_1A_3;$
$f_2 = A_1A_2 + A_3;$ $\quad f_6 = A_1A_2A_3;$
$f_3 = A_3;$ $\quad f_7 = 0.$

Упражнения

1. (671). Укажите все значения, которые может принимать порог, если веса пороговой функции четырех аргументов одинаковы и равны 1.

2. Веса пороговой функции, зависящей от трех аргументов, равны 2, 4, 6. Постройте таблицу для всех значений порога.

1) (А12)! Сколько различных функций в таблице? Сколько значений может принимать порог?

2) (ЛЯЗ)! Сколько единиц в строке 2 правой части таблицы? Сколько единиц в строке с номером 3?

3) (ВНИ)! Сколько минтермов содержит булева функция, если порог равен 4? Если порог равен 6?

4) (225). При каком наименьшем значении порога функция равна нулю?

5) (196). Укажите все значения порога, при которых функция имеет вид

$$f = ABC.$$

6) (157). Укажите все значения порога, при которых функция имеет вид

$$f = A + B + C.$$

7) (АРМ). Укажите все значения порога, при которых пороговая функция имеет вид

$$f = AB + C.$$

8) (ББН). Укажите все значения порога, при которых инверсия пороговой функции имеет вид

$$\overline{f} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}.$$

3. (ОКО). Укажите номера верных утверждений:

1) если пороговая функция зависит от пяти аргументов, то порог не может быть меньше пяти;

2) если пороговая функция зависит от шести аргументов, то порог может быть равным шести;

3) при любых весах можно найти такой порог, что пороговая функция, зависящая от аргументов $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, будет равна дизъюнкции этих аргументов;

4) если веса образуют ряд $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n$, то порог может принимать 2^{n+1} различных значений;

5) если веса образуют ряд $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n$, то порог может принимать 2^n различных значений;

6) если веса пороговой функции f равны $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, а порог $T = a - 1$, то

$$f = A_1 + A_2 + \ldots + A_n;$$

7) всякая булева функция, содержащая в ДНФ инверсные аргументы, не может быть представлена в виде набора положительных весов и пороговой величины;

8) существуют булевы функции, имеющие несколько минимальных форм в классе ДНФ, которые могут быть представлены набором весов и пороговой величины;

9) если булева функция представлена в КНФ и при этом не содержит инверсных аргументов, то ее невозможно представить набором весовых коэффициентов и порога.

13.3. ТЕОРЕМЫ О ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЯХ

В данном подразделе сформулированы четыре теоремы, на которых базируется алгоритм представления аналитического булева выражения в виде пороговой функции. Доказательства теорем не приведены, их можно найти в [6].

Пусть дана пороговая функция вида

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n; T],$$

зависящая от n аргументов. Представим ее в СДНФ. Пусть k_i — число минтермов, в которые логический аргумент A_i входит в неинверсной форме ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Теорема 1. Если $a_i = a_j$ ($i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$; $i \neq j$), то $k_i = k_j$.

Для примера рассмотрим функцию, заданную набором весов и порогом:

$$[3, 2, 4, 3; 5].$$

Ее СДНФ имеет вид

$$\begin{aligned} f = {} & \bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4 + \bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1A_2A_3A_4 + \\ & + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 + A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 + A_1\bar{A}_2A_3A_4 + \\ & + A_1A_2\bar{A}_3A_4 + A_1A_2A_3\bar{A}_4 + A_1A_2A_3A_4. \end{aligned} \tag{84}$$

В этой пороговой функции $a_1 = a_4$. В СДНФ имеется шесть минтермов, в которые аргумент A_1 входит в неинверсной форме:

$$9, 10, 11, 13, 14, 15\ (k_1 = 6).$$

Аргумент A_4 без инверсий также входит в шесть минтермов, номера которых

$$3, 7, 9, 11, 13, 15\ (k_4 = 6).$$

Таким образом, если веса равны, то равны и числа, показывающие, сколько минтермов содержат соответствующие логические аргументы в неинверсной форме.

Теорема 2. Если $k_i > k_j$, то для любой пороговой функции выполняется условие $a_i > a_j$.

Проиллюстрируем теорему на примере функции, СДНФ которой имеет вид (84). Неинверсный аргумент A_1 входит в шесть минтермов, следовательно, $k_1 = 6$. Аналогично находим:

$$k_2 = 5, \quad k_3 = 7, \quad k_4 = 6.$$

Если перебрать все пары k_i, k_j, где $k_i > k_j$, и под ними записать все пары a_i, a_j, где $a_i > a_j$, то получим следующие пять колонок:

$$\begin{array}{lllll} k_1 > k_2, & k_3 > k_1, & k_3 > k_2, & k_3 > k_4, & k_4 > k_2; \\ a_1 > a_2, & a_3 > a_1, & a_3 > a_2, & a_3 > a_4, & a_4 > a_2. \end{array}$$

Рассмотрим пару неравенств из первой колонки. Аргумент A_1 входит в неинверсном виде в шесть минтермов, а аргумент A_2 — в пять, т. е. $k_1 > k_2$.

Согласно теореме 2 имеем: $a_1 > a_2$ (так как $a_1 = 3$, $a_2 = 2$). Теорема на этой паре справедлива. То же самое относится и ко всем остальным парам.

Теорема 3. Если при $k_i = k_j$ пороговая функция равна единице на наборе

$$c = c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_{i-1} \quad 0 \quad c_{i+1} \quad \ldots \quad c_{j-1} \quad 1 \quad c_{j+1} \quad \ldots \quad c_n,$$

то она равна единице и на наборе

$$c = c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_{i-1} \quad 1 \quad c_{i+1} \quad \ldots \quad c_{j-1} \quad 0 \quad c_{j+1} \quad \ldots \quad c_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — двоичные цифры набора.

Поясним эту теорему на примере булевой функции (84), представленной в СДНФ, где $k_1 = k_4$. На наборе 0011 функция равна единице. Поменяем местами первую и последнюю цифры. Получим набор 1010, на котором функция равна единице. Переставим местами первую и последнюю цифры в наборе 0111, получим 1110. На этом наборе функция также равна единице.

Теорема 4. Если $k_i = k_j$, то можно принять $a_i = a_j$.

Эта теорема является обратной по отношению к теореме 1, поэтому пояснять ее примером не будем.

13.4. НАХОЖДЕНИЕ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть дана некоторая булева функция. Выясним, каким образом можно найти тождественно равную ей пороговую функцию.

Метод нахождения пороговых функций состоит в следующем:

1) определяем числа k_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$; n — число аргументов заданной функции;

2) устанавливаем соотношения между весами искомой пороговой функции по правилам: если $k_i = k_j$, то $a_i = a_j$ (согласно теореме 1); если $k_i > k_j$, то $a_i > a_j$ (согласно теореме 2);

3) находим минимальную ДНФ заданной функции;

4) составляем систему неравенств в соответствии с выражением (80). Исключаем лишние неравенства;

5) находим минимальную ДНФ инверсии заданной функции;

6) составляем систему неравенств в соответствии с выражением (81). Так как функция проинвертирована, то при составлении неравенств необходимо ориентироваться на те буквы, которые отсутствуют в простых импликантах минимальной ДНФ инверсии заданной функции. Исключаем лишние неравенства;

7) решаем систему неравенств.

Пример. Найти веса и порог булевой функции, представленной в СДНФ вида

$$f(A_1, A_2, A_3, A_4) = (3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15):$$

1) определяем числа k_1, k_2, k_3 и k_4 (например, при помощи карты Вейча):

$$k_1 = 5; \quad k_2 = 6; \quad k_3 = 7; \quad k_4 = 6;$$

2) на основании теорем 1 и 2 получаем:

$$k_1 < k_2 = k_4 < k_3. \tag{85}$$

Следовательно, $a_1 < a_2 = a_4 < a_3$;

3) находим минимальную ДНФ заданной функции:

$$f = A_1A_3 + A_2A_4 + A_2A_3 + A_3A_4;$$

4) составляем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 > T; \\ a_2 + a_4 > T; \\ a_2 + a_3 > T; \\ a_3 + a_4 > T. \end{cases}$$

Анализируем систему. Третье неравенство можно удалить, так как если $a_1 + a_3 > T$, то выполняется и неравенство $a_2 + a_3 > T$, поскольку $a_2 > a_1$. Аналогично рассуждая, убеждаемся, что четвертое выражение также является лишним и его можно удалить. В результате получаем упрощенную систему:

$$a_1 + a_3 > T; \ \ a_2 + a_4 > T;$$

5) находим минимальную ДНФ инверсии функции:

$$\overline{f} = \overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_4;$$

6) составляем систему неравенств. Первая простая импликанта, входящая в функцию $\overline{f}$, равна $\overline{A}_2\overline{A}_3$. В нее не входят аргументы A_1 и A_4. Следовательно, первое неравенство примет вид $a_1 + a_4 \leqslant T$. Аналогично находим и остальные два неравенства. В результате получаем:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 \le T; \\ a_1 + a_2 \le T; \\ \quad\ \ a_3 \le T. \end{cases}$$

Второе неравенство можно удалить, так как $a_2 = a_4$, и, следовательно, первое неравенство равно второму. В результате вместо трех неравенств получаем два неравенства вида $a_1 + a_4 \leqslant T$ и $a_3 \leqslant T$;

7) решаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 > T; \\ a_2 + a_4 > T; \\ a_1 + a_4 \le T; \\ \quad\ \ a_3 \le T. \end{cases}$$

Учитывая соотношение (85), запишем:

$$a_2 = a_4 = a_1 + \tau_1; \ \ a_3 = a_1 + \tau_1 + \tau_2,$$

тогда система неравенств примет вид

$$\begin{cases} 2a_1 + \tau_1 + \tau_2 > T; \\ 2a_1 + 2\tau_1 > T; \\ 2a_1 + \tau_1 \le T; \\ a_1 + \tau_1 + \tau_2 \le T. \end{cases}$$

Таблица 14

	A_1	A_2	A_3	A_4		
№	**1**	**2**	**3**	**2**	Σ	f
0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	2	
2	0	0	1	0	3	
3	0	0	1	1	5	1
4	0	1	0	0	2	
5	0	1	0	1	4	1
6	0	1	1	0	5	1
7	0	1	1	1	7	1
8	1	0	0	0	1	
9	1	0	0	1	3	
10	1	0	1	0	4	1
11	1	0	1	1	6	1
12	1	1	0	0	3	
13	1	1	0	1	5	1
14	1	1	1	0	6	1
15	1	1	1	1	8	1

Пусть $\tau_1 = \tau_2 = 1$, тогда

$$\begin{cases} 2a_1 + 2 > T; \\ 2a_1 + 2 > T; \\ 2a_1 + 1 \le T; \\ a_1 + 2 \le T. \end{cases}$$

Примем $a_1 = 1$. Тогда

$$\begin{cases} 4 > T; \\ 3 \le T. \end{cases}$$

Следовательно, $T = 3$. Находим коэффициенты:

$$a_2 = a_4 = 1 + 1 = 2;$$
$$a_3 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Таким образом, получили искомую пороговую функцию в виде [1, 2, 3, 2; 3].

Для проверки найденную пороговую функцию снова представим в виде булевой. Обратимся к табл. 14. В ней знаком Σ обозначена колонка, в которой для каждого набора значений аргументов указана сумма весов. В колонке f единицами отмечены суммы, превышающие порог 3. Если не учитывать колонку Σ, то всю таблицу можно рассматривать как таблицу соответствия. Тогда получаем

$$f = (3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15).$$

Это и есть заданная функция.

Упражнения

1. Укажите величины k_1, k_2, k_3, k_4 для функций вида:
1) (07Р). $f = AB + AC + BCD$;
2) (АТС). $f = A_1A_3 + A_2A_3A_4$;
3) (ВТТ). $f = (3, 5, 7, 11, 13, 14, 15)$.
2. (2ФФ). Дана система неравенств:
1) $a_1 + a_2 > T$; 2) $a_1 + a_2 + a_3 > T$; 3) $a_2 + a_3 > T$; 4) $a_1 + a_3 > T$.
Укажите номера лишних неравенств, если $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, $a_1 > 0$.
3. Найдите веса и порог булевых функций вида:
1) (ААР). $f = ABC + BD + CD$;
2) (АМС). $f = BC + CD + ABD$;
3) (ДОТ). $f = ABC + ABD + ACD + BCD$;
4) (АТУ). $f = A_2A_4 + A_2A_3 + A_1A_3 + A_3A_4$;
5) (ВЦФ). $f = A_1A_3 + A_3A_4 + A_1A_2A_4$;
6) (ХОХ). $f = ABC + ACD$.

13.5.
МАЖОРИТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Мажоритарные функции представляют собой особый класс пороговых функций, отличающихся следующими особенностями:

а) число аргументов, от которых зависит мажоритарная функция, может быть только нечетным;

б) веса всех аргументов равны между собой, в связи с чем их удобно принять равными единице;

в) порог равен (при единичных весах):

$$T = \frac{n-1}{2},$$

где n — число аргументов мажоритарной функции.

Таким образом, мажоритарная функция равна единице в том случае, если большинство ее аргументов принимают единичное значение. Пусть $n = 3$. Тогда при $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ порог также равен 1 и мажоритарная функция принимает вид

$$f = [1, 1, 1; 1].$$

Эта функция равна единице на четырех наборах значений аргументов: 011, 101, 110, 111 и равна нулю на остальных четырех наборах: 000, 001, 010, 100. Минимальная ДНФ функции имеет вид

$$f = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3.$$

Если $n = 4$, то порог равен 2,5, т. е. получается дробная величина. Очевидно, что дробный порог получается при любом четном n, следовательно, мажоритарных функций с четным числом аргументов не существует.

При $n = 5$ имеем:

$$f = [1, 1, 1, 1, 1; 2].$$

Эта функция принимает единичное значение на 16 наборах, среди которых 10 наборов, содержащих по три единицы:

00111, 01011, 01101, 01110, 10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100;

пять наборов — по четыре единицы:

11110, 11101, 11011, 10111, 01111

и один набор, состоящий из пяти единиц. Минимальная ДНФ этой функции имеет вид:

$$f = A_1A_2A_3 + A_1A_2A_4 + A_1A_2A_5 + A_1A_3A_4 + A_1A_3A_5 +$$
$$+ A_1A_4A_5 + A_2A_3A_4 + A_2A_3A_5 + A_2A_4A_5 + A_3A_4A_5.$$

В общем случае всякая мажоритарная функция равна единице на половине всех наборов, в чем нетрудно убедиться, если воспользоваться известным соотношением:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n, \tag{86}$$

где C_n^i — число сочетаний без повторений из n по i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$):

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-i)}.$$

Левая часть выражения (86) обладает своеобразной симметрией: его первое слагаемое равно последнему, второе — предпоследнему и т. д. Всего ряд содержит $n + 1$ членов. Это четное число (поскольку n нечетно). Следовательно, сумма первых $(n + 1)/2$ членов равна сумме всех последних $(n + 1)/2$ слагаемых:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{\frac{n-3}{2}} + C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}} + C_n^{\frac{n+3}{2}} + \ldots + C_n^n. \tag{87}$$

Если n — число всех разрядов двоичного набора значений аргументов, а $0, 1, 2, \ldots, n$ — число единиц, входящих в наборы, то очевидно, что левая часть равенства (87) показывает, сколько существует n-разрядных двоичных чисел, содержащих большинство нулей, а правая часть есть число, показывающее, сколько существует n-значных двоичных наборов, в каждом из которых единиц больше, чем нулей. Отсюда следует, что всякая мажоритарная функция принимает единичное значение ровно на половине всех возможных наборов значений аргументов.

Минимизировать мажоритарные функции можно любым методом, но в этом нет необходимости, поскольку структуру минимальной ДНФ всякой мажоритарной функции легко найти, ориентируясь лишь на ее особенности, перечисленные в начале данного подраздела. Если функция зависит от n аргументов, то каждая конъюнкция, входящая в минимальную ДНФ, содержит $(n + 1)/2$ букв, а число самих конъюнкций равно

$$r = C_n^{\frac{n+1}{2}}.$$

Например, если $n = 9$, то минимальная ДНФ имеет вид

$$f = A_1A_2A_3A_4A_5 + A_1A_2A_3A_4A_6 + \ldots + A_5A_6A_7A_8A_9,$$

т. е. ее конъюнкции содержат по 5 аргументов, а число конъюнкций, дизъюнкция которых образует данную минимальную ДНФ, равно

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = 126.$$

Каждая конъюнкция представляет собой набор пяти аргументов из девяти заданных, следовательно, конъюнкции отличаются одна от другой только самими аргументами (поскольку в них нет ни одной инверсной переменной).

Упражнения

1. (0АБ). Укажите номера минтермов, дизъюнкция которых равна мажоритарной функции [1, 1, 1; 1].

2. (ЯМВ)! Укажите порог мажоритарной функции 15 аргументов, 21 аргумента, 39 аргументов.

3. (ЯКГ). Порог мажоритарной функции равен 12. Найдите число ее аргументов.

4. (КНД). Мажоритарная функция равна единице на 16 наборах значений аргументов. Найдите число ее аргументов и пороговую величину.

5. (ТАФ). Мажоритарная функция равна нулю на 64 наборах. Найдите число вхождений аргументов в ее минимальную ДНФ.

6. (ББЖ). Порог мажоритарной функции равен 4. Сколько конъюнкций содержит минимальная ДНФ этой функции?

7. (ТЭЗ). Каждая конъюнкция минимальной ДНФ мажоритарной функции содержит 6 аргументов. Найдите порог и число аргументов, от которых зависит функция.

8. (ГНИ). Минимальная ДНФ мажоритарной функции содержит 35 конъюнкций. Найдите число ее аргументов и порог.

9. (ШКК). Определите число вхождений аргументов в минимальную ДНФ мажоритарной функции, которая равна нулю на 256 наборах.

13.6. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МАЖОРИТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Всякая мажоритарная функция с единичными весами и порогом, равным $(n-1)/2$, является симметрической. Например, функция [1, 1, 1, 1, 1; 2] равна единице в трех случаях:

а) когда число аргументов с единичными значениями равно 3;

б) когда число аргументов с единичными значениями равно 4;

в) когда все аргументы равны единице.

Каждому из этих трех случаев соответствует симметрическая функция с одиночным a-числом:

а) $f_1 = S_3(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$;

б) $f_2 = S_4(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$;

в) $f_3 = S_5(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

Очевидно, что дизъюнкция симметрических функций f_1, f_2, f_3 равна заданной мажоритарной функции:

$$[1, 1, 1, 1, 1; 2] = S_3 + S_4 + S_5 = S_{3,4,5},$$

где буквой S обозначены симметрические функции пяти аргументов

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.$$

Рассмотрим общий случай, когда мажоритарная функция зависит от n аргументов. Эта функция принимает единичное значение в том случае, если большинство аргументов равно единице. Следовательно,

$$\left[1, 1, \ldots, 1;\ \frac{n-1}{2}\right] = f_1 + f_2 + \ldots + f_k,$$

где $k = \dfrac{n+1}{2}$; $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — симметрические функции:

$$f_1 = S_{\frac{n+1}{2}}(A_1, A_2, \ldots, A_n);$$
$$f_2 = S_{\frac{n+3}{2}}(A_1, A_2, \ldots, A_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_k = S_n(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Таким образом, мажоритарная функция n аргументов может быть представлена симметрической функцией, a-числа которой образуют ряд:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \ldots, \frac{n+n}{2} = n.$$

Например, если $n = 9$, то мажоритарная функция f представится в виде

$$f = S_{5,6,7,8,9}(A_1, A_2, \ldots, A_9).$$

Упражнения

1. (АЯР). Укажите a-числа симметрической функции, тождественно равной мажоритарной функции с порогом 5.

2. (ПЗС). Порог мажоритарной функции равен 9. Укажите число аргументов, от которых зависит функция, и количество a-чисел симметрической функции, тождественно равной заданной мажоритарной функции.

3. (Б0Т). Симметрическая функция, тождественно равная мажоритарной функции f, содержит 6 a-чисел. Найдите число аргументов функции f и ее порог.

4. (731). Наименьшее a-число симметрической функции, тождественно равной мажоритарной функции f, равно 4. Найдите число аргументов функции f и ее порог.

5. (БАК). Третье по возрастанию a-число симметрической функции, тождественно равной мажоритарной функции f, равно 9. Найдите число аргументов функции f и ее порог.

6. (ПЦХ). Наибольшее a-число симметрической функции, тождественно равной мажоритарной функции, равно 21. Найдите наименьшее a-число симметрической функции и определите порог мажоритарной функции.

7. (ТЦЦ). Минимальная ДНФ мажоритарной функции f содержит 140 вхождений аргументов. Найдите a-числа симметрической функции, тождественно равной f.

8. (ВЕЧ). Четвертое по возрастанию a-число симметрической функции, тождественно равной мажоритарной функции f, равно 7. Найдите число вхождений аргументов минимальной ДНФ функции f.

14 БУЛЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

14.1. АКСИОМЫ АЛГЕБРЫ ЖЕГАЛКИНА

Жегалкин Иван Иванович — профессор МГУ, специалист по математической логике (1869–1947).

Преобразования, связанные с нахождением производных булевых функций, осуществляются главным образом с использованием **алгебры Жегалкина**. Поэтому, прежде чем рассматривать правила дифференцирования булевых функций, необходимо выяснить, что такое алгебра Жегалкина и как переводить ее формулы в булеву алгебру и наоборот.

Исходные положения алгебры Жегалкина рассмотрим по аналогии с тем, как это было сделано по отношению к булевой алгебре, т. е. введем аксиомы, определяющие операции в алгебре Жегалкина. Всего в этой алгебре две операции — **конъюнкция** и **сумма (сложение) по модулю два** (операция «неравнозначно», «исключающее ИЛИ», «разность»). Аксиомы для конъюнкции даны в подразделе 5.3, поэтому здесь приведем лишь аксиомы, относящиеся к операции сложения по модулю два. Для ее обозначения используется знак $\oplus$, записываемый между аргументами: $A \oplus B$. Определяется сумма по модулю два следующими аксиомами:

$$0 \oplus 0 = 0; \qquad (88)$$
$$0 \oplus 1 = 1; \qquad (89)$$
$$1 \oplus 0 = 1; \qquad (90)$$
$$1 \oplus 1 = 0. \qquad (91)$$

Этот список отличается от аксиом для дизъюнкции только одним выражением, последним: если в булевой алгебре

$$1 + 1 = 1,$$

то в алгебре Жегалкина

$$1 \oplus 1 = 0.$$

При помощи аксиом легко вычислить значение любого выражения Жегалкина по известным значениям аргументов. Вычислим, например, значение выражения

$$A \oplus BC \oplus AC, \tag{92}$$

если $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$. Для этого подставим в заданное выражение вместо переменных их значения:

$$1 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1.$$

После выполнения операций конъюнкции получаем

$$1 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1.$$

Согласно аксиоме (90): $1 \oplus 0 = 1$, тогда

$$1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \oplus 1.$$

В соответствии с аксиомой (91) имеем: $1 \oplus 1 = 0$.

Таким образом, выражение (92) на наборе значений аргументов 101 имеет нулевое значение.

Операция суммы по модулю два обладает коммутативностью: $A \oplus B = B \oplus A$ и ассоциативностью:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C),$$

что позволяет записывать суммы нескольких аргументов без скобок и в любом порядке:

$$(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = A \oplus B \oplus C \oplus D = B \oplus A \oplus C \oplus D.$$

Справедливость обоих свойств легко доказать при помощи аксиом (88)–(91) методом полного перебора по аналогии с тем, как это сделано в подразделе 5.4 относительно булевых выражений.

В алгебре Жегалкина конъюнкция дистрибутивна относительно суммы по модулю два:

$$A(B \oplus C) = AB \oplus AC,$$

что позволяет раскрывать скобки и выносить за скобки как отдельные переменные, так и любые выражения.

Но в отличие от булевой алгебры дистрибутивность суммы по модулю два относительно конъюнкции в алгебре Жегалкина места не имеет:

$$A \oplus BC \neq (A \oplus B)(A \oplus C).$$

Например, если $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, то

$$1 \oplus 0 \cdot 1 \neq (1 \oplus 0)(1 \oplus 1).$$

Упражнения

1. Найдите значения следующих выражений:

(ХРР)! $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0$; $0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$; $1 \oplus 1 \oplus 0$;

(АОС)! $1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$; $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0$; $0 \oplus 1 \oplus 1$.

2. Укажите значения следующих выражений, если $A = B = 1$, $C = 0$:

(ШУТ)! $A \oplus B \oplus C$; $AB \oplus C$; $AC \oplus B$;

(УПУ)! $B \oplus C \oplus AB$; $ABC \oplus AB$; $A \oplus AB \oplus ABC$.

3. (УШФ). Укажите номера выражений, равных нулю, если

$$A = B = 0, \ \ C = D = 1:$$

1) $AB \oplus ABC \oplus ABCD$; 4) $B \oplus C \oplus D \oplus BCD$;
2) $A \oplus B \oplus CD \oplus D \oplus AD$; 5) $BC \oplus AC \oplus CD \oplus C \oplus D$;
3) $A \oplus BCD \oplus B \oplus CD$; 6) $B \oplus C \oplus D \oplus CD \oplus A \oplus AC$.

14.2. ПЕРЕВОД БУЛЕВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ В АЛГЕБРУ ЖЕГАЛКИНА И НАОБОРОТ

Основные соотношения, связывающие три операции булевой алгебры с двумя операциями алгебры Жегалкина, имеют вид

$$A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B; \tag{93}$$
$$A + B = A \oplus B \oplus AB. \tag{94}$$

Из этих формул выводятся следующие важные частные случаи:

а) пусть $B = 1$, тогда из формулы (93) получаем:

$$A \oplus 1 = \overline{A}, \tag{95}$$

т. е. инверсия некоторого булева выражения в алгебре Жегалкина представляется как сумма по модулю два этого выражения и единицы;

б) из формулы (94) следует, что если $AB = 0$, то

$$A + B = A \oplus B; \tag{96}$$

в) пусть $A = B$, тогда

$$A \oplus A = 0. \tag{97}$$

Это положение распространяется и на большее число переменных:

$A \oplus A \oplus \ldots \oplus A = 0$ при четном числе букв;

$A \oplus A \oplus \ldots \oplus A = A$ при нечетном числе букв.

С помощью формул (93)–(96) всякое булево выражение можно представить в алгебре Жегалкина и, наоборот, всякое выражение Жегалкина можно перевести в булеву алгебру.

Упрощение формул в алгебре Жегалкина осуществляется в основном с помощью соотношения (97).

Пример 1. Представить в алгебре Жегалкина булево выражение $f = AB + \overline{A}C$.

Поскольку конъюнкция слагаемых равна нулю, т. е. $AB \cdot \overline{A}C = 0$, то

$$f = AB + \overline{A}C = AB \oplus \overline{A}C.$$

По формуле (95) получаем: $f = AB \oplus \overline{A}C = AB \oplus C \oplus AC$.

Пример 2. Представить в алгебре Жегалкина булево выражение $f = AB + BC$.

В этом выражении конъюнкция слагаемых не равна нулю, т. е. $AB \cdot BC \neq 0$, следовательно, по формуле (94):

$$f = AB + BC = AB \oplus BC \oplus ABC.$$

Пример 3. Представить в булевой алгебре выражение Жегалкина

$$f = AB \oplus AC \oplus BC \oplus ABC.$$

Вынесем за скобки AB и аргумент C:

$$f = AB(1 \oplus C) \oplus C(A \oplus B) = AB\overline{C} \oplus C(A \oplus B).$$

По выражению (93) имеем:

$$f = AB\overline{C} \oplus C(A \oplus B) = AB\overline{C} \oplus C(A\overline{B} + \overline{A}B) = AB\overline{C} \oplus (A\overline{B}C + \overline{A}BC).$$

Заметим, что $AB\overline{C} \cdot (A\overline{B}C + \overline{A}BC) = 0$, т. е. конъюнкция слагаемых равна нулю, следовательно, по формуле (96) получаем искомый результат:

$$f = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC.$$

Пример 4. Упростите в алгебре Жегалкина:

$$f = AB \oplus ABC \oplus BC \oplus ABC \oplus BC \oplus ABC \oplus AB \oplus AC.$$

В этом выражении два раза встречается конъюнкция AB, два раза — конъюнкция BC и три раза — конъюнкция ABC. Согласно формуле (97) получаем:

$$AB \oplus AB = 0; \quad BC \oplus BC = 0; \quad ABC \oplus ABC \oplus ABC = ABC.$$

С учетом этих значений минимальная форма заданного выражения принимает вид

$$f = ABC \oplus AC.$$

Упражнения

1. Упростите в алгебре Жегалкина:

1) (РЭФ). $f = ABC \oplus BC \oplus AB \oplus BC \oplus BC \oplus AB \oplus BC$;

2) (КЫХ). $f = (A \oplus B)(BC \oplus AC) \oplus ABC \oplus AC \oplus ABC$;

3) (КАЗ). $f = (A \oplus B)(AB \oplus AC) \oplus ABC$;

4) (А0И). $f = (AC \oplus AB \oplus BC)(AB \oplus BC) \oplus AB$.

2. Представьте булево выражение в алгебре Жегалкина и упростите:

1) (А15). $f = ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$;

2) (556). $f = AB\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}C$;

3) (427). $f = \overline{A}BC + A\overline{C} + A\overline{B}$.

4) (СМУ). $f = AB\overline{C} + AB\overline{D} + \overline{A}CD + \overline{B}CD$.

3. Найдите минимальные ДНФ в булевой алгебре по заданным выражениям Жегалкина:

1) (РУМ). $f = B(1 \oplus A) \oplus AB \oplus C \oplus BC$;

2) (589). $f = A \oplus C \oplus BC \oplus AC \oplus ABC$;

3) (ЕВ0). $f = C \oplus AC \oplus ABC \oplus 1$.

4. (ФУП). Укажите номера функций, которые не изменятся, если в них знаки «+» заменить знаками «⊕»:

1) $f = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C$;

2) $f = BC + \overline{B}\,\overline{C} + A\overline{C}$;

3) $f = A + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}C$;

4) $f = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C$;

5) $f = \overline{A + B} + BC + A\overline{C}$;

6) $f = AC + B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$.

5. (000). Укажите номера верных равенств:

1) $A\overline{B} \oplus A\overline{C} \oplus B\overline{C} = A\overline{B} + A\overline{C} + B\overline{C}$;

2) $A + B + AB = A \oplus B \oplus AB$;

3) $AB \oplus \overline{A}B \oplus \overline{B}C = B + C + BC$;

4) $A\overline{B} + C = A \oplus AB \oplus C$;

5) $AB \oplus BC \oplus AC = AB + BC + AC$;

6) $\overline{A}\,\overline{C} + AC + \overline{A}BC = \overline{A}\,\overline{C} \oplus AC \oplus \overline{A}BC$.

6. Укажите десятичные номера двоичных наборов, на которых значения функций f_1 и f_2 не совпадают:

1) (ЭЯЯ). $f_1 = AB + \overline{A}BC + \overline{B}C$; $f_2 = AB \oplus C$;

2) (ТТМ). $f_1 = A + B + \overline{C}$; $f_2 = A \oplus AB \oplus ABC$;

3) (ЛЫС). $f_1 = A + AB + ABC$; $f_2 = A \oplus B \oplus C$;

4) (ТВУ). $f_1 = (A + B)(B + C)$; $f_2 = (A \oplus B)(B \oplus C)$.

14.3. ПРИМЕНЕНИЕ КАРТ ВЕЙЧА В АЛГЕБРЕ ЖЕГАЛКИНА

Сначала выясним, как найти наборы значений аргументов, на которых функция Жегалкина принимает единичное значение. Чтобы ответить на этот вопрос, заданную функцию достаточно представить в СДНФ, поскольку двоичные индексы минтермов и являются искомыми наборами. Для нахождения СДНФ функцию из алгебры Жегалкина сначала можно перевести в булеву алгебру, а затем найти соответствующую сумму минтермов. Однако для нахождения СДНФ существует более простой путь, заключающийся в том, что заданная функция Жегалкина записывается в СДНФ непосредственно, минуя перевод в булеву алгебру. Возможность этого обеспечивает следующее свойство минтермов: конъюнкция любых двух различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, равна нулю (см. подраздел 6.3). Следовательно, согласно (96) функция не изменится, если в ее СДНФ знаки «+» заменить на «⊕» (либо наоборот).

Пусть дана функция Жегалкина, зависящая от трех аргументов A, B, C:

$$f = AB \oplus AC \oplus C.$$

Представим ее в СДНФ, но сначала все преобразования выполним аналитически.

Запишем каждую конъюнкцию заданной функции в виде суммы минтермов:

$$AB = AB\overline{C} \oplus ABC;$$

$$AC = A\overline{B}C \oplus ABC;$$

$$C = \overline{A}\,\overline{B}C \oplus \overline{A}BC \oplus A\overline{B}C \oplus ABC.$$

Их сумма по модулю два имеет вид:

$$f = AB\overline{C} \oplus ABC \oplus A\overline{B}C \oplus ABC \oplus \overline{A}\,\overline{B}C \oplus \overline{A}BC \oplus A\overline{B}C \oplus ABC. \quad (98)$$

Упростим это выражение, применяя свойство (97):

$$f = \overline{A}\,\overline{B}C \oplus \overline{A}BC \oplus AB\overline{C} \oplus ABC.$$

Отсюда находим, что функция f равна единице на наборах 001, 011, 110, 111.

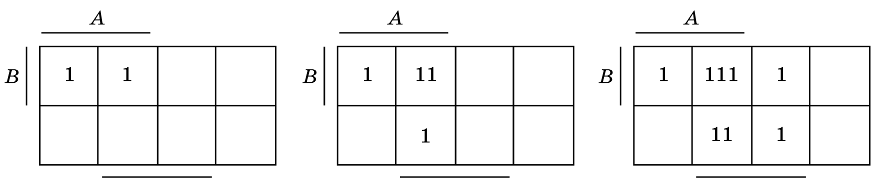
Теперь выясним, как то же самое сделать с помощью карты Вейча. В случае булевой алгебры при заполнении карты в каждой ее клетке ставилось не более одной единицы. Иное дело в алгебре Жегалкина. Если конъюнкции соединены знаком «$\oplus$», то каждую из них необходимо наносить полностью, проставляя единицы в клетках карты независимо от того, были в них ранее проставлены единицы или нет. На карте рис. 109, *а* единицами обозначена конъюнкция AB. На карте рис. 109, *б* приведены две конъюнкции AB и AC. Заметим, что в клетке 7 поставлены две единицы. Это произошло потому, что минтерм m_7 входит в обе конъюнкции. На карте рис. 109, *в* записана вся функция.

Обратимся к выражению (98). Оно содержит 8 минтермов. На карте рис. 109, *в* также 8 единиц, каждая из которых обозначает минтерм, входящий в заданную функцию. В выражение (98) минтерм ABC входит три раза. В результате минимизации два из них были удалены. Это значит, что на рис. 109, *в* две единицы из трех в клетке 7 также можно удалить. В клетке 5 находятся две единицы. Обе их можно удалить. Следовательно, в каждой клетке останется не более чем по одной единице. Таким образом, последовательность действий при нахождении СДНФ в алгебре Жегалкина имеет вид:

а) наносим на карту Вейча заданную функцию, причем каждую конъюнкцию записываем полностью независимо от других. Порядок записи конъюнкций значения не имеет;

б) в каждой клетке, где находится четное число единиц, записываем нуль. Если в какой-либо клетке записано нечетное число единиц, оставляем только одну единицу;

в) получившаяся карта будет содержать искомую СДНФ заданной функции.



а *б* *в*

Рис. 109

1	111	11	
11	11111	111	1
	11	1	
	1	1	

а

1	1		
	1	1	1
		1	
	1	1	

б

Рис. 110

Пример. Представим в СДНФ функцию (рис. 110, *а*)

$$f = AB \oplus BC \oplus C \oplus ACD \oplus BD.$$

После удаления из клеток карты всех пар единиц получим рис. 110, *б*, откуда находим:

$$f = (2, 3, 5, 7, 10, 12, 14, 15).$$

Если потребуется найти СДНФ инверсии функции, то в соответствии с формулой (95) на карту наносим заданную функцию, а затем в каждую клетку ставим еще по одной единице. В результате этого там, где число единиц было нечетным, станет четным и наоборот.

Найдем СДНФ инверсии функции

$$f = A \oplus AB \oplus BC \oplus BCD.$$

На рис. 111, *а* изображена карта Вейча этой функции. На рис. 111, *б* приведена та же карта, но в каждую клетку добавлена единица. После удаления всех пар единиц получим искомый результат — карту Вейча, изображенную на рис. 112, откуда находим:

$$\overline{f} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 12, 13, 15).$$

С помощью карт Вейча очень легко перевести выражение из алгебры Жегалкина в булеву алгебру, так как достаточно найти СДНФ заданной функции и затем ее минимизировать.

Чтобы осуществить обратный перевод, т. е. из булевой алгебры в алгебру Жегалкина, заданную булеву функцию необходимо представить в виде

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k, \tag{99}$$

где $\varphi_i\varphi_j = 0$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$; $i \neq j$.

Наиболее простой способ такого преобразования заключается в нахождении СДНФ булевой функции, поскольку СДНФ всякой булевой функции удовлетворяет условию (99). Однако это громоздкий путь. Его можно сократить, если воспользоваться картой Вейча. Как это сделать, поясним на примере функции

$$f = (0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15).$$

11	111	1	
11	1111	11	
1	1		
1	1		

а

111	1111	11	1
111	11111	111	1
11	11	1	1
11	11	1	1

б

Рис. 111

1			1
1	1	1	1
		1	1
		1	1

Рис. 112

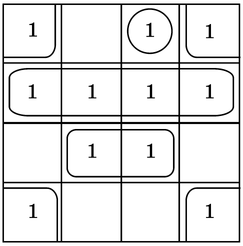


Рис. 113

Нанесем функцию на карту Вейча (рис. 113). Объединим группы единиц так, чтобы эти группы не пересекались и чтобы каждая из них была представлена одиночной конъюнкцией. Вариант такого объединения показан на рис. 113.

По карте получаем:

$$f = \bar{C}\,\bar{D} + BD + \bar{B}CD + \bar{A}BC\bar{D} =$$
$$= \bar{C}\,\bar{D} \oplus BD \oplus \bar{B}CD \oplus \bar{A}BC\bar{D}.$$

Освобождаемся от инверсий по формуле (95):

$$f = (C \oplus 1)(D \oplus 1) \oplus BD \oplus (B \oplus 1)CD \oplus (A \oplus 1)BC(D \oplus 1) =$$
$$= C \oplus D \oplus CD \oplus 1 \oplus BD \oplus CD \oplus BCD \oplus ABCD \oplus ABC \oplus$$
$$\oplus BCD \oplus BC = C \oplus D \oplus BC \oplus BD \oplus ABC \oplus ABCD \oplus 1.$$

Таким образом, карты Вейча можно эффективно использовать не только в булевой алгебре, но и в различных преобразованиях формул алгебры Жегалкина.

Упражнения

1. Найдите десятичные номера минтермов, если функции зависят от четырех аргументов:

1) (641). $f = A \oplus AB \oplus B \oplus BCD$;

2) (УВХ). $f = A \oplus BC \oplus CD \oplus 1$;

3) (513). $f = AB \oplus ABC \oplus CD \oplus 1$;

4) (В54). $f = A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus BC$.

2. Найдите СДНФ (десятичные номера минтермов) инверсии функций:

1) (935). $f = A \oplus AC \oplus BD$;

2) (МУК). $f = AB \oplus BC \oplus BCD \oplus D$;

3) (Р27). $f = ABC \oplus BCD \oplus AB \oplus A \oplus B$;

4) (УТХ). $f = A \oplus AB \oplus ABC \oplus ABCD \oplus 1$.

3. Переведите в булеву алгебру и упростите. Для самоконтроля найти общее число вхождений аргументов, число инверсных вхождений аргументов и число простых импликант минимальной ДНФ:

1) (ТИМ). $f = A \oplus AB \oplus BC \oplus CD \oplus D$;

2) (7В9). $f = AC \oplus BC \oplus ABC \oplus CD$;

3) (520). $f = BC \oplus ABC \oplus C \oplus D$;

4) (ДЕХ). $f = AB \oplus ABD \oplus BC \oplus CD \oplus D$.

4. Представьте в алгебре Жегалкина булевы функции и упростите. Для самоконтроля найдите общее число вхождений аргументов и число знаков сложения по модулю два:

1) (ББП). $f = AB + BD + \bar{B}\bar{C}$;

2) (АРР). $f = AC + \bar{A}D + BC + BD$;

3) (РШС). $f = (2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15)$;

4) (ФАЯ). $f = (1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15)$.

14.4.
ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ОТ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Одним из самых перспективных направлений в развитии булевой алгебры является булево дифференциальное исчисление, применяющееся для описания динамики в дискретных системах. Это новый раздел прикладной математической логики. Начало его развития относится к 50-м годам прошлого столетия. Наиболее полно булево дифференциальное исчисление изложено в [5].

В классической математике понятие производной связано с предельным переходом. Но булева алгебра относится к дискретной математике, в которой понятие предела отсутствует. Это значит, что такие термины, как дифференциал, производная, дифференциальное уравнение обозначают что-то другое, не то, что в классическом математическом анализе.

В основе булева дифференцирования находится понятие изменения функции. Поясним это на примере простейшей функции вида $f = AB$. Зафиксируем какой-либо набор значений аргументов, например 01. На этом наборе функция равна нулю. Если после этого аргумент B примет нулевое значение, то функция не изменится, она останется равной нулю. Но если значение аргумента B оставить равным единице и принять $A = 1$, то функция изменит свое состояние и станет равной единице. Таким образом, в некоторых случаях функция изменяет свое значение при изменении значения того или иного аргумента, а в других остается неизменной.

Спрашивается, при каких условиях изменение заданного аргумента вызывает изменение значения функции? Если функция достаточно проста, то ответить на этот вопрос нетрудно. Например, функция $f = AB$ меняет свое значение с изменением аргумента A, если $B = 1$. Аналогично функция $f = AB$ меняет свое значение с изменением аргумента B, если $A = 1$. В случае большего числа переменных функция может менять свое значение одновременно с заданным аргументом на нескольких наборах значений переменных. Рассмотрим, например, функцию

$$f(A, B, C) = A + BC.$$

Очевидно, что эта функция меняет свое значение одновременно с аргументом A в трех случаях:

а) если $B = C = 0$;

б) если $B = 0$; $C = 1$;

в) если $B = 1$; $C = 0$.

Эти три случая удобно представить в виде булевой функции, зависящей от двух аргументов B и C:

$$\varphi(B,C) = \overline{B} + \overline{C}.$$

Функция $\varphi(B, C)$ обладает очень важным свойством. При $\varphi(B, C) = 1$ функция $f(A, B, C)$ меняет свои значения одновременно с изменением значения аргумента A.

В общем случае если задана некоторая функция $f(A, B, \ldots, L)$, то всегда найдется функция $\varphi(B, \ldots, L)$, такая, что при $\varphi(B, \ldots, L) = 1$ функция $f(A, B, \ldots, L)$

меняет свои значения одновременно с изменением аргумента A. Функцию $\varphi(B, ..., L)$ называют **производной** по переменной A от булевой функции $f(A, B, ..., L)$ и обозначают $\dfrac{\partial f}{\partial A}$:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \varphi(B, C, \ldots, L).$$

Рассмотрим более сложный пример. Найдем производную по переменной A от функции

$$f = AB + \overline{A}\overline{B}D + \overline{B}CD + A\overline{C}\overline{D}.$$

Подставим в это выражение какой-либо набор значений аргументов B, C, D. Получим один из четырех результатов:

$$f = 1; \quad f = 0; \quad f = A; \quad f = \overline{A}.$$

Все наборы, на которых $f = A$ или $f = \overline{A}$, образуют функцию $\varphi(B, C, D)$. Очевидно, что если $\varphi(B, C, D) = 1$, то функция f зависит только от аргумента A. Следовательно, функция $\varphi(B, C, D)$ есть производная от функции f по переменной A.

Найдем функцию $\varphi(B, C, D)$. Для этого в выражение f подставим все наборы значений переменных B, C, D и для каждого набора найдем остаточную функцию:

$$f(A,0,0,0) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0\cdot 0 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{0} = A;$$
$$f(A,0,0,1) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 0\cdot 1 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{1} = \overline{A};$$
$$f(A,0,1,0) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 1\cdot 0 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{0} = 0;$$
$$f(A,0,1,1) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 1\cdot 1 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{1} = 1;$$
$$f(A,1,0,0) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 0 + \overline{1}\cdot 0\cdot 0 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{0} = A;$$
$$f(A,1,0,1) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 1 + \overline{1}\cdot 0\cdot 1 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{1} = A;$$
$$f(A,1,1,0) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 0 + \overline{1}\cdot 1\cdot 0 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{0} = A;$$
$$f(A,1,1,1) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 1 + \overline{1}\cdot 1\cdot 1 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{1} = A.$$

Функция f равна A или $\overline{A}$ на шести наборах значений переменных B, C, D:

0, 1, 4, 5, 6, 7.

Если ее минимизировать, то получим:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = B + \overline{C}.$$

Таким образом, если $B + \overline{C} = 1$, то заданная функция f меняет свои значения одновременно с изменением переменной A.

Упражнения

1. (Н0Р). Укажите десятичные наборы значений аргументов A и B, на которых функция $f = AB + C$ меняет свои значения с изменением аргумента C.

2. Укажите десятичные наборы значений аргументов A, B, C, на которых функция $f(A, B, C, D)$ меняет свои значения с изменением аргумента D:

1) (Б0С). $f = AB + CD$; 3) (ВВТ). $f = AB + \bar{C}D$;
2) (ЕЗУ). $f = A\bar{B} + C\bar{D}$; 4) (ТИФ). $f = \bar{A}\bar{B} + \bar{C}\bar{D}$.

3. Найдите минимальную ДНФ функции $\varphi(A, B, C)$, такую, что если $\varphi(A, B, C) = 1$, то функция $f(A, B, C, D)$ меняет свои значения с изменением аргумента D:

1) (КЫХ). $f = A\bar{B} + BCD$;
2) (Э0Й). $f = AC + B + CD$;
3) (0ВЦ). $f = \bar{A}\bar{C} + B\bar{C}D$.

14.5. ПРОИЗВОДНАЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Найти производную $\frac{\partial f}{\partial A}$ от некоторой функции $f(A, B, ..., L)$ можно сплошным просмотром всех наборов значений аргументов $A, B, ..., L$, выбирая из них те, на которых функция f непосредственно зависит от аргумента A. Однако аналитическим путем это сделать гораздо проще.

Согласно [16] **производная первого порядка** $\frac{\partial f}{\partial A}$ от функции $f(A, B, ..., L)$ записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial A} = f(1, B, \ldots, L) \oplus f(0, B, \ldots, L), \tag{100}$$

где $f(1, B, ..., L)$ — единичная остаточная функция, получающаяся на основе функции $f(A, B, ..., L)$, если в ней все вхождения аргумента A заменить единицами; $f(0, B, ..., L)$ — нулевая остаточная функция, получающаяся на основе функции $f(A, B, ..., L)$, если в ней все вхождения аргумента A заменить нулями.

Согласно (93) выражение (100) записывается в булевой алгебре (т. е. без знака «$\oplus$») следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \bar{f}(1, B, \ldots, L) \cdot f(0, B, \ldots, L) + f(1, B, \ldots, L) \cdot \bar{f}(0, B, \ldots, L).$$

Например, найдем производную первого порядка по аргументу A от функции $f = A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{B}\,\bar{D}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial A} &= (1 \cdot \bar{B}C + \bar{1} \cdot BC + \bar{B}\,\bar{D}) \oplus (0 \cdot \bar{B}C + \bar{0} \cdot BC + \bar{B}\,\bar{D}) = \\
&= \overline{(1 \cdot \bar{B}C + \bar{1} \cdot BC + \bar{B}\,\bar{D})}(0 \cdot \bar{B}C + \bar{0} \cdot BC + \bar{B}\,\bar{D}) + \\
&+ (1 \cdot \bar{B}C + \bar{1} \cdot BC + \bar{B}\,\bar{D})\overline{(0 \cdot \bar{B}C + \bar{0} \cdot BC + \bar{B}\,\bar{D})} = \\
&= \overline{\bar{B}C + \bar{B}\,\bar{D}}(BC + \bar{B}\,\bar{D}) + (\bar{B}C + \bar{B}\,\bar{D})\overline{BC + \bar{B}\,\bar{D}} = \\
&= (B + \bar{C})(B + D)(BC + \bar{B}\,\bar{D}) + (\bar{B}C + \bar{B}\,\bar{D})(\bar{B} + \bar{C})(B + D) = \\
&= BC + \bar{B}CD = BC + CD.
\end{aligned}$$

Наборы значений аргументов B, C, D, на которых функция f меняет свои значения одновременно с изменением аргумента A, можно найти двумя путями:

а) представить найденную производную в СДНФ;

б) решить булево уравнение вида $BC + CD = 1$.

В обоих случаях получатся три набора 011, 110, 111. Подставим набор 011 в заданную функцию ($B = 0$, $C = D = 1$):

$$f = A\cdot\overline{0}\cdot 1 + \overline{A}\cdot 0\cdot 1 + \overline{0}\cdot\overline{1} = A,$$

откуда следует, что функция f меняет свои значения с изменением аргумента A.

Подставим в заданную функцию набор 110 (т. е. примем $B = C = 1$, $D = 0$):

$$f = A\cdot\overline{1}\cdot 1 + \overline{A}\cdot 1\cdot 1 + \overline{1}\cdot\overline{0} = \overline{A}.$$

Отсюда видно, что и в этом случае функция меняет свои значения на противоположные с изменением аргумента A.

На наборе 111, когда $B = C = D$, имеем

$$f = A\cdot\overline{1}\cdot 1 + \overline{A}\cdot 1\cdot 1 + \overline{1}\cdot\overline{1} = \overline{A}.$$

Результат совпадает с предыдущим.

Найдем производную первого порядка от той же функции по аргументу B:

$$\frac{\partial f}{\partial B} = \overline{A}C \oplus (AC + \overline{D}) = AC + CD + \overline{C}\,\overline{D}.$$

Производная по переменной C имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial C} = (A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{B}\,\overline{D}) \oplus \overline{B}\,\overline{D} = \overline{A}B + A\overline{B}D.$$

Находим производную по аргументу D:

$$\frac{\partial f}{\partial D} = (A\overline{B}C + \overline{A}BC) \oplus (A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{B}) = \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}.$$

Таким образом, по формуле (100) можно найти производную от любой булевой функции без сплошного просмотра всех наборов значений аргументов.

Производная от функции $f(A, B, \ldots, L)$ обладает свойством

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial A}. \qquad (101)$$

Чтобы убедиться в этом, запишем выражение

$$\frac{\partial f}{\partial A} = f(1, B, \ldots, L) \oplus f(0, B, \ldots, L).$$

Освободимся от знака сложения по модулю два:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = f(1, B, \ldots, L)\cdot\overline{f}(0, B, \ldots, L) + \overline{f}(1, B, \ldots, L)\cdot f(0, B, \ldots, L). \qquad (102)$$

Поставим знаки инверсии в этом выражении над всеми символами f:

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial A} = \overline{f}(1, B, \ldots, L)\cdot f(0, B, \ldots, L) + f(1, B, \ldots, L)\cdot\overline{f}(0, B, \ldots, L).$$

Получилось выражение, совпадающее с (102), следовательно, соотношение (101) справедливо.

Упражнения

1. Найдите минимальные ДНФ единичных остаточных функций относительно аргумента A:

1) (К00). $f = ABC + BCD + \bar{A}BC$; 3) (АЛБ). $f = \bar{A}B + \bar{A}C + AB\bar{C}\,\bar{D}$;

2) (Ф3П). $f = AB + \bar{A}B + \bar{A}BCD$; 4) (ДАЦ). $f = AB + A\bar{B}C + \bar{A}\,C\,D$.

2. Найдите минимальные ДНФ нулевых остаточных функций относительно аргумента B (т. е. при $B = 0$):

1) (0КС). $f = BC + \bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$; 3) (ИШУ). $f = ABC + \bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}D$;

2) (РИТ). $f = A\bar{C} + BD + A\bar{C}\,\bar{D}$; 4) (В54). $f = AB\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}C + \bar{B}D$.

3. (Р0М). Дана некоторая функция пяти аргументов $f(A, B, C, D, E)$. Укажите аргументы, от которых зависит функция $\dfrac{\partial f}{\partial B}$.

4. (ФАН). Укажите аргументы, от которых зависит функция f, если ее производная имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \varphi(A, B, C, D).$$

5. Найдите минимальные ДНФ производных по аргументу A от булевых функций:

1) (ТП0). $f = A\bar{B} + ACD$; 2) (0ФП). $f = A + B + C + D$; 3) (ВТК). $f = A + BCD$.

6. (КЛП). Известно, что $\dfrac{\partial f}{\partial A} = B + \bar{C}D$. Найдите $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial A}$.

14.6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ КАРТ ВЕЙЧА

Нахождение производных булевых функций аналитическим способом, изложенным в предыдущем подразделе, сопровождается значительными трудозатратами даже в тех случаях, когда функция содержит две–три простых импликанты. Эти трудозатраты можно существенно снизить, если воспользоваться картой Вейча. Основные положения, относящиеся к применению карт Вейча в алгебре Жегалкина, изложены в подразделе 14.3, поэтому здесь отметим лишь, что для нахождения производной от булевой функции $f(A, B, \ldots, L)$ достаточно записать выражение в виде (100) и нанести его на карту Вейча. При этом необходимо иметь в виду, что остаточные функции выражения (100) представлены в булевой алгебре, а сами они соединены знаком сложения по модулю два. Следовательно, первая остаточная функция наносится на карту Вейча так, как это делается в булевой алгебре, т. е. в каждой клетке указывается не более одной единицы. Вторая остаточная функция наносится аналогично. В результате в каждой клетке будут либо две единицы, либо одна, либо ни одной. Поясним это на примере. Найдем производную по аргументу A от функции

$$f = AB + \bar{A}C + \bar{A}BD + \bar{B}CD.$$

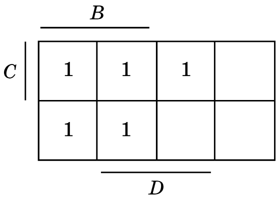


Рис. 114

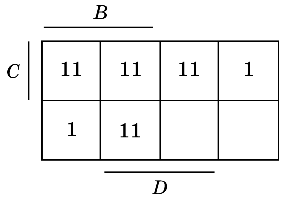


Рис. 115

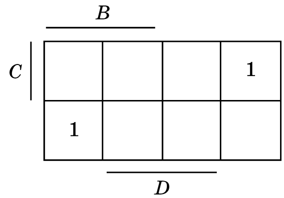


Рис. 116

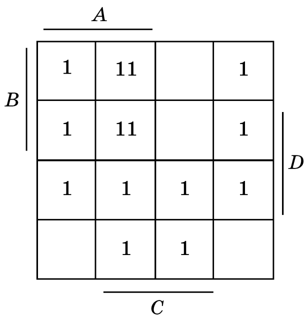


Рис. 117

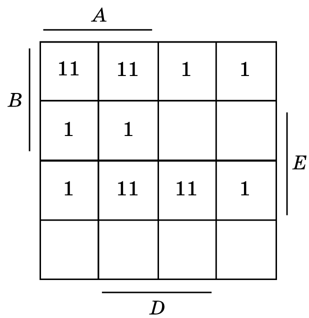


Рис. 118

Запишем искомую функцию в виде

$$\frac{\partial f}{\partial A} = (B + \bar{B}CD) \oplus (C + BD + \bar{B}CD).$$

Заметим, что остаточные функции зависят от трех аргументов B, C, D, следовательно, необходима карта трех переменных. Нанесем на нее единичную остаточную функцию (рис. 114). На нее же наносим нулевую остаточную функцию. Получим карту, приведенную на рис. 115. Все пары единиц заменяем нулями. Искомая производная (рис. 116) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \bar{B}C\bar{D} + B\bar{C}\,\bar{D}.$$

Рассмотрим еще один пример. Найдем производную по переменной E от функции

$$f = ABC + \bar{B}CE + \bar{B}DE + B\bar{C}\,\bar{E}. \qquad (103)$$

Наносим на карту четырех переменных A, B, C, D (рис. 117) функцию

$$\frac{\partial f}{\partial E} = (ABC + \bar{B}C + \bar{B}D) \oplus (ABC + B\bar{C}).$$

По карте получаем минимальную ДНФ:

$$\frac{\partial f}{\partial E} = B\bar{C} + \bar{B}D + \bar{B}C.$$

По той же карте находим, что заданная функция меняет свои состояния одновременно с переменной E на десяти наборах значений аргументов A, B,

C, D. При этом на наборах 1, 2, 3, 9, 10, 11 получаем $f = E$ и на наборах 4, 5, 12, 13 — $f = \bar{E}$.

Найдем производную от функции (103) по C:

$$\frac{\partial f}{\partial C} = (AB + \bar{B}E + \bar{B}DE) \oplus (\bar{B}DE + B\bar{E}).$$

По карте (рис. 118) находим, что эта функция принимает единичное значение на шести наборах значений аргументов A, B, D, E:

1, 4, 6, 9, 13, 15.

Если их подставить в заданное выражение (103), то на четырех наборах 1, 9, 13, 15 функция принимает вид $f = C$, а на двух наборах 4 и 6 — $f = \bar{C}$.

Упражнения

1. Нанесите на карту Вейча функцию

$$f = (AB + CD) \oplus (BC + AD).$$

(БК1)! Сколько единиц на карте? Сколько на карте клеток, в которых записано по две единицы?

2. Нанесите на карту Вейча производную по аргументу E от функции

$$f = ABE + BCE + \bar{A}D\bar{E} + B\bar{C}\bar{E}.$$

(732)! Сколько всего единиц на карте? Сколько на карте клеток, где записано по две единицы?

3. (Д03). Укажите десятичные номера минтермов, дизъюнкция которых образует функцию $\frac{\partial f}{\partial E}$, где

$$f = BCE + B\bar{C}\,\bar{E} + ABE + \bar{A}D\bar{E}.$$

4. Дана функция $f = AB + \bar{B}C + \bar{C}D + DE + B\bar{C}D\bar{E}$.

Нанесите на карту Вейча производную по аргументу C от этой функции.

1) (ТУ4). От каких аргументов зависит минимальная ДНФ функции $\frac{\partial f}{\partial C}$?

2) (БХШ)! Сколько вхождений аргументов имеет минимальная ДНФ функции $\frac{\partial f}{\partial C}$? Какие аргументы входят в нее по одному разу?

5. Найдите минимальные ДНФ функций $\frac{\partial f}{\partial A}, \frac{\partial f}{\partial B}, \frac{\partial f}{\partial C}, \frac{\partial f}{\partial D}$, если

$$f = A\bar{B}C + BC\bar{D} + A\bar{C} + B\bar{C}D.$$

1) (НВ6). Для каждой из производных найдите число вхождений аргументов их минимальных ДНФ (ответ — последовательность четырех чисел).

2) (Л0Л). Укажите десятичные номера минтермов функции $\frac{\partial f}{\partial A}$.

3) (138). Укажите десятичные наборы значений аргументов, на которых функция $\frac{\partial f}{\partial B}$ принимает единичное значение.

4) (279). На каких наборах (в десятичной системе) функция $\frac{\partial f}{\partial C}$ равна единице?

5) (ГЛ0). Укажите десятичные наборы, на которых функция $\frac{\partial \overline{f}}{\partial D}$ равна единице.

6. (МУ0). Укажите десятичные номера минтермов функции $\frac{\partial f}{\partial D}$, если

$$f = AE + BC + BD + A\overline{C}\,\overline{E} + \overline{B}\overline{C}D.$$

7. Дана функция

$$f = A\overline{B} + B\overline{C} + C\overline{D} + D\overline{E} + \overline{A}B.$$

(НЕЕ)! Сколько существует наборов значений аргументов A, C, D, E, на которых $f = B$? Сколько существует наборов значений аргументов A, C, D, E, на которых $f = \overline{B}$? Сколько минтермов входит в функцию $\frac{\partial f}{\partial B}$?

14.7. СМЕШАННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть дана булева функция $f(A_1, A_2, ..., A_n)$. **Смешанной производной** m-го порядка от булевой функции $f(A_1, A_2, ..., A_n)$ называется функция вида

$$\frac{\partial^m f}{\partial A_{i_1} \partial A_{i_2} \ldots \partial A_{i_k}},$$

где $i = 1, 2, 3, ..., n$; n — число аргументов функции f; m — порядок производной; A_i — i-й логический аргумент.

Некоторые авторы, например [5], смешанную производную называют m-кратной производной.

При нахождении смешанных производных можно пользоваться соотношением вида

$$\frac{\partial^m f}{\partial A_{i_1} \partial A_{i_2} \ldots \partial A_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial A_{i_1} \partial A_{i_2} \ldots \partial A_{i_{m-1}}}\right).$$

Из приведенных формул следует, что первая операция дифференцирования осуществляется по какому-либо аргументу точно так же, как и в случае производной первого порядка. В результате получится некоторая функция. Эта функция не зависит от того аргумента, по которому было осуществлено дифференцирование. Однако она зависит (в общем случае) от других аргументов. Поэтому ее можно продифференцировать вторично по любому из n аргументов, в том числе и по тому, по которому дифференцирование было выполнено в первый раз. Снова получится некоторая функция. Ее можно продифференцировать третий раз и т. д.

Рассмотрим пример. Пусть дана функция

$$f = AB\bar{C} + \bar{B}CD + B\bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}BD.$$

Продифференцируем ее по аргументу A:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = (B\bar{C} + \bar{B}CD + B\bar{C}\,\bar{D}) \oplus (\bar{B}CD + B\bar{C}\,\bar{D} + BD) = BCD. \qquad (104)$$

Полученный результат дифференцируем по аргументам B, C, D:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A\,\partial B} = CD; \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial A\,\partial B\partial C} = D; \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial A\,\partial B\partial C\,\partial D} = 1.$$

Смешанные производные обладают свойством: результат m-кратного дифференцирования не зависит от порядка аргументов, по которым осуществляется дифференцирование. Например, если выражение (104) сначала продифференцировать по аргументу B, а затем по A, то получим один и тот же результат:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B\partial A} = \frac{\partial^2 f}{\partial A\,\partial B};$$

$$\frac{\partial f}{\partial B} = (A\bar{C} + \bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}D) \oplus CD = \bar{C} + AD; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial B\partial A} = (\bar{C} + D) \oplus \bar{C} = CD = \frac{\partial^2 f}{\partial A\,\partial B}.$$

Упражнения

1. Найдите смешанную производную (по переменной A, затем по переменной B):

1) (33П). $f = AB$; 3) (ЛИС). $f = 0$; 5) (КЫР). $f = 1$;

2) (756). $f = B$; 4) (ТХТ). $f = \bar{A} + B$; 6) (ЯШО). $f = D + E$.

2. (МЯТ)! Найдите производную по переменной A функции $A\bar{B} + C$. Результат продифференцируйте по B.

3. (СОУ). Найдите производную функции $f = AB + CD$ сначала по переменной A, затем — по B. Для самоконтроля вторую производную представьте в минимальной ДНФ.

4. Дана функция

$$f = A\bar{C} + ABD + \bar{B}\bar{C}D.$$

1) (Д0Ф). Найдите смешанную производную по переменным A и B.

2) (НУХ). Найдите смешанную производную по переменным B и D.

3) (ЦХЦ). Найдите смешанную производную по переменным D, A, B.

4) (РЯЧ). Найдите минимальную ДНФ выражения:

$$\frac{\partial f}{\partial C} + \frac{\partial^2 f}{\partial B\partial C}.$$

5) (КЭШ). Найдите минимальную ДНФ выражения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial C\partial B} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial B\partial C}.$$

14.8. ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. Для булевой функции f, зависящей от аргументов $A_1, A_2, ..., A_n$, справедливо

$$f = f(A_i = 0) \oplus A_i \frac{\partial f}{\partial A_i},$$

где $i = 1, 2, ..., n$.

Доказательство. По теореме разложения (см. подраздел 6.5) заданную функцию f представим в виде

$$f = \bar{A}_i f(A_i = 0) \oplus A_i f(A_i = 1).$$

Освободимся от знака инверсии по формуле (95):

$$f = (1 \oplus A_i) f(A_i = 0) \oplus A_i f(A_i = 1).$$

Раскроем скобки:

$$f = f(A_i = 0) \oplus A_i f(A_i = 0) \oplus A_i f(A_i = 1).$$

Вынесем за скобки аргумент A_i:

$$f = f(A_i = 0) \oplus A_i[f(A_i = 0) \oplus f(A_i = 1)],$$

откуда получаем окончательно:

$$f = f(A_i = 0) \oplus A_i \frac{\partial f}{\partial A_i},$$

что и требовалось доказать.

Пример. Разложим функцию $f = AB + \bar{B}C$:

а) по переменной A: $f = \bar{B}C \oplus A \cdot B$, где $B = \frac{\partial f}{\partial A}$;

б) по переменной B: $f = C \oplus B(A \oplus C)$, где $A \oplus C = \frac{\partial f}{\partial B}$;

в) по переменной C: $f = AB \oplus C \cdot \bar{B}$, где $\bar{B} = \frac{\partial f}{\partial C}$.

Теорема 2. Для булевой функции $f = f(A_1, A_2, ..., A_n)$ справедливо

$$f = f(A_i = 1) \oplus \bar{A}_i \frac{\partial f}{\partial A_i},$$

где $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Доказательство. По теореме разложения (см. подраздел 6.5) получаем:

$$f = \bar{A}_i f(A_i = 0) \oplus A_i f(A_i = 1).$$

Вместо аргумента A_i подставим: $A_i = A_i \oplus 1 \oplus 1 = \bar{A}_i \oplus 1$, тогда получим:

$$f = \bar{A}_i f(A_i = 0) \oplus (\bar{A}_i \oplus 1) f(A_i = 1).$$

Раскроем скобки:

$$f = \bar{A}_i f(A_i = 0) \oplus f(A_i = 1) \oplus \bar{A}_i f(A_i = 1).$$

Вынесем за скобки $\bar{A}_i$:

$$f = f(A_i = 1) + \bar{A}_i [f(A_i = 0) \oplus f(A_i = 1)].$$

Выражение в квадратных скобках есть производная от функции f по переменной A_i, следовательно

$$f = f(A_i = 1) \oplus \bar{A}_i \frac{\partial f}{\partial A_i},$$

что и требовалось доказать.

Пример. Воспользуемся вышеприведенным выражением $f = AB + \bar{B}C$ и разложим его:

а) по A: $f = (B + C) \oplus \bar{A} \cdot B$, где $B = \dfrac{\partial f}{\partial A}$;

б) по B: $f = A \oplus \bar{B}(A \oplus C)$, где $A \oplus C = \dfrac{\partial f}{\partial B}$;

в) по C: $f = (A + \bar{B}) \oplus \bar{C} \cdot \bar{B}$, где $\bar{B} = \dfrac{\partial f}{\partial C}$.

Теорема 3. Для всякой булевой функции $f = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ справедливо

$$f = f(A_i = c) \oplus (A_i \oplus c)\frac{\partial f}{\partial A_i},$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $c \in \{0, 1\}$.

Эта теорема обобщает две предыдущие теоремы. Чтобы убедиться в этом, подставим вместо c значения 0 и 1. Если $c = 0$, то

$$f = f(A_i = 0) \oplus (A_i \oplus 0)\frac{\partial f}{\partial A_i} = f(A_i = 0) \oplus A_i \frac{\partial f}{\partial A_i},$$

что совпадает с теоремой 1. Если же $c = 1$, то

$$f = f(A_i = 1) \oplus (A_i \oplus 1)\frac{\partial f}{\partial A_i} = f(A_i = 1) \oplus \bar{A}_i \frac{\partial f}{\partial A_i},$$

что совпадает с теоремой 2.

Упражнения

1. (КЭП)! Булеву функцию вида

$$f = AC + \bar{A}B$$

разложили по одной из переменных, в результате чего получили выражение

$$f = AC \oplus \bar{A}B.$$

Укажите в этом выражении производную и переменную, по которой продифференцировали функцию f, а также переменную, по которой разложена функция f.

2. В нижеприведенном списке, состоящем из восьми функций, укажите номера всех выражений, являющихся разложением функции

$$f = AB\bar{C} + CD + BD:$$

1) (141) по переменной A;
2) (823) по переменной C;
3) (РЕХ) по переменной B;
4) (ИП4) по переменной D.

1) $f = (AB + BD) \oplus C(AB\bar{D} + \bar{B}D)$;
2) $f = (B\bar{C} + CD + BD) \oplus \bar{A}BC\bar{D}$;
3) $f = D \oplus \bar{C}(AB\bar{D} \oplus \bar{B}D)$;
4) $f = (CD + BD) \oplus ABC\bar{D}$;
5) $f = AB\bar{C} \oplus D(C + \bar{A}B)$;
6) $f = (B + C) \oplus \bar{D}(C + \bar{A}B)$;
7) $f = (A\bar{C} + D) \oplus \bar{B}(A\bar{C} + \bar{C}D)$;
8) $f = CD \oplus B(A\bar{C} + \bar{C}D)$.

14.9. РАЗЛОЖЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Брук Тейлор, английский математик, нашедший формулу для разложения функций в степенные ряды, жил в 1685–1731 годах. Джордж Буль (см. подраздел 5.3 данного пособия) жил значительно позднее, в 1815–1864 годах. Поэтому Тейлор не мог заниматься вопросами дифференцирования булевых функций.

Чем же объяснить, что одна из формул в булевой алгебре названа рядом Тейлора? Только тем, что всякая булева функция может быть разложена в ряд, аналогичный ряду Тейлора, имеющему вид:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots,$$

где $f(a)$ — значение заданной функции $f(x)$ в точке a; $f'(a)$ — значение первой производной в точке a; $f''(a)$ — значение второй производной в той же точке a и т. д.

Пусть дана функция $f(A, B, C)$. Разложим ее по переменной A:

$$\begin{aligned}&f(A,B,C)=f(c_1,B,C)\oplus(A\oplus c_1)\frac{\partial f(A,B,C)}{\partial A};\\&f(A,B,C)=\psi_1\oplus(A\oplus c_1)\psi_2.\end{aligned}\qquad(105)$$

где c_1 — постоянная, принимающая значения 0 или 1.

Выражение $A \oplus c_1$, стоящее перед функцией ψ_2, является коэффициентом. Функции ψ_1 и ψ_2 имеют вид:

$$\psi_1=f(c_1,B,C);$$

$$\psi_2=\frac{\partial f(A,B,C)}{\partial A}.$$

Функции ψ_1 и ψ_2 разложим по переменной B:

$$\psi_1=f(c_1,c_2,C)\oplus(B\oplus c_2)\frac{\partial f(c_1,B,C)}{\partial B};$$

$$\psi_2=\frac{\partial f(A,c_2,C)}{\partial A}\oplus(B\oplus c_2)\frac{\partial^2 f(A,B,C)}{\partial A\,\partial B},$$

где c_2 — постоянная, равная нулю или единице; $B \oplus c_2$ — коэффициент перед производной от заданной функции $f(A, B, C)$.

Выражения ψ_1 и ψ_2 подставим в (105):

$$\begin{aligned}&f(A,B,C)=f(c_1,c_2,C)\oplus(B\oplus c_2)\frac{\partial f(c_1,B,C)}{\partial B}\oplus\\&\oplus(A+c_1)\left[\frac{\partial f(A,c_2,C)}{\partial A}\oplus(B\oplus c_2)\frac{\partial^2 f(A,B,C)}{\partial A\partial B}\right]=\\&=f(c_1,c_2,C)\oplus(B\oplus c_2)\frac{\partial f(c_1,B,C)}{\partial B}\oplus\\&\oplus(A\oplus c_1)\frac{\partial f(A,c_2,C)}{\partial A}\oplus(A\oplus c_1)(B\oplus c_2)\frac{\partial^2 f(A,B,C)}{\partial A\,\partial B}=\\&=\varphi_1\oplus(B\oplus c_2)\varphi_2\oplus(A\oplus c_1)\varphi_3\oplus(A\oplus c_1)(B\oplus c_2)\varphi_4,\end{aligned}\qquad(106)$$

где символы φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 обозначают:

$$\varphi_1 = f(c_1, c_2, C); \qquad \varphi_3 = \frac{\partial f(A, c_2, C)}{\partial A};$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial f(c_1, B, C)}{\partial B}; \qquad \varphi_4 = \frac{\partial^2 f(A, B, C)}{\partial A \partial B}.$$

Каждое из этих выражений разложим по переменной C и результаты разложения подставим в (106):

$$\begin{aligned}
f(A,B,C) &= f(c_1,c_2,c_3) \oplus (C \oplus c_3)\frac{\partial f(c_1,c_2,C)}{\partial C} \oplus \\
&\oplus (B \oplus c_2)\frac{\partial f(c_1,B,c_3)}{\partial B} \oplus (B \oplus c_2)(C \oplus c_3)\frac{\partial^2 f(c_1,B,C)}{\partial B \partial C} \oplus \\
&\oplus (A \oplus c_1)\frac{\partial f(A,c_2,c_3)}{\partial A} \oplus (A \oplus c_1)(C \oplus c_3)\frac{\partial^2 f(A,c_2,C)}{\partial A \partial C} \oplus \\
&\oplus (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)\frac{\partial f^2(A,B,c_3)}{\partial A \partial B} \oplus \\
&\oplus (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)(C \oplus c_3)\frac{\partial^3 f(A,B,C)}{\partial A \partial B \partial C},
\end{aligned} \tag{107}$$

где c_3 — постоянная, принимающая значения 0 или 1.

Полученное выражение и есть разложение функции $f(A, B, C)$ в ряд Тейлора, представленное в общем виде.

Рассмотрим пример. Разложим в ряд Тейлора следующую функцию:

$$f = \bar{A} + B\bar{C}.$$

Сначала найдем все производные согласно формуле (107):

$$\frac{\partial f(c_1,c_2,C)}{\partial C} = \frac{\partial(\bar{c}_1 + c_2\bar{C})}{\partial C} = \bar{c}_1 \oplus (\bar{c}_1 + c_2) = c_1 c_2;$$

$$\frac{\partial f(c_1,B,c_3)}{\partial B} = \frac{\partial(\bar{c}_1 + B\bar{c}_3)}{\partial B} = (\bar{c}_1 + \bar{c}_3) \oplus \bar{c}_1 = c_1\bar{c}_3;$$

$$\frac{\partial^2 f(c_1,B,C)}{\partial B \partial C} = \frac{\partial}{\partial C}\left[\frac{\partial(\bar{c}_1 + B\bar{C})}{\partial B}\right] = \frac{\partial}{\partial C}\left[(\bar{c}_1 + \bar{C}) \oplus \bar{c}_1\right] = c_1;$$

$$\frac{\partial f(A,c_2,c_3)}{\partial A} = \frac{\partial(\bar{A} + c_2\bar{c}_3)}{\partial A} = c_2\bar{c}_3 \oplus (1 + c_2\bar{c}_3) = \bar{c}_2 + c_3;$$

$$\frac{\partial^2 f(A,c_2,C)}{\partial A \partial C} = \frac{\partial}{\partial A}\left[\frac{\partial(\bar{A} + c_2\bar{C})}{\partial C}\right] = \frac{\partial}{\partial A}\left[\bar{A} \oplus (\bar{A} + c_2)\right] = c_2;$$

$$\frac{\partial^2 f(A,B,c_3)}{\partial A \partial B} = \frac{\partial}{\partial A}\left[\frac{\partial(\bar{A} + B\bar{c}_3)}{\partial B}\right] = \frac{\partial}{\partial A}\left[(\bar{A} + \bar{c}_3) \oplus \bar{A}\right] = \bar{c}_3;$$

$$\frac{\partial^3 f(A,B,C)}{\partial A \partial B \partial C} = \frac{\partial^3(\bar{A} + B\bar{C})}{\partial A \partial B \partial C} = 1.$$

Подставим найденные производные в (107):

$$\begin{aligned} f = \overline{A} + B\overline{C} = (\overline{c}_1 + c_2\overline{c}_3) \oplus (C \oplus c_3)c_1c_2 \oplus \\ \oplus (B \oplus c_2)c_1\overline{c}_3 \oplus (B \oplus c_2)(C \oplus c_3)c_1 \oplus \\ \oplus (A \oplus c_1)(\overline{c}_2 + c_3) \oplus (A \oplus c_1)(C \oplus c_3)c_2 \oplus \\ \oplus (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)\overline{c}_3 \oplus (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)(C \oplus c_3). \end{aligned} \tag{108}$$

Получили полиномиальное представление функции $f = \overline{A} + B\overline{C}$ в общем виде. Чтобы найти разложение функции в ряд Тейлора в заданной точке, т. е. на определенном наборе значений постоянных c_1, c_2, c_3, значения этих постоянных необходимо подставить в (108). Всего для функции $f = \overline{A} + B\overline{C}$ существует восемь наборов значений постоянных, следовательно, столько же возможно полиномиальных представлений заданной функции в виде ряда Тейлора. Их полный список имеет вид (слева указаны наборы значений постоянных c_1, c_2, c_3):

$$\begin{array}{ll} 000 & f = 1 \oplus A \oplus AB \oplus ABC; \\ 001 & f = 1 \oplus A \oplus AB\overline{C}; \\ 010 & f = 1 \oplus AC \oplus A\overline{B} \oplus A\overline{B}C; \\ 011 & f = 1 \oplus A \oplus A\overline{C} \oplus A\overline{B}\overline{C}; \\ 100 & f = \overline{A} \oplus \overline{A}B \oplus \overline{A}BC \oplus B \oplus BC; \\ 101 & f = \overline{A} \oplus B\overline{C} \oplus \overline{A}B\overline{C}; \\ 110 & f = 1 \oplus \overline{B} \oplus C \oplus \overline{A}C \oplus \overline{A}\overline{B} \oplus \overline{B}C \oplus \overline{A}\overline{B}C; \\ 111 & f = \overline{A} \oplus \overline{C} \oplus \overline{A}\overline{C} \oplus \overline{B}\overline{C} \oplus \overline{A}\overline{B}\overline{C}. \end{array}$$

Заметим, что во всех этих выражениях каждая переменная представлена либо с инверсией, либо без инверсии и нет ни одного случая, когда переменная входит в одну конъюнкцию со знаком инверсии, а в другую — без него. При этом распределение инверсий легко определить по набору значений постоянных: единице соответствует инверсная форма аргумента, нулю — неинверсная. Например, если набор имеет вид 101, то переменные A и C входят в разложение со знаком отрицания, а переменная B — в прямой форме.

Все восемь полученных разложений представляют собой выражения, совпадающие с заданной функцией

$$f = \overline{A} + B\overline{C}.$$

Первое из них не содержит инверсных аргументов. Такое разложение (когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$) называется **полиномом Жегалкина**. В виде полинома Жегалкина легко представить любую булеву функцию. Для этого, как показано в подразделе 14.2, достаточно ее записать с использованием операции сложения по модулю два, освободиться от знаков инверсии и удалить все конъюнкции, входящие в выражение четное число раз.

Остальные семь вариантов полиномиального представления булевой функции $f = \overline{A} + B\overline{C}$ содержат инверсные аргументы. По списку этих вариантов видно, что число конъюнкций в них изменяется от трех до семи. Полином Жегалкина не является самым коротким. Наиболее компактное выражение соответствует случаю, когда $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$.

Функция при этом имеет вид:

$$f = 1 \oplus A \oplus AB\overline{C} = \overline{A} \oplus AB\overline{C}.$$

Таким образом, путем разложения функции в ряд Тейлора можно найти кратчайший полином, содержащий как инверсные, так и неинверсные аргументы.

Сложность выражения, представляющего собой разложение функции в ряд Тейлора, быстро увеличивается с ростом числа переменных. Если функция зависит от n аргументов, то $k = 2^n$, где k — число конъюнкций ее полиномиального представления.

Метод сплошного перебора всех k полиномов эффективен лишь при небольших n (в пределах десятка). С ростом n поиск кратчайших полиномов становится все более трудной задачей, и хотя уже созданы алгоритмы и программы, обеспечивающие нахождение оптимальных рядов Тейлора, в целом исследования этой проблемы еще далеки от завершения.

Упражнения

1. (БББ)! Дана некоторая функция $f(A, B, C)$. Сколько конъюнкций (слагаемых) содержит выражение, представляющее собой разложение данной функции по аргументу A? по аргументам A и B? по аргументам A, B, C?

2. Функция $f(A, B, C, D)$ разложена в ряд Тейлора.

1) (0МВ). Сколько слагаемых содержит полученное выражение?

2) (58Г). Сколько конъюнкций содержат двукратную производную?

3) (АРД)! Сколько конъюнкций содержат однократную производную? трехкратную производную?

4) (ММЕ). Сколько конъюнкций содержат коэффициент, состоящий из двух скобочных выражений?

5) (УЯЖ). Одно из слагаемых содержит коэффициент вида $C \oplus c_3$. Какие переменные в записи производной при этом коэффициенте заменены постоянными?

6) (ВЫК). Одна из конъюнкций содержит производную вида

$$\frac{\partial^2 f(c_1, B, c_3, D)}{\partial B\, \partial D}.$$

Укажите аргументы, входящие в коэффициент при этой производной.

7) (ПКЛ)! Одно из слагаемых содержит коэффициент $B \oplus c_2$. Сколько аргументов в производной заменено постоянными? Какие аргументы не заменены постоянными? По каким переменным взята производная?

14.10. НАХОЖДЕНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ КОНЪЮНКЦИЙ РЯДА ТЕЙЛОРА

Все конъюнкции, образующие полином (107), легко пронумеровать. Заметим, что в записях производных некоторые аргументы заменены постоянными c_1, c_2, c_3. При этом наблюдается строгая закономерность: переменные, по которым осуществляется дифференцирование, не заменяются постоянными, т. е. они входят в запись функции в «чистом» виде, а вместо всех остальных аргументов записаны соответствующие постоянные.

Условимся считать, что логические аргументы функции n аргументов упорядочены по алфавиту, либо по их десятичным индексам, например:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots; \;\; c_1, c_2, \ldots \text{ и т. д.}$$

Поставим в соответствие аргументу A_1 старший разряд n-разрядного двоичного числа, а n-му аргументу — младший двоичный разряд.

Пусть нуль в записи двоичного числа обозначает, что соответствующий логический аргумент заменен постоянной, тогда единице будет соответствовать случай, когда аргумент в запись функции входит в «чистом» виде.

Обратимся к формуле (107). В первом слагаемом нет логических аргументов, все они заменены постоянными. Следовательно, этому выражению соответствует двоичный код 000. В следующем слагаемом переменная C не заменена постоянной. Это значит, что его двоичное представление имеет вид 001 и т. д. до последнего слагаемого, которое обозначается кодом 111.

По двоичному номеру однозначно восстанавливается соответствующая конъюнкция полинома Тейлора. Например, для функции $f(A, B, C)$ по двоичному коду 110 находим следующее:

а) аргумент C заменен постоянной c_3, поскольку ему соответствует нуль в записи двоичного числа 110;

б) функция продифференцирована по переменным A и B;

в) коэффициент содержит те же переменные, по которым продифференцирована функция

$$f = (A \oplus c_1)(B \oplus c_2).$$

Таким образом, шестая конъюнкция полинома Тейлора для функции $f(A, B, C)$ имеет следующее представление:

$$\varphi_6 = (A \oplus c_1)(B \oplus c_2)\frac{\partial^2 f(A, B, c_3)}{\partial A \partial B},$$

что полностью соответствует выражению (107).

Если функция зависит от четырех аргументов, то шестая конъюнкция полинома Тейлора определяется аналогичным образом:

а) двоичное число 110 удлиняем до 0110;

б) в записи производной постоянными заменяем аргументы A и D;

в) функцию дифференцируем по переменным B и C;

г) записываем коэффициент с использованием переменных B и C.

В результате получаем:

$$\varphi_6 = (B \oplus c_2)(C \oplus c_3)\frac{\partial^2 f(c_1, B, C, c_4)}{\partial B \partial C}.$$

Пусть функция $f(A, B, C, D)$ имеет вид

$$f = \bar{A}C + \bar{B}D + BC.$$

Найдем седьмую конъюнкцию полинома Тейлора. Согласно коду 0111 переменной A соответствует нуль, следовательно, коэффициент образуют аргументы B, C, D. Заданную функцию дифференцируем по тем же переменным, а вместо аргумента A записываем постоянную c_1.

Дифференцируем функцию по переменной B:

$$\frac{\partial f(c_1, B, C, D)}{\partial B} = c_1 C\bar{D} + \bar{C}D.$$

Полученное выражение дифференцируем по C:

$$\frac{\partial^2 f(c_1, B, C, D)}{\partial B \partial C} = c_1 + D.$$

Результат дифференцируем по аргументу D:

$$\frac{\partial^3 f(c_1, B, C, D)}{\partial B \partial C \partial D} = \bar{c}_1.$$

В результате получаем:

$$\varphi_7 = (B \oplus c_2)(C \oplus c_3)(D \oplus c_4)\bar{c}_1.$$

Это выражение имеет 16 вариантов записи в зависимости от набора значений постоянных. Восемь из них неразличимы, так как равны нулю (когда $c_1 = 1$). Остальные восемь имеют вид:

$$\begin{array}{llll}
0000 & \varphi_7 = BCD; & 0100 & \varphi_7 = \bar{B}CD; \\
0001 & \varphi_7 = BC\bar{D}; & 0101 & \varphi_7 = \bar{B}C\bar{D}; \\
0010 & \varphi_7 = B\bar{C}D; & 0110 & \varphi_7 = \bar{B}\bar{C}D; \\
0011 & \varphi_7 = B\bar{C}\bar{D}; & 0111 & \varphi_7 = \bar{B}\bar{C}\bar{D},
\end{array}$$

где двоичные четырехразрядные числа, записанные слева от функций, обозначают наборы значений постоянных.

14.11. ТАБЛИЧНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Согласно [5; 16] **неопределенным интегралом**

$$\int f(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n)\partial A_1$$

называется множество всех первообразных функций, каждая из которых зависит от n аргументов A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, ..., A_n и в результате дифференцирования принимает вид подынтегрального выражения, содержащего $n - 1$ аргументов:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n).$$

Интегрирование булевых функций табличным методом осуществляется на основе понятия производной. Нахождение всех первообразных поясним на примерах.

Пример 1. Найти все первообразные:

$$\int f(A, B)\partial C = \int f(AB + \bar{A}\bar{B})\partial C.$$

Таблица 15

A	B	f	Множ.
0	0	1	$C, \bar{C}$
0	1	0	0, 1
1	0	0	0, 1
1	1	1	$C, \bar{C}$

Представим заданную функцию в виде таблицы истинности (табл. 15). В колонках A и B этой таблицы приведены наборы значений аргументов. В колонке f показаны значения функции $f(A, B)$. Там, где $f = 1$, в правой колонке, обозначенной «Множ.», записаны буквы $C, \bar{C}$, а где $f = 0$, поставлены цифры 0 и 1.

При нахождении первообразных одна из букв и цифр правой колонки логически умножается на соответствующий минтерм аргументов A и B. Дизъюнкция этих конъюнкций и есть искомая первообразная.

Минтерм $\bar{A}\,\bar{B}$ умножаем, например, на C, и минтерм AB также умножим на C, а минтермы $\bar{A}\,B$ и $A\,\bar{B}$ умножаем на нуль. Тогда:

$$f_1 = \bar{A}\,\bar{B}C + ABC.$$

Получили одну первообразную. Если найти ее производную по переменной C, то получится выражение $AB + \bar{A}\,\bar{B}$. Аналогичным образом находим все остальные первообразные. Приведем их полный список:

$$\begin{aligned}
&f_1 = \bar{A}\,\bar{B}C + ABC; && f_9 = \bar{A}\,\bar{B}C + A\,B\,\bar{C};\\
&f_2 = \bar{A}\,\bar{B}C + ABC + \bar{A}\,B; && f_{10} = \bar{A}\,\bar{B}C + A\,B\,\bar{C} + \bar{A}\,B;\\
&f_3 = \bar{A}\,\bar{B}C + ABC + A\,\bar{B}; && f_{11} = \bar{A}\,\bar{B}C + A\,B\,\bar{C} + A\,\bar{B};\\
&f_4 = \bar{A}\,\bar{B}C + ABC + \bar{A}\,B + A\,\bar{B}; && f_{12} = \bar{A}\,\bar{B}C + A\,B\,\bar{C} + \bar{A}\,B + A\,\bar{B};\\
&f_5 = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + ABC; && f_{13} = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + A\,B\,\bar{C};\\
&f_6 = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + ABC + \bar{A}\,B; && f_{14} = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + A\,B\,\bar{C} + \bar{A}\,B;\\
&f_7 = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + ABC + A\,\bar{B}; && f_{15} = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + A\,B\,\bar{C} + A\,\bar{B};\\
&f_8 = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + ABC + \bar{A}\,B + A\,\bar{B}; && f_{16} = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + A\,B\,\bar{C} + \bar{A}\,B + A\,\bar{B}.
\end{aligned}$$

Каждое из этих 16 выражений можно проверить дифференцированием по переменной C. В результате дифференцирования всякий раз будет получаться функция, входящая в подынтегральное выражение (т. е. равная подынтегральному выражению)

$$f(A, B) = AB + \bar{A}\bar{B}.$$

Пример 2. Найти первообразные функции, зависящей от трех аргументов:

$$\int (AB + \bar{A}\bar{B} + A\bar{C})\,\partial D.$$

Таблица 16

A	B	C	f	Множ.
0	0	0	1	$D, \bar{D}$
0	0	1	1	$D, \bar{D}$
0	1	0	0	0, 1
0	1	1	0	0, 1
1	0	0	1	$D, \bar{D}$
1	0	1	0	0, 1
1	1	0	1	$D, \bar{D}$
1	1	1	1	$D, \bar{D}$

Строим таблицу (табл. 16). На пяти наборах — 0, 1, 4, 6 и 7 — функция принимает единичное значение. В колонке «Множ.» этим наборам поставлены в соответствие буквы D и $\bar{D}$, а в остальных строках записаны цифры 0 и 1.

Как и в предыдущем случае, каждый минтерм трех переменных умножаем на один из символов, взятых из правой колонки. Очевидно, что при этом получится 256 первообразных, зависящих от переменных A, B, C, D. Производная по переменной D каждой из них представляет собой одно и то же выражение

$$f = A\,B + \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{C}.$$

Приведем несколько примеров первообразных:

$$f_1 = (1, 2, 9, 13, 15) = ABD + \overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D};$$
$$f_2 = (0, 3, 8, 12, 14) = AB\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D};$$
$$f_3 = (1, 3, 4, 5, 9, 12, 14) = AB\overline{D} + \overline{A}B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{B}\overline{C}D;$$
$$f_4 = (1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14) = B\overline{D} + \overline{A}\,D + \overline{B}D + A\,\overline{B}C;$$
$$f_5 = (1, 2, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14) = A\overline{D} + C\overline{D} + A\,\overline{B}C + \overline{A}B\,C + \overline{A}\,\overline{B}\overline{C}D.$$

Если интегрируемая функция зависит от четырех аргументов, то в ее таблице содержится 16 строк, а в множество всех первообразных войдет $2^{16} = 65\,536$ функций пяти аргументов. В общем случае число k первообразных равно

$$k = 2^{2^m}, \tag{109}$$

где m — число аргументов интегрируемой функции.

В предыдущем подразделе показано, что всякую функцию можно последовательно дифференцировать по всем переменным. Точно так же функции можно последовательно интегрировать. Например, найдем интеграл вида

$$\int A \partial B.$$

Согласно формуле (109) в данном случае существует четыре первообразные:

$$f_1 = AB; \qquad f_2 = A\,\overline{B}; \qquad f_3 = \overline{A} + B; \qquad f_4 = \overline{A} + \overline{B}.$$

Выберем из них, например, выражение

$$f_3 = \overline{A} + B$$

и снова проинтегрируем его. На этот раз, в соответствии с формулой (109), получится 16 первообразных, так как заданная функция $f_3 = \overline{A} + B$ зависит от двух аргументов.

Одна из 16 первообразных имеет вид

$$\int (\overline{A} + B) \partial C = BC + \overline{A}\,C.$$

Проинтегрируем ее относительно аргумента, например, D. Поскольку функция

$$f = BC + \overline{A}\,C$$

зависит от трех аргументов, то в результате интегрирования получим 256 первообразных. Одна из них имеет вид:

$$\int (BC + \overline{A}C) \partial D = A\,\overline{B} + CD + A\,\overline{C}.$$

Проинтегрируем это выражение по переменной E. Примером одной из 65536 первообразных является выражение

$$\int (A\overline{B} + CD + A\overline{C}) \partial E = B\,\overline{C}E + \overline{A}B\overline{C} + A\,\overline{B}\overline{C}\,\overline{E} + \overline{B}CDE + ACDE + A\overline{B}CE + \overline{A}BD\overline{E}.$$

Интегрирование можно продолжать, вводя все новые и новые переменные.

В принципе, интегрировать можно и относительно тех переменных, от которых зависит подынтегральное выражение. Но если найти производную от найденной таким путем «первообразной», то получится выражение, не совпадающее с подынтегральным, так как в производной от «первообразной» не будет того аргумента, по которому было произведено дифференцирование.

14.12. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИНТЕГРИРОВАНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Аналитическим способом интегрирования также можно найти все первообразные, не обращаясь при этом к таблице. Основой аналитического способа является следующая теорема [5]:

Теорема. Если дана функция $f(A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n)$, то

$$\int f(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n)\partial A_i = \\ = A_i f(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n) \oplus \varphi(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n). \quad (110)$$

при условии, что

$$\frac{\partial f(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n)}{\partial A_i} = 0, \quad (111)$$

где $\varphi(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_n)$ — произвольная функция аргументов A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_n, не содержащая переменной A_i, т. е. той переменной, относительно которой осуществляется интегрирование.

Условие (111) говорит о том, что функция $f(A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n)$ зависит от аргумента A_i несущественно, поскольку, как было сказано в предыдущем подразделе, производная по переменной, отсутствующей в заданной функции, равна нулю.

Применение теоремы проиллюстрируем на примерах. Пусть требуется проинтегрировать функцию

$$f = A + B.$$

Согласно теореме (110):

$$\int (A + B)\partial C = C(A + B) \oplus \varphi(A, B). \quad (112)$$

Согласно этому соотношению все многообразие первообразных определяется функцией $\varphi(A, B)$. Подынтегральная функция зависит от двух аргументов. Так как от двух аргументов можно образовать 16 различных функций, то чтобы найти все первообразные, достаточно каждую из функций $\varphi(A, B)$ подставить в выражение (112). В результате получим 16 первообразных:

$$f_1 = C(A + B) \oplus 0 = AC + BC;$$
$$f_2 = C(A + B) \oplus AB = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC;$$
$$f_3 = C(A + B) \oplus A\overline{B} = BC + A\,\overline{B}\overline{C};$$

$$
\begin{aligned}
&f_4 = C(A+B) \oplus A = A\bar{C} + \bar{A}BC;\\
&f_5 = C(A+B) \oplus \bar{A}B = AC + \bar{A}B\bar{C};\\
&f_6 = C(A+B) \oplus B = B\bar{C} + A\,\bar{B}C;\\
&f_7 = C(A+B) \oplus (A\bar{B} + \bar{A}B) = A\,\bar{B}\bar{C} + ABC + \bar{A}B\bar{C};\\
&f_8 = C(A+B) \oplus (A+B) = A\,\bar{C} + B\bar{C};\\
&f_9 = C(A+B) \oplus \bar{A}\,\bar{B} = C + \bar{A}\,\bar{B};\\
&f_{10} = C(A+B) \oplus (AB + \bar{A}\,\bar{B}) = AB\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}C + \bar{A}\,\bar{B};\\
&f_{11} = C(A+B) \oplus \bar{B} = BC + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B};\\
&f_{12} = C(A+B) \oplus (A+\bar{B}) = A\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B} + \bar{A}C;\\
&f_{13} = C(A+B) \oplus \bar{A} = AC + \bar{A}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B};\\
&f_{14} = C(A+B) \oplus (\bar{A}+B) = B\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}\,\bar{B};\\
&f_{15} = C(A+B) \oplus (\bar{A}+\bar{B}) = ABC + \bar{A}\,\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\,\bar{C};\\
&f_{16} = C(A+B) \oplus 1 = \bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим пример интегрирования более сложной функции, зависящей от трех аргументов:

$$f(A,B,C) = A\bar{B} + \bar{A}C.$$

Проинтегрируем ее по переменной D. Получим первообразную $\psi(A, B, C, D)$, в общем случае зависящую от четырех аргументов:

$$\psi(A,B,C,D) = \int (A\bar{B} + \bar{A}C)\partial D = D(A\bar{B} + \bar{A}C) \oplus \varphi(A,B,C).$$

Всего существует 256 функций вида $\varphi(A, B, C)$. Столько же существует и первообразных. Выберем из них, например, функцию:

$$\varphi(A, B, C) = AB + BC.$$

Тогда получим следующую первообразную:

$$
\begin{aligned}
\psi(A,B,C,D) &= \int (A\bar{B} + \bar{A}C)\partial D = D(A\bar{B} + \bar{A}C) \oplus (AB + BC) =\\
&= (A\bar{B}D + \bar{A}CD) \oplus (AB + BC) = AB + AD + BC\bar{D} + \bar{B}CD.
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом можно найти любую другую первообразную из 256 возможных.

Если задана функция $f(A_1, A_2, ..., A_n)$ и известен ее интеграл по переменной A_{n+1}, т. е. известна функция $\psi(A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1})$, то всегда можно найти и функцию $\varphi(A_1, A_2, ..., A_n)$. Ее нахождение сводится к решению уравнения вида:

$$A_{n+1} f(A_1, A_2, ..., A_n) \oplus \varphi(A_1, A_2, ..., A_n) = \psi(A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}),$$

где $\varphi(A_1, A_2, ..., A_n)$ — неизвестная функция.

Рассмотрим пример. Пусть дано:

$$
\begin{aligned}
&f(A,B,C) = A\bar{B} + \bar{A}C + \bar{A}B;\\
&\psi(A,B,C,D) = \bar{A}B\bar{D} + ABC + C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D.
\end{aligned}
$$

Требуется найти минимальную ДНФ функции $\varphi(A, B, C)$.

Составляем уравнение:

$$Df(A,B,C) \oplus \varphi(A,B,C) = \psi(A,B,C,D).$$

$$D(A\bar{B} + \bar{A}C + \bar{A}B) \oplus \varphi(A,B,C) = \bar{A}B\bar{D} + ABC + C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D.$$

Представим его в виде изображающих чисел (см. главу 12):

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccc}
\oplus \; \#Df(A,B,C) & = & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\#\varphi(A,B,C,D) & = & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}, \\
\hline
\#\psi(A,B,C,D) & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

где x_0, x_1, ..., x_{15} — двоичные цифры изображающего числа функции $\varphi(A, B, C, D)$; D — фиктивный аргумент.

В нулевой колонке: $0 \oplus x_0 = 0$. Отсюда получаем: $x_0 = 0$. Аналогично находим: $x_1 = x_8 = x_{12} = x_{13} = 0$. Согласно колонке 2: $0 \oplus x_2 = 1$. Следовательно, $x_2 = 1$. Точно так же находим: $x_4 = x_6 = x_{10} = x_{14} = x_{15} = 1$. В третьей колонке: $1 \oplus x_3 = 0$. Отсюда $x_3 = 1$. Аналогично получаем: $x_5 = x_7 = x_{11} = 1$. В девятой колонке: $1 \oplus x_9 = 1$, откуда следует, что $x_9 = 0$.

Неопределенных состояний нет. Следовательно, изображающее число функции $\varphi(A, B, C, D)$ имеет вид:

$$\#\,\varphi(A, B, C, D) = 0011\ 1111\ 0011\ 0011.$$

После упрощения получаем искомую минимальную ДНФ:

$$\varphi(A,B,C,D) = \bar{A}B + C.$$

Очевидно, что точно таким же образом можно найти и выражение $D\,f(A, B, C)$, если задана функция $\varphi(A, B, C)$ и известен результат интегрирования функции $f(A, B, C, D)$.

На этом начальное знакомство с дифференциальным и интегральным исчислениями завершим. Более подробные сведения можно найти в существующей литературе, например в [16]. Но наиболее полно дифференциальное и интегральное исчисления изложены в обстоятельной монографии [5].

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

ВВЕДЕНИЕ

Конечным автоматом (с прикладной точки зрения) называется техническое устройство, каждый элемент которого может находиться в одном из нескольких устойчивых состояний. В инженерной практике наибольшее распространение получили двоичные (бистабильные) элементы, характеризующиеся только двумя состояниями. Построенные на них схемы работают по законам двузначной логики, в связи с чем их называют логическими устройствами (однотактными или многотактными).

Элементы, имеющие более двух состояний, называют полистабильными. Наиболее ярким примером полистабильного элемента является устройство дискретного действия, известное под названием «шаговый искатель». Это устройство содержит электромагнит, обеспечивающий круговое движение якоря, механически соединенного с системой переключения электрических контактов. Перемещается якорь по принципу шагового двигателя, т. е. под действием каждого электрического импульса якорь поворачивается на строго определенный угол. Наиболее распространенным является случай, когда шаговый искатель поочередно подключает к выходным клеммам одного из выводов, называемого полюсом. К полистабильным элементам относятся также все виды электромеханических переключателей, имеющих более двух позиций, т. е. устойчивых состояний. Примером может служить трехпозиционный тумблер, имеющий одно среднее положение и два крайних. Одно из них условно называют «левым», другое — «правым».

Полистабильные элементы в инженерной практике применяются сравнительно редко. В связи с этим основное внимание в данном пособии уделено вопросам синтеза двоичных автоматов, а применение многопозиционных элементов показано лишь на одном примере в разделе «Комбинаторика», где рассматриваются комбинаторные аспекты задачи о переключателях (с. 439, 440).

Данный курс теории конечных автоматов предназначен для тех, кто впервые знакомится с логическими схемами и многотактными устройствами дискретного действия. В первую очередь — это студенты технических вузов и школьники старших классов.

Для понимания материала достаточно владеть основными положениями булевой алгебры, изложенными в данном пособии, знать закон Ома и иметь представление о таких понятиях, как электрическая проводимость, односторонняя проводимость (диод), сопротивление электрическому току, падение напряжения, разность потенциалов, рассматриваемых в курсе физики средней школы. Для тех, кто этими понятиями владеет недостаточно свободно, в пособие включен небольшой раздел, содержащий упражнения по анализу работы простейших диодно-резисторных электрических схем.

Все упражнения закодированы, то есть перед их условиями записаны коды заданий в виде сочетаний букв и цифр. Назначение кодов — обеспечить возможность автоматизированного самоконтроля при помощи устройств «Символ» или их компьютерных аналогов. Кроме того, как и в разделе «Булева алгебра», самоконтроль возможен при помощи открытых ответов, приведенных в конце книги.

При самостоятельной работе над пособием уровень усвоения материала определяется числом выполненных упражнений (в идеале их следует выполнить все). Полученные при этом теоретические сведения могут быть использованы для проектирования относительно несложных комбинационных и многотактных схем. При разработке более сложных устройств ручные методы могут не дать желаемого эффекта. В таких случаях используют ЭВМ. Однако машинные методы проектирования схем выходят за рамки данного пособия. Для знакомства с ними необходимо обратиться к специальной литературе.

15 ДИОДНО-РЕЗИСТОРНЫЕ СХЕМЫ

15.1. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

При выполнении упражнений данного подраздела (и в дальнейшем) необходимо учитывать следующее:

а) электрическое сопротивление линий связи в схемах принимается равным нулю, вследствие чего падение напряжения на них всегда имеет нулевое значение независимо от величины протекающего по ним тока;

б) сопротивление диода принимается равным нулю, если он включен в проводящем направлении. Если же диод заперт (не проводит), то сопротивление его бесконечно велико и ток через него не протекает. То же самое относится и к транзистору: если транзистор открыт, т. е. находится в проводящем состоянии, то падение напряжения на нем равно нулю; если заперт, то ток через него не протекает;

в) вольтметр, подключенный к каким-либо точкам схемы, состояние ее не меняет, так как предполагается, что он имеет бесконечно большое входное сопротивление.

Рассмотрим пример. На рис. 119 сопротивления всех резисторов указаны в омах.

(ДОО). Найти ток (в амперах), протекающий через точку a.

(ЯЯН). Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам: a-b, a-d, a-c, c-f, f-k (первая буква показывает, к какой точке подключена клемма ПЛЮС вольтметра, а вторая буква указывает точку, к которой подключена клемма МИНУС)?

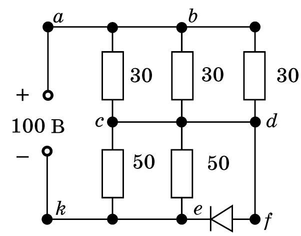


Рис. 119

Определим ток, протекающий через проводник в точке a. Так как диод включен в проводящем направлении, то падение напряжения на нем равно нулю и потенциалы точек c и k равны. Ток протекает только через три параллельно соединенных резистора, сопротивление каждого из которых составляет 30 Ом. Их общее сопротивление равно 10 Ом. Следовательно, ток, протекающий через точку a, согласно закону Ома равен 10 А.

Перейдем к показаниям вольтметра:

а) разность потенциалов между точками a и b равна нулю, т. е. $U_{a\text{-}b} = 0$, поскольку в соответствии с законом Ома $U_{a\text{-}b} = IR$, где I — ток, протекающий по участку цепи a-b, R — сопротивление участка. Сопротивление проводника равно нулю, следовательно, $U_{a\text{-}b} = 0$;

б) так как через диод протекает ток и потенциалы точек c, d и k одинаковы, то

$$U_{a\text{-}d} = U_{a\text{-}c} = 100 \text{ В};$$

в) точки c и f соединены проводником, поэтому разность потенциалов между ними равна нулю, т. е. $U_{c\text{-}f} = 0$;

г) так как точки f и k соединены диодом, находящимся в проводящем состоянии, то $U_{f\text{-}k} = 0$.

15.2. ПРОСТЕЙШИЕ ДИОДНО-РЕЗИСТОРНЫЕ СХЕМЫ

Сопротивления всех резисторов на схемах данного подраздела даны в омах.

1. На схеме (рис. 120) последовательно соединены источник тока напряжением 20 В, резистор, сопротивление которого равно 50 Ом, и вольтметр V_1. Взяли второй вольтметр V_2. Сколько вольт покажут вольтметры V_1 и V_2, если вольтметр V_2 подключить к точкам:

1) (У41) a-b? 3) (753) a-d? 5) (ТТ5) a-c?

2) (552) b-d? 4) (БТ4) b-c? 6) (Р96) c-d?

2. Сколько вольт покажет вольтметр на рис. 121, если его подключить к точкам:

1) (ОЙМ)! a-b, a-c, a-d? 2) (ИПК)! b-c, b-d, c-d?

3. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам (рис. 122):

1) (ЕЗА)! a-c, a-f, a-e? 2) (ШЛО)! a-d, b-d, c-e? 3) (РЗУ)! b-f, b-e, f-d?

4. Определите показания вольтметров V_1 и V_2 на рис. 123–126.

5. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам (рис. 127):

1) (2Р1)! a-b, b-c? 3) (ШВХ)! c-d, e-d, a-c?

2) (ТБЗ)! b-d, c-e? 4) (ЭВИ)! a-d, a-c, b-e?

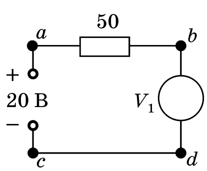


Рис. 120

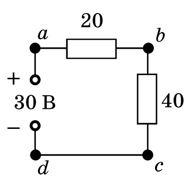


Рис. 121

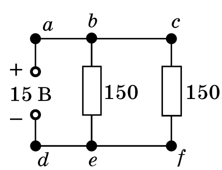


Рис. 122

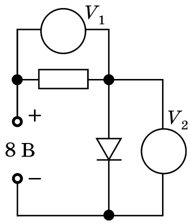


Рис. 123

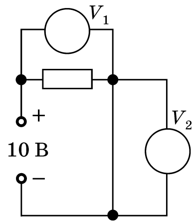


Рис. 124

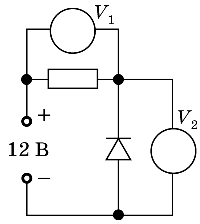


Рис. 125

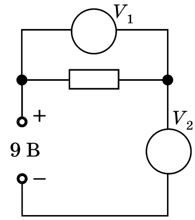


Рис. 126

6. Какое напряжение (в вольтах) покажет вольтметр, если его подключить к точкам схемы, приведенной на рис. 128:

1) (1П1)! *a-b*, *b-c*? 3) (ИШ2)! *c-d*, *e-d*, *a-e*?
2) (САЗ)! *b-d*, *c-e*? 4) (ЛБЧ)! *a-d*, *a-c*, *b-e*?

7. Определите разность потенциалов между точками (рис. 129):

1) (УХ6)! *a-b*, *a-c*, *a-e*; 3) (ТТ8)! *a-f*, *b-e*, *b-c*;
2) (ЧА7)! *b-c*, *b-d*, *a-d*; 4) (609)! *d-c*, *d-e*, *d-f*.

8. Найдите разность потенциалов между точками (рис. 130):

1) (ЖТА)! *a-e*, *a-d*, *a-f*; 3) (УХЭ)! *d-e*, *c-d*, *b-f*;
2) (АХО)! *a-b*, *a-c*, *b-c*; 4) (УВЕ)! *e-c*, *e-d*, *b-c*.

9. Определите разность потенциалов между точками (рис. 131):

1) (БУР)! *a-b*, *a-d*, *a-f*; 3) (5ПС)! *a-k*, *a-e*, *d-k*;
2) (ЛЯТ)! *b-d*, *b-f*, *a-c*; 4) (ЕКУ)! *d-e*, *d-f*, *c-d*.

10. Определите разность потенциалов между точками (рис. 132):

1) (А44)! *a-b*, *a-k*, *a-c*, *a-f*; 3) (Р89)! *d-c*, *c-f*, *c-k*;
2) (400)! *d-b*, *b-k*, *a-d*; 4) (87Я)! *d-f*; *d-e*; *e-k*.

11. Найдите разность потенциалов между точками (рис. 133):

1) (АПА)! *a-b*, *a-c*; 3) (БУБ)! *a-d*, *a-e*, *d-e*;
2) (МУТ)! *c-d*, *c-e*, *c-f*; 4) (ЕЗК)! *b-e*, *b-d*, *b-f*.

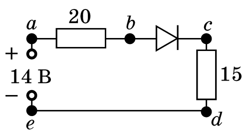


Рис. 127

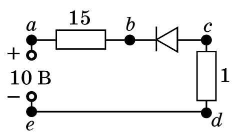


Рис. 128

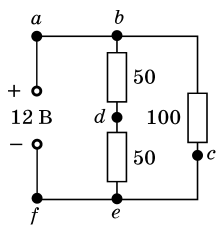


Рис. 129

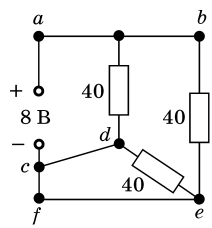


Рис. 130

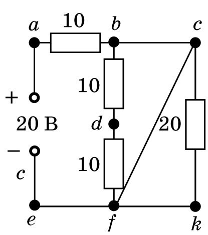


Рис. 131

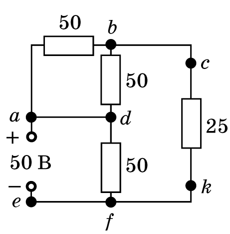


Рис. 132

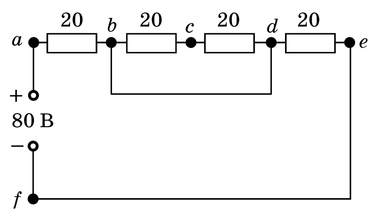


Рис. 133

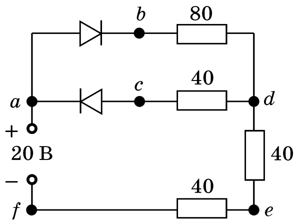


Рис. 134

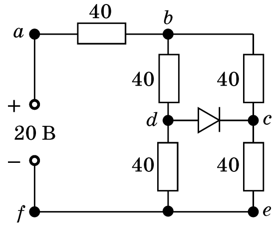


Рис. 135

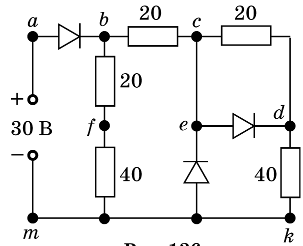


Рис. 136

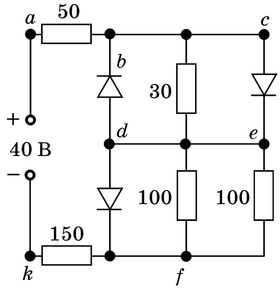


Рис. 137

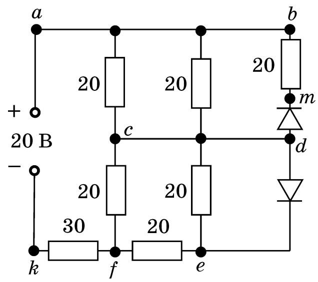


Рис. 138

12. Определите разность потенциалов между точками (рис. 134):
1) (814) *a-b*, *a-c*, *a-d*; 3) (МТ5) *a-e*, *a-f*, *b-c*;
2) (856) *b-d*, *b-f*, *b-e*; 4) (А77) *c-d*, *c-e*, *c-f*.

13. Определите разность потенциалов между точками (рис. 135):
1) (Е91) *a-b*, *a-e*, *a-f*; 3) (2У2) *d-c*, *b-c*, *b-d*;
2) (363) *d-f*, *c-e*, *a-c*; 4) (ВР4) *e-f*, *d-e*, *b-c*.

14. Найдите разность потенциалов между точками (рис. 136):
1) (5Р1) *a-b*, *a-c*, *a-d*; 5) (ВВ5) *b-m*, *c-d*, *c-e*;
2) (472) *a-e*, *a-f*, *a-k*; 6) (4А6) *c-f*, *c-k*, *c-m*;
3) (РКЗ) *a-m*, *b-c*, *b-d*; 7) (737) *d-e*, *d-f*, *d-k*;
4) (КР4) *b-e*, *b-f*, *b-k*; 8) (458) *d-m*, *e-f*, *e-k*.

15. Определите разность потенциалов между точками (рис. 137):
1) (66А) *a-b*, *a-c*, *a-d*, *a-e*; 4) (БББ) *a-f*, *a-k*, *b-c*, *b-d*;
2) (5ПВ) *b-c*, *b-f*, *b-k*, *b-e*; 5) (НАГ) *c-d*, *c-e*, *c-f*, *c-k*;
3) (56У) *d-e*, *d-f*, *d-k*, *e-f*; 6) (ПВЕ) *e-k*, *f-k*, *b-f*.

16. Найдите разность потенциалов между точками (рис. 138):
1) (220) *a-b*, *a-c*, *a-d*; 5) (181) *a-e*, *a-f*, *a-k*;
2) (МВ2) *b-c*, *b-d*, *b-e*; 6) (ПОЗ) *b-f*, *b-k*, *c-d*;
3) (ИТ4) *c-e*, *c-f*, *c-k*; 7) (КТ5) *d-e*, *d-f*, *d-k*;
4) (УХ6) *e-f*, *e-k*, *f-k*; 8) (НУН) *m-c*, *m-e*, *m-k*.

15.3. ВЫПРЯМИТЕЛЬНЫЙ МОСТ

Выпрямительный диодный мост предназначен для преобразования переменного тока в постоянный. Электрическая схема его проста, но логика работы не тривиальна. Это обстоятельство в данном пособии использовано для подготовки ряда упражнений, способствующих формированию умений прослеживать пути прохождения тока при наличии в схеме диодов, что необходимо для понимания работы диодно-резисторных логических элементов. Кроме того, диодный мост — это вообще уникальная схема. Она используется практически во всех преобразователях переменного тока в постоянный и находит широчайшее применение в радиоэлектронных устройствах. Поэтому знакомство с ее работой само по себе является полезным.

Следует отметить, что термин «постоянный ток» применительно к выпрямительному мосту является крайне неудачным. Батарейка для карманного фонарика тоже дает постоянный ток. Но он меньше всего напоминает тот ток, который мы получаем на выходе выпрямительного моста. Выпрямленный ток — это не постоянная его величина. Он точно так же пульсирует, как и переменный ток, но с постоянной полярностью. Таким образом, в названии «постоянный ток» отражен лишь тот факт, что после выпрямления неизменной является **полярность**, но не **величина** тока, которая во времени непрерывно меняется. Чтобы превратить такой пульсирующий ток в действительно постоянный, к выходу моста подключают специальные фильтры (простейшим фильтром является конденсатор большой емкости — тысячи микрофарад), способные дать постоянный ток, мало отличающийся от тока, который дает аккумулятор или батарейка для карманного фонарика.

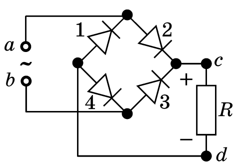


Рис. 139

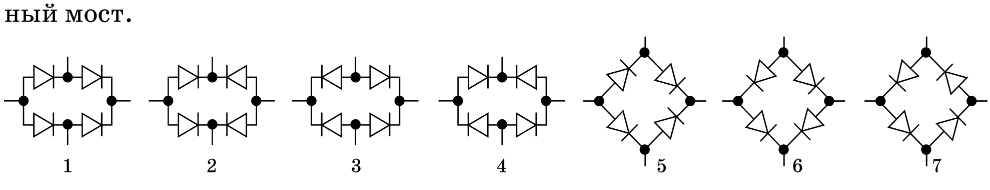
Схема диодного моста приведена на рис. 139. Выясним, каким образом входное переменное напряжение преобразуется в выходное, обеспечивающее протекание тока через нагрузку R только в одном направлении.

Пусть на клеммы a и b подано переменное напряжение. Зафиксируем момент, когда напряжение клеммы a положительно по отношению к клемме b. Тогда ток протекает от точки a через диод 2, нагрузку R, диод 4 к точке b, т. е. фактически точка c непосредственно подключена к клемме a, а точка d — к клемме b источника переменного тока.

Сменим полярность входного напряжения: ПЛЮС подадим на клемму b, МИНУС — на клемму a. Ток пойдет от точки b через диод 3, нагрузку R, диод 1 к точке a. Теперь точка c подключена к клемме b, а точка d — к клемме a. Таким образом, мост как бы следит за полярностью входного напряжения и точку c нагрузки подключает только к положительной из клемм a и b, вследствие чего ток через нагрузку протекает всегда в одну сторону.

Упражнения

1. (РЖК). Укажите номера схем, представляющих собой выпрямительный мост.



2. (АМ.48). Укажите выводы выпрямительного моста (рис. 140), на которые подается переменное напряжение.

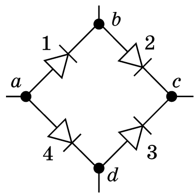


Рис. 140

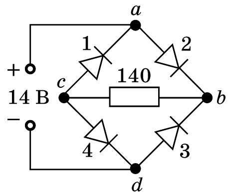


Рис. 141

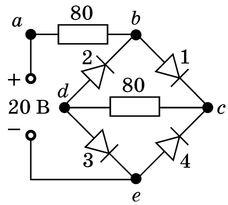


Рис. 142

3. Укажите номера диодов (рис. 140), направление включения которых необходимо изменить на противоположное, чтобы получился выпрямительный мост с выводом МИНУС:

1) (У8.46) в точке *b*; 2) (ПУ.46) в точке *c*; 3) (64.46) в точке *d*.

4. (ЯУ.45). Допустим, что к точкам *a* и *c* (рис. 140) подключено постоянное напряжение, причем ПЛЮС подан на вывод *a*. Укажите номера диодов, которые находятся в проводящем состоянии.

5. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам (рис. 141):

1) (АШН) *a-b*, *b-c*, *a-c*? 2) (РВО) *a-d*, *b-d*, *c-d*?

6. Укажите номера диодов (рис. 140), направление включения которых необходимо изменить на противоположное, чтобы получился мост с выводом ПЛЮС:

1) (64.50) в точке *b*; 2) (У8.50) в точке *d*; 3) (ЯУ.50) в точке *a*.

7. (К4.4Т). К точкам *a* и *d* (рис. 141) подключено постоянное напряжение, причем ПЛЮС подан на вывод *a*. Укажите номера проводящих диодов.

8. Допустим, что точки *a* и *b* на рис. 141 соединены проводником. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

1) (022) *a-b*, *b-c*, *c-d*? 2) (ББЗ) *a-d*, *b-d*, *a-c*?

9. Допустим, что диод 2 на рис. 141 удален. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

1) (ОСИ) *a-d*, *b-c*, *c-d*? 2) (135) *a-b*, *a-c*, *b-d*?

10. Допустим, что диод 3 на рис. 141 удален. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

1) (086) *a-b*, *b-c*, *c-d*? 2) (ТШ7) *b-d*, *a-c*, *a-d*?

11. (1П2). Какой ток (мА) протекает через диоды 1, 2, 3, 4 моста (рис. 141)?

12. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам (рис. 142):

1) (МБМ) *b-c*, *b-d*, *b-e*?

2) (УХО) *a-b*, *a-c*, *a-d*, *a-e*? 3) (ВИВ) *c-e*, *d-e*, *c-d*?

13. Допустим, что точки *c* и *d* на рис. 142 соединены проводником. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

1) (ТКР) *a-c*, *b-c*, *c-d*?

2) (ТЯП) *a-b*, *a-e*, *b-e*, *d-e*? 3) (ЛКТ) *a-d*, *b-d*, *c-e*?

14. На рис. 142 диод 1 включили «наоборот», т. е. проводимостью от точки *c* к точке *b*. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

1) (ЭЭР) *a-c*, *c-d*, *a-e*?

2) (МКК) *b-c*, *a-b*, *b-d*, *b-e*? 3) (РЕМ) *c-e*, *d-e*, *a-d*?

15. (ДЗЕ). На рис. 141 вывод b — это ПЛЮС. Укажите номера диодов, направление включения которых необходимо сменить на противоположное, чтобы ПЛЮС оказался в точке c.

16. Удалим диод 1 на рис. 142. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

1) (ЭФФ) a-b, a-e, b-e?

2) (РНЕ) b-c, b-d, c-d, d-e? 3) (8О5) a-c, a-d, c-e?

17. На рис. 142 диод 2 включили «наоборот», т. е. проводимостью от точки b к точке d. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

1) (АЛТ) b-c, b-d, b-e?

2) (5ЯХ) a-b, a-e, c-d, d-e? 3) (ИМК) a-d, c-e, a-e?

18. Пусть диоды 2 и 4 на рис. 142 включены «наоборот», т. е. от точки b к точке d и от точки c к точке e. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

1) (НЭР) a-c, c-d, a-e?

2) (МЕП) b-c, a-b, b-d, b-e? 3) (ЛЯТ) c-e, d-e, a-d?

16 КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ

16.1. КОНТАКТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Теория контактных структур, составляющих предмет исследования одного из важнейших разделов дискретной математики, возникла в 30-х годах XX столетия (СССР, США, Япония и др.). В ее создании участвовали М. А. Гаврилов, В. Н. Рогинский, С. Колдуэлл, К. Шеннон и многие другие.

Что такое контактный элемент? Это техническое устройство, замыкающее и размыкающее электрическую цепь. К контактным элементам относятся кнопки (клавиши), электромагнитные реле, шаговые искатели, различные выключатели, переключатели и др. Принцип их работы носит четко выраженный двоичный характер (включено–выключено), благодаря чему при синтезе контактных сетей широкое применение нашла булева алгебра, явившаяся существенным подспорьем в руках инженера, разрабатывающего переключательные схемы.

С логической точки зрения совершенно безразлично, какие рассматриваются контактные элементы, — реле, кнопки или переключатели, поэтому можно говорить об абстрактных электрических контактах, обладающих только одним свойством — замыкать и размыкать электрическую цепь на некотором участке. Однако из дидактических соображений имеет смысл выбрать какой-либо вид из существующих контактных устройств, рассмотреть на его примере ряд схем и лишь затем перейти к вопросам анализа и синтеза абстрактных контактных структур.

Наиболее простым контактным элементом является кнопка (клавиша), с которой и начнем изучение контактных схем. На рис. 143, *а* показано условное обозначение кнопки с нормально разомкнутым контактом. Слово «нормально» говорит о том, что контакт на схеме изображен в состоянии, когда кнопка не нажата. В исходном состоянии (кнопка не нажата)

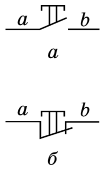


Рис. 143

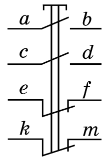


Рис. 144

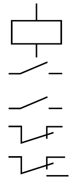


Рис. 145

между выводами a и b проводимости нет, т. е. цепь разомкнута. Если же кнопку нажать, то выводы a и b электрически соединятся. После отпускания кнопки эти выводы снова разъединятся.

На рис. 143, *б* приведено условное изображение кнопки с нормально замкнутым контактом. В исходном состоянии, когда кнопка не нажата, выводы a и b соединены. Если же кнопку нажать, то вывод a отключится от вывода b, т. е. между ними не будет проводимости. После отпускания кнопки выводы a и b соединятся снова.

Одна и та же кнопка может объединять в своей конструкции несколько нормально разомкнутых и несколько нормально замкнутых контактов. Пример такой кнопки приведен на рис. 144. В исходном состоянии между выводами a и b проводимости нет. Нет ее и между выводами c и d. Но выводы e и f соединены между собой. Соединены между собой и выводы k и m. Нажмем кнопку. Тогда все нормально разомкнутые контакты замкнутся, а все нормально замкнутые — разомкнутся.

Примечание. На рис. 144 через все контакты проведены две параллельные линии. Они не являются токопроводящими и обозначают тот факт, что нажатие кнопки действует на все контакты, через которые проходят эти параллельные линии.

Другим контактным элементом, получившим по сравнению с многочисленными кнопками и переключателями не меньшее распространение в промышленности и быту, являются электромагнитные реле. Различие между кнопками и реле состоит только в том, что все кнопки изменяют свое состояние под действием внешних механических сил, в то время как в электромагнитных реле для переключения контактов точки приложения внешних механических сил не предусмотрены, а изменение состояния контактов вызывается электрическим током, подаваемым на обмотку электромагнита, имеющегося у каждого реле. Под действием электромагнита перемещается стальной якорь, который и переключает контакты.

Реле могут иметь несколько нормально замкнутых и несколько нормально разомкнутых контактов. При необходимости увеличить число контактов достаточно взять два, три (и более) реле и обмотки их электромагнитов соединить параллельно. Получится одно реле с большим числом контактов.

Условное изображение электромагнитного реле приведено на рис. 145, где прямоугольником обозначена обмотка электромагнита. Более подробные сведения об устройстве реле, их разновидностях и сфере применения можно найти в монографии [24], а также в [1; 10; 23].

16.2. КОНТАКТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ И, ИЛИ, НЕ

Контакты можно соединять последовательно и параллельно. На рис. 146 изображена цепь, содержащая индикаторную лампочку H и два последовательно соединенных контакта A и B. Буквы A и B — это не только обозначения кнопок, но и двоичные логические переменные со следующей интерпретацией: если кнопка A нажата, то $A = 1$, если не нажата, то $A = 0$; если $A = 1$, то кнопка A нажата, если $A = 0$, то кнопка A находится в ненажатом состоянии. То же самое относится и к кнопке B.

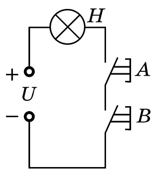


Рис. 146

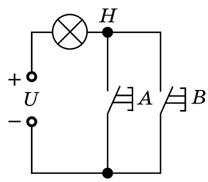


Рис. 147

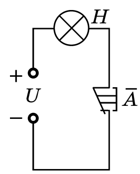


Рис. 148

По схеме (рис. 146) видно, что индикатор загорится только при $A = B = 1$ (то есть обе кнопки нажаты). Следовательно, состояние лампочки есть функция состояний кнопок. Обозначим ее буквой f. Очевидно, что функция f — это конъюнкция аргументов A и B (операция И): $f = AB$. Таким образом, последовательному соединению контактов соответствует операция конъюнкции.

На рис. 147 приведена схема управления лампочкой, когда контакты соединены параллельно. Лампочка не горит только в одном случае: если ни одна кнопка не нажата. Следовательно, состояние лампочки есть функция аргументов A и B вида $f = A + B$, т. е. параллельному соединению контактов соответствует операция дизъюнкции.

На рис. 148 лампочкой управляет одна кнопка $\overline{A}$. При ненажатой кнопке лампочка горит, что соответствует случаю, когда $A = 0$. Если кнопку нажать (то есть принять $A = 1$), то лампочка погаснет. Следовательно, состояние лампочки есть функция вида $f = \overline{A}$, т. е. нормально замкнутый контакт реализует операцию инверсии (операцию НЕ).

Упражнения

1. Запишите выражения функций, описывающих состояния лампочек на схеме (функция f_1 соответствует индикатору H_1, f_2 — индикатору H_2):

1) (15П) рис. 149. $f = \ldots$;
2) (629) рис. 150. $f_2 = \ldots$;
3) (АУК) рис. 151. $f_2 = \ldots$;
4) (АЗО) рис. 150. $f_1 = \ldots$;
5) (УЯМ) рис. 151. $f_1 = \ldots$;
6) (ТВП) рис. 152. $f = \ldots$.

2. (АКИ). На рис. 149 контакт B заменили проводником. Напишите выражение функции, описывающей состояние лампочки H.

3. (221). На рис. 147 контакт A заменили проводником. Напишите выражение функции, описывающей состояние лампочки H.

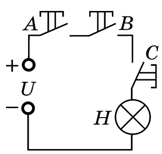


Рис. 149

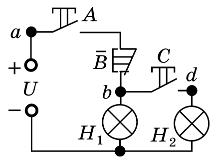


Рис. 150

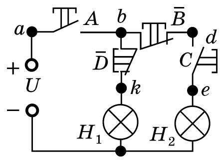


Рис. 151

4. (МОМ). На рис. 150 точки a и b соединили проводником. Найдите функции f_1 и f_2.

5. (ПИН). На рис. 150 проводником соединили точки b и d. Найдите функции f_1 и f_2.

6. Запишите функции f_1 и f_2 (рис. 151), если проводником соединены точки: 1) (870) a и b; 2) (ГУ0) b и d; 3) (0Р0) a и b, d и e; 4) (АШУ) b и d, b и k.

16.3. ПОСТРОЕНИЕ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ ПО БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Всякой булевой функции соответствует некоторая контактная структура. Выясним, как построить эту структуру. Пусть булева функция имеет вид

$$f = A\bar{B} + CD\bar{E}.$$

Из предыдущего подраздела известно, что конъюнкции соответствует последовательное соединение контактов. В записи заданной функции имеется две конъюнкции. Следовательно, строим две цепи контактов, а сами цепи соединяем параллельно, так как конъюнкции объединены знаком дизъюнкции (рис. 153). Заметим, что всем аргументам, входящим в выражение функции со знаком инверсии, в контактной структуре соответствуют нормально замкнутые контакты.

Графическое изображение схемы, приведенной на рис. 153, можно упростить без потери информации о логических связях в структуре, если удалить изображения кнопок. Получим схему, приведенную на рис. 154. Так как на схеме остались одни контакты, то можно говорить, что достигнута определенная степень абстракции: контакты могут принадлежать и кнопкам, и электромагнитным реле, и другим контактным элементам.

Схему (рис. 154) можно еще упростить, если удалить графическое изображение контактов, а в образовавшиеся разрывы вписать соответствующие буквы. Получим схему, приведенную на рис. 155. Наконец, можно удалить

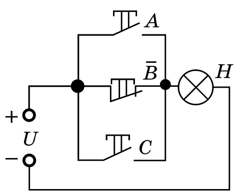


Рис. 152

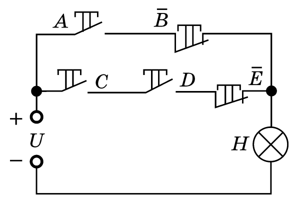


Рис. 153

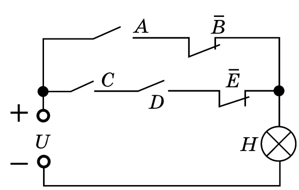


Рис. 154

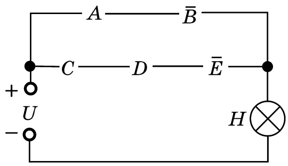


Рис. 155

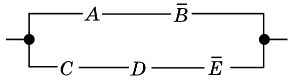


Рис. 156

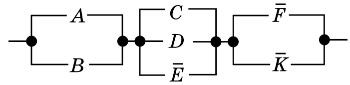


Рис. 157

источник электропитания и лампочку. Тогда схема превратится в двухполюсник (рис. 156). В таком виде мы и будем в дальнейшем изображать все контактные структуры.

Пусть дана булева функция, представленная в КНФ:

$$f = (A + B)(C + D + \bar{E})(\bar{F} + \bar{K}).$$

В записи этой функции содержится три дизъюнкции, в соответствии с чем изображаем три параллельно соединенные группы контактов, а сами группы соединяем последовательно (рис. 157).

В двух рассмотренных примерах функции являются бесповторными, т. е. каждый аргумент в их записи встречается только один раз. Пусть теперь функция содержит повторяющиеся аргументы:

$$f = AB\bar{C} + \bar{B}CD + \bar{E}.$$

Контактную структуру строим обычным образом: две цепи последовательно соединенных контактов включаем параллельно и также параллельно подключаем к ним нормально замкнутый контакт $\bar{E}$. По схеме (рис. 158) видно, что кнопки B и C должны содержать по два контакта, один из которых является нормально замкнутым, а второй — нормально разомкнутым.

В предыдущих примерах рассматривались нормальные формы функций. Выясним, как построить структуру по выражению функции, имеющей порядок выше второго. Пусть функция имеет вид

$$f = (AB + C)(\bar{A}\bar{B} + D) + K.$$

Сначала строим структуры скобочных выражений и соединяем их последовательно, после чего ко всей структуре параллельно подключаем контакт K (рис. 159).

Таким образом, на основе любой булевой функции можно построить контактную структуру. Но всякая булева функция имеет много форм аналитического представления. Следовательно, многими способами может быть реализована и каждая контактная структура. Рассмотрим, например, функцию вида

$$f = AB + \bar{A}C + \bar{B}C.$$

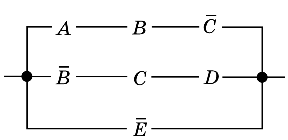


Рис. 158

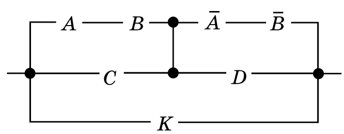


Рис. 159

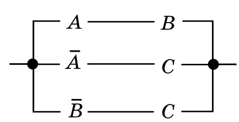


Рис. 160

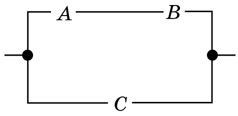


Рис. 161

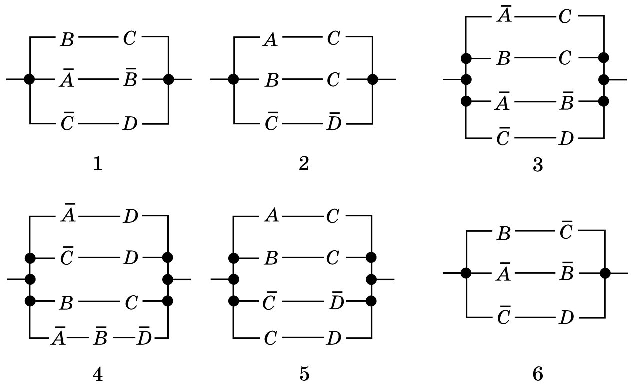


Рис. 162

Соответствующая ей схема представлена на рис. 160. Для построения схемы необходимо использовать три сложных элемента (кнопки либо реле): два из них должны иметь один нормально замкнутый контакт и один нормально разомкнутый, а третий — два нормально разомкнутых контакта.

Упростим функцию:

$$f = AB + \bar{A}C + \bar{B}C = AB + C.$$

Соответствующая ей контактная структура приведена на рис. 161.

Структуры, изображенные на рис. 160 и 161, являются логически равными, поскольку описывающие их булевы функции тождественно равны. Но первая структура сложнее второй, поэтому практический интерес представляет лишь вторая структура.

Таким образом, физический смысл минимизации булевых функций, описывающих работу контактных структур, состоит в том, что обеспечивается возможность найти **минимальную структуру**, содержащую наименьшее число контактов.

Упражнения

1. (Г12). Найдите общее число контактных элементов (реле или кнопок) и число элементов, содержащих только нормально разомкнутые контакты, если

$$f = (A + B)(C + D) + (PQ + \bar{A}\bar{B})\bar{R}.$$

2. (ОРМ). Найдите общее число контактных элементов структуры, описываемой функцией

$$f = (\bar{A}B + A\bar{B})(C\bar{D} + \bar{C}D) + AF + FPQR.$$

3. (А47). Укажите на рис. 162 номера логически равных структур (т. е. описываемых булевыми функциями, СДНФ которых совпадают).

4. (ИЛ. СИ) На рис. 159 приведена контактная структура, построенная на основе функции четвертого порядка. Найдите минимальную ДНФ этой булевой функции.

16.4. ЛОГИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ КОНТАКТНЫХ СТРУКТУР

Пусть заданы условия работы некоторой контактной схемы. Чтобы построить соответствующую структуру, необходимо осуществить ее логический синтез, т. е. выполнить определенные операции, в результате которых разработчик получит полную информацию о том, как должны быть соединены между собой контактные элементы. В большинстве практических случаев логический синтез сводится к нахождению одной или нескольких булевых функций, описывающих работу искомой структуры. В общем случае последовательность действий при синтезе контактных структур состоит в следующем:

- определяем число n контактных элементов;
- строим таблицу всех n-разрядных двоичных чисел, в которых согласно принятой интерпретации логических переменных нуль обозначает исходное состояние контактного элемента, а единица — его активное состояние (кнопка нажата, реле включено и др.). Тогда каждое n-значное двоичное число таблицы можно рассматривать как n-разрядный набор состояний контактных элементов;
- каждому двоичному n-разрядному числу ставим в соответствие единицу или нуль (записываем их справа от n-разрядных двоичных чисел) в зависимости от того, должна ли структура быть проводящей или разомкнутой;
- полученную таблицу рассматриваем как таблицу соответствия (истинности), по которой находим СДНФ булевой функции (либо СКНФ);
- минимизируем эту функцию, т. е. находим ее минимальную ДНФ и КНФ и выбираем из них выражение с наименьшим числом вхождений аргументов;
- по минимальной форме строим искомую схему.

На этапе построения контактной структуры ее логический синтез заканчивается. После этого остается только выбрать вариант подключения построенной структуры к управляемому объекту. На рис. 163 показан основной способ включения контактного двухполюсника в контур релейного управления объектом. На рис. 164 приведена разновидность той же схемы, особенность которой состоит в том, что один полюс (любой) контактного двухполюсника всегда подключен к общей точке.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Три кнопки A, B, C управляют лампочкой так, что она загорается в том случае, если одновременно нажаты кнопки A и B либо одновременно нажаты кнопки B и C. Построить контактную структуру.

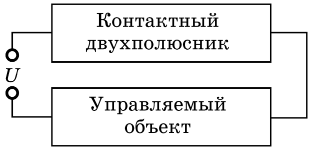


Рис. 163

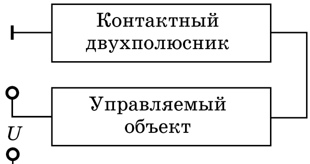


Рис. 164

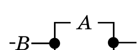


Рис. 165

Таблица 17

	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

В данном случае число контактных элементов равно 3, следовательно, таблица содержит восемь строк (табл. 17). В каждой ее строке записано трехразрядное двоичное число. Левая колонка является вспомогательной, в ней указаны десятичные эквиваленты двоичных чисел. Правая часть таблицы обозначена буквой f. Согласно условию лампочка должна загораться, если нажаты одновременно две кнопки: A и B. При этом о кнопке C ничего не говорится. Следовательно, если нажать все кнопки, то лампочка также должна гореть. Это значит, что в колонке f необходимо поставить единицы в строках, где записаны двоичные числа 110 и 111.

Согласно второму условию лампочка горит, если нажать одновременно кнопки B и C. При этом о кнопке A также ничего не сказано. Следовательно, в колонке f на пересечении со строками, в которых записаны двоичные коды 011 и 111, ставим единицы. Поскольку в строке 111 уже есть единица, то вторично ее не записываем. Остальные строки колонки f заполняем нулями.

Получилась **таблица соответствия**. Согласно таблице после минимизации получаем: $f = B(A + C)$. Соответствующая контактная структура приведена на рис. 165.

Пример 2. Найти минимальную контактную структуру, содержащую четыре кнопки A, B, C, D и работающую согласно следующим условиям:

1) лампочка горит, если одновременно нажаты кнопки B и C;

2) одновременно нажаты кнопки A, C, D, а кнопка B не нажата;

3) одновременно нажаты только две кнопки C и D.

Без применения булевой алгебры эта задача больше походит на головоломку, для решения которой потребуются значительные усилия. С применением же булевой алгебры задачу легко и быстро решит каждый, кто освоил предыдущий материал.

В задаче сформулированы три условия, при которых лампочка горит. Для удобства каждому из них поставим в соответствие отдельную функцию. Согласно первому условию лампочка горит, если нажаты кнопки B и C, а о кнопках A и D ничего не сказано. Следовательно, функция f_1 принимает единичное значение на четырех наборах, где $B = C = 1$: 0110, 0111, 1110, 1111. В соответствии с этим в табл. 18 на пересечении строк

Таблица 18

	A	B	C	D	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0
7	0	1	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	0
10	1	0	1	0	0	0	0
11	1	0	1	1	0	1	0
12	1	1	0	0	0	0	0
13	1	1	0	1	0	0	0
14	1	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	1	1	0	0

6, 7, 14, 15 и колонки f_1 записываем единицы, а все остальные места занимаем нулями. В результате получаем СДНФ:

$$f_1 = (6,7,14,15).$$

Во втором условии упоминаются все кнопки: лампочка загорается всякий раз при $A = C = D = 1$, $B = 0$, т. е. контактная структура замкнута только на одном наборе 1011. В колонке f_2 на пересечении со строкой 11 записываем единицу, а во всех остальных строках ставим нули. СДНФ функции имеет вид $f_2 = (11)$.

В третьем условии также упоминаются все четыре кнопки: лампочка горит на наборе 0011. СДНФ функции f_3 имеет вид $f_3 = (3)$.

Согласно условию задачи все три функции необходимо объединить в одну:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = (3, 6, 7, 11, 14, 15).$$

После минимизации функция принимает вид

$$f = C(B + D).$$

Получился очень интересный результат. Во-первых, каждая буква входит в выражение функции только один раз. Следовательно, можно использовать лишь простейшие кнопки. Во-вторых, в минимальной форме функции f нет буквы A. Это значит, что кнопка A на состояние лампочки никакого влияния не оказывает. На лицевой панели устройства кнопка A вообще может не иметь контактов.

Пример 3. Построить контактную структуру, управляющую лампочкой при помощи четырех кнопок A, B, C, D следующим образом: лампочка горит, если одновременно нажато не менее двух любых кнопок, либо нажата одна кнопка A, но кнопки B и C не нажаты, либо нажата кнопка D, а кнопки B и C не нажаты.

Рассмотрим первое условие. Что значит «нажато не менее двух кнопок»? Это значит, что одновременно нажаты либо все четыре кнопки, либо три из них (любые), либо две (также любые).

Случаю, когда нажаты все четыре кнопки, соответствует булева функция вида

$$f_1 = (15) = ABCD.$$

Если нажаты любые три кнопки, то получаем симметрическую функцию с a-числом, равным трем:

$$f_2 = S_3(A, B, C, D) = (7, 11, 13, 14).$$

Если нажаты любые две кнопки, то

$$f_3 = S_2(A, B, C, D) = (3, 5, 6, 9, 10, 12).$$

Согласно второму и третьему условиям

$$f_4 = (8, 9);\quad f_5 = (1, 9).$$

Все пять функций объединяем в одну и упрощаем:

$$f = (1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15) = A + D + BC.$$

Как и в предыдущем случае, для построения структуры достаточно четырех простейших кнопок, содержащих по одному нормально разомкнутому контакту.

Упражнения

1. (218)! Найдите булеву функцию f, описывающую состояние лампочки, и определите число нормально замкнутых контактов, если схема работает следующим образом: лампочка горит только в том случае, когда нажаты кнопки B и D, а кнопки A и C не нажаты.

2. (289)! Найдите минимальную ДНФ булевой функции f (A, B, C, D) и число нормально замкнутых контактов, если контактная структура работает в соответствии с условием: лампочка горит при одновременно нажатых кнопках B и C и не нажатой кнопке A.

3. (УБО). Четыре кнопки A, B, C, D управляют лампочкой, которая горит на наборах 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15. Для минимальной ДНФ постройте контактную структуру. Для самоконтроля найдите числа a, b, c, d, где a — число контактов кнопки A, b — число контактов кнопки B, c — число контактов кнопки C, d — число контактов кнопки D.

4. Три кнопки управляют лампочкой: при всех не нажатых кнопках лампочка горит. С нажатием любой кнопки лампочка гаснет. Постройте минимальную контактную структуру. (ЭЙО)! Найдите число нормально разомкнутых и число нормально замкнутых контактов.

5. На основе минимальной ДНФ постройте контактную структуру при условии, что лампочка, управляемая кнопками A, B, C, D, горит в двух случаях: когда нажаты все кнопки и когда не нажато ни одной кнопки. (УТМ)! Найдите число всех контактов и число нормально замкнутых контактов.

6. (ХНН)! Три кнопки управляют одной лампочкой. Эта лампочка загорается только в том случае, если нажаты точно две любые кнопки. Сколько всего контактов в структуре, построенной на основе минимальной ДНФ функции, описывающей эту структуру? Сколько всего контактов в структуре, построенной на основе минимальной КНФ?

7. (Б50)! Четыре кнопки управляют одной лампочкой так, что лампочка горит, если нажаты точно две кнопки (любые). Сколько всего контактов в схеме, построенной на основе минимальной ДНФ булевой функции, описывающей эту схему? Сколько всего контактов в схеме, построенной на основе минимальной КНФ?

8. (ФУТ). Четыре кнопки A, B, C, D управляют одной лампочкой: лампочка горит, если нажато четное число кнопок. Постройте структуру на основе минимальной ДНФ булевой функции. Для самоконтроля укажите общее число контактов всей структуры.

16.5. МОСТИКОВЫЕ СТРУКТУРЫ

При помощи булевых функций можно строить только последовательно-параллельные схемы. Однако кроме них существуют так называемые мостиковые структуры. Простейшим примером может служить схема, приведенная на рис. 166.

Мостиковые структуры отличаются следующими особенностями. Во-первых, непосредственно по выражениям булевых функций их построить нельзя, но для всякой мостиковой структуры можно найти булеву функцию. (Для нахождения булевой функции, описывающей сложную мостиковую структуру, можно использовать метод, изложенный в подразделе 23.3 «Теории графов» данного пособия.)

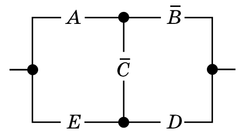


Рис. 166

Во-вторых, мостиковые структуры часто значительно экономичнее соответствующих параллельно-последовательных схем. Например, схема (рис. 166) содержит пять контактов (букв), а минимальная ДНФ функции, описывающей работу этой схемы, содержит 10 букв. Даже при повышении порядка функции число букв уменьшается только до восьми:

$$f = A(\bar{B} + \bar{C}D) + E(D + \bar{B}\bar{C}).$$

Как же строят мостиковые структуры? Существуют ли методы, позволяющие по булевой функции найти самую (абсолютно) экономичную структуру? Нет. До сих пор не существует общего метода нахождения мостиковых структур по заданной булевой функции, тем более — абсолютно экономичных. Однако для частных случаев разработано много способов и методов построения мостиковых структур, хотя и без гарантий того, что они являются абсолютно экономичными. С некоторыми из них можно ознакомиться по [24].

Упражнения

1. (ПП1). Определите число простых импликант и число вхождений аргументов минимальной ДНФ функции, построенной по мостиковой структуре (рис. 167).

2. По схеме, приведенной на рис. 168, найдите минимальную ДНФ. (ТАФ)! Определите число вхождений аргументов и число простых импликант для минимальной ДНФ. Найдите число вхождений аргументов для минимальной КНФ.

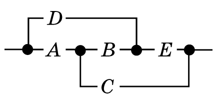


Рис. 167

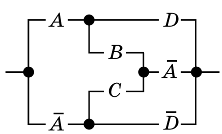


Рис. 168

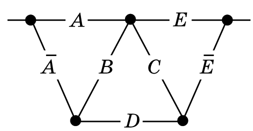


Рис. 169

3. (У01). Определите число вхождений аргументов минимальной ДНФ функции, описывающей структуру, приведенную на рис. 169.

16.6. СИММЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Симметрической называется контактная структура, реализующая симметрическую булеву функцию. Известно, что симметрические булевы функции с одиночными a-числами не поддаются минимизации в смысле Квайна (см. тему «Булева алгебра» данного пособия), поэтому контактные структуры, построенные на их основе, являются чрезвычайно громоздкими. Однако в классе мостиковых схем существуют очень экономичные контактные

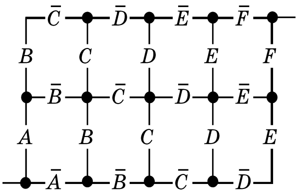


Рис. 170

структуры, реализующие любые симметрические булевы функции. Например, на рис. 170 показана мостиковая схема, реализующая симметрическую булеву функцию вида

$$f = S_2(A, B, C, D, E, F),$$

зависящую от шести аргументов. Аналитическое представление этой функции в минимальной ДНФ содержит 15 конъюнкций по 6 переменных каждая, среди которых две переменные представлены в неинверсной (прямой) форме, а все остальные являются инверсными. Если по такой функции построить контактную структуру (в классе параллельно-последовательных схем), то в ней окажется 90 контактов, в то время как мостиковая структура (рис. 170) содержит всего лишь 22 контакта.

Пусть n — число аргументов симметрической булевой функции $S_2(n)$, представленной в ДНФ. Тогда число N вхождений ее аргументов равно

$$N = nC_n^2 = \frac{n^2(n-1)}{2}.$$

Если порядок функции не повышать, то для ее реализации потребуется столько же контактов.

Число M контактов, входящих в мостиковую структуру, построенную по функции $S_2(n)$, равно ($n \geqslant 2$):

$$M = 5n - 8.$$

Если параллельно-последовательная схема построена на основе ДНФ симметрической функции $S_2(n)$, то мостиковая структура экономичнее параллельно-последовательной в k раз:

$$k = \frac{n^2(n-1)}{2(5n-8)}.$$

Из этой формулы видно, что с ростом числа переменных экономичность (по числу контактов) мостиковой структуры возрастает. Например, при $n = 6$ мостиковая структура экономичнее параллельно-последовательной в 4,1 раза; при $n = 10$ — в 10,7 раз; при $n = 20$ — в 41,3 раза и т. д.

С увеличением a-числа до $n/2$ экономичность мостиковой структуры также возрастает. Например, число N вхождений аргументов функции $S_3(n)$ равно

$$N = nC_n^3 = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}.$$

Число M контактов, входящих в мостиковую структуру, для той же функции равно:

$$M = 7n - 18.$$

При $n = 6$ мостиковая структура экономичнее параллельно-последовательной в 5 раз; при $n = 10$ — в 23,1 раза; при $n = 20$ — в 187 раз и т. д.

Упражнения

1. (ФОК). Сколько контактов потребуется для реализации симметрической функции $S_2(8)$ в виде мостиковой структуры?

2. (136)! Сколько контактов необходимо для реализации функции $S_3(4)$ в классе параллельно-последовательных схем (без повышения порядка) и сколько — в мостиковой структуре?

3. (ТУК). Мостиковая структура, реализующая функцию $S_2(n)$, имеет 32 контакта. Сколько контактов потребуется для реализации функции в классе параллельно-последовательных схем, если порядок функции не повышать?

4. Требуется построить контактную структуру, реализующую функцию вида

$$f = S_2(A, B, C, D, E, F) \cdot S_3(P, Q, R, S, T).$$

1) (987). Сколько контактов необходимо для реализации этой функции с помощью мостиковой структуры?

2) (У87). Сколько контактных элементов (например, реле) потребуется для построения этой структуры?

3) (ЗЕЛ). Сколько всего контактов потребуется, если по этой функции построить параллельно-последовательную схему (порядок функции не повышать)?

4) (ЯС5). Сколько инверсных букв в схеме, представленной в виде мостиковой структуры?

16.7. ПОЛНАЯ СИММЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ШЕННОНА

Ше́ннон Клод Эльвуд — американский инженер и математик, специалист по математической теории информации, теории релейно-контактных схем, математической теории связи, кибернетике.

Полная симметрическая структура Шеннона — это контактная сеть, имеющая общий полюс и $n + 1$ выходных полюсов, каждому из которых соответствует симметрическая функция n аргументов с определенным a-числом. На рис. 171 приведена полная структура для симметрических функций пяти аргументов. Структура имеет шесть выходов. Если контактными элементами являются реле, то выход $S_0(5)$ соединен с общим полюсом при выключенных всех пяти реле. Выход $S_1(5)$ соединяется с общим полюсом, если включено любое одно реле. Выход $S_2(5)$ соединяется с общим полюсом при двух включенных реле (любых) и так далее до выхода $S_5(5)$, который соединяется с общим полюсом, когда включены все пять реле.

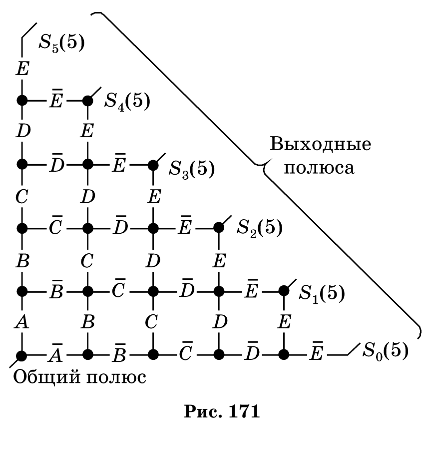


Рис. 171

Из схемы (см. рис. 171) видно, что симметрическая структура Шеннона имеет однородное строение, и ее можно наращивать до любых пределов.

На основе полной структуры построено много различных схем, имеющих большое практическое значение. Одну из них рассмотрим в следующих двух подразделах.

Упражнения

1. Пусть номерами выходов на рис. 171 являются a-числа: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Укажите номера выходов, соединенных с общим полюсом, если:

1) (281). $A = B = 1$, $C = D = E = 0$;

2) (ВЛИ). $B = C = E = 1$, $A = D = 0$;

3) (ШЕЛ). $B = C = D = E = 1$, $A = 0$.

2. Сколько существует наборов значений аргументов A, B, C, D, E, на которых с общим полюсом соединен выход:

1) (МОК). $S_2(5)$; 2) (229). $S_3(5)$; 3) (839). $S_4(5)$; 4) (ТВС). $S_5(5)$.

3. (АЯМ). Структуру, изображенную на рис. 171, расширили на два контактных элемента F и K. Сколько всего контактов в расширенной структуре?

4. (289). Полная симметрическая структура содержит 380 контактов. Сколько в ней контактных элементов?

5. (ЯВЭ). При помощи основной симметрической структуры без дополнительных ее упрощений реализовали функцию $S_1(5) + S_4(5)$. Сколько контактов в получившейся схеме?

16.8. СТРУКТУРА «ЧЕТ-НЕЧЕТ»

Применение полной симметрической структуры проиллюстрируем на примере следующей задачи. В комнате имеется n дверей, на потолке ее укреплена лампочка. Рядом с каждой дверью расположен двухпозиционный переключатель. Входящий через какую-либо дверь включает лампочку (при помощи переключателя), если она не горит, и выключает ее, выходя через ту же или любую другую дверь. Требуется построить схему соединения лампочки с переключателями и источником электрической энергии согласно условию данной задачи. Такую схему нередко называют структурой «чет-нечет».

В [24] эта задача решена следующим образом. В основной симметрической структуре соединили все выходы с четными a-числами. Затем схему упростили путем свертки, т. е. удалили лишние контакты. В результате получилась структура, приведенная на рис. 172. По этой схеме видно, что, последовательно соединяя ячейки, можно построить схему любой длины.

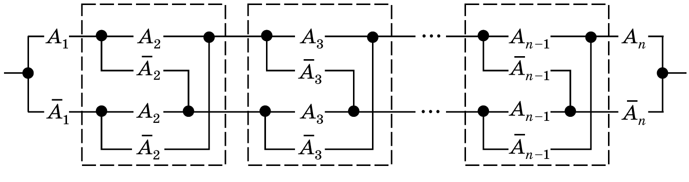


Рис. 172

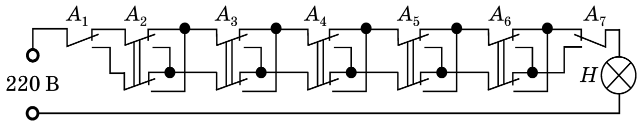


Рис. 173

Аналогичная схема получается в результате свертки основной симметрической структуры, если объединить ее входы, соответствующие нечетным a-числам.

На рис. 173 для $n = 7$ представлена схема «чет», где в качестве контактных элементов использованы двухпозиционные переключатели, иногда называемые тумблерами. Для построения схемы использовано 7 тумблеров, каждый из которых содержит по две переключательные группы контактов, за исключением первого и последнего, содержащих по одной переключательной группе. (Тумблер — малогабаритный механический переключатель на 2 положения, иногда на 3. В переводе с английского tumble – опрокидываться [38].) В том состоянии тумблеров, в каком они изображены на рис. 173, лампочка горит. Переведем какой-либо тумблер во второе положение — лампочка погаснет. Включить ее можно любым тумблером, переведя его в противоположное состояние.

Упражнения

1. (ТТО). Пусть $A_1, A_2, ..., A_7$ — разряды двоичного числа на рис. 173. Сколько существует 7-значных двоичных чисел, при которых лампочка горит?

2. (899). Укажите номера нижеприведенных двоичных чисел, при которых лампочка на рис. 173 горит, если $A_1, A_2, ..., A_7$ — разряды двоичного числа (все тумблеры изображены в нулевом состоянии):

1) 1 0 0 1 1 0 1;	4) 1 1 1 0 1 1 1;	7) 1 0 0 1 0 0 0;
2) 0 0 1 0 1 0 1;	5) 0 1 0 1 1 1 0;	8) 1 1 1 0 0 0 1;
3) 0 0 0 0 1 1 1;	6) 0 0 1 0 0 0 0;	9) 1 1 0 0 0 0 1.

16.9. ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ СТРУКТУРЫ «ЧЕТ-НЕЧЕТ»

В многоэтажных жилых домах электрические лампы, освещающие лестничные площадки, бесполезно горят в течение всего темного времени суток. Для жильцов это очень удобно, особенно при отсутствии лифта: в любой момент можно подняться на тот или иной этаж, пройти с одного этажа на другой. При этом хорошо видны номера квартир, нет риска оступиться на ступеньках лестницы. Но это удобство обеспечивается за счет явного перерасхода электрической энергии.

Наилучшим представляется вариант, когда освещение включается только при необходимости, а в течение всего остального времени лампы не горят. В связи с этим задачу сформулируем следующим образом. В подъезде жило-

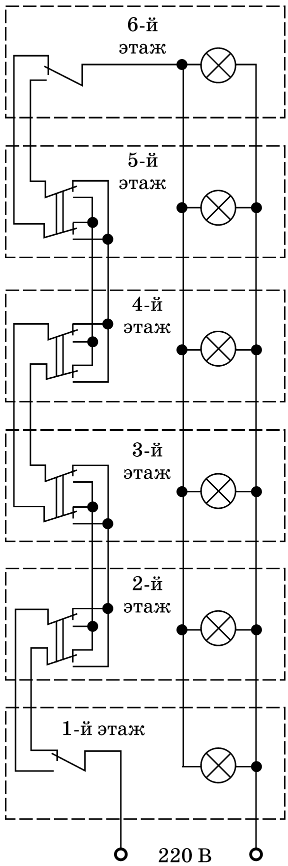


Рис. 174

го дома шесть этажей. На лестничной площадке каждого этажа имеется одна осветительная лампа. Требуется установить на этажах по одному тумблеру (двухпозиционному переключателю) так, чтобы любым из них можно было включить освещение на всех этажах одновременно и любым выключить.

Схема такого управления освещением лестничных площадок приведена на рис. 174. Ее основу составляет схема «чет-нечет». Пунктирными прямоугольниками на схеме обозначены лестничные площадки. Внутри прямоугольников изображены осветительные лампы и переключатели, а также указаны номера этажей. Все лампы соединены параллельно, благодаря чему они либо все горят, либо все погашены. На схеме переключатели изображены так, что лампы не горят. Допустим, что жильцу пятого этажа потребовалось пройти на второй этаж. Тумблером, расположенным у его двери, он включает освещение на всех этажах. На втором этаже он таким же переключателем гасит все лампы.

По схеме видно, что она представляет собой последовательность одинаковых ячеек, поэтому может быть использована в домах с любым числом этажей и с любым числом дверей на лестничных площадках. Ячейки соединяются между собой четырьмя проводниками. Из них два проводника реализуют схему «чет-нечет» и два использованы для параллельного соединения осветительных ламп.

16.10. СТРУКТУРЫ С ПЕРЕСТРАИВАЕМОЙ СХЕМОЙ СОЕДИНЕНИЙ

Суть задач, рассматриваемых в данном подразделе, состоит в следующем. Дан некоторый набор элементов, из которых можно составить несколько различных пронумерованных схем. Требуется построить контактную структуру так, чтобы путем перевода контактных элементов в то или иное состояние можно было получить схему с заданным номером. Все такие задачи решаются табличным методом. Поясним это на примерах.

Пример 1. Две лампочки управляются переключателями A и B следующим образом. На наборе значений аргументов 00 обе лампочки не горят. На наборе 01 обе лампочки горят, но соединены последовательно. На наборе 10 горит одна лампочка (любая). На наборе 11 горят обе лампочки, соединенные параллельно. Построить структуру согласно условиям ее работы.

В условии сказано, что имеются три объекта: источник питания U и две лампочки H_1 и H_2. Если эти три объекта никуда не подключены, то имеем

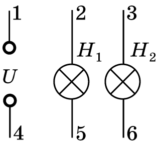


Рис. 175

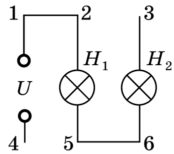


Рис. 176

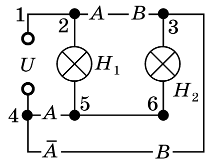


Рис. 177

шесть свободных выводов (как показано на рис. 175). Некоторые из них можно соединить заранее. Например, при параллельном включении лампочек должны быть соединены между собой выводы 2 и 3, а также выводы 5 и 6. При последовательном соединении одну из этих пар необходимо разомкнуть, вторая останется замкнутой. Поскольку одна пара выводов является замкнутой в обоих случаях, то такое соединение можно сделать заранее. Пусть это будут выводы 5 и 6. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что заранее можно соединить и выводы 1 и 2. В результате получим рис. 176. Все остальные соединения могут быть осуществлены только при помощи контактов.

Строим таблицу. В левой ее части записываем наборы значений аргументов A и B (табл. 19). В правой располагаем колонки f_{4-5}, f_{3-4}, f_{2-3}, где f_{4-5} — функция, описывающая структуру, соединяющую выводы 4 и 5 на рис. 176; f_{3-4} — функция, описывающая работу двухполюсника, соединяющего выводы 3 и 4; f_{2-3} — функция, описывающая двухполюсник, соединяющий выводы 2 и 3. Код 00 обозначает: обе лампочки не горят. Следовательно, в колонке f_{4-5} необходимо поставить нуль. То же самое и в колонке f_{3-4}. В колонке f_{2-3} ставим крестик, обозначающий неопределенное состояние, так как при $f_{4-5} = f_{3-4} = 0$ обе лампочки не горят независимо от состояния цепи f_{2-3}.

Таблица 19

A	B	f_{4-5}	f_{3-4}	f_{2-3}
0	0	0	0	×
0	1	0	1	0
1	0	1	×	0
1	1	1	0	1

Переходим к строке 01. Лампочки необходимо соединить последовательно и подключить к источнику U. Так как для этого достаточно соединить точки 3 и 4, то в колонке f_{3-4} ставим единицу, а в двух оставшихся колонках записываем нули.

Рассмотрим строку 10. Так как гореть должна одна лампочка, то соединяем точки 4 и 5. В колонке f_{4-5} записываем единицу. Выводы 2 и 3 необходимо разомкнуть, следовательно, в колонке f_{2-3} ставим нуль. Выводы 3 и 4 можно замкнуть, но можно и разомкнуть — в обоих случаях лампочка H_2 гореть не будет. В колонке f_{3-4} записываем крестик.

Последняя строка: обе лампочки соединены параллельно и подключены к источнику питания U. Соединяем выводы 4 и 5, а также 2 и 3, что обозначаем единицами в колонках f_{4-5} и f_{2-3}. В колонке f_{3-4} записываем нуль, поскольку выводы 3 и 4 должны быть разомкнутыми.

Находим минимальные формы полученных функций:

$$f_{4-5} = A; \qquad f_{3-4} = \bar{A}B; \qquad f_{2-3} = AB.$$

Вставив соответствующие контактные структуры между выводами 4–5, 3–4, 2–3, получим схему, работающую согласно заданным условиям (рис. 177).

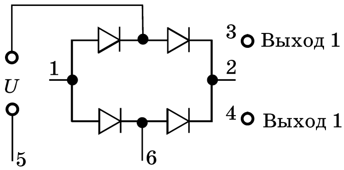


Рис. 178

Таблица 20

A	B	f_{5-6}	f_{1-3}	f_{2-4}	f_{1-4}	f_{2-3}
0	0	0	×	×	×	×
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	×	×	×	×	×

Пример 2. На рис. 178 приведен выпрямительный мост, источник переменного тока U и две выходные клеммы «Выход 1» и «Выход 2». Контактные элементы A и B управляют схемой следующим образом. На наборе 00 мост отключен от источника U. На наборе 01 мост подключен к источнику U, и постоянное напряжение подается так: ПЛЮС — на выход 1, МИНУС — на выход 2. На наборе 10 напряжение подается так: ПЛЮС — на выход 2, МИНУС — на выход 1. Набор 11 является неиспользуемым. Построить схему согласно этим условиям.

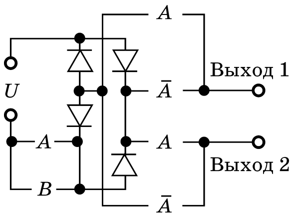


Рис. 179

Строим таблицу (табл. 20). По таблице находим булевы функции, описывающие работу схемы. После минимизации получаем:

$$f_{5-6} = A + B; \qquad f_{1-3} = f_{2-4} = A; \quad f_{1-4} = f_{2-3} = \bar{A}.$$

Найденные контактные структуры включаем между соответствующими точками схемы, изображенной на рис. 178. Окончательный вариант схемы, работающей согласно заданным условиям, приведен на рис. 179.

Упражнения

1. На схеме (рис. 180) при помощи контактов соедините точки 1, 2, 3, 4 так, чтобы обеспечивались два варианта подключения резисторов к клеммам a и b: если $A = 0$, то к клеммам подключаются последовательно соединенные резисторы; если $A = 1$, то к выходам подключаются те же резисторы, но соединенные параллельно. (ККН)! Найдите выражения следующих функций:

$$f_{1-3} = \ldots; \;\; f_{2-3} = \ldots; \;\; f_{2-4} = \ldots .$$

2. На рис. 181 приведены пять источников постоянного тока: U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, подключенных к выходным клеммам $U_{\text{вых}}$ при помощи пяти контактных элементов — тумблеров A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. При этом

$$U_1 = 48 \text{ В}; \;\; U_2 = 24 \text{ В}; \;\; U_3 = 12 \text{ В}; \;\; U_4 = 6 \text{ В}; \;\; U_5 = 3 \text{ В}.$$

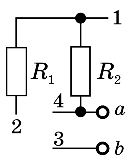


Рис. 180

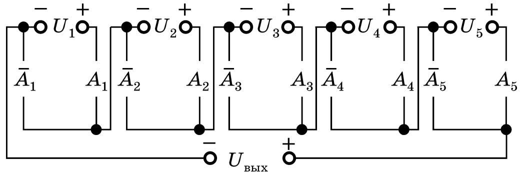


Рис. 181

Пусть буквы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 соответствуют разрядам пятизначного двоичного числа, где A_5 — младший разряд. Сколько вольт составит напряжение $U_{вых}$, если при помощи тумблеров установить число:

1) (СНО) 10011? 3) (УПО) 11110? 5) (ЮЖЕ) 00011?
2) (370) 00001? 4) (КШИ) 00000? 6) (ИЯШ) 10010?

16.11. ПРИМЕРЫ КОНТАКТНЫХ СТРУКТУР

Булева алгебра и созданные на ее основе методы синтеза контактных структур обычно дают хорошие результаты, но далеко не во всех случаях. Нередко для того чтобы построить экономичную контактную структуру, от разработчика в гораздо большей степени требуется инженерная смекалка, чем знание формальных методов проектирования контактных схем.

Пример 1. Электрический двигатель M имеет три вывода: 1, 2, 3. На выводы 1 и 2 подается переменное напряжение (обычно 220 В). Вывод 3 подключается к выводу 1 через конденсатор. Двигатель при этом вращается, допустим, по часовой стрелке. Если вывод 3 присоединить через конденсатор к выводу 2, то двигатель будет вращаться в другую сторону. Требуется построить схему управления двигателем, используя два переключателя (тумблера) A и B, содержащие по одной переключательной группе контактов: если $A = 0$, то двигатель выключен; если $A = 1$, $B = 0$, то двигатель вращается по часовой стрелке; если $A = B = 1$, то двигатель вращается в другую сторону.

При наличии некоторого опыта эту задачу нетрудно решить и без применения булевой алгебры. Но в данном случае возможно применение табличного метода, рассмотренного в предыдущем подразделе.

На рис. 182 показано, какие выводы можно соединить постоянно. Введем обозначения: f_{1-5}, f_{1-4}, f_{2-4} — контактные структуры, соединяющие выводы 1 и 5, 1 и 4, 2 и 4 соответственно. Условия работы схемы приведены в табл. 21. Состояния 00 и 01 тумблеров соответствуют случаю, когда двигатель выключен. Крестики обозначают безразличные состояния. Код 10 обозначает вращение двигателя по часовой стрелке, 11 — против часовой стрелки. По таблице находим:

$$f_{1-5} = A; \quad f_{1-4} = \bar{B}; \quad f_{2-4} = B.$$

Схема, построенная в соответствии с этими функциями, приведена на рис. 183.

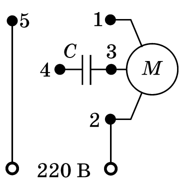


Рис. 182

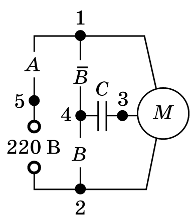


Рис. 183

Таблица 21

A	B	f_{1-5}	f_{1-4}	f_{2-4}
0	0	0	×	×
0	1	0	×	×
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

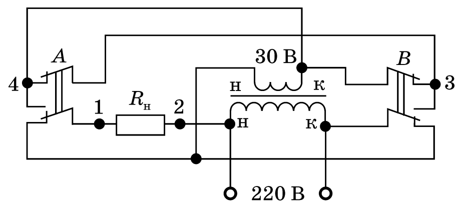


Рис. 184

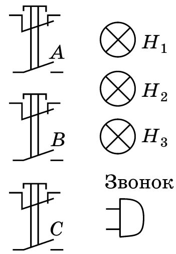


Рис. 185

Пример 2. Дано: два тумблера, в каждом из которых содержится по две группы контактов (как на рис. 173); трансформатор, имеющий сетевую обмотку на 220 В и выходную обмотку на 30 В; нагрузка, например, резистор. Два тумблера имеют четыре состояния 00, 01, 10, и 11. Требуется соединить перечисленные элементы так, чтобы к нагрузке можно было подключить 0 В; 190 В; 220 В; 250 В.

Эту задачу легко решить формальным путем (табличным методом) точно так же, как это показано в предыдущем примере. Однако, идя таким путем, мы будем получать решения, не укладывающиеся в заданные условия по числу контактов. Подобные задачи больше походят на головоломки, для решения которых требуется некоторая изобретательность.

Одно из решений приведено на рис. 184. Когда $A = B = 0$, т. е. в состоянии 00 (как изображено на рис. 184), к нагрузке $R_н$ подключено 220 В.

Пусть $A = 0$, $B = 1$. К нагрузке подключится сетевое напряжение 220 В и напряжение 30 В по цепи: точка 2 нагрузки — *н* (начало сетевой обмотки) — *к* (конец сетевой обмотки) — точка 3 — точка 4 — *к* (конец вторичной обмотки) — точка 1 нагрузки. К нагрузке подключена разность сетевого напряжения и напряжения вторичной обмотки, т. е. 190 В.

Пусть теперь $A = 1$, $B = 0$. К нагрузке подключена сумма напряжений сети и вторичной обмотки трансформатора, равная 250 В, по цепи $2 - н - к - н - к - 4 - 1$.

Если $A = B = 1$, то напряжения на нагрузке нет.

Пример 3. Даны три кнопки, каждая из которых содержит один нормально разомкнутый контакт и один нормально замкнутый; три осветительные лампы накаливания и электрический звонок (рис. 185). Требуется соединить их так, чтобы при нажатии любой кнопки загоралась соответствующая лампа и звенел звонок. Если какая-либо лампа перегорит, звонок звенит по-прежнему с нажатием любой кнопки.

Для решения предыдущей задачи, в принципе, можно использовать булеву алгебру, если снять ограничение на число контактов. В данном же случае мы имеем дело с чистой головоломкой и булева алгебра здесь не поможет. Решение приведено на рис. 186. Схема имеет регулярную структуру и может быть расширена до любого числа кнопок и соответствующих им осветительных ламп.

Пример 4. Объекты P и Q соединены двумя проводниками. На объекте P расположены источник электрической энергии и два тумблера A и B. На объ-

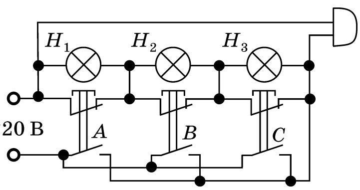


Рис. 186

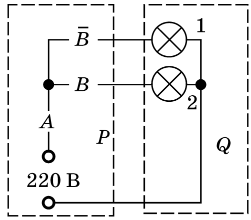


Рис. 187

екте Q находятся две лампочки. Если $A = 0$, то обе лампочки не горят. Если $A = 1$, $B = 0$, то горит только первая лампочка. При $A = B = 1$ горит только вторая. Построить схему согласно этим условиям.

Обычный логический расчет приводит к схеме, в которой для соединения объектов P и Q требуется три проводника (рис. 187), что не удовлетворяет условию задачи. Одно из правильных решений приведено на рис. 188. Суть его в том, что переменное напряжение выпрямляется при помощи диодного моста. Последовательно с лампочками включены диоды в противоположных направлениях. Тумблер B при переключении меняет полярность напряжения, подаваемого на объект Q. При той полярности, как изображено на схеме, горит лампочка 1. Если принять $B = 1$, то гореть будет только лампочка 2.

Эта схема, как и предыдущая, является головоломкой. Однако булева алгебра здесь частично может быть применена (при построении схемы контактных соединений), если сначала догадаться использовать диоды.

Пример 5. Два объекта P и Q соединены двумя проводниками. На объекте P расположены источник электрической энергии и два тумблера A и B. На объекте Q находятся две лампочки. Если $A = B = 0$, то обе лампочки не горят. При $A = 1$, $B = 0$ горит первая лампочка, вторая не горит. При $A = 0$, $B = 1$ горит вторая лампочка, первая не горит. При $A = B = 1$ горят обе лампочки. Построить схему согласно этим условиям.

Булева алгебра здесь не поможет. Это задача на смекалку. Одно из возможных ее решений приведено на рис. 189.

Таким образом, несмотря на существование хорошо разработанной теории контактных структур, во многих случаях наилучшие решения обеспечивают не формальные методы, а опыт, инженерная интуиция и смекалка разработчика.

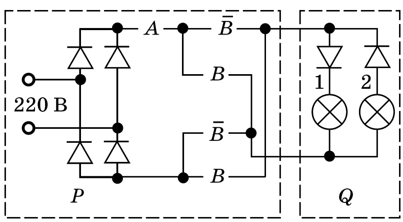


Рис. 188

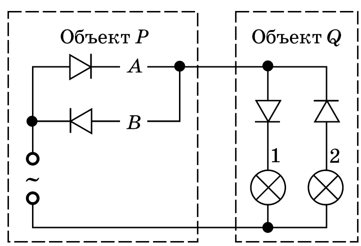


Рис. 189

Упражнения

1. (762). Укажите номера вопросов, на которые Вы дадите утвердительные ответы (см. схему на рис. 184):

1) к выходной обмотке трансформатора (обозначенной «30 В») подключили лампочку, загорающуюся при 30 В. Верно ли, что лампочка будет гореть, если напряжение на нагрузке $R_н$ равно нулю?

2) будет ли лампочка гореть, если $A = B = 0$?

3) протекает ли ток через нагрузку $R_н$ при $A = B = 1$?

4) верно ли, что на схеме имеются нормально замкнутые контакты, соединенные параллельно?

5) верно ли, что если к нагрузке $R_н$ приложено 220 В, то напряжение выходной обмотки равно нулю?

6) верно ли, что трансформатор остается включенным независимо от положения тумблеров?

2. (Р92). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да» (см. рис. 186).

1) будет ли звонок звенеть при нажатии кнопок, если все лампы перегорят?

2) верно ли, что при нажатии любых двух кнопок соответствующие лампы соединятся параллельно?

3) будет ли звенеть звонок, если одновременно нажать две любые кнопки?

4) верно ли, что при ненажатых кнопках ток через лампы не протекает?

5) верно ли, что при нажатии кнопки A ток протекает через все три лампы?

6) верно ли, что лампы горят одинаково ярко независимо от числа нажатых кнопок?

16.12. КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ С ЭЛЕМЕНТАМИ ПАМЯТИ

До сих пор мы рассматривали контактные структуры, в которых элементы, моделирующие логические переменные (кнопки, тумблеры, реле), устанавливались в то или иное состояние извне. Теперь рассмотрим несколько примеров, где комбинационные структуры управляют элементами памяти, в качестве которых будем использовать электромагнитные реле, причем эти реле сами участвуют в работе тех или иных структур.

Пример 1. Простейшей является схема, содержащая одно реле A (рис. 190). В исходном состоянии реле выключено. При нажатии кнопки «Пуск» реле включается (говорят: «срабатывает»), контакт A замыкается и ток протекает по двум параллельным цепям — через контакт кнопки «Пуск» и через замкнувшийся контакт A. При отпускании кнопки «Пуск» реле останется во включенном состоянии (говорят: «реле встало на самоблокировку»), и при повторном ее нажатии состояние схемы не меняется, в чем и заключается эффект запоминания.

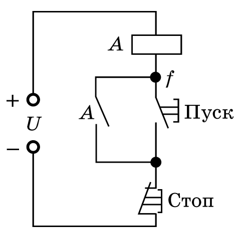


Рис. 190

Чтобы реле выключить, надо нажать кнопку «Стоп». По схеме видно, что структура, управляющая обмоткой реле (точка f), работает в соответствии с булевой функцией $f = (A + \Pi)\overline{C}$, где П — кнопка «Пуск», С — кнопка «Стоп».

Схема, приведенная на рис. 190, нашла широчайшее применение в промышленности для включения различных электротехнических объектов, таких как однофазные и многофазные электродвигатели, трансформаторы, электромагниты, нагревательные элементы, мощные осветительные лампы и др.

Пример 2. Рассмотрим более сложную схему с самоблокировкой реле (рис. 191). На схеме пять реле, управляемых контактными структурами, работающими в соответствии с булевой функцией вида

$$f_i = \Pi_i + A_i\, S_1(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5),$$

где Π_i — кнопка «Пуск», управляющая i-м реле ($i = 1, 2, 3, 4, 5$); $S_1(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ — симметрическая булева функция с a-числом, равным единице.

Схема работает следующим образом. После нажатия кнопки, например Π_1, включится (сработает) реле A_1 и встанет на самоблокировку, так как симметрическая структура вида

$$S_1(5) = S_1(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$$

при $A_1 = 1$ замкнута. Нажмем теперь другую кнопку, допустим Π_3. Окажутся включенными два реле: A_1 и A_3. Но при $A_1 = A_3 = 1$ структура $S_1(5)$ разомкнута, вследствие чего реле A_1 выключится, структура $S_1(5)$ замкнется и реле A_3 встанет на самоблокировку. Таким образом, при нажатии i-й кнопки i-е реле включается, а ранее включенное реле выключается.

Пример 3. Рассмотрим схему простейшего реле времени, в котором, как и в предыдущих случаях, используется самоблокировка (рис. 192). В исходном состоянии реле выключено, конденсатор заряжен до напряжения U. Нажмем кнопку «Пуск». Реле включится и контактом A встанет на самоблокировку, а контактом $\overline{A}$ схема отключится от источника питания. Когда конденсатор разрядится, реле выключится, конденсатор зарядится через резистор R, если к этому времени кнопка «Пуск» будет отпущена. Схема готова к новому циклу работы.

Пример 4. В схемах управления реверсивными двигателями используются два реле, две кнопки «Пуск» и одна кнопка «Стоп» (см. рис. 193). Если

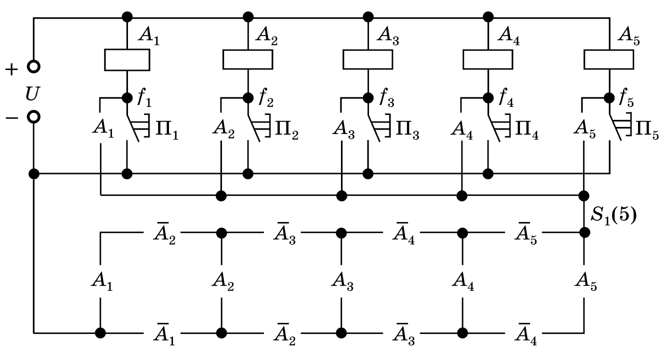


Рис. 191

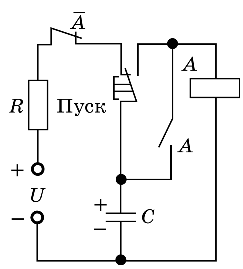


Рис. 192

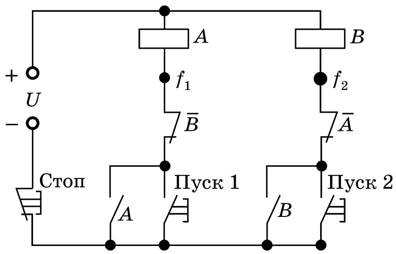


Рис. 193

нажать кнопку «Пуск 1», двигатель начнет вращаться, допустим, по часовой стрелке. Если нажать кнопку «Пуск 2», двигатель будет вращаться против часовой стрелки (двигатель на рис. 193 не изображен). Главное требование к схеме заключается в том, чтобы исключить одновременное срабатывание обоих реле (во избежание короткого замыкания в цепях электропитания двигателя).

Это условие выполнится, если контактные структуры, управляющие обмотками реле, представить булевыми функциями вида:

$$f_1 = \overline{B}(A + \Pi_1)\overline{\text{C}};$$
$$f_2 = \overline{A}(B + \Pi_2)\overline{\text{C}},$$

где Π_1 — кнопка «Пуск 1», Π_2 — кнопка «Пуск 2», С — кнопка «Стоп». Если $A = 1$ (включено реле A под действием кнопки «Пуск 1»), то $f_2 = 0$ и реле B включить невозможно. При $\text{C} = 1$ (нажата кнопка «Стоп») обе функции равны нулю и реле A выключается. Теперь можно нажать кнопку «Пуск 2». Реле B включится и встанет на самоблокировку. Так как при этом $B = 1$, то $f_1 = 0$ и реле A включить невозможно.

Таким образом, смена направления вращения двигателя осуществляется только через кнопку «Стоп», чем исключается одновременное включение обоих реле. Однако если при выключенных реле кнопки Π_1 и Π_2 нажать одновременно, то на какое-то время оба реле все же, в принципе, могут включиться. Чтобы исключить и это явление, можно использовать сложные кнопки Π_1 и Π_2, содержащие по одному нормально разомкнутому контакту и по одному нормально замкнутому, а функции f_1 и f_2 представить в виде:

$$f_1 = \overline{B}(A + \Pi_1)\overline{\text{C}}\overline{\Pi}_2;$$
$$f_2 = \overline{A}(B + \Pi_2)\overline{\text{C}}\overline{\Pi}_1.$$

Пример 5. На схеме простейшего кодового замка для сейфа (рис. 194) обозначено:

$A_1, A_2, ..., A_6$ — тумблеры, расположенные на внутренней стороне двери сейфа; с их помощью устанавливается «правильный» код, являющийся ключом для замка;

$B_1, B_2, ..., B_6$ — кнопки, выведенные на внешнюю сторону той же двери; с их помощью вводится ключ, чтобы открыть дверь сейфа;

A — реле, срабатывающее при вводе «правильного» кода.

Кнопка «Пуск» нажимается после ввода ключа. При помощи этой кнопки подается питание на электромагнит, перемещающий ригель (задвижку) замка. В случае ввода «неправильного» кода реле A не включается и под действием кнопки «Пуск» сирена подает сигнал тревоги.

Главной в схеме является структура, управляющая обмоткой реле A:

$$f = (\varphi + A)\overline{\text{C}},$$

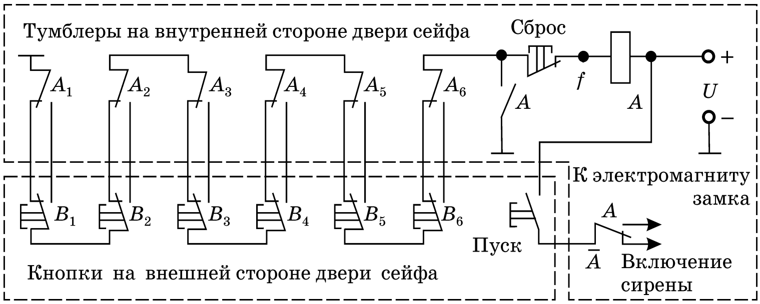


Рис. 194

где С — кнопка «Сброс»; φ — функция, описывающая схему равенства двух двоичных чисел, одно из которых — ключ, второе — код, заданный при помощи тумблеров. Функция φ имеет третий порядок:

$$\varphi = (A_1B_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1)(A_2B_2 + \bar{A}_2\bar{B}_2)\,\&\ldots\&\,(A_6B_6 + \bar{A}_6\bar{B}_6).$$

В исходном состоянии (как изображено на рис. 194) имеем $f = 1$. Реле A включено. Если при этом, не вводя никакого кода (что эквивалентно вводу кода, состоящего из шести нулей), нажать кнопку «Пуск», то замок откроется, в связи с чем это состояние имеет смысл считать нерабочим, т. е. кодовый ключ, состоящий из шести нулей, для данной схемы является исходным и устанавливать его на внутренней стороне двери сейфа нецелесообразно. Но в общем случае это не принципиальное ограничение, т. е. на запрет его применения достаточных оснований нет.

При помощи тумблеров A_1, A_2, ..., A_6 установим какой-либо ненулевой код, например 110010. Тогда

$$A_1 = A_2 = A_5 = 1,$$
$$A_3 = A_4 = A_6 = 0$$

и функция f принимает вид

$$f = (B_1B_2\bar{B}_3\bar{B}_4B_5\bar{B}_6 + A)\bar{\mathrm{C}}.$$

Из этой записи видно, что если одновременно нажать три кнопки B_1, B_2 и B_5 и не нажимать ни одной из других кнопок, то $f = 1$, при этом реле включается, становится на самоблокировку и аргумент A принимает единичное значение. Теперь под действием кнопки «Пуск» сейф откроется.

Схема, приведенная на рис. 194, управляется шестью кнопками. Если ключ неизвестен, то при однократной попытке, случайно нажимая кнопки, сейф можно открыть с вероятностью, равной $1/64$ (если учитывать и нулевой код). Чтобы снизить эту вероятность, достаточно увеличить число кнопок (и тумблеров). Например, при 20 кнопках вероятность случайного ввода «правильного» кода равна $1/1048576$.

В общем случае вероятность случайно открыть сейф равна $1/2^n$, где n — число кнопок на внешней стороне двери.

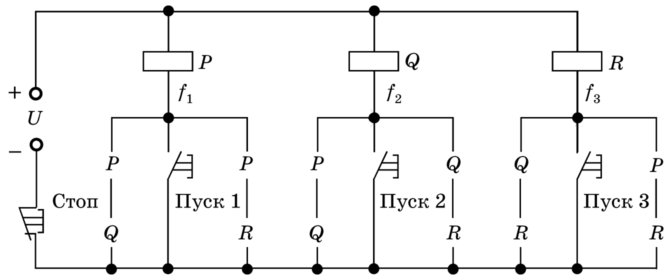


Рис. 195

Пример 6. Три кнопки Π_1 — «Пуск 1», Π_2 — «Пуск 2» и Π_3 — «Пуск 3» управляют тремя реле P, Q, R. Если нажать одну из этих кнопок, то соответствующее реле включается, но на самоблокировку не становится. Если же нажать одновременно любые две кнопки, то соответствующие реле включаются и оба становятся на самоблокировку. При нажатии всех кнопок включаются все три реле и также становятся на самоблокировку. Выключаются реле кнопкой С — «Стоп». Построить схему, работающую согласно перечисленным условиям.

Решение приведено на рис. 195. Символами f_1, f_2, f_3 обозначены функции, моделирующие контактные структуры, управляющие работой каждого из трех реле:

$$f_1(\text{С}, \Pi_1, P, Q, R) = \bar{\text{С}}(\Pi_1 + PQ + PR);$$
$$f_2(\text{С}, \Pi_2, P, Q, R) = \bar{\text{С}}(\Pi_2 + PQ + PR);$$
$$f_3(\text{С}, \Pi_3, P, Q, R) = \bar{\text{С}}(\Pi_3 + PQ + PR),$$

где цепи самоблокировки представлены функциями

$$\lambda_1 = \bar{\text{С}}(PQ + PR);$$
$$\lambda_2 = \bar{\text{С}}(PQ + QR);$$
$$\lambda_3 = \bar{\text{С}}(QR + PR).$$

В исходном состоянии все переменные равны нулю и, следовательно, все реле выключены. Если нажать кнопку «Пуск 1», то включится реле P. Тогда набор значений переменных примет вид:

$$\text{С} = 0, \;\; \Pi_1 = 1, \;\; \Pi_2 = 0, \;\; \Pi_3 = 0,$$
$$P = 1, \;\; Q = 0, \;\; R = 0.$$

На этом наборе получим следующие значения функций:

$$f_1 = 1; \;\; f_2 = 0; \;\; f_3 = 0.$$
$$\lambda_1 = 0; \;\; \lambda_2 = 0; \;\; \lambda_3 = 0.$$

Но цепь самоблокировки не замкнется, так как $\lambda_1 = 0$. Следовательно, после отпускания кнопки «Пуск 1» реле P выключится.

Очевидно, что схема работает точно так же, если нажать только кнопку «Пуск 2» или только кнопку «Пуск 3». В обоих случаях цепи самоблокировки остаются разомкнутыми и реле на самоблокировку не становятся.

Нажмем одновременно две кнопки «Пуск 1» и «Пуск 2». Включатся реле P и Q. Набор значений переменных примет вид:

$$\text{С} = 0,\quad \Pi_1 = 1,\quad \Pi_2 = 1,\quad \Pi_3 = 0,$$
$$P = 1,\quad Q = 1,\quad R = 0.$$

Цепи самоблокировки первых двух реле замкнутся, так как на этом наборе $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, после отпускания кнопок «Пуск 1» и «Пуск 2» реле P и Q останутся во включенном состоянии.

Если нажать одновременно первую и третью кнопки, то реле P и R встанут на самоблокировку, так как при этом $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$. То же самое относится и к реле P и R.

Завершим тему следующим замечанием. С практической точки зрения контактные структуры отличаются многими недостатками. Главными из них являются низкое быстродействие и недостаточно высокая надежность контактных соединений. В связи с этим в настоящее время всюду, где только возможно, контактные схемы стремятся заменять бесконтактными структурами, в которых нет никакого механического перемещения (подобно якорю в электромагнитных реле). Но пока это не всегда удается. Например, мощные электродвигатели (десятки и сотни киловатт) целесообразнее включать при помощи контактов, которые при выключении обеспечивают полный разрыв электрических цепей, в то время как в случае бесконтактных элементов устранение гальванической связи представляет собой серьезную проблему. Изучается эта проблема давно, и хотя уже получены обнадеживающие результаты, до завершения работ еще далеко.

На этом краткое знакомство с контактными структурами закончим. При необходимости в существующей литературе можно найти подробности по любому вопросу, связанному с синтезом релейных схем, их применением и перспективами развития.

17 КОМБИНАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

17.1. ЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В данном разделе рассматриваются сети бесконтактных (электронных) логических элементов, относящихся к классу комбинационных логических схем (структур). В названии «комбинационная схема» отражен тот факт, что выходной сигнал логической структуры полностью определяется комбинацией входных двоичных сигналов. Это значит, что в самой структуре нет никаких запоминающих элементов, которые могли бы привести к различной реакции логической схемы на одни и те же комбинации входных сигналов.

В современных устройствах дискретного действия используется большой набор логических элементов. Однако основными из них являются только три: схема И, схема ИЛИ, схема НЕ (инвертор). Все остальные логические схемы представляют собой различные комбинации этих трех элементов. Из них может быть построен любой комбинационный преобразователь двоичных кодов. Как строить такие преобразователи — это главный вопрос, которому посвящен данный раздел.

17.2. ЭЛЕМЕНТ И

Обратимся к рис. 196. На нем изображено: источник питания U, два переключателя A и B, два резистора R_1 и R_2, два диода V_1 и V_2. Пунктиром обведен логический элемент И, имеющий два входа 1 и 2 и один выход. Переключатели A и B предназначены для подачи двоичных сигналов на входы схемы И. Переключатели выполняют двойную функцию. Во-первых, они используются как запоминающие элементы, т. е. моделируют двоичные логические аргументы. Во-вторых, подают на входы элемента И напряжение, равное нулю либо равное U. Условимся считать, что если $A = 0$, то на вход схемы И подается нулевой (низкий) уровень напряжения. Если же $A = 1$, то подается единичный (высокий) уровень. И наоборот, если напряжение равно нулю, то аргумент A имеет нулевое значение. Если же напряжение принимает значение высокого уровня, то $A = 1$. Эта интерпретация сохраняется в случае всех логических схем, рассматриваемых в данной книге, как комбинационных, так и многотактных, т. е. содержащих запоминающие элементы — триггеры.

На рис. 196 переключатели изображены в нулевом состоянии, то есть на входы элемента И поданы низкие уровни напряжения. Поскольку диоды находятся в проводящем состоянии, то падение напряжения на них равно нулю. Следовательно, $U_{вых}$ также равно нулю. Таким образом, если $A = B = 0$, то $U_{вых} = 0$. Если $U_{вых} = 0$, то говорят: схема заперта.

Пусть $B = 1$. Тогда на вход 2 поступит высокий уровень, равный напряжению источника U. Выходное напряжение останется равным нулю, так как диод V_1 проводит. Переключатель A переведем в единичное положение, а B — в нулевое. Выходное напряжение по-прежнему будет равно нулю, так как через диод V_2 протекает ток. Переведем в единичное положение оба переключателя, то есть примем $A = B = 1$. Выходное напряжение будет равно U. В этом случае говорят: схема открыта.

Буквой f на рис. 196 обозначен выход схемы И. Это функция, зависящая от значений входных сигналов. Как логическая переменная, она может принимать два значения: 0 и 1. Условимся считать, что ее нулевому значению соответствует низкий уровень напряжения, а единичному — высокий.

В табл. 22 для каждого набора значений аргументов указаны логические значения выходного сигнала (колонка f). В колонке $U_{вых}$ даны значения выходного напряжения. Из таблицы видно, что элемент И реализует операцию конъюнкции.

Логический элемент И принято обозначать так, как показано на рис. 197. Буквы A и B обозначают входные сигналы, f — выходной сигнал элемента И.

Мы рассмотрели элемент И с двумя входами. В общем случае, как это видно из рис. 196, число входов может быть увеличено путем присоединения дополнительных диодов аналогично первым двум входам (т. е. анодами к выходу схемы И). Например, на рис. 198 изображен логический элемент с четырьмя входами, реализующий конъюнкцию вида

$$f = ABCD.$$

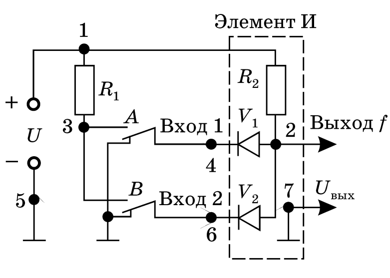


Рис. 196

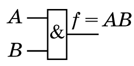


Рис. 197

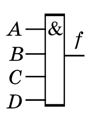


Рис. 198

Таблица 22

A	B	f	$U_{вых}$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	U

Упражнения

1. Пусть на рис. 196 $U = 5$ В. Определите напряжение (в вольтах) между точками схемы (при $A = B = 0$):

1) (73Р)! 1–6; 1–2; 2–7;
2) (БЛВ)! 5–6; 2–5; 1–3;
3) (ЯЦТ)! 1–7; 1–4; 2–4;
4) (62У)! 1–5; 3–2; 2–6;
5) (58Е)! 3–4; 3–5; 3–6;
6) (ЛВХ)! 3–7; 4–5; 4–6.

2. При $U = 5$ В и $A = 1$, $B = 0$ (рис. 196) определите напряжение между точками:

1) (323)! 3–5; 3–6; 2–6; 2–4; 2–7;
2) (ФИИ)! 4–6; 5–7; 6–7; 3–7; 1–2.

3. (ТОК)! Чему равно выходное напряжение на схеме логического элемента И (рис. 196) при $U = 5$ В, если $A = B = 0$? $A = B = 1$? $A = 0, B = 1$? $A = 1, B = 0$?

17.3. ЭЛЕМЕНТ ИЛИ

Обратимся к рис. 199, на котором приведена логическая схема ИЛИ с двумя входами. Переключатели изображены в нулевом положении, т. е. $A = B = 0$. По схеме видно, что при этом и $f = 0$.

Переведем в единичное положение переключатель B. Тогда диод V_2 окажется в проводящем состоянии. Если $R_2 \gg R_1$, то выходное напряжение практически равно U, что соответствует высокому уровню напряжения и, следовательно, $f = 1$.

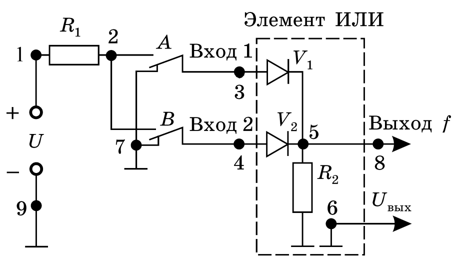


Рис. 199

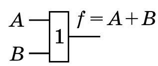


Рис. 200

Таблица 23

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Вернем переключатель B в нулевое положение, а переключатель A переведем в единичное. Очевидно, что и в этом случае $f = 1$.

Если в единичное положение перевести оба переключателя, то по-прежнему выходное напряжение будет иметь высокий уровень.

В табл. 23 каждому из четырех наборов значений аргументов поставлено в соответствие состояние выхода элемента ИЛИ. Из таблицы видно, что схема ИЛИ реализует логическую операцию дизъюнкции.

Двухвходовую схему ИЛИ принято обозначать так, как показано на рис. 200.

В общем случае схема ИЛИ, как и логический элемент И, может иметь любое число входов, но не менее двух.

Упражнения

1. Пусть на рис. 199 $U = 5$ В. Определите напряжение между точками при $A = B = 0$:

1) (УАК)! 1–2; 1–7; 1–5; 1–8;   3) (ДЕМ)! 2–6; 3–4; 8–6; 6–9;

2) (УПЛ)! 2–5; 2–7; 3–5; 8–5;   4) (ОВН)! 5–7; 2–9; 2–8; 2–3.

2. При $U = 10$ В, $A = 1$, $B = 0$, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 90$ Ом (рис. 199) определите напряжение между точками:

1) (КММ)! 1–2; 5–7; 1–5; 1–6; 1–8;

2) (ШОН)! 2–7; 1–3; 1–4; 2–3; 2–4;

3) (МЯО)! 2–5; 2–6; 2–8; 5–6; 3–6;

4) (АЗЯ)! 5–9; 8–7; 8–6; 8–9; 5–4.

3. (АИР)! Чему равно выходное напряжение схемы ИЛИ (рис. 199) при

$$U = 10 \text{ В}, R_1 = 10 \text{ Ом}, R_2 = 90 \text{ Ом},$$

если $A = B = 0$? $A = 1, B = 0$? $A = 0, B = 1$? $A = B = 1$?

17.4. ИНВЕРТОР И СХЕМА И–НЕ

Принципиальная схема инвертора — логического элемента НЕ — приведена на рис. 201 (обведена пунктирным контуром). По схеме видно, что при $A = 0$ (как изображено на рис. 201) ток через базу не протекает и транзистор заперт. Следовательно, выходное напряжение $U_{\text{вых}} = U$, т. е. при $A = 0$ имеем $f = 1$.

Переведем переключатель A в единичное положение, т. е. примем $A = 1$. Ток, протекающий от источника U через токоограничивающий резистор R_1 и базу, поддерживает транзистор в открытом (проводящем) состоянии. Падение напряжения на открытом транзисторе можно считать равным нулю. Следовательно, $f = 0$, если $A = 1$. Таким образом, инвертор реализует булеву функцию

$$f = \overline{A}.$$

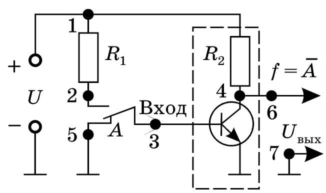


Рис. 201

На рис. 202, *а* показано обозначение инвертора. Очевидно, что инвертор может быть только одновходовым элементом.

Из более сложных логических схем рассмотрим элемент И–НЕ (см. рис. 202, *б*).

Буквами A и B обозначены входы (входные сигналы) элемента И. Выход элемента И подключен к входу инвертора. В результате получился элемент, реализующий булеву функцию $f = \overline{AB}$. Эту схему называют **элементом Шеффера**. На рис. 202, *в* изображена та же схема И–НЕ с использованием условных обозначений элементов И и НЕ, а на рис. 202, *г* — в виде одного элемента И–НЕ.

На схемах И–НЕ можно построить электронный запоминающий элемент — триггер (см. рис. 202, *д*), имеющий два устойчивых состояния, условно названных нулевое и единичное. Триггеры, как и двухпозиционные

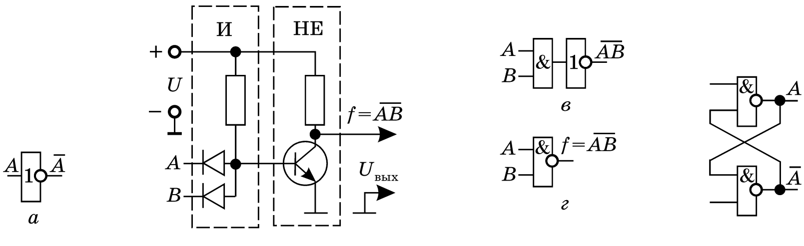


Рис. 202

переключатели, используются в комбинационных схемах для физического моделирования логических аргументов, в связи с чем все переключатели на рис. 196, 199, 201 можно заменить триггерами. Для комбинационных схем триггер не является основным элементом, так как его роль сводится лишь к хранению значений логических аргументов, поэтому в данном разделе триггеры не рассматриваются. Вся информация о триггерах, наиболее важная с логической точки зрения, приведена в разделе, посвященном многотактным схемам, в которых триггерам отводится ведущая роль.

Упражнения

1. Вставьте пропущенные числа (рис. 201; $U = 6$ В):

1) (ЯШС) если $A = 0$, то $U_{\text{вх}} = ...$ В; $U_{\text{вых}} = ...$ В;

2) (55С) если $A = 1$, то $U_{1-4} = ...$ В; $U_{\text{вых}} = ...$ В.

2. Пусть $U = 6$ В (рис. 201). Определите напряжение между точками (при $A = 0$):

1) (983) 1–2, 1–4, 1–7, 6–7;
2) (934) 2–3, 4–3, 4–7, 5–7;
3) (АУ6) 1–6, 1–5, 4–7, 2–4, 2–6;
4) (КЕЛ) 3–5, 3–7, 4–6, 2–7, 2–5.

3. Пусть $U = 7$ В, $A = 1$ (рис. 201). Определите напряжение между точками:

1) (КВМ) 1–4, 2–4, 6–7, 3–4, 2–7;
2) (ХЛК) 2–5, 2–3, 1–7, 1–3, 1–6;
3) (ИРО) 4–7, 2–6, 3–6, 3–7, 6–7.
4) (63П) 3–5, 5–7, 5–6, 1–2, 1–5.

17.5. ПОНЯТИЕ СУПЕРПОЗИЦИИ

На рис. 196, 199, 201 сигналы на входы логических элементов поступают с выходов переключателей, формирующих нулевые и единичные уровни напряжения. Однако, как уже упоминалось, на входы элементов сигналы можно подавать и с выходов таких же логических схем (рис. 202, *в*).

Рассмотрим два логических элемента (рис. 203), реализующих булевы функции вида

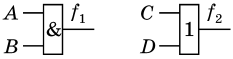


Рис. 203

$$f_1 = AB; \quad f_2 = C + D.$$

Заметим, что в данном случае A, B, C, D — это логические аргументы, физически представленные триггерами (рис. 202, *д*) либо переключателями, как на рис. 196 и 199. Отключим от выхода триггера C (рис. 203) вход элемента ИЛИ и присоединим его к выходу элемента И. Математически это обозначает подстановку функции f_1 вместо аргумента C. Получим новую функцию: $f_3 = AB + D$, логическая схема которой приведена на рис. 204.

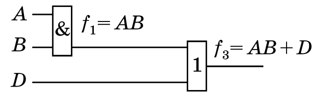


Рис. 204

Функцию f_3 также можно изменить, подставив вместо какого-либо аргумента другую функцию. Подставим, например, вместо аргумента B функцию

$$f = C + E.$$

Тогда получим новую функцию f_4, не совпадающую с функцией f_3:

$$f_4 = A(C + E) + D.$$

Таким образом, новые функции можно получать путем подстановки вместо аргументов других булевых выражений, в том числе и таких как:

$$f = 1; \quad f = 0; \quad f = A; \quad f = B; \quad f = \overline{C} \text{ и т. д.}$$

Подстановка в функцию вместо ее аргументов других функций называется **суперпозицией.** Очевидно, что при помощи операции суперпозиции из всякой функции можно получить любую другую, если на выбор функций, используемых для подстановки, ограничений нет. Пусть, например, из функции

$$f_1 = A + BCD + EF$$

требуется получить функцию

$$f_2 = PQR + \overline{AC}.$$

Подставим P вместо B, Q вместо C, R вместо D, 0 вместо A, 1 вместо F. Тогда получим

$$f_3 = PQR + E.$$

В этом выражении сделаем подстановку $\overline{A}$ вместо E:

$$f_4 = PQR + \overline{A}.$$

Вместо A подставляем AC и получаем окончательно:

$$f_5 = PQR + \overline{AC}.$$

Упражнения

1. (58.ИИ). Запишите выражение $f_3 = ...$, которое получится в результате подстановки функции $f_2 = CD$ вместо аргумента C функции $f_1 = AB + C$.

2. (ШС.45). Найдите минимальную ДНФ функции f_3, которая получится на основе функции $f_1 = AB + CD$, если в нее вместо аргумента D подставить функцию $f_2 = A\overline{B}$.

3. (ВКТ). Дана функция $f_1 = AB + BC + CD$. Подставим в нее вместо аргумента C функцию $f_2 = AB$. Найдите минимальную форму получившейся функции f_3.

4. (Б61). Дана функция $f_1 = AB + \overline{B}C\,D + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$. Вместо аргумента D в эту функцию подставили аргумент C. Получили функцию f_2. Укажите номера функций, тождественно равных функции f_2:

1) $f = AB + \overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}$;
2) $f = B\overline{C} + AC + \overline{A}\overline{B}$;
3) $f = AB + B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}$;
4) $f = AB + AC + \overline{A}\,\overline{B} + B\overline{C}$;
5) $f = (A + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$;
6) $f = (A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + C)$;
7) $f = (\overline{A} + B + C)(A + \overline{B} + \overline{C})$;
8) $f = (\overline{A} + \overline{B} + C)(A + B + \overline{C})$.

17.6. О НАГРУЗОЧНОЙ СПОСОБНОСТИ ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

На рис. 204 нагрузкой элемента И является вход элемента ИЛИ. Выход схемы И по нагрузочной способности отличается от контактного переключателя. Если сопротивление резистора R_1 принять равным нулю (рис. 196), то контактный переключатель всегда обеспечит два уровня напряжения — 0 и U — независимо от нагрузки. Но в схеме И имеется резистор, удалить который невозможно. Не изменится ли при этом высокий (или низкий) уровень выходного напряжения схемы ИЛИ? Чтобы разобраться в этом вопросе, изобразим логическую схему, приведенную на рис. 204, в расшифрованном виде (рис. 205).

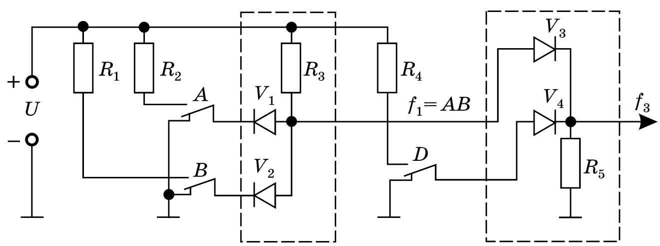


Рис. 205

Если $A = B = 0$, либо $A = 0$, $B = 1$, либо $A = 1$, $B = 0$, то при $D = 1$ на выходе f_3 получим высокий уровень, но при условии, что $R_5 \gg R_4$. Пусть $A = B = 1$. Так как сопротивление резистора R_3 не может быть равным нулю, то необходимо принять $R_5 \gg R_3$. Лишь в этом случае выходное напряжение элемента ИЛИ будет мало отличаться от величины U.

Таким образом, если нагрузкой элемента И является элемент ИЛИ, то вся схема работает согласно соответствующей булевой функции, но при условии, что сопротивление резистора схемы ИЛИ многократно превышает сопротивление резистора элемента И.

В принципе, сопротивления резисторов R_5 и R_3 могут быть и равными. При этом схема (рис. 205) будет работать также в соответствии с функцией $f_3 = AB + D$, но только в том случае, если значение высокого уровня выходного сигнала принять равным $U/2$.

Теперь рассмотрим другой вариант соединения тех же элементов. Пусть даны два логических элемента (рис. 203). Соответствующие им булевы функции имеют вид:

$$f_1 = AB; \quad f_2 = C + D.$$

Применим к ним операцию суперпозиции следующим образом: вместо аргумента B подставим функцию f_2. Тогда получим новую функцию

$$f_3 = A(C + D).$$

Логическая схема ее приведена на рис. 206. Изобразим эту же схему в расшифрованном виде (рис. 207).

Пусть $C = D = 0$, $A = 1$, тогда функция f_3 примет нулевое значение. Очевидно, что при этом выходное напряжение (рис. 207) должно быть равно нулю. А на самом деле?

Диоды V_1 и V_2 не проводят, так как переключатели C и D находятся в нулевом состоянии. Не проводит и диод V_4, так как $A = 1$. В проводящем состоянии находится только диод V_3. Резисторы R_4 и R_5 образуют делитель напряжения. Если принять за основу положение о том, что, как было сказано выше, сопротивление резистора схемы ИЛИ должно быть во много раз больше сопротивления резистора схемы И, то для данного делителя необходимо принять $R_5 \gg R_4$. Но в этом случае при $C = D = 0$ и $A = 1$ выходной сигнал $U_{\text{вых}}$ вместо нулевого примет единичное значение.

Можно считать, что значение высокого уровня напряжения равно $U/2$. Тогда сопротивления всех резисторов (рис. 207) могут быть равными между собой. Нетрудно убедиться, что и в этом случае при $C = D = 0$ и $A = 1$ выходной сигнал принимает единичное значение (вместо нулевого).

Таким образом, логические элементы И (рис. 196) и ИЛИ (рис. 199) не могут быть использованы для построения любых комбинационных схем из-за недостаточной нагрузочной способности этих элементов. Для повышения нагрузочной способности в схему каждого элемента включают дополнительные цепи в виде усилительных устройств, обеспечивающих возможность соединения логических элементов в любых сочетаниях. Проиллюстрируем это на примере элемента ИЛИ. На рис. 208 изображен трехвходовой элемент ИЛИ, к выходу которого подключен усилитель на двух транзисторах. В принципе, достаточно и одного транзистора. Но в этом случае мы получим отрицание дизъюнкции. Благодаря второму транзистору отрицание дизъюнкции инвертируется, в результате чего получается «чистая» дизъюнкция. Если на

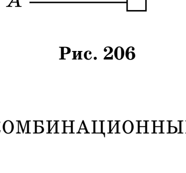


Рис. 206

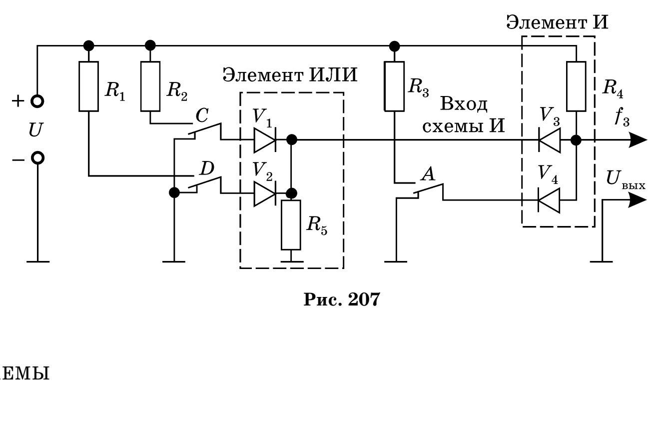


Рис. 207

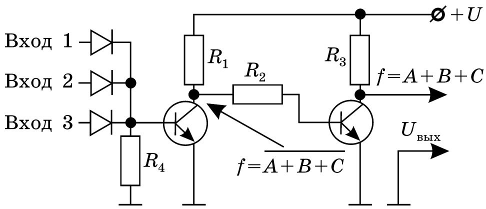


Рис. 208

всех трех входах элемента ИЛИ поддерживается низкий (равный нулю) уровень напряжения, то первый транзистор заперт, поскольку ток через его базу не протекает. Второй транзистор открыт, так как через его базу протекает ток, ограничиваемый резисторами R_1 и R_2. Выходное напряжение равно падению напряжения на проводящем транзисторе (практически оно равно нулю). Если на какой-либо из входов подать высокий уровень, то первый транзистор откроется. На его выходе напряжение станет почти равным нулю, вследствие чего второй транзистор окажется запертым и выходное напряжение будет равным U.

Если вместо элемента ИЛИ (рис. 207) включить схему, приведенную на рис. 208, то при $C = D = 0$ и $A = 1$ второй транзистор будет открыт и диод V_3 окажется в проводящем состоянии. Тогда получаем: $U_{\text{вых}} = 0$; $f_3 = 0$, что полностью соответствует булевой функции

$$f_3 = A(C + D).$$

Благодаря усилительным каскадам на выход каждого логического элемента можно подключать не один, а несколько элементов, но не более некоторого числа, характеризующего максимальную нагрузочную способность данного элемента.

17.7. КОМБИНАЦИОННЫЕ СХЕМЫ И БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ ДНФ И КНФ

В подразделе 16.2 показано, что на основе всякой булевой функции можно построить контактную структуру в классе параллельно-последовательных схем. Точно так же всякую булеву функцию можно представить в виде комбинационной схемы, используя логические элементы И, ИЛИ, НЕ (с усилительными каскадами). Пусть дана некоторая булева функция, например:

$$f = BC + DEF + \overline{B}\,\overline{C} + A. \tag{1}$$

Можно предположить, что она получена на основе выражения

$$f = P + Q + R + A,$$

где $P = BC$; $Q = DEF$; $R = \overline{B}\overline{C}$, путем подстановки конъюнкции BC вместо P, DEF вместо Q, $\overline{B}\overline{C}$ вместо R.

В соответствии с операцией суперпозиции выход элемента И, реализующего конъюнкцию BC, подключаем ко входу элемента ИЛИ, реализующего дизъюнкцию

$$P + Q + R + A.$$

Ко второму и третьему входам схемы ИЛИ подключаем выходы элементов И, которым соответствуют выражения DEF и $\overline{B}\,\overline{C}$. Четвертый вход схемы ИЛИ подключается к устройству, моделирующему логическую переменную A.

В выражении (1) две переменные являются инверсными. Если устройства, моделирующие логические переменные, не имеют инверсных выходов, то для реализации операции отрицания необходимо использовать инверторы (рис. 201). Однако в схемах триггеров обычно предусматривают парафазные выходы — прямой и инверсный (рис. 202, *д*). На одном из них — высокий уровень, на втором — низкий. При смене состояния триггера уровни меняются местами. То же самое нетрудно сделать и при помощи переключателей. На рис. 209 показан сдвоенный переключатель, моделирующий переменную B. Переключатель изображен в нулевом состоянии. При этом на неинверсном выходе поддерживается низкий уровень, а на выходе $\bar{B}$ (инверсном) — высокий. Если переключатель перевести в единичное состояние, то высокий уровень окажется на выходе B, а низкий — на выходе $\bar{B}$. В дальнейшем будем считать, что парафазные выходы имеет каждый двоичный запоминающий элемент.

На рис. 210, *а* изображена схема, реализующая булеву функцию (1). На рис. 210, *б* приведена та же схема, но в более компактном представлении. На схеме не показаны переключатели, моделирующие логические переменные, указаны лишь обозначающие их буквы. Подобные обозначения использованы на рис. 203, 204, 206. Еще раз отметим, что эти буквы обозначают устройства, моделирующие логические переменные, и служат адресами, показывающими, куда должны быть подключены те или иные входы комбинационной схемы. Например, первый сверху вход схемы (рис. 210, *а*) обозначен буквой B. Это значит, что его необходимо подключить к неинверсному выходу устройства, моделирующего переменную B. Им может быть переключатель (рис. 209) или триггер (рис. 202, *д*). Подобными обозначениями мы будем пользоваться и в дальнейшем.

На рис. 210 приведена схема, реализующая булеву функцию, представленную в ДНФ. Аналогичным образом можно построить логическую схему на основе КНФ.

Проиллюстрируем это на примере следующего выражения:

$$f = (A + B)(C + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + D)EF. \tag{2}$$

Введем промежуточные обозначения:

$$P = A + B; \qquad Q = C + \bar{D}; \qquad R = \bar{A} + \bar{B} + D. \tag{3}$$

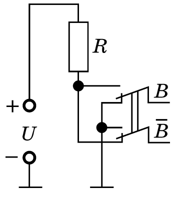
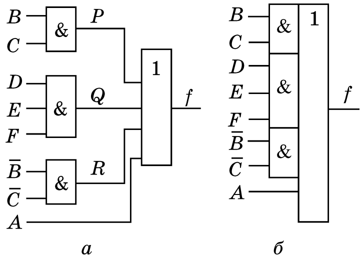
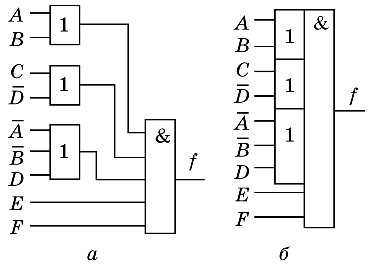


Рис. 209



а *б*

Рис. 210



а *б*

Рис. 211

Тогда функция (2) представится в виде $f = PQREF$. Это выражение, а также функции (3) реализуются отдельными логическими элементами. Применив к ним операцию суперпозиции, получим заданную функцию и соответствующую ей комбинационную схему (см. рис. 211, *а*). Эта же схема приведена на рис. 211, *б*, но в более компактном представлении.

17.8. КОМБИНАЦИОННЫЕ СХЕМЫ И БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Если булева функция представлена в форме высшего порядка, то при помощи системы подстановок можно также однозначно построить соответствующую логическую схему. Проиллюстрируем это на примере функции

$$f = A + B(C + DE).$$

Запишем ее в виде $f = A + \varphi_1$, где $\varphi_1 = B(C + DE)$.

Очевидно, что хотя полученное выражение $A + \varphi_1$ может быть представлено отдельным логическим элементом, изобразить схему мы не можем, так как неизвестно, откуда взять выход φ_1. Поэтому введем новое обозначение:

$$\varphi_1 = B\varphi_2, \text{ где } \varphi_2 = C + DE.$$

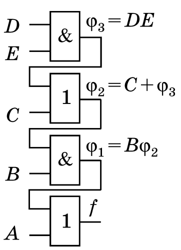


Рис. 212

И в этом случае схему построить невозможно, поскольку неизвестно, что такое φ_2. Продолжим обозначения:

$$\varphi_2 = C + \varphi_3, \text{ где } \varphi_3 = DE.$$

Начинать построение схемы можно лишь с того выражения, в котором нет знаков для промежуточных обозначений. В данном случае это выражение $\varphi_3 = DE$. С этой конъюнкции и начинаем изображать схему. Двигаясь в обратном направлении по системе обозначений, строим всю искомую комбинационную схему (рис. 212).

Рассмотрим более сложную функцию:

$$f = [\overline{(AB + \bar{A}\,\bar{B})C\bar{D}E + AC} + BD]DEF + \bar{D}\,\bar{F}. \qquad (4)$$

Система обозначений имеет вид:

$$f = \varphi_1 + \varphi_2, \text{ где } \varphi_1 = [\overline{(AB + \bar{A}\,\bar{B})C\bar{D}E + AC} + BD]DEF; \quad \varphi_2 = \bar{D}\,\bar{F}.$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 DEF, \text{ где } \varphi_3 = \overline{(AB + \bar{A}\,\bar{B})C\bar{D}E + AC} + BD.$$

$$\varphi_3 = \varphi_4 + \varphi_5, \text{ где } \varphi_4 = \overline{(AB + \bar{A}\,\bar{B})C\bar{D}E + AC}; \quad \varphi_5 = BD.$$

$$\varphi_4 = \bar{\varphi}_6, \text{ где } \varphi_6 = (AB + \bar{A}\,\bar{B})C\bar{D}E + AC.$$

$$\varphi_6 = \varphi_7 + \varphi_8, \text{ где } \varphi_7 = (AB + \bar{A}\,\bar{B})C\bar{D}E; \quad \varphi_8 = AC.$$

$$\varphi_7 = \varphi_9 C\bar{D}E, \text{ где } \varphi_9 = AB + \bar{A}\,\bar{B}.$$

$$\varphi_9 = \varphi_{10} + \varphi_{11}, \text{ где } \varphi_{10} = AB; \quad \varphi_{11} = \bar{A}\bar{B}.$$

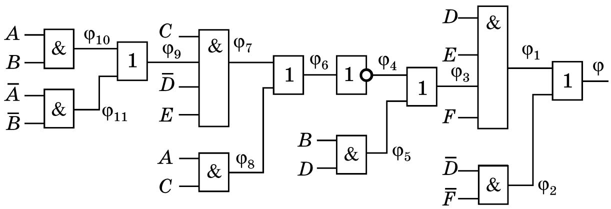


Рис. 213

Комбинационная схема, построенная в соответствии с этой системой подстановок, приведена на рис. 213.

В аналитической записи функции (4) некоторые аргументы повторяются по два раза. Это A, B, C, D, $\bar{D}$, E. На рис. 213 эти буквы также повторяются по два раза.

Например, буква A обозначает входной сигнал для двух элементов И: φ_8 и φ_{10}. Следовательно, оба входа, обозначенные буквой A, должны быть подключены к выходу одного и того же запоминающего устройства A, т. е. элемент A нагружен на две логические схемы И. То же самое относится и к запоминающим элементам B, C, D, E, причем элемент D нагружен на две схемы И по прямому выходу и на две схемы И — по инверсному.

В предыдущем разделе сказано, что существуют параллельно-последовательные контактные структуры и мостиковые. Каждой из них соответствует вполне определенная булева функция. Но на основе заданной функции можно построить только параллельно-последовательную схему. Мостиковые структуры образуют особый класс. Для их построения необходимо разрабатывать специальные методы. Бесконтактные логические схемы гораздо проще, так как в них нет аналога мостиковым контактным структурам. В этом состоит одно из самых существенных отличий контактных структур от бесконтактных комбинационных схем.

Упражнения

1. Сколько элементов И и сколько элементов ИЛИ необходимо для построения комбинационной схемы на основе булевой функции (число входов логических элементов не ограничено):

1) (ЯК1). $f = ABC + DE + P$?
2) (МУЗ). $f = A(B + C)D + Q$?
3) (НЫХ). $f = A(B + CD) + EF + Q$?
4) (344). $f = (A + B + C)(D + E + PQ) + R$?

2. Сколько элементов И, сколько элементов ИЛИ и сколько инверторов необходимо для построения комбинационной схемы на основе булевой функции вида:

1) (541). $f = \overline{\overline{A+\overline{B}}+P+Q}+\overline{A+C}$?

2) (ЛЕХ). $f = \overline{A+B+C}\,D+\bar{A}+\overline{\bar{B}+\bar{C}+D}$?

3) (2ПЕ). $f = \overline{AB+C}\,D\,E+\overline{A+BCE}$?

4) (533). $f = \overline{\overline{\overline{ABC}D}E}+\overline{PQ}$?

3. Найдите булеву функцию f по комбинационной схеме, приведенной на рис. 214.

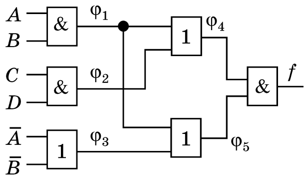


Рис. 214

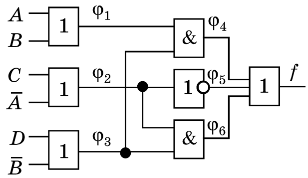


Рис. 215

1) (ТЯМ). Перечислите номера ее минтермов.

2) (РЫН). Для минимальной ДНФ функции определите:

- число простых импликант;
- число вхождений аргументов;
- число инверсных аргументов.

3) (620). Для минимальной ДНФ инверсии функции определите:

- число простых импликант;
- число вхождений аргументов;
- число инверсных аргументов.

4. (ЕКУ). Какие значения (0 или 1) принимает функция f (рис. 212) на наборах 0, 3, 8, 12, 15, 20, 31?

5. (ТСС). По схеме, приведенной на рис. 214, найдите минимальную ДНФ функции φ_5.

6. (ЕНН). По схеме, приведенной на рис. 215, найдите минимальную ДНФ функции φ_5.

7. (529). Для минимальной ДНФ функции φ_4 (рис. 215) определите: число простых импликант, число вхождений аргументов и число инверсных аргументов.

8. (МИН). Укажите десятичные номера наборов значений аргументов A, B, C, D, на которых выходной сигнал f (рис. 215) принимает нулевое значение.

17.9. ЛОГИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ

Логическое проектирование комбинационных схем обычно сводится к построению таблиц соответствия и нахождению минимальных форм булевых функций, на основе которых строится комбинационная схема. При переходе к реальным логическим элементам необходимо учитывать их ограничения по таким характеристикам, как число входов, нагрузочная способность, быстродействие и др. Учет этих ограничений осуществляется путем преобразования булевых функций, описывающих работу проектируемой схемы.

Самым трудоемким является этап логического проектирования, заканчивающийся построением комбинационной схемы без учета особенностей реальных логических элементов. Процесс логического проектирования комбинационных схем проиллюстрируем на нескольких простых примерах, после чего перейдем к более сложным схемам.

Пример 1. На рис. 216 приведена схема, состоящая из двух блоков — двоичного регистра и комбинационной схемы. **Двоичный регистр** — это набор двоичных запоминающих элементов, при помощи которых хранят двоичные числа. Как уже упоминалось, для хранения двоичных чисел можно применять контактные элементы — двухпозиционные переключатели и электронные — триггеры.

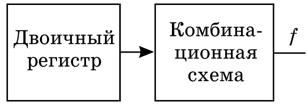


Рис. 216

Допустим, что в качестве запоминающих элементов используются переключатели (см. рис. 209), моделирующие триггеры с парафазными выходами (см. рис. 202, *д*).

Поставим в соответствие каждому переключателю двоичный разряд и сформулируем задачу для разработки комбинационной схемы: единичный сигнал (высокий уровень напряжения) на выходе f появляется в том случае, когда число N, занесенное в регистр, является простым, при этом $N < 14$.

Строим таблицу соответствия. Наибольшее число, которое может находиться в регистре, равно 13. В двоичном виде — это четырехзначный код. Следовательно, необходим четырехразрядный двоичный регистр.

Обозначим элементы регистра буквами A, B, C, D, где элемент A — старший разряд четырехзначного двоичного числа, а D — младший. Озаглавим этими буквами колонки в таблице соответствия (табл. 24) и перечислим в ней все 16 наборов значений аргументов. Слева расположим еще одну колонку. В ней запишем десятичные эквиваленты двоичных номеров строк. Правую колонку обозначим буквой f. Это функция, которую требуется найти. Обозначим единицами в колонке f простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13. В строках 14 и 15 ставим крестики, так как эти числа в регистр никогда записываться не будут (по условию).

Таблица 24

	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	×
15	1	1	1	1	×

Таблица 25

	A	B	C	D	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	1
2	0	0	1	0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	0	0	1
6	0	1	1	0	1	0	1	0
7	0	1	1	1	1	0	1	1
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	1	1	1	0
11	1	0	1	1	1	1	1	1
12	1	1	0	0	×	×	×	×
13	1	1	0	1	×	×	×	×
14	1	1	1	0	×	×	×	×
15	1	1	1	1	×	×	×	×

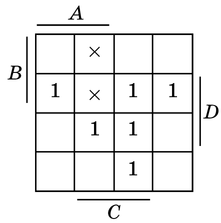


Рис. 217

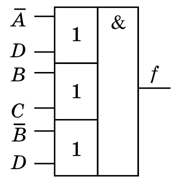


Рис. 218

По карте Вейча (рис. 217) получаем:

$$f = BD + CD + \bar{A}\,\bar{B}C.$$

Минимальная ДНФ содержит семь букв. Она получена при следующем доопределении: на наборе 1110 значение функции равно нулю, на наборе 1111 — единице.

Минимальная КНФ (найденная также с учетом неопределенных состояний) имеет вид

$$f = (\bar{A} + D)(B + C)(\bar{B} + D).$$

Минимальная КНФ экономичнее (содержит шесть вхождений аргументов), поэтому ее будем считать решением данной задачи. Соответствующая комбинационная схема приведена на рис. 218.

Пример 2. Комбинационная схема может иметь несколько выходов. В этом случае каждому выходу ставится в соответствие отдельная булева функция. Пусть требуется построить преобразователь двоичного числа $N < 12$ в выходное число вида $N + 4$ (также представленное в двоичной системе). Наибольшее выходное двоичное число имеет вид 1111, следовательно, в комбинационной схеме необходимо предусмотреть четыре выхода.

Строим таблицу соответствия (см. табл. 25). В отличие от предыдущего примера в данном случае правая часть таблицы содержит четыре колонки, обозначенные символами f_1, f_2, f_3, f_4, где f_1 соответствует старшему разряду выходного числа, f_4 — младшему. В табл. 25 состояния 12, 13, 14, 15 обозначены крестиками. На этих состояниях все функции не определены. При помощи карт Вейча (рис. 219) находим минимальные формы искомых функций:

$$f_1 = A + B; \quad f_2 = \bar{B}; \quad f_3 = C; \quad f_4 = D.$$

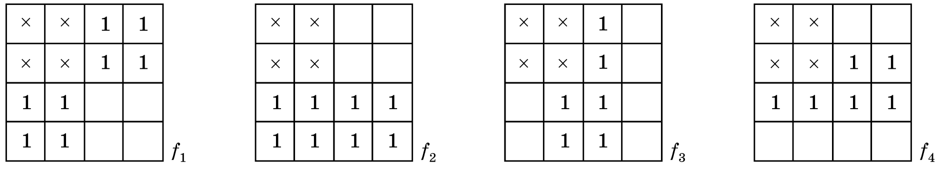


Рис. 219

Комбинационная схема приведена на рис. 220. Очень интересная получилась схема. Для ее реализации достаточно одного логического элемента ИЛИ, содержащего два входа. Это выход, представленный функцией f_1. Все остальные функции не требуют для своей реализации никакого оборудования (кроме проводников), т. е. выходные сигналы снимаются непосредственно с выходов соответствующих запоминающих элементов.

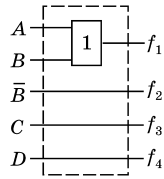


Рис. 220

Упражнения

1. Постройте преобразователь числа N в выходное число $N + 6$, где $N = 0, 1, 2, ..., 9$.

1) (АЙФ). Сколько двоичных разрядов содержится во входном числе и сколько в выходном?

2) (132). Какие числа не могут появиться на выходе комбинационной схемы? Назовите их (в десятичной системе).

3) (ФЯЗ). Какие числа не будут подаваться на вход схемы? Назовите их (в десятичной системе).

4) (454). Сколько существует наборов значений аргументов, на которых выходные функции не определены?

2. Найдите минимальные ДНФ функций (см. предыдущее упр.), если функции f_1 соответствует старший разряд выходного двоичного числа (см. предыдущее упр.):

1) (А15) f_1; 2) (11.СИ) f_2; 3) (ХВЛ) f_3; 4) (АЛИ) f_4.

17.10. СИНТЕЗ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ДВОИЧНОГО ЧИСЛА В КОД «2 ИЗ 5»

В названии выходного кода отражена его структура: код состоит из пяти двоичных разрядов, причем в каждом коде содержится две единицы и три нуля. Всего существует 10 кодов «2 из 5», следовательно, $N < 10$, где N — входное четырехзначное двоичное число.

Строим таблицу соответствия (табл. 26). В левой ее части перечислены 10 входных двоичных чисел. В правой части указаны коды «2 из 5», расположенные в порядке возрастания, если их рассматривать как обычные двоичные числа. (В общем случае между входными двоичными и выходными кодами «2 из 5» может быть установлено любое соответствие. В табл. 26 указано одно из них.) Так как кодов «2 из 5» существует всего только 10, то шесть входных двоичных чисел являются неиспользуемыми. Состояния 10, 11, 12, 13, 14 и 15 при минимизации можно рассматривать как неопределенные.

Рассмотрим колонку f_1. В ней четыре единицы. Наносим эти единицы на карту Вейча (рис. 221). На эту же карту наносим неопределенные состояния, обозначив их крестиками. Доопределив функцию единицами и упростив, получаем ее минимальную ДНФ:

$$f_1 = A + BC.$$

Таблица 26

	A	B	C	D	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	0	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	0	0

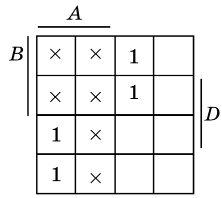


Рис. 221

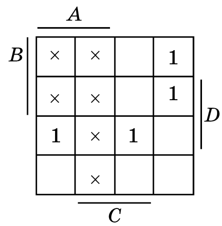


Рис. 222

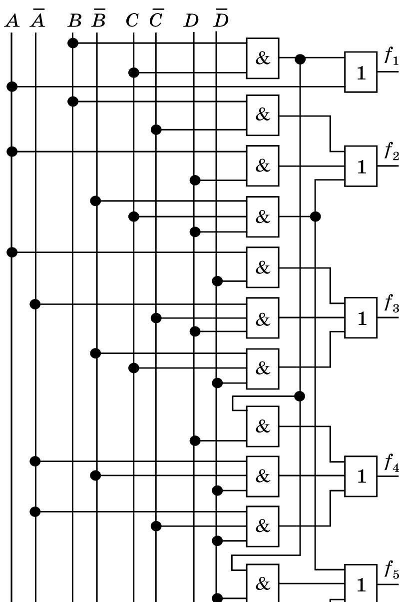


Рис. 223

Наносим на карту Вейча (рис. 222) вторую функцию (неопределенными являются те же состояния). После минимизации получаем:

$$f_2 = AD + B\bar{C} + \bar{B}CD.$$

Аналогично находим остальные три функции:

$$f_3 = A\bar{D} + \bar{A}\,\bar{C}D + \bar{B}C\bar{D};$$

$$f_4 = BCD + \bar{A}\,\bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D};$$

$$f_5 = BC\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{B}CD.$$

На рис. 223 приведена комбинационная схема преобразователя. Заметим, что функции f_2 и f_5 содержат конъюнкцию $\bar{B}CD$. Эту конъюнкцию достаточно реализовать один раз, а использовать дважды так, как показано на рис. 223. На схеме есть еще один элемент, выход которого также используется неоднократно. Это элемент И, реализующий конъюнкцию BC. В результате ее трехкратного использования число логических элементов не уменьшилось, но некоторая экономия все же достигнута: заменены двухвходовыми элементами два трехвходовых элемента И (BCD и $BC\bar{D}$).

Необходимо отметить, что порядок функций f_4 и f_5 повысился и стал равным трем. Это допустимо, если от комбинационной схемы не требуется предельно высокого быстродействия. Если же требование быстродействия является основным, то неоднократно использовать можно лишь те фрагменты схемы, которые не приводят к повышению порядка, например, как в случае конъюнкции $\bar{B}CD$ (рис. 223).

Упражнения

1. Какое двоичное число подано на вход схемы (рис. 223), если выходное число в десятичном представлении равно:

1) (Б21) 10? 2) (ТЫХ) 12? 3) (457) 17? 4) (868) 24?

2. На рис. 223 дан преобразователь двоичного числа в код «2 из 5», работающий в соответствии с табл. 26. Постройте обратный преобразователь. На его входы подаются двоичные коды типа «2 из 5», т. е. числа (в десятичном представлении): 3, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24. На выходе получаются двоичные числа, соответственно: 0000, 0001, 0010, ..., 1001. Числа, не относящиеся к кодам «2 из 5», на вход преобразователя подаваться не будут, т. е. их можно рассматривать как неопределенные состояния. Запоминающие элементы для хранения кодов «2 из 5» обозначьте буквами A, B, C, D, E, выходы схемы — f_1, f_2, f_3, f_4, где f_1 — выход, соответствующий старшему разряду выходного числа.

1) (АНЕ)! Сколько двоичных разрядов имеет входное число и сколько — выходное?

2) (НИХ). Сколько существует состояний, на которых функции, описывающие схему преобразователя, не определены?

17.11. ПОЛНЫЙ ДЕШИФРАТОР

На практике широко применяется комбинационная схема, получившая название «дешифратор» (избирательная схема [6]). **Дешифратор** — это комбинационный преобразователь двоичного n-разрядного кода в двоичное число, содержащее не более одной единицы. При этом входное n-разрядное двоичное число обычно совпадает с номером выхода, на котором поддерживается высокий уровень.

Полный дешифратор содержит 2^n выходов. Каждому выходу соответствует булева функция в виде минтерма n переменных. Например, если $n = 3$, то схему полного дешифратора образуют следующие восемь минтермов:

$f_0 = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$; $f_1 = \bar{A}\,\bar{B}C$; $f_2 = \bar{A}B\bar{C}$; $f_3 = \bar{A}BC$;

$f_4 = A\bar{B}\,\bar{C}$; $f_5 = A\bar{B}C$; $f_6 = AB\bar{C}$; $f_7 = ABC$.

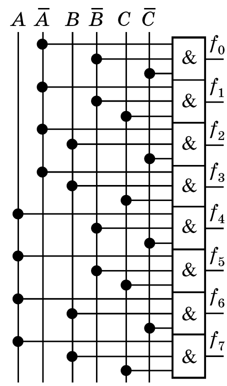


Рис. 224

Логическая схема его приведена на рис. 224, из которой видно, что она состоит из восьми логических схем И по три входа каждая.

Условное изображение полного трехвходового дешифратора приведено на рис. 225. Слева на этом рисунке указаны числа 1, 2, 4, обозначающие веса входного трехзначного двоичного кода. На вход 1 необходимо подавать младший разряд входного кода, на вход 4 — старший разряд. Справа указаны номера выходов. Если входной код равен 000, то $f_0 = 1$, а все остальные функции равны нулю. Если на вход подать 001, то $f_1 = 1$, а все остальные функции равны нулю. Если на вход подать код 010, то $f_2 = 1$ и т. д.

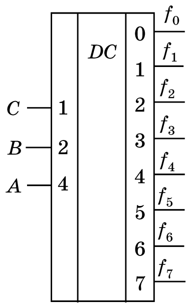


Рис. 225

Полный дешифратор с четырьмя входами содержит 16 выходов и состоит из 16 схем И, где каждая схема И реализует определенный минтерм четырех аргументов. Полный дешифратор с пятью входами состоит из 32 пятивходовых элементов И, с шестью входами — из 64 шестивходовых схем И и т. д.

Упражнения

1. (Т81). Сколько выходов имеет полный дешифратор, если число его входов равно 8?

2. (ИР9). Дешифратор имеет пять входов. Какой код подан на вход дешифратора, если на десятом выходе имеется единица, а на всех остальных выходах — нули?

3. (САФ). Сколько вхождений аргументов имеет система булевых функций, описывающая работу полного пятивходового дешифратора?

17.12. СИНТЕЗ НЕПОЛНОГО ДЕШИФРАТОРА

Дешифратор называется неполным, если число его выходов меньше чем 2^n, где n — число двоичных разрядов входного кода. Все n-значные коды в этом случае распадаются на два множества. Первое множество образуют рабочие коды. Каждому из них соответствует определенный выход в схеме дешифратора. Второе множество состоит из нерабочих кодов. Для них выходы в схеме дешифратора не предусмотрены. При подаче на входы любого из нерабочих кодов на всех выходах дешифратора устанавливается нулевой уровень напряжения.

Если же условия работы дешифратора таковы, что нерабочие коды на его входы подаваться не будут, то при нахождении минимальных форм булевых функций, описывающих схему дешифратора, нерабочие коды можно использовать как неопределенные состояния.

Таблица 27

A	B	C	D	E	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Синтез неполного дешифратора проиллюстрируем на примере кода «2 из 5», представленного в табл. 26. Будем считать, что эти коды подаются на входы дешифратора и что нерабочие коды на входы дешифратора подаваться не будут. Следовательно, их можно рассматривать как неопределенные состояния и использовать при минимизации соответствующих булевых функций.

Так как всего существует 10 входных кодов типа «2 из 5», то и дешифратор должен иметь лишь 10 выходов. Обозначим их $f_0, f_1, f_2, ..., f_9$.

Логика работы дешифратора представлена в табл. 27. Заполнена она следующим образом. Если на вход дешифратора подать код 00011 (первая строка табл. 27), то, согласно табл. 26, высокий уровень должен быть только на выходе f_0. В связи с этим в колонке f_0 строки 00011 ставим единицу, а во всех остальных колонках этой же строки записываем нули. Если на вход дешифратора подать код 00101, то в колонке f_1 строки 00101 ставим единицу, а во всех остальных колонках записываем нули. Точно так же заполняем все остальные строки таблицы.

Так как входные коды являются пятизначными, то для минимизации необходима карта Вейча пяти переменных. На карте для функции f_0 (рис. 226) крестиками указаны неопределенные состояния (22 числа). Если на наборах 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31 функцию доопределить единицами, а на всех остальных нерабочих наборах — нулями, то получим минимальную форму:

$$f_0 = DE.$$

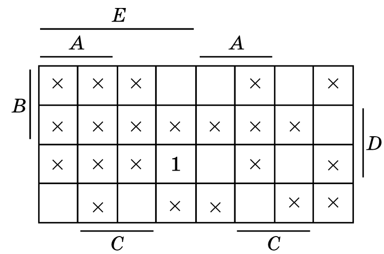


Рис. 226

Точно таким же образом находим минимальные формы остальных функций. Полный их список имеет вид:

$$f_0 = DE; \quad f_2 = CD; \quad f_4 = BD; \quad f_6 = AE; \quad f_8 = AC;$$
$$f_1 = CE; \quad f_3 = BE; \quad f_5 = BC; \quad f_7 = AD; \quad f_9 = AB.$$

Таким образом, получилась схема, состоящая из десяти двухвходовых логических элементов И.

Упражнения

1. На входы дешифратора подаются четырехразрядные двоичные числа, являющиеся двоичными эквивалентами десятичных цифр. Постройте схему неполного дешифратора.

1) (330). Укажите нерабочие коды (в виде десятичных чисел в порядке их возрастания).

2) (489). Сколько в схеме дешифратора двухвходовых, трехвходовых и четырехвходовых элементов И?

3) (5ТМ). Укажите наборы (десятичные), на которых функция f_8 доопределена единицами.

2. (795). На входы дешифратора (см. предыдущее упражнение) подан нерабочий код 1111. Укажите номера выходов, на которых будут высокие уровни напряжения.

17.13. МУЛЬТИПЛЕКСОР

Мультиплексор (селектор, согласно [44, с. 145]) — это комбинационная схема, имеющая n адресных входов, 2^n информационных входов 0, 1, 2, ..., $2^n - 1$ (в случае полного мультиплексора) и один выход f_n, где индекс n обозначает, что мультиплексор имеет n адресных входов. Если на адресные входы подать n-значное двоичное число i, то выход f_n подключится к i-му информационному входу, т. е. информация, поступающая на i-й вход, будет проходить на выход независимо от того, какие сигналы поступают на остальные информационные входы ($i = 0, 1, 2, ..., 2^n - 1$). Булева функция, описывающая полный мультиплексор для $n = 3$, имеет вид

$$f_3 = Q_0\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + Q_1\bar{A}\,\bar{B}C + Q_2\bar{A}B\bar{C} + Q_3\bar{A}BC + Q_4A\bar{B}\bar{C} + Q_5A\bar{B}C + Q_6AB\bar{C} + Q_7ABC,$$

где $Q_0, Q_1, Q_2, ..., Q_7$ — информационные входы; A, B, C — адресные входы, при этом букве A соответствует старший разряд кода адреса.

Если $n = 4$, то получим схему полного мультиплексора на 16 информационных входов. Булева функция, описывающая эту схему, имеет вид

$$f_4 = Q_0\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D} + Q_1\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}D + Q_2\bar{A}\,\bar{B}C\bar{D} + \ldots + Q_{15}ABCD.$$

По этим двум функциям видно, что основу мультиплексора составляет дешифратор. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_7$ — выходы полного трехвходового дешифратора. Если к его выходам подключить логическую схему, описываемую булевой функцией вида

$$f_3 = Q_0\varphi_0 + Q_1\varphi_1 + Q_2\varphi_2 + ... + Q_7\varphi_7,$$

то получим полный мультиплексор на 8 информационных входов.

В общем случае на базе n-входового дешифратора можно построить мультиплексор в соответствии с булевой функцией вида

$$f_n = Q_0\varphi_0 + Q_1\varphi_1 + Q_2\varphi_2 + ... + Q_r\varphi_r,$$

где $r = 2^n - 1$.

Полный мультиплексор кроме своего прямого назначения может быть использован в качестве схемы, реализующей произвольную булеву функцию до n аргументов, что следует из выражения f_n. Пусть булева функция имеет вид

$$f = AB\bar{C} + \bar{B}D.$$

Представим ее в СДНФ:

$$f = (1, 3, 9, 11, 12, 13).$$

Для реализации этой функции при помощи мультиплексора достаточно установить на его входах с номерами 1, 3, 9, 11, 12, 13 высокие уровни напряжения, а на всех остальных — низкие. Если теперь на адресные входы подать какой-либо набор значений аргументов, то на выходе получим уровень напряжения в точном соответствии с заданной функцией.

С математической точки зрения, мультиплексор реализует операцию нахождения производной от булевой функции, описывающей структуру этого мультиплексора, если дифференцирование осуществляется по переменным Q_i ($i = 0, 1, 2, 3, ..., r$), обозначающим информационные входы. Например, для функции

$$f_2 = Q_0\bar{A}\,\bar{B} + Q_1\bar{A}\,B + Q_2A\bar{B} + Q_3AB,$$

зависящей от шести аргументов A, B, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, найдем производную по переменной Q_1. Остаточные функции имеют вид:

$$f_2(A, B, Q_0, 0, Q_2, Q_3) = Q_0\bar{A}\,\bar{B} + Q_2A\bar{B} + Q_3AB;$$
$$f_2(A, B, Q_0, 1, Q_2, Q_3) = Q_0\bar{A}\,\bar{B} + \bar{A}\,B + Q_2A\bar{B} + Q_3AB.$$

Сумма по модулю два остаточных функций есть искомая производная:

$$\frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = \bar{A}B.$$

Из этой записи следует, что если $\bar{A}B = 1$, то $f_2 = Q_1$, т. е. функция f_2 меняет свое состояние одновременно с изменением значения аргумента Q_1.

Следует отметить, что с технической точки зрения реализация булевых функций при помощи мультиплексора является неэффективной даже в том случае, если реализуемая функция имеет наиболее сложную минимальную ДНФ. Примером может служить функция «нечет». Эта функция содержит 2^{n-1} минтермов, каждый из которых является простой импликантой (см. подраздел 16.8). При $n = 4$ для ее реализации в классе ДНФ требуется 8 четырехвходовых элементов И и одна восьмивходовая схема ИЛИ, в то время как соответствующий мультиплексор, описываемый функцией f_4, состоит из 16 пятивходовых элементов И и одной 16-входовой схемы ИЛИ. Но если в соответствии с логикой работы некоторого цифрового устройства требуется быстро менять булеву функцию, то применение мультиплексора вполне оправданно.

Мультиплексор называется неполным, если число его информационных входов меньше 2^n. Как и в случае неполного дешифратора, неиспользуемые адресные коды можно рассматривать как неопределенные состояния и учитывать их при минимизации булевой функции, описывающей схему неполного мультиплексора. В качестве примера рассмотрим мультиплексор с 10 информационными входами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12. Если считать, что остальные шесть кодов (при $n = 4$) на адресные входы подаваться не будут, то мультиплексор представится минимальной булевой функцией вида (в классе ДНФ)

$$f_4 = Q_1\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + Q_2\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D} + Q_3CD + Q_4\bar{A}\,\bar{C}\,\bar{D} + Q_5BD +$$
$$+ Q_6BC + Q_8\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D} + Q_9AD + Q_{10}AC + Q_{12}AB.$$

Упражнения

1. (ЛВЕ). Сколько вхождений аргументов имеет булева функция f_6, описывающая схему мультиплексора с 64 информационными входами?

2. (ХБФ). Известно, что $f_3 = 0$, если на адресные входы подавать коды 001, 011, 100, 110, 111, и $f_3 = 1$ на всех остальных кодах. Найдите номера информационных входов, на которые поданы высокие уровни.

3. (КТ1). Неполный мультиплексор имеет 11 информационных входов: 0, 1, 2, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Сколько вхождений аргументов имеет минимальная ДНФ функции, описывающей схему этого мультиплексора?

17.14. ОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

Схема называется однородной, если она состоит из одинаковых ячеек, определенным образом соединенных между собой. Простейшим примером может служить многовходовая схема И (рис. 227).

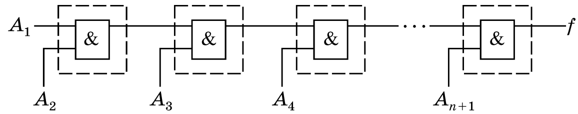


Рис. 227

На рис. 227 каждая ячейка содержит один двухвходовый элемент И, все ячейки одинаковы и соединяются между собой, образуя ленточную однородную среду. Если на рис. 227 элементы И заменить элементами ИЛИ, то получится многовходовая схема ИЛИ.

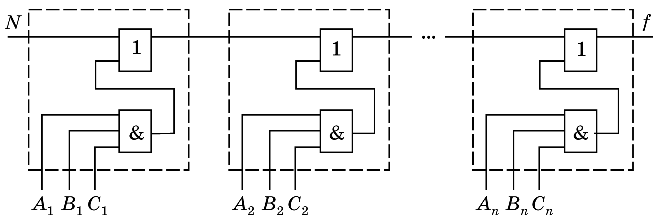


Рис. 228

На рис. 228 приведена однородная среда с более сложными ячейками. В общем виде эта структура обеспечивает реализацию ДНФ булевых функций, в которых число аргументов каждой конъюнкции не превышает 3. Самая сложная из этих функций имеет вид

$$f = N + A_1B_1C_1 + A_2B_2C_2 + A_3B_3C_3 + \ldots + A_nB_nC_n, \qquad (5)$$

где N — вход, предназначенный для подключения предыдущих ячеек, но может рассматриваться и как самостоятельный вход.

Функция (5) зависит от $3n + 1$ аргументов. При $n = 4$ получим однородную среду, обеспечивающую реализацию некоторого множества булевых функций до 13 вхождений аргументов. Например, введем подстановки:

$$N = A;\ \ A_1 = B;\ \ A_2 = C;\ \ A_3 = D;\ \ A_4 = E;$$
$$B_1 = C_1 = B_2 = C_2 = B_3 = C_3 = B_4 = C_4 = 1,$$

тогда булева функция, реализуемая однородной средой, примет вид

$$f = A + B + C + D + E.$$

Подстановки

$$N = 0;\quad A_1 = A;\ B_1 = B;\ C_1 = 1;\quad A_2 = \overline{B};\ B_2 = C;\ C_3 = 1;\quad A_3 = A_4 = 0$$

дают функцию

$$f = AB + \bar{B}C.$$

Если $N = 1$, то независимо от состояния всех остальных входов функция примет единичное значение.

Заменим элементы ИЛИ (рис. 228) двухвходовыми элементами И, а элементы И заменим трехвходовыми элементами ИЛИ. Тогда получим однородную среду, реализующую КНФ функции, в которой каждая дизъюнкция содержит до трех переменных:

$$f = N(A_1 + B_1 + C_1)(A_2 + B_2 + C_2) \ldots (A_n + B_n + C_n), \tag{6}$$

где N — вход, предназначенный, как и в случае формулы (5), для подключения предыдущих ячеек, но при их отсутствии может быть самостоятельным входом. При помощи этого входа реализуется функция $f = 0$ путем подачи на вход N однородной среды низкого уровня напряжения.

Необходимо отметить, что строить однородную среду отдельно для КНФ нет необходимости, если запоминающие элементы имеют парафазные выходы. Пусть дана функция, представленная в КНФ. Проинвертируем ее по теореме де Моргана. Получим ДНФ инверсии заданной функции, которую можно реализовать при помощи однородной среды (рис. 228). Если выходной сигнал проинвертировать, воспользовавшись элементом НЕ, то получим заданную функцию.

Аналогичным образом может быть реализована ДНФ при помощи однородной среды, построенной на основе функции (6).

В следующих подразделах (17.15–17.18) приведены примеры относительно несложных ленточных однородных сред комбинационного типа, построенных путем тождественных преобразований булевых функций, и представления их в виде рекуррентных соотношений. Вообще же надо отметить, что синтез ячеек для однородных сред относится к тем задачам, для решения которых от разработчика требуется не только знание булевой алгебры, но и определенная изобретательность.

Упражнения

1. (ШВЗ). Укажите номера функций, которые могут быть реализованы при помощи однородной среды, приведенной на рис. 228, если $n = 4$:

1) $f = A$;
2) $f = ABC + BCDE + F + K$;
3) $f = A + B$;
4) $f = 1$;
5) $f = A + B + C + D + E + F$;
6) $f = ABC + E + F + K$;
7) $f = AB + CDE + EFKL + PQ$;
8) $f = A + B + C + D + EFKL$.

2. Запишите минимальную ДНФ функции, реализуемой однородной средой при $n = 3$ (рис. 228), если на входы подано:

1) (ЦВХ). $N = 1$; $A_1 = B_1 = C_1 = P$; $A_2 = Q$; $B_2 = C_2 = A_3 = B_3 = C_3 = 0$;
2) (ФИЛ). $N = 0$; $A_1 = A$; $B_1 = B$; $C_1 = C$; $A_2 = B_2 = C_2 = A_3 = B_3 = C_3 = 0$;

17.15. СХЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДВУХ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

Примером однородной среды является схема равенства двух двоичных чисел. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — запоминающие элементы регистров A и B, в которых хранятся n-разрядные двоичные числа a и b. Числа равны, если цифры в каждой паре разрядов с одинаковыми весами совпадают. Булева функция, описывающая схему равенства, имеет вид

$$f = (A_1B_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1)(A_2B_2 + \bar{A}_2\bar{B}_2)\ldots(A_nB_n + \bar{A}_n\bar{B}_n). \qquad (7)$$

Первое скобочное выражение соответствует младшему разряду сравниваемых чисел. Очевидно, что оно примет единичное значение только в том случае, если

$$A_1 = B_1 = 0 \text{ либо } A_1 = B_1 = 1.$$

Точно так же интерпретируются все остальные скобочные выражения, каждое из которых относится к определенному разряду чисел a и b.

Однородная среда, соответствующая выражению (7), приведена на рис. 229. Согласно этому выражению для реализации схемы равенства необходимо $2n$ двухвходовых элементов И, n двухвходовых элементов ИЛИ и одна n-входовая схема И. Эта n-входовая схема И рассредоточена на рис. 229 по ячейкам так, как показано на рис. 227. Вход φ предназначен для подключения предыдущих ячеек. Если это первая ячейка, то необходимо принять $\varphi = 1$.

Если проинвертировать выражение (7), то получим булеву функцию, описывающую структуру схемы неравенства ($\varphi = 1$ при $a \neq b$):

$$\varphi = \bar{A}_1B_1 + A_1\bar{B}_1 + \bar{A}_2B_2 + A_2\bar{B}_2 + \ldots + \bar{A}_nB_n + A_n\bar{B}_n.$$

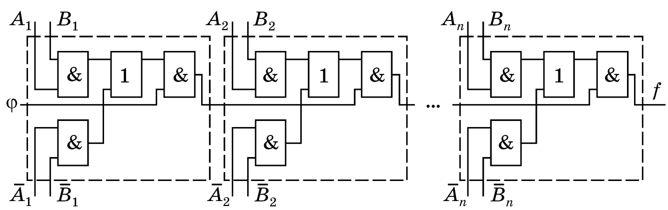


Рис. 229

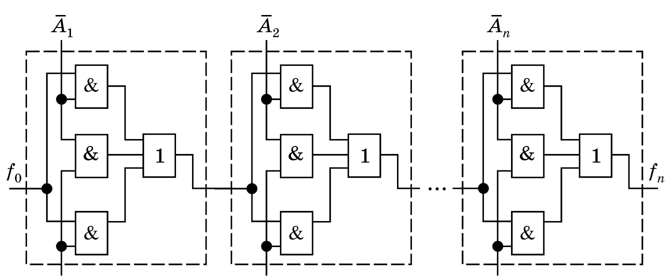


Рис. 230

Эту функцию легко реализовать при помощи однородной среды, приведенной на рис. 228, если использовать $2n$ ячеек и принять $N = 0$.

На рис. 230 приведена комбинационная схема сравнения двух двоичных чисел. Схема представлена в виде ленточной однородной среды. Схема реализует булеву функцию f_n, принимающую единичное значение при $a < b$. Однородная среда построена на основе рекуррентного выражения вида

$$f_n = B_n\bar{A}_n + B_n f_{n-1} + \bar{A}_n f_{n-1},$$

где A_n и B_n — запоминающие элементы, в которых хранятся старшие разряды сравниваемых двоичных чисел.

На вход f_0 первой ячейки необходимо подать низкий уровень, тогда функция f_1 примет вид

$$f_1 = \bar{A}_1 B_1.$$

Выход второй ячейки представлен функцией

$$f_2 = \bar{A}_2 B_2 + f_1\bar{A}_2 + f_1 B_2,$$

реализующей сравнение двухразрядных двоичных чисел (совместно с первой ячейкой).

Для третьей ячейки получаем функцию

$$f_3 = \bar{A}_3 B_3 + f_2\bar{A}_3 + f_2 B_3,$$

реализующей сравнение двух трехразрядных двоичных чисел (совместно с первыми двумя ячейками) и т. д.

17.16. СХЕМА «ЧЕТ-НЕЧЕТ»

В подразделе 16.8 приведена схема «чет», обеспечивающая проводимость в том случае, когда в единичном состоянии находится четное число контактных элементов. На рис. 172 и 173 раздела «Контактные структуры» эта схема представлена в виде однородной ленточной среды. Аналогичным образом может быть реализована и логическая схема «чет-нечет» на бесконтактных элементах И, ИЛИ, НЕ.

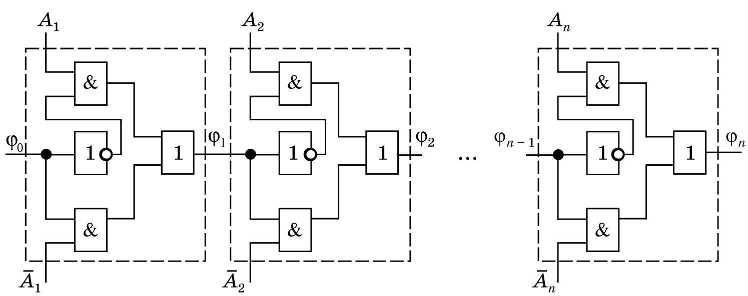


Рис. 231

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ — двоичные запоминающие элементы, образующие регистр для хранения n-разрядных двоичных чисел. Для одной ячейки, когда $n = 1$, имеем

$$\varphi_1 = \overline{A}_1,$$

так как индекс одноразрядного двоичного числа является четным только в том случае, когда число равно нулю.

Удлиним схему, добавив второй разряд:

$$\varphi_2 = \overline{A}_1\overline{A}_2 + A_1A_2 = \varphi_1\overline{A}_2 + \overline{\varphi}_1A_2.$$

Для n-разрядного числа имеем

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}\overline{A}_n + \overline{\varphi}_{n-1}A_n.$$

Таким образом, получили рекуррентное соотношение, в соответствии с которым нетрудно построить однородную среду, если каждой из функций φ_1, φ_2, φ_3, ..., φ_n поставить в соответствие отдельную ячейку (см. рис. 231). Вход φ_0 является управляющим. Если $\varphi_0 = 1$, то однородная среда реализует схему «чет». Если же $\varphi_0 = 0$, то однородная среда реализует схему «нечет».

Упражнения

1. Определите индексы следующих двоичных чисел:

1) (ЦНП) 001100; 2) (52Т) 111110; 3) (75К) 00000.

2. Укажите номера чисел с четными индексами:

I. (СПИ)	II. (ОНК)	III. (ХА8)
1) 0011001;	1) 1000001;	1) 000111;
2) 111011;	2) 0111110;	2) 1100;
3) 11110;	3) 11;	3) 111001;
4) 00000;	4) 1111;	4) 0000;
5) 111111;	5) 0;	5) 1111;
6) 011001;	6) 00011;	6) 111110011.

3. (ШВЗ). Укажите номера правильных утверждений:

1) если структуру «чет» укоротить на одну ячейку, то она по-прежнему будет выполнять функцию «чет»;

2) если в структуре «чет» поменять местами входы A_i и $\overline{A}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, то получим ту же структуру;

3) если из структуры «чет» удалить первую ячейку, а на вход φ_1 подать низкий уровень, то получим структуру «нечет»;

4) если структуру «чет» удлинить на одну ячейку, и на вход этой ячейки подать высокий уровень, то получим структуру «нечет»;

5) если на входы структуры «чет» подать двоичное число с четным индексом, то на ее выходе получим высокий уровень напряжения;

6) пусть на рис. 231 старшему разряду числа соответствует вход A_n. Если входу A_n поставить в соответствие младший разряд, а входу A_1 — старший, то схема по-прежнему будет выполнять функцию «нечет» при $\varphi_0 = 0$;

7) если при четном n структуру «нечет» разделить на две равные части, то каждая половинная структура будет выполнять функцию «чет».

17.17. СИНТЕЗ ДВОИЧНОГО СУММАТОРА

На рис. 232 приведена однородная среда, состоящая из пяти одинаковых ячеек — трехвходовых одноразрядных сумматоров, обозначенных символом SM, где каждой ячейке соответствует определенный разряд двоичного числа. Очевидно, что число ячеек может быть увеличено до любого числа без ограничений. Младшему разряду суммы соответствует выход Σ_1, старшему — Σ_6. Выход Σ_6 — это одновременно перенос P_5 из пятого разряда в шестой. Так как шестой ячейки нет, то выход P_5 используется в качестве старшего разряда суммы. Ячейка младшего разряда имеет вход P_0. По этому входу подается сигнал от предыдущей ячейки. Но предыдущей ячейки нет. Следовательно, необходимо принять $P_0 = 0$.

Выберем какую-либо ячейку с номером i (первая ячейка является особой, поэтому ее не учитываем, тогда $i = 2, 3, 4, 5$). Ячейка имеет три входа: A_i, B_i, P_{i-1} и два выхода: Σ_i и P_i. В табл. 28 перечислены все возможные состояния входов и выходов i-й ячейки. Например, в строке 000 показано: в i-м разряде обоих чисел находятся нули и отсутствует перенос от предыдущего разряда. Поэтому в колонках Σ_i и P_i записаны нули. В следующей строке отмечен случай, когда в i-м разряде обоих чисел находятся нули, но от предыдущего разряда поступила единица переноса и т. д.

По табл. 28 после минимизации получаем:

$$\Sigma_i = \bar{A}_i\bar{B}_iP_{i-1} + \bar{A}_iB_i\bar{P}_{i-1} + A_i\bar{B}_i\bar{P}_{i-1} + A_iB_iP_{i-1}; \tag{8}$$

$$P_i = A_iB_i + A_iP_{i-1} + B_iP_{i-1}. \tag{9}$$

Логическую схему ячейки можно построить непосредственно по этим выражениям. Потребуется четыре трехвходовых элемента И, три двухвходовых элемента И, один четырехвходовый элемент ИЛИ, один трехвходовый элемент ИЛИ и один инвертор, реализующий выражение $\bar{P}_i$ для следующего разряда, — всего 10 элементов.

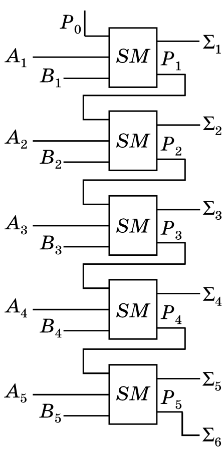


Рис. 232

Таблица 28

A_i	B_i	P_{i-1}	Σ_i	P_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Упростить схему можно путем повышения порядка выражений (8) и (9) и за счет повторного использования отдельных частей схемы. Прежде всего заметим, что функции (8) и (9) являются симметрическими и могут быть представлены в виде:

$$\Sigma_i = S_1 + S_3; \tag{10}$$
$$P_i = S_2 + S_3, \tag{11}$$

где индексы 1, 2, 3 представляют собой a-числа симметрических функций.

Проинвертируем выражение (10):

$$\overline{\Sigma}_i = S_0 + S_2. \tag{12}$$

Самой сложной составляющей выражений (11) и (12) является симметрическая функция S_2:

$$S_2 = A_i B_i \overline{P}_{i-1} + A_i \overline{B}_i P_{i-1} + \overline{A}_i B_i P_{i-1} = A_i \overline{B_i P_{i-1} + \overline{B}_i \overline{P}_{i-1}} + \overline{A}_i B_i P_{i-1}.$$

Введем обозначения: $\varphi_1 = B_i P_{i-1}$; $\varphi_2 = \overline{B}_i \overline{P}_{i-1}$. Тогда

$$S_2 = A_i \overline{\varphi_1 + \varphi_2} + \overline{A}_i \varphi_1 = A_i \overline{\varepsilon} + \overline{A}_i \varphi_1,$$

где $\varepsilon = \varphi_1 + \varphi_2$;

$$\overline{\Sigma}_i = S_2 + \overline{A}_i \varphi_2 = A_i \overline{\varepsilon} + \overline{A}_i \varphi_1 + \overline{A}_i \varphi_2 = A_i \overline{\varepsilon} + \overline{A}_i \varepsilon;$$
$$P_i = S_2 + A_i \varphi_1 = A_i \overline{\varphi_1 + \varphi_2} + \overline{A}_i \varphi_1 + A_i \varphi_1 = A_i \overline{\varepsilon} + \varphi_1.$$

Обозначим

$$\gamma = A_i \overline{\varepsilon},$$

тогда получим окончательно:

$$\overline{\Sigma}_i = \gamma + \overline{A}_i \varepsilon; \qquad P_i = \gamma + \varphi_1.$$

На рис. 233 в соответствии с принятыми обозначениями приведена логическая схема i-й ячейки сумматора. В ней также 10 логических элементов, как и в схеме, построенной по выражениям (8) и (9). Но все же схема на рис. 233 значительно проще, так как в ней все элементы И и ИЛИ имеют только по два входа, а всего входов у всех элементов — 17, в то время как в схеме до упрощения было 26 входов.

Необходимо иметь в виду, что повышение порядка функций снижает быстродействие сумматора. Ячейка, изображенная на рис. 233, имеет 6-й поря-

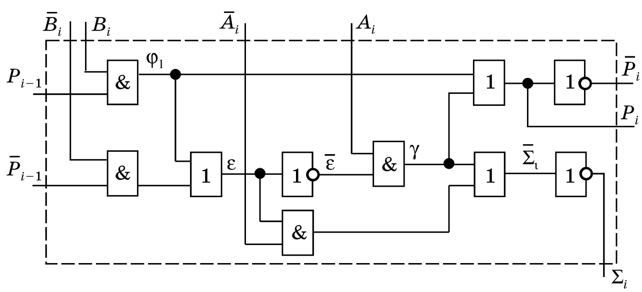


Рис. 233

док. Если суммируются, например, 40-разрядные двоичные числа, то при сложении двоичного числа, состоящего из 40 единиц, с числом 000 ... 01 (39 нулей) получится 41-разрядное число, в старшем разряде которого — единица, а во всех остальных 40 разрядах — нули. С момента подачи на входы сумматора этих чисел сигнал переноса должен пройти почти 240 элементов. Если каждый элемент задержит сигнал, например, на 1 нс (10^{-9}с), то сумматор сможет выполнять не более 4 миллионов операций сложения в одну секунду.

Рассмотренную схему по принципу действия называют параллельным сумматором.

17.18. ВЫЧИСЛЕНИЕ БЕСПОВТОРНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В данном подразделе рассмотрим однородную среду, предназначенную для вычисления значений монотонных бесповторных упорядоченных булевых функций, заданных в ДНФ. Функция называется бесповторной упорядоченной, если в ее записи все аргументы встречается по одному разу и идут в алфавитном порядке. Например, функция

$$f = AB + CD + E$$

является бесповторной, но функцию, представленную в виде

$$f = AB + CD + E + E,$$

бесповторной назвать нельзя, так как в ее записи буква E встречается два раза.

Если бесповторная булева функция представлена в ДНФ, то ей можно поставить в соответствие двоичный код длины n, где n — число вхождений аргументов или число самих аргументов, что для бесповторной функции одно и то же. Пусть первая конъюнкция функции содержит n_1 аргументов. Поставим ей в соответствие код, состоящий из $n_1 - 1$ нулей и одной единицы, записываемой справа от $n_1 - 1$ нулей. Если вторая конъюнкция содержит n_2 аргументов, то ей поставим в соответствие n_2-разрядный код, где $n_2 - 1$ первых мест занимают нули, а на последнем месте стоит единица и т. д. Приставив один к другому эти частные коды в порядке записи соответствующих конъюнкций (т. е. применим к ним операцию конкатенации), получим искомый код всей функции, который условимся называть α-кодом. Например, если

$$\begin{array}{l} f = A_1\,A_2\,A_3 + A_4 + A_5\,A_6\,A_7\,A_8, \\ \quad\;\; 0\;\;\, 0\;\;\, 1\quad\;\, 1\quad\; 0\;\;\, 0\;\;\, 0\;\;\, 1 \end{array}$$

то α-код имеет вид 00110001.

Очевидно, что по α-коду функция восстанавливается однозначно. Например:

α-код: 010001101; функция: $f = A_1A_2 + A_3A_4A_5A_6 + A_7 + A_8A_9$;

α-код: 11100111; функция: $f = A_1 + A_2 + A_3 + A_4A_5A_6 + A_7 + A_8$;

α-код: 000001; функция: $f = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$;

α-код: 11111; функция: $f = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$.

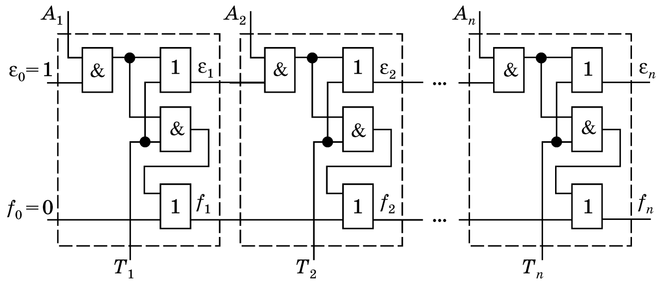


Рис. 234

Код функции, полученный по ее аналитическому выражению, представленному в виде бесповторной ДНФ, всегда оканчивается единицей. При необходимости удлинить код (но без изменения функции) справа необходимо приписать соответствующее количество нулей. Первые же $n-1$ разрядов могут занимать нули и единицы в любых сочетаниях. Следовательно, всего существует $2^{n\text{-}1}$ бесповторных упорядоченных булевых функций n аргументов, аналитически заданных в ДНФ и не содержащих инверсий.

На рис. 234 приведена структура в виде однородной среды, состоящей из одинаковых ячеек, соединенных между собой двумя связями. Выходом структуры является вывод f_n. Буквы T_1, T_2, T_3, ..., T_n обозначают входы ячеек (условимся называть их T-входами) для подачи α-кода. На входы A_1, A_2, ..., A_n подаются значения аргументов. Если на T-входы подать α-код, то вся структура превратится в логическую схему, реализующую булеву функцию, соответствующую этому α-коду, т. е. α-код настраивает схему на реализацию той или иной функции. Пусть функция имеет вид

$$f = A_1A_2 + A_3.$$

Закодируем ее вышеприведенным способом. Получим α-код 011. В соответствии с этим кодом на T-входы подаем значения:

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 1, \quad T_3 = 1.$$

На все остальные T-входы, если $n > 3$, подаем нули.

Первая ячейка не имеет предыдущей схемы, следовательно, на ее соединительные входы необходимо подать уровни: высокий — на вход ε_0, низкий — на вход f_0.

Работу схемы проиллюстрируем на примере.

Пусть α-код равен 011, тогда

$$\varepsilon_1 = A_1;\ f_1 = 0, \text{ так как } T_1 = 0.$$

Для второй ячейки: поскольку

$$T_2 = 1, \text{ то } \varepsilon_2 = 1 \text{ и тогда } f_2 = A_1A_2.$$

Для третьей ячейки: так как $T_3 = 1$, то

$$\varepsilon_3 = 1 \text{ и } f_3 = A_1A_2 + A_3.$$

Для четвертой: поскольку $T_4 = 0$, то

$$\varepsilon_4 = A_4 \text{ и } f_4 = f_3 = A_1A_2 + A_3.$$

Для всех остальных ячеек

$$f_3 = f_4 = \ldots = f_n = A_1A_2 + A_3,$$

что совпадает с заданной функцией. Выход последней ячейки ε_n не является информационным.

Мы рассмотрели наиболее простые однородные комбинационные структуры — ленточные. Существуют и более сложные структуры, например, матричные (примером может служить комбинационная схема умножения двоичных чисел), однако их изучение выходит за рамки данного пособия.

17.19. ОБНАРУЖЕНИЕ ОДИНОЧНЫХ ИСКАЖЕНИЙ В ДВОИЧНЫХ КОДАХ

В процессе передачи и обработки информации, представленной двоичными кодами, возможны искажения отдельных двоичных цифр, вызванные различными случайными помехами. В некоторых случаях эти помехи приводят к безобидным ошибкам без каких-либо последствий. Например, если мы получим слово «энциклопудия», то, возможно, и не заметим, что в нем вместо буквы «е» оказалась буква «у». В других случаях сообщение может оказаться бессмысленным либо (что еще хуже) понятным, но с другим смыслом.

Если сообщения передаются по каналу, помехи в котором неизбежны, то повысить помехоустойчивость передачи информации можно только одним путем — за счет введения кодовой избыточности, когда используется большее число двоичных разрядов, чем это необходимо.

Обычно информацию передают при помощи какого-либо алфавита. В него могут входить буквы, цифры и другие знаки (например, математические, химические, топографические и др.). В случае равномерных кодов все символы алфавита нумеруют в определенном порядке и номера представляют в виде двоичных кодов длины

$$n = \log_2 N,$$

где n — число, округляемое в большую сторону; N — число символов алфавита.

Величина n показывает, сколько двоичных знаков необходимо для кодирования каждого из N символов, т. е. n — это минимальная длина кода.

Добавим к каждому n-значному коду еще один двоичный знак и передавать информацию будем $(n + 1)$-значными кодами. Какую же цифру использовать в качестве добавочной: единицу или нуль? Здесь возможны варианты. Для определенности договоримся: если в передаваемом n-значном коде содержится нечетное число единиц, то добавим к нему единицу, поставив ее, например, справа от младшего разряда n-значного кода (в принципе, поставить ее можно куда угодно, лишь бы это было постоянное место для всех передаваемых кодов). Если же в n-значном коде имеется четное число единиц, то добавим к нему нуль. В результате каждый передаваемый $(n + 1)$-значный код всегда будет иметь четный индекс, т. е. четное число единиц.

Пусть на приемном конце канала передачи информации имеется устройство, которое определяет, четное или нечетное число единиц содержится в принятом $(n + 1)$-значном коде. Если в каком-либо коде окажется нечетное число единиц, то ясно, что в одном из $n + 1$ двоичных разрядов произошла замена единицы на нуль либо нуля на единицу. Возможно, что такая замена произошла в трех разрядах, в пяти, семи и т. д. Если же в принятом $(n + 1)$-разрядном коде окажется четное число единиц, то можно предположить, что ошибок в коде нет либо в коде содержатся две искаженные цифры, либо четыре, шесть и т. д. Практика показывает, что статистически наиболее вероятны одиночные ошибки. Следовательно, если вероятностью двух и более ошибок в одном и том же коде пренебречь, то проверкой на четность числа единиц можно обнаружить коды, содержащие одиночные искажения.

На рис. 235 представлена схема, автоматически преобразующая n-значный двоичный код в $(n + 1)$-разрядный, содержащий четное число единиц, где знаком $\oplus$ обозначена схема «нечет» (см. рис. 231).

Входной код представлен буквами $A_1, A_2, ..., A_n$, где $A_i = 1$, если в i-м разряде входного кода находится единица, и $A_i = 0$, если в i-м разряде находится нуль $(i = 1, 2, ..., n)$.

Выходной код представлен символами $f_1, f_2, ..., f_n, f_{n+1}$:

$$f_i = A_i;$$
$$f_{n+1} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus ... \oplus A_n, \tag{13}$$

где $\oplus$ — знак сложения по модулю два.

Выходной код $f_1 f_2 ... f_{n+1}$ поступает на вход канала передачи информации.

На рис. 236 приведена схема, обеспечивающая обнаружение кодов, содержащих одиночные ошибки. На вход схемы поступают $(n + 1)$-значные двоичные коды вида

$$f_1 f_2 f_3 ... f_n f_{n+1}.$$

Выходы схемы обозначены символами $\varepsilon_1, \varepsilon_2 ..., \varepsilon_n$. Выходной код $\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_n$ является правильным (т. е. не содержит ошибок), если $\varepsilon_{n+1} = 0$, где

$$\varepsilon_{n+1} = f_1 \oplus f_2 \oplus ... \oplus f_n \oplus f_{n+1}. \tag{14}$$

Если же $\varepsilon_{n+1} = 1$, то это значит, что в принятом коде содержится ошибка.

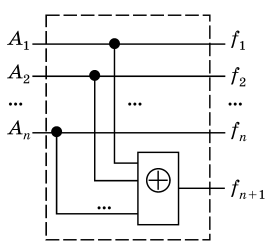


Рис. 235

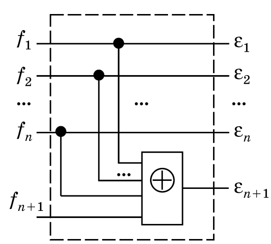


Рис. 236

По рис. 235 и 236 видно, что схема, формирующая дополнительную цифру (контрольный разряд), отличается от схемы, распознающей одиночные ошибки в принятом коде, лишь числом входов: вторая схема содержит на один вход больше, чем первая. Следовательно, если во второй схеме на один из входов подать нулевой уровень напряжения, то она превратится в первую схему.

Схемы, изображенные на рис. 235 и 236, являются комбинационными, следовательно, их входы должны быть подключены к выходам триггерных регистров. В первом случае необходим n-разрядный регистр, во втором — $(n + 1)$-разрядный.

Упражнения

1. (Б89). Укажите номера кодов ($n = 8$), для которых добавочной (девятой) должна быть цифра 1 (проверка на четность):

1) 00001000; 4) 00000011; 7) 11001101;
2) 01111000; 5) 00000111; 8) 11111111;
3) 11111110; 6) 00000000; 9) 01010101.

2. (Б71). Какие из следующих $(n + 1)$-разрядных кодов содержат одиночную ошибку, если $n = 6$:

1) 0110011; 4) 1110111; 7) 1000000;
2) 0100110; 5) 1001001; 8) 1111111;
3) 0011011; 6) 1110100; 9) 1001111?

3. Представьте выражение (13) в минимальной ДНФ и для $n = 8$ определите:

1) (Г52) число простых импликант;

2) (МБЗ) число вхождений аргументов;

4. (Г86). Сколько существует двоичных 8-значных наборов значений аргументов $A_1, A_2, ..., A_8$, на которых функция (13) равна нулю?

5. (ШУ7). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) возможны ли случаи, когда код $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n$ совпадает с кодом $A_1\ A_2\ A_3 \dots A_n$ (рис. 236), а значение контрольного разряда равно единице, т. е. говорит о наличии ошибки;

2) верно ли, что функция (14) является симметрической функцией;

3) верно ли, что выражение (13) справедливо только при n четном;

4) верно ли, что выражение (13) справедливо только при n нечетном;

5) верно ли, что выражение (13) справедливо при любом n четном и нечетном;

6) верно ли, что контрольный разряд можно расположить в любом месте кода?

6. Передается код 001101100, где слева расположен контрольный разряд. После того как код приняли, оказалось, что $\varepsilon_9 = 1$ (рис. 236).

1) (ЮТ8). Сколько существует 9-значных кодов, для которых $\varepsilon_9 = 1$, если считать, что возможны только одиночные ошибки?

2) (ТИН). Сколько существует 9-значных кодов, для которых $\varepsilon_9 = 1$, если считать, что искажения возможны в любом числе разрядов?

17.20. КОДЫ ХЭММИНГА

Один контрольный разряд, добавленный к основному коду, обеспечивает решение простейшей задачи из области помехоустойчивого кодирования — обнаружение $(n+1)$-значных кодов, в которых под действием помех произошло искажение одной из $n+1$ двоичных цифр. С практической же точки зрения очень важно знать, в каком разряде произошел сбой, чтобы соответствующий знак заменить на противоположный и тем самым ошибку автоматически исправить (вероятностью двух и более сбоев пренебрегаем).

Для решения этой задачи необходимо увеличить число контрольных разрядов. Пусть n — длина основного кода $x_n\, x_{n-1} \ldots x_2\, x_1$; m — число контрольных разрядов, образующих код $y_m\, y_{m-1} \ldots y_2\, y_1$. Тогда по каналу передачи будут передаваться коды по $m+n$ двоичных знаков каждый. Очевидно, что величина m должна быть достаточной для того, чтобы пронумеровать все $m+n$ знаков в передаваемом $(m+n)$-разрядном коде, так как сбой может произойти в любом из $m+n$ разрядов. Следовательно, величины m и n должны быть связаны соотношением

$$2^m \geqslant m+n+1, \tag{15}$$

где единице соответствует случай, когда принятый код не содержит ошибок (а в общем случае число ошибок равно 0, 2, 4, 6 и т. д).

Пусть информация передается при помощи 11-значных основных двоичных кодов. Тогда согласно формуле (15) число контрольных разрядов равно четырем. Где же расположить эти четыре знака? Ответ не является однозначным. Рассмотрим вариант, когда контрольные знаки занимают номера разрядов в передаваемом коде, представляющие собой степени числа 2, т. е. 1, 2, 4, 8, ... Для случая $n = 11$ имеем:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1, \\ x_{11} & x_{10} & x_9 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & y_4 & x_4 & x_3 & x_2 & y_3 & x_1 & y_2 & y_1 \end{array} \tag{16}$$

где числа 1, 2, 3, ..., 15 представляют собой номера разрядов 15-значного кода, при этом числу 15 соответствует старший разряд двоичного кода. Значения x_i в этом коде известны, поскольку они представляют собой цифры передаваемого основного кода, а значения y_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ определяются из выражений вида:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11}; \\ y_2 &= x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11}; \\ y_3 &= x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11}; \\ y_4 &= x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Допустим, что переданный код (16) принят. Чтобы узнать, в каком разряде он содержит ошибку, достаточно найти значения следующих выражений:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= y_1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11}; \\ \varepsilon_2 &= y_2 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11}; \\ \varepsilon_3 &= y_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11}; \\ \varepsilon_4 &= y_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Значения ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$) образуют двоичное четырехразрядное ε-число вида $\varepsilon_4\,\varepsilon_3\,\varepsilon_2\,\varepsilon_1$, где ε_4 — старший разряд, ε_1 — младший. Число ε — это и есть искомый номер разряда, в котором произошел сбой. Следовательно, чтобы исправить ошибку, цифру в разряде с номером ε необходимо проинвертировать. Если $\varepsilon = 0$, то это значит, что ошибки в принятом коде нет (напомним, что это справедливо только для одиночных сбоев).

Рассмотрим пример.

Пусть требуется передать по каналу связи двоичный код

$$x = 10011110111.$$

Согласно записи кода:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_{11} = 1;$$
$$x_4 = x_9 = x_{10} = 0.$$

Подставив эти значения в выражение (17), найдем контрольные цифры:

$$y_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1;$$
$$y_2 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1;$$
$$y_3 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$
$$y_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

Согласно (16) получаем передаваемый код:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1, \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

где числа 1, 2, 3, ..., 15 — номера разрядов 15-разрядного кода, подаваемого на вход канала связи.

Допустим, что при передаче этого кода в пятом разряде произошел сбой: вместо единицы оказался нуль и на приемное устройство поступил код:

$$100111110100111.$$

Пронумеруем разряды принятого кода и укажем значения букв x_i и y_j согласно выражению (16):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1, \\ x_{11} & x_{10} & x_9 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & y_4 & x_4 & x_3 & x_2 & y_3 & x_1 & y_2 & y_1 \end{array} \qquad (19)$$

Поиск ошибки на приемной стороне осуществляется при помощи выражений (18). Сначала проверим, не находится ли ошибка в левой части принятого кода, т. е. в разрядах с номерами 8, 9, ..., 15. Согласно записи (19):

$$y_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_{11} = 1;$$
$$x_9 = x_{10} = 0,$$

следовательно

$$\varepsilon_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0.$$

Проверка на четность левой части кода показала, что в соответствующих разрядах ошибки нет.

Находим следующую цифру ε-числа:

$$\varepsilon_3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1,$$

откуда следует, что ошибка в принятом коде есть, причем она находится в одном из разрядов 4, 5, 6, 7.

Определяем значение ε_2:

$$\varepsilon_2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$

следовательно, в разрядах с номерами 6 и 7 ошибки нет, она находится либо в разряде 4, либо в разряде 5.

Находим значение ε_1:

$$\varepsilon_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

Таким образом, ошибка найдена. Она находится в пятом разряде, так как

$$\varepsilon_4 = 0,\ \varepsilon_3 = 1,\ \varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_1 = 1,$$

т. е. ε-число равно 0101. Это адрес ошибки в принятом коде.

Теперь осталось проинвертировать цифру пятого разряда (в данном случае нуль заменить единицей), отбросить контрольные разряды, и мы получим 11-значный код, не содержащий одиночной ошибки.

Очевидно, что одиночное искажение может произойти в любом из разрядов, в том числе и в контрольных. Если сбой произошел в одном из контрольных разрядов, то поиск ошибки происходит точно так же, с той лишь разницей, что все контрольные знаки можно сразу отбросить, не исправляя в них ошибок.

Рассмотренные коды, обеспечивающие исправление одиночных ошибок, называют кодами Хэмминга. О кодах Хэмминга и о более сложных случаях помехоустойчивого кодирования, относящихся к вопросам обнаружения и исправления кодов с несколькими ошибками, можно найти любые сведения в специальной литературе, например в [2, 4, 19, 24, 42].

17.21. КОМБИНАЦИОННЫЙ ФОРМИРОВАТЕЛЬ КОДОВ ХЭММИНГА

Схема автоматического формирования кодов Хэмминга приведена на рис. 237. Прямоугольником со знаком ⊕ на ней обозначена схема, реализующая систему четырех функций вида (17) и представляющая собой формирователь контрольных разрядов. Каждая из этих функций может быть реализована при помощи однородной ленточной структуры (рис. 231), если к быстродействию схемы не предъявляется особо высоких требований. Если же быстродействие является определяющим параметром схемы, то строить ее следует на основе ДНФ либо КНФ.

Входы на рис. 237 обозначены символами x_1, x_2, ..., x_{11}, всего 11 входов. Выходной код содержит на четыре знака больше. Его образуют все знаки входного кода и четыре знака, формируемые преобразователем входных кодов в контрольные коды.

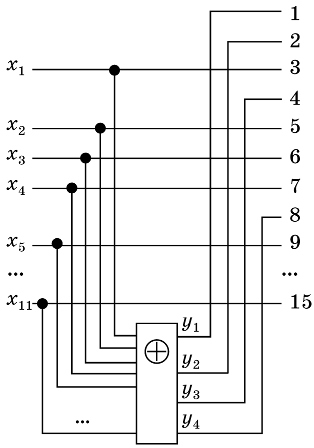


Рис. 237

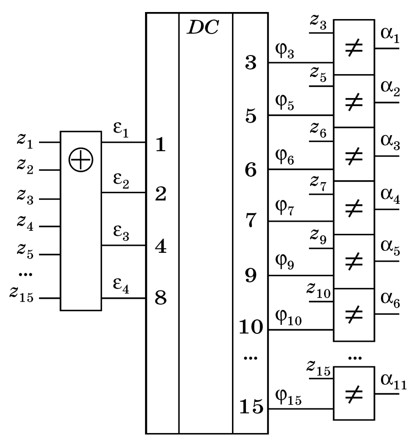


Рис. 238

15-значные коды поступают в передающий канал. Пройдя канал, код поступает на вход схемы, исправляющей одиночные ошибки (рис. 238). Входы на этой схеме обозначены буквами $z_1, z_2, \ldots, z_{15}$, выходы — $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{11}$, где

$$\alpha_1 = z_3\overline{\varphi}_3 + \overline{z}_3\varphi_3;$$
$$\alpha_2 = z_5\overline{\varphi}_5 + \overline{z}_5\varphi_5;$$
$$\alpha_3 = z_6\overline{\varphi}_6 + \overline{z}_6\varphi_6;$$
$$\alpha_4 = z_7\overline{\varphi}_7 + \overline{z}_7\varphi_7;$$
$$\alpha_5 = z_9\overline{\varphi}_9 + \overline{z}_9\varphi_9;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{11} = z_{15}\overline{\varphi}_{15} + \overline{z}_{15}\varphi_{15}.$$

На формирователь ε-числа (рис. 238), обозначенный знаком $\oplus$, подается весь код Хэмминга, все его 15 разрядов, но на выход через одноразрядные схемы неравенства, отмеченные знаком «≠», поступают разряды лишь основного кода. Контрольные знаки на выход не проходят. Если ε-число равно 0000, то в коде ошибки нет, и на всех выходах неполного дешифратора *DC* поддерживаются низкие уровни, вследствие чего

$$\alpha_1 = z_3;\ \ \alpha_2 = z_5;\ \ \alpha_3 = z_6;\ \ \alpha_4 = z_7;\ \ \alpha_5 = z_9; \ldots\ \ \alpha_{11} = z_{15},$$

т. е. цифры принятого 15-значного кода, входящие в основной код, на выход схемы проходят без изменений.

В случае ошибки, например, в пятом разряде принятого 15-значного кода, ε-число равно 0101, $\varphi_5 = 1$, вследствие чего $\alpha_2 = \overline{z}_5$. Это значит, что если в пятом разряде передаваемого кода был нуль, а принятой оказалась единица, то в результате инвертирования единицы получится снова нуль. Если же передавалась единица, а принятым оказался нуль, то после инвертирования получится единица. Таким образом, в обоих случаях происходит автоматическое исправление ошибки.

17.22. РЕФЛЕКСНЫЕ КОДЫ. КОДЫ ГРЕЯ

В современной технике широко применяются аналого-дискретные преобразователи. Примером могут служить датчики механических перемещений. Один из таких датчиков представляет собой соосно укрепленный на валу прозрачный диск с нанесенной на него кодовой маской. Коды считываются при помощи системы каких-либо фотоэлементов. Главное назначение датчика — определить положение вала, т. е. угол его поворота по отношению к некоторому исходному состоянию.

Для примера на рис. 239 показан диск, разделенный на 16 равных частей — секторов (на практике их обычно тысячи). Все секторы пронумерованы, и каждый номер представлен в двоичном коде в виде сочетаний темных и светлых участков, расположенных на четырех концентрических кольцах. Внутреннему кольцу поставлен в соответствие старший разряд номера, внешнему — младший (но, в принципе, можно и наоборот). Нуль на диске обозначен светлой частью кольца, единица — зачернением. Считываются числа с диска параллельно, т. е. все четыре разряда одновременно, при помощи четырех фотоэлементов.

Главное достоинство датчика — его простота. Однако с практической точки зрения он почти непригоден. Дело в том, что параллельные коды хорошо считываются только в пределах каждого отдельного сектора, а при переходе от одного сектора к другому возникают помехи. Пусть число считывается в момент, когда под фотоэлементами проходит 15-й сектор, а за ним идет сектор с нулевым номером. Какое число получится на границе секторов? Это зависит от таких причин, как неточность изготовления маски и блока фотоэлементов, тепловая нестабильность, влияние различных вибраций и др. В общем случае на границе 15-го и нулевого секторов может быть считано любое число от 0 до 15. Помехи имеют место также при переходе от первого сектора ко второму, от третьего к четвертому, от пятого к шестому и др.

Погрешности считывания можно не только уменьшить, но и полностью устранить, если воспользоваться невесовыми кодами, представляющими собой последовательности n-разрядных двоичных чисел, в которых каждые два соседних числа отличаются одно от другого только в одном разряде. У таких кодов несколько названий. В [42] их называют кодами Грея, в [24] — циклическими и прогрессивными, в [5] — рефлексивными, в [40] — рефлексными и отраженными.

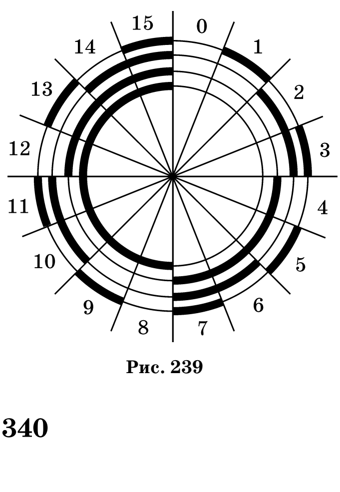


Рис. 239

В данном пособии используется термин «рефлексный код» и его частный случай, получивший наибольшее распространение, — «код Грея». С этого частного случая и начнем рассматривать рефлексные коды.

Главная особенность кода Грея, обеспечившая ему широкое практическое применение, состоит в простоте его построения. Пусть a — двоичное n-разрядное число обычной (весовой) системы счисления, b — соответствующее число в коде Грея. Тогда правило, по которому можно найти код Грея по заданному двоичному числу a, представится формулой вида

$$b_i = a_i \oplus a_{i+1},$$

где $\oplus$ — знак сложения по модулю 2; i — порядковый номер разряда в числе a; $i = 1, 2, 3, ..., n$; счет начинается с младшего разряда.

Чтобы по этому правилу найти код Грея, достаточно поразрядно сложить по модулю два число a с самим собой, но сдвинутым вправо на один разряд с потерей цифры младшего разряда и записью нуля в старшем разряде:

$$\begin{array}{rcccccc} a = & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 \\ & 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_3 & a_2, \\ \hline b = & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & & b_2 & b_1 \end{array} \qquad (20)$$

где

$$b_1 = a_1 \oplus a_2;$$
$$b_2 = a_2 \oplus a_3;$$
$$\ldots$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} \oplus a_n;$$
$$b_n = a_n.$$

Например, при $n = 4$ последовательность кодов Грея, полученная на основе правила сложения (20), имеет вид:

0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100,
1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011, 1001, 1000.

Код Грея является невесовым в отличие от обычной двоичной системы счисления. Это значит, что образующие его двоичные числа надо рассматривать только как упорядоченные наборы нулей и единиц без присвоения им весов. Например, двоичному весовому числу 10011 (в десятичной системе — это 19) соответствует код Грея 11010, и если его считать весовым, то получится число 26 (в десятичной системе). В связи с этим каждому невесовому коду обычно присваивается та или иная величина либо с применением правила, как в случае кода Грея, либо при помощи таблицы.

Если на рис. 239 вместо обычной двоичной (весовой) системы использовать код Грея, то на границах секторов всегда будет изменяться цифра только в одном каком-либо разряде. Благодаря этому в моменты перехода диска от одного кода к другому помехи появиться не могут.

Упражнения

1. Укажите двоичный код Грея, соответствующий шестизначному весовому числу, представленному в десятичной системе:

1) (ПАФ) 32; 3) (862) 12; 5) (ОВЗ) 19;
2) (СГИ) 24; 4) (035) 36; 6) (ВДК) 40.

2. Назовите десятичные эквиваленты двоичных чисел (в порядке их возрастания), которые в принципе могут быть считаны фотодатчиками с диска на границе секторов с номерами (рис. 239):

1) (ТЭЛ) 5 и 6; 2) (МТМ) 9 и 10; 3) (ИКЭ) 13 и 14.

17.23. ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ КОДА ГРЕЯ В ВЕСОВОЙ ДВОИЧНЫЙ КОД

Числа, формируемые преобразователем угла поворота вала в код Грея, обычно подвергаются дальнейшей обработке при помощи компьютера либо специализированного устройства. Однако прежде чем обрабатывать эти числа, их необходимо представить в обычной весовой системе счисления, так как операции над невесовыми кодами Грея являются очень сложными.

Для построения преобразователя кода Грея в весовую двоичную систему счисления воспользуемся тем, что если $b_i = a_i \oplus a_{i+1}$, то

$$a_i = b_i \oplus a_{i+1}. \qquad (21)$$

Таблица 29

$b_i\ a_i\ a_{i+1}$	$b_i = a_i \oplus a_{i+1}$	$a_i = b_i \oplus a_{i+1}$
0 0 0	$0 = 0 \oplus 0$	$0 = 0 \oplus 0$
0 0 1	$0 \neq 0 \oplus 1$	$0 \neq 0 \oplus 1$
0 1 0	$0 \neq 1 \oplus 0$	$1 \neq 0 \oplus 0$
0 1 1	$0 = 1 \oplus 1$	$1 = 0 \oplus 1$
1 0 0	$1 \neq 0 \oplus 0$	$0 \neq 1 \oplus 0$
1 0 1	$1 = 0 \oplus 1$	$0 = 1 \oplus 1$
1 1 0	$1 = 1 \oplus 0$	$1 = 1 \oplus 0$
1 1 1	$1 \neq 1 \oplus 1$	$1 \neq 1 \oplus 1$

Убедиться в справедливости этого далеко не очевидного утверждения можно путем сплошного перебора значений всех переменных. Полный их перечень приведен в табл. 29, из которой видно, что на каждом наборе значений переменных b_i, a_i и a_{i+1} в обоих выражениях имеет место либо равенство левой и правой частей, либо в обоих случаях левая часть не равна правой, что и доказывает справедливость утверждения (21).

Пусть $n = 5$, т. е. на вход преобразователя поступают пятизначные коды Грея вида $b_5\ b_4\ b_3\ b_2\ b_1$. Тогда на выход должны проходить весовые двоичные числа $a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1$, где a_5 — старший разряд, a_1 — младший.

Выходные сигналы являются функциями входных. Их список, полученный из формулы (21), имеет вид:

$$\begin{aligned}
&a_5 = b_5;\\
&a_4 = b_4 \oplus a_5 = b_4 \oplus b_5;\\
&a_3 = b_3 \oplus a_4 = b_3 \oplus b_4 \oplus b_5;\\
&a_2 = b_2 \oplus a_3 = b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_5;\\
&a_1 = b_1 \oplus a_2 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_5.
\end{aligned}$$

Комбинационная схема, реализующая эту систему функций, приведена на рис. 240 в виде ленточной однородной среды, i-я ячейка которой имеет один информационный вход b_i, один соединительный вход, связывающий

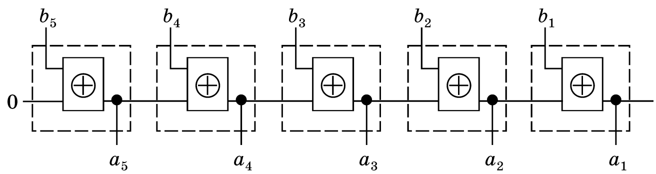


Рис. 240

ячейки между собой, один информационный выход a_i и один соединительный выход, совпадающий с информационным ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

На соединительный вход ячейки старшего разряда необходимо подать низкий (нулевой) уровень напряжения. Если же подать высокий (единичный) уровень, то каждая цифра выходного кода проинвертируется и на выход преобразователя поступит обратный (проинвертированный, инверсный) код.

Упражнения

1. На вход преобразователя (рис. 240) поступило пятизначное число b в коде Грея. Найдите выходное число в весовой двоичной системе, если:

1) (ЗРЗ) $b = 00111$; 3) (БК5) $b = 01101$; 5) (ЕВХ) $b = 10001$;
2) (291) $b = 11011$; 4) (294) $b = 10111$; 6) (ШИК) $b = 11100$.

2. На соединительный вход левой ячейки (рис. 240) подан единичный уровень напряжения. Найдите выходной код, если входное число b равно:

1) (МЕЛ) $b = 10000$; 3) (ОЗФ) $b = 01010$; 5) (459) $b = 00000$;
2) (ИРН) $b = 11111$; 4) (БТХ) $b = 01110$; 6) (128) $b = 00010$.

17.24. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РЕФЛЕКСНОГО КОДА В ДВОИЧНЫЙ ВЕСОВОЙ КОД

Кроме кодов Грея, существует большое число других рефлексных кодов. Все их можно получить при помощи карты Вейча n переменных, если учесть, что двоичные номера минтермов, расположенных в соседних клетках карты, отличаются друг от друга только в одном разряде (напомним: клетки на карте являются соседними, если соответствующие им минтермы склеиваются). Выберем какую-либо клетку на карте и запишем ее номер. Перейдем в соседнюю клетку и новый номер запишем справа от прежнего и т. д. На рис. 241 показан вариант обхода карты. Если начать с нулевого номера, то получим рефлексный код, представленный в табл. 30. Слева в этой таблице указаны обычные двоичные (весовые) числа, а справа — соответствующие им невесовые числа рефлексного двоичного кода.

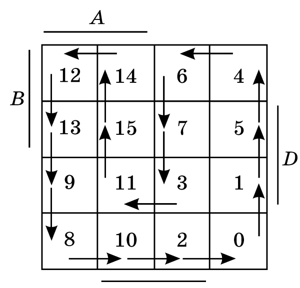


Рис. 241

Обычно в таблицах соответствия в левой части записывают входные коды преобразователя, а в правой указывают, во что должны быть преобразованы подаваемые на вход коды. Это значит, что по табл. 30 можно построить преобразователь весовых двоичных кодов в рефлексные. Но в данном случае нас интересует обратная задача — преобразование рефлексного кода в весовой двоичный. Чтобы построить преобразователь рефлексного кода в двоичный весовой, левую и правую части табл. 30 необходимо поменять местами. Получим табл. 31. Буквами A, B, C, D в ней обозначены двоичные разряды входных чисел преобразователя, символами f_1, f_2, f_3, f_4 — его выходы.

Таблица 30

8 4 2 1	Рефлексные коды
0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 1	0 0 0 1
0 0 1 0	0 1 0 1
0 0 1 1	0 1 0 0
0 1 0 0	0 1 1 0
0 1 0 1	0 1 1 1
0 1 1 0	0 0 1 1
0 1 1 1	1 0 1 1
1 0 0 0	1 1 1 1
1 0 0 1	1 1 1 0
1 0 1 0	1 1 0 0
1 0 1 1	1 1 0 1
1 1 0 0	1 0 0 1
1 1 0 1	1 0 0 0
1 1 1 0	1 0 1 0
1 1 1 1	0 0 1 0

Таблица 31

	Рефлексные коды	8 4 2 1
	$A\,B\,C\,D$	$f_1\,f_2\,f_3\,f_4$
0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	0 0 0 1	0 0 0 1
5	0 1 0 1	0 0 1 0
4	0 1 0 0	0 0 1 1
6	0 1 1 0	0 1 0 0
7	0 1 1 1	0 1 0 1
3	0 0 1 1	0 1 1 0
11	1 0 1 1	0 1 1 1
15	1 1 1 1	1 0 0 0
14	1 1 1 0	1 0 0 1
12	1 1 0 0	1 0 1 0
13	1 1 0 1	1 0 1 1
9	1 0 0 1	1 1 0 0
8	1 0 0 0	1 1 0 1
10	1 0 1 0	1 1 1 0
2	0 0 1 0	1 1 1 1

Старшему разряду выходного числа соответствует выход f_1, младшему — f_4. Рассматривая табл. 31 как таблицу соответствия для четырех функций, получаем систему функций:

$$f_1 = AB + A\overline{C} + \overline{B}C\overline{D}; \qquad f_3 = B\overline{C} + \overline{B}C;$$
$$f_2 = \overline{A}C + A\overline{B}; \qquad f_4 = S_3 + S_1,$$

где S_1 и S_3 — симметрические функции с a-числами, равными 1 и 3:

$$S_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D};$$
$$S_3 = ABC\overline{D} + AB\overline{C}D + A\overline{B}CD + \overline{A}BCD.$$

Так как функция f_4 не поддается минимизации в смысле Квайна, то для ее реализации следует использовать однородную структуру «чет-нечет» (см. подраздел 17.16).

В последовательность рефлексного кода может входить и меньшее количество чисел, чем 2^n. Например, для кодирования десятичных цифр можно использовать последовательность вида

0000, 0010, 1010, 1011, 1111, 1101, 1100, 1110, 0110, 0100.

Если учесть, что на вход преобразователя будут подаваться только эти числа, то при разработке соответствующей комбинационной схемы неиспользуемые коды можно рассматривать как неопределенные состояния. С учетом этого список минимальных ДНФ булевых функций, описывающих комбинационную схему преобразователя, имеет вид:

$$f_1 = \overline{A}B;$$
$$f_2 = AB;$$
$$f_3 = A\overline{D} + A\overline{B};$$
$$f_4 = \overline{C}D + \overline{B}D + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + ABC\overline{D}.$$

Замкнутая последовательность чисел рефлексного кода, когда первое и последнее числа отличаются друг от друга также лишь в одном разряде, всегда содержит четное количество чисел. Если число кодов в последовательности нечетно, то эта последовательность всегда разомкнута.

Упражнения

1. Постройте комбинационную схему, преобразующую рефлексные коды 0011, 0010, 1010, 1011, 1001, 1101, 1111, 0111, 0101, 0001 в двоичные весовые коды десятичных цифр. Отсутствующие в рефлексном коде двоичные комбинации считать неопределенными состояниями. Входному коду 0011 соответствует выходной код 0000. Сколько вхождений неинверсных и сколько инверсных аргументов имеет минимальная ДНФ функции:

1) (ЯРФ) f_1, 2) (922) f_2, 3) (АРЗ) f_3, 4) (734) f_4?

Здесь функция f_1 соответствует старшему разряду выходного кода.

2. Пусть комбинационный преобразователь (см. предыдущее упражнение) построен на основе минимальных ДНФ булевых функций.

1) (ПОЧ)! Сколько в схеме трехвходовых элементов И? Сколько трехвходовых элементов ИЛИ?

2) (МОК)! Сколько в схеме четырехвходовых элементов И? Сколько четырехвходовых элементов ИЛИ?

3. (СИЛ). Укажите номера последовательностей, которые представляют собой разомкнутый рефлексный код:

1) 0001, 0101, 0111, 1111, 1101;
2) 0010, 0011, 0111, 0110, 1110, 1111, 1011, 1010;
3) 0111, 0101, 0001, 0000, 0010, 1010, 1000, 1001;
4) 0000, 0100, 0110, 1110, 0111, 0010, 0011;
5) 1001, 1100, 1010, 1011, 1001;
6) 1100, 1101;
7) 1110, 0110, 0111, 1111;
8) 1110, 1100, 1000, 0000, 0001, 0011, 0111;
9) 1001, 1101, 1011, 110.

18 ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПОЛНОТА СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

18.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЫ

При помощи трех логических элементов, реализующих булевы операции конъюнкции, дизъюнкции и инверсии, может быть построена любая комбинационная схема. Это значит, что достаточно освоить массовый выпуск логических элементов И, ИЛИ, НЕ, и специалисты по вычислительной технике получат в свое распоряжение набор элементов, обеспечивающий возможность построения любых вычислительных устройств дискретного действия. Такие наборы (базисы, согласно [16]) принято называть **функционально полными**.

Возникают вопросы: верно ли, что элементы И, ИЛИ, НЕ действительно образуют полный набор и как это доказать? Нельзя ли обойтись двумя элементами, т. е. не образуют ли функционально полный набор, например, элементы И и ИЛИ? Может быть, следует выпускать не простейшие логические схемы И, ИЛИ, НЕ, а какие-либо другие, реализующие более сложные булевы функции, допустим, такие как

$$f_1 = AB + \bar{A}\,\bar{B}; \quad f_2 = A\bar{B} + BC + \bar{D}; \quad f_3 = ABC + \bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D} + E\bar{F}$$

и др.? Можно ли обойтись одним логическим элементом и как убедиться в том, что он является универсальным, т. е. сам по себе образует функционально полный набор? На все подобные вопросы ответы дает теорема о функциональной полноте, сформулированная и доказанная выдающимся американским математиком Эмилем Л. Постом (иногда ее называют теоремой Поста–Яблонского [14]). Этой теореме посвящен основной материал данного раздела. Но сначала изучим основные свойства пяти замечательных классов булевых функций: самодвойственных, линейных, монотонных, сохраняющих нуль и сохраняющих единицу. Затем сформулируем теорему о функциональной полноте и рассмотрим все функции двух переменных. Завершим раздел обзором базовых систем элементарных булевых функций, где каждая система обладает функциональной полнотой.

18.2.
САМОДВОЙСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Функция называется **самодвойственной**, если имеет место равенство

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \bar{f}(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n). \tag{22}$$

Согласно определению самодвойственная функция на противоположных наборах значений аргументов принимает противоположные значения. Два набора называются противоположными (взаимно инверсными), если их арифметическая сумма в десятичном представлении есть число $2^n - 1$, где n — число разрядов в каждом наборе. По заданному набору найти ему противоположный очень легко: достаточно в заданной двоичной последовательности нули заменить единицами, а единицы — нулями. Например, если 01100 — заданный набор, то противоположный ему — 10011.

В левой части табл. 32 перечислены все четырехзначные наборы значений аргументов A, B, C, D, расположенные в возрастающей последовательности, если наборы рассматривать как натуральные числа, представленные в двоичной системе. В таблице наблюдается своеобразная симметрия: наборы, расположенные на одинаковых расстояниях от начала и конца таблицы, являются противоположными. Это значит, что в диапазоне наборов 0000–0111 включительно в колонке, где записываются значения функции, единицы и нули можно располагать произвольно. При этом всякий раз будет получаться самодвойственная функция, если на противоположных наборах всюду записывать противоположные значения функции. В табл. 32 приведены три примера самодвойственных функций:

Таблица 32

	$A\ B\ C\ D$	$f_1\ f_2\ f_3$
0	0 0 0 0	1 1 0
1	0 0 0 1	1 1 0
2	0 0 1 0	0 1 0
3	0 0 1 1	0 1 0
4	0 1 0 0	1 1 1
5	0 1 0 1	0 1 0
6	0 1 1 0	1 1 0
7	0 1 1 1	1 0 1
8	1 0 0 0	0 1 0
9	1 0 0 1	0 0 1
10	1 0 1 0	1 0 1
11	1 0 1 1	0 0 0
12	1 1 0 0	1 0 1
13	1 1 0 1	1 0 1
14	1 1 1 0	0 0 1
15	1 1 1 1	0 0 1

$$f_1 = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + \bar{A}\,\bar{C}\,\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D};$$
$$f_2 = \bar{A}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B} + \bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}; \tag{23}$$
$$f_3 = B\bar{C}\,\bar{D} + BCD + AC\bar{D} + A\bar{C}D. \tag{24}$$

Сколько существует самодвойственных функций? При $n = 4$ значения функции произвольно выбираются только на восьми наборах, следовательно, всего существует 256 самодвойственных функций четырех аргументов. При n аргументах значения функции произвольно выбираются на половине всех возможных наборов, следовательно, число N самодвойственных функций равно:

$$N = 2^{2^{n-1}}.$$

Класс самодвойственных функций функционально замкнут. Доказательство этого утверждения можно найти в [32].

Что это значит: класс функционально замкнут? Пусть дано множество всех возможных самодвойственных функций. Выберем из них некоторую функцию и применим к ней операцию суперпозиции, т. е. вместо какого-либо аргумента подставим другую самодвойственную функцию. Получится новая функция. Может ли она быть несамодвойственной? Нет, применение операции суперпозиции в классе самодвойственных функций всегда дает только самодвойственные функции.

С технической точки зрения это значит, что если логический элемент реализует самодвойственную функцию, то он не является универсальным, т. е. из таких элементов несамодвойственную функцию реализовать невозможно.

Рассмотрим пример. Подставим функцию (23) вместо аргумента A функции (24). Получится новая функция f_4:

$$f_4 = B\overline{C}\overline{D} + BCD + f_2C\overline{D} + f_2\overline{C}D = \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}C\overline{D} + BCD + B\overline{C}\overline{D}.$$

Эта функция является самодвойственной, в чем нетрудно убедиться, если ее представить в виде таблицы соответствия.

Упражнения

1. Сколько существует самодвойственных функций:

1) (МУ1) двух переменных?
3) (2У3) трех переменных?
2) (УП2) пяти переменных?
4) (В54) одной переменной?

2. Укажите десятичные эквиваленты наборов, которые являются противоположными наборам вида:

1) (НИЙ) 00110; 2) (УМК) 110010; 3) (Ш97) 1001.

3. Сколько существует наборов значений аргументов, на которых самодвойственная функция принимает единичное значение, если она зависит от:

1) (Х00) пяти аргументов?
3) (ЗУБ) шести аргументов?
2) (ШАВ) трех аргументов?
4) (2ПТ) n аргументов?

4. (УС2). Самодвойственная функция трех переменных принимает единичное значение на наборах 0, 1, 2, 4. Укажите десятичные эквиваленты наборов, на которых эта функция принимает нулевое значение.

5. Укажите номера самодвойственных функций:

I. (Н28)

1) $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}$;
2) $f = A\overline{B} + \overline{A}B$;
3) $f = A$;
4) $f = \overline{A}$;
5) $f = AB + A\overline{C} + B\overline{C}$;
6) $f = A\overline{C} + BC$;
7) $f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}$;

II. (ЛУН)

1) $f = A\overline{C}\,\overline{D} + ABC + \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}$;
2) $f = A\overline{B}\,\overline{C} + ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}D$;
3) $f = A\overline{C}\,\overline{D} + ACD + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}D$;
4) $f = AB\overline{C} + AC\overline{D} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$;
5) $f = A\overline{C}D + ABC + \overline{A}CD + \overline{A}B\overline{C}$;
6) $f = A\overline{B}\,\overline{C} + ACD + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}D$;
7) $f = A\overline{C}\,\overline{D} + ABC + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}$.

18.3. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Функция называется **линейной**, если в алгебре Жегалкина она может быть представлена в виде полинома первой степени (т. е. без конъюнкций). Например, функции

$$f_1 = A \oplus B, \ \ f_2 = A \oplus B \oplus C \oplus 1, \ \ f_3 = B \oplus 1$$

являются линейными. Функция $f = AC \oplus B$ содержит конъюнкцию, поэтому не относится к классу линейных.

Если n — число аргументов, то все линейные функции можно получить из выражения

$$f = a_0 \oplus a_1A_1 \oplus a_2A_2 \oplus ... \oplus a_nA_n, \tag{25}$$

где $A_1, A_2, ..., A_n$ — логические переменные; $a_0, a_1, ..., a_n$ — коэффициенты, равные нулю либо единице.

Каждому набору коэффициентов соответствует некоторая линейная функция. Так как всего имеется $n + 1$ коэффициентов, то число M линейных функций равно:

$$M = 2^{n+1}.$$

Например, если $n = 0$ (логические аргументы отсутствуют), то $M = 2$. Это значит, что функции константа нуль и константа единица являются линейными.

Пусть задана булева функция, выраженная через операции И, ИЛИ, НЕ. Для того чтобы установить, является ли она линейной, ее необходимо перевести в алгебру Жегалкина. Если после упрощения в полиноме Жегалкина не останется конъюнкций, то, как было сказано выше, заданная функция является линейной. Например:

$$f = AB + \bar{A}\,\bar{B}.$$

Переведем эту функцию в алгебру Жегалкина:

$$f = AB + \bar{A}\,\bar{B} = AB \oplus (1 \oplus A)(1 \oplus B) = AB \oplus 1 \oplus A \oplus B \oplus AB = A \oplus B \oplus 1.$$

Таким образом, функция $f = AB + \bar{A}\,\bar{B}$ относится к классу линейных.

Класс линейных функций является функционально замкнутым, т. е. в результате суперпозиции линейных функций будут получаться только линейные функции. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, подставим вместо какого-либо аргумента, например A_1, выражения (25) линейную функцию вида

$$f_1 = b_0 \oplus b_1B_1 \oplus b_2B_2 \oplus ... \oplus b_kB_k.$$

Тогда получим:

$$f' = a_0 \oplus a_1(b_0 \oplus b_1B_1 \oplus ... \oplus b_kB_k) \oplus a_2A_2 \oplus ... \oplus a_nA_n.$$

Очевидно, что при $a_1 = 0$ имеем $f' = f$, где f — это выражение (25), представляющее собой линейную функцию. Если же $a_1 = 1$, то функция f', если в ней раскрыть скобки, будет содержать конъюнкции только констант, следовательно, и в этом случае функция f' окажется линейной.

Упражнения

1. Укажите номера линейных функций:

I. (УИФ)	II. (У32)
1) $f_1 = A + B$;	1) $f_1 = \overline{ABC}$;
2) $f_2 = A \oplus C$;	2) $f_2 = ABC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$;
3) $f_3 = A \oplus 1$;	3) $f_3 = AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$;
4) $f_4 = \bar{A}$;	4) $f_4 = A + B + C + D$;
5) $f_5 = 1$;	5) $f_5 = AB \oplus A \oplus B \oplus AB$;
6) $f_6 = AB$;	6) $f_6 = \overline{A \oplus B}$;
7) $f_7 = A + B + C$;	7) $f_7 = A + B + 1$.

2. Сколько существует линейных функций, если число переменных:

1) (Т53) равно 5? 2) (Ц84) равно 6? 3) (Д75) равно 9?

3. (ААК). Укажите номера верных утверждений:

1) если f — линейная булева функция, то $\bar{f}$ — также является линейной функцией;

2) если f_1 и f_2 — линейные функции, то при $f_1 \neq f_2$ их дизъюнкция всегда является нелинейной функцией;

3) если f_1 и f_2 — линейные булевы функции, то при $f_1 \neq f_2$ их конъюнкция всегда является нелинейной функцией;

4) если f — нелинейная булева функция, то конъюнкция этой функции и ее инверсии есть линейная функция;

5) если f — нелинейная булева функция, то ее инверсия есть линейная функция;

6) если f — нелинейная булева функция, то $f \oplus f$ является линейной функцией;

7) если f — нелинейная булева функция, то дизъюнкция этой функции и ее инверсии есть линейная функция.

4. (317). Укажите номера верных утверждений:

1) всякая линейная функция самодвойственна;

2) всякая самодвойственная функция линейна;

3) если f_1 — линейная функция, а f_2 — нелинейная, то их дизъюнкция не всегда является нелинейной функцией;

4) если f_1 — линейная функция, а f_2 — нелинейная, то их сумма по модулю два всегда нелинейна;

5) инверсия всякой линейной функции является нелинейной функцией;

6) применяя операцию суперпозиции к нелинейной функции, всегда можно получить линейную функцию;

7) всякая симметрическая функция линейна.

18.4. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

Булева функция n аргументов называется **монотонной**, если при любом возрастании наборов значений аргументов значения функции не убывают [6].

Появилось новое понятие — **возрастающие наборы**. Пусть даны два набора:

$$a = a_1\, a_2\, ...\, a_{n-1}\, a_n; \quad b = b_1\, b_2\, ...\, b_{n-1}\, b_n,$$

где a_i и b_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$) — двоичные значения отдельных разрядов наборов a и b. Если одновременно выполняются условия:

$$b_1 \geqslant a_1, b_2 \geqslant a_2, ..., b_{n-1} \geqslant a_{n-1}, b_n \geqslant a_n, \tag{26}$$

то $b \geqslant a$. Говорят, что набор b не меньше набора a.

Наборы, на которых выполняются условия (26), называются **сравнимыми**. Все остальные наборы называются **несравнимыми**. Например, относительно наборов

$$a = 010010 \text{ и } b = 100011$$

нельзя сказать, что $b \geqslant a$ или $a \geqslant b$, так как для первых разрядов: $b_1 > a_1$, а для вторых: $a_2 > b_2$.

Таблица 33

	$A\,B\,C$	f
0	0 0 0	0
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	0
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	1

В вышеприведенном определении монотонной функции говорится только о сравнимых наборах. В связи с этим необходимо отметить, что на несравнимых наборах значения монотонной функции могут и убывать, т. е. переходить с единичного значения на нулевое. Например, в табл. 33 показано, что при переходе с набора 010 на сравнимый с ним набор 011 функция возрастает, а при переходе с набора 011 на несравнимый с ним набор 100 — убывает.

На несравнимых наборах функция может не только убывать, но и оставаться неизменной.

Всякая монотонная функция имеет единственную минимальную ДНФ, которая совпадает с сокращенной ДНФ, и единственную минимальную КНФ, совпадающую с сокращенной КНФ, причем обе формы не содержат инверсных аргументов. Например, в результате минимизации функции

$$f = (3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

получаем минимальные ДНФ и КНФ, в которые все переменные входят без знаков отрицания:

$$f = AB + AC + BD + CD; \;\; f = (A + D)(B + C).$$

Верно и обратное утверждение: если в аналитической записи функции отсутствуют инверсные аргументы, то функция является монотонной. Это утверждение можно использовать в качестве критерия для распознавания монотонных функций. Если же распознавание осуществляется при помощи таблицы соответствия, то в общем случае следует проверить все пары наборов, число N которых равно:

$$N = C_{2^n}^2 = 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{2n-1} - 2^{n-1},$$

где n — число двоичных знаков в наборе. Например, в случае трехразрядных наборов необходимо проверить 28 пар, в случае четырехразрядных — 120 и т. д. Очевидно, что метод перебора всех пар наборов достаточно эффективен лишь при использовании компьютера.

Монотонные функции образуют функционально замкнутый класс. Это значит, что никакая система монотонных функций не обладает функциональной полнотой. Доказательство этого утверждения можно найти в [32].

Упражнения

1. Укажите пары, содержащие сравнимые наборы:

I. (БАШ)	II. (ЖУЖ)
1) 01100 и 11100;	1) 1100 и 11000;
2) 00000 и 11111;	2) 0000 и 11111;
3) 00001 и 00010;	3) 1111 и 1111;
4) 11100 и 11100;	4) 10101 и 01010;
5) 0011 и 1100;	5) 10001 и 11101;
6) 1001 и 1001;	6) 00000 и 10000;
7) 10001 и 01110;	7) 10000 и 00001.

2. (ЮАИ). Укажите номера наборов, которые больше набора 10001:

1) 11100;	4) 10000;	7) 10001;
2) 01101;	5) 10011;	8) 11110;
3) 11001;	6) 11111;	9) 11011.

3. Укажите номера монотонных функций:

I. (ШВЕ)	II. (А73)
1) $f_1 = ABC$;	1) $f_1 = A(\bar{A} + B)$;
2) $f_2 = \underline{A + B + C}$;	2) $f_2 = AB + A\bar{B}$;
3) $f_3 = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$;	3) $f_3 = A\bar{B} + \bar{A}B$;
4) $f_4 = 0$;	4) $f_4 = AB + \bar{A}\,\bar{B}$;
5) $f_5 = A + \bar{A}$;	5) $f_5 = (A + B)(A + \bar{B})$;
6) $f_6 = A(\bar{A} + \bar{B})$;	6) $f_6 = ABC + \bar{A}\,\bar{B}C$;
7) $f_7 = A + \bar{A}B$;	7) $f_7 = AB\bar{C} + A\bar{B}C$.

4. Укажите номера монотонных функций:

I. (ТАМ)	II. (КП7)
1) $f_1 = AB + \bar{A}BC$;	1) $f_1 = S_4(A, B, C, D)$;
2) $f_2 = (A + B)(\bar{A} + B + C)$;	2) $f_2 = S_{2,3}(A, B, C, D)$;
3) $f_3 = A + \bar{B}C$;	3) $f_3 = S_{2,3,4}(A, B, C, D)$;
4) $f_4 = AB\bar{C} + C$;	4) $f_4 = A + B + \bar{A}\,\bar{B}$;
5) $f_5 = B + \bar{A}C$;	5) $f_5 = A + B + C + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$;
6) $f_6 = C + A\,\bar{B}\,\bar{C}$;	6) $f_6 = S_{1,2}(A, B, C, D)$;
7) $f_7 = AB + AC + A\,\bar{B}\,\bar{C}$;	7) $f_7 = S_{3,4}(A, B, C, D)$.

5. (ЕТК). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) может ли линейная функция быть монотонной?

2) может ли самодвойственная функция быть монотонной?

3) существуют ли монотонные функции, инверсии которых представляют собой монотонные функции?

4) является ли монотонной конъюнкция двух монотонных функций?

5) всегда ли функция немонотонна, если в ее аналитической записи есть инверсные аргументы?

6) верно ли, что если в ДНФ функции нет инверсных аргументов и все простые импликанты различны, то она представлена в минимальной форме?

7) всегда ли монотонна функция $f_1 \oplus f_2$, если f_1 и f_2 — монотонные функции?

18.5.
ФУНКЦИИ, СОХРАНЯЮЩИЕ ЕДИНИЦУ

Булева функция **сохраняет единицу**, если на единичном наборе значений аргументов она принимает единичное значение. Набор называется **единичным**, если он состоит только из единиц, то есть в нем нет нулей. Примером функции, сохраняющей единицу, может служить выражение

$$f = AB\overline{C} + BCD + \overline{A}\,\overline{C}D.$$

Если в этом выражении принять $A = B = C = D = 1$ (набор имеет вид 1111), то функция примет единичное значение. Функция

$$f = \overline{A}BC + BC\overline{D} + A\overline{C}\overline{D}$$

не сохраняет единицу, так как $f = 0$ при $A = B = C = D = 1$.

Пусть некоторая булева функция представлена в СДНФ. Чтобы определить, сохраняет она единицу или не сохраняет, достаточно выяснить, входит ли в нее минтерм с максимальным индексом, т. е. с индексом, равным $2^n - 1$, где n — число аргументов функции. Например, функция трех аргументов сохраняет единицу, если в нее входит минтерм m_7. Функция четырех аргументов сохраняет единицу, если в нее входит минтерм m_{15}, и т. д.

Пусть функция представлена в произвольной ДНФ. Чтобы узнать, сохраняет ли она единицу, нет необходимости вычислять ее значение на единичном наборе. Достаточно выяснить, входит ли в нее хотя бы одна конъюнкция без инверсий. Если такая конъюнкция есть, то функция сохраняет единицу, поскольку во всякую конъюнкцию, не содержащую инверсий, входит минтерм с индексом $2^n - 1$. В этом легко убедиться, если конъюнкцию, в которой нет инверсий, разложить по всем не входящим в нее переменным. Пусть, например, некоторая функция $f(A, B, C, D)$ содержит конъюнкцию AC. В результате разложения ее по переменным B и D получаем:

$$AC = A(\overline{B} + B)C(\overline{D} + D) = A\,\overline{B}C\overline{D} + A\,\overline{B}CD + A\,BC\overline{D} + A\,BCD.$$

Из этого выражения видно, что в конъюнкцию AC входит минтерм $m_{15} = ABCD$, следовательно, заданная функция $f(A, B, C, D)$ сохраняет единицу.

Функция, представленная в КНФ, сохраняет единицу, если в каждую ее дизъюнкцию входит хотя бы один неинверсный аргумент. Примером может служить функция вида

$$\varphi = (A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + C)(A + \overline{B} + D).$$

Если в этом выражении раскрыть скобки, т. е. представить его в ДНФ, то среди всех конъюнкций окажутся выражения AC и ACD, в которые входит минтерм m_{15}. Следовательно, функция φ сохраняет единицу.

Сколько существует функций n аргументов, сохраняющих единицу? Определить это очень легко. В каждую из этих функций входит минтерм с индексом $2^n - 1$. Все остальные минтермы, число которых равно $2^n - 1$, могут входить в функцию в любых сочетаниях. Следовательно, число R функций, сохраняющих единицу, равно

$$R = 2^{2^n - 1}.$$

При $n = 0$ имеем $R = 1$. Это функция — константа единица.

Если $n = 1$, то $R = 2$. Это функции $f = 1$ и $f = A$.

Если $n = 2$, то $R = 8$, и т. д. Таким образом, половина всех функций n аргументов сохраняет единицу и половина — не сохраняет.

Функции, сохраняющие единицу, образуют функционально замкнутый класс, т. е. если в этом классе применять операцию суперпозиции, то всегда будут получаться только функции, сохраняющие единицу. Доказательство можно найти в [6].

Упражнения

1. (ОАФ). Укажите значения следующих функций на наборе 1111:

1) $f = \overline{A}\,B + \overline{C}D$; 3) $f = A(B + C\overline{D})$; 5) $f = A + B + C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$;

2) $f = BCD + \overline{A}BC$; 4) $f = (A + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})D$; 6) $f = (\overline{A} + B)(B + \overline{C})(\overline{C} + \overline{D})$.

2. Укажите функции, сохраняющие единицу:

I. (Р52)	II. (ЗИЦ)
1) $f = AB + \overline{C}$;	1) $f = A \oplus B$;
2) $f = A(\overline{B} + C)$;	2) $f = A + \overline{A}$;
3) $f = (B + C)(A + B)\overline{D}$;	3) $f = (B + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D})\overline{D}$;
4) $f = (B + \overline{C})A + \overline{A}C$;	4) $f = A\,BC + \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.

3. Сколько существует булевых функций, сохраняющих единицу, если они зависят:

1) (Т86) от трех переменных? 2) (С57) от четырех переменных?

4. Укажите функции, сохраняющие единицу:

I. (ТВИ)	II. (РВ5)
1) $f = (A + B)(A + B)$;	1) $f(A, B, C, D) = (0, 1, 4, 7)$;
2) $f = (A + B\overline{C})\overline{A}$;	2) $f = S_{2,3,4}(A, B, C, D)$;
3) $f = A$;	3) $f = \overline{S}_{0,1,2}(A, B, C, D)$;
4) $f = BC + \overline{C}D$;	4) $f = \overline{A + B}\,CD$;
5) $f = (A + \overline{A})(B + \overline{B})$;	5) $f = (B + C)\,\overline{\overline{B} + \overline{C}}$;
6) $f = \overline{A}(A + \overline{A})$;	6) $f = A + \overline{\overline{B}(\overline{C} + D)}$;
7) $f = (A + B)(B + C)\overline{D}$;	7) $f = \overline{A} + \overline{\overline{B}(\overline{C} + D)}$.

5. (Ф78). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что функция $\overline{f}$ не сохраняет единицу, если функция f единицу сохраняет?

2) верно ли, что всякая линейная функция не сохраняет единицу?

3) верно ли, что существуют самодвойственные функции, не сохраняющие единицу?

4) верно ли, что всякая монотонная функция сохраняет единицу?

5) верно ли, что функция $f_1 + f_2$ сохраняет единицу, если функция f_1 сохраняет единицу, а f_2 — не сохраняет?

6) верно ли, что функция $f_1\,f_2$ сохраняет единицу, если функция f_1 сохраняет единицу, а f_2 — не сохраняет?

7) верно ли, что функция $f_1 \oplus f_2$ сохраняет единицу, если единицу сохраняют обе функции?

18.6. ФУНКЦИИ, СОХРАНЯЮЩИЕ НУЛЬ

Булева функция **сохраняет нуль**, если на **нулевом наборе** она принимает нулевое значение. Нулевой набор состоит из n нулей, где n — число аргументов булевой функции. Например, функция

$$f = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}CD$$

сохраняет нуль, так как она равна нулю на наборе 0000.

Функция

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{C}D$$

не сохраняет нуль, поскольку на нулевом наборе она принимает единичное значение.

Функция, представленная в СДНФ, сохраняет нуль, если в нее не входит нулевой минтерм m_0.

Булева функция, представленная в ДНФ, сохраняет нуль, если в ее записи нет ни одной конъюнкции, содержащей только инверсные переменные. Например, функция

$$f = \overline{A}B + BC\overline{D} + AC\overline{D}$$

сохраняет нуль, так как неинверсные аргументы есть в каждой конъюнкции. При подстановке значений $A = B = C = D = 0$ все конъюнкции становятся равными нулю, вследствие чего и сама функция принимает нулевое значение.

Функция, представленная в КНФ, сохраняет нуль, если в ее записи содержится хотя бы одна дизъюнкция (скобочное выражение), все аргументы которой не содержат инверсий. Например, функция

$$f = (\overline{A} + B)(B + C + D)(A + B + \overline{D})$$

сохраняет нуль, так как дизъюнкция $B + C + D$ не содержит инверсных переменных, следовательно, на нулевом наборе она равна нулю, вследствие чего и вся функция принимает нулевое значение.

Функция, заданная в КНФ, сохраняет нуль и в том случае, если в ее записи имеется хотя бы один неинверсный аргумент, находящийся за скобками. Например:

$$f = (A + \overline{B})(\overline{A} + B + \overline{C})D.$$

Буква D в этом выражении находится за скобками. На нулевом наборе $D = 0$, следовательно, и $f = 0$, т. е. функция сохраняет нуль.

Сколько существует функций, сохраняющих нуль? Если в функцию входит минтерм m_0, то функция нуль не сохраняет, так как на нулевом наборе значений аргументов она равна единице. Следовательно, число Q функций, не сохраняющих нуль, равно:

$$Q = 2^{2^n - 1}.$$

Все остальные функции нуль сохраняют. Число V сохраняющих нуль функций равно:

$$V = 2^{2^n} - 2^{2^n - 1} = 2^{2^n - 1}.$$

Таким образом, число функций, сохраняющих нуль, равно числу функций, нуль не сохраняющих.

Функции, сохраняющие нуль, образуют функционально замкнутый класс, т. е. применение операции суперпозиции к функциям, сохраняющим нуль, всегда дает только сохраняющие нуль функции.

Доказательство этого можно найти в [6].

Упражнения

1. Укажите номера функций, равных нулю на нулевых наборах значений всех аргументов:

I. (2Д2)

1) $f = A\bar{B} + BC + AC$;
2) $f = A + \bar{B}$;
3) $f = ABC + \bar{B}\bar{C} + \bar{D}$;
4) $f = \bar{A}B + A\bar{B}$;
5) $f = AB + BC + \bar{C}\bar{D}$;
6) $f = \bar{A} + \bar{B}$;
7) $f = \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}$;

II. (МЯЛ)

1) $f = (A + \bar{B})(\bar{B} + \bar{C})(C + D)$;
2) $f = A(\bar{B} + \bar{C})(D + E)$;
3) $f = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(\bar{D} + \bar{E})F$;
4) $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C}(D + \bar{E} + F)$;
5) $f = (\bar{A} + \bar{B})D(\bar{E} + \bar{F})$;
6) $f = (\bar{A} + \bar{B})\bar{D}(\bar{E} + \bar{F})$;
7) $f = (A + \bar{B})\bar{D}(\bar{E} + F)$.

2. (ШУМ). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что инверсия функции, сохраняющей нуль, нуль не сохраняет?

2) верно ли, что всякая сохраняющая нуль функция сохраняет единицу?

3) всякая ли монотонная функция сохраняет нуль?

4) существуют ли функции, одновременно сохраняющие нуль и сохраняющие единицу?

5) сохраняет ли нуль функция $f_1 + f_2$, если f_1 и f_2 — функции, сохраняющие нуль?

6) сохраняет ли нуль функция $f_1\, f_2$, если функция f_1 нуль сохраняет, а функция f_2 — не сохраняет?

3. Укажите функции, сохраняющие нуль:

I. (ЛУШ)

1) $f = A$;
2) $f = B\bar{C}D\bar{E} + \bar{B}\bar{D}$;
3) $f = \bar{A}$;
4) $f = 0$;
5) $f = (A + B)(A + \bar{B})$;
6) $f = (\bar{A} + B)(A + \bar{B})$;
7) $f = (A + \bar{B})C$;

II. (АВЕ)

1) $f = (A + \bar{A}B)\bar{C}$;
2) $f = (P + Q)(\bar{P} + \bar{Q})$;
3) $f = (\bar{P} + Q)R\bar{S}\bar{T}$;
4) $f = 1$;
5) $f = \bar{D}\bar{E}(F + K)(\bar{F} + \bar{K})$;
6) $f = A + \bar{B}(C + D)$;
7) $f = AB + \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + AB$.

4. (Ц84). Сколько существует функций, сохраняющих нуль, если число аргументов равно трем?

5. (УКЗ). Сколько существует функций четырех аргументов, сохраняющих нуль и одновременно сохраняющих единицу?

18.7. ТЕОРЕМА ПОСТА О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЕ

В предыдущих подразделах рассмотрено пять замечательных классов булевых функций, главная особенность которых состоит в том, что в результате применения операции суперпозиции к функциям того или иного класса получаются функции только того же класса. Кроме этих пяти классов существуют и другие функционально замкнутые классы, однако для проверки полноты системы функций вполне достаточно вышерассмотренных классов самодвойственных, линейных, монотонных, сохраняющих единицу и сохраняющих нуль функций. Критерий полноты дает теорема Поста. Формулируется она следующим образом [16; 32].

Система булевых функций называется функционально полной, если она содержит хотя бы одну нелинейную функцию, хотя бы одну немонотонную, хотя бы одну несамодвойственную, хотя бы одну, не сохраняющую единицу, и хотя бы одну, не сохраняющую нуль.

Доказательство теоремы приведено в [44, с. 152].

На первый взгляд может показаться, что функционально полная система должна содержать не менее пяти функций. На самом деле это не так. Существуют функции, обладающие одновременно несколькими свойствами из перечисленных в теореме Поста. Например, функция

$$f = AB + CD$$

одновременно является нелинейной и несамодвойственной. Функция

$$f = A\,B + AC + BC + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$$

несамодвойственна, нелинейна, немонотонна, не сохраняет нуль. А функция

$$f = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

одна образует функционально полную систему, так как она одновременно является несамодвойственной, нелинейной, немонотонной, не сохраняющей нуль и не сохраняющей единицу.

Упражнения

1. (ОАС). Укажите функционально полные системы:

1) $f_1 = ABC$; $f_2 = A + B + CD$; $f_3 = 1$;

2) $f_1 = A\bar{B} + \bar{A}B$; $f_2 = AB + \bar{A}\bar{B}$; $f_3 = A\bar{B}$;

3) $f_1 = \bar{A}B$; $f_2 = \bar{A} + B$; $f_3 = A + B$;

4) $f_1 = ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$; $f_2 = AB + CD$; $f_3 = 0$;

5) $f_1 = A + \bar{B}CD$; $f_2 = A + BCDE$; $f_3 = A \oplus B \oplus C$;

6) $f_1 = A \oplus B$; $f_2 = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$;

7) $f_1 = ABC$; $f_2 = A + B + CD$; $f_3 = 0$;

8) $f_1 = ABCD$; $f_2 = B$; $f_3 = A + B$.

2. Укажите номера функций, каждая из которых в отдельности образует функционально полную систему:

I. (ЯМТ)	II. (ЕРТ)
1) $f = A + \bar{B} + \bar{C}$;	1) $f = \overline{A + B}$;
2) $f = AB + \overline{CD}$;	2) $f = A + \overline{B + C + D}$;
3) $f = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$;	3) $f = A + \bar{B} + \bar{C}$;
4) $f = (\bar{A} + \bar{B})(\bar{C} + \bar{D})$;	4) $f = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$;
5) $f = A\,BC + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$;	5) $f = A + \bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$;
6) $f = A\,\bar{B} + A\bar{C} + B\bar{C}$;	6) $f = \bar{A} + \overline{BCD}$.

18.8. ФУНКЦИИ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

Два аргумента A и B образуют четыре минтерма:

$$m_0 = \bar{A}\,\bar{B}; \qquad m_1 = \bar{A}\,B; \qquad m_2 = A\,\bar{B}; \qquad m_3 = AB.$$

Всякое их подмножество определяет некоторую **элементарную булеву функцию.** Следовательно, всего существует 16 различных булевых функций двух аргументов. Все они представлены в табл. 34. Эта таблица отличается одной особенностью: функции, расположенные на одинаковых расстояниях от начала и конца, являются взаимно инверсными. Например:

$$f_0 = \bar{f}_{15};\ f_1 = \bar{f}_{14};\ f_2 = \bar{f}_{13} \text{ и т. д. до } f_7 = \bar{f}_8.$$

Таблица 34

$m_0\ m_1\ m_2\ m_3$	**Название функции**
0 0 0 0	Константа нуль $f_0 = 0$
0 0 0 1	Конъюнкция $f_1 = AB$
0 0 1 0	Отрицание импликации от A к B $f_2 = A\bar{B}$
0 0 1 1	Переменная A $f_3 = A$
0 1 0 0	Отрицание импликации от B к A $f_4 = \bar{A}B$
0 1 0 1	Переменная B $f_5 = B$
0 1 1 0	Неравнозначно $f_6 = \bar{A}B + A\bar{B}$
0 1 1 1	Дизъюнкция $f_7 = A + B$
1 0 0 0	Операция Пирса $f_8 = \bar{A}\,\bar{B}$
1 0 0 1	Равнозначно $f_9 = \bar{A}\,\bar{B} + AB$
1 0 1 0	Инверсия B $f_{10} = \bar{B}$
1 0 1 1	Импликация от B к A $f_{11} = A + \bar{B}$
1 1 0 0	Инверсия A $f_{12} = \bar{A}$
1 1 0 1	Импликация от A к B $f_{13} = \bar{A} + B$
1 1 1 0	Операция Шеффера $f_{14} = \bar{A} + \bar{B}$
1 1 1 1	Константа единица $f_{15} = 1$

В связи с этим рассматривать функции будем соответствующими парами.

Первой в табл. 34 указана функция **константа нуль**. Она принимает нулевое значение независимо от значений аргументов. СДНФ функции константа нуль не содержит ни одного минтерма. Если ее представить в СКНФ, то получим выражение, в которое входят все макстермы двух аргументов:

$$f = (\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + B)(A + \bar{B})(A + B) = 0.$$

Инверсией функции константа нуль является функция **константа единица**. Эта функция принимает единичное значение независимо от значений аргументов. Ее СДНФ представляет собой дизъюнкцию всех возможных минтермов двух аргументов:

$$f_{15} = \bar{A}\,\bar{B} + \bar{A}\,B + A\,\bar{B} + AB = 1.$$

СКНФ функции константа единица отсутствует, так как в нее не входит ни одного макстерма.

Во второй строке табл. 34 записана функция

$$f_1 = AB.$$

Это конъюнкция. Ее инверсия

$$f_{14} = \overline{A\,B} = \bar{A} + \bar{B}$$

известна в литературе под названием **операции Шеффера** (штрих Шеффера, функция Шеффера). Функция Шеффера является универсальной, так как она удовлетворяет всем требованиям теоремы Поста и, следовательно, образует функционально полную систему.

Следующая пара функций f_2 и f_{13}. Функция

$$f_{13} = \bar{A}\,\bar{B} + \bar{A}\,B + A\,B = \bar{A} + B$$

называется **импликацией от *A* к *B*** и обычно обозначается $A \to B$. Читается эта запись так: «Если A, то B». До сих пор в данном пособии эта функция не упоминалась, поэтому кратко поясним ее смысловое содержание на примере следующего высказывания: «Если Саша сдаст экзамен, то пойдет в театр».

Введем обозначения:

A — Саша сдал экзамен;

B — Саша пошел в театр.

Здесь возможны четыре случая в зависимости от истинностных значений логических переменных A и B:

$A = B = 0$ — Саша не сдал экзамен и не пошел в театр;

$A = B = 1$ — Саша сдал экзамен и пошел в театр;

$A = 0$, $B = 1$ — Саша не сдал экзамен, но пошел в театр;

$A = 1$, $B = 0$ — Саша экзамен сдал, но в театр не пошел.

Если $A = B = 1$, то ясно, что высказывание $A \to B$ является истинным, т. е. принимает единичное значение.

Если $A = 1$, $B = 0$, т. е. Саша экзамен сдал, но в театр почему-то не пошел, то импликация $A \to B$ является ложной, так как противоречит утверждению, приведенному в высказывании. В принципе, если ориентироваться на реальные обстоятельства, можно предположить, что Саша, сдав экзамен, решит все же не пойти в театр, но в формальной логике подобные предположения полностью исключены.

Иное дело, если $A = 0$. Что будет, если Саша не сдаст экзамен? Об этом в высказывании ничего не говорится. Если $A = 0$, то возможны следующие две ситуации:

а) Саша не сдал экзамен (т. е. $A = 0$), но в театр пошел ($B = 1$). Можно считать ложным это высказывание? Нет. Саша в исходном утверждении не обещал не ходить в театр (и не говорил, что пойдет) при неудачной сдаче экзамена. Но если высказывание не является ложным, то оно истинно;

б) Саша не сдал экзамен ($A = 0$) и не пошел в театр ($B = 0$). Ложно ли это высказывание? Тоже нет. И по той же причине: Саша не обещал не ходить в театр (и не говорил, что пойдет), если не сдаст экзамен. Следовательно, и в этом случае импликацию вида $A \to B$ необходимо признать истинной.

Таблица 35

$A\,B$	$A \to B$
0 0	1
0 1	1
1 0	0
1 1	1

Таким образом, высказывание $A \to B$ является ложным только в том случае, когда оно противоречит утверждению, содержащемуся в импликации. Если принять $A \to B = 1$ при $A = 0$, то противоречия не получим, следовательно, $A \to B = 1$ при $A = B = 0$ и при $A = 0$, $B = 1$.

Сведем все рассмотренные случаи в табл. 35, из которой видно, что

$$A \to B = \bar{A} + B.$$

Функция f_2 табл. 34 является инверсией импликации от A к B. Ни импликация, ни ее инверсия в отдельности не образуют функционально полную систему, но вместе обладают функциональной полнотой.

Импликацию $B \to A$ и ее инверсию образуют функции f_{11} и f_4.

Функции f_9 (равнозначно) и f_6 (неравнозначно, т. е. сумма по модулю два) в алгебре Жегалкина имеют вид:

$$f_9 = A \oplus B \oplus 1;$$
$$f_6 = A \oplus B,$$

откуда следует, что обе они являются линейными. Кроме того, функция f_6 сохраняет нуль, а функция f_9 сохраняет единицу.

Функция f_7 — дизъюнкция. Ее инверсию

$$f_8 = \overline{A + B} = \bar{A}\,\bar{B}$$

называют **операцией Пирса**. Функцию f_8 называют также операцией Вебба [16]. Операция Пирса, как и операция Шеффера, является универсальной, т. е. сама по себе образует функционально полную систему.

Таким образом, среди всех 16 элементарных функций двух аргументов две функции обладают функциональной полнотой: операция Шеффера и операция Пирса. Логические элементы, реализующие эти операции, получили широчайшее распространение на практике.

Упражнения

1. Укажите номера функций «равнозначно»:

I. (ВВЛ)

1) $f = A \oplus B$;
2) $f = A \oplus B \oplus 1$;
3) $f = AB + \bar{A}\bar{B}$;
4) $f = A\bar{B} + \bar{A}B$;
5) $f = AB \oplus \bar{A}\bar{B}$;
6) $f = A\bar{B} \oplus \bar{A}B$;
7) $f = A\bar{B} \oplus \bar{A}C$;

II. (Г46)

1) $f = \overline{A \oplus B \oplus 1}$;
2) $f = (\bar{A} + B)(A + \bar{B})$;
3) $f = \overline{A \oplus B}$;
4) $f = (\bar{A} + \bar{B})(A + B)$;
5) $f = \overline{AB + \bar{A}\bar{B}}$;
6) $f = \overline{A\bar{B} \oplus \bar{A}B}$;
7) $f = (\bar{A} + \bar{B})(A + C)$.

2. (БМХ). Укажите номера функций «неравнозначно»:

1) $f = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$;
2) $f = (A \to B)(B \to A)$;
3) $f = (\bar{A} \to B)(\bar{B} \to A)$;
4) $f = (\bar{A} \to B)(B \to \bar{A})$;
5) $f = \overline{A \to B} \oplus \bar{A}B$;
6) $f = \overline{A \to B} + \bar{A}B$.

3. Укажите номера функций «импликация от A к B»:

I. (РАШ)

1) $f = \bar{A} + B$;
2) $f = A \oplus B \oplus 1 \oplus \bar{A}B$;
3) $f = A \oplus B \oplus \bar{A}B$;
4) $f = \overline{A\bar{B}}$;
5) $f = S_1(A, B) + AB$;
6) $f = \bar{A} + AB$;

II. (ХВИ)

1) $f = AB + A\bar{B} + \bar{A}B$;
2) $f = AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}$;
3) $f = \overline{A \oplus B} + \bar{A}B$;
4) $f = B \oplus \bar{A}\bar{B}$;
5) $f = B + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}$;
6) $f = S_2(A, B) + S_1(A, B)$.

4. Укажите номера функций «отрицание импликации от A к B»:

I. (Р86)

1) $f = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})(A + \bar{B})$;
2) $f = \overline{\bar{A} + AB}$;
3) $f = \overline{\bar{B} + AB}$;
4) $f = AS_1(A, B)$;
5) $f = BS_1(A, B)$;
6) $f = AS_2(A, B)$;

II. (Х96)

1) $f = A \to B$;
2) $f = (A + \bar{B})A\bar{B}$;
3) $f = 0$;
4) $f = \overline{A \to B}$;
5) $f = (B \to A)\,\overline{A \oplus B}$;
6) $f = (B \to A)(A \oplus B)$.

5. Укажите номера функций «операция Шеффера»:

I. (РИШ)

1) $f = \overline{AB}$;
2) $f = \overline{A + B}$;
3) $f = \bar{A} + A\bar{B}$;
4) $f = \bar{A} + \bar{B}$;
5) $f = \bar{A}\bar{B}$;
6) $f = \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$;

II. (Р29)

1) $f = \bar{B} + \bar{A}B$;
2) $f = (A \oplus B) + \bar{A}\bar{B}$;
3) $f = (A \oplus B) + AB$;
4) $f = AB + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B$;
5) $f = S_1(A, B) + \bar{A}$;
6) $f = S_1(A, B) + \bar{B}$.

6. Укажите номера функций «операция Пирса»:

I. (НАЧ)	II. (ЗУЗ)
1) $f=\bar{A}+\bar{B}$;	1) $f=A+\bar{A}B$;
2) $f=\bar{A}\,\bar{B}$;	2) $f=(\bar{A}+\bar{B})(A+B)(A+\bar{B})$;
3) $f=\overline{\bar{A}\bar{B}}$;	3) $f=\bar{A}(A+\bar{B})$;
4) $f=\overline{\bar{A}+\bar{B}}$;	4) $f=(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+B)$;
5) $f=\overline{A+B}$;	5) $f=\bar{B}(\bar{A}+B)$;
6) $f=S1(A, B)+AB$;	6) $f=(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})(\bar{A}+B)$.

7. (ХНК). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что импликация от A к B сохраняет нуль?

2) верно ли, что операция «неравнозначно» в алгебре Жегалкина не содержит конъюнкций?

3) верно ли, что функция Шеффера монотонна?

4) самодвойственна ли функция «инверсия»?

5) верно ли, что операция (функция) «равнозначно» сохраняет нуль?

6) верно ли, что операция Пирса образует функционально полную систему?

7) линейна ли дизъюнкция операций Пирса и Шеффера?

8) верно ли, что отрицание операции Шеффера образует функционально полную систему?

9) верно ли, что симметрическая функция $S_2(A, B, C, D, E)$ сохраняет единицу?

8. (Б77). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) сохраняет ли нуль функция Шеффера?

2) верно ли, что функция Шеффера нелинейна?

3) сохраняет ли нуль отрицание импликации $A \to B$?

4) сохраняет ли нуль отрицание импликации $B \to A$?

5) сохраняет ли нуль функция константа единица?

6) монотонна ли функция константа нуль?

7) линейна ли функция константа единица?

8) монотонна ли функция $A \to B$?

9) монотонна ли симметрическая функция $S_{2,3,4}(A, B, C, D, E)$?

10) самодвойственна ли функция $f = AB + BC + AC + CD$?

18.9. МИНИМАЛЬНЫЕ ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функционально полная система называется **минимальной**, если она становится неполной после удаления из нее любой функции.

Сколько всего существует минимальных функционально полных систем (минимальных базисов) элементарных функций? Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся методом Петрика точно так же, как и при нахождении всех тупиковых ДНФ. Основными объектами, над которыми осуществляются преобразования по методу Петрика, являются простые импликанты. В данном же случае — это элементарные функции. Всего в табл. 34 приведено 16 элементарных функций двух аргументов. Но учитывать их все в преобразованиях Петрика нет необходимости, т. е. список функций можно сократить.

Прежде всего заметим, что операции Пирса и Шеффера сразу можно включить в искомый список минимальных функционально полных систем. Функции $f_3 = A$ и $f_5 = B$ являются тривиальными, они не попадут ни в какую минимальную функционально полную систему, так как не удовлетворяют ни одному из требований теоремы Поста. Следовательно, в дальнейшем их можно не учитывать.

Рассмотрим функции

$$f_{11} = A + \bar{B} \text{ и } f_{13} = \bar{A} + B.$$

Обе они нелинейны, несамодвойственны, немонотонны, обе сохраняют единицу и обе не сохраняют нуль. Относительно функциональной полноты они являются неразличимыми, поэтому одну из них, например функцию f_{11}, удалим. Точно так же неразличимы и функции f_2 и f_4, из которых удалим функцию f_4. Наконец, неразличимыми являются функции $f_{10} = \bar{B}$ и $f_{12} = \bar{A}$. Одну из них, например функцию f_{10}, удалим.

Три рассмотренные пары функций обладают еще одним свойством: функции каждой пары переходят одна в другую путем простого переименования аргументов. Например, если в функции f_{11} аргументы A и B поменять местами, то получим функцию f_{13}. То же самое относится и к парам f_2, f_4 и f_{10}, f_{12}.

Функции $f_1 = AB$ и $f_7 = A + B$ сохраняют нуль, сохраняют единицу, монотонны, несамодвойственны и нелинейны, однако никакой заменой одних аргументов другими из конъюнкции невозможно получить дизъюнкцию и из дизъюнкции невозможно получить конъюнкцию, поэтому ни одну из этих функций не удаляем.

Таким образом, осталось девять функций. Сведем их в таблицу, подобную импликантной матрице (табл. 36).

В левой части таблицы приведена колонка «Лог. пер», содержащая вспомогательные логические переменные a, b, c, ..., n. Переменная a принимает единичное значение в том случае, если функция f_0 входит в функционально полную систему, и принимает нулевое значение, если не входит. Точно так же интерпретируются все остальные вспомогательные логические переменные.

Таблица 36

Лог. пер.	Функция	Не сохраняет нуль	Не сохраняет единицу	Нелинейная	Несамодвойственная	Немонотонная
a	$f_0 = 0$		1		1	
b	$f_1 = AB$			1	1	
c	$f_2 = A\bar{B}$		1	1	1	1
d	$f_6 = A \oplus B$		1		1	1
e	$f_7 = A + B$			1	1	
f	$f_9 = AB + \bar{A}\bar{B}$	1			1	1
k	$f_{12} = \bar{A}$	1	1			1
m	$f_{13} = \bar{A} + B$	1		1	1	1
n	$f_{15} = 1$	1			1	

В правой части таблицы единицами отмечены функции, удовлетворяющие требованиям теоремы Поста. Например, в колонке «не сохраняет нуль» единицами обозначены функции f_9, f_{12}, f_{13}, f_{15}. Это значит, что все они нуль не сохраняют.

Составляем логическое уравнение согласно методу Петрика. В искомую функционально полную систему войдет функция, не сохраняющая нуль, если в нее включить хотя бы одну из функций f_9, f_{12}, f_{13}, f_{15}. Это условие можно записать в виде дизъюнкции вспомогательных аргументов:

$$\varphi_1 = f + k + m + n.$$

Аналогичным образом получаем логические выражения для всех остальных четырех колонок табл. 36:

$$\begin{aligned} &\varphi_2 = a + c + d + k; \\ &\varphi_3 = b + c + e + m; \\ &\varphi_4 = a + b + c + d + e + f + m + n; \\ &\varphi_5 = c + d + f + k + m. \end{aligned}$$

При выполнении условия

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 = 1 \tag{27}$$

система булевых функций будет функционально полной, так как в нее войдет функция, не сохраняющая нуль (при $\varphi_1 = 1$), функция, не сохраняющая единицу (при $\varphi_2 = 1$), войдут нелинейная (при $\varphi_3 = 1$), несамодвойственная (при $\varphi_4 = 1$) и немонотонная (при $\varphi_5 = 1$) функции.

Запишем выражение (27) в развернутом виде:

$$\begin{gathered} (f + k + m + n)(a + c + d + k)(b + c + e + m)\& \\ \&(a + b + c + d + e + f + m + n)(c + d + f + k + m) = 1. \end{gathered}$$

Раскроем скобки и выполним все операции поглощения. Сначала перемножим φ_1 и φ_5, а также φ_3 и φ_4:

$$\begin{aligned} &\varphi_1\varphi_5 = (f + k + m + n)(c + d + f + k + m) = f + k + m + cn + dn; \\ &\varphi_3\varphi_4 = (a + b + c + d + e + f + m + n)(b + c + e + m) = b + c + e + m. \end{aligned} \tag{28}$$

Затем находим конъюнкцию $\varphi_2\varphi_3\varphi_4$:

$$\begin{gathered} \varphi_2\varphi_3\varphi_4 = (a + c + d + k)(b + c + e + m) = \\ = c + ab + bd + bk + ae + de + ek + am + dm + km. \end{gathered}$$

Последний результат умножаем на выражение (28):

$$\begin{gathered} \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 = (f + k + m + cn + dn)\& \\ \&(c + ab + bd + bk + ae + de + ek + am + dm + km) = \\ = cf + ck + bk + ek + cm + cn + am + dm + km + abf + bdf + \\ + aef + def + bdn + den = 1. \end{gathered}$$

Каждая из 15 конъюнкций полученного уравнения определяет минимальный базис, т. е. одну минимальную функционально полную систему. Например, при $cf = 1$ минимальную систему образуют функции:

$$f_2 = A\bar{B}; \quad f_9 = AB + \bar{A}\bar{B}.$$

Таблица 37

Функция	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f_0 = 0$									1			1		1			
$f_1 = AB$					1							1	1			1	
$f_2 = A\overline{B}$			1	1			1	1									
$f_6 = A \oplus B$										1			1		1	1	1
$f_7 = A + B$						1								1	1		1
$f_8 = \overline{A}\,\overline{B}$	1																
$f_9 = AB + \overline{A}\,\overline{B}$			1									1	1	1	1		
$f_{12} = \overline{A}$				1	1	1					1						
$f_{13} = \overline{A} + B$							1		1	1	1						
$f_{14} = \overline{A} + \overline{B}$		1															
$f_{15} = 1$								1								1	1

Добавим к этим 15 системам операции Пирса и Шеффера, каждая из которых обладает функциональной полнотой. Тогда окажется, что всего существует 17 минимальных функционально полных систем. Их полный перечень приведен в табл. 37. В верхней строке таблицы записаны порядковые номера систем функций. Единицы, расположенные в i-й колонке ($i = 1$, 2, ..., 17), показывают, какие функции входят в i-ю функционально полную систему. Например, при $i = 12$ минимальный базис имеет вид

$$f_0 = 0; \quad f_1 = AB; \quad f_9 = \overline{A}\overline{B} + AB.$$

Заметим, что в таблице нет системы, в которую входят три функции: конъюнкция, дизъюнкция и инверсия. Это говорит о том, что система И, ИЛИ, НЕ не является минимальной, она содержит избыточные функции. Из нее можно удалить либо конъюнкцию (f_1), либо дизъюнкцию (f_7). В обоих случаях полнота системы не нарушится.

Упражнения

1. (ШТК). Сколько существует минимальных базисов, в которые входит функция

$$f_6 = A \oplus B?$$

2. (037)! Сколько существует минимальных базисов, содержащих по две функции? по три функции?

18.10. О РЕАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

В предыдущем подразделе показано, что существуют две элементарные функции — Пирса и Шеффера, каждая из которых образует минимальный базис. Это значит, что достаточно освоить массовый выпуск двухвходовых логических элементов, реализующих, например, операцию Шеффера, и никаких других элементов, в принципе, не потребуется, поскольку всякую булеву функцию можно представить в виде комбинационной схемы, используя только элементы И–НЕ. Проиллюстрируем это на примере функции

$$f = A\,B + CD + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D} + E. \tag{29}$$

Так как в нашем распоряжении имеются только двухвходовые элементы Шеффера, то функцию (29) необходимо представить в виде выражения, содержащего две переменные. Это можно сделать различными способами. Выберем из них, например, такой:

$$f = P + Q,$$

где $P = AB$, $Q = CD + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D} + E$.

Преобразуем выражение $P + Q$:

$$f = P + Q = \overline{\overline{P + Q}} = \overline{\bar{P}\bar{Q}} = \overline{\overline{AB}\bar{Q}}.$$

Преобразуем выражение Q:

$$Q = CD + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D} + E = R + S,$$

где $R = CD$, $S = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D} + E$, тогда функция (29) примет вид

$$f = \overline{\overline{AB}\,\overline{R + S}} = \overline{\overline{AB}\,\bar{R}\,\bar{S}} = \overline{\overline{AB}\,\overline{CD}\,\bar{S}}.$$

Функцию S представим в виде

$$S = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D} + E = T + E,$$

где $T = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D}$.

С учетом этих обозначений заданная функция принимает вид

$$f = \overline{\overline{AB}\,\overline{CD}\,\bar{S}} = \overline{\overline{AB}\,\overline{CD}\,\bar{T}\,\bar{E}}.$$

Так как по условию в нашем распоряжении трехвходовых элементов Шеффера нет, то конъюнкцию $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D}$ преобразуем:

$$T = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D} = M\bar{D},$$

где $M = \bar{A}\,\bar{B}$.

В результате получаем

$$f = \overline{\overline{A\,B}\,\overline{CD}\,\overline{M\,\bar{D}}\,\bar{E}} = \overline{\overline{AB}\,\overline{C\,D}\,\overline{\overline{\overline{\bar{A}\,\bar{B}}}\,\bar{D}}\,\bar{E}}.$$

Под внешним (общим) знаком инверсии находится конъюнкция четырех выражений:

$$f = \overline{X\,Y\,Z\,\bar{E}},$$

где буквами X, Y, Z обозначены функции

$$X = \overline{AB}; \quad Y = \overline{CD}; \quad Z = \overline{\overline{\overline{\bar{A}\,\bar{B}}}\,\bar{D}}.$$

После преобразований получаем окончательно

$$f = \overline{\overline{\overline{X\,Y}}\,\overline{\overline{Z\,\bar{E}}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{A\,B}\,\overline{CD}}}\,\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\bar{A}\,\bar{B}}}\,\bar{D}}\,\bar{E}}}}.$$

Это выражение полностью подготовлено для построения комбинационной схемы с применением двухвходовых элементов Шеффера (рис. 242). Всего в схеме 10 таких элементов. Если же схему построить в базисе И, ИЛИ, НЕ, то потребуется две схемы И по два входа каждая, одна трехвходовая схема И и одна четырехвходовая схема ИЛИ (рис. 243), т. е. всего четыре элемента.

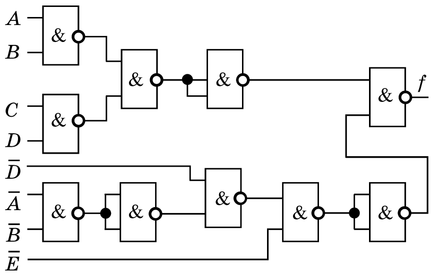


Рис. 242

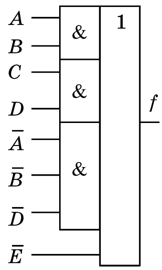


Рис. 243

Первая схема содержит шесть последовательно соединенных элементов, вторая — два. Это значит, что быстродействие первой схемы значительно ниже по сравнению со второй (для одной и той же серии элементов).

Каждый элемент Шеффера имеет три вывода, следовательно, при выполнении монтажных работ в случае первой схемы необходимо осуществить 30 электрических соединений (паек). Во второй схеме таких соединений вдвое меньше.

Все это говорит о том, что схема на элементах Шеффера значительно уступает схеме, реализованной на элементах И, ИЛИ. Точно так же неэкономичными являются схемы на элементах Пирса. И вообще, ни одна из 17 минимальных функционально полных систем элементарных булевых функций не может составить основу для создания достаточно экономичной серии логических элементов. Поэтому на практике используются системы с очень большой избыточностью относительно функциональной полноты. Обычно в них включают многовходовые элементы И, ИЛИ, И–НЕ, ИЛИ–НЕ и др. Многие из этих элементов сами по себе образуют функционально полные системы, и если их включают в серию логических элементов, то не в связи с функциональной полнотой, а по причинам практического характера.

В состав реальных серий логических элементов включают и более сложные схемы. Примером может служить программируемое постоянное запоминающее устройство (ПЗУ), имеющее n адресных входов и m выходов. Если на адресные входы ПЗУ подать n-значное двоичное число, то на выходах получим m-разрядное двоичное число, хранящееся по адресу, поданному на адресные входы.

Постоянное хранение двоичных чисел — это прямое назначение ПЗУ. Однако всякое ПЗУ можно использовать и для технической реализации булевых функций. Пусть $n = 5$. Поставим в соответствие двоичным разрядам пятизначного адреса пять логических аргументов A, B, C, D, E, где переменной A соответствует старший разряд. Тогда при $m = 1$ ПЗУ обеспечит реализацию любой булевой функции (но только одной!) до пяти аргументов.

Чтобы записать функцию в ПЗУ, ее необходимо представить в СДНФ в виде набора номеров минтермов. Например:

$$f = (0, 2, 5, 7, 14, 19, 20, 24, 25, 30).$$

Номера минтермов, указанные в скобках, представляют собой адреса, по которым в ПЗУ необходимо записать единицы. После записи ПЗУ превращается в логический элемент, реализующий заданную функцию.

Кроме ПЗУ существуют программируемые логические матрицы, позволяющие записывать булевы функции, представленные в аналитической форме.

В состав реальных серий включают элементы (в виде микросхем), реализующие сложные функциональные узлы: одноразрядные и многоразрядные сумматоры, схемы сравнения, схемы проверки на четность индексов двоичных чисел, дешифраторы, мультиплексоры и др.

Таким образом, согласно теореме о функциональной полноте комбинационные структуры можно строить из очень малого набора логических схем. Однако разработчики серий логических элементов хотя и учитывают положения теории, все же ориентируются, главным образом, на потребности практики и создают системы, многократно превышающие по функциональной полноте все минимальные базисы. Реальные системы логических элементов насчитывают десятки различных микросхем, благодаря чему разработчики вычислительных средств получают возможность создавать цифровые устройства, отличающиеся высоким быстродействием, малыми габаритными размерами, хорошей технологичностью при сборке и низким энергопотреблением.

Упражнения

1. Запишите минимальную ДНФ функции:

1) (В66) $f=\overline{\overline{\overline{\overline{A}\,B}\,C}\,D}$; 2) (ИЛЫ) $f=\overline{\overline{\overline{A}\,B}}\;\overline{\overline{C\,D}}$; 3) (279) $f=\overline{\overline{\overline{\overline{AB}\,C}\,\overline{B}}}$.

2. Определите число двухвходовых элементов Шеффера, необходимых для реализации следующих функций, если элементы, реализующие логические аргументы, имеют парафазные выходы (инвертор реализуется объединением входов элемента Шеффера):

1) (ШБК) $f = ABC$;
2) (Ш97) $f = ABCD$;
3) (OOM) $f = ABCDEFK$;
4) (Ц70) $f = A + B + C$;
5) (И2Р) $f = A + B + C + D$;
6) (МОЗ) $f = A + B + C + D + E + F + K$.

3. (ОАХ). В следующем списке укажите номера функций, тождественно равных выражению $f=\overline{\overline{\overline{\overline{A}\,B}}\;\overline{C\,D}}$:

1) $f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15)$;
2) $f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15)$;
3) $f=\overline{AB\overline{C}+AB\overline{D}}$;
4) $f = AB \oplus ABCD \oplus 1$;
5) $f = AB \oplus ABCD \oplus ABC \oplus ACD \oplus AB \oplus ABCD \oplus 1$;
6) $f = (A \to B) + CD$;
7) $f = CD + (A \to \overline{B})$;
8) $f=\overline{\overline{\overline{A\,\overline{\overline{B}}}}\;\overline{AB\overline{C}\,D}}$.

4. Представьте в СДНФ (в виде десятичных номеров минтермов) следующие функции четырех аргументов:

1) (ФАС) $f=\overline{\overline{\overline{A\,\overline{B}C}}\;\overline{B\overline{C}\,D}}$;
3) (ЕПН) $f=\overline{\overline{\overline{\overline{AB}\,C}}\,\overline{B}}\;\overline{A\overline{\overline{\overline{C}}}\,\overline{D}}$;
2) (ОЙК) $f=\overline{\overline{\overline{\overline{A\,B}}\,B\overline{C}}\,D}$;
4) (ОКР) $f=\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}\,B}}\,C}\;\overline{\overline{B}CD}}$.

19

МНОГОТАКТНЫЕ АВТОМАТЫ

19.1. ОДНОТАКТНЫЕ И МНОГОТАКТНЫЕ АВТОМАТЫ

В комбинационных схемах, рассмотренных в разделе 3, выходные сигналы меняются практически одновременно с входными, поскольку время, которое проходит с момента изменения входного сигнала до соответствующего изменения выходного сигнала, определяется только переходными процессами и в современных микросхемах составляет доли наносекунд (приставка «нано» обозначает 10^{-9}). Это значит, что всякая комбинационная схема на один и тот же сигнал реагирует одинаково независимо от того, какая информация поступала на вход схемы до подачи данного сигнала. Такие схемы нередко называют однотактными автоматами, подчеркивая тот факт, что в комбинационных схемах информация не запоминается и, следовательно, не участвует в преобразовании сигналов, поступающих на вход схемы в более поздние моменты времени.

В многотактных автоматах процесс преобразования входной информации осуществляется значительно сложнее. Эта сложность обусловлена тем, что всякий многотактный автомат содержит запоминающие элементы, которые в определенные моменты времени, называемые тактами, меняют свои состояния с приходом входных сигналов и совместно с ними участвуют в преобразовании входной информации. Все реальные многотактные автоматы имеют ограниченную память и соответственно ограниченное число внутренних состояний, поэтому многотактные автоматы называют также конечными автоматами.

В каком виде представить работу конечного автомата? В случае комбинационных схем достаточно составить таблицу соответствия и по ней найти все булевы функции, описывающие работу схемы. При разработке многотактных автоматов также можно использовать таблицы, в которых указывается последовательность смены состояний внутренних запоминающих элементов и определяются выходные сигналы для каждой комбинации внутренних состояний и состояний входов. Очевидно, что все такие автоматы являются детерминированными.

Этап, на котором работа автомата представляется в виде таблицы (или другим каким-либо способом), получил название этапа абстрактного синтеза автомата. После него идет этап структурного синтеза, на котором строится схема автомата с использованием тех или иных логических элементов.

В данном разделе приведено описание простейших потенциальных триггеров типа RS и более сложных триггеров — T и JK, широко использующихся в схемах дискретного действия в качестве запоминающих элементов. На примере несложных устройств рассмотрен табличный метод разработки многотактных автоматов. Даны начальные сведения об автоматах Мили и Мура. В связи с тем, что данное пособие является ознакомительным и рассчитано на студентов технических вузов, впервые знакомящихся с дискретной математикой, основное внимание в нем уделено прикладным аспектам. Тот, кто больше интересуется теоретическими вопросами конечных автоматов, может найти ответы на свои вопросы в обширной литературе, часть которой дана в библиографии.

19.2. ТРИГГЕР ТИПА *RS*

Логическая схема простейшего триггера типа RS на элементах Шеффера изображена на рис. 244, *а*. Триггер имеет два входа R и S и два выхода — прямой и инверсный. Прямой выход обозначается буквой без инверсии, инверсный — буквой со знаком отрицания. Вход R называется нулевым, S — единичным.

По входу R триггер устанавливается в нулевое состояние. Для этого достаточно принять $R = 0$, $S = 1$. Принято считать, что триггер находится в нулевом состоянии (состоянии нуля), если на его прямом (неинверсном) выходе имеется низкий уровень напряжения, а на инверсном — высокий, т. е. $A = 0$, $\bar{A} = 1$.

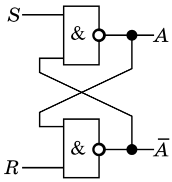
По входу S триггер устанавливается в единичное состояние. Для этого необходимо принять $R = 1$, $S = 0$. Триггер находится в единичном состоянии (состоянии единицы), если на его прямом выходе поддерживается высокий уровень напряжения, а на инверсном — низкий, т. е. $A = 1$, $\bar{A} = 0$.

Если на оба входа триггера RS подать высокий уровень, то триггер будет хранить то состояние, в какое он был переведен до подачи высоких уровней на оба входа.

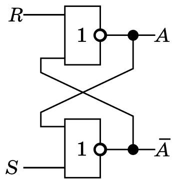
Случай, когда $R = S = 0$, является запрещенным. Если на входы R и S подать низкие уровни, то сигналы на обоих выходах примут единичное значение.

Триггер RS меняет свои состояния под действием уровней входного напряжения. В связи с этим его входы R и S называют установочными входами.

На рис. 244, *б* изображен триггер RS на элементах Пирса. Он отличается от триггера на элементах Шеффера тем, что меняет свои состояния при пода-



а



б

Рис. 244

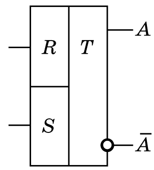


Рис. 245

че на его входы не низких уровней, а высоких. Запрещенным является состояние, когда $R = S = 1$.

Условное обозначение триггера RS приведено на рис. 245. Буква T на схеме говорит о том, что триггер однотактный, т. е. меняет свои состояния тотчас с подачей низкого уровня на один из его входов (в случае триггера, изображенного на рис. 244, *а*).

Упражнения

1. (НЕФ)! Допустим, что триггер RS (рис. 244, *а*) находится в нулевом состоянии. Укажите значения (0 или 1) переменных:

$$A = \ldots;\ \ \bar{A} = \ldots;\ \ S = \ldots.$$

2. (ЭЭХ)! На вход S триггера (рис. 244, *а*) подан низкий уровень. Укажите значения:

$$A = \ldots;\ \ \bar{A} = \ldots;\ \ R = \ldots;\ \ S = \ldots.$$

3. (Б83)! На вход R триггера (рис. 244, *а*) подан низкий уровень. Укажите значения:

$$A = \ldots;\ \ \bar{A} = \ldots;\ \ R = \ldots;\ \ S = \ldots.$$

4. (ППИ)! Триггер (рис. 244, *а*) находится в единичном состоянии. Укажите значения:

$$A = \ldots;\ \ \bar{A} = \ldots;\ \ R = \ldots.$$

5. (НАШ). Триггер (рис. 244, *а*) находится в состоянии, когда $A = 0$. Укажите значения:

$$A = \ldots;\ \ \bar{A} = \ldots;\ \ S = \ldots.$$

6. (ЕЛ9). Пусть триггер (рис. 244, *б*) находится в нулевом состоянии. Укажите значения:

$$A = \ldots;\ \ \bar{A} = \ldots;\ \ S = \ldots.$$

7. (ЯНК)! Входы триггера RS (рис. 244, *а*) соединили между собой. Укажите значения R, S, A и $\bar{A}$, если триггер находится в единичном состоянии.

8. (УВ7)! Входы триггера (рис. 244, *а*) соединили между собой. Укажите значения R, S, A и $\bar{A}$, если триггер находится в нулевом состоянии.

9. (ИЛ8)! Входы триггера (рис. 244, *а*) соединили между собой и на получившуюся общую точку подали низкий уровень. Укажите значения R, S, A и $\bar{A}$.

10. (УКО)! На вход S триггера (рис. 244, *б*) подали высокий уровень. Укажите значения двоичных переменных A, $\bar{A}$, R, S.

19.3. ТРИГГЕР ТИПА *T*

Триггер типа T является одним из самых распространенных на практике. Он имеет один счетный вход (условимся обозначать его русской буквой С) и два выхода — прямой и инверсный. Кроме того, триггер типа T имеет два установочных входа R и S.

Главная особенность T-триггера состоит в том, что он меняет свое состояние на противоположное под действием каждого импульса, поданного на вход С. В электронной технике используются самые разнообразные импульсы. Если их представить графически в системе декартовых координат $U - t$, где U — напряжение, t — время, то графики могут быть различной формы — треугольные, прямоугольные, колоколообразные и т. д. В теории дискретных автоматов используются в основном лишь прямоугольные импульсы. Пример таких импульсов приведен на рис. 246. Строго говоря, прямоугольных импульсов не существует, так как фронты, т. е. переходы напряжения с одного уровня на другой, также занимают какое-то время. Поэтому прямоугольные импульсы — это не более чем идеализация, согласно которой продолжительность фронтов во внимание не принимается.

Логическая схема T-триггера приведена на рис. 247. Рассмотрим его работу (на пунктирные линии пока не обращаем внимания). T-триггер состоит из двух RS-триггеров A и B, соединенных между собой комбинационными схемами. Пусть исходным является состояние, когда $A = B = 0$ (кроме того, $S = R = 1$). Если входной сигнал равен низкому уровню, то

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1; \quad \varphi_3 = 1; \quad \varphi_4 = 0.$$

Подадим на вход С высокий уровень. Прежде всего, низким уровнем выходного напряжения элемента 1 окажутся запертыми схемы 5 и 9, вследствие чего

$$\varphi_3 = \varphi_4 = 1.$$

Затем (по времени) на схемы 3 и 7 поступит высокий уровень с выхода элемента 2. Так как $B = 0$, то $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$ и триггер A перейдет в единичное состояние, а триггер B по-прежнему останется в состоянии нуля.

Подадим на вход С низкий уровень напряжения. Сразу же откроются схемы 5 и 9. Поскольку $A = 1$, то выходное напряжение элемента 5 перейдет

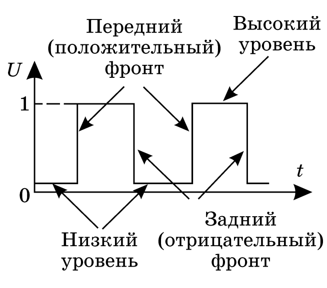


Рис. 246

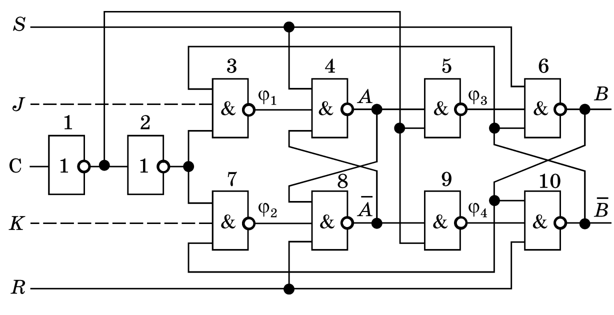


Рис. 247

с высокого уровня на низкий. Одновременно с этим закроются схемы 3 и 7. Под действием сигнала $\varphi_3 = 0$ триггер B перейдет в единичное состояние. Следовательно, после первого импульса имеем:

$$A = B = 1.$$

В этом состоянии (единичном) T-триггер будет находиться до следующего импульса.

Снова подадим на вход С высокий уровень. Выходной сигнал элемента 1 закроет схемы 5 и 9. Состояние триггера B при этом не изменится, так как $\varphi_3 = \varphi_4 = 1$. Но триггер A перейдет в нулевое состояние, поскольку $B = 1$ и $\varphi_2 = 0$.

С приходом на вход С низкого уровня закроются схемы 3 и 7, после чего триггер B перейдет в нулевое состояние вследствие того, что $\varphi_4 = 0$, $\varphi_3 = 1$.

Таким образом, под действием положительного фронта в состояние Q ($Q = 0, 1$) переходит триггер A (ведущий триггер), а под действием отрицательного фронта в это же состояние переходит и триггер B (ведомый триггер). Выходами T-триггера являются выходы ведомого RS-триггера. Следовательно, триггер T меняет свои состояния на противоположные с каждым входным импульсом по отрицательным перепадам напряжения, т. е. по отрицательным фронтам, а положительные фронты не меняют состояние T-триггера, так как на них реагирует только ведущий RS-триггер, но к нему доступа нет.

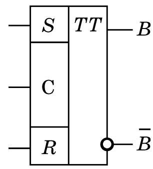


Рис. 248

Условное изображение T-триггера приведено на рис. 248. Буквы TT обозначают: триггер двухтактный, т. е. содержит два RS-триггера, из которых один реагирует на положительный перепад входного напряжения, второй — на отрицательный.

Упражнения

1. Пусть $A = B = 0$, $R = S = 1$, $C = 0$ (рис. 247). Укажите значения уровней (0 или 1) выходного напряжения элементов с номерами:

1) (ЭМБ). 1, 2, 3, 4, 5; 2) (ХРВ). 6, 7, 8, 9, 10.

2. (ДАГ). Пусть на рис. 247 $A = 1$, $B = 0$. Укажите значения (0, 1) S, C, R, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

3. (МКЕ). Допустим, что на рис. 247 $R = 0$, $S = 1$, $C = 1$. Укажите значения (0 или 1) φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, A, B.

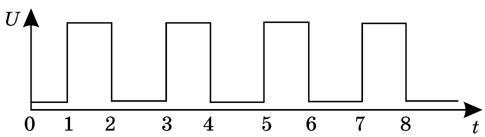


Рис. 249

4. (AAX). Пусть на рис. 247 $R = 1$, $S = 0$, $C = 1$. Укажите значения (0 или 1) φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$.

5. На вход С триггера подано 4 импульса. Укажите номера точек на рис. 249, соответствующие моментам, когда:

1) (ММ5) триггер A (рис. 247) переходит в единичное состояние, если до подачи импульсов, т. е. в момент $t = 0$, триггеры A и B находились в состояниях $A = B = 0$;

2) (ЯКК) триггер B (рис. 247) переходит в единичное состояние, если до подачи импульсов триггеры A и B находились в состояниях $A = B = 0$;

3) (ИЛЛ) триггер B (рис. 247) переходит в единичное состояние, если до подачи импульсов триггеры A и B находились в состояниях $A = B = 1$;

4) (ВГМ) триггер B (рис. 247) переходит в нулевое состояние, если до подачи импульсов триггеры A и B находились в состояниях $A = B = 0$.

19.4. АСИНХРОННЫЕ АВТОМАТЫ НА T-ТРИГГЕРАХ

Если конечный автомат содержит несколько триггеров, то возможны следующие случаи:

1) триггеры меняют свои состояния не произвольно, а только в определенные моменты времени, задаваемые генератором тактовых (прямоугольных по форме) импульсов. Если в соответствии с логикой работы автомата в противоположное состояние должны переходить два и более триггеров, то происходит это строго одновременно. Такие автоматы называют синхронными (с греческого: syn — вместе, chronos — время; synchronismos — одновременность, совпадение во времени);

2) смена состояний триггеров не строго задается тактовым генератором, вследствие чего триггеры меняют состояния не одновременно даже в тех случаях, когда в соответствии с логикой работы схемы смена состояний триггеров должна осуществляться в одни и те же моменты времени. Это асинхронный принцип работы автомата (с греческого: а — отрицающая частица, synchronos — одновременный).

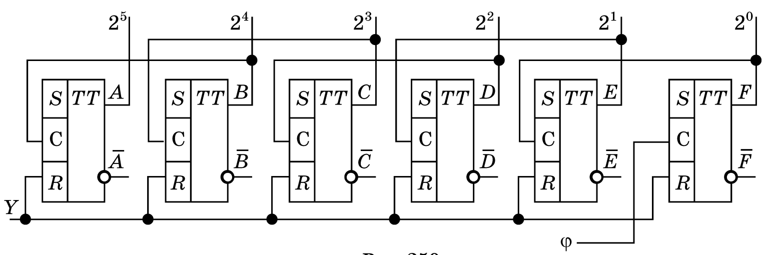


Рис. 250

Простейшим примером асинхронного автомата является двоичный суммирующий счетчик на T-триггерах.

На рис. 250 изображен счетчик, состоящий из шести триггеров, обозначенных буквами A, B, C, D, E, F, где триггер A соответствует старшему разряду, F — младшему.

Входы R всех триггеров соединены между собой и образуют шину сброса счетчика в нулевое состояние. Этот вход обозначен буквой Y.

Установим счетчик в нулевое состояние путем кратковременной подачи низкого уровня на вход Y. Тогда получим:

$$A = B = C = D = E = F = 0,$$

т. е. в счетчике окажется шестизначное двоичное число 000000.

Подадим на вход φ счетчика прямоугольный импульс. Положительный фронт оставит триггер F в том же состоянии, а под действием отрицательного фронта триггер F перейдет в единичное состояние. На счетный вход C триггера E поступит положительный фронт, на который триггер не реагирует. Следовательно, в счетчике окажется число 000001.

Подадим на вход φ второй импульс. Триггер F перейдет в нулевое состояние, и с его прямого выхода на вход триггера E поступит отрицательный фронт, вследствие чего триггер E окажется в единичном состоянии. Напряжение на входе триггера D с низкого уровня перейдет на высокий, на что триггер D не реагирует. Следовательно, счетчик окажется в состоянии 000010.

Если на вход φ подать третий импульс, то счетчик окажется в состоянии 000011, затем, после четвертого импульса, — в состоянии 000100 и так далее до состояния 111111, в котором счетчик окажется после 63-го импульса. Если на вход φ подать еще один импульс, то счетчик перейдет в состояние 000000 и начнется новый цикл счета.

Почему рассмотренный счетчик называют асинхронным? Пусть счетчик находится в состоянии 011111 (число 31). Подадим на его вход φ еще один импульс. Триггер F перейдет в нуль и отрицательным фронтом переведет в нуль триггер E, который в свою очередь переведет в нулевое состояние триггер D, а триггер D переведет в нуль триггер C, после него — B и, наконец, в единичном состоянии окажется триггер A. В счетчике будет число 100000. Заметим, что все шесть триггеров сменили свои состояния, но не одновременно, а один за другим. Это значит, что после 32-го импульса счетчик не сразу перешел в состояние 100000, а сначала некоторое время был в состоянии 011110, затем — 011100, далее — 011000, 010000, 000000 и, наконец, 100000. В этом и состоит асинхронность рассмотренного счетчика.

В более сложных устройствах асинхронность заключается в том, что импульс запуска получает один какой-либо блок. Закончив свою работу, он тотчас запускает один или несколько других блоков, а те в свою очередь — следующие и так далее до завершения работы всего устройства.

Завершим подраздел следующим замечанием. Если на рис. 250, на котором изображен суммирующий счетчик, вместо прямых выходов воспользоваться инверсными, т. е. вход триггера E подключить к выходу $\bar{F}$, вход триггера D — к выходу $\bar{E}$ и так далее, а информацию по-прежнему снимать с неинверсных выходов, то получится вычитающий счетчик.

Как вычитающий может работать и суммирующий счетчик, если информацию снимать не с прямых выходов, а с инверсных.

Упражнения

1. (Ц71). Счетчик (рис. 250) перевели в нулевое состояние и затем на вход φ подали 19 импульсов. Назовите триггеры (в алфавитном порядке), которые находятся в единичном состоянии, если $Y = 1$.

2. Шестиразрядный суммирующий двоичный счетчик перевели в нулевое состояние и затем на вход φ подали n импульсов. Назовите шестизначное двоичное число, которое находится в счетчике, если:

1) (В21) $n = 300$; 2) (ИЛ2) $n = 512$; 3) (РТЗ) $n = 127$.

3. (КРИ). При $Y = 0$ на вход φ подали 20 импульсов (рис. 250). Назовите шестизначное двоичное число, которое находится в счетчике.

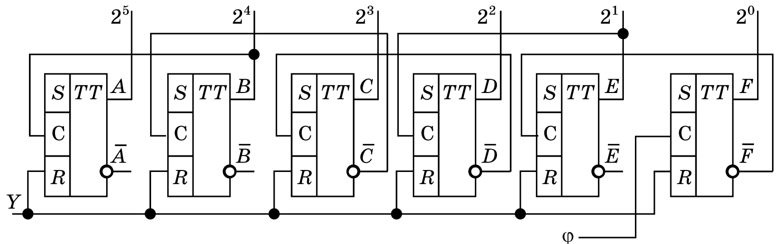


Рис. 251

4. Назовите шестизначное двоичное число, которое окажется в счетчике (рис. 251), если при $Y = 1$ на вход φ подать (исходным считать состояние 000000):

1) (ЛОЙ) один импульс; 4) (ХА9) пять импульсов;
2) (Л26) два импульса; 5) (Х40) шесть импульсов;
3) (ЦПМ) четыре импульса; 6) (ЗЗБ) семь импульсов.

5. Счетчик (рис. 251) находится в состоянии n. Назовите шестизначное двоичное число, которое окажется в счетчике после подачи на вход φ одного импульса, если:

1) (ОКТ) $n = 011011$; 3) (К81) $n = 010010$; 5) (НАЗ) $n = 100110$;
2) (ВЛЕ) $n = 010110$; 4) (2ПХ) $n = 100100$; 6) (К84) $n = 100010$.

6. Изобразите пятиразрядный вычитающий двоичный счетчик (входы триггеров соедините не с прямыми выходами, а с инверсными). Укажите двоичное число, которое будет находиться в счетчике, если после установки его в нуль по входам R на вход φ подать:

1) (АХ7) два импульса; 3) (ХИН) 48 импульсов;
2) (АС8) 12 импульсов; 4) (МИО) 257 импульсов.

7. На рис. 250 изображен суммирующий счетчик. Допустим, что информация считывается не с прямых выходов, а с инверсных. Укажите двоичное шестизначное число, которое будет находиться в счетчике, если после его установки в нуль (по входам R) на вход φ подать:

1) (ББФ) 0 импульсов; 5) (ХИШ) 32 импульса;
2) (Р52) 1 импульс; 6) (776) 64 импульса;
3) (Т53) 4 импульса; 7) (УФ7) 140 импульсов;
4) (КБИ) 63 импульса; 8) (ЛУМ) 1000 импульсов.

19.5.
СИНТЕЗ СИНХРОННЫХ АВТОМАТОВ НА ТРИГГЕРАХ ТИПА *T*

В отличие от асинхронного автомата, в котором тактовые импульсы воздействуют в основном на один триггер или на какой-либо один функциональный блок, в схеме синхронного автомата тактовый импульс непосредственно управляет каждым триггером или функциональным блоком. Как это реализуется, показано на рис. 252. Тактовые импульсы поступают на один из входов элементов И, выходы которых подключены к счетным входам триггеров $A_1, A_2, ..., A_n$. Ко вторым входам схем И присоединены выходы комбинационной схемы, представляющей собой преобразователь входного двоичного кода в выходной код, разряды которого обозначены символами $f_1, f_2, ..., f_n$. Буквой Y обозначена шина установки автомата в исходное (нулевое) состояние.

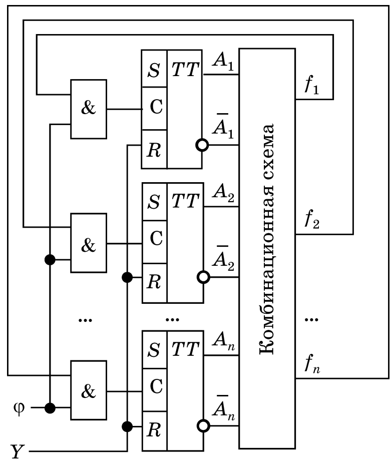


Рис. 252

Зафиксируем какой-либо момент времени между тактовыми импульсами, когда $\varphi = 0$. Триггеры находятся в некоторых состояниях. Им соответствует определенный набор значений аргументов $A_1, A_2, ..., A_n$. На этом наборе выходы $f_1, f_2, ..., f_n$ комбинационной схемы образуют набор высоких и низких уровней. Низкими уровнями соответствующие схемы И будут заперты, высокими — открыты (по своим входам). Когда на вход φ поступит импульс, он пройдет только через открытые схемы И. Поскольку триггеры реагируют на отрицательный фронт, то смена их состояний будет происходить после того, как на все схемы И по шине φ поступит низкий уровень. Благодаря этому смена состояний выходов $f_1, f_2, ..., f_n$ комбинационной схемы не вызовет никаких изменений на входах триггеров.

Задача синтеза автомата в основном сводится к построению комбинационной схемы, распределяющей тактовые импульсы по входам триггеров так, чтобы автомат менял свои состояния в соответствии с заданной последовательностью. Метод построения такого автомата весьма прост. Проиллюстрируем его на следующем примере. Пусть требуется построить схему, выполняющую счет входных импульсов в прямой последовательности 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, ..., если $A = 0$, и в обратной — 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 7, ..., если $A = 1$. Изменение направления счета возможно с любого состояния триггеров.

Очевидно, что для построения схемы необходимо четыре триггера: один триггер, обозначенный в условии буквой A, используется для переключения направления счета с прямого на обратный и наоборот, а для реализации самого счета требуется еще три триггера. Обозначим их буквами B, C, D и со-

Таблица 38

Дес.	A B C D	f_B f_C f_D
0	0 0 0 0	0 0 1
1	0 0 0 1	0 1 1
2	0 0 1 0	0 0 1
3	0 0 1 1	1 1 1
4	0 1 0 0	0 0 1
5	0 1 0 1	0 1 1
6	0 1 1 0	0 0 1
7	0 1 1 1	1 1 1
8	1 0 0 0	1 1 1
15	1 1 1 1	0 0 1
14	1 1 1 0	0 1 1
13	1 1 0 1	0 0 1
12	1 1 0 0	1 1 1
11	1 0 1 1	0 0 1
10	1 0 1 0	0 1 1
9	1 0 0 1	0 0 1

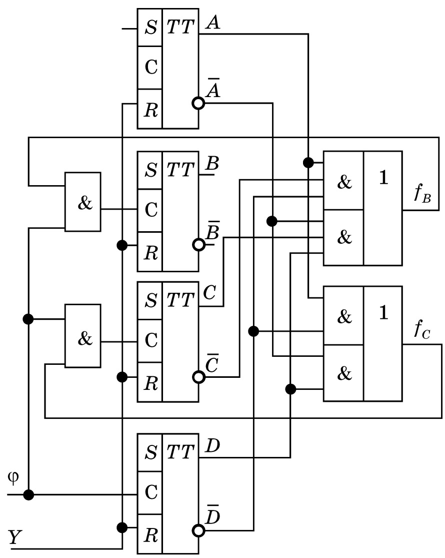


Рис. 253

ставим таблицу переходов, в которой отразим все случаи перехода автомата из одного состояния в другое (табл. 38).

В левой части таблицы (колонки A, B, C, D) записаны состояния автомата. Когда $A = 0$, автомат ведет счет в прямом направлении: 000, 001, ..., 111. При $A = 1$ идет обратной счет: 000,111, 110, ..., 001. В колонке, обозначенной «Дес.», указаны десятичные эквиваленты четырехзначных двоичных чисел, записанных в строках таблицы.

Правая часть табл. 38 состоит из трех колонок: f_B, f_C, f_D. Это выходы логической схемы, управляющей триггерами B, C, D. Триггер A управляется извне, поэтому в правой части табл. 38 колонка f_A отсутствует.

Правая часть таблицы заполняется на основе левой следующим образом. В верхней строке записано число 0000, т. е. $A = B = C = D = 0$. Если на вход φ (рис. 252) подать импульс, то автомат должен перейти в состояние 0001. Это произойдет в том случае, если тактовый импульс поступит на вход триггера D и не пройдет на входы триггеров B и C. В связи с этим в строке с кодом 0000 в правой части таблицы записываем 001.

Предположим, что на вход φ импульс поступил и автомат перешел в состояние 0001. Второй тактовый импульс должен пройти на входы триггеров C и D одновременно. Тогда триггер C перейдет в единицу, а триггер D — в нуль.

Во второй сверху строке в правой части записываем 011. Третий импульс должен перевести автомат в состояние 0011. Так как после второго импульса установилось состояние 0010, то для перевода автомата в состояние 0011 необходимо подать импульс на вход триггера D. В третьей строке записываем 001 и т. д. В результате получилась таблица соответствия для трех функций. Список минимальных форм булевых функций, описывающих комбинационную схему автомата, имеет вид:

$$f_B = A\bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}CD; \quad f_C = A\bar{D} + \bar{A}D; \quad f_D = 1.$$

Полная схема автомата, работающего в соответствии с заданными условиями, приведена на рис. 253. Заметим, что логическую схему И, управляющую входом триггера D, можно удалить, так как ее выход φ_D реализует функцию

$$\varphi_D = \varphi f_D = \varphi \cdot 1 = \varphi,$$

откуда следует, что импульсы можно подавать на вход триггера D непосредственно. (Строго говоря, синхронность от этого нарушится: синхроимпульс на вход триггера D проходит напрямую, а на входы других триггеров — через схемы И, т. е. хотя и с незначительной, но все же с задержкой.)

Еще одна особенность автомата: триггер B не участвует в работе комбинационной схемы, управляющей входами триггеров. Но это не значит, что его можно удалить. С выходов триггеров B, C, D считываются трехзначные числа, и если триггер B удалить, то выходные числа окажутся двухразрядными.

Упражнения

1. Пусть автомат (рис. 253) находится в состоянии 011 (т. е. $B = 0$, $C = D = 1$) при $A = 0$.

1) (ТЕК). Укажите состояние в двоичном коде, в которое автомат перейдет после одного тактового импульса.

2) (Р67). В каком состоянии был автомат перед тем, как перешел в состояние 011?

3) (У78). В какое состояние перейдет автомат после одного тактового импульса, если перед подачей этого импульса триггер A установить в единичное состояние?

2. На вход Y автомата (рис. 253) поступил установочный импульс. В каком состоянии окажется автомат, если при $A = 0$ на вход φ подать n импульсов, где:

1) (Е79) $n = 10$? 2) (Р00) $n = 24$? 3) (061) $n = 333$?

3. Автомат (рис. 253) находится в состоянии 111. В каком состоянии окажется автомат, если при $A = 1$ на вход φ подать n импульсов:

1) (ИФ2) $n = 4$? 2) (666) $n = 48$? 3) (ППИ) $n = 90$?

19.6. ТРИГГЕР ТИПА *JK*

На рис. 247 изображен триггер JK, если пунктирные линии считать сплошными, а на вход С подавать синхроимпульсы.

При $J = 1$, $K = 0$ синхроимпульс переводит триггер JK в единичное состояние независимо от того, в каком состоянии находился триггер до подачи импульса. Следовательно, J — это единичный вход триггера JK.

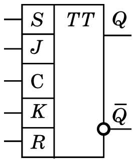


Рис. 254

Если $J = 0$, $K = 1$, то синхроимпульс переводит триггер в нулевое состояние независимо от предыдущего. Следовательно, K — это нулевой вход триггера.

Из рис. 247 видно, что если $J = K = 0$, то триггер находится в том состоянии, в какое он был переведен до подачи низкого уровня на оба входа: J и K. Это режим хранения информации: триггер не меняет свое состояние даже при подаче импульсов на его синхровход.

При $J = K = 1$ триггер превращается в T-триггер, счетным входом которого является синхровход, т. е. при $J = K = 1$ с каждым импульсом триггер меняет свое состояние на противоположное.

Условное обозначение JK-триггера приведено на рис. 254.

Триггер JK, как и T-триггер, является двухтактным.

Упражнения

1. (ВЫР). Триггер JK (рис. 254) находится в нулевом состоянии. На его входе J установили высокий уровень, а на входе K — низкий. Затем на синхровход подали четыре импульса (рис. 249). Укажите на рис. 249 номера точек, соответствующих моментам, когда JK-триггер сменит свое состояние.

2. (ЦВВ). Триггер JK (рис. 254) находится в нулевом состоянии. На его входах J и K установили высокие уровни, т. е. приняли

$$J = K = 1.$$

Затем на синхровход подали четыре импульса (рис. 249). Укажите номера точек на этом рисунке, соответствующих моментам, когда триггер сменит свое состояние.

3. (ЦХТ). Пусть $R = S = 1$. На какие вопросы Вы ответите «да»? Верно ли, что:

1) если $\mathrm{C} = 1$, то после подачи прямоугольного импульса на вход J триггер всегда переходит в единичное состояние?

2) если принять $\mathrm{C} = 1$, то после подачи импульса одновременно на оба входа J и K триггер независимо от предыдущего состояния перейдет в единичное?

3) если входы J, K и C соединить между собой, то с подачей импульса на получившуюся общую точку триггер сменит свое состояние на противоположное?

4) если после $J = K = \mathrm{C} = 1$ принять $J = K = 0$, а затем на вход C подать низкий уровень, то триггер сменит свое состояние на противоположное?

5) если $\mathrm{C} = 0$, то при подаче импульсов на входы J и K состояние триггера не меняется?

6) если вход C соединить с входом J, то при $K = 1$ триггер будет менять свое состояние с каждым импульсом, поступившим на вход J?

7) если вход C соединить с входом K, то при $J = 1$ триггер будет менять свое состояние с каждым импульсом, поступившим на вход K?

19.7. СИНТЕЗ ПРОСТЕЙШИХ МНОГОТАКТНЫХ АВТОМАТОВ НА *JK*-ТРИГГЕРАХ

Метод построения многотактных автоматов с использованием JK-триггеров рассмотрим на примере. Пусть требуется разработать схему, состояния которой менялись бы в последовательности 3, 4, 2, 0, 5, 7, 6, 1, 3, ... и так далее по замкнутому циклу.

Так как всего имеется восемь различных состояний, то для построения схемы необходимо три триггера. Начальным является состояние 011, следовательно, к шине Y (установка исходного состояния) присоединяем вход R триггера A, вход S триггера B и вход S триггера C.

Таблица 39

$A\ B\ C$	$J_A\ K_A$	$J_B\ K_B$	$J_C\ K_C$
0 1 1	1 ×	× 1	× 1
1 0 0	× 1	1 ×	0 ×
0 1 0	0 ×	× 1	0 ×
0 0 0	1 ×	0 ×	1 ×
1 0 1	× 0	1 ×	× 0
1 1 1	× 0	× 0	× 1
1 1 0	× 1	× 1	1 ×
0 0 1	0 ×	1 ×	× 0

Строим таблицу переходов, начиная с состояния 011. Строится она по аналогии с табл. 38, но в данном случае правая часть таблицы содержит не три колонки, а шесть, так как JK-триггеры имеют по два входа: J_A, K_A — входы триггера A; J_B, K_B — входы триггера B; J_C, K_C — входы триггера C (табл. 39).

Под действием первого тактового импульса должно установиться состояние 100, как это указано во второй строке таблицы. Триггер A перейдет в состояние единицы, если на вход J_A поступит высокий уровень. Следовательно, в колонке J_A строки 011 записываем единицу. В колонке K_A при этом ставим крестик (неопределенное состояние), так как триггер A перейдет в единичное состояние независимо от того, высокий или низкий уровень будет на входе K_A.

Триггер B перейдет в состояние нуля, если на вход K_B подать высокий уровень, а на вход J_B — безразлично какой, высокий или низкий. Следовательно, в колонке K_B записываем единицу, а в колонке J_B — крестик (также обозначающий неопределенное состояние). То же самое относится и к колонкам J_C и K_C.

Допустим, что первый тактовый импульс прошел на синхровход схемы и установил ее в состояние 100. Под действием второго импульса автомат должен перейти в состояние 010. Триггер A перейдет в нулевое состояние, если на вход K_A подать высокий уровень. На входе S_A при этом может поддерживаться безразлично какой уровень — высокий или низкий. Следовательно, в колонке K_A записываем единицу, а в колонке J_A ставим крестик.

Триггер B перейдет в состояние единицы, если при любом уровне на входе K_B на вход J_B поступит высокий уровень. В связи с этим в колонке J_B записываем единицу, а в колонке K_B — крестик.

Триггер C должен остаться в нулевом состоянии. Это возможно, если на входе J_C будет поддерживаться низкий уровень. На входе K_C при этом может быть как низкий уровень, так и высокий. Следовательно, в колонке J_C записываем нуль, а в колонке K_C — крестик.

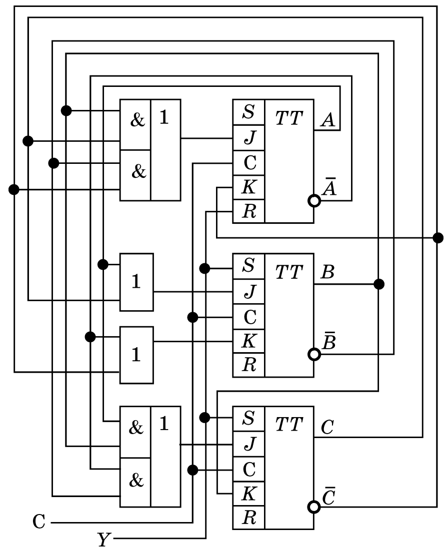


Рис. 255

Аналогичным образом заполняем всю правую часть таблицы переходов. После заполнения таблицы рассматриваем ее как таблицу соответствия для шести функций, зависящих от одних и тех же аргументов A, B, C.

Из табл. 39 видно, что каждая из шести функций не определена на четырех наборах. После минимизации получаем:

$$J_A = BC + \overline{B}\,\overline{C}; \qquad J_B = A + C; \qquad J_C = AB + \overline{A}\overline{B};$$
$$K_A = \overline{C}; \qquad K_B = \overline{A} + \overline{C}; \qquad K_C = B.$$

Схема автомата приведена на рис. 255. Синхроимпульсы подаются на шину С, к которой подключены синхровходы всех триггеров.

Упражнения

1. Какое было предыдущее состояние (в двоичном коде) автомата (рис. 255) и какое будет следующее, если в данный момент автомат находится в состоянии:

1) (ФАР)! 010? 2) (ЯНС)! 011? 3) (21Т)! 001?

2. (НЕФ). Укажите исходное состояние (в двоичном коде) автомата (рис. 255), в которое он устанавливается по входу Y.

3. Автомат (рис. 255) находится в состоянии 100. В какое состояние (в двоичном коде) перейдет автомат, если на его синхровход подать:

1) (ОК1) 3 импульса? 2) (ЮКИ) 12 импульсов? 3) (ЧЕХ) 39 импульсов?

4. (ЭМЦ). Сколько выходов имеет комбинационная схема на рис. 255, управляющая входами J и K триггеров A, B, C?

5. На вход С автомата (рис. 255) подано k импульсов. В результате оказалось, что

$$A = B = C = 0.$$

В каком состоянии находился автомат до подачи импульсов, если:

1) (МУЭ) $k = 4$? 2) (5РП) $k = 19$? 3) (КОП) $k = 631$?

6. Постройте таблицу переходов и изобразите схему автомата на JK-триггерах, если под действием тактовых импульсов состояния автомата меняются в последовательности 110, 010, 011, 001, 000, 100, 101, 111, 110, ... Исходным является состояние 110. Используйте обозначения, как в табл. 39. По таблице переходов определите, какие сигналы (0, 1, ×) поступят на входы J_A, K_A, J_B, K_B, J_C, K_C, если автомат находится в состоянии:

1) (НИР) 000; 3) (ОЦС) 001; 5) (АЦТ) 010; 7) (ФУФ) 011;
2) (ЯСЕ) 100; 4) (132) 101; 6) (НУЗ) 110; 8) (Г64) 111.

7. См. условие упр. 6. Найдите минимальные ДНФ функций:

1) (255) $J_A = ...$; 3) (СКК) $J_B = ...$; 5) (УУ. ВИ) $J_C = ...$;
2) (ДЕ8) $K_A = ...$; 4) (599) $K_B = ...$; 6) (УФ. СИ) $K_C = ...$.

19.8. СДВИГОВЫЙ РЕГИСТР

На рис. 256 приведена схема пятиразрядного сдвигового регистра. По входу Y все триггеры регистра переходят в нулевое состояние. По входам S в регистр можно извне записать любое пятизначное двоичное число. Триггер A соответствует старшему разряду, триггер E — младшему.

Регистр на рис. 256 предназначен для сдвига числа вправо по замкнутому циклу, т. е. цифра младшего разряда после импульса сдвига, поданного на синхровход С, занимает место старшего разряда. Пусть в регистре находится число 10010. Подадим на синхровход С импульс. Тогда единица триггера A перепишется в триггер B. До подачи импульса триггер B был в состоянии нуля, следовательно, после импульса получим $C = 0$. Триггер D перейдет в нулевое состояние, E — в единичное и A — в нулевое. В результате число после сдвига примет вид: 01001. Если на вход C подать еще один импульс, то получим 10100, и т. д. После пятого импульса регистр вернется в исходное состояние: в нем снова будет число 10010. Таким образом, полный цикл преобразования числа 10010 состоит из пяти чисел: 10010, 01001, 10100, 01010, 00101.

Если выход E отключить от входа J_A и выход $\bar{E}$ — от входа K_A, то получим разомкнутый регистр, т. е. схему деления числа на два (при делении нечетных чисел результат округляется в меньшую сторону). Запишем в регистр число

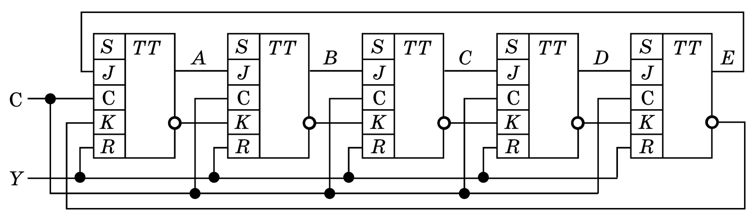


Рис. 256

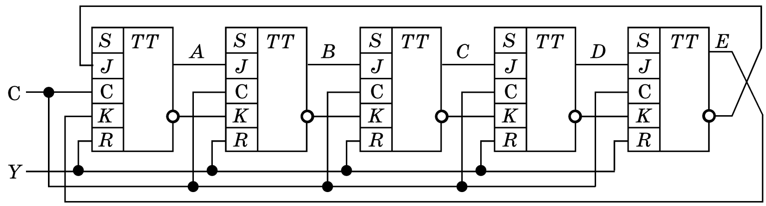


Рис. 257

11001, а на вход J_A подадим низкий уровень, на вход K_A — высокий. После первого импульса сдвига получим 01100, после второго — 00110, после третьего — 00011, после четвертого — 00001, после пятого — 00000, и в дальнейшем число меняться не будет.

На рис. 256 прямой выход триггера E соединен с входом J_A, а выход $\bar{E}$ — с входом K_A. Поменяем местами провода, ведущие от триггера E к триггеру A, то есть выход E отключим от входа J_A и присоединим ко входу K_A, а выход $\bar{E}$ отключим от входа K_A и присоединим ко входу J_A (рис. 257).

Получилась очень интересная схема. Подадим на вход Y импульс сброса. Установится число 00000. После первого синхроимпульса триггер A перейдет в единичное состояние, так как на вход J_A с инверсного выхода триггера E поступает высокий уровень, а на вход K_A с прямого выхода E подается низкий уровень. Регистр перейдет в состояние 10000. После второго импульса — в состояние 11000, затем — 11100, 11110, 11111, 01111, 00111, 00011, 00001, 00000. После десятого импульса регистр перейдет в нулевое состояние.

Всего регистр имеет 10 различных состояний. Поэтому его используют в качестве десятичного счетчика. Такую схему иногда называют кольцом Реженера, а также счетчиком Джонсона.

Упражнения

1. (МЭФ). В регистр (рис. 256) записано число 01111. Какое двоичное число окажется в регистре после одного синхроимпульса?

2. Триггеры регистра (рис. 256) находятся в состояниях:

$$A = C = D = 1; \quad B = E = 0.$$

1) (АХХ). Какое двоичное число находится в регистре?

2) (НАЦ). Какое это десятичное число?

3. Регистр (рис. 256) находится в состоянии 10001. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре:

1) (ИШИ) после трех импульсов сдвига?

2) (СЯШ) после четырех импульсов сдвига?

4. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре (рис. 256) после 14 импульсов сдвига, если исходное число имеет вид:

1) (Т56) 00001? 3) (ХЫН) 11001? 5) (ПКБ) 11110?
2) (ФЫЛ) 11111? 4) (Я50) 00000? 6) (НИС) 01010?

19.9. СИНТЕЗ МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АВТОМАТОВ

Многофункциональные автоматы выполняют преобразование входной информации по нескольким различным алгоритмам, каждый из которых имеет свой управляющий код. Синтез таких автоматов может быть осуществлен при помощи того же табличного метода, что и в предыдущих случаях. В качестве примера рассмотрим схему, основу которой составляет сдвиговый регистр.

В предыдущем подразделе рассмотрены три варианта применения сдвигового регистра. Объединим эти три варианта в одну схему и построим автомат, при помощи которого можно было бы выполнять преобразование числа по любому из трех вариантов.

Пусть P и Q — входные управляющие сигналы. Условимся считать, что:

1) если $P = Q = 0$, то регистр является разомкнутым;

2) если $P = 0$, $Q = 1$, то регистр замкнут;

3) если $P = 1$, $Q = 0$, то регистр является кольцом Реженера;

4) состояние $P = Q = 1$ является неиспользуемым.

Представим заданные условия в виде таблицы по аналогии с тем, как это было сделано в подразделе 19.7. Вид преобразования числа зависит только от входных сигналов P и Q и от состояния триггера E, следовательно, необходимо рассмотреть восемь случаев (табл. 40).

Таблица 40

	$P\,Q\,E$	$J_A\,K_A$
0	0 0 0	0 1
1	0 0 1	0 1
2	0 1 0	0 1
3	0 1 1	1 0
4	1 0 0	1 0
5	1 0 1	0 1
6	1 1 0	× ×
7	1 1 1	× ×

Если $P = Q = 0$, то регистр разомкнут. Это значит, что под действием импульса триггер A должен перейти в нулевое состояние. Следовательно, в строках 000 и 001 на пересечении с колонками J_A и K_A записываем 0 и 1.

Если $P = 0$, $Q = 1$, то регистр замкнут. Строке 010 соответствует случай, когда $E = 0$, и, следовательно, триггер A должен перейти в нулевое состояние. В колонке K_A записываем единицу, а в колонке J_A — нуль. В строке 011 записываем: $J_A = 1$, $K_A = 0$, так как $E = 1$, и следовательно, триггер A после импульса сдвига должен перейти в единичное состояние.

Если $P = 1$, $Q = 0$, то схема работает как кольцо Реженера. Это значит, что при $E = 0$ триггер A должен перейти в единичное состояние (записываем: $J_A = 1$, $K_A = 0$), а при $E = 1$ — в нулевое (записываем: $J_A = 0$, $K_A = 1$).

В двух последних строках таблицы в колонках J_A и K_A ставим крестики, так как состояние входов $P = Q = 1$ является неиспользуемым и его можно рассматривать как неопределенное состояние.

Согласно табл. 40 после минимизации получаем:

$$J_A = QE + P\bar{E}; \quad K_A = \bar{Q}E + \bar{P}\bar{E}.$$

Полная схема автомата, работающего в соответствии с заданными условиями, приведена на рис. 258.

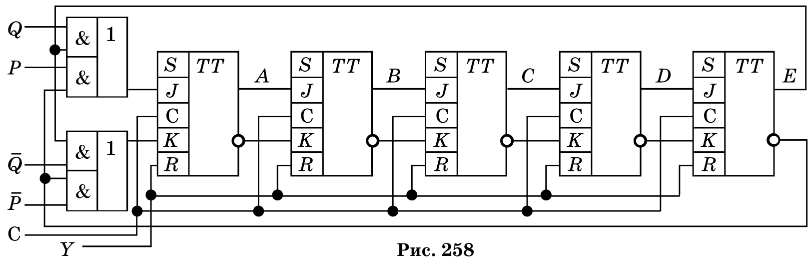


Рис. 258

Упражнения

1. Пусть на рис. 258 $P = Q = 0$. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре после двух сдвиговых импульсов, если исходным является число:

1) (ЭТО) 10111? 2) (221) 00111? 3) (НАХ) 10000?

2. Пусть на рис. 258 $P = 1$, $Q = 0$. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре после одного импульса сдвига, если исходным является число:

1) (983) 01101? 2) (ОДИ) 00110? 3) (НАШ) 10110?

3. Пусть на рис. 258 $P = 1$, $Q = 0$. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре после трех импульсов сдвига, если исходным является число:

1) (ПВК) 00001? 2) (ЭХ7) 10000? 3) (ПИМ) 11010?

4. На рис. 258 три варианта работы регистра представлены двумя управляющими сигналами P и Q. Заменим их тремя сигналами X, Y, Z следующим образом:

- если $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$, то регистр разомкнут;
- если $X = 0$, $Y = 1$, $Z = 0$, то регистр замкнут;
- если $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$, то регистр является кольцом Реженера.

Все остальные пять комбинаций входных сигналов

$$000, 011, 101, 110, 111$$

являются неиспользуемыми, в связи с чем их можно рассматривать как неопределенные состояния.

Постройте таблицу для нахождения функций J_A и K_A, расположив переменные в последовательности X, Y, Z, E.

1) (ДУЗ). Сколько неопределенных состояний в левой части таблицы?

2) (НАЧ). Укажите состояния (в десятичной системе), на которых в таблице $J_A = 1$.

3) (ШИЙ). Укажите состояния (в десятичной системе), на которых в таблице $K_A = 1$.

5. См. упр. 4. Чтобы найти минимальные ДНФ функций J_A и K_A, их необходимо доопределить. Укажите наборы (в десятичной системе) значений переменных X, Y, Z, E, на которых:

1) (ЛБК) функция J_A доопределена единицами?

2) (ЖАЛ) функция J_A доопределена нулями?

3) (ОКМ) функция K_A доопределена единицами?

4) (Б59) функция K_A доопределена нулями?

6. См. упр. 4. Найдите минимальную ДНФ (порядок букв X, Y, Z, E):

1) (ЛВ. ВИ) функции J_A; 2) (ЦТ. ВИ) функции K_A.

19.10. АВТОМАТЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЦИКЛОМ СМЕНЫ СОСТОЯНИЙ

В предыдущих подразделах рассматривались автоматы, в которых длина цикла равна степени числа 2. Например, в табл. 39 представлен автомат с восемью различными состояниями. В общем же случае число состояний в цикле может быть произвольным. Синтез таких автоматов в принципе осуществляется точно так же, как это описано в подразделе 19.7. Добавляются лишь новые неопределенные состояния. Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 1. Построить автомат, меняющий под действием синхроимпульсов свои состояния в последовательности 0, 6, 2, 1, 5 по замкнутому циклу.

Всего пять состояний, следовательно, необходимо три триггера. Так как рабочих только пять состояний, то три состояния являются избыточными (табл. 41).

Согласно таблице получаем минимальные формы шести функций, описывающих состояния входов трех триггеров автомата:

$$J_A = \bar{B};\quad K_A = 1;\quad J_B = \bar{C};\quad K_B = \bar{A};\quad J_C = \bar{A}B;\quad K_C = A.$$

Логическая схема этого автомата приведена на рис. 259. Русской буквой С на этой схеме обозначен вход для подачи импульсов тактового генератора.

Пример 2. Построить автомат, меняющий свои состояния в последовательности 1, 7, 2, 4, 5, 6, 6, ... по разомкнутому циклу.

Согласно условию автомат должен дойти до состояния 110 и на нем остановиться. Это значит, что автомат, дойдя до состояния 110, должен под действием каждого из последующих импульсов генератора переходить в то же состояние 110. Выйти из этого состояния он может только в результате записи в него любого из чисел 1, 2, 4, 5, 7 по установочным входам R и S. После

Таблица 41

A B C	J_A K_A	J_B K_B	J_C K_C
0 0 0	1 ×	1 ×	0 ×
1 1 0	× 1	× 0	0 ×
0 1 0	0 ×	× 1	1 ×
0 0 1	1 ×	0 ×	× 0
1 0 1	× 1	0 ×	× 1
0 1 1	× ×	× ×	× ×
1 0 0	× ×	× ×	× ×
1 1 1	× ×	× ×	× ×

Таблица 42

A B C	J_A K_A	J_B K_B	J_C K_C
0 0 1	1 ×	1 ×	× 0
1 1 1	× 1	× 0	× 1
0 1 0	1 ×	× 1	0 ×
1 0 0	× 0	0 ×	1 ×
1 0 1	× 0	1 ×	× 1
1 1 0	× 0	× 0	0 ×
0 0 0	× ×	× ×	× ×
0 1 1	× ×	× ×	× ×

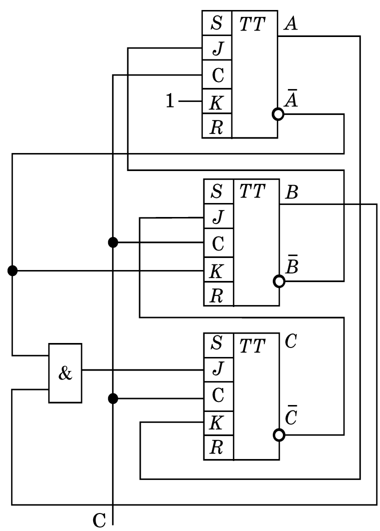


Рис. 259

записи одного из указанных чисел автомат снова доходит до состояния 110 и на нем останавливается.

Таблица переходов этого автомата (см. табл. 42) строится точно так же, как и в предыдущем случае за исключением состояния 110. В таблице показано, что автомат на состоянии 110 переходит в это же состояние.

Булевы функции, описывающие состояния входов автомата после минимизации принимают вид

$$J_A = 1; \quad K_A = BC; \quad J_B = C; \quad K_B = \bar{A}; \quad J_C = \bar{B}; \quad K_C = A.$$

Схема автомата строится точно так же, как и в случае предыдущего примера, поэтому здесь не приводится.

19.11. АВТОМАТ С ЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМОЙ НА ВЫХОДАХ

До сих пор мы рассматривали автоматы с логической схемой на входах. Главная особенность таких автоматов состоит в том, что цикл смены его состояний не может содержать повторы. Проиллюстрируем это на примере. Пусть требуется построить автомат, меняющий под действием синхроимпульсов свои состояния в последовательности 3, 5, 2, 1, 4, 2, 7, 0 по замкнутому циклу, в котором повторяется состояние 010. Составим таблицу переходов (табл. 43) так, как это показано в подразделе 19.7.

Таблица 43

ABC	$J_A K_A$	$J_B K_B$	$J_C K_C$
0 1 1	1 ×	× 1	× 0
1 0 1	× 1	1 ×	× 1
0 1 0	0 ×	× 1	1 ×
0 0 1	1 ×	0 ×	× 1
1 0 0	× 1	1 ×	0 ×
0 1 0	1 ×	× 0	1 ×
1 1 1	× 1	× 1	× 1
0 0 0	0 ×	1 ×	1 ×

Анализируем таблицу. Во-первых, в ней нет состояния 110. Следовательно, возникает вопрос, можно ли это состояние рассматривать как неопределенность. Во-вторых, при минимизации функции J_A неизвестно, что делать с минтермом $m_2 = \bar{A}B\bar{C}$: в третьей сверху строке в колонке J_A указано, что минтерм m_2 не должен входить в функцию J_A, а согласно шестой сверху строке минтерм m_2 необходимо включить в эту функцию. Точно такая же неопределенность имеет место и в случае функции K_B.

Таким образом, в общем случае автомат, в котором состояния в пределах одного цикла повторяются, построить невозможно.

Однако подобные задачи легко решаются, если сначала построить какой-либо автомат с логической схемой на входах и циклом той же длины, но с неповторяющимися состояниями, а затем к выходам триггеров подключить соответствующий комбинационный преобразователь.

Проиллюстрируем построение такого автомата на примере. Допустим, что требуется построить автомат, меняющий под действием тактовых импульсов свои состояния в последовательности 4, 12, 3, 3, 14, 4, 7, 7, 4.

Всего состояний 9, следовательно, необходимо четыре триггера. Построим из этих триггеров двоичный счетчик с логической схемой на входах, ме-

Таблица 44

A	B	C	D	J_A	K_A	J_B	K_B	J_C	K_C	J_D	K_D	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	×	0	×	0	×	1	×	0	1	0	0
0	0	0	1	0	×	0	×	1	×	×	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	×	0	×	×	0	1	×	0	0	1	1
0	0	1	1	0	×	1	×	×	1	×	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	×	×	0	0	×	1	×	1	1	1	0
0	1	0	1	0	×	×	0	1	×	×	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	×	×	0	×	0	1	×	0	1	1	1
0	1	1	1	1	×	×	1	×	1	×	1	0	1	1	1
1	0	0	0	×	1	0	×	0	×	0	×	0	1	0	0

няющий свои состояния в последовательности натурального ряда 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0 и т. д. по замкнутому циклу. Обозначим триггеры счетчика буквами A, B, C, D и все возможные состояния представим в виде таблицы, в которой приведем не только состояния входов триггеров A, B, C, D, но и запишем все числа выходной последовательности (табл. 44). Выходы автомата обозначим знаками f_1, f_2. f_3, f_4. В таблице отведем им четыре правые колонки.

В полученной таблице содержатся все необходимые сведения для построения автомата. Проанализируем ее. Если автомат находится в состоянии 0000 (первые четыре колонки), то выходное число равно 0100 (оно записано в четырех правых колонках). Подадим на вход автомата импульс. Он переведет в единичное состояние триггер D (в колонке J_D поставлена единица). Каждый триггер из остальных остается в прежнем состоянии. Одновременно с этим изменилось и состояние выходов автомата: число 0100 сменилось на 1100.

Подадим на вход автомата второй импульс. Согласно таблице триггер C перейдет в единичное состояние (в колонке J_C строки 0001 поставлена единица), а триггер D — в нулевое (в колонке K_D строки 0001 поставлена единица). Выходное число станет равным 0011. Точно так же можно проследить работу автомата на всех остальных строках таблицы.

Состояния входов триггеров A, B, C, D описываются следующими функциями:

$$J_A = BCD; \quad K_A = 1; \quad J_B = CD; \quad K_B = CD;$$
$$J_C = D; \quad K_C = D; \quad J_D = \bar{A}; \quad K_D = 1.$$

Комбинационная схема, при помощи которой формируются выходные числа, строится на основе функций:

$$f_1 = B\bar{C}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D;$$
$$f_2 = B + \bar{C};$$
$$f_3 = C + B\bar{D};$$
$$f_4 = C.$$

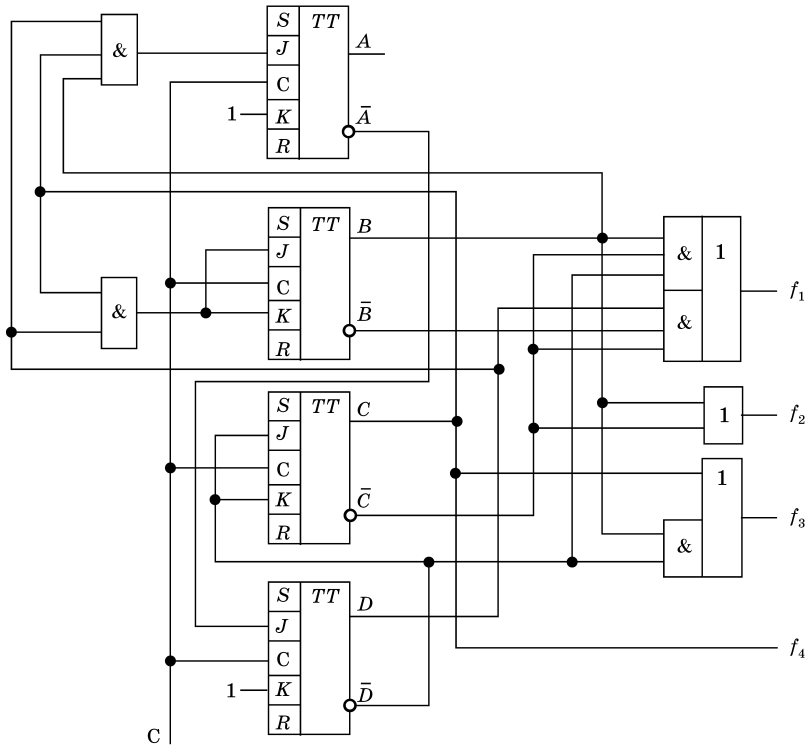


Рис. 260

Полная схема автомата приведена на рис. 260. Буквой С русского алфавита на этой схеме обозначен вход для подачи тактовых прямоугольных импульсов.

19.12. СИНТЕЗ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ КОДОВ, СОДЕРЖАЩЕГО ПАМЯТЬ

В предыдущих подразделах рассматривались автоматы, имеющие один вход для подачи тактовых импульсов, под действием которых числа, хранящиеся в памяти автомата, поступают на выход в заранее заданной последовательности. Теперь рассмотрим автомат с более сложным алгоритмом работы. Сложность состоит в том, что одни и те же входные двоичные числа могут преобразовываться в различные выходные коды.

Синтез таких автоматов поясним на следующем примере.

На вход автомата поступают в произвольном порядке трехзначные двоичные числа. Разряды их обозначим буквами A, B, C, где букве A соответствует старший двоичный разряд, C — младший. Автомат содержит два триггера D и E, меняющие свои состояния под действием синхроимпульсов (т. е. тактовых импульсов) по закону: 00, 10, 11, 01 и т. д. по замкнутому циклу. В формировании выходного числа участвуют и входные коды, и состояния триггеров D и E.

Алгоритм работы автомата представлен в табл. 45. В колонках, обозначенных буквами A, B, C, перечислены входные коды (т. е. трехзначные двоичные числа). В колонках J_D, K_D, J_E, K_E представлены функции, описывающие состояния входов триггеров D и E. Колонки f_1, f_2, f_3, f_4 отведены для записи выходных кодов. Анализируем таблицу.

Таблица 45

№	A	B	C	D	E	J_D	K_D	J_E	K_E	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	0	1	×	0	×	0	1	0	1
2	0	0	0	1	0	×	0	1	×	0	1	0	0
3	0	0	0	1	1	×	1	×	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	×	×	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	1	×	0	×	0	0	1	1
6	0	0	1	1	0	×	0	1	×	0	0	1	0
7	0	0	1	1	1	×	1	×	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	1	0	×	×	1	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	1	×	0	×	0	1	1	1
10	0	1	0	1	0	×	0	1	×	0	1	0	0
11	0	1	0	1	1	×	1	×	0	0	1	0	0
9	0	1	0	0	1	0	×	×	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1	×	0	×	0	0	1	1
14	0	1	1	1	0	×	0	1	×	1	1	1	0
15	0	1	1	1	1	×	1	×	0	1	1	0	1
13	0	1	1	0	1	0	×	×	1	0	0	1	0
16	1	0	0	0	0	1	×	0	×	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0	×	0	1	×	0	0	0	0
19	1	0	0	1	1	×	1	×	0	0	1	0	0
17	1	0	0	0	1	0	×	×	1	0	1	0	0
20	1	0	1	0	0	1	×	0	×	1	0	1	1
22	1	0	1	1	0	×	0	1	×	1	0	1	0
23	1	0	1	1	1	×	1	×	0	1	1	0	0
21	1	0	1	0	1	0	×	×	1	1	1	0	0
24	1	1	0	0	0	1	×	0	×	0	0	1	1
26	1	1	0	1	0	×	0	1	×	0	1	0	0
27	1	1	0	1	1	×	1	×	0	0	1	0	0
25	1	1	0	0	1	0	×	×	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0	1	×	0	×	1	0	1	1
30	1	1	1	1	0	×	0	1	×	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1	×	1	×	0	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1	0	×	×	1	1	1	1	0

Пусть на вход подано число 000, тогда выходной код зависит от состояния памяти:

- если $D = E = 0$, то выходное число равно 0101 (строка № 0);
- если $D = 0$, $E = 1$, то выходное число равно 0100 (строка № 1);
- если $D = 1$, $E = 0$, то выходное число равно 0100 (строка № 2);
- если $D = E = 1$, то выходное число равно 0100 (строка № 3).

Пусть на вход подано число 001, тогда выходной код определяется следующим образом:

- если $D = E = 0$, то выходное число равно 0011 (строка № 4);
- если $D = 0$, $E = 1$, то выходное число равно 0000 (строка № 5);
- если $D = 1$, $E = 0$, то выходное число равно 0010 (строка № 6);
- если $D = E = 1$, то выходное число равно 0001 (строка № 7),

и т. д. до конца таблицы.

Находим функции, управляющие входами триггеров D и E. После минимизации эти функции принимают вид

$$J_D = \bar{E}; \quad K_D = E; \quad J_E = D; \quad K_E = \bar{E}.$$

Функции f_1, f_2, f_3, f_4 представим в виде минимальных ДНФ:

$$f_1 = AC + BCD;$$
$$f_2 = AE + BD + \bar{A}\,\bar{C};$$
$$f_3 = C\bar{E} + B\bar{D};$$
$$f_4 = \bar{A}CDE + \bar{D}\,\bar{E}.$$

Схема автомата приведена на рис. 261. Проанализируем работу схемы. Пусть триггеры D и E находятся в нулевом состоянии. Тогда

$$f_1 = AC; \quad f_2 = \bar{A}\,\bar{C}; \quad f_3 = C + B; \quad f_4 = 1. \qquad (30)$$

Подадим на вход автомата двоичное число 000. Это значит, что

$$A = B = C = 0,$$

и функции f_1, f_2, f_3, f_4, описывающие состояния выходов автомата, на этом наборе принимают значения:

$$f_1 = 0; \;\; f_2 = 1; \quad f_3 = 0; \;\; f_4 = 1.$$

Так как функции f_1 соответствует старший разряд выходного двоичного числа, то на выходе автомата получаем число 0101, что находится в полном соответствии со строкой № 0 табл. 45.

Подадим на вход C синхроимпульс. Так как на единичном входе триггера D имеется высокий уровень, а на единичном входе триггера E — низкий, то под действием этого импульса триггеры окажутся в состояниях:

$$D = 1; \quad E = 0.$$

Функции f_1, f_2, f_3, f_4 при этом принимают вид

$$f_1 = AC + BC; \quad f_2 = B + \bar{A}\,\bar{C}; \quad f_3 = C; \quad f_4 = 0. \qquad (31)$$

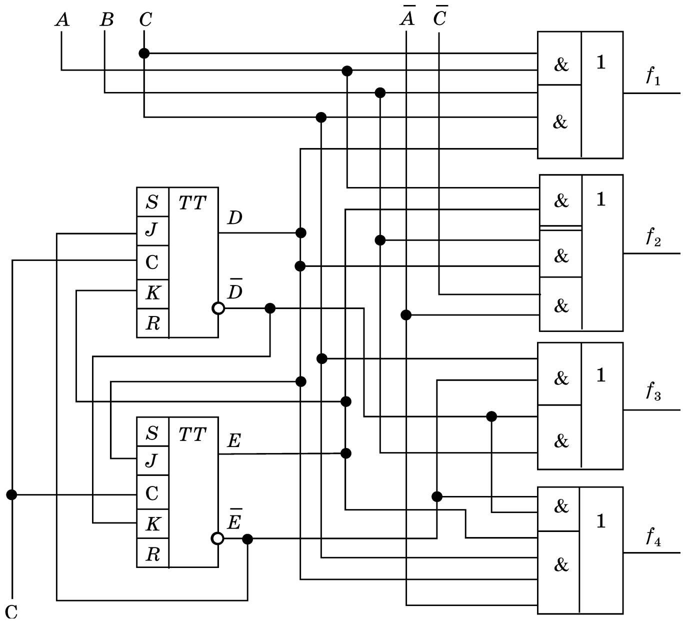


Рис. 261

Непосредственно по схеме можно убедиться в том, что если на вход подать, например, число 010, то на выходе получим код 0100. Если подать число 111, то на выходе окажется код 1110 и т. д.

Таким образом, автомат преобразует трехзначные входные коды в четырехзначные выходные, но не так, как это делается при помощи комбинационного преобразователя. Если одновременно со сменой входного кода подавать синхроимпульс, то одинаковым входным кодам в общем случае будут соответствовать различные выходные коды.

Однако в частных случаях автомат может работать и как комбинационная схема. Например, если установить $D = E = 0$, а на вход С подать низкий уровень, т. е. отключить генератор синхроимпульсов, то автомат будет работать как комбинационный преобразователь:

000 — 0101, 001 — 0011, 010 — 0111, 011 — 0011,
100 — 0001, 101 — 1011, 110 — 0011, 111 — 1011,

где слева указан входной код, справа — выходной. Например, входному коду 000 соответствует выходной код 0101, входному коду 001 — выходной код 0011 и т. д.

Установим триггеры D и E в другое состояние — получим новый комбинационный преобразователь. Так как триггеров два, то при помощи данного автомата можно реализовать четыре комбинационных преобразователя. Каждый из них представлен системой остаточных функций путем подстановки в каждую из функций f_1, f_2, f_3, f_4 значений 0 или 1 вместо аргументов D и E. При $D = E = 0$ и при $D = 1$, $E = 0$ остаточные функции уже найдены. Это выражения (30) и (31) соответственно. Оставшиеся две системы функций имеют вид:

$$f_1 = AC; \quad f_2 = A + \bar{A}\,\bar{C} = A + \bar{C}; \quad f_3 = B; \quad f_4 = 0. \qquad (32)$$

$$f_1 = AC + BC; \quad f_2 = A + B + \bar{A}\,\bar{C} = A + B + \bar{C}; \quad f_3 = 0; \quad f_4 = \bar{A}C. \qquad (33)$$

Из них система (32) получена при $D = 0, E = 1$, система (33) — при $D = E = 1$.

Если требуется исключить работу автомата в режиме комбинационной схемы, то необходимо добавить три триггера для записи в них входных кодов, и синхровходы их подключить к входу С. Тогда при отсутствии тактовых импульсов смена входных кодов никаких изменений в схеме не вызовет. Работать автомат будет только под действием импульсов генератора.

19.13. РАСПРЕДЕЛИТЕЛИ ИМПУЛЬСОВ

Существует большой класс автоматов, главное назначение которых состоит в распределении импульсов генератора по нескольким выходам. Синтез их проиллюстрируем на примере.

Автомат имеет один вход, на который поступают импульсы генератора, и пять выходов. Схема работает следующим образом. Первый импульс проходит на первый выход, второй — на второй выход и т. д. по замкнутому циклу.

Так как всего должно быть пять различимых состояний, то для построения автомата необходимы три триггера. Обозначим их буквами A, B, C. Все подобные автоматы могут быть построены на основе двоичного счетчика и дешифратора. При этом счетчик может менять свои состояния в любой последовательности. В данном случае воспользуемся схемой, приведенной на

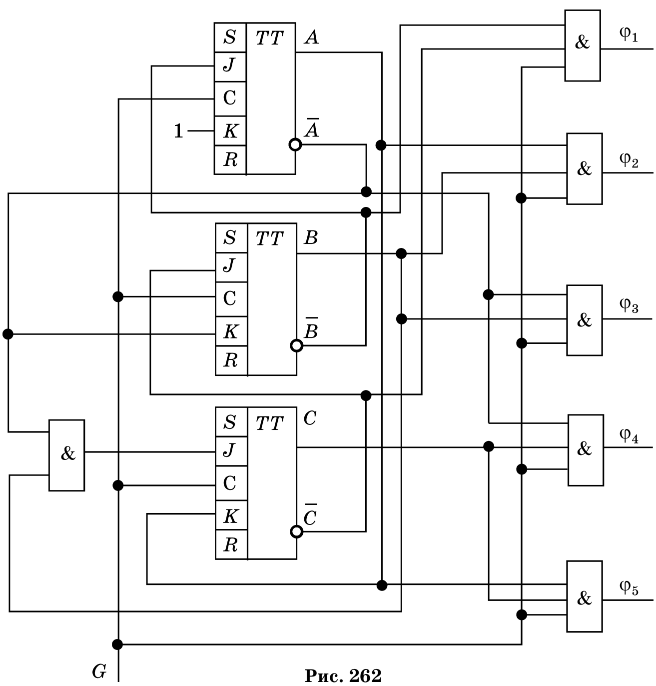


Рис. 262

рис. 259, и подключим к ее выходам неполный дешифратор. На вход каждой схемы И дешифратора подадим импульсы генератора. Полная схема распределителя импульсов приведена на рис. 262.

Буквой G на этой схеме обозначен генератор прямоугольных импульсов. Функции, описывающие состояния выходов всего автомата, т. е. выходы неполного дешифратора, имеют вид:

$$\varphi_1 = \bar{B}\bar{C}G; \qquad \varphi_2 = ABG; \qquad \varphi_3 = \bar{A}BG; \qquad \varphi_4 = \bar{A}CG; \qquad \varphi_5 = ACG.$$

Пусть исходным является состояние 000, т. е. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Непосредственно по схеме можно определить, что первый импульс генератора G пройдет только на выход φ_1. Этот же импульс (по отрицательному фронту) переведет триггеры A и B в единичное состояние. Второй импульс генератора пройдет на выход φ_2 и одновременно переведет триггер A в нулевое состояние. Продолжая точно так же анализировать схему, можно убедиться в том, что распределитель работает в полном соответствии с заданными условиями.

19.14. ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

Мы рассмотрели несколько примеров конечных автоматов. Полученных при этом представлений вполне достаточно для того, чтобы перейти к некоторым теоретическим обобщениям. Существует очень много различных автоматов дискретного действия. Среди них простейшие счетчики, использующиеся, например, для построения электронных реле времени, обеспечивающих высокую точность в большом диапазоне выдержек. Среди них и такие сложные схемы, как программно-управляемые ЭВМ. Автоматы отличаются один от другого сложностью, выполняемыми функциями, назначением. Но всех их объединяет одно — они перерабатывают (преобразуют) информацию. Это значит, что всякий автомат имеет вход x, на который подается исходная информация, и выход y, куда поступает информация после обработки. Кроме того, автомат может иметь память, например, в виде некоторого набора триггеров. Под действием синхроимпульсов триггеры переходят из одного состояния в другое. Закон, по которому триггеры меняют свои состояния, называют **функцией переходов**:

$$q(t) = f\,[q\,(t-1),\, x(t)], \tag{34}$$

где t — дискретное время ($t = 0, 1, 2, ...$), представляющее собой моменты тактовых импульсов, совпадающие, например, с отрицательным фронтом; $q(t)$ — состояние автомата (т. е. состояние его триггеров), зависящее от дискретного времени t; $q(t-1)$ — состояние автомата в предыдущий такт; $x(t)$ — состояние входного сигнала в момент времени t.

Закон, по которому изменяется состояние выхода, называют функцией выходов:

$$y(t) = \varphi\,[q(t-1),\, x(t)]. \tag{35}$$

Заметим, что в формулах (34) и (35) выражения, записанные в квадратных скобках, совпадают, т. е. функции $q(t)$ и $y(t)$ зависят от одних и тех же переменных.

Обычно в автоматах дискретного действия информация представляется в двоичном коде. При этом входные сигналы могут поступать в виде n-разрядных двоичных чисел ($n = 1, 2, 3, \dots$) одновременно по n двоичным входам. Всего существует 2^n таких чисел. В связи с этим говорят, что множество X, насчитывающее $N \leqslant 2^n$ двоичных чисел, образует **входной алфавит**:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}, \tag{36}$$

где x_i — i-я буква входного алфавита ($i = 1, 2, 3, \dots, N$).

Точно так же можно говорить о **выходном алфавите** и **алфавите внутренних состояний**. Если выходным является m-значное двоичное число, то выходной алфавит образует множество Y, содержащее $M \leqslant 2^m$ чисел:

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_M\}, \tag{37}$$

где y — j-я буква выходного алфавита ($j = 1, 2, 3, \dots, M$).

Алфавит состояний представляет собой множество Q, содержащее $K \leqslant 2^k$ элементов, где k — число триггеров:

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_K\},$$

где q_ε — ε-я буква выходного алфавита ($\varepsilon = 1, 2, 3, \dots, K$).

Таким образом, дискретный автомат A — это множество вида

$$A = \{X, Y, Q, q(t), y(t)\}, \tag{38}$$

где X — множество букв входного алфавита; Y — множество букв выходного алфавита; Q — множество внутренних состояний; $q(t)$ — функция переходов; $y(t)$ — функция выходов.

Если три множества X, Y, Q являются конечными, то автомат, определяемый этими множествами, также является конечным. Все реально существующие устройства дискретного действия относятся к конечным автоматам.

Упражнения

1. Суммирующий пятиразрядный двоичный счетчик находится в состоянии 18 (двоичное 10010).

1) (636). В каком состоянии (в двоичном коде) счетчик находился в предыдущем такте?

2) (982). Найдите $|Q|$, если Q — множество возможных состояний счетчика.

3) (ПОМ). Найдите $|Y|$, если Y — выходной алфавит.

4) (331). Найдите $|Q|$ для 9-разрядного счетчика.

2. (004). Выходной алфавит содержит 800 букв. Определите число двоичных разрядов, необходимых для представления всех букв этого алфавита.

3. (ШТ3). Автомат с логической схемой на входах содержит шесть триггеров. В данный момент автомат находится в состоянии 45 (в двоичном представлении это 101101). Под действием тактового импульса автомат меняет свое состояние. Сколько существует вариантов перехода автомата в другое состояние (не равное 45), если нерабочих (т. е. неиспользуемых) состояний нет?

4. (С87). На вход автомата поступило число 18 (в пятизначном двоичном коде). Под действием тактового импульса это число автомат преобразует в семизначное выходное двоичное число. Сколько возможно различных результатов преобразования?

19.15. АВТОМАТ МИЛИ

В предыдущем подразделе показано, что общей математической моделью дискретного автомата является множество (38), в котором функции переходов и функции выходов имеют вид (34) и (35). Рассмотрим формулу (35). Из нее видно, что выходной сигнал автомата зависит одновременно от внутреннего состояния автомата и от состояния входов. Такой автомат принято называть автоматом Мили [5]. Общая схема автомата Мили приведена на рис. 263, где обозначено:

- x_t — вход автомата. На него в момент времени t поступает n-значное двоичное число параллельно по n двоичным физическим входам в соответствии с формулой (36);
- Q — множество триггеров, образующих k-разрядный триггерный регистр;
- q_{t-1} — k-разрядное двоичное число, снимаемое с выходов триггерного регистра Q;
- y_t — выход автомата. В момент времени t на выход поступает m-разрядное двоичное число согласно (37).

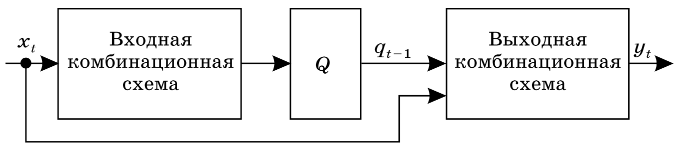


Рис. 263

Входная комбинационная схема обеспечивает преобразование числа x и перепись результата преобразования в регистр Q. Выходная комбинационная схема преобразует число, находящееся в регистре Q, и формирует выходные сигналы по m выходам y_t. Булевы функции, описывающие состояния выходов y_t, зависят от логических аргументов, представленных триггерами регистра Q, и от переменных x_t, значения которых определяются цифрами входного n-разрядного числа.

Примером простейшего автомата Мили может служить схема последовательного сумматора для поразрядного арифметического сложения двух двоичных чисел a и b с инвертированием результата (см. рис. 264). Сумма при этом будет представлена в инверсном коде, так как каждая цифра суммы инвертируется (такие коды нередко называют обратными). В этой схеме имеется лишь один триггер Q, следовательно, множество внутренних состояний автомата содержит два элемента: 0 и 1.

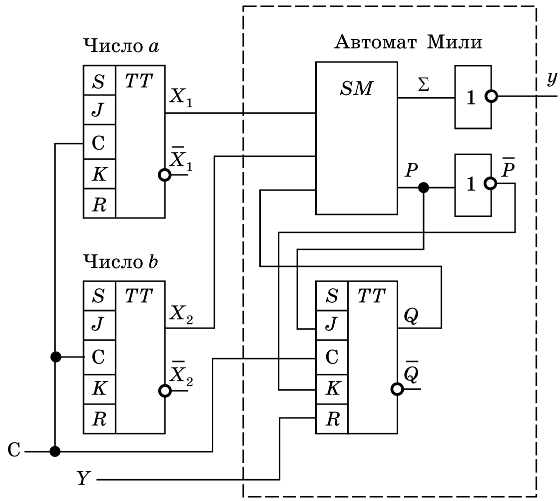


Рис. 264

Выход представлен одноразрядным двоичным числом. На вход поступают двухразрядные двоичные числа с выходов триггеров X_1 и X_2, являющихся элементами внешней схемы (по отношению к автомату Мили). При помощи триггеров на вход автомата Мили поразрядно подаются двоичные цифры чисел a и b. Числа поступают младшими разрядами вперед.

После установки автомата в исходное состояние (по входу Y) имеем $Q = 0$, т. е. сигнала переноса нет. Пусть

$$a = 011011, \quad b = 000111.$$

До подачи первого тактового импульса $X_1 = X_2 = 1$, следовательно,

$$\Sigma = 0, \quad y = 1.$$

При этом $P = 1$ (P — перенос), но триггер Q пока находится в нулевом состоянии. После подачи первого тактового импульса

$$X_1 = X_2 = 1, \quad Q = 1, \quad \Sigma = 1, \quad y = 0, \quad P = 1.$$

После второго:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 1, \quad Q = 1, \quad \Sigma = 0, \quad y = 1, \quad P = 1 \text{ и т. д.}$$

По схеме (рис. 264) видно, что если записать булево выражение для выхода y, то в этом выражении окажутся и входные переменные X_1 и X_2, и переменная Q:

$$y = \overline{X_1X_2Q + X_1\bar{X}_2\bar{Q} + \bar{X}_1\bar{X}_2Q + \bar{X}_1X_2\bar{Q}} =$$
$$X_1X_2\bar{Q} + X_1\bar{X}_2Q + \bar{X}_1X_2Q + \bar{X}_1\bar{X}_2\bar{Q},$$

т. е. функция y зависит и от входных сигналов, и от внутренних состояний, что и доказывает принадлежность схемы к типу автоматов Мили.

Примером автомата Мили может служить также схема, приведенная на рис. 261.

Упражнения

1. (ШОВ)! Пусть до подачи тактового импульса автомат (рис. 264) находился в состоянии: $Q = 0$, $X_1 = X_2 = 1$. Укажите значения (0 или 1) переменных Σ, P, Q до тактового импульса и значения тех же переменных после тактового импульса, если после тактового импульса $X_1 = X_2 = 1$.

2. (081). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) могут ли быть различными по длине числа a и b, поразрядно подаваемые на вход автомата (рис. 264)?

2) является ли многотактным автомат на рис. 264?

3) является ли информационным вход C на рис. 264?

4) если на рис. 264 удалить выходной инвертор, то $y = \Sigma$. Является ли получившаяся схема автоматом Мили?

5) пусть $R = 0$ (триггер X_1 на рис. 264). Верно ли, что при этом схема по-прежнему является автоматом Мили?

6) поменяем местами провода, ведущие к входам J и K триггера Q (рис. 264). Останется ли схема автоматом Мили?

7) останется ли схема, приведенная на рис. 264, автоматом Мили, если в эту схему добавить три триггера для записи в них входных двоичных кодов?

19.16. АВТОМАТ МУРА

Общей математической моделью автомата Мура, как и автомата Мили, является множество (38). Отличаются же автоматы друг от друга только элементом $y(t)$. Если для автомата Мили выражение $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = \varphi[q(t-1), x(t)],$$

то в случае автомата Мура

$$y(t) = \varphi[q(t-1)],$$

т. е. функция выходов $y(t)$ автомата Мура определяется только его внутренними состояниями.

Примером автомата Мура может служить схема, приведенная на рис. 265. Знаком Σ на ней обозначен комбинационный сумматор (см. подраздел 17.17), выполняющий операцию параллельного арифметического сложения двух

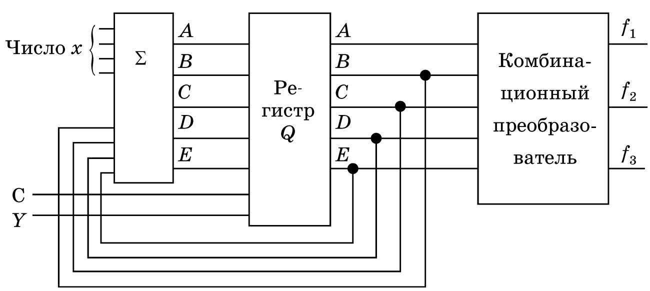


Рис. 265

четырехразрядных чисел. Пять выходов сумматора присоединены к входам JK-триггеров пятиразрядного регистра Q (пятый выход сумматора — это перенос в старший разряд). На первый вход сумматора подаются числа x. Второй вход подключен к выходам триггеров B, C, D, E, которым соответствуют четыре младших разряда числа, находящегося в регистре Q.

Пусть регистр Q по входу Y установлен в нулевое состояние. Подадим на вход автомата число x_1. После тактового импульса, поданного на вход С, число x_1 перепишется в регистр Q. Подадим на вход автомата число x_2. На выходе сумматора получим сумму $x_1 + x_2$. Под действием второго импульса эта сумма перепишется в регистр Q. Если на вход автомата подать число x_3, то после третьего импульса в регистре Q окажется число $|x_1 + x_2 + x_3|$ (по модулю 32), после четвертого — $|x_1 + x_2 + x_3 + x_4|$ и т. д.

К выходам регистра подключен комбинационный преобразователь с тремя двоичными выходами:

$$f_1 = 1, \text{ если } q \leqslant 18;$$
$$f_2 = 1, \text{ если } 8 \leqslant q \leqslant 23;$$
$$f_3 = 1, \text{ если } 12 \leqslant q \leqslant 27,$$

где q — число, находящееся в регистре Q.

В минимальных формах этих функций нет переменных, обозначающих входные сигналы. Состояния выходов определяются только внутренними состояниями автомата, следовательно, данная схема есть автомат Мура.

На этом закончим главу не только о многотактных электронных устройствах дискретного действия, но и вообще всю тему о конечных автоматах. В настоящее время по теории конечных автоматов существует обширная литература, и каждый, кто заинтересуется этой теорией, всегда может найти необходимые сведения не только теоретического характера, но и прикладного.

Упражнения

1. (ЛКУ). Автомат (рис. 265) находится в состоянии 10001. На вход автомата подано число 0011. В каком состоянии (в двоичном коде) окажется регистр Q после одного импульса, поданного на вход C автомата?

2. (РЕО). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да» (рис. 265):

1) является ли синхронным автомат Мура (рис. 265)?

2) удалим из схемы комбинационный преобразователь, а выходы подключим к каким-либо выходам регистра Q. Останется ли схема автоматом Мура?

3) останется ли схема автоматом Мура, если ее выходы f_1, f_2, f_3 переключить на выходы сумматора?

4) останется ли схема автоматом Мура, если из нее удалить регистр Q?

5) останется ли схема автоматом Мура, если из регистра Q удалить триггер A, а соответствующий выход сумматора присоединить непосредственно к освободившемуся входу комбинационного преобразователя?

6) является ли детерминированным автомат Мура?

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

КОМБИНАТОРИКА

ВВЕДЕНИЕ

Комбинаторика — это раздел дискретной математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций можно составить из заданных элементов (объектов) с учетом тех или иных условий. Как самостоятельная ветвь математики комбинаторика возникла в XVII веке в связи с развитием теории вероятностей, хотя отдельные комбинаторные задачи были сформулированы еще в древности. Название этому математическому направлению дал немецкий языковед, философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), опубликовавший в 1666 г. свою работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появился термин «комбинаторный» [37].

Кроме Лейбница, теоретическим вопросам комбинаторики уделяли внимание такие ученые, как итальянский математик Никколо Тарта́лья (1499–1557); итальянский математик, философ и врач Джероламо Кардано (1501–1576); итальянский ученый Галилео Галилей (1564–1642); французский математик, физик и философ Блез Паскаль (1623–1662); швейцарский математик Якоб Бернулли (1654–1705); французский математик Пьер Ферма (1601–1665); швейцарский математик Леонард Эйлер (1707–1783) и многие другие.

Исходным в комбинаторике является интуитивно ясное понятие **выборки** (синонимы — «расстановки», «комбинации», «соединения») как набора m элементов из некоторого исходного множества, причем наборы могут быть как упорядоченными, так и неупорядоченными, с повторениями элементов и без повторений.

В настоящее время комбинаторика представляет собой один из важнейших разделов современной дискретной математики, имеющий многочисленные применения на практике. Следовательно, каждый грамотный человек должен иметь достаточно четкое представление об основных (исходных) понятиях комбинаторики, таких как размещения, перестановки, сочетания, разбиения и некоторых других, и уметь ими пользоваться хотя бы в несложных практических ситуациях. С этой целью и включен раздел комбинаторики в данный курс дискретной математики. Он рассчитан на тех, кто впервые знакомится с комбинаторными задачами, поэтому теоретические сведения изложены в простой и доступной форме. Для обеспечения необходимой глубины изучения материала в каждый подраздел включен ряд упражнений (всего их более 400). Они должны быть выполнены все, причем полностью самостоятельно — лишь в этом случае комбинаторное мышление учащегося достигнет определенного уровня развития.

Большей частью упражнения просты, и для их решения вполне достаточно «здравого смысла» и представленного в пособии теоретического материала. Лишь некоторые задачи могут показаться трудными. Однако сложность их (по отношению к большинству задач пособия) хотя и является повышенной, но не настолько высокой, чтобы оказаться за пределами интеллектуальных возможностей обучающегося. «Обходить» трудные задачи не следует. Разумеется, при их решении потребуются повышенное внимание и более напряженная работа интеллекта. Но с дидактической точки зрения в этом и состоит их положительная роль.

Ко всем упражнениям даны открытые ответы. Однако для того чтобы обеспечить максимально возможную степень самостоятельности, кроме ответов, как и в предыдущих темах пособия, приведены коды, при помощи которых, используя устройство «Символ» либо его компьютерный аналог, каждый учащийся может определить правильность своих ответов. Наибольший обучающий эффект, как упоминалось в предисловии, достигается в том случае, если обучающийся на все свои ответы получает сообщения только вида «правильно–неправильно», благодаря чему даже самые простые задачи полностью реализуют заложенные в них дидактические функции. Это значит, что во всех случаях, если есть возможность выбора — автоматизированный самоконтроль или использование открытых ответов, — следует работать только в режиме автоматизированного самоконтроля.

20 ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

20.1. ПОНЯТИЕ ФАКТОРИАЛА

Факториал — это функция, определенная на множестве целых положительных чисел и представляющая собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n, где каждое число встречается точно один раз. Название функции произошло от английского слова *factor*, что в переводе обозначает «сомножитель». Обозначается факториал

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n.$$

Переменная n может принимать любые значения из натурального ряда, но не всякое целое число может быть значением функции $n!$. Обозначим:

$$f = n!$$

Если $n = 1$, то $f = 1! = 1$.
Если $n = 2$, то $f = 2! = 1 \cdot 2 = 2$.
Если $n = 3$, то $f = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.
Если $n = 4$, то $f = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Если $n = 5$, то $f = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
Если $n = 6$, то $f = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.
Если $n = 7$, то $f = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ и т. д.

Отсюда следует, что, например, число 100 не может быть значением функции $n!$, поскольку его невозможно представить в виде произведения чисел натурального ряда, начинающегося с единицы и не содержащего повторяющихся чисел.

Функцию $n!$ можно записать в виде $f = n! = (n-1)!\, n$.

При $n = 1$ имеем: $f = 1! = (1-1)! \cdot 1 = 0! \cdot 1 = 1$, откуда следует, что $0! = 1$.

Получилось очень интересное равенство. Число нуль натуральным не является, и если бы даже оно считалось натуральным, то естественнее было бы принять $0! = 0$. Но в этом случае мы имели бы функцию, тождественно равную нулю при всех значениях n. Поэтому величину 0! приходится принимать равной единице, поскольку принять ее равной нулю нельзя.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Записать со знаком факториала:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6.$$

Это произведение чисел натурального ряда, но число 4 в нем встречается два раза, следовательно:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 6!$$

Пример 2. Записать с использованием знака факториала:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

В этом ряду отсутствует цифра 6. Умножим и разделим на 6 все выражение, тогда получим:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = \frac{10!}{6}\cdot$$

Пример 3. Записать со знаком факториала: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$.

Здесь пропущены два числа: 2 и 4. Умножим и разделим на 2 и 4 все выражение, тогда получим:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 7!$$

Пример 4. Упростить:

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)}.$$

Представим выражение в виде

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)(k-1)k + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)(k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)}.$$

В числителе вынесем за скобки $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)$:

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)\left[(k-1)k + (k-1)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)}.$$

После сокращения получаем:

$$N = (k-1)k + k - 1 = k^2 - 1.$$

Пример 5. Упростить:

$$K = \frac{n!^2 + (n-1)!(n-2)!}{(n-2)!^2}.$$

Запишем формулу в развернутом виде и в числителе вынесем за скобки выражение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)$.

Сократим его со знаменателем, тогда получим:

$$K = n^4 - 2n^3 + n^2 + n - 1.$$

Упражнения

1. Запишите следующие произведения с использованием знака факториала:

1) (796). $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$;
2) (Т72). $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$;
3) (8РЕ). $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-4)(n-3)$;
4) (2Я. РЕ). $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$;
5) (717). $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$;
6) (2П2). $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$;
7) (378). $1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 23 \cdot 24$;
8) (АХО). $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 18 \cdot 20$.

2. Упростите и результат запишите с использованием знака факториала:

1) (ОЯС). $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$;
2) (ТЛ2). $\dfrac{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (k-1)k^2}{6k}$;
3) (878). $\dfrac{[1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-1)]^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-2)(k-1)^2}$;
4) (2Р4). $\dfrac{(n-2)!-2(n-1)!}{3-2n}$;
5) (257). $\dfrac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k)^2}{[1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-1)]\cdot k^2}$;
6) (УТФ). $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-1)(k+1)}{k+1}$.

3. Упростите:

1) (ЕУ5). $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-1)(k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k(k+1)}$;
2) (ЕЯ6). $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k+1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}$;
3) (АДО). $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-2)(k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-1)}$;
4) (833). $\dfrac{(n-2)!+(n-1)!+n!}{(n-1)!}$.

4. Вычислите при $n = 31$:

1) (2ДО). $\dfrac{3(n-1)!+4n!}{2(3+4n)(n-2)!}$;
2) (982). $\dfrac{n!(n-1)!(n+1)!n}{n!^3}$.

5. Найдите значение функции при $n = 2$:

1) (350). $f = (n-2)!(n-1)n$;
2) (Т5К). $f = (n-3)!(n-2)(n-1)n$.

6. (ТОТ). Какими цифрами не может оканчиваться число $n!$?

7. (ЯШТ). Какими цифрами может оканчиваться число $n!$ при $n > 3$?

20.2. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В КОМБИНАТОРИКЕ

Если один элемент множества A может быть выбран n способами, а после него второй элемент — m способами, то выбор того и другого элемента в **заданном порядке** может быть осуществлен N способами, где

$$N = nm.$$

В общем случае — если один элемент множества A_1 можно выбрать $|A_1|$ способами, элемент множества A_2 — $|A_2|$ способами и так далее до множества A_n, один элемент которого можно выбрать $|A_n|$ способами, то выбрать n элементов в заданном порядке можно N способами, где

$$N = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

Пример 1. Пусть дано множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Один элемент из этого множества можно выбрать $n = 5$ способами. Останется четыре элемента. Один элемент из них можно выбрать $m = 4$ способами. Следовательно, выбор двух элементов возможен $5 \cdot 4 = 20$ способами, список которых имеет вид:

12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.

Заметим, что в каждой выборке цифры разные.

Пример 2. В урне пять шаров. На каждом шаре записан номер из множества десятичных цифр $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Все номера разные. Наугад вынимают один шар и записывают его номер. Шар возвращают в урну и наугад снова выбирают один шар и номер его записывают справа от первой цифры. Получится двухразрядное число. Сколько возможно таких чисел?

На первом месте может стоять одна из пяти цифр, т. е. $n = 5$. На втором месте — также одна из пяти цифр. Следовательно, $m = 5$. Тогда искомое число $nm = 5 \cdot 5 = 25$. Среди всех этих 25 выборок (в отличие от предыдущего примера) существуют пары с одинаковыми цифрами.

Пример 3. Вернемся к примеру 2. Пусть шары извлекают три раза. Сколько получится трехзначных чисел?

На первом месте может стоять одна из пяти цифр, на втором — также одна из пяти, и на третьем — одна из пяти. Следовательно, число выборок равно $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Пример 4. Сколько существует трехразрядных шестеричных чисел?

В шестеричной системе счисления используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру можно выбрать пятью способами, поскольку нуль не используем, так как число, начинающееся с нуля, не является трехразрядным. Вторая цифра может быть любой, в том числе и нулем, следовательно, ее можно выбрать шестью способами. То же самое относится и к цифре младшего разряда. Искомое число равно $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$.

Пример 5. Сколько существует пятизначных симметричных восьмеричных чисел, то есть таких чисел, которые одинаково читаются как слева направо, так и справа налево, например: 23032, 55655, 10001 и т. д.?

Первую цифру (старшего разряда) можно выбрать 7 способами, так как с нуля пятизначные числа начинаться не могут. Вторую цифру можно выбрать 8 способами, поскольку теперь можно использовать и нуль. Для выбора третьей цифры также существует 8 вариантов. Цифры двух младших разрядов не имеют вариантов для выбора. Они должны повторять первые две цифры. Например, если выбраны цифры 372, то следующей может быть только цифра 7, а после нее — только цифра 3. Таким образом, согласно правилу произведения всего существует $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ искомых чисел.

Упражнения

1. (ДЕЗ). Имеется 10 карточек. На каждой записана гласная буква. Выбирают наугад карточку и к ней справа приставляют вторую, наугад выбранную после первой. Сколько возможно таких двухбуквенных слов?

2. (ТР2). Сколько трехразрядных чисел можно образовать из цифр 3, 4, 5, 6?

3. (АКИ). Сколько семизначных чисел можно образовать из цифр 3, 7, 9?

4. (АРМ). Из пятизначных десятичных чисел удалили все числа, в которые входит хотя бы одна из цифр 0, 3, 7, 8, 9. Сколько чисел осталось?

5. (КЭФ)! Город A связан с городом B шестью дорогами. Сколькими способами житель города A может посетить город B, если возврат возможен по той же дороге, что и поездка в город B? Сколькими способами житель города B может посетить город A, если поездка туда и обратно осуществляется по разным дорогам?

6. (УФ5). Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если ни одна из цифр не повторяется в числе более одного раза? С нуля числа не начинаются.

7. (927). Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифра младшего разряда каждого числа является четной, а старшего — нечетной?

8. (296). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, которые делятся на 5?

9. (ХТБ). Сколько существует пятиразрядных симметричных десятичных чисел (одинаково читаются как справа налево, так и слева направо, например, 39793; 68286)?

10. (УМС). Старший разряд двузначного числа некоторой системы счисления может содержать одну цифру из 7, младший разряд — одну цифру из x. Всего таких чисел существует 84. Найдите x (десятичное число).

11. (ААТ). Сколько существует трехразрядных семеричных чисел, оканчивающихся нечетной цифрой?

12. (ОРМ)! Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, у которых:

- в старшем разряде нет ни одной из цифр 1, 2, 3, 4, 5;
- в среднем разряде нет цифр 2, 5, 7;
- в младшем разряде нет четных цифр и нет цифры 1?

20.3. ПРАВИЛО СУММЫ В КОМБИНАТОРИКЕ

Пусть даны множества P_1 и P_2. Выясним, сколько элементов содержится во множестве $P_1 \cup P_2$. Эта задача не так примитивна, как может показаться на первый взгляд. Она проста только при $P_1 \cap P_2 = \varnothing$. В этом случае

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2|,$$

т. е. если элемент множества P_1 может быть выбран $|P_1|$ способами, а элемент множества P_2 — $|P_2|$ способами, то выбор «либо элемент множества P_1, либо элемент множества P_2» может быть осуществлен $|P_1| + |P_2|$ способами. Это и есть **правило суммы**.

Пример 1. В тарелке лежат 6 яблок и 4 груши. Сколькими способами можно выбрать один плод [7, с. 21]?

Если P_1 — множество яблок, P_2 — множество груш, то:

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2| = 6 + 4 = 10.$$

Рассмотрим случай, когда $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$. Правило суммы при этом имеет вид

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2|.$$

В [32] эту формулу называют формулой включений и исключений, а в [44] используется термин «принцип включения-исключения». В [37] ее называют частным случаем формулы перекрытий.

Пример 2. Пусть даны множества:

$$P_1 = \{1, 2, 4, 7, 9\};$$
$$P_2 = \{1, 4, 5, 6, 8\}.$$

Сколько элементов во множестве $P_1 \cup P_2$?

По правилу суммы $|P_1 \cup P_2| = 5 + 5 - 2 = 8$.

В случае трех множеств правило суммы имеет вид

$$\begin{aligned}|P_1 \cup P_2 \cup P_3| &= |P_1 \cup P_2| + |P_3| - |(P_1 \cup P_2) \cap P_3| = \\ &= |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2| + |P_3| - |P_1 \cap P_3 \cup P_2 \cap P_3| = \\ &= |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2| + |P_3| - (|P_1 \cap P_3| + |P_2 \cap P_3| - |P_1 \cap P_2 \cap P_3|) = \\ &= |P_1| + |P_2| + |P_3| - |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_3| - |P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_3|.\end{aligned}$$

Для четырех множеств получаем аналогично:

$$\begin{aligned}|P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4| &= |P_1| + |P_2| + |P_3| + |P_4| - \\ &- |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_3| - |P_1 \cap P_4| - |P_2 \cap P_3| - |P_2 \cap P_4| - |P_3 \cap P_4| + \\ &+ |P_1 \cap P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_4| + |P_1 \cap P_3 \cap P_4| + |P_2 \cap P_3 \cap P_4| - \\ &- |P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4|.\end{aligned}$$

В случае n множеств правило суммы имеет вид

$$\begin{aligned}|P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n| &= |P_1| + |P_2| + \ldots + |P_n| - (|P_1 \cap P_2| + |P_1 \cap P_3| + \ldots \\ &\ldots + |P_{n-1} \cap P_n|) + (|P_1 \cap P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_4| + \ldots \\ &\ldots + |P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n|) - \ldots + (-1)^{n-1}|P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n|.\end{aligned}$$

Пример 3. Из 100 студентов английский язык знают 28 человек, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, все три языка знают 3 человека. Сколько студентов не знают ни одного иностранного языка [20]?

Обозначим: $|P_1|$ — число студентов, знающих английский язык; $|P_2|$ — знающих немецкий язык; $|P_3|$ — знающих французский язык. Тогда

$$|P_1| = 28; \quad |P_2| = 30; \quad |P_3| = 42.$$

Согласно условию:

$|P_1 \cap P_2| = 8$ — число студентов, знающих два языка — английский и немецкий;

$|P_1 \cap P_3| = 10$ — число студентов, знающих два языка — английский и французский;

$|P_2 \cap P_3| = 5$ — число студентов, знающих два языка — немецкий и французский;

$|P_1 \cap P_2 \cap P_3| = 3$ — число студентов, знающих три языка.

По правилу суммы:

$$|P_1 \cup P_2 \cup P_3| = 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80.$$

Таким образом, знают хотя бы один иностранный язык 80 студентов, следовательно, ни одного иностранного языка не знают 20 человек.

Упражнения

1. (ОМН). 30 учащихся сдавали экзамен по физике и химии. По две отличные оценки получили 9 человек. На «отлично» физику сдали 12 человек, химию — 16. Сколько учащихся не получили ни одной отличной оценки?

2. (МОК). 12 туристов взяли с собой по коробке спичек, 19 туристов — по зажигалке. Ни спичек, ни зажигалок не взяли 6 человек. Всего в отряде 27 человек. Сколько человек взяли с собой и спички и зажигалки?

3. (ОМТ). Из 33 учащихся физический кружок посещают 11 человек. Из них 4 человека посещают еще и химический кружок. 8 человек не посещают ни физический, ни химический кружок. Сколько человек посещают только химический кружок?

4. (67С). Укажите номера следующих вопросов, на которые Вы ответите «да» при условии, что $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$:

1) если $|A \cup B| = |A| + |B|$, то $A \cap B \neq \varnothing$?
2) если $|A \cup B| < |A| + |B|$, то $A \cap B = \varnothing$?
3) если $|A \cup B| = |A \cap B|$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$?
4) если $A = B$, то $|A \cap B| = B$?
5) если $A \subset B$, то $A \cap B = \varnothing$?
6) если $A \supset B$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$?
7) если $A \subset B$, то $|A \cup B| = |B|$?
8) если $A \cap B \subset B$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$?
9) если $A \cap B \subset B$, то $|A \cup B| = |A|$?

20.4. ПРАВИЛО СУММЫ И ДИАГРАММЫ ВЕННА

С помощью диаграммы Венна очень удобно иллюстрировать правило сложения. На рис. 266 приведена диаграмма для множеств:

$$P_1 = \{1, 2, 4, 5, 6\};$$
$$P_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$
$$I = \{1, 2, ..., 9\}.$$

Непосредственно из диаграммы видно, что число элементов множества $P_1 \cup P_2$ равно

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1 \cap \bar{P}_2| + |P_1 \cap P_2| + |\bar{P}_1 \cap P_2|.$$

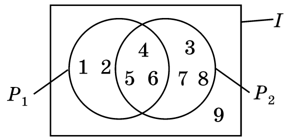


Рис. 266

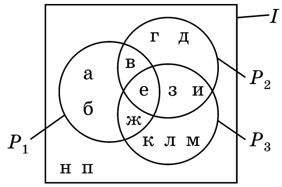


Рис. 267

Прибавим и вычтем число $|P_1 \cap P_2|$. Выражение от этого не изменится:

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1 \cap \bar{P}_2| + |P_1 \cap P_2| + |\bar{P}_1 \cap P_2| + |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_2|. \quad (1)$$

Из диаграммы (рис. 266) видно, что

$$|P_1 \cap \bar{P}_2| + |P_1 \cap P_2| = |P_1|; \qquad |\bar{P}_1 \cap P_2| + |P_1 \cap P_2| = |P_2|. \quad (2)$$

Подставим выражения (2) в (1), тогда получим

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2|.$$

Аналогичным образом, используя диаграмму Венна (как на рис. 267), можно вывести правило сложения для трех множеств. При большем числе множеств диаграмма Венна становится громоздкой и неудобной в применении, поэтому следует использовать карту Вейча.

Упражнения

1. Укажите элементы:

1) (ТПО) множества $\bar{P}_2$ (рис. 266);

2) (ЯНК) множества $P_1 \cup P_1 \cap \bar{P}_2$ (рис. 266);

3) (ЭМТ) множества $\overline{P_1 \cap P_2}$ (рис. 266).

2. По рис. 267 определите число элементов множества:

1) (ЛБК) $P_1 \cap P_2 \cup P_3$; 3) (ОХН) $(P_1 \cup P_2 \cup P_3) \cap I$;

2) (ММО) $\overline{P_1 \cap P_2 \cap P_3}$; 4) (ЛЕЛ) $P_1 \cap \bar{P}_2 \cup \bar{P}_1 \cap P_3$.

3. (ЦАП). Укажите все элементы (рис. 267) множества $P_1 \cup P_2$, если элементы *в* и *е* из множества P_2 удалены.

4. (ЛУР). Укажите элементы (рис. 267) множества $\bar{P}_2 \cap P_3$, если из множества P_2 удален элемент *е*, а из множества P_3 удален элемент *и*.

20.5.
ПЕРЕСТАНОВКИ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Постановка задачи. Пусть дано множество вида

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Зафиксируем элементы этого множества в каком-либо порядке. Затем переставим местами некоторые элементы. Получим новую последовательность. Снова переставим некоторые элементы и т. д. Сколько существует таких последовательностей (различных!)?

Указанные последовательности называются **перестановками без повторений**. Число всех перестановок обозначается P_n, где n — число, показывающее, сколько различных элементов участвует в перестановках.

Формулу для числа перестановок без повторений можно вывести на основе правила произведения. Первый из n элементов можно выбрать n способами. Останется $n-1$ элементов. Следовательно, второй элемент можно выбрать $n-1$ способами, третий — $n-2$ способами и так далее до последнего элемента, который выбирается единственным способом. Таким образом,

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!. \qquad (3)$$

Пример 1. Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, не содержащих повторяющихся цифр, если используются только цифры 3, 5, 9?

В данном случае $n = 3$, следовательно, искомое число равно

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Все эти перестановки имеют вид:

359, 395, 539, 593, 953, 935.

Пример 2. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «километр»?

В заданном слове все буквы разные, следовательно, искомое число равно

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$$

Упражнения

1. (2РЕ). Сколько различных чисел можно образовать, переставляя цифры 3, 4, 5, 7, 9?

2. (НВИ). Известно, что операция арифметического сложения коммутативна. Например, выражение $a + b + c + d$ можно записать иначе: $b + c + a + d$ либо $c + a + d + b$ и т. д. Сколько существует способов записи этого выражения?

3. (ДИХ). Составляют буквенно-цифровой код: записывают в некотором порядке четыре буквы a, b, c, d, затем справа приписывают три цифры 1, 2, 3, также в некотором порядке, например, $bcda132$, $abcd123$, и т. д. Сколько существует таких кодов?

4. (РАЗ). Буквенно-цифровой код составляют следующим образом. Сначала записывают две буквы a и b в каком-либо порядке, затем – три цифры 1, 2, 3, также в определенном порядке, затем — четыре буквы a, b, c, d в некоторой последовательности. Например: $ab132dbac$, $ba321adbc$ и т. д. Сколько всего существует таких кодов?

5. (МЯЙ). Сколько существует 6-значных чисел шестеричной системы счисления, если каждая шестеричная цифра входит в число точно один раз (числа, начинающиеся с нуля, не являются шестизначными)?

6. (ТУК). Сколько 10-значных чисел можно составить из десятичных цифр, если каждая цифра входит в число один раз и каждое число начинается с последовательности 731 и оканчивается последовательностью 05?

7. (ДОО). Известно, что n человек могут разместиться в очереди 3 628 800 способами. Найдите n.

8. (ТВК). Получена шифровка вида

02, 30, 16, 04, 07, 18, 30, 17, 30, 09, 09, ... ,

о которой известно только, что двухразрядные десятичные числа представляют собой номера 01, 02, ..., 33 букв русского алфавита. Некто решил расшифровать сообщение следующим образом. Нумерует буквы алфавита в некотором порядке, затем вместо чисел подставляет буквы согласно принятому соответствию. Читает запись. Если получилась бессмыслица, буквы алфавита нумерует в другом порядке и снова читает запись. Сколько операций перекодирования букв алфавита потребуется выполнить в самом неблагоприятном случае? (Ответ дать с использованием знака факториала, например, 16!.)

20.6. ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Постановка задачи. Даны n_1 элементов вида a (неразличимых между собой), n_2 элементов вида b, ..., n_k элементов вида x. Из этих элементов образуют n-элементные последовательности, содержащие все перечисленные элементы, т. е.

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Одна из последовательностей имеет вид

$$\underbrace{aaa\ldots a}_{n_1}\underbrace{bbb\ldots b}_{n_2}\underbrace{ccc\ldots c}_{n_3}\ldots\underbrace{xxx\ldots x}_{n_k}.$$

Ее элементы можно переставлять любым способом. Сколько существует таких перестановок?

Число перестановок из n элементов равно $n!$, если все n элементов различны. Однако в данном случае $n_1!$ перестановок неразличимы. Неразличимы и $n_2!$ перестановок и т. д. Следовательно,

$$\dot{P}_n = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}, \tag{4}$$

где точка над знаком P_n говорит о том, что в перестановках есть повторяющиеся элементы.

Пример 1. Сколько существует слов, в которых три буквы «а» и одна буква «в» (напомним, что слово — это любая последовательность букв какого-либо алфавита)?

Здесь $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n = 4$. Искомое число равно $\dot{P}_4 = \frac{4!}{3!1!} = 4$.

Это слова *ааав*, *аава*, *авaa*, *вааа*.

Пример 2. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «ротор»?

В слове «ротор» 5 букв. Из них две буквы «р», две буквы «о», одна буква «т». Следовательно,

$$n = 5, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 1.$$

Искомое число различных слов равно

$$\dot{P}_5 = \frac{5!}{2!2!1!} = 30.$$

Примерами являются слова *рроот*, *moopp*, *ортро*, *оортр* и т. д.

В формуле (4) k — это число различных элементов. Если повторяющихся элементов нет, то $n = k$, так как $n_1 = n_2 = ... = n_k = 1$, и тогда формула (4) превращается в формулу (3), т. е. выражение (3) — это частный случай более общей формулы (4).

Упражнения

1. (ЦАФ). Сколько существует шестизначных десятичных чисел, в каждом из которых три цифры 4 и три цифры 5?

2. (ПИФ). Сколько чисел можно образовать, переставляя цифры 1, 2, 3, 5, если в каждом числе три единицы, одна двойка, две тройки и две пятерки?

3. (КМЕ). Сколько различных слов можно образовать путем перестановки букв в слове «территория»?

4. (УНЖ). В числе 3 двойки, 4 тройки, 2 четверки, 3 пятерки. Сколько чисел можно образовать, переставляя эти цифры, если каждое число начинается с последовательности 335 и оканчивается тремя двойками?

5. (Б52). На полке пять книг синего цвета, две — желтого и одна — зеленого. Сколькими способами их можно расставить на полке, если слева всегда стоят две книги синего цвета?

6. (ГАЗ). Сколько слов можно образовать, переставляя буквы слова «облако», если каждое слово начинается с согласной буквы?

7. (Я25). Сколько слов можно образовать, переставляя гласные буквы в слове «авиация» и оставляя на своих местах все согласные буквы?

8. (ПИК). Сколько возможно различных чисел при перестановке цифр числа 4152486813, если на место, занимаемое четной цифрой, нельзя ставить нечетную?

20.7. РАЗМЕЩЕНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Постановка задачи. Дано множество A, содержащее n элементов. Из них образуют упорядоченные последовательности длины m, в которых каждый элемент множества A встречается не более одного раза. Эти последовательности называют **размещениями без повторений**. Сколько существует таких последовательностей?

Заметим, что размещения могут отличаться одно от другого не только элементами, но и порядком записи элементов. Пусть

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \qquad (5)$$

Размещения длины 3, такие как 135 и 136, являются различными, поскольку отличаются одно от другого наборами цифр из множества A.

Размещения той же длины 356 и 365, хотя и состоят из одних и тех же элементов множества A, но отличаются одно от другого порядком записи цифр, поэтому также различны.

Сколько существует размещений длины 3 в случае множества (5)? Так как размещения — это упорядоченные последовательности, то для нахождения их количества можно воспользоваться правилом произведения. Первый элемент выбираем шестью способами. Останется пять элементов. Следовательно, для выбора второго элемента существует 5 способов, для третьего — 4. Таким образом, искомое число размещений равно: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

В общем случае если множество содержит n элементов, а длина размещения равна m, то первый элемент можно выбрать n способами, второй — $n - 1$ способами (поскольку один элемент множества A удален при первой выборке). Третий элемент можно выбрать $n - 2$ способами и так далее до элемента m, который можно выбрать $n - m + 1$ способами. По правилу произведения число всех размещений без повторений равно

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1),$$

где A_n^m — символ, обозначающий число размещений из n элементов по m без повторений.

Умножим и разделим полученное число на $(n - m)!$:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)\cdot(n-m)!}{(n-m)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-m)!}.$$

Числитель этой дроби есть произведение натуральных чисел от 1 до n, следовательно,

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (6)$$

Это окончательная формула для определения числа размещений из n элементов по m без повторений.

Пример 1. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, если в каждом из них все цифры разные?

Первая цифра может выбираться из девяти цифр (а не из десяти, так как число, начинающееся с нуля, не является четырехразрядным), вторая — из девяти, третья — из восьми, четвертая — из семи. Следовательно, по правилу произведения искомое число N равно:

$$N = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

Найдем решение этой задачи с применением формулы (6). Пусть n — число всех элементов некоторого множества A, m — длина выборки (т. е. число ее элементов). Найдем число N размещений при условии, что существует один элемент, с которого не должно начинаться ни одно размещение. Очевидно, что число N можно записать в виде

$$N = A_n^m - A_{n-1}^{m-1}, \qquad (7)$$

где A_n^m — число всех m-элементных размещений вместе с теми, которые начинаются с отмеченного элемента; A_{n-1}^{m-1} — число всех m-элементных размещений, начинающихся только с отмеченного элемента.

Запишем формулу (7) в виде

$$N=\frac{n!}{(n-m)!}-\frac{(n-1)!}{[n-1-(m-1)]!}=\frac{n(n-1)!}{(n-m)!}-\frac{(n-1)!}{(n-m)!}.$$

Вынесем за скобки дробь $\frac{(n-1)!}{(n-m)!}$, тогда получим:

$$N=\frac{(n-1)\cdot(n-1)!}{(n-m)!}. \qquad (8)$$

Согласно условию примера $n = 10$, $m = 3$, следовательно, искомое число согласно формуле (8) равно

$$N=\frac{(10-1)\cdot(10-1)!}{(10-4)!}=\frac{9\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=4536.$$

Пример 2. Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, не содержащих четных цифр и не содержащих одинаковых цифр?

Нечетные цифры — это 1, 3, 5, 7, 9. Следовательно, $n = 5$, $m = 3$. По формуле (6) получаем:

$$A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2}=60.$$

Пример 3. Имеется 12 ролей. Четыре артиста могут играть любую из них, и им предлагается выбор. Каждый артист может выбрать только одну роль, причем если одна роль выбрана, то другой артист ее выбрать не может. Сколько всего существует способов выбора ролей этими четырьмя артистами?

Пронумеруем роли: 1, 2, 3, ..., 9, A, B, C. Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: сколько существует четырехразрядных чисел, которые могут быть образованы из 12 цифр (без повторов)? Каждое четырехразрядное число будет соответствовать некоторому выбору ролей, если принять, что первому артисту ставится в соответствие первый разряд четырехразрядного числа, второму — второй, третьему — третий и четвертому — четвертый. Согласно условию

$$n = 12,\quad m = 4,$$

тогда искомое число способов распределения 12 ролей между четырьмя артистами равно

$$A_{12}^4=\frac{12!}{(12-4)!}=\frac{12!}{8!}=9\cdot10\cdot11\cdot12=11880.$$

Упражнения

1. (ИЗЯ). Сколько существует пятиразрядных десятичных чисел, в каждом из которых нет цифр 0, 1, 2, 3 и нет повторяющихся цифр?

2. (510). Сколько четырехбуквенных последовательностей можно образовать из всех гласных букв русского алфавита, если в каждой последовательности повторяющихся букв нет? (В русском алфавите 10 гласных букв: а, е, ё, и, о, у, ы, э, ю, я.)

3. (ПОК). Сколько существует двухразрядных чисел семеричной системы счисления, в каждом из которых нет повторяющихся цифр?

4. (427). В тире 10 мишеней. На огневой позиции три стрелка. Сколькими способами могут выбрать себе по одной мишени три стрелка, если каждую мишень выбирает не более чем один стрелок (т. е. все стрелки выбирают разные мишени)?

5. (БЕЛ)! Известно, что число размещений без повторений из n элементов по m равно 210. Найдите n и m, если $m \neq 1$.

6. (159)! Известно, что число размещений из n элементов по m равно 7920. Определите числа n и m.

7. (200). Из 10 цифр образуют семизначные десятичные числа, в каждом из которых нет повторяющихся цифр. Сколько существует таких чисел, если каждое число начинается с последовательности цифр 897?

8. (530). Из 10 цифр образуют семизначные десятичные числа, в каждом из которых нет повторяющихся цифр. Сколько существует таких чисел, если каждое число оканчивается последовательностью цифр 789?

9. (ТВП). Три ученика выбирают по одной книге из 11 предложенных. Все книги разные. Сколькими способами может быть осуществлен выбор?

10. (МЗУ)! Ученикам предложено несколько книг. Из них каждый ученик выбирает себе одну книгу. Всего существует 24024 способов выбора. Сколько было учеников и сколько книг?

11. (МКИ)! Известно, что существует 900 k-разрядных чисел, не содержащих одинаковых цифр. Определите число k. Определите основание системы счисления, в которой заданы k-разрядные числа.

12. (ИРК)! Существует 3024 k-буквенных слов, в каждом из которых нет повторяющихся букв. Определите число k. Сколько было всего букв, из которых составились k-буквенные слова?

20.8. РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Постановка задачи: дано множество, содержащее n элементов. Из них образуют **размещения с повторениями**, т. е. упорядоченные последовательности длины m, причем одни и те же элементы в любую последовательность могут входить многократно. Сколько всего существует таких последовательностей?

Как и в предыдущем случае, размещения с повторениями отличаются одно от другого и элементами и порядком записи элементов, следовательно, для нахождения числа размещений с повторениями можно воспользоваться правилом произведения. Если множество содержит n элементов, то первый элемент можно выбрать n способами, второй — n способами и т. д. В результате получаем

$$\dot{A}_n^m = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^m, \tag{9}$$

где символ $\dot{A}_n^m$ используется для обозначения числа размещений из n элементов по m с повторениями.

Пример 1. Сколько можно образовать четырехразрядных чисел, используя только цифры 3, 7, 8, 9, если повторения возможны?

По правилу произведения на первом месте может находиться любая из четырех цифр, следовательно, имеем 4 случая. Так как повторы разрешены, то на втором месте может находиться любая из четырех заданных цифр — снова 4 случая. Для двух остальных разрядов получаем еще по 4 случая. Таким образом,

$$\dot{A}_4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256.$$

Пример 2. Сколько всего существует трехразрядных десятичных чисел, которые могут быть составлены из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8?

На месте старшего разряда может находиться одна из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8 — всего их шесть. По шесть цифр могут находиться и в двух младших разрядах. Следовательно

$$\dot{A}_6^3 = 6^3 = 216.$$

Пример 3. Дано множество букв:

$$A = \{а, б, в, г, д, е\}.$$

Сколько двух- и трехбуквенных слов можно составить из этих букв?

Искомое число R равно:

$$R = \dot{A}_6^2 + \dot{A}_6^3 = 6^2 + 6^3 = 252.$$

Пример 4. Сколько существует пятиразрядных чисел шестеричной системы счисления?

Решим эту задачу сначала в общем виде. Пусть n — основание некоторой системы счисления, m — длина выборки. Первую цифру можно выбрать $n - 1$ способами, так как с нуля не могут начинаться m-разрядные числа. Во всех остальных разрядах цифры выбираются n способами каждая. Следовательно, искомое число K m-разрядных чисел равно:

$$K = (n - 1)\, n^{m-1}. \qquad \textbf{(10)}$$

Согласно условию примера $m = 5$, $n = 6$, тогда

$$K = (6 - 1)\, 6^{5-1} = 6480.$$

Формула числа размещений с повторениями может быть получена и на основе понятия степени множества (см. п. 2.2 раздела «Теория множеств» данного пособия). Известно, что если A — некоторое конечное множество, а A^m — его степень, то число всех кортежей длины m равно $|A|^m$. Каждый кортеж представляет собой последовательность элементов множества A, причем одни и те же элементы могут входить в последовательность многократно. Все такие последовательности называются размещениями.

Если учесть, что $|A| = n$, то

$$\dot{A}_n^m = |A|^m = n^m.$$

Упражнения

1. (215). Сколько двухбуквенных слов можно образовать из 10 гласных букв русского алфавита?

2. (328). Сколько существует трехразрядных десятичных чисел?

3. (МЯЛ). Сколько существует пятиразрядных чисел четверичной системы счисления?

4. (ВИК). Сколько слов длины 3 можно составить из букв множества $\{a, b, c, d, e, f\}$?

5. (УРФ). Сколько слов длины 10 можно составить из двух букв a и b?

6. (221). Сколько слов длины 12 можно составить из одной буквы d?

7. (НУЧ)! Известно, что существует 100 m-значных чисел p-ичной системы счисления. Найдите числа m и p, если $m \neq 1$.

8. (ИС5). Дано множество $A = \{а, б, в, г, д\}$. Число размещений с повторениями из $|A|$ по m равно N_1. Число размещений с повторениями из $|A|$ по $m + 1$ равно N_2. Найдите N_1 и N_2, если известно, что $N_2 - N_1 = 500$.

9. (ЯХ7). Дано множество $A = \{а, б, в, г, д, е\}$. Сколько существует размещений с повторениями из $|A|$ по 3, если каждое размещение (выборка) начинается с буквы *в*?

10. (ВЕК). Дано множество $A = \{а, б, в, г, д, е\}$. Сколько существует размещений с повторениями из $|A|$ по 3, если ни одно из размещений не начинается с буквы *д*?

11. Дано множество $A = \{а, б, в, г, д, е, ж, з\}$. Сколько существует размещений с повторениями из $|A|$ по 4, если:

1) (ШТИ) каждая выборка (размещение) начинается и оканчивается буквой *б*?

2) (7Б6) каждая выборка начинается с *а б в*?

3) (МБЦ) каждая выборка оканчивается либо буквой *г*, либо буквой *ж*?

4) (258) каждая выборка начинается с гласной буквы?

5) (В95) ни одна выборка не начинается и не оканчивается буквой *а*?

12. (СЕЛ). Сколько существует четных трехразрядных десятичных чисел, не содержащих нечетных цифр в двух старших разрядах?

13. (АЛЗ). Сколько существует нечетных трехразрядных десятичных чисел, не содержащих четных цифр в двух старших разрядах?

14. (Т52). Сколько существует восьмиразрядных двоичных чисел, начинающихся не с нуля?

20.9. СОЧЕТАНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Постановка задачи: пусть множество A содержит n элементов. Выделим из множества A некоторое подмножество, содержащее m элементов ($m \leqslant n$). Сколько существует таких подмножеств?

Каждое подмножество множества A, содержащее m элементов, называется **сочетанием** m элементов из n, где $n = |A|$. Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m. Нижний индекс n в этом обозначении есть число всех тех элементов, из которых осуществляются выборки. Верхний индекс m показывает, сколько элементов входит в выборку. В некоторых источниках, например, в [10], принято считать, что верхний индекс — это число элементов, из которых осуществляются выборки, а нижний индекс — число элементов, образующих выборку. В обозначении числа сочетаний также нет единообразия. Например, в [44] используется символ ${}_nC_r$; в [10] применяются знаки $C(n,r)$, $\binom{n}{r}$, где r — число элементов, образующих выборку. Мы будем пользоваться знаком C_n^m, принятым во многих источниках.

Запишем формулу числа размещений без повторений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Размещения, описываемые этой формулой, отличаются друг от друга элементами или порядком элементов. Сочетания же отличаются одно от другого только элементами, а порядок их записи не имеет значения. Если число A_n^m разделить на $m!$, то получим формулу для числа сочетаний из n элементов по m:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (11)$$

Пример 1. Сколько существует шестиразрядных двоичных чисел, содержащих три единицы?

В данном случае $n = 6$, $m = 3$, следовательно, искомое число равно

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 20.$$

Пример 2. На окружности (рис. 268) расположены n точек. Каждая пара точек соединена прямой линией так, что в любой точке пересекаются не более двух прямых. Сколько точек пересечения имеется внутри круга? Точки пересечения линий с окружностью не учитывать.

Одну точку пересечения можно получить, если взять четыре точки на окружности. Следовательно, каждой четверке точек окружности соответствует одна точка пересечения в круге. Число таких точек равно

$$C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

При $n = 5$ имеется 5 точек, при $n = 6$ имеется 15 точек, при $n = 7$ (как на рис. 268) имеется 35 точек и т. д.

Пример 3. Дан шахматный город размером $m \times n$ квадратов, где n — число квадратов (клеток) по вертикали, m — число квадратов по горизонтали (рис. 269). Сколько существует кратчайших путей:

а) от точки A до точки B, если двигаться можно только по линиям (вертикальным и горизонтальным)?

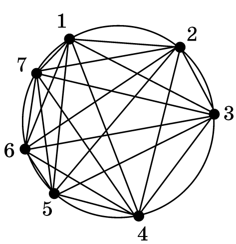


Рис. 268

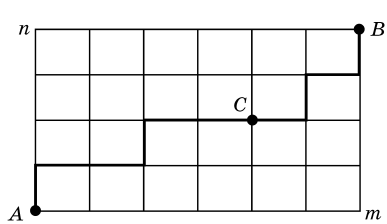


Рис. 269

б) от точки A до точки B, проходящих через точку C?

в) от точки A до точки B, не проходящих через C?

Кратчайший путь, соединяющий точки A и B, состоит из $n + m$ отрезков, причем всякий путь содержит точно n вертикальных отрезков и точно m — горизонтальных. Пусть нуль обозначает движение вверх, единица — движение вправо. Тогда всякий путь можно закодировать и представить в виде $(m + n)$-разрядного двоичного числа. Например, путь, отмеченный на рис. 269, представится двоичным кодом 0110111010. Чтобы решить поставленную задачу, достаточно выяснить, сколько всего существует $(m + n)$-разрядных кодов, в каждом из которых n нулей и m единиц. По формуле (11) имеем

$$C_{n+m}^{n} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}.$$

Например, при $n = 4$, $m = 6$ (как на рис. 269) число кратчайших путей от A до B равно 210.

Чтобы определить число тех же путей, проходящих через точку C, необходимо сначала выяснить, сколько существует кратчайших путей, соединяющих точки A и C, и сколько путей, соединяющих точки C и B. Рассуждая как и в предыдущем случае, находим, что число кратчайших путей, ведущих от точки A до точки C, равно числу сочетаний из 6 по 2, т. е. 15. Точки C и B соединяют 6 кратчайших путей. Общее число искомых путей согласно правилу произведения равно $15 \cdot 6 = 90$.

Число кратчайших путей, ведущих от A к B и не проходящих через точку C, равно $210 - 90 = 120$.

Пример 4. Требуется закодировать 30 букв некоторого алфавита двоичными кодами, содержащими по две единицы. Определить длину кода.

Пусть n — длина кода (то есть число знаков в коде). Тогда должно выполняться неравенство

$$C_n^2 \geqslant 30.$$

Представим это неравенство в виде

$$n(n-1) \geqslant 60.$$

Ближайшее число, удовлетворяющее этому неравенству, равно 9, так как $9 \cdot 8 = 72 > 60$. Если же взять $n = 8$, то $7 \cdot 8 = 56 < 60$. Таким образом, для кодирования 30 букв, необходимы 9-значные двоичные коды, каждый из которых содержит две единицы и семь нулей.

Пример 5. Сколько существует семизначных двоичных чисел, в каждом из которых нет рядом стоящих единиц (числа могут начинаться с нуля)?

Обозначим искомое число буквой n. Оно состоит из нескольких слагаемых. Рассмотрим каждое из них:

а) если в семизначном числе нет единиц, то находиться рядом они не могут. Такое число существует только одно (это число, состоящее из семи нулей), следовательно, $n_1 = 1$;

б) если в числе точно одна единица, то она может занять любое место из семи, поэтому $n_2 = 7$;

в) число может содержать точно две единицы и пять нулей. Запишем нули в один ряд. Между ними поставим по одной точке, а также поставим их слева и справа от нулей. Получится шесть точек. Если какие-либо две точки заменить единицами, а все остальные удалить, то получим семизначное число, содержащее пять нулей и две единицы, причем между этими единицами всегда будет находиться хотя бы один нуль. Две точки из шести заменить единицами можно $C_6^2 = 15$ способами, следовательно, $n_3 = 15$;

г) семизначное число может содержать три единицы и четыре нуля. Рассуждая как и в предыдущем случае, находим: $C_5^3 = 10$. Таким образом, $n_4 = 10$;

д) в числе четыре единицы и три нуля. Такое число существует только одно: 1010101, следовательно, $n_5 = 1$.

Суммируя все найденные числа, получим искомое число:

$$n = 1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34.$$

Пример 6. Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых цифры идут:

1) в порядке возрастания слева направо?

2) в порядке убывания слева направо?

Рассмотрим решение первой задачи. Запишем в порядке возрастания слева направо все десятичные цифры. Удалим из них нуль, так как с нуля пятизначные числа начинаться не могут. Любые пять цифр из оставшихся девяти можно выбрать $C_9^5 = 126$ способами (не меняя их порядка). Столько же существует и искомых чисел.

Вторую задачу можно решить точно таким же образом, если все десятичные цифры (вместе с нулем) записать в порядке убывания слева направо. Так как теперь нуль не может оказаться в старшем разряде, то всего существует искомых чисел $C_{10}^5 = 252$.

Упражнения

1. (АЯМ). Сколько существует 8-разрядных двоичных кодов, содержащих три единицы каждый?

2. (ОЙТ). Сколько существует 9-значных двоичных кодов, каждый из которых содержит 6 нулей?

3. (ФЕМ). Сколько существует 10-значных двоичных кодов, начинающихся с нуля, если в каждом коде четыре единицы?

4. (2НН). Сколько существует 8-разрядных двоичных кодов, в каждом из которых четное число единиц?

5. (ДОК). 66 символов некоторого алфавита закодированы двоичными кодами, содержащими по две единицы каждый. Определите наименьшую длину кода.

6. (ХПО). 80 знаков некоторого алфавита решено закодировать двоичными кодами, содержащими три единицы каждый. Найдите наименьшее значение n и число нулей в коде, если n — длина кода.

7. (КЭС). В шахматном городе размером $m \times n$ число кратчайших диагональных путей, состоящих из 11 отрезков, равно 462 (для одной из диагоналей). Найдите m и n, если $m < n$, $m \neq 1$.

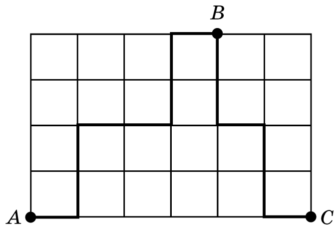


Рис. 270

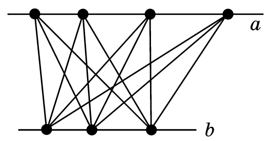


Рис. 271

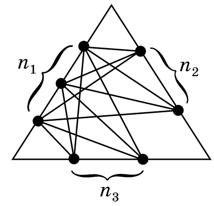


Рис. 272

8. (ЛОТ). Сколько существует кратчайших путей от A до C (рис. 270), если каждый путь проходит через B и если n — число отрезков по вертикали, m — число отрезков по горизонтали от A до B, k — число отрезков по горизонтали от B до C? Принять $n = m = 4$, $k = 2$.

9. (УНУ). На прямой a (рис. 271) расположено n точек, на прямой b — m точек. Все точки прямой a соединены отрезками со всеми точками прямой b. (Рис. 271 приведен для случая, когда $n = 4$, $m = 3$.) Сколько существует точек пересечения отрезков, если ни в одной точке больше двух отрезков не пересекаются и если $n = 7$, $m = 5$?

10. На одной стороне равностороннего треугольника расположено n_1 точек, на второй — n_2 точек и на третьей — n_3 точек (рис. 272). Ни одна из этих точек не совпадает ни с одной вершиной треугольника. Каждая из n_1 точек соединена прямыми линиями со всеми точками двух других сторон. Проведенные линии внутри треугольника образуют точки пересечения, в каждой из которых пересекаются только две линии. Определите число точек пересечения:

1) (ТБФ) если $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 0$.

2) (НОК) если $n_1 = 5$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$.

11. Найдите x в уравнениях:

1) (ЖУХ) $C_x^2 = 91$;	3) (ЗИУ) $C_x^2 = 190$;
2) (ДДЦ) $C_x^3 = 120$;	4) (ДДЕ) $C_x^{14} = 120$.

12. (НОР). В восьмизначном числе вида

$$k = 3\,2\,5\,1\,4\,7\,6\,8$$

три цифры заменили нулями. Получилось новое число. Если в числе k нулями заменить другие какие-либо три цифры, получится еще одно число. Сколько различных восьмизначных чисел можно получить, если каждый раз нулями заменять какие-либо три цифры? С нуля числа не начинаются

13. (ДИБ). Замок сейфа управляется 12 кнопками путем одновременного нажатия трех кнопок с номерами i, j, k, где i, j, $k = 1, 2, 3, ..., 12$; $i \neq j$; $i \neq k$; $j \neq k$. Тройка этих номеров образует кодовый ключ. Некто решил открыть сейф путем проб и ошибок. Сколько троек ему придется проверить в самом неблагоприятном случае?

14. (ДЯГ). На плоскости расставлено 14 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Сколько отрезков можно провести, соединяя точки попарно?

15. (ЕРД). Сколько существует четырехразрядных десятичных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

16. (ЕНЕ). Сколько существует четырехразрядных десятичных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

17. На плоскости проведено n прямых так, что среди них нет ни одной пары параллельных и никакие три линии не пересекаются в одной точке. Каждая прямая продолжена в обе стороны без ограничений. В результате пересечения линий получаются различные фигуры — треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

1) (Б52). Сколько получится треугольников при $n = 12$?

2) (АЯЛ). Сколько получится точек пересечения прямых при $n = 15$?

18. (ШИН). Двоичное число содержит 9 нулей и 5 единиц, причем рядом стоящих единиц в числе нет. Сколько существует таких чисел?

19. (МИЮ). На полке стоит 14 различных книг. С нее сняли 5 книг, причем никакие две из них на полке не стояли рядом. Сколько существует способов такого выбора книг?

20.10. СВОЙСТВА СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Числа вида C_n^m обладают многими очень интересными свойствами. Рассмотрим некоторые из них.

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$ **(12)**

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, запишем левую и правую части в развернутом виде:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Результаты совпали, следовательно, равенство (12) верно. Пример: определить число двоичных кодов длины 7, в каждом из которых имеется точно три единицы. В этом случае

$$n = 7,\ m = 3,\ 7 - 3 = 4 \text{ и } C_7^3 = C_7^4 = 35;$$

2) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m.$ **(13)**

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, его правую часть преобразуем:

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!m}{(m-1)!\cdot m\cdot(n-m)!} + \frac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m-1)!(n-m)} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{m!(n-m)!}(m+n-m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m.$$

Результат совпал с левой частью равенства (13), следовательно, формула (13) верна;

3) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_m^m = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n.$ **(14)**

Для доказательства воспользуемся производящей функцией $(1 + x)^n$ для чисел C_n^i, где $i = 0, 1, 2, ..., n$ (о производящих функциях см. [7; 20; 44]). Известно, что

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i. \quad (15)$$

Это равенство обычно называют формулой бинома Ньютона, хотя и не совсем справедливо, так как задолго до Ньютона (1642–1720) формулу $(a + b)^n$ знали среднеазиатские математики Омар Хайям (1048–1131) и Гийас ад-Дин Джемшид ал-Каши (XV век н. э.). Ньютон же установил, что разложение формулы $(a + b)^n$ обобщается и на случаи дробных и отрицательных показателей n.

Если в формуле (15) принять $x = 1$, то получим

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i,$$

что и доказывает справедливость соотношения (14).

Доказать формулу (14) можно без привлечения понятия производящей функции. Пусть дано множество всех n-разрядных двоичных кодов. В каждом из них содержится i единиц и $n - i$ нулей ($i = 0, 1, 2, ..., n$). Если $i = 0$, то существует лишь один n-значный код в виде последовательности n нулей. Это можно записать так: C_n^0, поскольку

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Если $i = 1$, то существует $C_n^1 = n$ кодов, содержащих по одной единице. При $i = 2$ возможно C_n^2 кодов, содержащих по две единицы, и так далее до n-значного кода, состоящего из n единиц. Таким образом, получаем:

$$K = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n.$$

Число K показывает, сколько всего возможно n-значных двоичных кодов.

С другой стороны, если воспользоваться формулой для числа размещений с повторениями, то число K можно представить в виде другой формулы:

$$K = \dot{A}_2^n = 2^n,$$

что и доказывает справедливость утверждения (14);

4) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0.$ (16)

Доказать справедливость равенства (16) проще всего при помощи формулы (15), если принять $x = -1$;

5) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... + C_n^{n-1}$ при четном n;

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... + C_n^n$ при нечетном n.

Доказать справедливость этих свойств можно при помощи формулы (16).

6) $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$.

Чтобы получить эту формулу, достаточно в выражении (13) вместо n записать $n + 1$.

7) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Доказательство можно найти в [20].

Упражнения

1. (МЭС). В формуле (14) укажите наибольшее число сочетаний при $n = 10$.

2. (ЫЛТ). При каких значениях i число сочетаний из n по i (C_n^i) в формуле (14) принимает наибольшее значение, если $n = 17$.

3. (НЯФ). Известно, что $C_n^m = 165$ и что $n - m = 8$. Найдите m и n.

4. (692). Известно, что $C_n^m = 1001$; $C_{n-1}^{m-1} = 286$. Найдите C_{n-1}^m.

5. (КВЕ). Найдите C_n^3, если $2^n = 65536$.

20.11. СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Постановка задачи: дано множество $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Сколько существует выборок по m элементов, если в них могут входить повторяющиеся элементы и если порядок элементов в выборках безразличен? Такие выборки называют **сочетаниями с повторениями**.

Например, если $A = \{a, b, c, d\}$, то существует 10 выборок длины $m = 2$:

$$\begin{array}{cccc} aa & bb & cc & dd \\ ab & bc & cd & \\ ac & bd & & \\ ad & & & \end{array}$$

Нахождение числа сочетаний с повторениями поясним на примере. В магазине имеется 4 вида конфет: «Пилот», «Ромашка», «Весна», «Снежинка». Требуется купить 10 конфет в любом сочетании из перечисленных. Сколькими способами это можно сделать?

При покупке возможны варианты:

- купили 10 конфет «Весна»;
- купили 5 конфет «Пилот», 3 конфеты «Ромашка» и 2 конфеты «Весна» (всего 10 конфет);
- купили 6 конфет «Весна» и 4 конфеты «Ромашка» и т. д.

Закодируем покупку следующим образом. Пусть решено купить три конфеты «Пилот», две конфеты «Ромашка», одну конфету «Весна» и четыре конфеты «Снежинка». Запишем три единицы (это конфеты «Пилот»), после которых поставим нуль. Затем запишем две единицы (это конфеты «Ромашка») и нуль. Далее поставим одну единицу и нуль. В конце запишем четыре единицы (конфеты «Снежинка»), но нуль после них не ставим. Получилась последовательность:

111	0	11	0	1	0	1111
"Пилот"		"Ромашка"		"Весна"		"Снежинка"

Нули в этой последовательности выполняют только одну роль — они отделяют один вид конфет от других.

Очевидно, что всякое распределение трех нулей в 13-разрядном двоичном коде дает некоторый вариант покупки. Например:

1111001011111 — куплено четыре конфеты «Пилот», ни одной конфеты «Ромашка», одна конфета «Весна» и пять конфет «Снежинка»;

0001111111111 — куплено 10 конфет «Снежинка», все остальные конфеты в покупку не вошли;

0101111111110 — конфет «Пилот» и Снежинка» в покупке нет. Куплено одна конфета «Ромашка» и девять конфет «Весна». И т. д.

Таким образом, число вариантов покупок равно числу всех возможных 13-разрядных двоичных кодов, в каждом из которых десять единиц (либо три нуля):

$$\dot{C}_4^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = 286,$$

где символом $\dot{C}_4^{10}$ обозначено число сочетаний с повторениями из четырех элементов по 10.

В общем случае если множество A содержит n элементов, из которых составляются выборки по m элементов с повторениями, то число всех таких выборок равно:

$$\dot{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}. \qquad (17)$$

В числе $n + m - 1$ единица записана по той причине, что число нулей, которыми отделяются группы одинаковых элементов, на единицу меньше числа $|A|$.

Рассмотрим еще один пример. В три ящика необходимо разложить 30 гаек так, чтобы в каждом ящике оказалось хотя бы по пять гаек. Сколькими способами это можно сделать?

Очевидно, что по пять гаек в каждый ящик можно положить заранее. Тогда их останется 15, следовательно $m = 15$, $n = 3$. По формуле (17) находим: $M = 136$, где M — число способов распределения по трем ящикам 15 гаек. Такой же ответ получим в результате следующих рассуждений. Расположим в один ряд все 15 гаек и добавим в этот ряд, например, две шайбы. Тогда гайки, расположенные слева от шайб, попадут в первый ящик, гайки, находящиеся справа, — в третий, а те, которые разместились между шайбами, — во второй. Тогда искомое число M равно:

$$M = C_{17}^2 = 136.$$

Упражнения

1. (УЯД). В магазине продают четыре вида конфет. Сколькими способами можно купить 15 конфет?

2. Продаются тетради пяти цветов: с синей обложкой, фиолетовой, красной, зеленой и оранжевой.

1) (ЮСЕ). Требуется купить 10 тетрадей любого цвета. Скольким способами это можно сделать?

2) (ВШВ). Требуется купить 15 тетрадей. Пять из них должны быть с фиолетовой обложкой, а обложки всех остальных тетрадей могут быть любого цвета, кроме фиолетового. Сколькими способами возможна такая покупка?

3) (ДДБ). Требуется купить 16 тетрадей, среди которых не менее 4 тетрадей должны быть с зеленой обложкой и не менее 5 тетрадей — с оранжевой.

Цвет обложки остальных тетрадей значения не имеет. Сколькими способами возможна покупка?

4) (ШЕТ) Требуется купить 14 тетрадей, среди которых каждого цвета из пяти должно быть не менее чем по две тетради. Сколько существует вариантов покупки?

3. (КМГ). 20 студентов могут сдавать экзамен в любой день из четырех. На первый день подано n_1 заявок, на второй — n_2, на третий — n_3, на четвертый — n_4. Сколько существует различных наборов чисел n_1, n_2, n_3, n_4?

4. (ВАЮ). Из Томска в Кемерово можно уехать тремя видами пассажирского транспорта: поездом, автобусом и речным катером. Группа туристов, насчитывающая 18 человек, отправилась из Томска в Кемерово, причем n_1 человек воспользовались поездом, n_2 — автобусом и n_3 — речным катером. Сколько существует различных наборов чисел n_1, n_2, n_3 (при $n_1 + n_2 + n_3 = 18$), если каждое из чисел n_1, n_2 и n_3 может быть равным нулю и может быть равным 18?

5. (МЭЛ). В пассажирском составе 10 вагонов. В них необходимо разместить 6 пассажиров. Сколькими способами это можно сделать, если в каждом вагоне имеется не менее 6 свободных мест и если пассажирам безразлично, в каком вагоне ехать?

6. (МКМ). 30 конфет необходимо распределить по трем ящикам. Сколькими способами это можно сделать при условии, что все конфеты одинаковые?

7. (ТЮК). Между тремя учениками необходимо разделить 45 яблок. Сколькими способами это можно сделать при условии, что все яблоки одинаковые, и что каждый ученик получит не менее 7 яблок?

8. (КВН). Шесть домов отдыха предлагают путевки в неограниченном количестве. Руководством некоторого завода решено приобрести 10 путевок. Сделать это можно многими вариантами. Например, взять все 10 путевок в один дом отдыха либо две путевки взять в первый дом, три — во второй, остальные — в пятый и т. д. Сколько всего существует вариантов выбора домов отдыха?

9. (400). В 4 ящика необходимо разложить 30 предметов так, чтобы в каждом ящике оказалось хотя бы 4 предмета. Сколько существует способов загрузки ящиков?

10. (ЕМП). В четыре ящика необходимо загрузить n предметов так, чтобы в каждом ящике оказалось не менее чем по 5 предметов. Известно, что существует 1540 способов загрузки ящиков. Определите n.

20.12. УПРАЖНЕНИЯ НА ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ

Выше были рассмотрены основные формулы для нахождения числа перестановок, размещений и сочетаний с повторениями и без повторений. Их полный список имеет вид:

1) перестановки без повторений: $P_n = n!$;

2) перестановки с повторениями:

$$\dot{P}_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!},$$

где $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$;

3) размещения из n элементов по m без повторений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!};$$

4) размещения из n элементов по m с повторениями:

$$\dot{A}_n^m = n^m;$$

5) сочетания из n элементов по m без повторений:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

6) сочетания из n элементов по m с повторениями:

$$\dot{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

При начальном освоении элементов комбинаторики эти шесть формул необходимо изучить в первую очередь. Чтобы достичь минимально необходимого уровня их усвоения, следует выполнить ряд тренировочных упражнений. С этой целью в данный подраздел включен несложный практикум, который необходимо рассматривать как обязательный минимум, а поэтому выполнить упражнения следует все без исключения.

Упражнения

1. В вышеприведенном списке основных формул комбинаторики укажите номера формул, в которых:

1) (УЦФ) учитывается порядок элементов в выборках;
2) (ВЭХ) порядок элементов не имеет значения;
3) (383) различные выборки могут содержать различные элементы;
4) (ИПЧ) выборки отличаются одна от другой только элементами.

2. (РАЙ). Укажите номера правильных формул:

1) $A_n^m = \frac{P_n}{(n-m)!}$; 3) $A_n^m = \frac{P_m}{(n-m)!}$; 5) $C_n^m = \frac{P_m}{P_n(n-m)!}$;

2) $P_m = \frac{A_n^m}{C_n^m}$; 4) $C_n^m = \frac{P_n}{P_m(n-m)!}$; 6) $C_{r+k}^r = \frac{(r+k)!}{r!k!}$.

3. (ТЫС). Укажите номера верных формул:

1) $A_n^m = C_n^m \cdot P_n$; 3) $P_n = (n-m)!A_n^m$; 5) $P_n = (n-m)!P_n \cdot C_n^m$;

2) $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$; 4) $A_{n+m-1}^m = \dot{C}_n^m \cdot P_n$; 6) $P_n = n(n-1)!$

4. (030). Укажите номера правильных формул:

1) $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$; 3) $C_{r+k}^k = \frac{(r+k)!}{r!k!}$; 5) $\dot{C}_n^m = \frac{A_{n+m-1}^m}{P_n}$;

2) $\dot{C}_n^m = \dfrac{A_{n+m-1}^m}{P_m}$; 4) $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_n}$; 6) $P_n = (n-m)!P_m \cdot C_n^m$.

5. (ЛВО). Укажите верные соотношения:

1) $\sum_{i=0}^{t} C_n^i = \sum_{i=n-t}^{n} C_n^i$ при $t \leqslant n$; 4) $\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^i = 2^{n-1}$ при нечетном n;

2) $\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} C_n^i = 2^{n-1}$ при нечетном n; 5) $\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_n^i = 2^{n-1}$ при четном n;

3) $\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} C_n^i = 2^{n-1}$ при четном n; 6) $\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^i = \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} C_n^i$ при нечетном n.

6. (ОТФ). Укажите номера правильных выражений:

1) $\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_n^i = \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} C_n^i$ при четном n; 4) $A_n^{n+m} = n^n + n^m$;

2) $\dot{A}_n^{n+m} = n^n n^m$; 5) $A_n^{2n} = n^2 \cdot n^n$;

3) $A_{n+m-1}^m = P_m \dot{C}_n^m$; 6) $\dot{A}_{n+m}^m = n^n + m^m$.

7. (182)! Найдите число размещений из n элементов по m с повторениями, если

$$n = 7, \quad m = 0; \qquad n = 7, \quad m = 1; \qquad n = m = 2.$$

8. (763)! Найдите число сочетаний из n элементов по m без повторений при

$$n = 5, \quad m = 0; \qquad n = 8, \quad m = 1; \qquad m = n = 12.$$

9. (ЛПИ)! Определите число размещений из n элементов по m без повторений, если

$$n = 1, \quad m = 0; \qquad n = m = 3; \qquad m = n = 0.$$

10. (275)! Определите число размещений из n элементов по m с повторениями, если

$$n = 1, \quad m = 100; \qquad n = 100, \quad m = 0; \qquad n = m = 3.$$

11. (696)! Сколько существует перестановок из n элементов без повторений, если

$$n = 4? \qquad n = 1? \qquad n = 0?$$

12. (997)! Найдите число перестановок из n элементов с повторениями, если $n = n_1 + n_2$, при условии, что

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 0; \qquad n_1 = 0, \quad n_2 = 1; \qquad n_1 = 2, n_2 = 3.$$

13. (ОТМ)! Сколько существует сочетаний из n элементов по m с повторениями, если

$$n = m = 1? \quad n = 5, \quad m = 0? \quad n = m = 2?$$

14. (ТЫН)! Сколько существует сочетаний из n элементов по m без повторений, если

$$n = 12, \quad m = 11? \quad n = m = 0? \quad n = 10, \quad m = 8?$$

15. (ЛАО). Укажите номера верных утверждений:

1) в формуле числа сочетаний из n элементов по m без повторений всегда $n \geqslant m$;

2) в формуле числа размещений из n элементов по m без повторений возможно соотношение $n < m$;

3) в формуле числа размещений из n элементов по m с повторениями возможно соотношение $n > m$;

4) в формуле числа сочетаний из n элементов по m с повторениями возможны случаи, когда $m > n$;

5) в формуле числа перестановок из n элементов без повторений величина n может принимать нулевое значение;

6) в формуле числа перестановок из n элементов с повторениями возможно, что

$$n < n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$

где n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — число неразличимых элементов i-й группы;

7) если составить дробь, где числитель — число сочетаний из n элементов по m без повторений, а знаменатель — число перестановок из m элементов (также без повторений), т. е.:

$$k = \frac{C_n^m}{m!},$$

то после сокращений число k всегда будет получаться целым;

8) если составить дробь, где числитель — число сочетаний из n элементов по m с повторениями, а знаменатель — число сочетаний из n элементов по m без повторений, то после сокращений всегда будет получаться целое число.

21 КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

21.1. РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА НА ДВА ПОДМНОЖЕСТВА

Постановка задачи: дано множество, содержащее n элементов:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Все элементы этого множества требуется разделить на два подмножества A_1 и A_2 так, чтобы выполнялись условия:

$$A_1 \bigcup A_2 = A; \;\; A_1 \bigcap A_2 = \varnothing.$$

Сколько существует таких разбиений?

Наиболее простым является случай, когда число элементов, образующих множества A_1 и A_2, задано заранее. Если N — число разбиений, то

$$N = C_n^{|A_1|} = C_n^{|A_2|}.$$

Например, число разбиений множества десятичных цифр на два подмножества A_1 и A_2 при $|A_1| = 3$, $|A_2| = 7$ равно

$$N = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = 120.$$

Этот же результат можно получить с применением формулы числа перестановок с повторениями. Для этого запишем в ряд элементы множества A и каждому элементу поставим в соответствие двоичный разряд, т. е. все разбиения закодируем двоичными кодами. Пусть нули обозначают элементы множества A_1, единицы — элементы множества A_2:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 0 0 1 1 1 1 1 1 1

В данном случае двоичному коду 0001111111 соответствует разбиение

$$A_1 = \{0, 1, 2\}; \;\; A_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Очевидно, что всякая перестановка нулей и единиц в двоичном числе определяет некоторое разбиение множества A. Например, числу 1011100111 соответствует разбиение

$$A_1 = \{1, 5, 6\};\ \ A_2 = \{0, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}.$$

По формуле числа перестановок из 10 элементов с повторениями получаем общее число разбиений:

$$N = \dot{P}_{10} = \frac{10!}{3!7!} = 120.$$

В общем случае имеем:

$$N = \dot{P}_n = \frac{n!}{|A_1|!|A_2|!}. \tag{18}$$

Необходимо отметить, что формула (18) справедлива лишь при

$$|A_1| \neq |A_2|.$$

Если же

$$|A_1| = |A_2|,$$

то все разбиения, число которых определяется по формуле (18), делятся на пары неразличимых разбиений. Например, два двоичных числа

0111001100 и 1000110011

дают разбиения следующего вида:

$$A_1 = \{0, 4, 5, 8, 9\};\ \ A_2 = \{1, 2, 3, 6, 7\};$$
$$A_1^1 = \{1, 2, 3, 6, 7\};\ \ A_2^1 = \{0, 4, 5, 8, 9\}.$$

Эти разбиения являются неразличимыми, так как

$$A_1 = A_2^1 \ \text{ и } \ A_2 = A_1^1.$$

Очевидно, что неразличимым разбиениям соответствуют взаимно инверсные коды (т. е. коды, переходящие один в другой заменой нулей на единицы, а единиц на нули). Так как всякому коду, в котором число нулей равно числу единиц, соответствует инверсный код, также содержащий поровну нулей и единиц, то формула для нахождения числа N' всех разбиений принимает вид

$$N' = \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}. \tag{19}$$

Заметим, что эта формула справедлива лишь при четном n.

Мы рассмотрели случай, когда величины $|A_1|$ и $|A_2|$ заданы. Теперь определим число разбиений при всех возможных значениях $|A_1|$ и $|A_2|$.

Проще всего решить эту задачу с помощью двоичных кодов. Поставим в соответствие каждому элементу множества A определенный двоичный разряд. Тогда всякому двоичному коду будет соответствовать некоторое разбиение, если считать, что единица обозначает вхождение данного элемента в множество A_1, а нуль — вхождение данного элемента в множество A_2.

Проиллюстрируем это на следующем примере. Пусть дано множество, состоящее из четырех элементов:

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

В табл. 46 перечислены все возможные подмножества в виде двоичных кодов и отмечены взаимно инверсные коды. Строке с нулевым номером соответствует разбиение

$$A_1 = \varnothing;\ \ A_2 = A.$$

Строке с номером 15 соответствует такое же разбиение

$$A_1 = A;\ \ A_2 = \varnothing.$$

Очевидно, что эти разбиения неразличимы. Строке с номером 1 соответствует разбиение

$$A_1 = \{d\};\ \ A_2 = \{a, b, c\}.$$

Для инверсного кода 1110 разбиение имеет вид

$$A_1 = \{a, b, c\};\ \ A_2 = \{d\}.$$

Эти разбиения также неразличимы и т. д. Из табл. 46 видно, что различимыми являются только 8 разбиений.

В общем случае, когда множество состоит из n элементов, таблица содержит 2^n строк. Следовательно, число N всех разбиений равно

$$N = 2^{n-1}.$$

Таблица 46

№	a b c d
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0
13	1 1 0 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

Если же разбиения, соответствующие взаимно инверсным кодам, считать различными, то всего существует 2^n разбиений.

Рассмотрим случай, когда в разбиении участвуют множества, содержащие одинаковые элементы (напомним, что такие множества называют семействами).

Пусть имеется 10 тетрадей с зеленой обложкой, 12 — с желтой и 11 — с красной. Требуется разделить их между двумя учащимися так, чтобы каждому из них досталось не менее чем по три тетради каждого цвета.

Сначала рассмотрим случай, когда нет ограничений на то, сколько тетрадей должен получить каждый учащийся. Тогда первому из них может достаться одна зеленая тетрадь (другому, следовательно, 9 зеленых тетрадей), две, три и так далее до 10, а также ни одной. Всего 11 случаев. Точно так же рассуждая, приходим к выводу, что существуют 13 и 12 вариантов распределения желтых и красных тетрадей. Следовательно (по правилу умножения), всего имеем $11 \cdot 13 \cdot 12 = 1716$ способов распределения всех тетрадей между двумя учащимися.

Теперь рассмотрим случай, когда каждый учащийся должен получить не менее трех тетрадей каждого цвета. Для этого достаточно заранее выдать обоим учащимся по три тетради всех цветов. Тогда останется четыре зеленые тетради, шесть желтых и пять красных. Первый учащийся может получить одну, две, три или четыре зеленые тетради, а также ни одной. Имеем пять вариантов. Желтая тетрадь может быть ему выдана семью способами, красная — шестью. Следовательно, всего существует $5 \cdot 7 \cdot 6 = 210$ вариантов.

Сформулируем задачу в общем виде. Пусть имеется k различных предметов. Из них n_1 экземпляров первого предмета, n_2 экземпляров — второго, ..., n_k — k-го:

$$k = n_1 + n_2 + ... + n_k.$$

Требуется разделить их на две части так, чтобы в каждой части оказалось не менее t_1 экземпляров первого предмета, не менее t_2 экземпляров второго предмета, ..., не менее t_k экземпляров k-го предмета. Сколькими способами можно это сделать?

Так как в обе части войдет по t_1 экземпляров первого предмета, то останется $n_1 - 2t_1$ экземпляров. То же самое относится и ко всем остальным предметам. Следовательно, существует M способов разделить на две части все $n_1 + n_2 + ... + n_k$ предметов, где

$$M = (n_1 - 2t_1 + 1)(n_2 - 2t_2 + 1) ... (n_k - 2t_k + 1). \tag{20}$$

Если принять в этой формуле

$$t_1 = t_2 = ... = t_k = 0 \quad \text{и} \quad n_1 = n_2 = ... = n_k = 1,$$

то получим

$$M = 2^k,$$

что соответствует вышеприведенной частной задаче о разбиении множества на два подмножества.

Упражнения

1. (101). Множество состоит из семи элементов. Сколькими способами его можно разбить на два подмножества A_1 и A_2, если $|A_1| = 3$; $|A_2| = 4$?

2. (ВКФ). Множество состоит из 12 элементов. Сколькими способами его можно разбить на два подмножества A_1 и A_2, если $|A_1| = |A_2|$?

3. (282). Сколькими способами множество A можно разбить на два подмножества A_1 и A_2, если $|A| = 9$?

4. Дано разбиение:

$$A_1 = \{1, 2, 3\}; \quad A_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Найдите число разбиений множества $A_1 \cup A_2$, если

1) (ВЕЗ) $|A_1| = 3$; $|A_2| = 5$; 2) (ЯК5) $|A_1| = 2$, $|A_2| = 6$; 3) (НУЧ) $|A_1| = |A_2| = 4$.

5. (576). Известно, что булеан подмножества A_1 содержит 126 собственных подмножеств. Кроме того, известно, что

$$|A_1| + |A_2| = 14,$$

где A_1 и A_2 — разбиение множества A. Определите $|A_2|$.

6. (ОЖН). Известно, что существует 4096 способов разбиения множества A на два подмножества. Определите $|A|$.

7. См. условие упражнения 6. Сколько существует разбиений множества A:

1) (ИРК) на два подмножества A_1 и A_2, если $|A_1| = 4$?

2) (300) на два подмножества A_1 и A_2, если $|A_1| = 6$?

3) (ХВМ) на два подмножества A_1 и A_2, если во всех разбиениях $A_1 \neq \varnothing$ и $A_2 \neq \varnothing$?

21.2. РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА НА НЕСКОЛЬКО ПОДМНОЖЕСТВ

Постановка задачи: пусть дано множество, содержащее n элементов:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}.$$

Все элементы этого множества требуется разбить на k подмножеств A_1, A_2, ..., A_k так, чтобы выполнялись условия:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A;$$
$$A_i \cap A_j = \varnothing;$$

где $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$.

Сколько существует таких разбиений?

Если $|A_i| \neq |A_j|$, то подмножество A_1 можно выбрать $C_n^{|A_1|}$ способами. Из оставшихся элементов подмножество A_2 можно выбрать $C_{n-|A_1|}^{|A_2|}$ способами и т. д. По правилу произведения находим число Q всех разбиений:

$$Q = C_n^{|A_1|} \cdot C_{n-|A_1|}^{|A_2|} \cdot C_{n-|A_1|-|A_2|}^{|A_3|} \ldots C_{n-|A_1|-|A_2|-\ldots-|A_{k-2}|}^{|A_{k-1}|} =$$
$$= \frac{n!}{|A_1|!(n-|A_1|)!} \cdot \frac{(n-|A_1|)!}{|A_2|!(n-|A_1|-|A_2|)!} \ldots \frac{(n-|A_1|-\ldots-A_{k-2})!}{|A_{k-1}|!(n-|A_1|-\ldots-|A_{k-1}|)!} = \frac{n!}{|A_1|!\ldots|A_k|!},$$

так как $n - |A_1| - |A_2| - \ldots - |A_{k-1}| = |A_k|$.

Таким образом, если $|A_i| \neq |A_j|$, то

$$Q = \frac{n!}{|A_1|!|A_2|!\ldots|A_k|!}. \qquad (21)$$

Например, пусть дано множество $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Определим число разбиений, если

$$|A_1| = 2; \quad |A_2| = 3; \quad |A_3| = 4.$$

По формуле (21) имеем: $Q = \frac{9!}{2!3!4!} = 1260$.

Формулу (21) можно получить и иным путем, с применением систем счисления. Поясним это примером. Пусть A — множество десятичных цифр и пусть

$$|A_1| = 3, \quad |A_2| = 2, \quad |A_3| = 5.$$

Запишем элементы множества A в строку и отметим какое-либо разбиение, обозначив элементы множества A_1 нулями, множества A_2 — единицами и множества A_3 — двойками троичной системы:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 0 0 1 1 2 2 2 2 2

Эта запись обозначает следующее разбиение:

$$A_1 = \{0, 1, 2\}; \quad A_2 = \{3, 4\}; \quad A_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Чтобы получить другое разбиение, достаточно переставить цифры в троичном коде, оставив без изменения последовательность элементов множества A. Например:

$$0123456789$$
$$2012200221$$

Коду 2012200221 соответствует разбиение вида:

$$A_1 = \{1, 5, 6\};\ \ A_2 = \{2, 9\};\ \ A_3 = \{0, 3, 4, 7, 8\}.$$

Так как всякой перестановке цифр этого кода соответствует определенное разбиение, то задача отыскания числа Q всех разбиений сводится к нахождению числа перестановок из 10 элементов с повторениями:

$$Q = \frac{10!}{3!\,2!\,5!} = 2520.$$

В общем случае если заданы величины $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_k|$, то элементам множества

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$$

необходимо поставить в соответствие цифры k-ичной системы счисления: нулями обозначим элементы множества A_1, единицами — элементы множества A_2 и так далее до множества A_k, элементы которого обозначим цифрами $k - 1$. Запишем какое-либо разбиение в виде последовательности k-ичных цифр, в которой $|A_1|$ нулей, $|A_2|$ единиц и так далее до цифр $k - 1$, число которых равно $|A_k|$, и рассмотрим все перестановки k-ичных цифр. Число этих перестановок равно:

$$Q = \dot{P}_n = \frac{n!}{|A_1|!\,|A_2|!\ldots|A_k|!}.$$

Мы рассмотрели частный случай, когда $|A_i| \neq |A_j|$ ($i, j = 1, 2, \ldots, k$). Теперь допустим, что в разбиение входят эквивалентные подмножества. Здесь возможно два случая. Первый рассмотрим на примере задачи о домино, в которой требуется выяснить, сколькими способами могут быть распределены 28 костей домино поровну между четырьмя игроками. Согласно условию имеем:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 7,$$

где $|A_i|$ — число костей домино, доставшихся i-му игроку ($i = 1, 2, 3, 4$). Число Q всех способов распределения костей определяется по формуле (21):

$$Q = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

Все ли эти разбиения различны? Рассмотрим два варианта. Пусть первое разбиение имеет вид:

$$A_1 = \{1, 2, \ldots, 7\};\ \ A_2 = \{8, 9, \ldots, 14\};$$
$$A_3 = \{15, 16, \ldots, 21\};\ \ A_4 = \{22, 23, \ldots, 28\},$$

а второе:

$$A_1 = \{8, 9, \ldots, 14\};\ \ A_2 = \{1, 2, \ldots, 7\};$$
$$A_3 = \{15, 16, \ldots, 21\};\ \ A_4 = \{22, 23, \ldots, 28\},$$

где числа 1, 2, ..., 28 обозначают номера костей домино.

Для игроков это неодинаковые распределения, поскольку первый игрок в первом случае получил один набор костей, а во втором случае тому же игроку достались совсем другие кости. Следовательно, все разбиения, число которых представлено выражением (21), являются различными.

Теперь предположим, что дополнительных условий нет. Тогда рассмотренные два разбиения являются неразличимыми. Так как всего имеется четыре равномощных подмножества, то существует $4! = 24$ варианта их перестановок, не дающих новых разбиений. Следовательно,

$$Q = \frac{28!}{(7!)^4 \cdot 4!}.$$

Если множество A разбивается на k эквивалентных подмножеств, то

$$Q = \frac{\dot{P}_n}{k!} = \frac{n!}{\left(|A_s|!\right)^k k!},$$

где $|A_s| = |A_1| = |A_2| = \ldots = |A_k|$.

В общем случае эквивалентными могут быть не все k подмножеств. Пусть $|A| = 37$. Требуется разбить это множество на 10 подмножеств при условии, что

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 3;\ \ |A_4| = |A_5| = |A_6| = |A_7| = 4;\ \ |A_8| = 5;\ \ |A_9| = 6;\ \ |A_{10}| = 1.$$

Здесь две группы подмножеств, и в каждую входят эквивалентные подмножества. Так как перестановка эквивалентных подмножеств новых разбиений не дает, то число разбиений, полученное на основе формулы (21), необходимо разделить на 3! и на 4! В результате получаем следующее число всех разбиений:

$$Q = \frac{37!}{(3!)^3 \cdot (4!)^4 \cdot 5! \cdot 6! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 4!}.$$

Упражнения

1. (ДОН). Дано множество $A = \{a, b, c, d, e, f, k\}$. Сколькими способами можно разбить его на три подмножества A_1, A_2 и A_3, если $|A_1| = 4$, $|A_2| = 2$, $|A_3| = 1$?

2. (ОНП). Дано: $|A_1| = 2$; $|A_2| = 3$; $|A_3| = 4$; $|A_4| = 1$; $|A| = 10$. Сколько существует способов разбиения множества A на четыре подмножества A_1, A_2, A_3, A_4 при отсутствии каких-либо ограничений?

3. (А20). Множество A разбито на подмножества так, что

$$|A_1| = 1;\ \ |A_2| = 1;\ \ |A_3| = 4;\ \ |A_4| = 4.$$

Сколько существует таких разбиений (ограничений нет)?

4. (СХР). Сколькими способами можно разбить на пять подмножеств множество A, если $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = 1$ и если нет никаких дополнительных ограничений?

5. (ИЛ1). Требуется разложить по 4 ящикам 10 различных предметов так, чтобы в первом и втором ящиках было по 2 предмета, а в третьем и четвертом — по 3 предмета. Сколькими способами это можно сделать?

6. (ОЗЛ). Требуется закодировать три сообщения. Первое решено закодировать двумя десятичными цифрами a_1 и a_2, второе — цифрами a_3, a_4, a_5, третье — a_6, a_7, a_8. Все восемь цифр являются различными. Сколько существует способов выбора цифр для кодирования сообщений, если используются десятичные цифры 1, 2, ..., 8?

21.3.
ЗАДАЧА О ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЯХ

На рис. 273 приведена схема, содержащая трансформатор с четырьмя выходными обмотками, имеющими по пять выводов, и четыре пятипозиционных переключателя. Каждая секция обмотки v_4 дает напряжение 1 В, каждая секция обмотки v_3 дает 5 В, обмотки v_2 — 25 В и обмотки v_1 — 125 В. Какие значения напряжения можно устанавливать на выходе схемы, переводя переключатели в те или иные состояния (обмотки соединены согласно)?

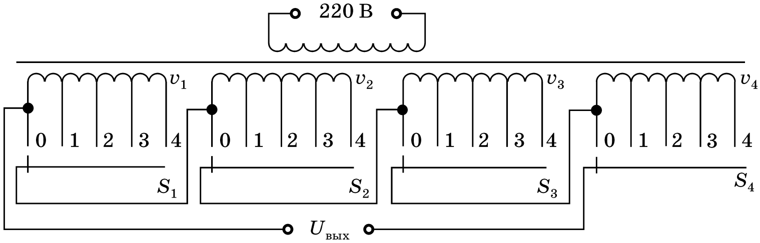


Рис. 273

Пусть на вход трансформатора подано переменное напряжение, равное 220 В. В том положении переключателей, в котором они изображены на рис. 273, выходное напряжение $U_{вых}$ равно нулю. Переведем переключатель S_4 в положение 1. Выходное напряжение будет равно 1 В. Переведем переключатель S_4 в положение 2 — выходное напряжение будет равно 2 В и так далее до случая, когда все переключатели окажутся в позиции 4, тогда выходное напряжение будет равно 624 В. Таким образом, схема позволяет установить выходное напряжение от 0 до 624 В с дискретностью в 1 В. Чтобы получить N вольт, число N достаточно перевести в пятеричную систему счисления и полученное число набрать на переключателях. Например, если $N = 380$ В, то набираем пятеричное число 3010, т. е. переключатель S_1 переводим в положение 3, переключатели S_2 и S_4 оставляем в нулевых позициях, а переключатель S_3 устанавливаем в состояние 1.

Очевидно, что общее число K всех возможных состояний четырех пятипозиционных переключателей равно числу всех четырехразрядных пятеричных чисел, которые могут начинаться и с нуля, т. е. $K = 5^4 = 625$. Если n — число переключателей по m позиций каждый, то $K = m^n$.

Сформулируем задачу в общем виде: даны n переключателей, из которых первый имеет m_1 позиций, второй — m_2 позиций, третий — m_3 и так далее до n-го переключателя, имеющего m_n позиций. Сколько различных состояний могут иметь все эти n переключателей?

Ответ прост. По правилу произведения число K различных состояний n переключателей равно:

$$K = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n.$$

Пример 1. Выбрать переключатели так, чтобы получилось 100 различных их состояний. Число позиций переключателей должно быть минимальным.

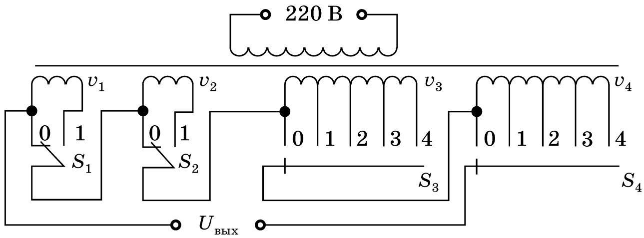


Рис. 274

Изобразить схему, позволяющую устанавливать на выходе напряжение от 0 до 99 В с дискретностью, равной 1 В.

Разложим число 100 на простые множители:

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5,$$

откуда получаем: $m_1 = m_2 = 2$; $m_3 = m_4 = 5$. Схема переключателя напряжения приведена на рис. 274. Напряжение каждой секции обмотки v_4 равно 1 В. Напряжение каждой секции обмотки v_3 равно 5 В. Напряжение обмотки v_2 равно 25 В, обмотки v_1 — 50 В.

Таким образом, схема обеспечивает возможность устанавливать на выходе напряжение от 0 до 99 В с дискретностью в 1 В.

Пример 2. Известно, что схема имеет K различных значений выходного напряжения, обеспечиваемых четырьмя переключателями. Число позиций m_i у всех переключателей различное и не превышает 10. Найти числа m_1, m_2, m_3, m_4, K, где m_i — число позиций i-го переключателя ($i = 1, 2, 3, 4$). Определить число решений при условии, что порядок расположения переключателей не имеет значения.

По правилу произведения $K = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4$.

Очевидно, что $m_i \geqslant 2$. Всякая четверка чисел из множества $\{2, 3, ..., 10\}$ является решением. Всего возможно M таких четверок:

$$M = C_9^4 = 126,$$

столько же существует и решений. Наименьшее значение K равно 120 при

$$m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ m_3 = 4,\ m_4 = 5.$$

Наибольшее значение K получается при $m_1 = 7$, $m_2 = 8$, $m_3 = 9$, $m_4 = 10$ и равно 5040. В первом случае выходное напряжение можно устанавливать в пределах от 0 до 119 В, во втором — от 0 до 5039 В с дискретностью, равной 1 В.

Упражнения

1. (EXP). Какое наибольшее напряжение можно установить на выходе схемы (рис. 273), если каждая обмотка имеет не по 4 секции, а по 5?

2. На рис. 273 схема содержит четыре выходные обмотки по четыре секции каждая. Добавим к ним еще одну 4-секционную обмотку и 5-позиционный переключатель. Число значений выходного напряжения возрастет до N (дискретность равна 1 В).

1) (65T). Найдите число N.

2) (ЩАТ). Определите напряжение одной секции добавленной обмотки.

3) (ФРЕ). Укажите позиции, в которые необходимо установить переключатели, чтобы на выходе было 1009 В: $S_{доб}$ = ...; S_1 = ...; S_2 = ...; S_3 = ...; S_4 = ..., где $S_{доб}$ — переключатель, подключенный к добавленной обмотке.

3. (СОФ). Даны пять переключателей, число позиций которых 2, 3, 2, 5, 3. Какое наибольшее напряжение можно получить при помощи схемы, аналогичной рис. 274, если дискретность равна 1 В?

4. (УМЖ). Обмотку v_1 на рис. 273 заменили 6-секционной обмоткой. На сколько вольт возросло максимальное выходное напряжение по сравнению с исходной схемой?

5. (ИЯЗ). На рис. 274 концы обмотки v_1 поменяли местами. Сколько значений напряжения можно установить на выходе, меняя положения переключателей?

6. (314). Сколько различных значений выходного напряжения можно получить (рис. 274), если напряжение обмотки v_2 увеличить до 80 В, а напряжение обмотки v_1 — до 160 В?

7. (ТЕИ). См. условие упр. 6. Какова величина максимального напряжения, которое может быть установлено на выходе схемы (рис. 274)?

8. Пусть на рис. 273 все обмотки одинаковы и напряжение каждой секции равно 1 В. Ответьте на вопросы:

1) (825) какова максимальная величина выходного напряжения, которое может быть установлено при помощи переключателей?

2) (806) сколько существует четырехразрядных пятеричных чисел, каждому из которых соответствует выходное напряжение, равное 2 В?

21.4. ЗАДАЧА О РАСПИСАНИИ ЗАНЯТИЙ

Эта задача относится к особому классу комбинаторных задач, для решения которых не существует простых формул. Решаются они логическими способами с применением тождественных преобразований алгебры логики. Основу этих способов составляет метод Петрика, использованный выше для нахождения всех тупиковых форм булевых функций. Тот же метод был применен и для нахождения всех минимальных функционально полных систем в теме «Теория конечных автоматов». Теперь рассмотрим применение метода Петрика для решения задачи о расписании занятий. Подобные задачи относятся к классу комбинаторных экстремальных задач и называются задачами о покрытии. Их можно решать методами теории трансверсалей [41].

Постановка задачи (сильно упрощенная): даны n уроков, которые ведут m преподавателей в одном и том же классе. Каждый преподаватель сообщает дни и часы, в которые ему удобнее всего проводить занятия. Сколько существует вариантов расписания занятий при условии, что все заявки каждого преподавателя учтены?

Общее решение:

а) все уроки нумеруются подряд за определенный цикл времени (например, за две недели);

б) каждому преподавателю ставится в соответствие определенная буква из некоторого алфавита, например A, B, C, ...;

в) вводятся логические аргументы вида A_i, B_i, C_i, ..., где $i = 1, 2, 3, ..., n$. При этом $A_i = 1$, если преподаватель A ведет i-й по счету урок; $A_i = 0$, если преподаватель A i-й урок не ведет (т. е. ведет какой-либо другой, не i-й урок). Точно так же интерпретируются все остальные логические аргументы;

г) составляется булево уравнение вида

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot ... \cdot \varphi_m = 1,$$

где $\varphi_j (j = 1, 2, ..., m)$ — булева функция, учитывающая условия, высказанные j-м преподавателем относительно дней и часов, в которые ему удобнее всего вести уроки;

д) каждое решение данного уравнения представляет собой определенный вариант расписания. Число всех таких решений является ответом к поставленной задаче.

Пример 1. Составляется расписание пяти уроков. Преподаватели подали заявки: историк изъявил желание вести 1-й урок, либо 4-й, либо 5-й; литератор — 1-й либо 2-й; физик — 2-й либо 3-й; математик — 2-й либо 5-й, химик — какой угодно, но не первый и не последний.

Введем обозначения: И — историк, Л — литератор, Ф — физик, М — математик, Х — химик. Согласно поданным заявкам получаем функции:

$$\varphi_1 = \text{И}_1 + \text{И}_4 + \text{И}_5; \;\; \varphi_2 = \text{Л}_1 + \text{Л}_2;$$
$$\varphi_3 = \text{Ф}_2 + \text{Ф}_3; \;\; \varphi_4 = \text{М}_2 + \text{М}_5; \;\; \varphi_5 = \text{Х}_2 + \text{Х}_3 + \text{Х}_4.$$

Составляем булево уравнение:

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 =$$
$$= (\text{И}_1 + \text{И}_4 + \text{И}_5)(\text{Л}_1 + \text{Л}_2)(\text{Ф}_2 + \text{Ф}_3)(\text{М}_2 + \text{М}_5)(\text{Х}_2 + \text{Х}_3 + \text{Х}_4) = 1.$$

Раскрыв скобки, выполнив все операции поглощения и исключив случаи, когда два преподавателя одновременно ведут один и тот же урок, получим:

$$\text{Л}_1\text{Х}_2\text{Ф}_3\text{И}_4\text{М}_5 + \text{Л}_1\text{Ф}_2\text{Х}_3\text{И}_4\text{М}_5 + \text{Л}_1\text{М}_2\text{Ф}_3\text{Х}_4\text{И}_5 + \text{И}_1\text{Л}_2\text{Ф}_3\text{Х}_4\text{М}_5 = 1.$$

Таким образом, при заданных заявках преподавателей существуют четыре варианта расписания, согласно четырем конъюнкциям, дизъюнкция которых образует данное уравнение. Расшифруем первую конъюнкцию. Если

$$\text{Л}_1\text{Х}_2\text{Ф}_3\text{И}_4\text{М}_5 = 1,$$

то это значит, что первый урок ведет литератор; второй — химик; третий — физик; четвертый — историк; пятый — математик. Аналогично расшифровываются и оставшиеся три конъюнкции.

Пример 2. В условие предыдущего примера внесем изменение: историк и химик не подали заявки, так как они могут вести занятия в любое время. Определим число вариантов расписания.

В этом случае:

$$(\text{И}_1 + \text{И}_2 + ... + \text{И}_5)(\text{Л}_1 + \text{Л}_2)(\text{Ф}_2 + \text{Ф}_3)(\text{М}_2 + \text{М}_5)(\text{Х}_1 + \text{Х}_2 + ... + \text{Х}_5) = 1.$$

Раскрыв скобки, получим восемь вариантов расписания:

$$Л_1Ф_2И_3Х_4М_5 + Л_1Ф_2Х_3И_4М_5 + Л_1М_2Ф_3Х_4И_5 +$$
$$+ Л_1М_2Ф_3И_4Х_5 + Л_1И_2Ф_3Х_4М_5 + Л_1Х_2Ф_3И_4М_5 +$$
$$+ И_1Л_2Ф_3Х_4М_5 + Х_1Л_2Ф_3И_4М_5 = 1.$$

Пример 3. В условие примера 1 внесем следующее изменение: всем преподавателям безразлично время проведения занятий. Найдем все варианты расписания.

Согласно методу Петрика имеем:

$$(И_1 + И_2 + ... + И_5)(Л_1 + Л_2 + ... + Л_5)(Ф_1 + Ф_2 + ... + Ф_5)\&$$
$$\&(М_1 + М_2 + ... + М_5)(Х_1 + Х_2 + ... + Х_5) = 1.$$

Если раскрыть скобки, то получим 120 конъюнкций по пять переменных каждая.

Это число можно найти и другим способом. Запишем в ряд буквы И, Л, Ф, М, Х и припишем к ним индексы 1, 2, 3, 4, 5. Любая последовательность индексов дает вариант расписания. Общее число таких последовательностей равно $5! = 120$, столько же существует и вариантов расписания занятий.

Пример 4. Составляется расписание на шесть уроков. Математик заявил, что ему удобно вести первый урок либо шестой. Физику надо подряд два часа — либо 1-й и 2-й уроки, либо 4-й и 5-й. Литератор сказал, что ему не надо ставить в расписание первые два урока и последний. Историк подал заявку на один из первых трех уроков. Химик отказался от подачи заявки, следовательно, ему безразлично, когда вести занятия. Сколько существует вариантов расписания?

По аналогии с предыдущими примерами составляем уравнение:

$$(М_1 + М_6)(Ф_1Ф_2 + Ф_4Ф_5)(Л_3 + Л_4 + Л_5)\&$$
$$\&(И_1 + И_2 + И_3)(Х_1 + Х_2 + Х_3 + Х_4 + Х_5 + Х_6) = 1.$$

Раскроем скобки:

$$И_1Х_2Л_3Ф_4Ф_5М_6 + М_1И_2Л_3Ф_4Ф_5Х_6 + Х_1И_2Л_3Ф_4Ф_5М_6 +$$
$$+ Ф_1Ф_2И_3Л_4Х_5М_6 + Ф_1Ф_2И_3Х_4Л_5М_6 = 1.$$

Таким образом, всего существует пять вариантов расписания занятий.

Упражнения

1. (Р76)! Составляют расписание занятий на 6 уроков для одного и того же класса. Пожелания преподавателей: математик сделал заявку на первый урок. Физик — на два урока подряд — 4-й и 5-й. Химику, литератору и историку безразлично, когда вести занятия. Сколько существует вариантов расписания? Сколько существует вариантов, в которых химик ведет второй урок?

2. (П67). При составлении расписания химик сказал, что ему необходимы первый урок и шестой. Литератору, историку и математику безразлично, какой по счету вести урок. Физик сообщил, что он возьмет тот урок, какой ему достанется, после того как будут удовлетворены заявки всех других преподавателей. Сколько существует вариантов расписания?

21.5. ЗАДАЧА О ПОДБОРЕ ЭКИПАЖА КОСМИЧЕСКОГО КОРАБЛЯ

Обычно космические путешествия продолжаются весьма длительное время. Для успешного выполнения программы полета крайне желательно, чтобы в команде корабля не было ни одной пары психологически несовместимых космонавтов. В связи с этим экипаж формируют с учетом психологической совместимости будущих участников полета, выбирая на каждую должность по одному человеку из нескольких. Математический аспект этой задачи заключается в следующем: на основе сведений о психологической совместимости претендентов на участие в полете требуется найти число возможных вариантов экипажа и определить их состав. В качестве примера рассмотрим задачу из [7].

Для космического полета составляют экипаж из трех человек: командира, инженера и врача. Командира можно выбрать из четырех человек: a_1, a_2, a_3, a_4; инженера — из трех: b_1, b_2, b_3; врача — также из трех: c_1, c_2 c_3. Если не учитывать психологическую совместимость, то возможно 36 вариантов экипажа. Однако оказалось, что инженер b_1 несовместим с врачом c_3, инженер b_2 несовместим с врачом c_1, инженер b_3 несовместим с врачом c_2 Кроме того, известно, что командир a_1 совместим с инженерами b_1 и b_3 и врачами c_2 и c_3; командир a_2 совместим с инженерами b_1 и b_2 и всеми врачами; командир a_3 совместим с инженерами b_1 и b_2 и врачами c_1 и c_3; командир a_4 совместим со всеми инженерами и врачом c_3. Сколько возможно вариантов экипажа?

Эту задачу можно решить по аналогии с задачей о расписании. Введем логические переменные: $A_1 = 1$, если командир a_1 включен в состав экипажа; если не включен, то $A_1 = 0$. Точно так же вводятся переменные A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3. На основе сведений о совместимости составляем булево уравнение:

$$A_1(B_1 + B_3)(C_2 + C_3) + A_2(B_1 + B_2)(C_1 + C_2 + C_3) +$$
$$+ A_3(B_1 + B_2)(C_1 + \mathrm{C}_3) + A_4(B_1 + B_2 + B_3)C_3 = 1.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$A_1B_1C_2 + A_1B_1C_3 + A_1B_3C_2 + A_1B_3C_3 + A_2B_1C_1 + A_2B_1C_2 +$$
$$+ A_2B_1C_3 + A_2B_2C_1 + A_2B_2C_2 + A_2B_2C_3 + A_3B_1C_1 + A_3B_1C_3 + A_3B_2C_1 +$$
$$+ A_3B_2C_3 + A_4B_1C_3 + A_4B_2C_3 + A_4B_3C_3 = 1.$$

В этом уравнении представлено 17 вариантов экипажа, но условиям задачи они удовлетворяют не все. Например, конъюнкция $A_1B_1C_3$ говорит о том, что в экипаж включен командир a_1, инженер b_1 и врач c_3. Но инженер b_1 несовместим с врачом c_3. Поэтому из уравнения необходимо удалить конъюнкции $A_1B_1C_3$, $A_2B_1C_3$, $A_3B_1C_3$ и $A_4B_1C_3$. Удаляем и конъюнкции $A_2B_2C_1$ и $A_1B_2C_1$ (инженер b_2 несовместим с врачом c_1), а также конъюнкцию $A_1B_3C_2$ (инженер b_3 несовместим с врачом c_2).

Таким образом, согласно заданным условиям существуют 10 вариантов экипажа для космического корабля. Все они представлены в булевом уравнении вида

$$A_1B_1C_2 + A_1B_3C_3 + A_2B_1C_1 + A_2B_1C_2 + A_2B_2C_2 + A_2B_2C_3 +$$
$$+ A_3B_1C_1 + A_3B_2C_3 + A_4B_2C_3 + A_4B_3C_3 = 1.$$

21.6.
ЗАДАЧА О БЕСПОРЯДКАХ

Постановка задачи: дано множество $Z = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Расположим элементы этого множества в определенной последовательности, например, в порядке возрастания их индексов слева направо. Требуется определить, сколько существует перестановок этих n элементов, в которых ни один элемент не занимает своего первоначального места. Каждая из таких перестановок называется беспорядком (точнее, полным беспорядком).

Если $Z = \{a_1\}$, то перестановки невозможны, то есть у синглетона беспорядков нет.

Если $Z = \{a_1, a_2\}$, то существует, кроме исходной, только одна перестановка a_2a_1. Эта перестановка является беспорядком.

Если $Z = \{a_1, a_2, a_3\}$, то всего существует $3! = 6$ последовательностей $a_1a_2a_3$; $a_1a_3a_2$; $a_2a_1a_3$; $a_3a_1a_2$; $a_2a_3a_1$; $a_3a_2a_1$, среди которых два беспорядка $a_3a_1a_2$ и $a_2a_3a_1$.

В [10] дан вывод формулы, позволяющей найти число N всех беспорядков для n элементов. Эта формула имеет вид

$$N = n!\left[(-1)^0\frac{1}{0!}+(-1)^1\frac{1}{1!}+(-1)^2\frac{1}{2!}+(-1)^3\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right] = n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}. \quad (22)$$

Например, если $n = 4$, то по формуле (22) находим:

$$N = 4!\left[(-1)^0\frac{1}{0!}+(-1)^1\frac{1}{1!}+(-1)^2\frac{1}{2!}+(-1)^3\frac{1}{3!}+(-1)^4\frac{1}{4!}\right] =$$
$$= 24\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right) = 12-4+1 = 9.$$

Число N можно выразить и через формулу числа сочетаний:

$$N = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)!.$$

Формула (22) позволяет найти число беспорядков, но сами перестановки, являющиеся беспорядками, по ней найти невозможно. Для их отыскания можно воспользоваться уже хорошо знакомым нам методом Петрика.

Поставим в соответствие элементу $a_1 \in Z$ n логических переменных вида A_i, где $i = 1, 2, ..., n$, со следующей интерпретацией: если элемент $a_1 \in Z$ занимает i-е место в последовательности, то $A_i = 1$ при $i \neq 1$, все остальные аргументы A_i равны нулю. Точно так же вводятся логические аргументы и для других элементов множества Z.

Составляем булево уравнение вида

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \ldots \cdot \varphi_n = 1, \quad (23)$$

где

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1 = A_2 + A_3 + \ldots + A_n;\\ \varphi_2 = B_1 + B_3 + B_4 + \ldots + B_n;\\ \varphi_3 = C_1 + C_2 + C_4 + \ldots + C_n;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_n = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_{n-1}.\end{array}\right\} \quad (24)$$

Заметим, что функция φ_i представляет собой дизъюнкцию $n - 1$ переменных, среди которых отсутствует переменная с индексом i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$).

Согласно введенной интерпретации логических переменных функция φ_1 принимает единичное значение, если элемент $a_1 \in Z$ занимает второе место в последовательности либо третье и т. д. до места с номером n. Если же элемент $a_1 \in Z$ занимает первое место, то $\varphi_1 = 0$, так как при этом $A_2 = A_3 = \ldots = A_n = 0$. Аналогично функция $\varphi_2 = 1$, если элемент $a_2 \in Z$ занимает первое место в последовательности, либо третье, либо четвертое и т. д. до места с номером n. При $B_2 = 1$ (когда элемент a_2 занимает второе место) функция φ_2 равна нулю. Точно так же интерпретируются и все остальные функции $\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_n$.

Рассмотрим пример. Найдем все беспорядки, если

$$Z = \{a, b, c, d\}.$$

Согласно (24) $\varphi_1 = A_2 + A_3 + A_4$. Функция φ_1 равна единице, если элемент a занимает не первое место. Аналогично получаем:

$$\varphi_2 = B_1 + B_3 + B_4;$$
$$\varphi_3 = C_1 + C_2 + C_4;$$
$$\varphi_4 = D_1 + D_2 + D_3.$$

Составляем уравнение:

$$(A_2 + A_3 + A_4)(B_1 + B_3 + B_4)(C_1 + C_2 + C_4)(D_1 + D_2 + D_3) = 1.$$

Раскроем скобки, тогда получим искомый результат:

$$C_1D_2A_3B_4 + C_1D_2B_3A_4 + C_1D_3A_2B_4 + C_2D_1A_3B_4 + C_2D_1A_4B_3 +$$
$$+ C_2D_3A_4B_1 + C_4D_1A_2B_3 + C_4D_2A_3B_1 + C_4D_3A_2B_1 = 1.$$

Воспользовавшись введенной интерпретацией логических переменных, расшифруем полученную запись. Если $C_1D_2A_3B_4 = 1$, то $C_1 = D_2 = A_3 = B_4 = 1$. Отсюда следует, что элемент c занимает первое место, d — второе, a — третье, b — четвертое. Точно так же расшифровываются все конъюнкции. В результате искомый список беспорядков имеет вид:

$$cdab,\ cdba,\ cadb,\ dcab,\ dcba,\ bcda,\ dabc,\ bdac,\ badc.$$

Упражнения

1. (ТХМ). Найдите число всех беспорядков, если упорядоченное множество содержит шесть элементов.

2. (АЙФ). Сколько существует пятизначных чисел, в которых по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, если цифра 1 находится не на первом месте, цифра 2 — не на втором, цифра 3 — не на третьем, цифра 4 — не на четвертом и цифра 5 — не на пятом месте?

3. (412)! Найдите число беспорядков для элементов множеств

$$A = \{\varnothing\}; \quad A = \{\varnothing, 3\}; \quad A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

4. (964). Секретарь подготовил восемь конвертов для восьми различных писем и отправил их по восьми различным адресам. Вскоре выяснилось, что по недосмотру в половине конвертов оказались не те письма. Сколькими способами могла осуществиться такая ситуация?

5. (ВН5). Для десяти различных приборов приготовили десять табличек с названием каждого прибора. Когда таблички прикрепили, оказалось, что названия соответствуют только первым семи приборам, а остальные таблички оказались перепутанными. Сколькими способами могла осуществиться такая ситуация?

6. (Р25). Чтобы передать сообщение, 33 буквы русского алфавита пронумеровали в последовательности 1, 2, 3, ..., 33 и вместо букв стали передавать их номера. Однако в кодирующем устройстве возникла неисправность, и у одной из букв код оказался другим, но не превышающим 33. Сколькими способами это могло произойти?

21.7. ДВОИЧНО-КОДИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Современные ЭВМ работают в двоичной системе счисления. Человек же привык к десятичной системе. Следовательно, все введенные в компьютер десятичные числа (а также другие символы) должны быть представлены в виде двоичных кодов. Эта задача имеет много решений. Ограничимся только двоично-десятичными системами, когда каждая десятичная цифра заменяется определенной комбинацией нулей и единиц.

Различают весовые (взвешенные), невесовые (невзвешенные) и смешанные системы двоичного кодирования десятичных цифр. Основой весовых систем является полином вида

$$N = x_n a_n + x_{n-1} a_{n-1} + \ldots + x_1 a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i,$$

где n — число двоичных знаков, используемых для представления десятичной цифры N; x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — двоичные цифры 0 или 1; a_i — целые положительные коэффициенты (но в общем случае они могут быть не только положительными, но и отрицательными).

Наиболее распространенным является код 8421, в названии которого указаны веса:

$$a_4 = 8,\ \ a_3 = 4,\ \ a_2 = 2,\ \ a_1 = 1.$$

Это обычная двоичная система счисления, где коэффициенты представляют собой степени числа 2. Десятичные цифры в коде 8421 имеют вид

$$0 — 0000,\ \ 1 — 0001,\ \ 2 — 0010,\ \ 3 — 0011,\ \ \ldots,\ \ 9 — 1001.$$

Очевидно, что четыре двоичных знака — это наименьшая длина кода для представления десятичных цифр: если длину кода уменьшить на один разряд, то получится только восемь двоичных трехзначных кодов и две десятичные цифры окажутся незакодированными.

Кроме кода 8421 существует много других весовых двоично-кодированных систем. Некоторые из них приведены в табл. 47. В ее левой колонке, обозначенной «Дес.», записаны кодируемые десятичные цифры.

Таблица 47

Дес.	8421	2421	5211	6311	3321	51111	4311
0	0000	0000	0000	0000	0000	00000	0000
1	0001	0001	0001	0001	0001	00001	0001
2	0010	0010	0011	0011	0010	00011	0011
3	0011	0011	0101	0100	0011	00111	0100
4	0100	0100	0111	0101	0101	01111	0101
5	0101	1011	1000	0111	1010	10000	1010
6	0110	1100	1010	1000	1100	11000	1011
7	0111	1101	1100	1001	1101	11100	1100
8	1000	1110	1110	1011	1110	11110	1110
9	1001	1111	1111	1100	1111	11111	1111

Двоичные коды с различными системами весов разрабатывались с целью упрощения вычислений при машинном выполнении арифметических операций. Но в данном случае этот аспект мы оставим в стороне и все внимание сосредоточим на комбинаторных свойствах кодов.

Во всех весовых кодах единицы показывают, какие веса необходимо сложить, чтобы по двоичному коду определить соответствующую десятичную цифру. Пусть двоичный код в системе 2421 имеет вид 1101. Тогда

$$1101|_{2421} = 2 + 4 + 0 + 1 = 7|_{10},$$

т. е. код 1101 в системе 2421 — это цифра 7 в десятичной системе. Нетрудно заметить, что цифру 7 можно закодировать и другим способом в той же системе 2421:

$$0111|_{2421} = 0 + 4 + 2 + 1 = 7|_{10}.$$

Если в табл. 47 в колонке 2421 код 1101 заменить на 0111, то получится новый вариант кодирования десятичных цифр, отличающийся от исходного кодом цифры 7. Точно так же двумя способами можно закодировать цифры:

2 — 0010 и 1000; 3 — 0011 и 1001; 4 — 0100 и 1010;
5 — 1011 и 0101, 6 — 1100 и 0110.

Таким образом, имеется шесть десятичных цифр, каждую из которых можно закодировать двумя способами. Следовательно, в системе 2421 существует 64 варианта кодирования десятичных цифр.

Рассмотрим код 3321 и определим, сколькими способами можно закодировать десятичные цифры. Один вариант указан в табл. 47. Чтобы найти другие варианты, выясним, какие цифры кодируются неоднозначно. Цифра 3 имеет три способа кодирования: 1000, 0100, 0011; цифра 6 — также три способа: 1011, 0111, 1100; цифра 4 — два варианта: 1001, 0101; цифра 5 — также два варианта: 1010 и 0110. Используя те или иные коды для цифр 3, 4, 5, 6, мы всякий раз будем получать новые варианты кодирования десятичных цифр. Число всех таких способов равно: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

В невесовых системах кодирование осуществляется при помощи таблиц, в которых для каждой десятичной цифры указан двоичный код, в общем случае — по «договоренности». Например, условимся считать, что десятичные цифры кодируются четырехзначными двоичными кодами. Найдем число возможных вариантов такого кодирования. Всего существует 16 различных четырехразрядных двоичных кодов. Любые десять из них можно выбрать для кодирования десятичных цифр. Число R выборок равно:

$$R = C_{16}^{10} = \frac{16!}{10! \cdot 6!} = 8008.$$

В каждой выборке цифру 0 можно закодировать десятью способами. Если для цифры 0 один код использован, то остается девять кодов для цифры 1, восемь кодов для цифры 2 и т. д. Всего таких способов существует 10! = 3628800. Тогда искомое число S всех вариантов кодирования десятичных цифр двоичными четырехзначными кодами (в невесовой системе) равно:

$$S = C_{16}^{10} \cdot 10! = \frac{16!}{6!} = 29059430400 \approx 2{,}9 \cdot 10^{10}.$$

Упражнения

1. (200)! Какие цифры закодированы в системе 5211, если двоичные коды имеют вид

0011, 0111, 1100?

2. (ИВФ)! Какие цифры закодированы в системе 3321, если двоичные коды имеют вид

1010, 1100, 0111?

3. (ББ1)! Сколько двоичных кодов являются неиспользованными в системе 5211? 4311?

4. Какие десятичные цифры могут быть закодированы точно двумя способами в системе:

1) (ЛИЗ) 2421? 3) (441) 5211? 5) (УХО) 6311?
2) (С73) 3321? 4) (УУХ) 4311? 6) (КАЙ) 1215?

5. Сколько существует способов кодирования десятичных цифр в системе:

1) (ПОК) 3321? 3) (ФУ1) 4311? 5) (22Ф) 2481?
2) (777) 5211? 4) (ПРО) 6311? 6) (ТЭЛ) 7421?

6. (ЯС9). Сколько пятизначных двоичных кодов являются неиспользованными в системе 51111?

7. (260). Укажите цифры, которые в системе 51111 кодируются единственным способом.

8. Для системы 51111 определите число способов, которыми могут быть закодированы следующие цифры:

1) (ДДО)! 0, 1, 2; 2) (МАК)! 3, 4, 5, 6; 3) (РУН)! 7, 8, 9.

9. (ЭТЯ). Сколько существует способов кодирования десятичных цифр в коде 51111?

10. (ВТК). Сколькими способами можно закодировать десятичные цифры в невесовом коде «2 из 5» (в каждом таком коде две единицы и три нуля)?

11. (ОЛЛ). Сколько существует невесовых кодов вида «3 из 9» (в каждом коде три единицы и шесть нулей)?

12. (В73). Сколько существует невесовых кодов вида «3 из 12» (в каждом коде три единицы и девять нулей), начинающихся с единицы и оканчивающихся нулем?

13. (В90). Известно, что существует 21 невесовой код вида «m из n». Найдите величины m и n, если в каждом коде нулей меньше, чем единиц.

14. (291). Пусть M — количество невесовых двоичных кодов «m из n», N — количество невесовых двоичных кодов «k из n». Найдите числа k, m, n, если

$$M - N = 5; \quad n + m + k = 11.$$

21.8.
КОД МОРЗЕ

Морзе Самюэл Финли Бриз (1791–1872) — американский художник и изобретатель. В 1837 г. изобрел электромеханический печатающий аппарат для приема сообщений при помощи специального кода, получившего в дальнейшем название кода Морзе.

В коде Морзе используются два знака, условно названные «точка» и «тире», хотя на самом деле оба знака — это черточки, только «точка» в три раза короче, чем «тире». При передаче кодов точки от тире (а также точки от точки и тире от тире) отделяются промежутком, равным «длине» точки. Примеры кодов Морзе:

· Е   – Т   ·· И   – – М   · – А   – · Н   – ·· Д   · – · Р   – – ·· З   – – – – Ш   ·· – ·· Э   и т. д.

Длина кодов Морзе различна. Самый длинный код насчитывает 12 знаков. Это код, обозначающий «начало действия» [36, с. 299]: · – · – · – · – · – · –. Так как кодовые последовательности неодинаковы по длине, то букву от буквы принято отделять промежутком, равным по длине трем «точкам», а слово от слова — пятикратным интервалом. В сущности, эти промежутки представляют собой третий и четвертый знаки кода Морзе, и следовало бы говорить, что в коде Морзе используется не два знака, а четыре. Но мы вполне обойдемся без этих третьего и четвертого знаков, так как будем рассматривать только те коды, для которых достаточно двух знаков.

Самые короткие коды Морзе содержат по одному знаку. Ими кодируются буквы **Е** и **Т**, статистически наиболее употребительные буквы английского языка (во время жизни Морзе). Существуют четыре кода по два знака каждый (буквы **А**, **И**, **М**, **Н**). Тремя знаками кодируются восемь букв, четырьмя — 16 и т. д. Если n — наибольшая длина кода Морзе, то всего существует N кодов:

$$N = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = \sum_{i=1}^{n} 2^i.$$

Запишем число N в виде

$$N = \left(\sum_{i=1}^{n} 2^i + 2^0 \right) - 2^0 = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) - 1 = \sum_{i=0}^{n} 2^i - 1.$$

Число в скобках — это $(n + 1)$-разрядное двоичное число, не содержащее нулей. Если к нему прибавить единицу, то получим двоичное число 100...0, в котором $n + 1$ нулей. Такое число равно 2^{n+1}, следовательно,

$$N = (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n + 1 - 1) - 1 = 2^{n+1} - 2.$$

При $n = 4$ получаем $N = 30$. Для кодирования 26 букв латинского алфавита этого вполне хватает, но совершенно недостаточно для кодирования 33 букв русского алфавита. Поэтому при разработке русского варианта кода Морзе алфавит пришлось немного «упростить»: удалили букву **ё**, заменив ее буквой **е**, и сделали неразличимыми твердый и мягкий знаки. Осталось избавиться еще от одного знака. Однако ни удалить его, ни объединить с какой-либо буквой так же безболезненно, как в первых двух случаях, не удалось. Пришлось одну букву закодировать пятизначным кодом. Это буква **Э**, являющаяся одной из наименее употребительных букв русского алфавита. Она получила код ··–··.

Код Морзе отличается очень большой избыточностью. Если взять за основу таблицу, приведенную в [36], число кодов в которой равно 61, то нетрудно сделать вывод, что, в принципе, вполне можно обойтись кодами, длина которых не превышает пяти знаков, поскольку при $n = 5$ существует 62 кода Морзе. На самом же деле, как было сказано выше, используются коды длиной до 12 знаков. При $n = 12$ существует 8190 кодов, применяется же из них менее одного процента.

Упражнения

1. Сколько существует кодов Морзе, каждый из которых содержит:

1) (ДУФ) 4 знака? 2) (РШФ) 6 знаков? 3) (ОТС)10 знаков?

2. (ЦУФ). Сколько символов можно закодировать кодами Морзе, если длина каждого кода не превышает 4 знака?

3. (322). Сколько знаков можно закодировать кодами Морзе, если в каждом из этих кодов три точки и четыре тире?

4. (ЦАИ). Сколько существует кодов Морзе, начинающихся и оканчивающихся точкой, если в каждом коде четыре точки и пять тире?

5. (985). Сколькими способами можно выбрать 60 кодов Морзе для кодирования 60 букв некоторого алфавита, если длина кода не превышает 5 знаков?

6. (ШТК). 30 букв некоторого алфавита закодированы кодами Морзе, в каждом из которых три тире и четыре точки. Сколько кодов не использовано?

7. (ЯВ7). Буквы алфавита закодированы кодами Морзе, длина которых не превышает 6 знаков. При этом 100 кодов оказались неиспользованными. Сколько букв в алфавите?

21.9. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Каждое неотрицательное целое число в зависимости от количества делителей относится к одному из следующих четырех непересекающихся классов:

1) класс, состоящий из единственного числа 0 (нуль), имеющего бесконечно много делителей;

2) класс, состоящий также из одного числа. Этот класс образует число 1, имеющее только один делитель;

3) класс простых чисел, имеющих точно **два различных** делителя — самого себя и единицу. Например: 7, 11, 13, 17, 19 и т. д.;

4) класс составных чисел, не равных нулю и имеющих более двух делителей. Например, число 30 делится на 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Из этой классификации следует, что единица не относится к простым числам, хотя она делится только на саму себя и единицу. Однако в литературе можно встретить и иные утверждения. Например, в [25, с. 485] говорится, что единица — простое число. Впрочем, это следует воспринимать, скорее, как недоразумение, как досадную оплошность автора книги [25] и недосмотр редакторов, так как трудно поверить, что человек такой математической эрудиции, каким является Николай Иванович Кондаков, может относить единицу к классу простых чисел.

Всякое составное натуральное число единственным способом записывается в виде произведения множителей, каждый из которых является простым числом. Это утверждение представляет собой основную теорему арифметики натуральных чисел (элементарной теории чисел по [44]). Очевидно, что теорема справедлива только в том случае, если единицу не считать простым числом. Иначе верным окажется другое утверждение: всякое натуральное число может быть представлено в виде произведения простых чисел бесконечным числом способов, например:

$$3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = \ldots$$

Множество простых чисел бесконечно. Это теорема Евклида. Ее доказательство можно найти в [9].

Как определить, простым является данное число N или составным? Ответ на этот вопрос дает *теорема*: наименьший простой делитель составного числа a не превосходит $\sqrt{a}.$ Докажем эту теорему.

Пусть p — наименьший простой делитель составного числа a. Тогда $a = pt$, где t — натуральное число, которое может быть и простым и составным. Очевидно, что $p \leqslant t$. Если допустить, что $p > t$, тогда p не будет наименьшим простым делителем. Им окажется число t, если оно простое, либо другой простой делитель, меньший t.

Умножим обе части неравенства $p \leqslant t$ на p. Тогда получим $p^2 \leqslant pt = a$, т. е. $p^2 \leqslant a$, откуда следует, что $p \leqslant \sqrt{a}.$ Теорема доказана.

Из теоремы следует, что если число a не делится ни на одно простое число, не превосходящее $\sqrt{a},$ то число a не имеет простых делителей, меньших a, и является простым числом.

Пример 1. Выясним, сколько потребуется сделать проверок, чтобы определить, является ли простым число 139. Для этого запишем:

$$11 < \sqrt{139} < 12.$$

Отсюда следует, что число 139 необходимо разделить на 2, затем на простые числа 3, 5, 7, 11 — всего пять проверок. Ни на одно из этих чисел заданное число 139 не делится, следовательно, оно является простым.

Пример 2. Пусть $a = 361$. Так как $\sqrt{361} = 19,$ то без всяких проверок ясно, что число 361 является составным, поскольку $361 = 19 \cdot 19$.

Как определить, сколько существует простых чисел в диапазоне от 1 до n? Формулы, позволяющей найти количество простых чисел при заданном n, нет. Но есть алгоритм, обеспечивающий возможность нахождения всех простых чисел из заданного диапазона. В математической литературе этот алгоритм известен под названием решета Эратосфена. (Эратосфен Киренский (276–194 гг. до новой эры) — древнегреческий ученый. Занимался не только математикой, но и географией, астрономией, философией, музыкой. Впервые измерил дугу меридиана [38].)

Используя алгоритм Эратосфена, найдем все простые числа для $n = 70$. Запишем подряд все 70 чисел:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~

Число 1 не является простым, поэтому его вычеркиваем. Переходим к числу 2. Это первое простое число в заданном диапазоне. Вычеркнем все числа, кратные двум: 4, 6, 8, 10, ..., 70. Первое невычеркнутое число (после двойки) — это число 3. Оно является простым. Вычеркнем все числа, кратные трем: 6, 9, 12, 15, ..., 69. После числа 3 первое невычеркнутое число 5 является простым. Вычеркнем все числа, кратные 5: 10, 15, 20, 25, ..., 70. Точно так же поступаем с числами, кратными 7: 14, 21, 28, 35, ..., 70. Процесс продолжаем до тех пор, пока не дойдем до простого числа, которое больше $\sqrt{n}$. В данном случае $n = 70$, следовательно, вычеркивание прекращаем на простом числе 11 (так как $11 > \sqrt{70}$), поскольку вычеркивать нечего: все числа, кратные 11, 13, 17, 19, ..., уже вычеркнуты. Таким образом, невычеркнутыми остались 19 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67.

Почему рассмотренный алгоритм получил такое странное название — решето? В те времена, когда жил Эратосфен, писали на дощечках, покрытых воском, и числа не вычеркивали, а прокалывали. После отыскания всех простых чисел дощечка становилась похожей на решето, откуда и происходит название алгоритма.

Упражнения

1. (УД1). Назовите все простые числа, не превосходящие 10.

2. Укажите простые делители числа a, если:

1) (А31) $a = 35$; 2) (ЛПЗ) $a = 231$; 3) (АНК) $a = 170$.

3. Укажите все простые множители (с учетом их повторов) числа a, если:

1) (ЦПМ) $a = 28$; 2) (ЖДЛ) $a = 250$; 3) (562) $a = 539$.

4. (865)! Укажите наименьшее простое число, являющееся делителем числа:

$$900; \quad 10011; \quad 911121.$$

5. (АУФ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что существуют целые числа, имеющие бесконечно много делителей?

2) существуют ли четные простые числа?

3) может ли простое число оканчиваться цифрой 5?

4) может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?

5) может ли произведение двух простых чисел быть простым числом?

6) является ли простым число $2^{10} - 1$?

7) существуют ли простые числа, разность которых равна единице?

6. (ЦАФ). Сколько простых множителей имеет число 2^{20}?

7. (303). Укажите наименьшие два простых числа, разность которых равна двум.

8. (927). Сколько простых множителей имеет число 6^{15}?

9. (106). Известно, что $a - b = 1$. Найдите числа a и b при условии, что они являются простыми числами.

10. (ОРМ). Сколько двоек в разложении числа 10! на простые множители?

11. (965). Сколько простых множителей в разложении числа 15! на простые множители?

12. (ФАЙ)! См. условие предыдущего упражнения. Сколько раз встречается множитель 2? Множитель 3?

13. (370). Число 16! оканчивается n нулями. Найдите число n.

21.10. ЗАДАЧА О ЧИСЛЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Пусть дано натуральное число $N > 1$. Требуется определить, сколько существует натуральных чисел, каждое из которых делит без остатка число N.

Сплошным перебором легко установить, что, например, число 10 имеет четыре делителя: 1, 2, 5, 10; число 12 имеет шесть делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12; числа, являющиеся квадратом простого числа, имеют по три делителя.

Как найти число делителей натурального числа N, поясним на примере. Пусть $N = 1400$. Разложим его на простые множители:

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

Каждый делитель числа 1400 представляет собой либо отдельное число из семейства (2, 2, 2, 5, 5, 7), либо произведение некоторых из них (возможно, что и всех). Разложение числа 1400 имеет три простых множителя, из которых множитель 2 встречается три раза, множитель 5 — два раза и множитель 7 — один раз.

Разделим все 6 простых множителей на две части подобно тому, как это сделано в задаче о тетрадях (подраздел 21.1). Рассмотрим первую часть. Для выбора числа 2 существует четыре способа (одна двойка, две, три и ни одной), для выбора числа 5 — три способа (одна пятерка, две и ни одной), для числа 7 — два способа (одна семерка и ни одной). Очевидно, что первая часть может быть получена $4 \cdot 3 \cdot 2$ способами, следовательно, искомое число

$$\tau(1400) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24,$$

где $\tau(1400)$ обозначает число делителей натурального числа 1400.

Решив эту задачу сплошным перебором, также получим 24 делителя:

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 40, 50,
56, 70, 100, 140, 175, 200, 280, 350, 700, 1400.

Таким образом, задача о числе делителей решается точно так же, как и задача о тетрадях, рассмотренная в подразделе 21.1. При этом можно пользоваться формулой (20), если принять

$$t_1 = t_2 = ... = t_k = 0.$$

Упражнения

1. Сколько существует делителей числа:

1) (200) 2625; 3) (НАА) 360; 5) (ХОМ) 512;
2) (ЯУЗ) 375; 4) (225) 392; 6) (ЖНН) 23?

2. Перечислите (в порядке возрастания) все делители числа:

1) (594) 14; 3) (МТМ) 25; 5) (ТС1) 8;
2) (К76) 99; 4) (ГДН) 12; 6) (Ю63) 50.

3. Перечислите (в порядке возрастания) все делители, превосходящие 20, числа:

1) (ЕС2) 100; 3) (ОИС) 300; 5) (ЛОГ) 99;
2) (92С) 256; 4) (ЯКИ) 40; 6) (ДЮ7) 70.

21.11. ЗАДАЧА О ВПИСАННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ

В правильный n-угольник вписан треугольник так, что вершины его совпадают с вершинами n-угольника. При этом возможны случаи:

1) две стороны треугольника совпадают с двумя сторонами n-угольника. Обозначим буквой K_1 число таких треугольников;

2) одна сторона треугольника совпадает с одной из сторон n-угольника. Обозначим: K_2 — число таких треугольников;

3) ни одна из сторон треугольника не совпадает ни с одной стороной n-угольника. Число таких треугольников обозначим буквой K_3.

Требуется определить числа K_1, K_2 и K_3.

Решим задачу в общем виде. Пронумеруем вершины n-угольника в последовательности 1, 2, 3, ..., n. Любые три из этих номеров дают один треугольник. Следовательно, всего существует K треугольников, где

$$K = C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Очевидно, что

$$K = K_1 + K_2 + K_3. \quad (25)$$

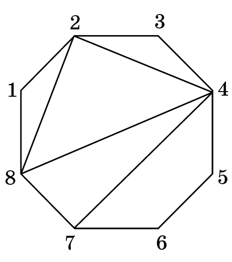


Рис. 275

К первой задаче ответ найти легко. Каждый треугольник, у которого совпадают две стороны со сторонами n-угольника, имеет тупой угол. Примером могут служить треугольники 8–1–2 и 2–3–4 (рис. 275). Вершина при тупом угле треугольника может соответствовать любой вершине n-угольника, следовательно,

$$K_1 = n.$$

Переходим ко второй задаче. Согласно ее условию требуется найти число треугольников, у которых одна сторона совпадает со стороной n-угольника. Примером является треугольник 8–4–7 на рис. 275.

Пусть общей является сторона 3–4. Тогда существует $n - 4$ вариантов построения таких треугольников, поскольку третьей вершиной треугольника не могут быть вершины 2, 3, 4, 5 n-угольника. Если взять другую совпадающую сторону, то получим еще $n - 4$ треугольников. Так как всего у n-угольника n сторон, то

$$K_2 = n(n - 4).$$

Число K_3 можно найти из выражения (25):

$$K_3 = K - K_1 - K_2.$$

Однако в данном случае выражением (25) мы воспользуемся для проверки решений, а число K_3 найдем другим путем.

Запишем в ряд номера вершин n-угольника и каждой вершине поставим в соответствие двоичный разряд. Пусть единица в двоичном числе обозначает, что соответствующая вершина n-угольника является вершиной треугольника, а нуль — данная вершина n-угольника вершиной треугольника не является. Тогда всякому n-значному двоичному числу, содержащему точно три единицы, будет соответствовать определенный вписанный треугольник. Все числа с тремя единицами, из которых никакие две не стоят рядом и не занимают одновременно места младшего и старшего разрядов, будут соответствовать треугольникам, не имеющим общих с n-угольником сторон. Найдем количество этих чисел.

Сначала предположим, что число начинается с нуля и нулем оканчивается. Тогда три единицы могут занимать места среди $n - 2$ разрядов. Всего существует C_{n-4}^3 таких чисел (см. пример 5 подраздела 20.9).

Пусть теперь слева находится единица, справа — нуль. Очевидно, что после левой единицы должен стоять только нуль. Тогда две не стоящие рядом единицы могут занимать места $n - 3$ разрядов. Количество таких чисел выражается числом C_{n-4}^2. Столько же существует чисел, у которых слева находится нуль, а справа — единица.

Таким образом, число K_3 вписанных треугольников, у которых ни одна сторона не совпадает со сторонами n-угольника, равно

$$K_3 = C_{n-4}^3 + 2C_{n-4}^2 = \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{6} + (n-5)(n-4) = \frac{(n-5)(n-4)n}{6}.$$

Проверим, нет ли ошибок в решениях. Для этого в соответствии с формулой (25) сложим все три числа K_1, K_2 и K_3:

$$K_1 + K_2 + K_3 = n + n(n-4) + \frac{(n-5)(n-4)n}{6} =$$

$$= \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = C_n^3 = K.$$

Таким образом, проверка подтвердила правильность найденных чисел K_1, K_2 и K_3.

Упражнения

1. Для случая, когда треугольник вписан в правильный 10-угольник, найдите числа:

1) (28У) K_1; 2) (75А) K_2; 3) (А13) K_3.

2. **(ЮЮГ).** Известно, что существует 165 треугольников, вписанных в правильный n-угольник, у которого точно одна сторона совпадает со стороной треугольника. Найдите число n.

3. **(ФЕМ).** Известно, что существует 800 треугольников, вписанных в правильный n-угольник, у которого ни одна сторона не совпадает со сторонами треугольника. Сколько существует вписанных треугольников, каждый из которых имеет точно одну общую с n-угольником сторону?

4. **(Ц96).** Известно, что существует 210 треугольников, вписанных в правильный n-угольник, у которого ни одна сторона не совпадает со сторонами треугольника. Сколько существует всех треугольников (любых, с совпадающими и несовпадающими сторонами), которые могут быть вписаны в данный n-угольник?

21.12. ЗАДАЧА О РАЗБИЕНИИ ЧИСЛА НА СЛАГАЕМЫЕ

Существуют два варианта этой задачи. В первом предполагается, что слагаемые упорядочены, то есть учитывается последовательность записи слагаемых. Например, выражения $2 + 3 + 1$ и $2 + 1 + 3$ считаются различными. Согласно второму варианту, эти записи являются неразличимыми (одинаковыми).

Решение первой задачи поясним на примере числа 4. Запишем число 4 в виде суммы единиц: $4 = 1 + 1 + 1 + 1$. Каждому знаку «плюс» поставим в соответствие двоичный разряд. Получим трехразрядные двоичные коды. Условимся считать, что нули обозначают суммирование единиц, а единицы отделяют одно слагаемое от другого. Тогда получим все варианты разбиения числа 4 на слагаемые:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

0	0	0	4
0	0	1	3 + 1
0	1	0	2 + 2
0	1	1	2 + 1 + 1
1	0	0	1 + 3
1	0	1	1 + 2 + 1
1	1	0	1 + 1 + 2
1	1	1	1 + 1 + 1 + 1

Рассмотрим, например, код 010. Согласно этому коду первые две единицы в числе 4 необходимо сложить. Получим первое искомое слагаемое — число 2. Последние две единицы в числе 4 также суммируем. Получим второе слагаемое — число 2. Единица в двоичном коде отделяет одно слагаемое от другого. Таким образом, коду 010 соответствует разбиение числа 4 на два слагаемых вида $4 = 2 + 2$.

Рассмотрим код 100. Единица в его записи удаляет первый знак «плюс» в выражении $1 + 1 + 1 + 1$. Следовательно, первое слагаемое — это число 1, второе — число $1 + 1 + 1 = 3$.

В коде 101 две единицы. Они делят число 4 на три слагаемых: $4 = 1 + 2 + 1$ и т. д.

Всего существует $2^3 = 8$ трехзначных двоичных чисел. Столько же существует и способов разбиения числа 4 на слагаемые с учетом порядка их записи, если считать, что само число 4 также является разбиением (ему соответствует код 000).

Если таким же образом разбить на слагаемые число 5, то каждый вариант разбиения представится 4-значным двоичным кодом. Следовательно, число 5 может быть разбито на слагаемые $2^4 = 16$ способами.

Очевидно, что в общем случае число способов разбиения натурального числа n на слагаемые равно 2^{n-1}.

Второй вариант задачи сформулируем следующим образом. Найти все разбиения числа n на слагаемые, сумма которых равна n, при условии, что порядок записи слагаемых не учитывается.

Решение задачи проиллюстрируем на нескольких примерах. При этом, как и в предыдущем случае, условимся считать, что число n также представляет собой вариант разбиения.

Число 1 имеет единственный вариант разбиения в виде самого этого числа.

Число 2 имеет два способа разбиения: 2 и $1 + 1$.

Число 3 разбивается на слагаемые тремя способами: 3; $1 + 2$; $1 + 1 + 1$.

Число 4 — пятью способами:

$$4;\ \ 1 + 3;\ \ 2 + 2;\ \ 1 + 1 + 2;\ \ 1 + 1 + 1 + 1.$$

Далее действия необходимо упорядочить во избежание пропусков и повторов. Сначала будем находить разбиения в виде двух слагаемых, затем — трех и так далее, располагая их в виде колонок. Кроме того, условимся записывать слагаемые так, чтобы они шли в неубывающей последовательности (слева направо). Для простоты записей знаки «плюс» можно не указывать. Тогда получающиеся последовательности можно рассматривать как числа, записанные в некоторой системе счисления. В колонках эти числа должны идти в порядке возрастания.

Начнем с числа 5:

5	14	113	1112	11111
	23	122		

В первой колонке одно число 5. Во второй — два варианта разбиения числа 5, представленные как 14 и 23, что обозначает $1 + 4$ и $2 + 3$ соответственно. В разбиении 14 число 4 можно записать как 13 и 22. Подставим их в 14 и получим третью колонку. Четвертая колонка получена на основе третьей, пятая — на основе четвертой. Таким образом, число 5 может быть разбито на слагаемые следующими семью способами:

$$5;\ \ 1 + 4;\ \ 2 + 3;\ \ 1 + 1 + 3;\ \ 1 + 2 + 2;\ \ 1 + 1 + 1 + 2;\ \ 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Число 7 имеет 15 вариантов разбиения на слагаемые:

7	16	115	1114	11113	111112	1111111
	25	124	1123	11122		
	34	133	1222			
		223				

Здесь, как и в случае числа 5, каждая следующая колонка получена на основе предыдущей путем представления в виде двух слагаемых правой цифры каждого разбиения.

Число 8 разбивается на слагаемые 22 способами:

8	17	116	1115	11114	111113	1111112	11111111
	26	125	1124	11123	111122		
	35	134	1133	11222			
	44	224	1223				
		233	2222				

Аналогичным путем можно найти все разбиения любого натурального числа.

Упражнения

1. Сколько существует способов разбиения на слагаемые числа 5 при условии, что порядок слагаемых учитывается и что каждая сумма начинается:

1) (ЛЕЛ) с единицы (например, 1 + 2 + 2)?
2) (4РИ) с цифры 2 (например, 2 + 3)?
3) (Ж81) с цифры 3?
4) (22Е) с цифры 4?
5) (ТЖТ) с цифры 5?

2. Сколько существует вариантов разбиения на слагаемые числа 8 при условии, что учитывается порядок слагаемых и что каждое разбиение содержит:

1) (ЯИН) три слагаемых?
2) (ЭДИ) пять слагаемых?
3) (ЯД6) четыре слагаемых?
4) (ФКТ) шесть слагаемых?

3. Сколько существует вариантов разбиения на слагаемые числа 5, если учитывается порядок слагаемых и в каждом разбиении содержится хотя бы одна цифра:

1) (ОМЬ) 1? 2) (ОТЬ) 2? 3) (ЫТЬ) 3? 4) (ТН7) 4?

4. Найдите все способы разбиения числа 6 на слагаемые при условии, что порядок записи слагаемых не имеет значения. Определите:

1) (СПШ) число разбиений, имеющих по три слагаемых;
2) (Э7Ю) число разбиений, имеющих более двух слагаемых;
3) (УДК) число всех разбиений.

5. То же самое, что и в упражнении 4, выполните для числа 9. Найдите число:

1) (ЫЛЬ) разбиений, содержащих по три слагаемых;
2) (ЭШО) разбиений, содержащих по четыре слагаемых;
3) (ЙТК) разбиений, содержащих по пять слагаемых;
4) (ЭЖЛ) всех слагаемых.

21.13. ЗАДАЧА О «СЧАСТЛИВЫХ» ТРОЛЛЕЙБУСНЫХ БИЛЕТАХ

Троллейбусные билеты нумеруются шестизначными десятичными числами в пределах от 000000 до 999999, при этом номера могут начинаться с нуля. Условимся считать билет «счастливым», если сумма трех первых цифр (левая сумма) в его номере равна сумме трех последних (правая сумма). Например, номер 430016 является «счастливым», так как

$$4 + 3 + 0 = 0 + 1 + 6,$$

в то время как номер 487220 «счастливым» не является, поскольку

$$4 + 8 + 7 \neq 2 + 2 + 0.$$

Требуется определить число K всех «счастливых» номеров.

Сумма трех десятичных цифр может находиться в пределах от 0 до 27. Обозначим буквой M_i количество трехзначных десятичных чисел, сумма цифр которых равна i, где $i = 0, 1, 2, \ldots, 27$.

Существует единственное трехзначное число (000) с суммой цифр, равной нулю. Следовательно, $M_0 = 1$. Величина M_{27} также равна единице, так как существует лишь одно число с суммой цифр, равной 27. Это 999.

Сумму цифр, равную единице, дают три числа: 001, 010 и 100. Следовательно, $M_1 = 3$. Кроме того, $M_{26} = 3$, так как существует три числа с суммой цифр, равной 26: 998, 989, 899.

Имеется 6 трехзначных чисел, дающих при суммировании их цифр число 2: 002, 020, 200, 011, 101, 110. Следовательно, $M_2 = 6$. Кроме того, $M_{25} = 6$, поскольку существует 6 трехзначных чисел, сумма которых равна 25: 997, 979, 799, 889, 898, 988.

Заметим, что $M_j = M_{27-j}$, где $j = 0, 1, 2, \ldots, 13$. Это позволяет ограничиться вычислением лишь 14 величин M_0, M_1, M_2, ..., M_{13}. Из них M_0, M_1, M_2 уже получены. Для нахождения всех остальных 11 чисел все действия упорядочим подобно тому, как это сделано в предыдущем подразделе. Начинать всегда будем с наименьшего трехзначного числа, располагая цифры в порядке неубывания. После этого для каждого числа найдем число перестановок его цифр и результаты сложим.

Найдем величину M_3. Наименьшим является число 003. Цифру 3 в нем уменьшим на единицу, а средний нуль увеличим на единицу. Получим 012. Число 2 уменьшим на единицу, а вместо нуля запишем единицу. Получим 111. В результате перестановок цифр в числе 003 получим следующие три числа: 003, 030, 300. Перестановки цифр в числе 012 дают 6 новых чисел:

012, 021, 102, 201, 120, 210.

Запишем все это следующим образом:

003 — 3; 012 — 6; 111 — 1,

где слева от черточки расположено число, записанное в порядке неубывания цифр, а справа — число, показывающее, сколько всего существует перестановок цифр этого числа. Все правые числа просуммируем, тогда получим:

$$M_3 = 3 + 6 + 1 = 10,\ \ M_{24} = 10.$$

Переходим к числу 4. $M_4 = 15$ ($M_{23} = 15$), так как

$$004 — 3;\ \ 013 — 6;\ \ 022 — 3;\ \ 112 — 3.$$

Аналогично $M_5 = M_{22} = 21$, так как

$$005 — 3;\ \ 014 — 6;\ \ 023 — 6;\ \ 113 — 3;\ \ 122 — 3.$$

$M_6 = M_{21} = 28$, так как

$$006 — 3;\ \ 015 — 6;\ \ 024 — 6;\ \ 033 — 3;\ \ 114 — 3;\ \ 123 — 6;\ \ 222 — 1.$$

$M_7 = M_{20} = 36$, так как

$$007 — 3;\ \ 016 — 6;\ \ 025 — 6;\ \ 034 — 6;$$
$$115 — 3;\ \ 124 — 6;\ \ 133 — 3;\ \ 223 — 3.$$

Вычисляя таким же образом, получаем:

$$M_8 = M_{19} = 45;\ \ M_9 = M_{18} = 55;\ \ M_{10} = M_{17} = 63;$$
$$M_{11} = M_{16} = 69;\ \ M_{12} = M_{15} = 73;\ \ M_{13} = M_{14} = 75.$$

Таким образом, для всех значений i мы нашли, сколько существует трехзначных десятичных чисел, сумма цифр которых равна i. Теперь найти число всех «счастливых» билетов нетрудно.

Пусть левая сумма равна нулю. Случаю, когда и правая сумма равна нулю, соответствует единственное шестизначное число 000000.

Если левая сумма равна единице, то число «счастливых» билетов равно 9, так как каждой из трех левых сумм можно поставить в соответствие такие же три правые суммы (в соответствии с правилом произведения):

001001;	010001;	100001;
001010;	010010;	100010;
001100;	010100;	100100.

Если левая сумма равна 2, то число «счастливых» номеров равно 100, и т. д. Очевидно, что если левая сумма равна i, то существует i^2 «счастливых» билетов.

Чтобы найти число K, достаточно вычислить сумму

$$K = M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_{27}^2 = 2(M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_{13}^2),$$

подставив найденные значения $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{13}$:

$$K = 2(1 + 9 + 36 + 100 + 225 + 441 + 784 + 1296 + 2025 +$$
$$+ 3025 + 3969 + 4761 + 5329 + 5625) = 2 \cdot 27626 = 55252.$$

Таким образом, всего существует 55252 «счастливых» билетов.

Упражнения

1. (ПАТ). Если сумма цифр, стоящих на четных местах в шестизначном номере троллейбусного билета, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, то такой билет будем считать «счастливым». Сколько существует таких билетов?

2. Сколько существует двухразрядных десятичных чисел, которые могут начинаться с нуля, сумма цифр которых равна:

1) (ОЦЭ) 8? 2) (ОТМ) 10? 3) (57К) 12?

3. Сколько существует 4-значных десятичных чисел, начинающихся с единицы, сумма цифр которых равна:

1) (ФАК) 6? 2) (ЕСО) 7? 3) (ЕЮМ) 8? 4) (АБЫ) 9?

4. Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, в каждом из которых имеются точно две одинаковые цифры и сумма цифр равна:

1) (ЮХ1) 6? 2) (МЫХ) 7? 3) (УЖУ) 8? 4) (ОЖН) 9?

21.14. УПРАЖНЕНИЯ ПО ВСЕМУ КУРСУ КОМБИНАТОРИКИ

1. (УЮФ). Город A связан с городом B n дорогами. Известно, что путешественник может посетить город B из города A 210 способами при условии, что возвращается он по другой дороге. Найдите n.

2. (КБ2). Город A связан с городом B n дорогами. Путешественник решил посетить город B (из города A) два раза, не проезжая за оба путешествия более одного раза по одной и той же дороге как туда, так и обратно. Сколькими способами он может это сделать при $n = 9$?

3. Город A связан с городом B m дорогами, ведущими только из A в B. Кроме того, существует n дорог, которые ведут только из B в A, и k дорог, по которым можно ездить в обоих направлениях.

1) (513). Сколькими способами можно посетить город B (из города A) при $m = 3$, $n = 4$, $k = 5$, если возврат допускается по той же дороге, что и при поездке из A в B (очевидно, это относится только к дорогам, где разрешается двустороннее движение)?

2) (БТЕ). Сколькими способами можно посетить город B при $m = 3$, $n = 4$, $k = 5$, если возврат всегда осуществляется по другой дороге?

4. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составили пятизначное число, в котором цифра младшего разряда является четной, а старшего — нечетной.

1) (МТ6). Сколько существует таких чисел, если цифры могут повторяться?

2) (382). Сколько существует чисел, в которых все цифры разные?

5. (827). Известно, что существует 59049 n-разрядных чисел, которые можно составить из цифр 3, 7, 8. Найдите n, если цифры могут повторяться.

6. (МГМ). Из цифр 2, 3, 5, 7, 8, 9 можно образовать 256 n-разрядных чисел, в каждом из которых старший и младший разряды содержат четные цифры, а все остальные — нечетные. Найдите n, если цифры могут повторяться.

7. (203). Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C ведут три дороги. Сколько различных путей, проходящих через B, ведут из A в C?

8. (УУН). Из алфавита выделили k букв. Известно, что из этих k букв две можно выбрать 136 способами. Найдите k.

9. (КБИ). Сколько минтермов содержится в булевой функции, если она имеет 256 импликант?

10. (ЯГО). Булева функция не определена на n наборах значений аргументов. Всего существует 512 вариантов доопределения функции. Найдите n.

11. (ИТШ). Декартово произведение множеств P, Q, R содержит 418 элементов. Найдите число элементов множеств P, Q, R, если $|P| > |Q| > |R| > 1$.

12. (ПФФ). Если в алгебраическом выражении

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_m)(c_1 + c_2 + ... + c_{10})$$

раскрыть скобки, то получим 1190 отдельных трехсимвольных произведений, соединенных знаками сложения. Найдите m и n, если $m < n$, $m > 1$.

13. (УЮЮ). Каждую десятичную цифру и 33 буквы русского алфавита закодировали n-разрядными двоичными кодами, содержащими по две единицы и по $n - 2$ нулей. Найдите наименьшее значение n.

14. (ОДМ). Множество содержит n элементов. Из этих элементов можно образовать 2046 собственных подмножеств. Найдите n.

15. (ДОН). Найдите x в уравнении $C_x^3 = 364$.

16. (УДЭ). Найдите x в уравнении $(x - 9)! = 40320$.

17. (ЮЖЕ). На щитке прибора имеется n кнопок. Существуют 286 вариантов одновременного нажатия трех каких-либо кнопок. Найдите n.

18. (025). Некоторый алфавит содержит 100 знаков. Каждый знак кодируют n-разрядным двоичным кодом, в котором m единиц. Известно, что $n = 2m$. Найдите наименьшее значение n.

19. (ЕСП). Сколько существует шестизначных троичных чисел, в которых нет нулей и в каждом имеется три единицы?

20. (5ПК). Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры разные и нет цифры «нуль»?

21. (ПТМ). Из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 составили множество всех возможных трехразрядных чисел. Сколько среди них чисел, в каждом из которых хотя бы одна цифра повторяется?

22. (УС. ШУ). На прямой A размещено n точек, на параллельной ей прямой B — m точек. Каждую точку прямой A соединили прямыми отрезками с каждой точкой прямой B. Затем между прямыми A и B параллельно им провели прямую C. Сколько имеется точек пересечения прямой C с отрезками, если через каждую точку пересечения проходит только один отрезок?

23. (985). Сколько существует 7-значных десятичных чисел, в каждом из которых цифра 5 встречается три раза, а цифра 8 встречается четыре раза?

24. (АШО). Русский алфавит содержит 10 гласных букв. Сколькими способами можно составить группы по четыре гласной буквы в каждой, если буквы во всех группах расположены в алфавитном порядке без повторений?

25. (ИНА). Сколько существует булевых функций трех аргументов, содержащих три минтерма?

26. (ЦВЫ). По окружности разместили 8 точек. Каждую пару точек соединили прямой линией. Сколько получилось отрезков, ограниченных этими точками?

27. (АИК). Десять различных книг необходимо разместить на двух полках. На одной есть место для четырех книг, на другой — для шести. Сколькими способами можно разместить эти книги?

28. Вычислите (ответ — обыкновенная несократимая дробь):

1) (ВЦР) $\dfrac{C_3^2}{C_7^3}$; 2) (ПХИ) $\dfrac{C_{10}^4 \cdot C_{10}^6}{(C_{11}^5)^2}$;

3) (ПЕН) $C_n^2 \cdot \dfrac{(n-2)!}{(n-1)! \cdot n}$; 4) (ДАА) $C_m^n \cdot C_{m-n}^3 \cdot \dfrac{n!(m-n-3)!}{m!}$.

29. (ЦАО). В классе n человек. На дежурство необходимо выделить двух человек. Это можно сделать 300 способами. Найдите n.

30. (256). Некто подбросил 15 раз монету. Исход эксперимента он представил в виде упорядоченного ряда нулей и единиц, где единица обозначает: монета упала гербом вниз, а нуль обозначает: монета упала гербом вверх. Сколько возможно различных исходов эксперимента?

31. (ЕИЛ). Исследователь решил выяснить, какие сочетания семи цветов радуги наиболее эстетичны. Для этого он проводил линию одного цвета, а рядом — параллельную другого цвета и оценивал их с позиций своего эстетического восприятия. Сколько у него получилось таких пар, если порядок безразличен?

32. (ЛШТ). Найдите сумму: $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

33. (55С). Дано множество $P = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Сколько существует различных подмножеств, в каждое из которых входят две буквы и две цифры (без повторов)?

34. (ДЕЮ). В октаве семь основных звуков. Аккорд — это одновременное звучание трех и более звуков. Сколько возможно аккордов в пределах одной октавы?

35. (62Н). Сколько существует трехэлементных подмножеств множества всех шестнадцатеричных цифр?

36. (ЦНТ). Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выбрать по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

37. Сколькими способами можно поставить на шашечную доску черную и белую шашки так, чтобы:

1) (005) шашки могли бить друг друга, если белая шашка находится на главной диагонали?

2) (МЛА) белая шашка могла бить черную (учесть особенность боя дамки)?

3) (КЕБ) шашки могли бить друг друга?

4) (984) белая шашка могла бить черную при условии, что белая шашка находится на краю доски (учесть особенность боя дамки)?

5) (ФАМ) белая шашка могла бить черную, если белая шашка находится на главной диагонали?

38. (КВО). Сколько существует вариантов размещения на шашечной доске двух шашек, из которых одна белая, а другая черная?

39. (ТЭМ). Сколькими способами можно разместить на шашечной доске три черные шашки?

40. (449). Сколькими способами можно разместить на шашечной доске три шашки, если белую шашку ставить на крайнее поле, а черные — на любые места?

41. (НА2). Сколькими способами можно поставить на шашечную доску две белые шашки и три черные, если крайние поля не занимать?

42. (282). Найдите число положений белой и черной шашек на шашечной доске, при которых черная шашка располагается в верхней половине доски, а белая — в нижней?

43. (578)! На ферме 20 кроликов и 15 овец. Сколькими способами можно выбрать одного кролика и одну овцу? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами его можно сделать еще раз?

44. (ХРУ). Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата — белый и черный?

45. (ИКЕ). Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

46. Найдите n в следующих уравнениях:

1) (ЛТК) $n(n+1)(n+2) = 990$;
2) (950) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n = 240$;
3) (ОМА) $(n-2)(n-1)n = 720$;
4) (ЭИХ) $(n-1)! = 120$;
5) (ШРК) $(n+1)! = 120$;
6) (ОММ) $(n-8)! = 120$.

47. Упростите:

1) (УРЕ) $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)(k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)}$;

2) (РКУ) $\dfrac{(k-2)! + (k-1)! + k!}{(k-2)!}$;

3) (ФДО) $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)}$;

4) (85Ф) $\dfrac{(n-2)! - 2 \cdot (n-1)!}{3-2n}$;

5) (ИКГ) $\dfrac{3 \cdot (n-1)! + 4 \cdot n!}{2(3+4n) \cdot (n-2)!}$;

6) (УТ2) $\dfrac{\left[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)\right]^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-3) \cdot (n-2)^2}$;

7) (ХНЮ) $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)}$;

8) (ЕЯН) $\dfrac{3k! + 4(k+1)!}{2 \cdot \left[3 + 4(k+1)\right] \cdot (k-1)!}$.

48. (ЗУИ). Сколько пятизначных чисел можно образовать из нечетных десятичных цифр при условии, что ни в одном из чисел повторяющихся цифр нет?

49. (ГАС). Сколько четырехзначных чисел можно образовать из нечетных десятичных цифр при условии, что в каждом из чисел все цифры разные?

50. (ТЭФ). Сколькими способами можно получить различные расположения семи цветов радуги, меняя местами цвета?

51. (ЛЕП). Шестизначное десятичное число может начинаться с цифры 2 либо с цифры 3 и может оканчиваться либо нулем, либо пятеркой, либо девяткой. Сколько существует таких чисел, если в них нет цифры 1 и все цифры разные?

52. (ОЦЛ). Сколько существует четных пятизначных десятичных чисел, если в каждом из них цифры все разные, а цифры четырех старших разрядов представляют собой простые числа?

53. (ФАХ). Из цифр 1, 4, 6, 7, 8, 9 путем их перестановок образовали все возможные шестизначные числа. Сколько среди них нечетных чисел?

54. (ШШИ). Сколькими способами можно записать произведение вида

$$a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot t,$$

состоящее из k множителей, учитывая коммутативность операции умножения?

55. (ТОТ). Найдите x, если $(x!)! = 720$.

56. (ШОТ). Укажите все значения x, при которых справедливо равенство: $x! = (x!)!$

57. (ОХХ)! При каком наименьшем n число $n!$ оканчивается нулем? Назовите это число.

58. (ПТТ). Укажите все цифры, которыми может оканчиваться число $n!$ (цифры ответа упорядочить по возрастанию).

59. (ЛАК). Сколько существует двузначных двенадцатеричных чисел?

60. (ТАУ). Сколько существует восьмизначных десятичных чисел, делящихся без остатка на десятичное число 1000?

61. (00И). Найдите наименьшее значение n, при котором число $n!$ делится на десятичное число 100.

62. (38Я). Сколько существует путей от A до B в шахматном городе (см. рис. 269), если движение по внешним — левым и правым — линиям запрещено и если $n = 4$, $m = 5$?

63. (В50). У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают точно три имени без повторений?

64. (ЛЛГ). Сколько существует различных инициалов имени и отчества, если считать, что с букв **Ё**, **Ы**, **Ъ**, **Ь**, **Й** имена не начинаются?

65. (АНШ). На железнодорожной станции имеется m светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый, зеленый?

66. (КЛК). В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя, секретаря и кассира. Сколькими способами это можно сделать?

67. (ЗАЕ). Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих же языков?

68. (ФУХ). Пусть автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв, после которых идут четыре цифры. Найдите число таких номеров, если используются 32 буквы русского алфавита и 10 цифр. Повторы знаков в номерах возможны.

69. (УХС). Найдите наименьшее значение n, если известно, что число $n!$ делится без остатка на 990.

70. (85Ф). Надо отправить шесть срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если доставку писем осуществляют три курьера и каждое письмо можно дать любому из них?

71. (ЛЯТ). Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 ладьи, ферзь и король) на первом горизонтальном ряду шахматной доски?

72. Сколько существует симметричных n-значных чисел десятичной системы счисления (начинаться с нуля числа не могут), которые одинаково читаются как слева направо, так и справа налево, если

1) (ХТР) $n = 5$? 2) (334) $n = 6$? 3) (ДУМ) $n = 7$?

73. (КВЕ). Сколькими способами можно расставить на полке восемь учебников, из которых три учебника физики, три учебника химии и два учебника истории?

74. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по трем мишеням. Каждый самостоятельно выбирает мишень и делает один выстрел без промаха. Ответьте на вопросы, в скольких случаях:

1) (ХОФ) все стрелки попадут в одну мишень?

2) (УУ2) в одну мишень попадут точно два стрелка?

3) (983) все три мишени будут поражены?

4) (ЮЖИ) точно в одну из мишеней не будет ни одного попадания?

75. Четыре стрелка независимо друг от друга стреляют по шести мишеням. Каждый стрелок самостоятельно выбирает мишень и делает по ней один выстрел без промаха. В результате окажется точно четыре попадания (пробивки). Сколько возможно вариантов выбора мишеней:

1) (ЦДИ) всеми стрелками?

2) (МПК) если два попадания придутся на одну из мишеней и два попадания — на другую?

3) (ИВТ) если без пробивок будут точно 3 мишени?

4) (А50) если без пробивок будут точно 4 мишени?

5) (Я18) если никто не выберет шестую мишень?

6) (ЗАХ) если пробитыми будут первые 4 мишени?

76. (265). Некто забыл последние четыре цифры телефонного номера. Помнит только, что среди них есть два нуля, а остальные цифры разные. Какое максимальное число номеров ему придется набрать, если он попытается дозвониться до абонента путем проб и ошибок? (Минимальное число проб — единица, т. е. если очень повезет, то можно дозвониться сразу.)

77. (866). Вычислите: $C_{12}^0 + C_{12}^2 + C_{12}^4 + C_{12}^6 + C_{12}^8 + C_{12}^{10} + C_{12}^{12}$.

78. (ЦП8)! Для экспедиции выбирают специалистов, знающих иностранные языки. Быть выбранными претендуют пять человек. Назовем их условно A, B, C, D, E. Известно, что английский язык знают три человека — A, C, E, немецкий знают B и D, французским владеют B и E, итальянским — A, D и E, португальским — A, C и D, китайским — B, D и E. Требуется выбрать группу специалистов так, чтобы вместе они знали все шесть перечисленных языков, а при удалении из группы любого специалиста это условие нарушалось. Сколько всего существует таких групп? Сколько человек в минимальной по составу группе? Сколько минимальных групп?

79. (289). По окружности расположены n точек. Из них выделили три рядом стоящие точки и каждую из них соединили отрезками со всеми остальными точками окружности. Выделенные три точки между собой не соединяются. Найдите число точек пересечения, если $n = 12$ и если через каждую точку пересечения проходит только два отрезка.

80. (460). Имеется неограниченное количество монет достоинством в 10, 15 и 20 коп. Сколькими способами можно выбрать 30 монет?

81. (УФ1). Сколькими способами можно разложить по пяти пакетам 12 апельсинов при условии, что ни один пакет не должен быть пустым?

82. (542). Сколькими способами можно расставить 20 одинаковых книг в книжном шкафу с пятью полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

83. (55Р). Сколько существует кодов Морзе, состоящих точно из семи знаков (точек и тире) и оканчивающихся точкой?

84. (ЛБ6). Булева функция имеет 256 способов доопределения. Сколько существует наборов значений аргументов, на которых функция не определена?

85. (ЛОС)! Дано равенство: $55|_6 = 50|_x$. Число 55 записано в шестеричной системе счисления. Найдите основание x системы, в которой записано число 50. То же самое для равенства $55|_6 = 11|_x$.

86. (ЮМТ). Дано равенство $19|_x = 23$. Число 23 записано в десятичной системе. Найдите основание x системы счисления, в которой записано число 19.

87. (СЕБ). Даны равенства: $1010|_x = 101|_y = 10|_z$, где x, y, z — основания систем счисления, в которых записаны соответствующие числа. Найдите наименьшие целые значения x, y, z.

88. (ОЛЕ). Сколько существует шестизначных троичных чисел, содержащих цифру 0 в младшем разряде и цифру 2 — в старшем, а в остальных четырех разрядах могут находиться любые троичные цифры, например 201220, 211101 и т. д.?

89. (229). Симметрическая булева функция f, зависящая от пяти аргументов, имеет a-число, равное двум. Найдите число конъюнкций, образующих минимальную ДНФ (дизъюнктивную нормальную форму) этой функции.

90. Мажоритарная функция f зависит от 9 аргументов $A_1, A_2, ..., A_9$.

1) (МЯФ) сколько вхождений аргументов имеет минимальная ДНФ функции f?

2) (ФИФ) сколько вхождений аргументов имеет минимальная ДНФ ее остаточной функции при $A_1 = 0$?

91. (ЯНО)! Требуется закодировать двоичными кодами 80 знаков некоторого алфавита. Каждый код содержит три единицы, а остальные знаки — нули. Все коды начинаются с единицы. Определите длину кода (то есть число входящих в него двоичных знаков) и число нулей в коде.

92. (МОО). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых нет четных цифр? Повторы цифр разрешены любые, кроме цифры 3. Она встречается точно два раза.

93. (85К). 10-значное двоичное число разделили на две равные части — левую и правую. Сколько существует 10-значных двоичных чисел, в которых слева столько же единиц, сколько справа?

94. (РБХ). Сколькими способами из 10 рабочих можно сформировать две бригады по пять человек в каждой бригаде?

95. (ШЕЗ). Сколькими способами можно составить упорядоченный по цвету ряд, содержащий четыре шара, если всего имеются шесть шаров, из которых составляется ряд: три оранжевых, один фиолетовый, один синий, один красный [9, с. 232]?

96. (ТПИ). Дан ряд цифр: 8, 4, 5, 8, 8, 6. Используя только эти цифры, составляют четырехзначные числа. Сколько всего таких чисел можно составить? (Заметим, что повторяться в числах может только цифра 8.)

97. (АФФ). Дан выпуклый восьмиугольник. В него вписан треугольник так, что вершины треугольника являются вершинами восьмиугольника. Сколько существует таких треугольников?

98. (АЙЦ). На плоскости поставили 12 точек. Через эти точки провели окружности так, что на каждой из них оказалось по три точки из заданных. Центры окружностей образуют множество P. Найдите $|P|$.

99. (Б79). Дан прямоугольник. Внутри него параллельно горизонтальным его сторонам провели восемь прямых. Затем точно так же провели восемь прямых параллельно вертикальным сторонам. Сколько всего прямоугольников в получившейся фигуре [9]?

100. (ЦЫП). На плоскости проведено семь попарно пересекающихся прямых так, что через каждую точку пересечения проходят только две прямые. Сколько треугольников образовано этими прямыми?

101. (ТОО). Назовите три последние цифры, которыми оканчивается сумма

$$10! + 15! + 20!$$

102. (ЕКТ). Дан правильный восьмиугольник с пронумерованными вершинами. В него вписан треугольник так, что его вершины совпадают с вершинами восьмиугольника. Сколько существует треугольников, «привязанных» к вершине 1 восьмиугольника (то есть одна из вершин всех треугольников совпадает с вершиной 1 восьмиугольника)?

103. (2ЕЕ). Сколько существует четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 с повторениями, если каждое число оканчивается двумя нечетными цифрами, а начинается с четной цифры?

104. (КРШ). Сколько существует пятизначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 6 с повторениями, если в трех старших разрядах нет нечетных цифр?

105. (УММ). Сколько существует пятизначных чисел, которые можно составить из цифр 4, 5, 7, 9, если в каждом числе цифра 4 встречается хотя бы один раз, а все остальные цифры могут повторяться?

106. (ЛЛИ). Из цифр 7, 8, 9 составляют пятизначные числа, такие, что в каждом из них точно три одинаковые цифры, а две остальные разные. Сколько существует таких чисел?

107. (ХАН). Сколько существует шестизначных десятичных чисел, в каждом из которых нет цифр 0, 6, 7, 8, 9, если каждое число оканчивается тремя четными цифрами (цифры могут повторяться)?

108. (ФУМ). Сколько существует шестизначных чисел семеричной системы счисления, если в каждом числе нет ни одного нуля и в каждом числе цифра 6 встречается точно 4 раза, а все остальные — не более чем по одному разу?

109. (АОИ). Дано множество {1, 3, 4, 6, 7}. Из его элементов составляют семизначные числа, в каждом из которых цифра 4 встречается точно один раз и точно один раз встречается цифра 7. Сколько существует таких чисел?

110. (ЛВУ). Сколько чисел можно составить, если в каждое число включить точно три раза цифру 7, точно три раза цифру 8 и точно два раза цифру 9, при условии, что других цифр в числе нет?

111. (ЭКШ). Сколько существует четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр десятичной системы счисления без повторов, если в каждом числе нет ни одной из цифр 0, 6, 7, 8, 9 и каждое число без остатка делится на 5?

112. (МЕО). Сколько существует семизначных двоичных чисел, в каждом из которых имеется не менее двух единиц и не менее трех нулей, если числа могут начинаться не только с единицы, но и с нуля?

113. (УТИ). Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, в каждом из которых четные и нечетные цифры чередуются? С нуля числа не начинаются. Повторы цифр возможны.

114. (ББХ). Сколько существует 12-значных двоичных чисел, в каждом из которых единиц в два раза больше, чем нулей, и нули нигде не стоят рядом?

115. (92Я). Сколько существует 18-значных двоичных чисел, если каждое число одинаково читается как слева направо, так и справа налево, и если каждое число начинается с последовательности 1101?

116. (УШС). Из цифр шестеричной системы счисления составляют пятизначные числа. Сколько существует таких чисел, если нуля нет ни в одном числе и если в каждом числе точно две цифры являются четными, которые могут и совпадать, а нечетные встречаются только по одному разу?

117. (ПЕМ). Из всех возможных четырехзначных десятичных чисел, не начинающихся с нуля, удалили все числа, в которых имеется хотя бы одна четная цифра. Сколько чисел осталось?

118. (НУУ). Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, в каждом из которых четных цифр столько же, сколько и нечетных, если числа могут начинаться и с нуля?

119. (ШТС). Сколько существует восьмизначных двоичных чисел, в каждом из которых имеются хотя бы две рядом стоящие единицы?

120. (ХТО). В двоичном числе 101110111101 три единицы необходимо заменить нулями. Сколькими способами это можно сделать?

121. (КЗЛ). В десятичном числе 321475 каждую нечетную цифру решено заменить четной. Сколько получится новых чисел? С нуля числа не начинаются.

122. (АЕН). Сколько существует пятизначных чисел 9-ричной системы счисления, если в каждом числе цифры 1, 3, 4 встречаются точно по одному разу, а на повторы всех остальных цифр ограничений нет? С нуля числа не начинаются.

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ВВЕДЕНИЕ

Первые сведения о графах как о схемах в виде наборов точек (вершин), соединенных между собой какими-либо линиями (ребрами), появились в XVIII веке. Сначала эти сведения были разрозненными и относились главным образом к головоломкам, играм и развлечениям. Но в конце XIX века в связи с развитием топологии значительно возрос интерес к теории графов. В то время она рассматривалась как одна из глав топологии. Однако вскоре обнаружилось, что методы теории графов успешно могут применяться и в других науках — социологии, экономике, биологии, медицине, химии, психологии, а также в различных областях дискретной математики, таких как программирование, теория логических схем и многотактных дискретных автоматов, теория бинарных отношений и т. д.

Как раздел дискретной математики теория графов в последнее время стала самостоятельной наукой и получила такое развитие, что отразить все ее достижения, даже путем краткого их перечисления, в небольшом разделе учебного пособия совершенно невозможно. Например, одно из направлений в развитии теории графов относится к проблеме перечисления графических объектов. И хотя эта проблема является одной из многих, ей посвящено большое число публикаций в виде статей и монографий. Примером может служить книга [45], опубликованная в 1973 году и в 1977 году изданная на русском языке, в которой изложены результаты, достигнутые к тому времени в области перечисления графов. Многие из них представляют не только теоретический, но и практический интерес. Но даже наиболее важные из этих результатов отразить в небольшом по объему разделе не представляется возможным. В связи с этим в данной книге приведены лишь вводные понятия теории графов и рассмотрены наиболее распространенные задачи, решаемые ее методами: определение максимальной пропускной способности транспортной сети, нахождение всех трансверсалей, задача о коммивояжере, отыскание всех простых цепей, соединяющих две точки какой-либо схемы, и др.

В данном разделе приведено 238 упражнений, закодированных в системе кодов информационно-дидактической системы «Символ». Кроме того, к каждому упражнению приведены открытые ответы. Самоконтроль при выполнении упражнений осуществляется точно так же, как и в предыдущих разделах. Выполнять рекомендуется все упражнения. Этим гарантируется минимально необходимая глубина изучения материала, запланированная автором при разработке пособия.

По теории графов и ее многочисленным приложениям существует обширная литература. Примерами могут служить публикации [3; 10; 16; 32, 41, 44, 45] из перечня цитированных источников, а также [2, 3, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21] списка дополнительной литературы. При этом необходимо отметить, что хотя согласно [41] теории графов уже более 270 лет, она все еще является не устоявшейся научной дисциплиной и отличается неупорядоченностью обозначений и терминов. Например, число ребер, выходящих из вершины графа, в [3, с. 11] обозначается символом вида «степ. A», в [10, с. 102] — $d(v)$, в [16, с. 92] — $s(v)$, в [32, с. 163] — $\delta(v)$, в [44, с. 56] — $deg\,(a)$, в [45, с. 22] — $deg\,v$. Существуют и другие обозначения. Если из вершины выходит только одно ребро, то в [16, с. 94; 44, с. 56] эта вершина называется концевой, в [45, с. 79; 32, с. 163] ее называют висячей. Подобных примеров можно привести сколько угодно. Такой разнобой в определениях и обозначениях создает значительные трудности при чтении специальной литературы. В связи с этим в данной книге, кроме принятой в ней системы терминов и обозначений, приводятся некоторые сведения и о том, какие обозначения и термины применяют другие авторы учебников и учебных пособий.

22 ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

22.1. ГРАФ

В общем случае **граф** — это множество V точек, определенным образом соединенных между собой линиями, не обязательно прямыми. Точки множества V называются **вершинами** графа, а соединяющие их линии — **ребрами**. Вершины графа обычно нумеруют десятичными числами, но можно использовать и любые другие знаки. Если вершины пронумерованы, то ребра обозначают неупорядоченными парами номеров вершин. Каждую пару образуют номера тех вершин, которые соединены ребром.

Граф называется **простым** (или **линейным**, согласно [44]), если любые две его вершины соединены не более чем одним ребром и каждое ребро соединяет различные вершины. Пример простого графа приведен на рис. 276.

Всякий простой граф может быть представлен не только в виде рисунка, но и аналитически. Пусть E — множество ребер графа, тогда можно записать (рис. 276):

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\};$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 7\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 7\}\},$$

где E — множество двухэлементных подмножеств множества V, каждое из которых определяет ребро, соединяющее вершины $v \in V$ и $w \in V$.

22.2. ПСЕВДОГРАФ. МУЛЬТИГРАФ

Существуют графы, в которых те или иные пары вершин соединены не одним ребром, а несколькими. Такие ребра называют **кратными** (параллельными). Кроме того, граф может содержать ребра, соединяющие какую-либо вершину

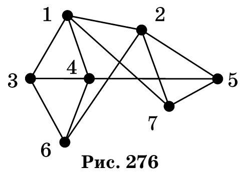


Рис. 276

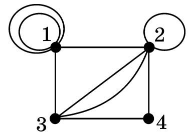


Рис. 277

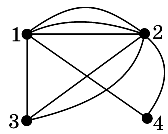


Рис. 278

саму с собой. Такие ребра называются **петлями** (ударение на первый слог во всех формах слова «петля»; лишь в именительном падеже единственного числа допускается ударение на второй слог).

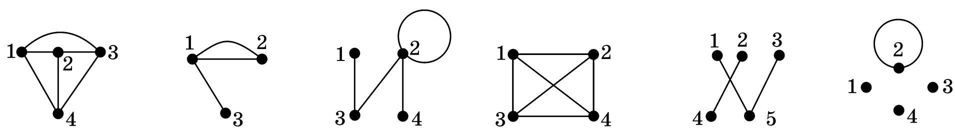
Вершина называется **изолированной**, если у нее нет петель и из нее не выходит ни одного ребра.

Граф, содержащий петли или кратные ребра (или и то, и другое), называется **псевдографом** [10; 32]. Пример псевдографа приведен на рис. 277, где вершина 1 имеет кратные петли, вершина 2 — одиночную петлю, а вершины 2 и 3 соединены кратными ребрами.

Псевдограф без петель называется **мультиграфом** [10; 32]. Пример мультиграфа приведен на рис. 278.

Упражнения

1. (ЦПО). Укажите псевдографы на рис. 279.
2. (У39). Укажите мультиграфы на рис. 279.
3. (ЖРП). Укажите простые графы на рис. 279.



а *б* *в* *г* *д* *е*

Рис. 279

4. (ПКК). На какие вопросы Вы ответите «да»:
1) может ли быть простым граф, содержащий 4 вершины и 8 ребер?
2) может ли граф с одним ребром быть псевдографом?
3) может ли граф быть псевдографом, если в нем нет кратных ребер?
4) может ли граф с одним ребром быть мультиграфом?
5) граф содержит одну вершину. Может ли он быть мультиграфом?
6) граф содержит одну вершину. Может ли он быть псевдографом?
7) граф содержит одну вершину. Может ли он быть простым графом?

22.3.
ПОДГРАФ. НАДГРАФ. ЧАСТИЧНЫЙ ГРАФ

Если из графа G удалить одну или несколько вершин, то будут удалены и выходящие из них ребра. Оставшиеся вершины и ребра образуют **подграф** G' графа G [16]. Очевидно, что для всякого подграфа справедливы утверждения:

$$V' \subseteq V \text{ и } E' \subseteq E,$$

где V и E — множества вершин и ребер графа G; V' и E' — множества вершин и ребер подграфа G'. Из данного определения следует, что всякий граф является подграфом самого себя.

Обратимся к рис. 276. Удалим из графа вершину 1. Вместе с ней удалятся и четыре ребра: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 7\}$. В результате получится подграф, изображенный на рис. 280. Удалим из графа (рис. 276) вершины 4 и 7 (вершину 1 не удаляем). Получим подграф, приведенный на рис. 281.

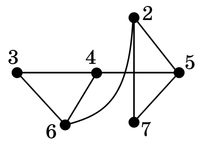


Рис. 280

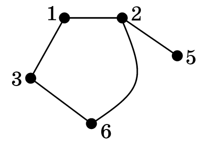


Рис. 281

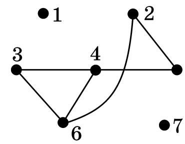


Рис. 282

Удалить из графа G можно и все вершины. Тогда от графа ничего не останется. Граф, не содержащий вершин, называется **пустым** графом. Очевидно, что пустой граф является подграфом любого графа.

Непустой подграф называется **собственным**, если он не совпадает с исходным графом G. Граф G и пустой граф называются **несобственными** подграфами (по аналогии с несобственными подмножествами).

Пусть дан граф G на n вершинах. Добавим к ним одну вершину и соединим ее каким-либо образом с вершинами графа G. Новый граф с $n + 1$ вершинами называется **надграфом** графа G. Например, изображенный на рис. 276 граф является надграфом графа, приведенного на рис. 280.

По заданному графу подграф находится однозначно, то есть, удалив из графа одну или несколько вершин, мы получим единственный подграф. Обратная операция неоднозначна. Пусть в простом графе имеется четыре вершины с номерами 1, 2, 3, 4. Найдем его надграфы, добавив к графу вершину с номером 5. Ее можно соединить с четырьмя вершинами графа различными способами. Чтобы найти их все, поставим в соответствие каждому ребру из множества

$$K = \{\{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$$

двоичный разряд. Пусть ребру $\{1, 5\}$ соответствует старший разряд, ребру $\{4, 5\}$ — младший. Условимся считать, что если в i-м разряде двоичного числа записана единица, то ребро $\{i, 5\}$ содержится в надграфе. Если же записан нуль, то ребро $\{i, 5\}$ в надграфе отсутствует ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда все надграфы окажутся пронумерованными в двоичной системе 0000, 0001, ..., 1111, откуда следует, что всего существует 16 надграфов. Например, двоичному числу 0000 соответствует надграф, состоящий из заданного графа и изолированной вершины с номером 5. Числу 0101 соответствует надграф, состоящий из заданного графа, к которому добавлено два ребра $\{2, 5\}$ и $\{4, 5\}$ и т. д.

В общем случае число надграфов равно $N_1 = 2^n$, если к исходному графу добавлена одна вершина. Каждый из этих N_1 надграфов дает 2^{n+1} надграфов, если добавить вторую вершину. Тогда число надграфов равно:

$$N_2 = 2^n \cdot 2^{n+1} = 2^{2n+1}.$$

При трех добавленных вершинах число надграфов равно:

$$N_3 = 2^n \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{n+2} = 2^{3n+3}$$

и т. д.

Если в графе G все вершины оставить на своих местах и удалить одно или несколько ребер, то получится **частичный** граф. Формально частичный граф определяется следующим образом.

Пусть V и E — множества вершин и ребер исходного графа G. Граф G' называется частичным графом графа G, если

$$V' = V \text{ и } E' \subseteq E \text{ [16].}$$

Согласно этому определению всякий граф является частичным по отношению к самому себе.

Из графа G можно удалить и все ребра. Тогда останется граф, состоящий только из изолированных вершин. Граф, в котором нет ни одного ребра, называется **нуль-графом**.

Удалим из графа (рис. 276) ребра $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 7\}$, $\{2, 7\}$, $\{5, 7\}$. Тогда останется частичный граф (рис. 282). Его аналитическое представление имеет вид:

$$V' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = V;$$
$$E' = \{\{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{4.5\}, \{4,6\}\} \subset E.$$

Как и в случае подграфа, все частичные графы заданного графа можно пронумеровать в двоичной системе счисления, если каждому ребру поставить в соответствие двоичный разряд.

Всего существует 2^k k-разрядных двоичных чисел, где k — число ребер заданного графа. Столько же существует и частичных графов.

Необходимо отметить, что в существующей литературе нет однозначности в определениях понятий подграфа и частичного графа. Например, в [10, с. 102] читаем: «Подграфом графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G». Из этого определения следует, что нахождение подграфа в общем случае осуществляется неоднозначно. Пусть, например, дан граф:

$$V = \{1, 2, 3, 4\}; \quad E = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}\}.$$

Удалим вершину с номером 1. Получим подграф вида

$$V' = \{2, 3, 4\}; \quad E' = \{\{2, 4\}, \{3, 4\}\},$$

удовлетворяющий приведенному в [10] определению. Но ему удовлетворяют и другие графы, например:

$$V' = \{2, 3, 4\}; E' = \{3, 4\};$$
$$V' = \{2, 3, 4\}; E' = \{2, 4\};$$
$$V' = \{2, 3, 4\}; E' = \varnothing.$$

Отсюда можно сделать вывод, что в [10] дано понятие подграфа, совмещенное с вышеприведенным понятием частичного графа.

В определении понятия пустого графа в литературе также нет однозначности. Например в [10, с. 104] дано определение: «Пустым (вполне несвязным) называется граф без ребер».

Таким образом, при чтении специальной литературы необходимо обращать внимание на то, какой системы определений придерживается тот или иной автор, иначе трудности, связанные с пониманием материала, могут стать непреодолимыми.

Упражнения

1. Определите число вершин и число ребер подграфа, построенного на основе графа G (рис. 276) путем удаления из него:

1) (Т51) вершины 4;

2) (452) вершин 1, 5, 6.

2. (384). Сколько различных подграфов можно получить на основе графа, изображенного на рис. 276?

3. Сколько собственных подграфов имеет граф, изображенный:

1) (ТТ5) на рис. 280? 2) (РУК) на рис. 282?

4. (С87). Сколько надграфов имеет граф, содержащий 7 вершин, если в каждом надграфе 8 вершин?

5. (ДИМ). Граф содержит 5 вершин. К этому графу добавили 2 вершины. Получился надграф, содержащий 7 вершин. Сколько возможно таких надграфов?

6. Сколько частичных графов имеет граф:

1) (853) на рис. 276? 2) (В54) на рис. 280? 3) (575) на рис. 282?

7. Сколько существует частичных графов, которые можно получить на основе графа, приведенного на рис. 276, путем удаления из него:

1) (008) одного ребра? 2) (БТН) двух ребер? 3) (Р90) трех ребер?

22.4. СМЕЖНОСТЬ. ИНЦИДЕНТНОСТЬ. СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ

Две вершины $v \in V$ и $w \in V$, где V — множество вершин графа G, называются **смежными**, если они соединены ребром. Например, на рис. 282 смежными являются вершины 3 и 4, 3 и 6, 4 и 6 и др. Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину. На рис. 282 смежными являются ребра $\{3, 4\}$ и $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ и $\{2, 5\}$ и др.

Если вершина является концом ребра, то вершина и ребро называются **инцидентными**. На рис. 282 ребро $\{3, 4\}$ инцидентно вершине 3. Оно инцидентно также и вершине 4.

Число $\rho(v)$ ребер, инцидентных вершине v, называется **степенью** этой вершины. Например, степень вершины 3 (рис. 282) равна 2, степень вершины 4 равна 3.

Степень изолированной вершины равна нулю. Степень изолированной вершины, содержащей одну петлю, равна 2.

Вершина, степень которой равна 1, называется **висячей**. На рис. 281 это вершина 5.

Сумма степеней всех вершин графа есть четное число. Половина суммы степеней всех вершин равна числу всех ребер графа (любого, в том числе псевдографа и мультиграфа). Этим свойством можно пользоваться для определения числа ребер графа. Например, сумма степеней вершин графа, приведенного на рис. 282, равна:

$$\rho(1) + \rho(2) + \ldots + \rho(7) = 0 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 0 = 12,$$

откуда следует, что в графе шесть ребер.

Вершина называется **четной**, если ее степень есть четное число. Вершина называется **нечетной**, если ее степень есть нечетное число.

В любом графе число нечетных вершин четно. Например, нечетными являются четыре вершины 3, 5, 6, 7 графа, приведенного на рис. 276.

Число четных вершин в графе может быть любым — как четным, так и нечетным. Например, на рис. 277 граф имеет четыре четные вершины: 1, 2, 3, 4, а на рис. 282 — пять четных вершин: 1, 2, 3, 5, 7.

Упражнения

1. (ИМФ). Укажите номера всех пар вершин, являющихся смежными (рис. 276):

1) 1 и 2; 2) 1 и 5; 3) 3 и 4; 4) 3 и 5; 5) 1 и 7; 6) 2 и 7; 7) 6 и 7; 8) 2 и 1.

2. (ОС2). Укажите номера всех пар ребер, являющихся смежными (рис. 276):

1) {1, 4} и {2, 5}; 4) {1, 7} и {2, 7};

2) {3, 4} и {4, 5}; 5) {2, 6} и {5, 7};

3) {4, 6} и {2, 6}; 6) {2, 6} и {2, 5}.

3. (ЦАЗ). Укажите номера вершин, инцидентных ребру {2, 6} (рис. 282).

4. Сколько четных и сколько нечетных вершин в графе, изображенном:

1) (ПТ6) на рис. 279, *г*? 3) (УХ8) на рис. 279, *д*?

2) (ИГ7) на рис. 279, *е*? 4) (ЯС9) на рис. 278?

5. Для любого графа можно указать набор степеней его вершин. Например, для графа на рис. 282, такой набор имеет вид 0223230, где 0 — это степень первой вершины, 2 — степень второй вершины, следующая цифра 2 — степень третьей вершины и т. д. Но если набор задан, то построить соответствующий граф не всегда возможно. Укажите из нижеперечисленных номера тех наборов, для которых невозможно построить граф:

1) (П30)	2) (Р61)	3) (ХАЖ)
1) 0 1 1 0 2 3 2	1) 1 1 3 4 5 7 6	1) 1 0 1 4 5 6 7
2) 1 1 1 0 1 3 3	2) 2 2 0 1 0 1 7	2) 1 2 3 4 1 2 3
3) 2 1 3 3 4 4 4	3) 6 9 9 4 1 3 2	3) 0 0 1 0 0 0 0
4) 0 0 1 1 0 1 5	4) 5 6 7 3 3 4 5	4) 2 2 2 1 2 2 2
5) 2 3 3 2 1 3 3	5) 2 6 7 3 3 3 0	5) 0 7 0 7 1 0 7
6) 4 2 1 0 7 3 0	6) 3 0 0 3 0 0 3	6) 2 3 5 6 7 4 2
7) 2 5 5 1 1 1 0	7) 0 0 1 1 0 1 7	7) 3 4 5 4 3 2 1

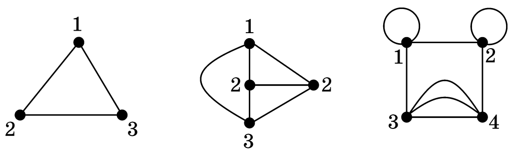
22.5. ОДНОРОДНЫЙ ГРАФ. ПОЛНЫЙ ГРАФ. ДОПОЛНЕНИЕ ГРАФА

Граф называется **однородным**, если степени всех его вершин равны между собой:

$$\rho(1) = \rho(2) = \ldots = \rho(n),$$

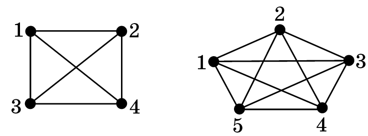
где n — число вершин графа; $\rho(i)$ — степень i-й вершины графа ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Примеры однородных графов приведены на рис. 283.



а *б* *в*

Рис. 283



а *б*

Рис. 284

Сумма степеней всех вершин однородного графа равна ρn, где ρ — степень вершины, n — число вершин. Следовательно, число ребер однородного графа равно:

$$K = \frac{\rho n}{2}.$$

Граф без петель называется **полным**, если каждая пара его вершин соединена одним ребром. Примеры полных графов приведены на рис. 284.

Степень любой вершины полного графа равна $n - 1$, где n — число его вершин, так как каждая вершина соединена ребрами с $n - 1$ остальными вершинами графа. Отсюда следует, что число K ребер полного графа равно:

$$K = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Эту же формулу можно получить иным путем. Так как каждой паре вершин соответствует одно ребро, то число ребер равно числу всех возможных пар, которые могут быть образованы из n вершин. Количество таких пар равно числу сочетаний из n по 2 без повторений:

$$K = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Очевидно, что всякий полный граф является однородным.

Пусть дан неполный граф. Построим на его вершинах полный граф, а затем из полного графа удалим все те ребра, которые входят в заданный граф. Получившийся граф называют **дополнением** заданного графа до полного.

Формально дополнение графа можно определить следующим образом. Пусть G — полный граф, E — множество ребер полного графа; G' — частичный граф полного графа, и пусть E' — множество ребер частичного графа G', E'' — множество ребер полного графа, не входящих в множество E', т. е.

$$E' \cup E'' = E; \quad E' \cap E'' = \varnothing.$$

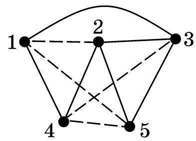


Рис. 285

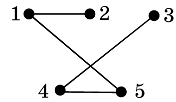


Рис. 286

Тогда граф $\{V, E''\}$ называется дополнением графа G' до полного, где V — множество вершин графа G.

На рис. 285 пунктирными линиями показано дополнение графа G. На рис. 286 дополнение представлено отдельным графом. Дополнением полного графа на n вершинах является нуль-граф (состоящий из n изолированных вершин), а дополнением нуль-графа является полный граф.

Упражнения

1. (НАО). Сколько ребер в однородном графе, если $n = 7$ и $\rho = 6$?

2. (ЮМ. ИА). Найдите числа n и ρ однородного графа, если он содержит 19 ребер.

3. (ФА1). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Возможен ли однородный граф, в котором:

1) пять вершин и степень каждой вершины равна 3?
2) шесть вершин и степень каждой из них равна 4?
3) четыре вершины и шесть ребер?
4) пять нечетных вершин и шесть ребер?
5) семь вершин и степень каждой вершины равна 5?
6) шесть вершин и девять ребер?
7) восемь вершин и степень каждой из них равна 3?

4. (МУШ). В полном графе 18 вершин. Сколько в нем ребер, инцидентных одной вершине?

5. (КРК). Сколько ребер имеет полный граф, если число его вершин равно 10?

6. (ОД6). Полный граф имеет 105 ребер. Найдите число его вершин.

7. (УХ7). Частичный граф полного графа, насчитывающего 12 вершин, имеет 54 ребра. Сколько ребер имеет дополнение частичного графа?

8. (ППЗ)! Из полного графа на 20 вершинах несколько вершин удалили. В оставшемся подграфе стало 66 ребер. Сколько вершин удалено? Сколько ребер удалено?

9. (ХПН)! Степень вершины полного графа равна 7. Из графа удалили несколько ребер так, что степень каждой вершины получившегося частичного графа стала равной 5. Сколько ребер удалили? Сколько ребер осталось?

10. (802). Найдите степень вершины полного графа, имеющего 91 ребро.

11. (УЫФ). В однородном графе степень вершины равна 5. Число ребер равно 35. Найдите число вершин.

12. (ТЭО)! Каждую вершину полного графа G, имеющего 28 ребер, соединили ребром с каждой вершиной полного графа G'. Получился граф, насчитывающий 55 ребер. Сколько вершин в графе G'? Сколько ребер соединяют вершины графа G с вершинами графа G'?

22.6. ОБЪЕДИНЕНИЕ И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГРАФОВ

Объединением графов $G_1 = \{V_1, E_1\}$ и $G_2 = \{V_2, E_2\}$ называют граф вида

$$G = G_1 \bigcup G_2 = \{V, E\},$$

где

$$V = V_1 \bigcup V_2; \;\; E = E_1 \bigcup E_2.$$

Пример, иллюстрирующий операцию объединения графов, приведен на рис. 287. Очевидно, что если $V_1 = V_2$ и $E_1 \subset E_2$, то (рис. 288):

$$G = G_1 \bigcup G_2 = G_2.$$

Если же $V_1 = V_2$ и $E_1 = E_2$, то

$$G = G_1 \bigcup G_2 = G_1 = G_2.$$

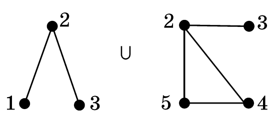


Рис. 287

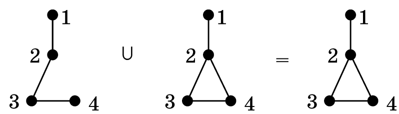


Рис. 288

Пересечением двух графов и G_2 называется граф $G = \{V, E\}$, где

$$V = V_1 \bigcap V_2; \;\; E = E_1 \bigcap E_2.$$

На рис. 289 показано:

$V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$; $E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$;
$V_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $E_2 = \{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$;
$V = V_1 \bigcap V_2 = \{2, 3, 4\}$; $E = E_1 \bigcap E_2 = \{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Из определения следует, что

$$G = G_1 \bigcap G_2 = \varnothing, \text{ если } V_1 \bigcap V_2 = \varnothing,$$

то есть если два графа не имеют одинаково обозначенных вершин, то их пересечение есть пустой граф (рис. 290). Если же

$$V_1 \bigcap V_2 \neq \varnothing, \text{ а } E_1 \bigcap E_2 = \varnothing,$$

то $G = G_1 \bigcap G_2$ есть нуль-граф, множество вершин которого равно $V_1 \bigcap V_2$ (рис. 291).

Очевидно, если $V_1 = V_2$ и $E_1 \subset E_2$, то $G = G_1 \bigcap G_2 = G_1$. Если же $V_1 = V_2$ и $E_1 = E_2$, то $G = G_1 \bigcap G_2 = G_1 = G_2$.

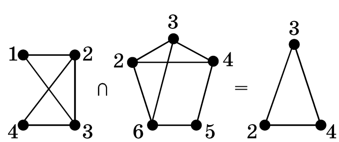


Рис. 289

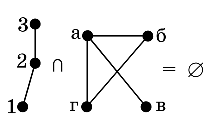


Рис. 290

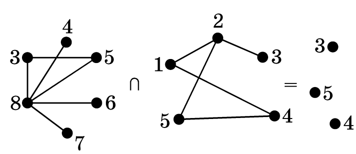


Рис. 291

22.7.
ИЗОМОРФИЗМ

Изоморфизм (на греческом языке *isos* — равный, одинаковый, подобный, *morphe* — вид, форма) в общем случае — соответствие (отношение) между объектами, выражающее тождество их структуры [38]. Термин «изоморфизм» такой же смысл имеет и в теории графов.

Пусть даны два графа G_1 и G_2 с пронумерованными вершинами. Такие графы называются **помеченными**. Если вершинам v_i и v_j, соединенным ребром в графе G_1, соответствуют те же вершины, соединенные ребром в графе G_2, и если вершинам v_i и v_j, не соединенным ребром в графе G_1, соответствуют те же вершины, не соединенные ребром в графе G_2 (i, $j = 1, 2, ..., n$, где n — число вершин), то такие графы называются изоморфными.

На первый взгляд может показаться, что изоморфизм и равенство графов — это одно и то же. На интуитивном уровне так оно и есть. На самом деле все гораздо сложнее.

Например, равны ли графы на рис. 292? Они и внешне не похожи, и нумерацией вершин отличаются, то есть нет оснований утверждать, что эти графы равны. Но они изоморфны. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вершины обоих графов. Вершина 1 графа G_1 соединена с вершинами 2, 3, 6, 7. Вершина 1 графа G_2 соединена с теми же вершинами 6, 2, 7, 3. Вершина 2 графа G_1 соединена с вершинами 1, 3, 4, 7. Те же соединения имеет и вершина 2 графа G_2 и т. д.

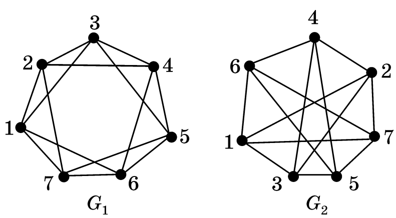


Рис. 292

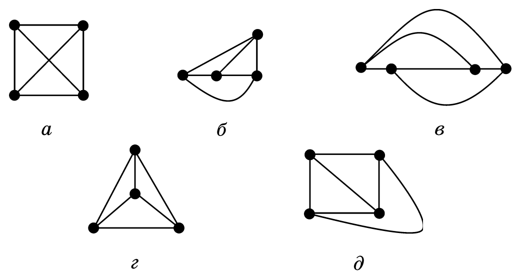


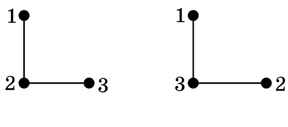
Рис. 293

В связи с тем, что понятия изоморфизма и равенства графов имеют много общего, некоторые авторы вообще не используют термин «изоморфизм», ограничиваясь интуитивно ясным понятием равенства графов [3]. В данном же пособии в основном используется понятие изоморфизма (за редким исключением), так как интуитивного представления о равенстве графов не всегда достаточно.

Неясности с изоморфизмом и равенством графов в основном связаны с различной нумерацией их вершин.

Например, на рис. 293 все пять графов представляют собой полный граф с четырьмя вершинами. Все они удовлетворяют определению изоморфизма независимо от способа нумерации вершин.

Иное дело графы, изображенные на рис. 294. Интуитивно ясно, что графы *a* и *b* — это один и тот же граф и, следовательно, они равны. Однако в первом графе вершины 1 и 3 не соединены ребром, а во втором — соединены.



а *б*

Рис. 294

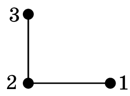
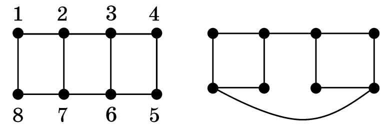


Рис. 295



а *б*

Рис. 296

Следовательно, графы не равны. Но они изоморфны. Чтобы убедиться в этом, пронумеруем вершины графа (рис. 294, *б*) так, как показано на рис. 295. Теперь изоморфизм графов, изображенных на рис. 294, очевиден.

Пусть графы G_1 и G_2 имеют одинаковое число вершин со степенью 0, одинаковое число вершин со степенью 1, одинаковое число вершин со степенью 2 и т. д. Очевидно, что лишь такие графы могут быть изоморфными. Но чтобы установить их изоморфизм, необходимо пронумеровать в них вершины и проверить, выполняются ли условия изоморфизма (по его определению). Если да, то графы изоморфны, если нет, то в одном из графов необходимо сменить нумерацию вершин и снова проверить условия изоморфизма.

В общем случае возможно до $n!$ таких проверок, где n — число вершин графа. Если в результате всех $n!$ проверок не обнаружится ни одного варианта, удовлетворяющего условиям изоморфизма, то эти графы являются неизоморфными. Например, на рис. 296 изображены графы *а* и *б*, у которых одинаковое число вершин, одинаковое число ребер, одинаковое число вершин со степенью 2, одинаковое число вершин со степенью 3. Но если перебрать все 8! вариантов нумерации вершин графа *б*, то среди них не найдется ни одного варианта, удовлетворяющего требованиям изоморфизма. Следовательно, эти графы неизоморфны.

Упражнения

1. (РКФ). Укажите номера графов (рис. 297), являющихся изоморфными графу, приведенному на рис. 298.

2. (ООМ). Укажите номера вопросов, на которые Вы дадите утвердительные ответы:

1) могут ли быть изоморфными графы, не содержащие ребер?

2) даны два полных графа с одинаковым числом вершин. При всякой ли нумерации вершин сохраняются условия изоморфизма этих графов?

3) даны два однородных графа с одинаковым числом вершин. Всякая ли нумерация вершин этих графов удовлетворяет условиям изоморфизма?

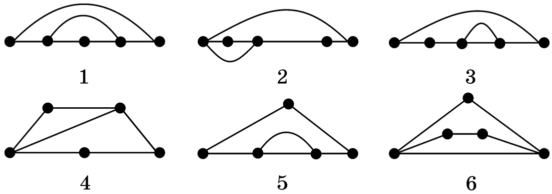


Рис. 297

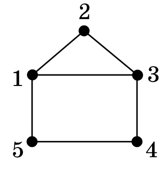


Рис. 298

4) применимо ли понятие изоморфизма к псевдографам?

5) может ли непустой граф быть изоморфным своему собственному подграфу?

6) может ли частичный граф быть изоморфным нуль-графу на том же числе вершин, что и частичный граф?

7) является ли изоморфизм отношением эквивалентности?

8) могут ли быть изоморфными графы, содержащие различное число вершин?

9) могут ли быть изоморфными простые графы, содержащие различное число ребер?

22.8. МАТРИЦЫ СМЕЖНОСТИ И ИНЦИДЕНТНОСТИ

Матрица смежности — это еще один способ задания графов. Матрица смежности представляет собой квадратную таблицу размерами $n \times n$, где n — число вершин графа. Строкам и колонкам матрицы ставятся в соответствие вершины, а на пересечениях строк и колонок записываются числа, показывающие, сколько ребер соединяют соответствующие вершины графа.

Построение матрицы поясним на примере графа, приведенного на рис. 299. В графе шесть вершин, следовательно, матрица смежности имеет шесть строк и шесть колонок (см. рис. 300). Вверху проставлены номера колонок, слева от матрицы — номера строк. В первой строке слева записан нуль. Это значит, что вершина 1 не имеет петли. Справа от нуля записано число 3. Оно говорит о том, что вершины 1 и 2 соединены тремя кратными ребрами и т. д.

При помощи матрицы смежности легко определить степень любой вершины. Для этого достаточно сложить все числа в соответствующей строке (или колонке) и добавить к результату число, находящееся на пересечении данной строки с главной диагональю. Например, степень вершины 4 равна $(1 + 2 + 2 + 1) + 2$, где выражение в скобках представляет собой сумму всех чисел четвертой строки, а последнее слагаемое — это диагональное число строки 4.

Если найти сумму всех чисел матрицы (вместе с диагональными), прибавить к ней сумму всех диагональных чисел и результат разделить на два, то получим число всех ребер графа. Например, для графа, изображенного в виде матрицы на рис. 300, получаем:

$$(3 + 1 + 2 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 +$$
$$+ 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1) + (2 + 1 + 1) = 34,$$

где в первом скобочном выражении представлена сумма всех чисел матрицы, во втором — сумма диагональных чисел. Разделив число 34 на два, находим, что граф, представленный матрицей (рис. 300), имеет 17 ребер.

Для построения матрицы смежности подграфа в исходной матрице достаточно удалить i-ю строку и i-й столбец ($i = 1, 2, \ldots, n$; i — номер удаляемой вершины; n — число вершин графа). Например, если требуется найти матрицу

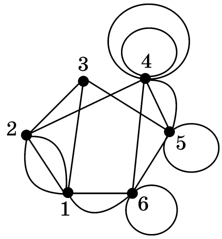


Рис. 299

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	0	0	2
2	3	0	1	1	0	0
3	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	2	2	1
5	0	0	1	2	1	1
6	2	0	0	1	1	1

Рис. 300

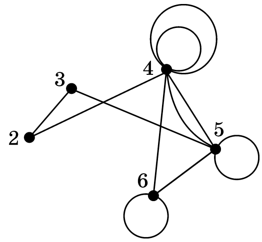


Рис. 301

	2	3	4	5	6
2	0	1	1	0	0
3	1	0	0	1	0
4	1	0	2	2	1
5	0	1	2	1	1
6	0	0	1	1	1

Рис. 302

смежности подграфа путем удаления вершины 1 (рис. 300), то, вычеркнув строку 1 и колонку 1, получим граф, изображенный на рис. 301, и матрицу смежности (рис. 302).

Непосредственно по матрице смежности легко определить, какой это граф — простой, мультиграф или псевдограф. Если в матрице кроме нулей и единиц нет никаких других чисел и всю главную диагональ занимают нули, то граф является простым. Если во всей главной диагонали записаны нули, а в других позициях матрицы встречаются числа, превосходящие единицу, то граф является мультиграфом. Если в главной диагонали имеются числа, не равные нулю, то граф содержит петли и, следовательно, является псевдографом.

	{1,2}	{1,3}	{1,5}	{2,3}	{3,4}	{4,5}
1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	1	0	0	1

Рис. 303

На рис. 303 показана матрица **инцидентности** для графа на рис. 298. В этой матрице для каждого ребра указаны инцидентные вершины. Строкам матрицы поставлены в соответствие номера вершин, колонкам — ребра графа. Вершина 1 инцидентна трем ребрам: {1, 2}, {1, 3}, {1, 5}, поэтому на пересечении строки 1 с первыми тремя колонками записаны единицы. Точно так же заполнены и остальные строки матрицы.

В графе могут быть кратные ребра и петли. В таких случаях в матрице инцидентности необходимо предусматривать отдельные колонки для каждого ребра и для каждой петли. Например, в графе на рис. 304 всего десять ребер (вместе с петлями). В соответствии с этим матрица инциденций содержит десять колонок (рис. 305).

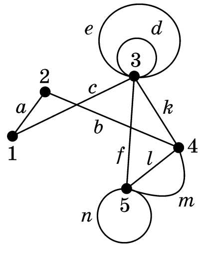


Рис. 304

	a	b	c	d	e	f	k	l	m	n
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	2	2	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1	2

Рис. 305

Петли в матрице удобно обозначать цифрой 2, так как при этом легко определяются степени вершин: достаточно найти сумму всех чисел какой-либо строки. Эта сумма и будет равна степени соответствующей вершины. Например, степень вершины 3 (рис. 305) равна 7:

$$\rho_3 = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7.$$

Так же легко найти матрицу инцидентности для дополнения заданного графа. Для этого достаточно построить матрицу, содержащую те же строки, а колонкам поставить в соответствие только те ребра, которые не входят в исходную матрицу, но входят в множество ребер полного графа (на тех же вершинах).

И вообще представление графов в виде матриц инцидентности значительно упрощает выполнение операций над графами (например, пересечения и объединения).

В завершение подраздела заметим, что матрица инцидентности является более информативной по сравнению с матрицей смежности, так как передает всю информацию о графе без каких-либо потерь. Например, в матрице смежности при наличии кратных ребер указывается только их количество, а сами ребра являются неразличимыми, в то время как в матрице инцидентности указывается каждое из кратных ребер.

Более подробные сведения о матричном представлении графов можно найти в [16; 32].

Упражнения

1. (795). Укажите номера простых графов (рис. 306).

2. (РЦХ). Укажите степени вершин графа 2 (рис. 306) в порядке их нумерации.

3. (731). Укажите номера графов, являющихся частичными по отношению к графу 4 (рис. 306).

4. (153). Укажите номера псевдографов (рис. 306).

	1	2	3	4
1	1	0	1	1
2	0	1	1	1
3	1	1	1	0
4	1	1	0	1

1

	1	2	3	4
1	0	0	0	2
2	0	0	3	0
3	0	3	0	0
4	2	0	0	0

2

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	2	0	0
3	0	0	2	0
4	0	0	0	1

3

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

4

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	1	0	1	0
3	0	1	0	1
4	1	0	1	0

5

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	0	1
3	1	0	0	1
4	0	1	1	0

6

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	0	0	0	1
3	1	0	0	0
4	0	1	0	0

7

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1

8

	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	0	1	0	1
3	1	0	1	0
4	0	1	0	1

9

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

10

Рис. 306

5. (В54). Укажите номера мультиграфов (рис. 306).

6. (АЙК). Укажите номера графов (рис. 306), являющихся частичными по отношению к графу 8.

7. (ГУЛ). Укажите номера вопросов, на которые Вы дадите утвердительные ответы. Верно ли, что (рис. 306):

1) граф 7 является дополнением графа 5?

2) граф 9 является дополнением графа 5?

3) граф 8 является полным графом?

4) граф 4 является полным графом?

5) матрица, во всех позициях содержащая нули, представляет нуль-граф?

6) матрица, во всех позициях содержащая нули, представляет пустой граф?

7) матрица, во всех позициях содержащая единицы, представляет полный граф с петлями?

8. (ДУМ). Укажите вершины, инцидентные ребру a (рис. 307).

	a	b	c	d	e	f	k	l	m	n
1	1				2				1	2
2		1								
3			1	2		1	1			
4		1	1				1	1	1	
5	1					1		1		

Рис. 307

9. (ОУН). Укажите номера вершин, содержащих петли (рис. 307).

10. (ЮАЮ). Укажите номера вершин, степень которых нечетна (рис. 307).

11. (ЦНП). Укажите висячие вершины (рис. 307).

12. (КТВ). Сколько колонок в матрице инцидентности полного графа на десяти вершинах?

13. (НАЖ). Сколько колонок содержит матрица инцидентности дополнения графа (рис. 303)?

23 СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

23.1. МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ

Пусть граф G содержит множество V вершин и множество E ребер. Маршрутом длины n называется непустая последовательность n ребер вида

$$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \ldots, v_n, e_n, v_{n+1}, \tag{1}$$

где ребро e_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) соединяет вершины v_j и v_{j+1} [32, с. 165]. Очевидно, что в последовательности (1) одни и те же вершины могут повторяться. (В [44, с. 57] вместо термина «маршрут» используется слово «путь».) Примеры маршрутов (см. рис. 308):

$$1\ e_1\ 2\ e_4\ 3\ e_6\ 3\ e_2\ 2\ e_1\ 1; \tag{2}$$
$$2\ e_2\ 3\ e_3\ 2\ e_4\ 3\ e_7\ 4; \tag{3}$$
$$4\ e_8\ 1\ e_5\ 3\ e_6\ 3\ e_7\ 4\ e_7\ 3$$

и т. д. В каждой из этих последовательностей вершины обозначены цифрами, ребра — буквой e с числовыми индексами.

Маршрут называется **цепью**, если в нем нет повторяющихся ребер. Примером может служить маршрут (3).

Цепь называется **простой**, если в ней нет повторяющихся вершин (лишь первая и последняя вершины могут совпадать). Примеры простой цепи (см. рис. 308):

$$1\ e_5\ 3\ e_4\ 2;\ \ 2\ e_2\ 3\ e_7\ 4\ e_8\ 1.$$

Маршруты, цепи и простые цепи могут быть **замкнутыми** и **разомкнутыми**. В замкнутых маршрутах (а также цепях и простых цепях) начальная и конечная вершины совпадают, в разомкнутых — не совпадают. Примером замкнутого маршрута является (2).

Замкнутая цепь называется **циклом**. Пример (рис. 308):

$$2\ e_2\ 3\ e_7\ 4\ e_8\ 1\ e_5\ 3\ e_4\ 2.$$

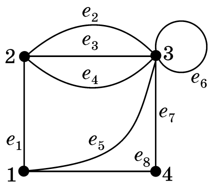


Рис. 308

Простая замкнутая цепь называется **простым циклом**. Примеры (рис. 308):

$$2\ e_2\ 3\ e_5\ 1\ e_1\ 2;\quad 3\ e_2\ 2\ e_3\ 3;\quad 3\ e_6\ 3.$$

В случае простых графов (не содержащих петель и кратных ребер) для обозначения маршрутов, цепей и циклов можно использовать только номера вершин. Такое представление маршрутов называется **вершинным**. Поясним это при помощи графа, представленного на рис. 309:

- маршрут: 1, 2, 6, 3, 6, 5;
- цепь: 2, 3, 6, 5, 2, 1, 4;
- цикл: 6, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 6;
- простая цепь: 1, 2, 3, 5, 6;
- простой цикл: 2, 3, 5, 6, 2.

Число ребер, входящих в цепь, называется **длиной цепи** или **расстоянием** между соответствующими вершинами. Например, цепь 1, 2, 3, 5, 6 (рис. 309) содержит четыре ребра, следовательно, расстояние между вершинами 1 и 6, а также длина цепи равны 4.

Очевидно, что во всякой простой цепи, заданной последовательностью вершин (вершинное представление цепи), число номеров вершин на единицу больше числа ребер, образующих эту цепь.

Упражнения

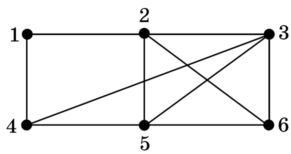


Рис. 309

1. В нижеприведенном списке укажите (рис. 309):
1) (600) маршруты;
2) (961) замкнутые маршруты;
3) (Г52) цепи;
4) (794) циклы;
5) (627) простые цепи;
6) (788) простые циклы.

1) $2\ e_3\ 3$;	4) $3\ e_7\ 4\ e_8$;	7) $e_4\ 3\ e_7\ 2\ e_4$;
2) $1\ e_8\ 4\ e_7\ 3\ e_7\ 4\ e_8\ 1$;	5) $3\ e_6\ 3$;	8) $1\ e_5\ 3\ e_7\ 4$;
3) $2\ e_2\ 3\ e_6\ 3$;	6) $2\ e_4\ 3\ e_2\ 2$;	9) $1\ e_5\ 3\ e_7\ 4\ e_8\ 1$.

2. В списке, приведенном в упр. 1, укажите:
1) (В72) последовательности, не являющиеся маршрутами;
2) (885) простые цепи длины 1;
3) (196) цепи длины 2;
4) (833)! простой цикл наибольшей длины. Укажите длину этого цикла.

3. В нижеприведенном списке укажите (рис. 309):

1) (РЕФ) маршруты;	4) (УЗС) циклы;
2) (У92) замкнутые маршруты;	5) (88Ш) простые цепи;
3) (УТК) простые циклы;	6) (ОЖУ) цепи.

1) 3, 4, 5, 3, 6, 3;	4) 2, 6;	7) 2, 3, 6, 2, 3, 6, 2;
2) 1, 2, 3, 4, 1;	5) 3, 5, 4, 3;	8) 3, 3;
3) 5;	6) 2, 6, 2, 6, 2;	9) 3, 4, 5, 2, 3.

4. (347). Укажите номера вопросов, на которые Вы дадите утвердительные ответы:

1) может ли последовательность, обозначающая маршрут, начинаться номером ребра и оканчиваться номером вершины?

2) может ли цепь состоять из одного ребра (и двух вершин)?

3) может ли простой граф содержать цикл, состоящий из одного ребра?

4) существуют ли маршруты в нуль-графе, множество вершин которого не является синглетоном?

5) верно ли, что если граф содержит одну вершину и не является нуль-графом, то он содержит цикл?

6) верно ли, что если простой граф состоит из двух вершин и не является нуль-графом, то в нем нет циклов?

7) могут ли в цикле повторяться вершины?

8) верно ли, что если в графе нет циклов, то в нем число ребер равно числу вершин?

9) может ли простая цепь (при вершинном ее представлении) содержать повторяющиеся вершины?

23.2. СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

Понятие связности относится к одному из наиболее важных понятий теории графов.

Две вершины v и w графа называются **связными**, если существует соединяющая их цепь. Если же в графе нет ни одной цепи, соединяющей вершины v и w, то вершины v и w называются **несвязными**. Например, вершины 1 и 5 (рис. 310) связны, так как их соединяет цепь 1, 7, 6, 5 (а также 1, 7, 2, 5; 1, 7, 6, 2, 5 и 1, 7, 2, 6, 5), а вершины 2 и 3 связными не являются, так как ни одна цепь их не соединяет.

Граф называется **связным**, если каждые две его вершины связны. Если же в графе имеется хотя бы одна пара вершин, не соединенных цепью, то граф называется несвязным.

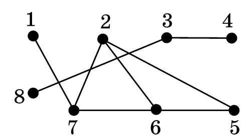


Рис. 310

Согласно этим определениям граф, изображенный на рис. 309, является связным, а граф, приведенный на рис. 310, — несвязным, так как несвязными являются вершины 7 и 8, 7 и 3 и др.

Отношение связности вершин v и w является рефлексивным (всякая вершина, имеющая петлю, связна сама с собой), симметричным (если вершины v и w связны, то связны и вершины w и v), транзитивным (если вершины v и w связны и связны вершины w и t, то связны и вершины v и t), следовательно, множество связных вершин образует класс эквивалентности. Классы эквивалентности, из которых состоит несвязный граф, называются его **компонентами**. (Необходимо заметить, что согласно нормам современного русского языка это слово относится к категории мужского рода [38]. Однако в математической литературе оно считается словом женского рода [10; 16; 32; 41; 44]. В данном пособии также

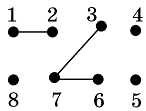


Рис. 311

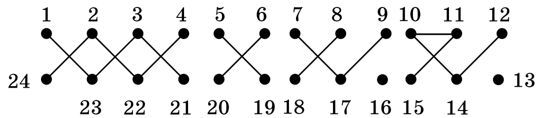


Рис. 312

принято считать, что оно относится к женскому роду.) Число компонент, из которых состоит граф, называется **степенью связности**. Граф, изображенный на рис. 310, имеет степень связности, равную 2. Степень связности графа, приведенного на рис. 311, равна 5.

Упражнения

1. (ОЖФ). Укажите степень связности графа (рис. 312).

2. (ВРХ)! Определите степень связности подграфа, построенного на основе рис. 310 путем удаления из графа вершин 3 и 7; путем удаления из него вершин 2, 3, 6, 7.

3. Ниже дан список графов, заданных множествами их ребер. Каждый граф содержит 6 вершин. Укажите номера графов:

(ЭЕЕ) трехкомпонентных;

(ФС9) четырехкомпонентных:

1) {{1, 2}, {2, 6}, {3, 4}};
2) {{1, 5}, {3, 5}};
3) {{1, 2}, {2, 3}, {5, 6}};
4) {{1, 6}, {2, 3}, {3, 4}};
5) {{1, 2}, {2, 5}, {3, 6}};
6) {{2, 3}, {5, 6}};
7) {{1, 2}, {2, 5}, {3, 4}};
8) {{1, 2}, {2, 3}, {4, 5}}.

4. (096). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) может ли нуль-граф быть однокомпонентным?

2) может ли граф быть однокомпонентным, если в нем 10 вершин и 8 ребер?

3) верно ли, что граф на n вершинах, не содержащий ни одного ребра, имеет степень связности, равную n?

4) из связного графа, в котором нет циклов, удалили одно ребро. Будет ли получившийся граф двухкомпонентным?

5) может ли граф быть связным, если в нем 6 вершин и 5 ребер?

6) может ли граф, содержащий n вершин и n ребер, иметь степень связности, равную n?

23.3. НАХОЖДЕНИЕ ПРОСТЫХ ЦЕПЕЙ

Постановка задачи. Пусть задан простой граф. Выберем в нем какие-либо две вершины v и w и выясним, как найти все простые цепи, соединяющие эти вершины. Очевидно, что задача разрешима, если граф является связным. В случае несвязных графов задача также разрешима, но при этом возможны два варианта:

а) вершины v и w относятся к одному и тому же классу эквивалентности. Очевидно, что все простые цепи будут проходить только через вершины этого класса и не пройдут ни через одну вершину других классов;

б) вершины v и w входят в различные компоненты графа. В этом случае число простых цепей равно нулю.

Метод нахождения всех простых цепей рассмотрим на примере связного графа, приведенного на рис. 313.

Допустим, что начальной является вершина 1, конечной — вершина 6. На первом этапе выясним, сколько существует способов выйти из первой вершины. Так как ее степень равна 3, то имеем три варианта: 1–2, 1–3, 1–4.

Из вершины 2 можно выйти в трех направлениях: к вершинам 3, 4, 5 (в вершину 1 не возвращаемся). Из вершины 3 движение возможно четырьмя способами, из вершины 4 — тремя.

Таким образом, на втором этапе имеем:

1–2–3	1–3–2	1–4–2
1–2–5	1–3–4	1–4–3
1–2–4	1–3–5	1–4–5
	1–3–6	

Заметим, что одну простую цепь мы уже нашли (подчеркнута): 1–3–6. Остальные цепи имеют продолжение:

1–2–3–4	1–2–4–3	1–3–5–2	1–4–3–5
1–2–3–5	1–2–4–5	1–3–5–4	1–4–3–6
1–2–3–6	1–3–2–4	1–3–5–6	1–4–5–2
1–2–5–3	1–3–2–5	1–4–2–3	1–4–5–3
1–2–5–4	1–3–4–2	1–4–2–5	1–4–5–6
1–2–5–6	1–3–4–5	1–4–3–2	

Найдено еще пять простых цепей (все они подчеркнуты). Остальные 18 цепей имеют продолжения:

1–2–3–4–5	1–3–2–4–5	1–4–2–3–6
1–2–3–5–4	1–3–2–5–4	1–4–2–5–3
1–2–3–5–6	1–3–2–5–6	1–4–2–5–6
1–2–5–3–4	1–3–4–2–5	1–4–3–2–5
1–2–5–3–6	1–3–4–5–2	1–4–3–5–2
1–2–5–4–3	1–3–4–5–6	1–4–3–5–6
1–2–4–3–5	1–3–5–2–4	1–4–5–2–3
1–2–4–3–6	1–3–5–4–2	1–4–5–3–2
1–2–4–5–3	1–4–2–3–5	1–4–5–3–6
1–2–4–5–6		

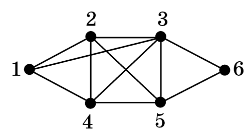


Рис. 313

На четвертом этапе получили десять простых цепей. На пятом (последнем) аналогично получаем еще десять цепей. Это самые длинные цепи, они проходят через все вершины графа (рис. 313):

1–2–3–4–5–6	1–3–4–2–5–6
1–2–5–4–3–6	1–4–2–3–5–6
1–2–4–3–5–6	1–4–2–5–3–6
1–2–4–5–3–6	1–4–3–2–5–6
1–3–2–4–5–6	1–4–5–2–3–6

Таким образом, всего в графе (рис. 313) имеется 26 простых цепей, соединяющих вершины 1 и 6. Из них одна цепь содержит два ребра, 5 цепей содержат по три ребра, 10 цепей — по четыре ребра и 10 цепей — по пять ребер.

По списку простых цепей легко найти множество Q **реберно непересекающихся** (не имеющих общих ребер) простых цепей и множество S **вершинно непересекающихся** (не имеющих общих вершин) простых цепей. В случае рассмотренного примера:

$$Q_1 = \{1, 2, 5, 6; 1, 4, 3, 6\};$$
$$Q_2 = \{1, 2, 4, 3, 5, 6; 1, 4, 5, 2, 3, 6\};$$
$$S_1 = \{1, 2, 3, 6; 1, 4, 5, 6\}; \quad S_2 = \{1, 2, 5, 6; 1, 4, 3, 6\};$$
$$S_3 = \{1, 3, 6; 1, 2, 4, 5, 6\}; \quad S_4 = \{1, 3, 6; 1, 4, 5, 6\}.$$

Упражнения

1. (ХОФ). Сколько простых цепей, соединяющих вершины 1 и 6 и проходящих через вершину 2, содержит граф, приведенный на рис. 313?

2. Сколько простых цепей, ведущих от вершины 1 к вершине 6, будет содержать граф (рис. 313), если:

1) **(ЯХ7)** вершины 1 и 2 дополнительно соединить еще одним ребром?

2) **(926)** вершины 1 и 3 соединить не одним, а тремя кратными ребрами (вершины 1 и 2 при этом соединены одним ребром)?

3. (ШИМ)! На основе графа (рис. 313) построили подграф, удалив вершину 2. Сколько ребер удалено? Сколько ребер в подграфе? Сколько простых цепей соединяют вершины 1 и 6 подграфа?

4. Сколько существует простых цепей, соединяющих вершины 1 и 6 в частичном графе, построенном на основе графа (рис. 313) путем:

1) **(ДЖН)** удаления ребра $\{1, 2\}$?

2) **(МЖР)** удаления ребра $\{2, 5\}$?

3) **(ХМП)** удаления ребра $\{3, 6\}$?

4) **(УУК)** удаления двух ребер $\{3, 4\}$ и $\{2, 5\}$?

5) **(52Т)** удаления трех ребер $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ и $\{3, 6\}$?

5. На рис. 314 изображен граф на пяти вершинах.

1) **(ЛАС).** Сколько в этом графе всего простых цепей, соединяющих вершины 1 и 5?

2) **(ЦВО)!** Сколько среди них простых цепей длины 1? 2? 3? 4? 5?

3) **(ПЗУ)!** Сколько простых цепей проходит через 3 вершины? через 4 вершины? через все вершины?

6. (ХМХ). Сколько простых цепей соединяют две смежные вершины в полном графе на пяти вершинах?

7. (ХАЖ). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) во всяком ли простом связном графе самая длинная простая цепь проходит через все вершины графа?

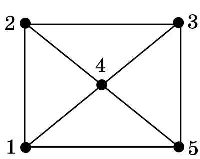


Рис. 314

2) дан связный граф. Всякий ли его надграф является связным?

3) верно ли, что в любом полном графе любые две его вершины соединяет одинаковое число простых цепей?

4) существует ли связный граф, в котором любые две вершины соединены двумя простыми цепями?

5) может ли петля в связном графе быть элементом какой-либо простой цепи, соединяющей две различные вершины графа?

6) всякий ли непустой подграф полного графа является полным?

7) всякий ли частичный граф полного графа является связным?

23.4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАХОЖДЕНИЯ ВСЕХ ПРОСТЫХ ЦЕПЕЙ

Метод нахождения всех простых цепей, соединяющих две заданные вершины графа, имеет многочисленные применения. Его можно использовать в задаче коммивояжера (см. подраздел 23.7), при составлении маршрутов путешествий, в электротехнических схемах, при анализе контактных цепей и др.

Применение метода поясним на примере контактных структур. На рис. 315 приведена схема, имеющая три выхода f_1, f_2, f_3. Требуется построить точно такую же (логически эквивалентную) схему, но не на контактах, а на логических элементах И, ИЛИ, НЕ.

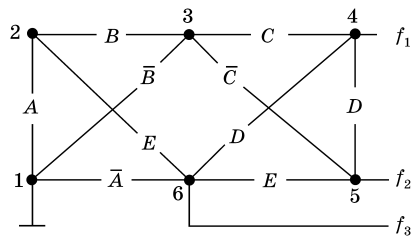


Рис. 315

Для решения этой задачи сначала найдем все простые цепи, соединяющие вершину 1 с вершинами 4, 5, 6. Они указаны в таблицах 48–50 отдельно для каждой из вершин 4, 5, 6, если схему рассматривать как граф.

Так как ребрам соответствуют контакты, обозначенные буквами A, B, C, D, E, то для каждой простой цепи можно найти конъюнкцию, равную единице, если соответствующая цепь замкнута.

Для примера рассмотрим цепь 1, 2, 6, 5, 4, состоящую из ребер {1, 2}, {2, 6}, {6, 5}, {5, 4}. Согласно схеме (рис. 315) вершины 1 и 2 соединены контактом A, вершины 2 и 6 — контактом E, вершины 6 и 5 — также контактом E и вершины 5 и 4 — контактом D. Следовательно, простой цепи 1, 2, 6, 5, 4 соответствует конъюнкция $AEED = ADE$.

Аналогичным образом находятся и все остальные конъюнкции для каждой цепи. Все они перечислены в таблицах 48–50 (функции f_1, f_2, f_3 соответственно).

Простые цепи в таблицах указаны перечислением вершин. Заметим, что проводимость некоторых цепей отсутствует. Например, цепи 1, 3, 2, 6, 4 соответствует конъюнкция $\overline{B}BED$, равная нулю, так как переменная B входит в нее в прямой и инверсной формах.

Дизъюнкция всех конъюнкций, построенных на основе простых цепей, дает искомую булеву функцию. После минимизации функции f_1, f_2, f_3 принимают вид:

$$f_1 = AC + \overline{B}C + CE + D;$$

$$f_2 = A\overline{C} + \overline{B}\overline{C} + D + E;$$

$$f_3 = \overline{A} + D + E.$$

Таблица 48

Простые цепи	Конъюнкции
134	$\bar{B}C$
164	$\bar{A}D$
1234	ABC
1264	ADE
1354	$\bar{B}\bar{C}D$
1654	$\bar{A}DE$
12354	$AB\bar{C}D$
12654	ADE
13264	0
13564	$\bar{B}\bar{C}DE$
16234	$\bar{A}BCE$
16534	0
123564	$AB\bar{C}DE$
126534	0
132654	0
162354	$\bar{A}B\bar{C}DE$

Таблица 49

Простые цепи	Конъюнкции
135	$\bar{B}\bar{C}$
165	$\bar{A}E$
1235	$AB\bar{C}$
1265	AE
1345	$\bar{B}CD$
1645	$\bar{A}D$
12345	$ABCD$
12645	ADE
13265	0
13465	$\bar{B}CDE$
16235	$\bar{A}B\bar{C}E$
16435	0
123465	$ABCDE$
126435	0
132645	0
162345	$\bar{A}BCDE$

Таблица 50

Простые цепи	Конъюнкции
16	$\bar{A}$
126	AE
1326	0
1346	$\bar{B}CD$
1356	$\bar{B}\bar{C}E$
12346	$ABCD$
12356	$AB\bar{C}E$
13456	$\bar{B}CDE$
13546	$\bar{B}\bar{C}D$
123456	$ABCDE$
123546	$AB\bar{C}D$

Комбинационная схема, построенная на основе этих булевых функций, приведена на рис. 316. Схема построена на основе минимальных ДНФ и состоит из трех отдельных логических схем в отличие от заданной схемы, представляющей собой единую контактную структуру с тремя выходами.

Следует отметить, что при переходе к электронным логическим схемам с несколькими выходами обычно применяют методы минимизации **систем** булевых функций, позволяющие выявить участки схемы, которые являются общими не менее чем для двух функций. Благодаря этому нередко удается найти более простой вариант всей схемы по сравнению с тем, когда каждая функция реализуется отдельно. Однако вопросы минимизации систем булевых функций выходят за рамки данного пособия.

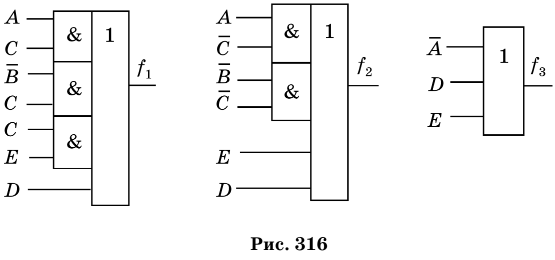


Рис. 316

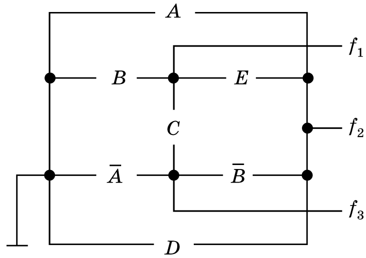


Рис. 317

Упражнения

1. На рис. 317 приведена контактная структура на пяти реле A, B, C, D, E, имеющая три выхода f_1, f_2, f_3. Найдите минимальные дизъюнктивные нормальные формы булевых функций, соответствующих этим выходам:

1) (ТБФ) f_1; 2) (ЦТ2) f_2; 3) (ИЕЗ) f_3.

2. На рис. 317 контакт A удалили (вместе с соответствующими проводниками). При этом контакт $\bar{A}$ оставили на месте. Получилась новая контактная структура. Найдите число простых импликант, число вхождений букв и число неинверсных букв для минимальных ДНФ функций:

1) (8Б4)! f_1; 2) (5Г5)! f_2; 3) (МТК)! f_3.

23.5. ЭЙЛЕРОВЫ ЦЕПИ И ЦИКЛЫ. УНИКУРСАЛЬНАЯ ЛИНИЯ

Эйлер Леонард (1707–1783), швейцарский математик, механик, физик и астроном, является звездой первой величины на небосклоне науки. Он много лет работал в Петербургской академии наук. За свою долгую жизнь он издал более 800 научных работ. Творческая активность Л. Эйлера оставалась на высочайшем уровне и в преклонном возрасте, хотя в последние 17 лет его жизнь была омрачена потерей зрения. Очень непросто перечислить даже основные результаты научной деятельности Л. Эйлера. Он доказал великую теорему Ферма для показателей 3 и 4, положил начало топологии, построил точную траекторию движения Луны с учетом притяжения не только Земли, но и Солнца. У него много трудов по теории комплексных чисел, вариационному исчислению, гидравлике, кораблестроению, геометрической оптике, механике твердого тела, теории музыки, теории графов и др.

В первой работе Эйлера по теории графов, опубликованной в 1736 г., дано решение задачи о кенигсбергских мостах. Город Кенигсберг (на современных географических картах — Калининград) расположен на берегах реки Прегóли и двух островах. Острова и берега тогда были связаны семью мостами так, как показано на рис. 318.

В свободное время горожане любили гулять по этим мостам и пытались найти такой путь, чтобы, выйдя из одной точки, пройти точно по одному разу по всем мостам и вернуться в исходную точку. Однако, несмотря на многочисленные попытки, обойти по одному разу все семь мостов никому не удавалось, что очень удивляло горожан.

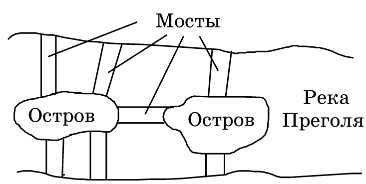


Рис. 318

Л. Эйлер, занявшись этой головоломкой, показал, что такого пути не существует. Невозможен и облегченный вариант обхода мостов, когда требуется пройти по каждому мосту один раз без возврата в исходную точку.

В честь Л. Эйлера цикл, содержащий все ребра графа, стали называть **эйлеровой линией**, а также **эйлеровым циклом** [3], замкнутой эйлеровой цепью [44] или просто **эйлеровой цепью** [41]. Граф, содержащий эйлеров цикл, получил название **эйлерова графа**. Если граф содержит разомкнутую цепь, содержащую все ребра этого графа, то такой граф называется **полуэйлеровым**.

Приведем несколько наиболее важных теорем об эйлеровых графах.

Теорема 1. Если в связном графе все вершины четны, то этот граф содержит эйлеров цикл.

Доказательство можно найти в [3; 44].

Верно и обратное утверждение: если граф содержит эйлеров цикл, то все его вершины четны.

Построим граф на основе рис. 318. Получим рис. 319. Вершины 1 и 4 этого графа обозначают берега, вершины 2 и 3 — острова на реке, а ребра — мосты. Степени всех вершин графа нечетны, следовательно, в графе нет эйлерова цикла и нет эйлеровой цепи.

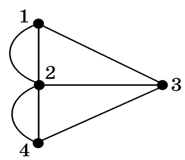


Рис. 319

На рис. 320 приведен граф, в котором степени всех вершин четны. Обход его ребер можно начать с любой вершины. Обозначим ребра буквами a, b, c, d, e, f, k, m, n. Тогда примером эйлерового цикла может служить следующая последовательность ребер и вершин:

$$4, c, 1, a, 1, b, 2, f, 3, n, 5, m, 4, k, 3, e, 2, d, 4. \quad (4)$$

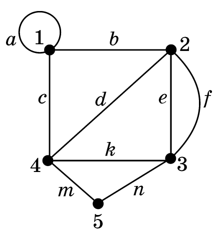


Рис. 320

Теорема 2. Если в связном графе две вершины нечетны, а все остальные — четны, то этот граф содержит эйлерову разомкнутую цепь. Доказательство в [3; 44].

Если на рис. 320 удалить вершину 5, то получится подграф, в котором вершины 3 и 4 являются нечетными, а вершины 1 и 2 — четными.

Примером эйлеровой цепи в подграфе может служить следующая последовательность вершин и ребер:

$$4, c, 1, a, 1, b, 2, d, 4, k, 3, e, 2, f, 3. \quad (5)$$

Всякую линию, которую можно провести, проходя по заданным участкам точно по одному разу, называют **уникурсальной** [3; 37]. Применительно к эйлеровым графам провести уникурсальную линию — это значит пройти по всем ребрам графа по одному разу, не отрывая карандаш от бумаги. Например, последовательность (4) представляет собой замкнутую уникурсальную линию, а примером разомкнутой уникурсальной линии является последовательность (5). Заметим, что разомкнутая уникурсальная линия всегда начинается с нечетной вершины и заканчивается в другой нечетной вершине. Если же начать обход полуэйлерового графа с четной вершины, то уникурсальную линию, ни замкнутую, ни разомкнутую, построить не удастся.

Эйлеровы графы иногда называют уникурсальными.

Теорема 3. Если в связном графе G содержится $2k$ нечетных вершин, то в нем имеется k разомкнутых эйлеровых цепей, в совокупности содержащих все ребра графа G точно по одному разу. (Доказательство в [3].) Используя понятие уникурсальной линии, эту теорему можно сформулировать следующим образом: если в связном графе содержится $2k$ нечетных вершин, то в нем имеется k разомкнутых уникурсальных линий. Чтобы изобразить такой граф, карандаш придется оторвать от бумаги не менее $k - 1$ раз. Например, граф на рис. 319 содержит четыре нечетные вершины, следовательно, $k = 2$. При его изображении карандаш от бумаги придется оторвать один раз. Если начать с вершины 1, то получим две уникурсальные линии: 1, 3, 4, 2, 1, 2, 4 и 2, 3.

Теорема 4. В любом связном графе можно построить замкнутый маршрут, проходящий через каждое ребро точно два раза.

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, достаточно каждое ребро графа заменить двумя параллельными ребрами и считать, что маршрут проходит по каждому ребру точно один раз. Тогда все вершины станут четными. Согласно теореме 1 в таком графе всегда существует эйлеров цикл.

Из теоремы 4 следует, что любой граф можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги и проходя по каждому ребру не более двух раз. Например, граф, приведенный на рис. 319, можно изобразить в виде последовательности вершин так: 1, 2, 4, 2, 1, 3, 2, 3, 4, откуда следует, что два раза карандаш прошел только по ребру $\{2, 3\}$.

Упражнения

1. (Т91). Укажите номера графов на рис. 321, содержащих эйлеров цикл (замкнутую уникурсальную линию).

2. (813). Укажите графы на рис. 321, содержащие разомкнутую уникурсальную линию.

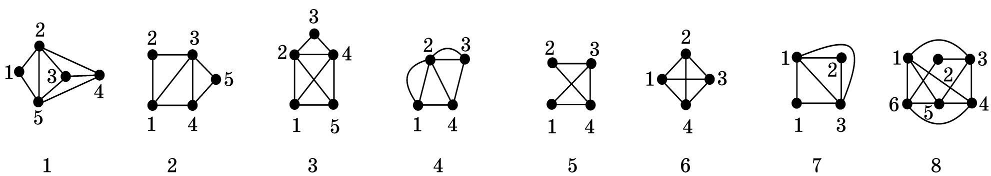


Рис. 321

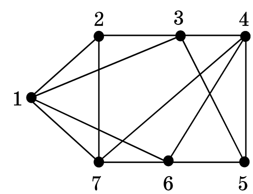


Рис. 322

3. (ПИЛ). Укажите номера вершин, с которых следует начать обход ребер графа (рис. 322), чтобы получить разомкнутую уникурсальную линию (при самоконтроле номера вершин упорядочить по возрастанию).

4. (ТЕХ). Укажите номера вершин на графе 3 (рис. 321), которые не могут быть началом (и концом) разомкнутой уникурсальной линии (номера вершин упорядочить по возрастанию).

5. (ЛИЙ). Укажите номера вершин, с которых можно начать обход графа 8 (рис. 321), чтобы получить замкнутую уникурсальную линию (номера вершин упорядочить по возрастанию).

6. (СЛИ). Укажите вопросы, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) в эйлеровой цепи каждая вершина встречается точно один раз?

2) всякая эйлерова цепь проходит через все вершины связного графа?

3) существует эйлерова цепь (замкнутая или разомкнутая) в связном графе, содержащем одну нечетную вершину?

4) во всяком эйлеровом графе существует единственная последовательность ребер и вершин, образующая эйлеров цикл?

5) в эйлеровом графе уникурсальная линия может начинаться с любой вершины?

6) всякая эйлерова цепь является простой цепью?

7) связный граф может быть полуэйлеровым, если в нем точно одна четная вершина?

7. (378). Укажите вопросы, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) разомкнутая эйлерова цепь в простом графе может начинаться с любой вершины?

2) в любом полном графе на n вершинах имеется эйлеров цикл, если n нечетно?

3) в полном графе на n вершинах степень каждой вершины равна $n - 1$?

4) существует цикл в однородном графе, содержащем 33 нечетные вершины?

5) возможна эйлерова разомкнутая цепь в простом графе на 100 вершинах, среди которых 5 вершин являются четными?

6) можно изобразить связный граф, отрывая карандаш от бумаги не более 35 раз, если в нем 35 вершин, среди которых 20 вершин являются четными?

7) существует замкнутая уникурсальная линия в полном графе на n вершинах при условии, что n — нечетное число?

23.6. ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

Гамильтон Уильям Роуэн (1805–1865), ирландский математик, с 1837 г. иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук, в 1859 г. придумал игру-головоломку под названием «путешествие по додекаэдру». Додекаэдр — это объемная фигура, многогранник, в котором все грани являются правильными пятиугольниками. В додекаэдре 12 граней, 20 вершин и 30 ребер. Каждой вершине Гамильтон поставил в соответствие название одного из крупных по тем временам городов: Брюссель, Дели, Франкфурт и т. д. Задача состояла в том, чтобы, переходя по ребрам из города в город, обойти все города, побывав в каждом из них точно по одному разу, и вернуться в исходный город. Во все вершины додекаэдра были вбиты гвозди, благодаря чему каждый путь можно было обозначать ниткой, протягиваемой от вершины к вершине.

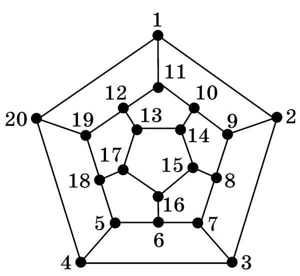


Рис. 323

Как игра головоломка оказалась довольно скучной, поэтому широкого распространения не получила даже после того, как Гамильтон громоздкий додекаэдр заменил соответствующим графом (рис. 323). Но математики головоломкой заинтересовались, и в память о ней всякий цикл, содержащий по одному разу каждую вершину графа, стали называть **гамильтоновой** линией (гамильтоновым циклом), а граф, содержащий гамильтонову линию, — **га-**

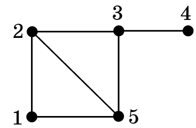


Рис. 324

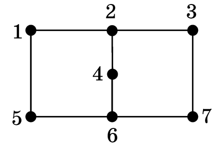


Рис. 325

мильтоновым графом. Пример гамильтонова цикла, где показано, как надо нумеровать вершины графа, чтобы получилась замкнутая гамильтонова линия, приведен на рис. 323.

Существуют ли признаки, указывающие на то, что данный граф имеет (или не имеет) гамильтонов цикл? Общий признак, при помощи которого для любого графа можно было бы определить, имеет он гамильтонов цикл или нет, не найден до сих пор. Однако для многих частных случаев такие признаки известны. Например, если в графе есть висячая вершина (со степенью, равной единице), то гамильтонов цикл в нем отсутствует (рис. 324).

Если граф на n вершинах является полным, то в нем имеется гамильтонов цикл только при $n \geqslant 3$. Если в простом графе степень ρ каждой вершины удовлетворяет условию $\rho \geqslant n/2$, где $n \geqslant 3$, n — число вершин, то этот граф является гамильтоновым (теорема Дирака) [41]. Если для любой пары вершин v_i, v_j выполняется неравенство

$$\rho(v_i) + \rho(v_j) \geqslant n,$$

где $i, j, = 1, 2, ..., n$; $n \geqslant 3$; $i \neq j$; n — число вершин графа, то этот граф является гамильтоновым [3].

Связный граф, содержащий простую разомкнутую цепь, в которую входят все вершины графа, называется **полугамильтоновым**. Примером полугамильтонова графа может служить граф, изображенный на рис. 325. Один вариант полугамильтоновой цепи этого графа имеет вид 4, 2, 1, 5, 6, 7, 3.

Так как всякая разомкнутая гамильтонова линия представляет собой простую незамкнутую цепь, то для отыскания гамильтоновых линий можно воспользоваться вышерассмотренным методом нахождения всех простых цепей, соединяющих две заданные вершины графа. Например, в графе, приведенном на рис. 313, имеется десять разомкнутых гамильтоновых цепей, каждая из которых начинается в вершине 1 и оканчивается в вершине 6.

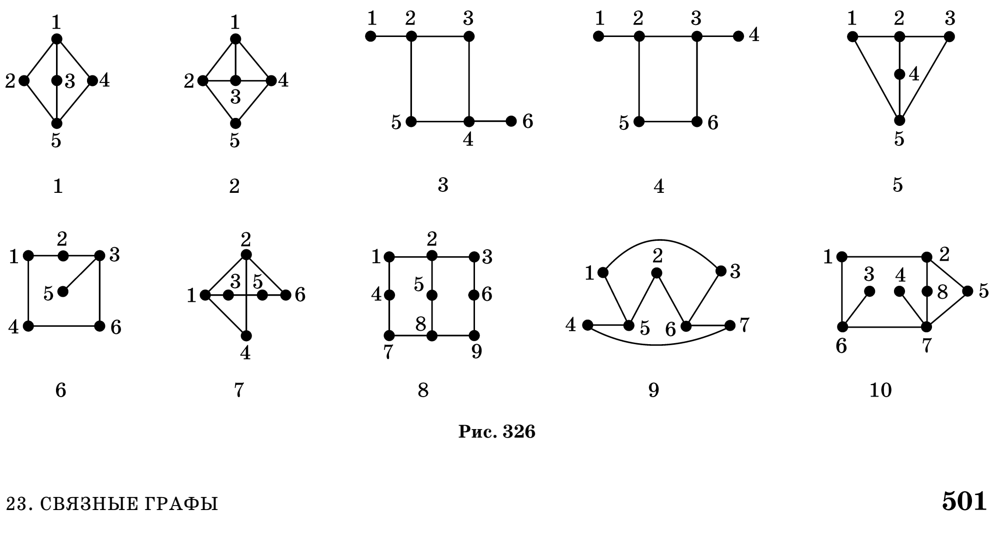


Рис. 326

Упражнения

1. (ЛИ1). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Является ли гамильтоновым граф:

1) на рис. 309? 3) на рис. 313? 5) на рис. 319? 7) на рис. 325?
2) на рис. 310? 4) на рис. 314? 6) на рис. 323? 8) на рис. 324?

2. (362). Укажите гамильтоновы графы (рис. 326).

3. (273). Укажите полуэйлеровы графы (рис. 326).

4. (754). Укажите номера полугамильтоновых графов (рис. 326).

5. (ЕА5). Укажите номера графов, не являющихся ни гамильтоновыми, ни полугамильтоновыми (рис. 326).

23.7. ЗАДАЧА О КОММИВОЯЖЕРЕ

Коммивояжер (по-французски: commisvoyageur) — разъездной представитель крупной торговой фирмы, предлагающий покупателям товары по образцам, каталогам, прейскурантам. Слово в значительной степени является устаревшим [38]. В слове «коммивояжер» два ударения — на первый слог и на последний.

Задача о коммивояжере (о странствующем торговце) имеет две существенно разные формулировки. В первой вопрос ставится так: «Коммивояжер желает посетить n определенных городов; как он должен двигаться, чтобы заехать в каждый из них хотя бы один раз, проделав путь наименьшей общей длины?» [41]. Согласно этой формулировке коммивояжер может те или иные города посещать неоднократно. По второй же формулировке «он обязан побывать в каждом пункте в точности по одному разу и заинтересован затратить на поездку как можно меньше времени» [3]. Мы в дальнейшем будем пользоваться второй формулировкой.

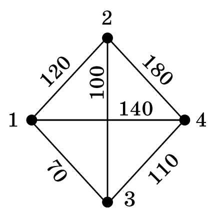


Рис. 327

Очевидно, что с математической точки зрения безразлично, какой параметр желает оптимизировать коммивояжер — время, расходы на дорогу или общую длину пути. В любом случае задача сводится к отысканию гамильтонова цикла.

Рассмотрим граф, приведенный на рис. 327. Вершины в этом графе обозначают города, ребра — расстояние между городами. В каком порядке коммивояжер должен обойти все города, преодолев наименьшее расстояние? В каком порядке он должен посетить города, если исходным является город 1?

Чтобы решить эту задачу, методом отыскания всех простых цепей найдем все гамильтоновы циклы. Для графа, приведенного на рис. 327, существует шесть таких циклов:

1, 2, 4, 3, 1   1, 3, 4, 2, 1   1, 2, 3, 4, 1
1, 3, 2, 4, 1   1, 4, 3, 2, 1   1, 4, 2, 3, 1

Однако различными из них являются только следующие три: 1, 2, 4, 3, 1; 1, 2, 3, 4, 1; 1, 3, 2, 4, 1. А остальные — это те же циклы, но записанные наоборот, что соответствует движению коммивояжера по тем же дорогам, но в обратном порядке.

Поэтому длины путей вычисляем лишь для трех гамильтоновых циклов:

Цикл 1, 2, 4, 3, 1: $120 + 180 + 110 + 70 = 480$;

Цикл 1, 2, 3, 4, 1: $120 + 100 + 110 + 140 = 470$;

Цикл 1, 3, 2, 4, 1: $70 + 100 + 180 + 140 = 490$.

Таким образом, кратчайшим является путь 1, 2, 3, 4, 1.

Упражнения

1. (НЛО). Известно, что охотник за мертвыми душами Павел Иванович Чичиков побывал у помещиков в следующем порядке: Манилов, Коробочка, Ноздрев, Собакевич, Плюшкин, Тентетников, генерал Бетрищев, Петух, Костанжогло, полковник Кошкарев. Схема, в соответствии с которой Чичиков посещал помещиков, приведена на рис. 328 в виде графа, на котором вершины обозначают имения помещиков, а ребра — дороги; входной стрелке соответствует начало, выходной — конец пути.

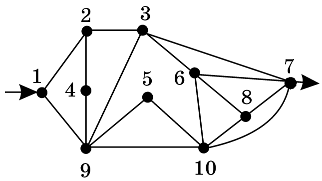


Рис. 328

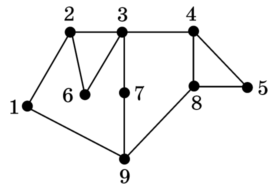


Рис. 329

Укажите номера имений, принадлежащих помещикам: Манилову; Коробочке; Ноздреву; Собакевичу; Плюшкину; Тентетникову; генералу Бетрищеву; Петуху; Костанжогло; полковнику Кошкареву [3]. (Указание: граф на рис. 328 имеет единственную разомкнутую гамильтонову цепь. Чтобы ее найти, нет необходимости использовать метод отыскания всех простых цепей, достаточно внимательно посмотреть на граф, прослеживая различные варианты обхода вершин.)

2. (780). Коммивояжер выезжает из города 1, посещает по одному разу все города и останавливается в городе 5 (рис. 329). Укажите последовательность городов, в которых побывал коммивояжер, при условии, что города 1 и 5 в последовательность также входят.

3. (ТЯК). Сколько километров проехал коммивояжер (см. упр. 2), если длины дорог, соединяющих города, все одинаковы и равны 100 км?

4. (АЯК). Укажите вершины (рис. 329), входящие в гамильтонову цепь, начало которой — вершина 6, конец — вершина 8.

23.8.
ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ

Пусть множество V вершин графа G состоит из двух непустых множеств V_1 и V_2 так, что $V = V_1 \bigcup V_2$ и $V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$. Если каждое ребро графа G соединяет некоторую вершину множества V_1 с какой-либо вершиной множества V_2, то такой граф называется **двудольным**.

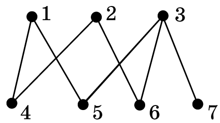


Рис. 330

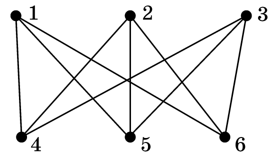


Рис. 331

Пример двудольного графа приведен на рис. 330. В этом графе

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad V_1 = \{1, 2, 3\}, \quad V_2 = \{4, 5, 6, 7\}.$$

Двудольный граф называется **полным**, если каждая вершина множества V_1 соединена с каждой вершиной множества V_2. Полный двудольный граф имеет k ребер, где

$$k = |V_1| \cdot |V_2|.$$

Степень любой вершины множества V_1 полного двудольного графа равна $|V_2|$. Степень каждой вершины множества V_2 равна $|V_1|$.

Дополнение полного двудольного графа есть несвязный граф, состоящий из двух компонент — полного графа G_1 и полного графа G_2.

Обозначим: $n_1 = |V_1|$; $n_2 = |V_2|$. Тогда величины K_1 и K_2, определяющие число ребер компонент G_1 и G_2, равны:

$$K_1 = C_{n_1}^2 = \frac{n_1(n_1 - 1)}{2}; \qquad K_2 = C_{n_2}^2 = \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}.$$

Общее число K ребер дополнения полного двудольного графа равно:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 - (n_1 + n_2)}{2}.$$

В теории графов особо важное значение имеет полный двудольный граф, в котором $|V_1| = |V_2| = 3$ (рис. 331). Такой двудольный граф условимся обозначать символом $G_{3,3}$.

По аналогии с двудольными можно говорить о **трехдольных**, **четырехдольных** и, вообще, ***n*-дольных** графах. Например, в трехдольном графе множество вершин разбивается на три подмножества, в каждом из которых нет смежных вершин. Соединяться ребрами могут лишь те вершины, которые принадлежат различным подмножествам (долям).

Упражнения

1. (ЕА2). Сколько ребер имеет полный двудольный граф, если $|V_1| = 4$; $|V_2| = 7$?

2. (ЦП6). Дано: в полном двудольном графе 143 ребра. Определите $|V_1|$ и $|V_2|$, если

$$|V_1| > 1 \text{ и } |V_2| > 1.$$

3. (675). В полном двудольном графе степень каждой вершины множества V_1 равна 6, степень каждой вершины множества V_2 равна 8. Сколько ребер в графе?

4. (КА1). В двудольном графе $|V_1| = 18$, $|V_2| = 10$, число ребер равно 18. Найдите число ребер дополнения до полного двудольного графа.

5. (594). В полном двудольном графе 49 вершин. Найдите $|V_1|$ и $|V_2|$, если

$$|V_1| \neq 1 \text{ и } |V_2| \neq 1.$$

6. (713). В полном двудольном графе содержится 119 ребер. Найдите величины $|V_1|$ и $|V_2|$, если известно, что $|V_2| > 15$, $|V_1| > 1$.

7. (027). В связном двудольном графе $|V_1| = 7$, $|V_2| = 10$. Сколько ребер содержит граф, если при удалении любого ребра граф становится несвязным?

8. (КВ8)! Сколько простых цепей длины n, соединяющих вершины 5 и 8, имеется в графе, изображенном на рис. 332, если:

$$n = 2? \quad n = 3? \quad n = 4? \quad n = 5? \quad n = 6?$$

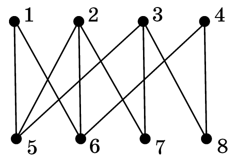


Рис. 332

9. (СНО). Дополнение полного двудольного графа содержит 31 ребро. Найдите $|V_1|$ и $|V_2|$.

10. (ЭМЕ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли двудольный граф содержать петли?

2) верно ли, что нуль-граф, содержащий 7 вершин, является двудольным?

3) является ли двудольным граф, содержащий одну вершину?

4) входит ли пустой граф в множество двудольных графов?

5) может ли быть двудольным простой граф, содержащий 35 ребер?

6) во всяком ли полном двудольном графе существует гамильтонов цикл?

7) существует ли двудольный граф, содержащий замкнутую эйлерову цепь?

8) существуют ли связные двудольные графы, в которых все вершины множества V_1 являются четными, а все вершины множества V_2 — нечетными?

11. (ОЯВ). Укажите двудольные графы на рис. 333.

12. (АСТ). Укажите номера полных двудольных графов на рис. 333.

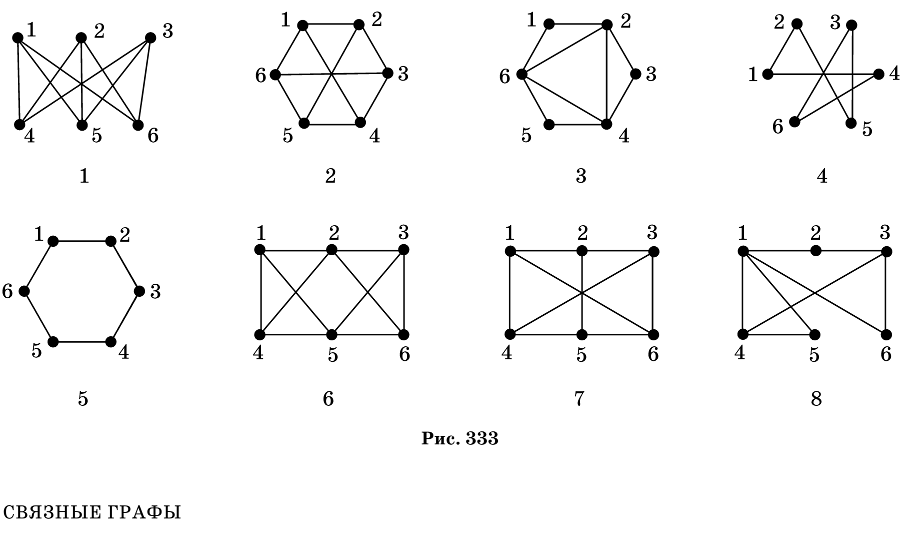


Рис. 333

23.9. МЕТРИКА ГРАФА

Завершим главу некоторыми сведениями о метрике (расстояниях) в графе. В подразделе 23.1 сказано, что расстоянием между двумя вершинами в графе G называется число ребер, входящих в простую цепь, соединяющую эти вершины. В общем случае две вершины могут быть соединены несколькими простыми цепями. Если длины цепей различны, то среди них имеется **минимальная цепь** (одна или несколько), состоящая из наименьшего числа ребер. Обозначим это число буквой $\lambda_{i\text{-}j}$, где i, j — вершины графа, обозначающие начало и конец цепи ($i, j = 1, 2, 3, ..., n$; $i \neq j$, n — число вершин в графе). Очевидно, что в связном графе любые две вершины соединены хотя бы одной минимальной простой цепью. При этом в зависимости от значений i и j длины минимальных цепей могут быть различными. Среди них будут содержаться минимальные цепи с наибольшим числом ребер. Число ребер наибольшей из минимальных цепей называется **диаметром** $d(G)$ графа. Например, в графе 8 (рис. 333) различные вершины соединены минимальными цепями со следующими длинами:

$$\lambda_{1-2} = \lambda_{1-4} = \lambda_{1-5} = \lambda_{1-6} = \lambda_{2-3} = \lambda_{3-4} = \lambda_{3-6} = \lambda_{4-5} = 1;$$
$$\lambda_{1-3} = \lambda_{2-4} = \lambda_{2-5} = \lambda_{3-5} = \lambda_{4-6} = \lambda_{5-6} = \lambda_{2-6} = 2,$$

откуда следует, что диаметр графа $d(G) = 2$.

Найдем минимальные цепи, соединяющие различные вершины графа 4 (рис. 333). В этом графе 6 вершин, следовательно, всего существует $C_6^2 = 15$ цепей:

$$\lambda_{1-2} = \lambda_{1-4} = \lambda_{2-5} = \lambda_{3-5} = \lambda_{3-6} = \lambda_{4-6} = 1;$$
$$\lambda_{1-5} = \lambda_{1-6} = \lambda_{2-3} = \lambda_{2-4} = \lambda_{3-4} = \lambda_{5-6} = 2;$$
$$\lambda_{1-3} = \lambda_{2-6} = \lambda_{4-5} = 3.$$

Так как наибольшая минимальная цепь содержит 3 ребра, то $d(G) = 3$.

Таким образом, диаметр графа — это максимальное расстояние между его вершинами (соединенных минимальной цепью).

Наибольшее расстояние $r(v)$ между **заданной** вершиной v и другими вершинами графа называется **эксцентриситетом** — максимальным удалением от вершины v. Например, эксцентриситет вершины 8 графа на рис. 332 равен $r(8) = 3$.

Наименьший из эксцентриситетов называется **радиусом** $r(G)$ графа G. Для примера найдем все эксцентриситеты графа 3 (рис. 326):

$$r(1) = 4, \quad r(2) = 3, \quad r(3) = 2, \quad r(4) = 3, \quad r(5) = 2, \quad r(6) = 4.$$

Наименьший эксцентриситет равен 2, следовательно, радиус графа $r(G) = 2$.

Если $r(v) = r(G)$, то вершина v называется центром графа G. В графе 3 на рис. 326 два центра — вершины 3 и 5.

Упражнения

1. Укажите эксцентриситеты всех вершин графа:

1) (72Н) 8 на рис. 333; 2) (ББС) на рис. 330.

2. (982). Укажите диаметр и радиус графа (рис. 329).

3. (635). Укажите эксцентриситеты вершин 2, 3, 6, 7 графа на рис. 329.

4. (БЗЛ). Укажите центры в графе (рис. 330).

24

ПЛАНАРНЫЕ И ПЛОСКИЕ ГРАФЫ

24.1. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Плоским называется граф, изображенный на плоскости так, что его ребра пересекаются только в вершинах. Граф на рис. 334 является плоским, а тот же граф на рис. 335 плоским не является, так как его ребра $\{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$ пересекаются не только в вершинах.

Всякий изоморфный плоскому граф называется **планарным**, то есть граф называется планарным, если у него есть плоское изображение. Пример планарного графа приведен на рис. 335. Очевидно, что всякий плоский граф является планарным.

Часть плоскости, ограниченная со всех сторон ребрами и не содержащая внутри себя ни вершин, ни ребер, называется **гранью**. Граф, приведенный на рис. 334, имеет четыре грани: три внутренних — *а*, *б*, *в*, и одну **внешнюю** (бесконечную), обозначенную буквой *г*. Бесконечную грань имеет любой плоский граф.

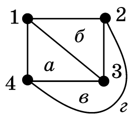


Рис. 334

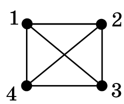


Рис. 335

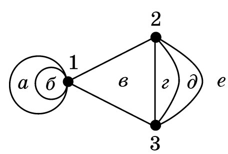


Рис. 336

Всякая петля в графе образует отдельную грань. Два кратных ребра также ограничивают отдельную грань. Например, граф на рис. 336 содержит шесть граней, из которых грани *а* и *б* образованы петлями, а *г* и *д* — кратными ребрами.

Упражнения

1. (ЕКФ). Укажите номера плоских графов (рис. 337).

2. (БВХ). Укажите планарные графы (рис. 337).

3. (НОЗ)! Сколько граней имеет граф 1? граф 3? граф 4? (рис. 337).

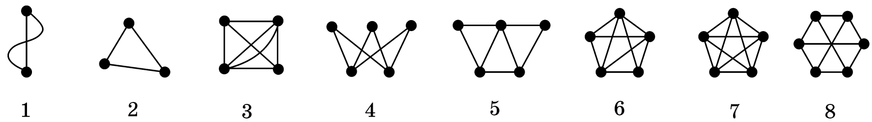


Рис. 337

4. (ЕХИ). Укажите эйлеровы графы (рис. 337).

5. (Я25). Укажите полуэйлеровы графы (рис. 337).

24.2. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О ПЛОСКИХ ГРАФАХ

Пусть n — число вершин связного плоского графа G, r — число его ребер и q — число граней. Тогда

$$n + q = r + 2. \tag{6}$$

Эту теорему Л. Эйлер доказал в 1752 г.

Доказать теорему можно методом индукции по числу ребер в графе. При $r = 0$ теорема справедлива, так как граф содержит одну вершину и одну грань. Допустим, что теорема доказана для графа, имеющего r ребер. Добавим к нему еще одно ребро z. Если это петля, то число граней увеличится на единицу, а число n останется неизменным и равенство (6) не нарушится. Если ребро z соединяет различные вершины, то число граней увеличится на единицу и равенство (6) по-прежнему не нарушится. Если ребро z соединяет какую-либо вершину с $(n + 1)$-й (т. е. добавленной) вершиной, то число граней не изменится и равенство (6) также не нарушится. Других случаев нет, следовательно, теорема доказана.

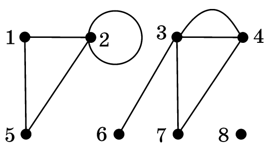


Рис. 338

На рис. 336 приведен граф, содержащий три вершины, шесть граней и семь ребер, т. е.

$$n = 3,\ q = 6,\ r = 7.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой Л. Эйлера получаем равенство:

$$3 + 6 = 7 + 2.$$

Формула Эйлера распространяется и на многокомпонентные графы:

$$n + q = r + k + 1, \tag{7}$$

где k — число компонент несвязного графа.

В качестве примера рассмотрим граф на рис. 338. Он содержит восемь вершин, пять граней, девять ребер и состоит из трех компонент, т. е. $n = 8$, $q = 5$, $r = 9$, $k = 3$. В соответствии с формулой (7): $8 + 5 = 9 + 3 + 1$.

Упражнения

1. (ИЙТ). В связном плоском графе 30 вершин и 20 граней. Сколько в нем ребер?

2. (ЖТМ). В связном плоском графе 20 вершин и 19 ребер. Сколько в нем граней?

3. (ЮЖН). В связном плоском графе 10 граней и 20 ребер. Сколько в нем вершин?

4. (ОУР). В связном плоском графе 18 ребер, число вершин равно числу граней. Сколько в нем вершин?

5. (ЮМС). В связном плоском графе число ребер на 14 больше числа вершин. Сколько в нем граней?

6. (ФАГ). В связном плоском графе число ребер на 20 больше числа граней. Сколько в нем вершин?

7. (УМУ). Найдите число компонент плоского графа, если в нем 17 вершин, а число ребер равно числу граней.

24.3. ГОМЕОМОРФИЗМ

Гомеоморфизм (греч. homois — подобный, одинаковый и morphe — вид, форма) — важнейшее понятие одного из разделов современной математики — топологии, науки, изучающей такие свойства фигур, которые остаются неизменными при любых деформациях, осуществляемых без разрыва и без склеивания. В общем случае **гомеоморфизм** — это взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между двумя топологическими пространствами. Например, отрезок является гомеоморфным любой как угодно изогнутой линии конечной длины. Гомеоморфны и такие геометрические фигуры, как окружность, квадрат, треугольник, прямоугольник, эллипс, трапеция, многоугольник, так как путем деформации (без разрывов) каждая из них может быть преобразована в другую: скруглив углы квадрата, можем получить круг, эллипс или овал; изогнув под некоторым углом стороны треугольника, получим многоугольник и т. д. Гомеоморфными являются поверхности шара, куба, пирамиды, додекаэдра, эллипсоида и др. Примеры негомеоморфных фигур: отрезок и круг, знаки «плюс» и «минус».

Гомеоморфными могут быть и графы. Но прежде чем рассматривать гомеоморфные отношения в графах, введем понятие операции **подразбиения ребра**. Пусть V — множество вершин некоторого графа. Выделим в нем две вершины $v \in V$ и $w \in V$, соединенные ребром. Заменим это ребро простой цепью из двух ребер, инцидентных новой вершине t. В результате число вершин графа увеличится на единицу. На единицу увеличится и число ребер. Такую операцию называют операцией **подразбиения ребра**. Проще говоря, чтобы выполнить операцию подразбиения какого-либо ребра, достаточно на этом ребре разместить новую вершину. Очевидно, что в результате такой операции всегда будут получаться вершины со степенью, равной двум.

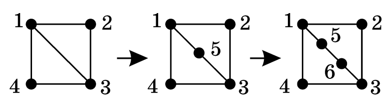


Рис. 339

Операцию подразбиения ребра иллюстрирует рис. 339, на котором слева расположен граф, содержащий четыре вершины. В середине изображен граф, полученный путем подразбиения ребра {1, 3}. Справа приведен граф, получившийся в результате подразбиения ребра {3, 5}.

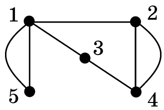


Рис. 340

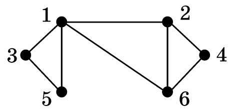


Рис. 341

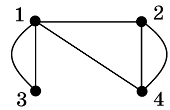


Рис. 342

Два графа называются **гомеоморфными**, если существуют их подразбиения, являющиеся изоморфными [32]. Например, графы на рис. 340 и 341 гомеоморфны.

Чтобы убедиться в этом, достаточно применить операцию подразбиения к одному из кратных ребер $\{1, 5\}$ и одному из кратных ребер $\{2, 4\}$ на рис. 340, а также к ребру $\{1, 6\}$ на рис. 341. В результате получим два графа, которые являются изоморфными.

Обратная подразбиению операция называется операцией **надразбиения** (или **стягивания**). Она заключается в замене двух ребер, инцидентных какой-либо вершине со степенью 2, одним ребром. Иначе говоря, если вершина имеет степень, равную двум, то в результате операции надразбиения эта вершина удаляется, а инцидентные ей ребра соединяются и превращаются в одно ребро. Например, граф на рис. 340 содержит вершину 3, степень которой равна двум. Удалим эту вершину, заменив ребра $\{1, 3\}$ и $\{3, 4\}$ одним ребром $\{1, 4\}$, тогда получим граф, изоморфный графу на рис. 342. Если таким же образом удалить вершины 3 и 4 (либо 5 и 4) графа на рис. 341, то также получим граф, изоморфный графу, изображенному на рис. 342.

Очевидно, что признак гомеоморфности графов можно сформулировать и через понятие операции надразбиения ребер: два графа являются гомеоморфными, если в результате применения операции надразбиения ребер получаются изоморфные графы.

Упражнения

1. В перечне букв вида

А Б В Г Д Е Ж И Л М Н О П Р С Т У Ц Ч Ш Э Ь

укажите буквы:

1) (ДВБ) изображение которых гомеоморфно отрезку;

2) (ТЛВ) гомеоморфные графу на рис. 343;

3) (П8Т) гомеоморфные графу на рис. 344.

2. (ГОД). Укажите номера всех вершин, которые будут удалены из графа (рис. 345), если к этому графу применить операцию надразбиения ребер.

3. (ХМЕ). Укажите номера графов (рис. 348), гомеоморфных графу, приведенному на рис. 345.

4. (ЮИХ). Укажите номера графов (рис. 348), гомеоморфных графу, приведенному на рис. 346.

5. (ЦАИ). Укажите графы (рис. 348), к которым необходимо применить операцию подразбиения ребер, чтобы получился граф, изоморфный графу на рис. 346.

6. (576). Укажите графы (рис. 348), гомеоморфные графу, изображенному на рис. 347.

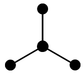


Рис. 343

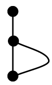


Рис. 344

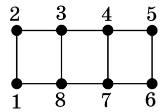


Рис. 345

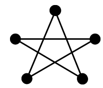


Рис. 346

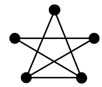


Рис. 347

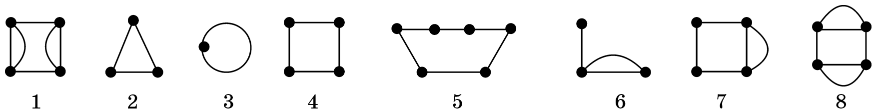


Рис. 348

7. (КПЛ). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что гомеоморфизм — это обобщение понятия изоморфизма?

2) применима ли операция надразбиения ребер к полному графу, если $n > 3$, где n — число вершин графа?

3) применима ли операция подразбиения ребер к полному графу, если $n > 2$, где n — число вершин?

4) могут ли два гомеоморфных графа быть изоморфными?

5) верно ли, что отношение гомеоморфизма есть отношение эквивалентности?

6) могут ли два изоморфных графа быть негомеоморфными?

7) могут ли два гомеоморфных графа быть неизоморфными?

24.4. КРИТЕРИЙ ПОНТРЯГИНА–КУРАТОВСКОГО

Понтрягин Лев Семенович (1908–1988) — советский математик, с 1958 г. академик Академии наук СССР. В 14-летнем возрасте в результате несчастного случая потерял зрение. За выдающиеся научные результаты награжден многими орденами и медалями.

Куратовский Казимеж (1896–1980) — польский математик, с 1966 г. иностранный член Академии наук СССР.

Известно, что монтаж многих радиоэлектронных устройств проще всего осуществить печатным способом. Однако такой монтаж возможен лишь в том случае, если схема соединений элементов, размещенных на печатной плате, представляет собой плоский граф (иначе появятся соединения, не предусмотренные в принципиальной схеме). В связи с этим возникает вопрос: если задан некоторый граф, то как определить, существует ли его плоское представление?

Любой граф с числом вершин $n = 1, 2, 3, 4$ является планарным. Если же $n = 5$, то всякий граф является планарным за исключением полного, который не имеет плоского представления. Обозначим такой граф символом G_5.

Планарным является всякий двудольный граф с числом вершин $n = 2, 3, 4, 5, 6$ за исключением полного двудольного графа типа $G_{3,3}$ (см. рис. 331), т. е. граф $G_{3,3}$ не имеет плоского представления.

Таким образом, не всякий граф является планарным.

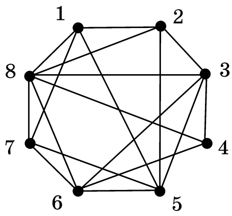


Рис. 349

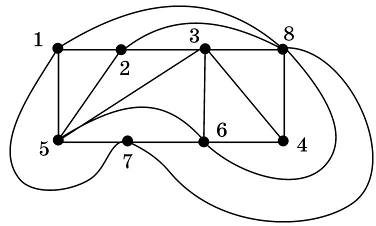


Рис. 350

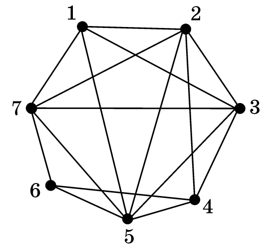


Рис. 351

Рассмотренные два типа графов G_5 и $G_{3,3}$ используются в критерии Понтрягина–Куратовского: граф является планарным только в том случае, если он не содержит подграфов, гомеоморфных графам G_5 и $G_{3,3}$ [16; 41, 44].

В общем случае, если пользоваться только методом сплошного перебора, то согласно критерию Понтрягина–Куратовского необходимо выполнить C_n^6 проверок на отыскание полного двудольного подграфа $G_{3,3}$ и C_n^5 проверок на отыскание полного подграфа G_5. Если этих подграфов в исходном графе не обнаружится, то данный граф является планарным и можно приступать к поиску его плоского представления.

Например, удалим из графа на рис. 349 вершины 1 и 2, останется планарный подграф; удалим вершины 1 и 3 — снова получится планарный подграф и так далее до вершин 7 и 8, после удаления которых также остается планарный подграф (всего $C_8^6 = 28$ проверок). Таким образом, граф, приведенный на рис. 349, имеет плоское представление. Изоморфный ему плоский граф изображен на рис. 350.

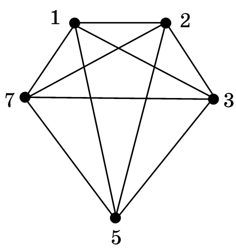


Рис. 352

Рассмотрим еще один граф (рис. 351). На этот раз начнем с поиска подграфа G_5. Удалим вершины 1 и 2, получится планарный подграф; удалим вершины 1 и 3, получится планарный подграф и так далее до вершин 4 и 6, после удаления которых получился граф, изображенный на рис. 352. Это граф G_5 — полный граф на пяти вершинах.

На этом проверка заканчивается, так как установлено, что граф (рис. 351) является непланарным и, следовательно, не имеет плоского представления. Об этом говорит подграф G_5 (рис. 352), который, как сказано выше, невозможно представить в плоском виде.

Для более подробных сведений о применении плоских графов при разработке печатных плат необходимо обратиться к специальной литературе.

Упражнения

1. (121). В графе 12 вершин. Сколько в общем случае проверок необходимо сделать по критерию Понтрягина–Куратовского при поиске подграфа G_5?

2. (БИЛ). В графе G 10 вершин. Сколько в общем случае проверок необходимо сделать по критерию Понтрягина–Куратовского при поиске подграфа $G_{3,3}$?

3. (ТОЗ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) всякий граф, содержащий семь ребер, является планарным?

2) если в графе n вершин и $2n$ ребер, то при любом n граф является планарным?

3) если в графе n вершин и $n + 3$ ребер, то при любом n граф является планарным?

4) всякий граф, содержащий восемь ребер, является планарным?

5) полный граф на четырех вершинах является планарным?

6) если из полного 6-вершинного графа удалить одну вершину, то получится планарный граф?

7) если из полного 5-вершинного графа удалить одно ребро, то получится планарный граф?

4. (ФУМ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) если в графе 50 ребер, то он всегда является непланарным?

2) если дополнение графа G — планарный граф, то граф G всегда является планарным?

3) если в графе нет циклов, то граф является планарным независимо от числа вершин?

4) если в главной диагонали матрицы смежности, построенной для графа на пяти вершинах, в главной диагонали записаны только нули, а все остальное поле матрицы занято единицами, то этот граф является планарным?

5) если степень каждой вершины графа равна 2, то такой граф является планарным независимо от числа вершин?

6) если в графе 6 вершин и степень каждой вершины равна 3, то такой граф всегда является планарным?

7) если в простом графе 5 вершин и степень каждой вершины равна 4, то такой граф является планарным?

24.5. ДВОЙСТВЕННЫЕ ГРАФЫ

Двойственным по отношению к связному плоскому графу G называется граф G^*, построенный следующим образом:

1) в каждой грани ставится вершина графа G^*;

2) если какая-либо вершина графа G^* отделена ребром графа G от другой вершины графа G^*, то эти вершины соединяются ребром, относящимся к графу G^*.

Поясним это на примере. Пусть дан граф (рис. 353), содержащий четыре грани (из них одна — бесконечная). В каждой грани поставим вершины графа G^*. Обозначим их буквами a, b, c, d. Находим ребра графа G^*. Вершина 5 является висячей. Ребру $\{4, 5\}$ в графе G^* соответствует петля. Вершина a отделена от вершины d ребром $\{1, 2\}$. Проводим ребро $\{a, d\}$ (на рис. 353 оно обозначено пунктиром). Вершина b отделена от вершины d ребром $\{2, 4\}$, соединяем вершины b и d ребром $\{b, d\}$ и т. д.

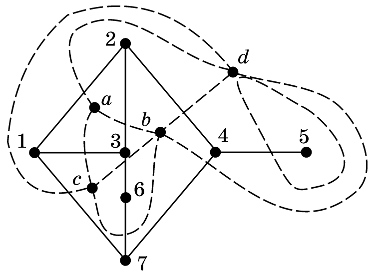


Рис. 353

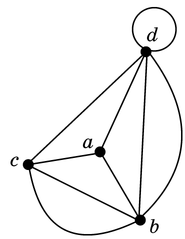


Рис. 354

На рис. 354 изображен искомый двойственный граф, изоморфный пунктирному графу на рис. 353.

Пусть n, r, q — число вершин, ребер и граней графа G; n^*,r^*, q^* — число вершин, ребер и граней графа G^*. Тогда очевидно, что справедливы следующие зависимости между числами n, r, q и n^*, r^*, q^*:

$$n^* = q, \quad r^* = r, \quad q^* = n.$$

Упражнения

1. (Р64). Для графа, приведенного на рис. 350, укажите, сколько вершин, сколько ребер и сколько граней имеет его двойственный граф?

2. (ПЕК)! Сколько вершин, ребер и граней имеет граф, двойственный графу, приведенному на рис. 345?

3. (УТ7). Укажите графы, приведенные на рис. 348, которые имеют двойственные графы, содержащие кратные ребра?

4. Укажите номера графов, изображенных на рис. 348, двойственные графы которых имеют матрицы смежности, содержащие:

1) (ФИМ) хотя бы одно число 3;

2) (ВЫН) хотя бы одно число 2;

3) (ПРО) хотя бы одно число 1;

4) (454) хотя бы одну единицу в главной диагонали.

24.6. ИНВЕРСНЫЕ СТРУКТУРЫ И ДВОЙСТВЕННЫЕ ГРАФЫ

Применение двойственных графов проиллюстрируем на примере нахождения инверсных контактных двухполюсников. На рис. 355 приведен двухполюсник, реализующий некоторую булеву функцию f семи аргументов. Построим на его основе инверсную структуру.

Представим двухполюсник в виде плоского графа (рис. 356). Проведем мысленно осевую линию через вершины 1 и 8. Тогда бесконечная грань разделится на две части. В верхней части поставим вершину a, в нижней — вершину m. Внутренним граням графа поставим в соответствие вершины b, c, d, e. Соединим вершины a, b, c, d, e, m так, как это описано в предыдущем

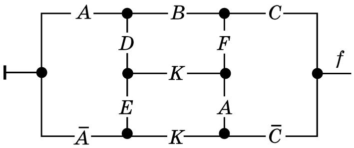


Рис. 355

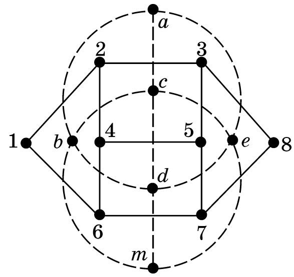


Рис. 356

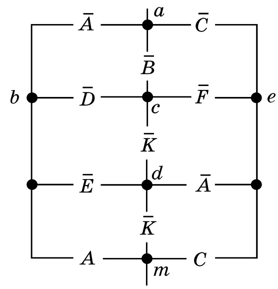


Рис. 357

подразделе, проследив лишь за тем, чтобы ни одно ребро, выходящее из вершин a и m, не пересекало осевую линию. Получился граф (изображен пунктиром) инверсного двухполюсника. На его основе строим искомый двухполюсник. Ребру $\{1, 2\}$ (рис. 356) соответствует контакт A (рис. 355). Это ребро пересекает ребро $\{a, b\}$ двойственного графа (рис. 356). Следовательно, точки a и b инверсной структуры соединяем контактом $\bar{A}$. Точно так же заменяем инверсными контактами все ребра двойственного графа. Получилась инверсная структура, изображенная на рис. 357. Ее полюсами являются выводы a и m.

Заметим, что рассмотренный метод не меняет числа контактов, но приводит к их инвертированию. Более подробные сведения об инверсных структурах можно найти в [24].

Упражнения

1. Найдите инверсную структуру контактной схемы, приведенной на рис. 358. Для инверсной структуры найдите минимальную ДНФ булевой функции и укажите:

1) (361)! число простых импликант, число вхождений аргументов и число букв с инверсиями;

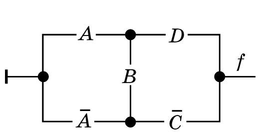


Рис. 358

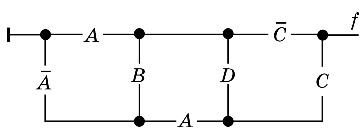


Рис. 359

2) (ЕКО) десятичные эквиваленты двоичных наборов значений аргументов, на которых инверсная структура находится в проводящем состоянии.

2. По схеме, приведенной на рис. 359, постройте инверсную структуру. Для инверсной структуры найдите минимальную КНФ и укажите:

1) (МЭГ) число знаков дизъюнкции, число вхождений аргументов и число инверсных аргументов;

2) (ТЗК) десятичные эквиваленты двоичных наборов значений аргументов, на которых инверсная структура находится в проводящем состоянии.

24.7. ДЕРЕВЬЯ И ЛЕС

Термин «дерево» для особой разновидности графов ввел в 1857 г. английский математик Артур Кэли (1821–1895), с 1870 г. иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук.

Несвязный граф, не содержащий циклов, называется **лесом**. Связный граф, не содержащий циклов, называется **деревом**. На рис. 360 приведен трехкомпонентный лес. Первую компоненту этого леса образует дерево с вершинами 1, 2, 3, 4, вторую — 5, 6, 7, 8, 9, третью — 10, 11.

Приведем без доказательств несколько теорем о деревьях.

Теорема 1. Всякое дерево содержит $n - 1$ ребер, где n — число вершин.

Теорема 2. Всякий лес содержит $n - k$ ребер, где k — число компонент связности.

Теорема 3. Любые две вершины дерева соединены точно одной простой цепью.

Теорема 4. Если в дереве любые две вершины соединить ребром, то в графе появится один цикл.

Доказательства теорем можно найти в [32; 41].

Если связный граф содержит цикл, то после удаления любого ребра, входящего в цикл, этот цикл разрушается, но связность графа сохраняется. Применим операцию разрушения циклов к каждому циклу графа. Тогда в графе не останется циклов и получится связный частичный граф, являющийся деревом. Полученное дерево называется **óстовом**, т. е. остовом называется связный частичный граф данного связного графа G, содержащий все вершины графа G, но не содержащий циклов. Рассмотрим, например, граф, изображенный на рис. 361. Удалим из него ребра $\{1, 4\}$ и $\{3, 4\}$. Получим остов, приведенный на рис. 362. Если удалить ребра $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$, то получим другой остов (рис. 363), и т. д.

Наименьшее число z, показывающее, сколько ребер необходимо удалить из графа, чтобы получить его остов, называется **цикломатическим** числом. Если n — число вершин, m — число ребер, k — число компонент, то

$$z = m - n + k,$$

то есть, чтобы найти цикломатическое число графа, необходимо из числа ребер вычесть число вершин и к результату прибавить число компонент.

В случае связного графа $k = 1$, следовательно,

$$z = m - n + 1.$$

Например, для графа, приведенного на рис. 361, значения m, n и z равны:

$$m = 5; \quad n = 4; \quad z = 5 - 4 + 1 = 2.$$

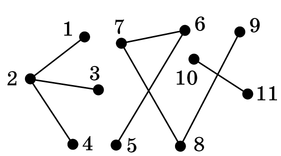


Рис. 360

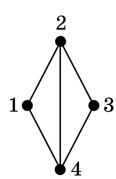


Рис. 361

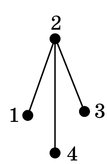


Рис. 362

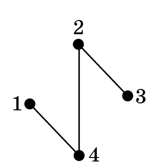


Рис. 363

24.8. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА ЦИКЛОВ

Пусть дан некоторый граф, содержащий циклы. Удалим из каждого цикла по одному ребру так, чтобы получился остов. Множество ребер, которые были удалены, обозначим буквой M. Вернем в остов какое-либо ребро из множества M, получим один цикл. Удалим из графа это ребро и вернем из множества M другое ребро, получим другой цикл и т. д. Каждому ребру множества M соответствует определенный цикл. Множество Q всех таких циклов называется **фундаментальной системой циклов** графа G, ассоциированной с его остовом. Очевидно, что

$$|Q| = z,$$

т. е. число циклов фундаментальной системы данного графа равно его цикломатическому числу.

Отметим еще раз: фундаментальная система циклов связана с данным остовом. Если взять другой остов, то, вообще говоря, ему будет соответствовать другой набор циклов, образующих фундаментальую систему.

В качестве примера рассмотрим граф, приведенный на рис. 364. Преобразуем его следующим образом:

а) из цикла 1, 2, 3, 1 удалим ребро $\{1, 3\}$;

б) из цикла 1, 2, 5, 1 удалим ребро $\{2, 5\}$;

в) из цикла 2, 3, 4, 2 удалим ребро $\{2, 3\}$;

г) из цикла 1, 2, 4, 5, 1 удалим ребро $\{1, 2\}$.

В результате получился остов (рис. 365). Вернем в него ребро $\{1, 3\}$, получим цикл, изображенный на рис. 366.

Аналогично получаем еще три цикла путем возвращения ребер $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$ и $\{1, 2\}$ (рис. 367, 368, 369).

На рис. 370 изображен другой остов того же графа (рис. 364). Соответствующая ему система фундаментальных циклов приведена на рис. 367, 368, 369 и 371. От предыдущей системы она отличается одним циклом.

Упражнения

1. (OO1). Найдите цикломатическое число графа, изображенного на рис. 349.

2. (XOX). В связном графе 18 вершин. Сколько ребер содержит его остов?

3. (МЮЗ). Сколько ребер содержит остов графа, двойственного по отношению к графу на рис. 350?

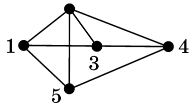


Рис. 364

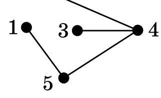


Рис. 365

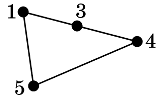


Рис. 366

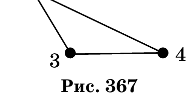


Рис. 367

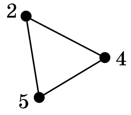


Рис. 368

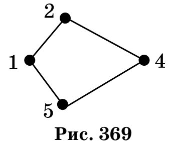


Рис. 369

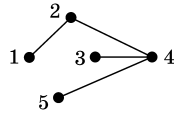


Рис. 370

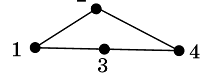


Рис. 371

4. **(ПСИ).** В дереве 25 вершин. К нему добавили 4 ребра. Сколько ребер стало в графе?

5. **(ЗИЙ).** В связном графе 20 вершин и 40 ребер. Сколько ребер необходимо удалить, чтобы получить остов?

6. **(ТБ7).** В дереве 20 вершин. Сколькими способами в дерево можно ввести цикл при помощи одного дополнительного ребра?

7. **(ЕММ).** В нуль-графе 38 вершин. Сколько ребер необходимо в него ввести, чтобы получить связный граф?

8. **(УЮН).** Сколько ребер необходимо удалить из дерева, содержащего 20 ребер, чтобы получился лес из 15 деревьев?

9. **(Я70).** Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) цикломатическое число дерева равно нулю?

2) всякое дерево является планарным графом?

3) фундаментальная система циклов дерева состоит из одного цикла?

4) формула для нахождения цикломатического числа справедлива и для непланарных графов?

5) формула для нахождения цикломатического числа справедлива и для псевдографов?

6) одновершинный граф с одной петлей является деревом?

7) изолированная вершина может быть компонентой леса?

8) граф, в котором число ребер равно числу вершин, может быть деревом?

24.9. КОДИРОВАНИЕ ДЕРЕВЬЕВ МЕТОДОМ ПРУФЕРА

Пусть даны n вершин графа, пронумерованных в некоторой последовательности. Сколько существует различных деревьев, которые могут быть изображены на этих n вершинах? Ответ на данный вопрос дал английский математик А. Кэли. Он нашел формулу вида

$$m = n^{n-2},$$

где $n > 1$, m — число всех возможных помеченных деревьев (напомним, что в помеченных графах все вершины пронумерованы и последовательность номеров является неизменной при любых вариантах соединения вершин ребрами).

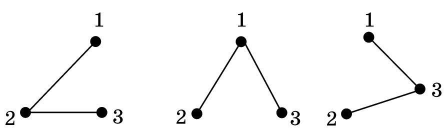


Рис. 372

Если $n = 2$, то согласно формуле А. Кэли существует одно дерево в виде пары вершин, соединенных одним ребром. При $n = 3$ существуют три помеченных дерева (рис. 372). При $n = 4$ число помеченных деревьев равно 16 (рис. 373) и т. д.

Немецкий математик Пруфер разработал метод кодирования деревьев, позволяющий для любого дерева на n вершинах однозначно найти его код в виде упорядоченной последовательности чисел $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$, где $a_1, a_2, ..., a_{n-2}$ — числа, принадлежащие множеству $\{1, 2, ..., n\}$, т. е. множеству номе-

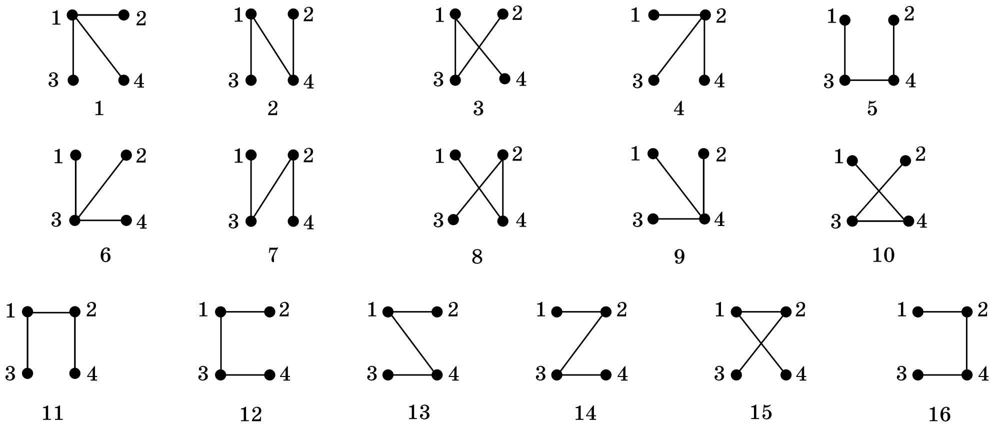


Рис. 373

ров вершин данного кодируемого дерева. Метод применим во всех случаях, когда $n > 2$. При $n = 3$ длина кода минимальна. Она равна 1. Если же $n = 2$, то длина кода равна нулю.

Процесс нахождения кода дерева поясним на примере графа, изображенного на рис. 374. В этом графе три висячих вершины: 2, 4, 7. Удалим из графа висячую вершину (вместе с ребром), имеющую наименьший номер. Это вершина 2. Номер вершины, инцидентной удаленному ребру, есть первое число искомого кода: число 1.

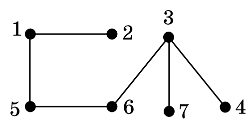


Рис. 374

В оставшемся графе висячими являются вершины 1, 4, 7. Удалим вершину 1 (имеющую наименьший номер). Число 5 записываем в искомый код после числа 1. Теперь висячими оказались вершины 4, 5, 7.

Удаляем вершину 4. Число 3 — это третий знак в коде. Получилось дерево с висячими вершинами 5 и 7. Удаляем вершину 5 и число 6 записываем в искомый код четвертым знаком. Пятым знаком записываем число 3. Осталось дерево, состоящее из двух вершин. На этом кодирование заканчивается. Найденный код имеет вид: 1 5 3 6 3.

24.10. ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВА ПО ЕГО КОДУ

Если задан код дерева, то по нему также однозначно может быть восстановлено (декодировано) графическое представление этого дерева. Пусть код имеет вид

$$K = 1\ 4\ 5\ 5\ 7\ 5\ 4\ 7.$$

В коде восемь чисел, следовательно, искомое дерево содержит 10 вершин: 1, 2, 3, ..., 10.

Система вершин дерева приведена на рис. 375. В коде нет номеров висячих вершин. Чтобы их найти, достаточно записать все те номера вершин, которые отсутствуют в коде. Порядок записи висячих вершин значения

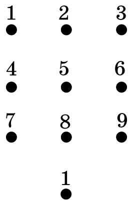


Рис. 375

не имеет, но из практических соображений их следует упорядочить по возрастанию:

$$W = \{2, 3, 6, 8, 9, 10\}.$$

Образуем из цифр кода K семейство, обозначив его той же буквой K, что и код дерева:

$$K = (1, 4, 5, 5, 7, 5, 4, 7).$$

Напомним, что семейство — это множество, элементы которого могут повторяться.

Приступаем к построению дерева. Действуем в соответствии с методом Пруфера (но в обратном порядке), выбираем всякий раз первый элемент из семейства K и наименьшее число из множества W:

1) вершина $1 \in K$ должна быть соединена с висячей вершиной, имеющей наименьший номер, т. е. с вершиной $2 \in W$. Следовательно, одно ребро найдено. Это $\{1, 2\}$. Удалим число 1 из семейства K, а из множества W удалим число 2. Так как вершина 1 в семействе K больше не повторяется, то она стала висячей, поэтому ее вводим в множество W. После первого этапа получаем:

$$K_1 = (4, 5, 5, 7, 5, 4, 7); \;\; W_1 = \{1, 3, 6, 8, 9, 10\};$$

2) вершину $4 \in K_1$ соединяем с вершиной $1 \in W_1$ — получили второе ребро: $\{1, 4\}$. Число 4 из семейства K_1 удаляем, а из множества W_1 удаляем число 1. Число 4 в множество W_1 не записываем, так как оно в семействе K_1 встречается еще один раз (то есть вершина 4 не является висячей). После второго этапа:

$$K_2 = (5, 5, 7, 5, 4, 7); \;\; W_2 = \{3, 6, 8, 9, 10\};$$

3) соединяем вершины $5 \in K_2$ и $3 \in W_2$. Получаем ребро $\{3, 5\}$. После третьего этапа:

$$K_3 = (5, 7, 5, 4, 7,); \;\; W_3 = \{6, 8, 9, 10\};$$

4) соединяем вершины $5 \in K_3$ и $6 \in W_3$. Получаем:

$$K_4 = (7, 5, 4, 7); \;\; W_4 = \{8, 9, 10\};$$

5) соединяем вершины $7 \in K_4$ и $8 \in W_4$. Тогда

$$K_5 = (5, 4, 7); \;\; W_5 = \{9, 10\};$$

6) соединяем вершины $5 \in K_5$ и $9 \in W_5$. Получаем ребро $\{5, 9\}$. Число 5 в семействе K_5 больше не встречается, поэтому записываем его в множество W_5. В результате получаем:

$$K_6 = (4, 7); \;\; W_6 = \{5, 10\};$$

7) соединяем вершины $4 \in K_6$ и $5 \in W_6$. Получили ребро $\{4, 5\}$. Число 4 записываем в множество W_6.

$$K_7 = (7); \;\; W_7 = \{4, 10\};$$

8) после соединения вершин $7 \in K_7$ и $4 \in W_7$ получаем ребро $\{4, 7\}$;

9) число 7 в семействе K_7 больше не встречается, поэтому записываем его в множество W_7, в котором после удаления вершины 4 осталось одно число 10. Получаем ребро $\{7, 10\}$.

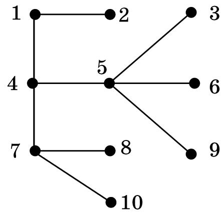


Рис. 376

На этом декодирование дерева заканчивается. Искомый граф приведен на рис. 376.

Если n — число вершин, то рассмотренным способом можно построить дерево по любой последовательности номеров вершин, насчитывающей $n - 2$ чисел. Общее количество таких последовательностей есть число размещений из n элементов по $n - 2$ с повторениями и равно n^{n-2}, что находится в полном соответствии с формулой, найденной А. Кэли для числа всех возможных деревьев.

Если к графу (рис. 376) применить метод Пруфера, то получится тот же код, на основе которого было построено дерево.

В заключение подраздела отметим, что по всякой аналитически представленной булевой функции может быть построена «граф-схема» в виде некоторого дерева (см. подраздел 9.2 темы «Булева алгебра» данного пособия). Благодаря этому обстоятельству мы получаем еще один способ числового представления булевых функций, заданных не только в ДНФ или КНФ, но и в любой из форм более высоких порядков.

Упражнения

1. (ИВЕ). На рис. 373 укажите номера графов, гомеоморфных графу, приведенному на рис. 374.

2. Укажите коды деревьев (рис. 373):

1) (464)! 1, 2, 3, 4; 2) (445)! 5, 6, 7, 8; 3) (ВЕХ)! 9, 10, 11, 12; 4) (613)! 13, 14, 15, 16.

3. (ПАО). Найдите код дерева (рис. 377).

4. (161). Найдите код дерева (рис. 378).

5. Определите число вершин дерева и число его ребер, если код дерева задан семейством:

1) (ТТ2) (1, 2, 3, 4); 2) (ЛЯ6) (1, 1, 1, 2, 2); 3) (ТЕЗ) (1, 1, 1, 1, 2).

6. По коду дерева найдите номера висячих вершин:

1) (904) (1, 4, 3, 3, 3, 5); 3) (ППШ) (2, 2, 2, 2, 3, 4, 5);

2) (ЗАМ) (1, 5, 5, 5, 6, 6); 4) (ТИН) (6, 6, 6, 1, 1, 4).

7. (ФА1). Найдите код дерева (рис. 379).

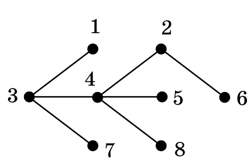


Рис. 377

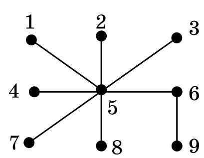


Рис. 378

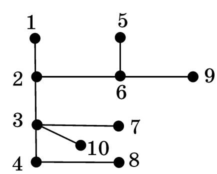


Рис. 379

8. Укажите степени вершин дерева (номера вершин упорядочить по возрастанию), если его код имеет вид:

1) (ТПИ) (2, 6, 3, 4, 3, 6, 2, 3); 3) (С53) (1, 4, 11, 1, 1, 4, 2, 2, 11);

2) (314) (4, 4, 2, 5, 5, 3, 6); 4) (ЗУШ) (1, 4, 1, 4, 6, 6, 6, 6).

9. Укажите вершины дерева, степени которых равны двум, если дерево задано кодом:

1) (ВИК) (2, 1, 5, 1, 4, 7, 8); 3) (Р88) (5, 6, 5, 4, 3, 4, 8);

2) (327) (3, 5, 6, 4, 7, 7); 4) (ТАН) (2, 6, 5, 2, 3, 4, 4).

10. Укажите вершины дерева, степени которых равны трем, если дерево задано кодом:

1) (41Р) (5, 8, 6, 6, 3, 5, 3, 3); 3) (ШИТ) (2, 3, 1, 4, 4, 1, 2, 6, 6);

2) (МХС) (2, 2, 2, 1, 3, 1, 9, 9); 4) (ТКУ) (2, 2, 1, 1, 6, 6, 1, 7, 7).

11. (411). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) можно ли по коду дерева найти номера его вершин?

2) изоморфны ли деревья, коды которых имеют вид (1, 1, 1, 1) и (4, 4, 4, 4)?

3) всякое ли дерево, содержащее хотя бы одно ребро, является двудольным графом?

4) верно ли, что если к дереву добавить ребро, то получится граф, содержащий цикл?

5) верно ли, что если из дерева удалить одно ребро, то получится двухкомпонентный граф?

6) верно ли, что всякий двудольный граф является деревом?

7) всякое ли дерево является планарным графом?

8) существуют ли деревья, у которых все вершины являются висячими?

24.11. РАЗРЕЗЫ

Разделяющим множеством графа G называется такое множество его ребер, после удаления которых получается несвязный граф. Например, если из графа (рис. 364) удалить ребра $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, то получится двухкомпонентный граф (рис. 380). Следовательно, множество

$$\{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}\} \tag{8}$$

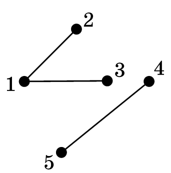


Рис. 380

является разделяющим.

Разрезом называется такое разделяющее множество, у которого нет ни одного разделяющего собственного подмножества. Например, множество (8) разрезом не является, так как оно имеет разделяющее подмножество

$$\{\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}\}. \tag{9}$$

Если из множества (9) вернуть на прежнее место какое-либо ребро, то граф окажется связным. Следовательно, это множество есть разрез. Как найти разрезы? В случае плоских графов разрез — это линия, выходящая из какой-либо грани, пересекающая ребро, входящая во вторую грань, пересекающая еще какое-либо ребро, входящая в следующую грань и так далее

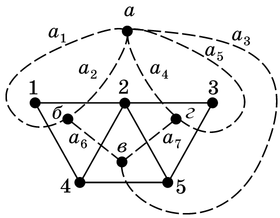


Рис. 381

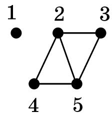


Рис. 382

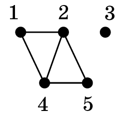


Рис. 383

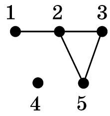


Рис. 384

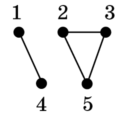


Рис. 385

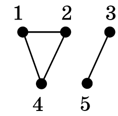


Рис. 386

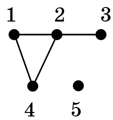


Рис. 387

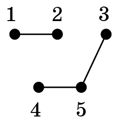


Рис. 388

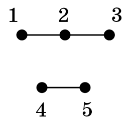


Рис. 389

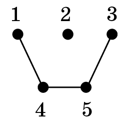


Рис. 390

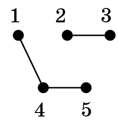


Рис. 391

и входящая снова в исходную грань. Очевидно, что эта линия есть простой цикл двойственного графа.

Если отыскать все эти простые циклы, то тем самым будут найдены и все разрезы. В качестве примера рассмотрим рис. 381, где приведен граф на пяти вершинах и двойственный ему граф, изображенный пунктирными линиями. В данном случае каждый цикл двойственного графа содержит вершину a. В связи с этим воспользуемся методом, описанным в подразделе 23.3, и найдем все простые циклы, содержащие вершину a:

$$a_1\,a_2;\;\; a_4\,a_5;\;\; a_1\,a_6\,a_3;\;\; a_2\,a_6\,a_3;\;\; a_3\,a_7\,a_4;\;\; a_3\,a_7\,a_5;$$
$$a_1\,a_6\,a_7\,a_4;\;\; a_1\,a_6\,a_7\,a_5;\;\; a_2\,a_6\,a_7\,a_4;\;\; a_2\,a_6\,a_7\,a_5,$$

где символами a_1, a_2, ..., a_7 обозначены ребра двойственного графа. Между ребрами двойственного и основного (исходного) графов существует соответствие (рис. 381):

$$a_1 — \{1, 4\};\;\; a_2 — \{1, 2\};\;\; a_3 — \{4, 5\};\;\; a_4 — \{2, 3\};$$
$$a_5 — \{3, 5\};\;\; a_6 — \{2, 4\};\;\; a_7 — \{2, 5\}.$$

На основе этого соответствия, находим разрезы:

1) {{1, 2}, {1, 4}} (рис. 382);
2) {{2, 3}, {3, 5}} (рис. 383);
3) {{1, 4}, {4, 5}, {2, 4}} (рис. 384);
4) {{1, 2}, {4, 5}, {2, 4}} (рис. 385);
5) {{2, 3}, {4, 5}, {2, 5}} (рис. 386);
6) {{3, 5}, {4, 5}, {2, 5}} (рис. 387);
7) {{1, 4}, {2, 3}, {2, 5}, {2, 4}} (рис. 388);
8) {{1, 4}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 5}} (рис. 389);
9) {{1, 2}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 3}} (рис. 390);
10) {{1, 2}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 5}} (рис. 391).

На этом подраздел о разрезах графов завершим. Каждый, кто заинтересуется этой темой, может найти подробности в существующей научно-технической литературе, например, в [10, 16, 41].

Упражнения

1. (НИР)! Сколько разрезов, состоящих из двух ребер, содержит граф, приведенный на рис. 361? Сколько в нем разрезов, содержащих по 3 ребра?

2. (ИЯВ)! Сколько в графе, приведенном на рис. 392, разрезов, содержащих по два ребра? по три ребра? по четыре ребра?

3. (ЛИГ). Сколько разрезов в n-вершинном дереве?

4. (ДИД)! Сколько в графе (см. рис. 393) разрезов, содержащих по два ребра? по три ребра? по четыре ребра?

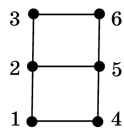


Рис. 392

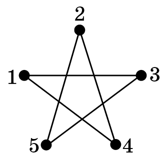


Рис. 393

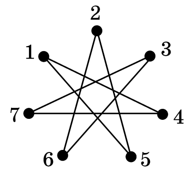


Рис. 394

5. (УКЕ). В связном графе 15 вершин. Степень каждой вершины равна двум. Сколько разрезов имеет граф?

6. (ЦКР). Определите число разрезов в графе на рис. 394.

7. (КТТ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли разрез состоять из одного ребра?

2) могут ли в разрез входить петли?

3) могут ли в разрез входить кратные ребра?

4) может ли связный граф оказаться трехкомпонентным, если из него удалить все ребра, входящие в некоторый разрез?

5) применимо ли понятие разреза к несвязному графу?

6) существует ли граф, в разрез которого входят все его ребра?

7) может ли число разрезов в графе превышать число его вершин?

24.12. ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ГРАФА. ГИПОТЕЗА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

На географических картах территории различных стран обычно раскрашивают так, что любые две соседние страны имеют различные цвета. Поставим в соответствие каждой стране некоторую вершину, и если страны имеют общую границу, то соответствующие им вершины соединим ребром. Получим плоский граф. Спрашивается, сколько красок различных цветов необходимо для раскрашивания вершин графа, если каждое ребро должно соединять вершины разного цвета? Наименьшее число красок, удовлетворяющих этому условию, называется **хроматическим числом графа** [41; 44].

Гипотезой четырех красок называется утверждение о том, что хроматическое число всякого **планарного** графа без петель не больше четырех. Впервые сведения об этой гипотезе появились в 1879 г., когда А. Кэли в первом томе Трудов Королевского географического общества опубликовал статью о проблеме четырех красок. Почти 100 лет эта проблема оставалась одной из самых знаменитых проблем теории графов, и лишь в последние годы стали появляться сообщения о вариантах ее решения. Например, доказано, что любая карта, число граней которой меньше 39, может быть раскрашена четырьмя красками». Р. Уилсон пишет: «... всякий планарный граф, имеющий менее 52 вершин, 4-раскрашиваем» [41, с. 105]. В [37, с. 88] читаем: «... верно ли, что хроматическое число любого графа, расположенного на плоскости, не больше четырех? Положительный ответ на этот вопрос был лишь недавно получен с помощью ЭВМ». А в [16, с. 159] приведено доказательство теоремы: «Хроматическое число планарного графа не превышает четырех». Причем доказательство дано на умозрительном уровне, без применения ЭВМ.

Таким образом, можно считать, что проблема четырех красок **для планарных** графов решена. В случае **непланарных** графов все гораздо сложнее, хотя уже получены кое-какие частные результаты. Например, хроматическое число всякого двудольного графа равно двум. Чтобы убедиться в этом, достаточно все вершины множества V_1 окрасить одним цветом, а множества V_2 — другим. При такой окраске каждое ребро соединяет вершины разных цветов.

Хроматическое число полного графа на n вершинах равно n. Для доказательства этого утверждения достаточно предположить, что вершины окрашены $n-1$ цветами. Так как в полном графе каждая пара вершин соединена ребром, то среди C_n^2 ребер окажется ребро, соединяющее одноцветные вершины. Отсюда следует, что число $n-1$ не является хроматическим числом полного графа.

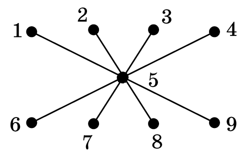


Рис. 395

Теорема. Если ρ — наибольшая из степеней вершин графа G, то его можно раскрасить $\rho+1$ красками [41].

В этой теореме, справедливой для произвольного графа, не предполагается, что ρ является хроматическим числом. Например, наибольшая степень вершины графа на рис. 395 равна 8. Согласно теореме этот граф можно раскрасить девятью красками. Однако хроматическое число его равно двум, т. е. для раскраски графа достаточно двух красок.

На этом знакомство с проблемой раскраски графов закончим. Подробности можно найти в [10; 41].

Упражнения

1. (ЗИТ). Найдите хроматическое число для каждого из графов, приведенных на рис. 337 данного раздела.

2. (ФАС). Найдите хроматическое число для каждого из графов (рис. 348), исключая граф 3 (с петлей).

3. (ТКВ). Чему равно хроматическое число связного плоского графа с двумя гранями, в котором 35 вершин и 35 ребер?

4. (899). В связном графе 6 вершин и 15 ребер (петель и кратных ребер нет). Найдите хроматическое число.

5. (ЮРМ). Известно, что хроматическое число простого связного графа, содержащего 28 ребер, равно 8. Сколько в нем вершин?

25 ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

25.1. ПОНЯТИЕ ОРГРАФА. МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ. ИЗОМОРФИЗМ

Пусть V — множество вершин графа. Его квадратом V^2 является множество упорядоченных пар (v, w), где $v, w \in V$. Каждой паре (v, w) соответствует **ориентированное ребро** в виде линии, оканчивающейся стрелкой. Ориентированные ребра принято называть **дугами**. Началом дуги является вершина $v \in V$, концом — вершина $w \in V$. Граф, содержащий только дуги, называется **ориентированным графом** или **орграфом**.

Аналитически орграф можно представить множествами V и F (если нет кратных дуг), где $F \subseteq V^2$.

Например, для графа на рис. 396 V и F имеют вид:

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
$F = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 4), (4, 5)\}$.

На рис. 396 вершины обозначены незачерненными кружками. Такое обозначение вершин принято во всем разделе «Ориентированные графы» данного пособия.

Заменим в орграфе все дуги ребрами, получим граф, который называется **основанием** данного орграфа.

Два орграфа изоморфны, если изоморфны их основания и совпадают направления всех соответствующих дуг. Например, графы, приведенные на рис. 396 и 397, не являются изоморфными, поскольку дуги, соединяющие вершины 2 и 3, направлены в противоположные стороны. Для каждого орграфа можно построить матрицу смежности. Условимся считать, что первым элементам пар, обозначающих дуги, соответствуют строки матрицы, вторым элементам — колонки. На рис. 398 приведена матрица, построенная для графа, изображенного на рис. 396.

Орграф может содержать и кратные дуги. Пример такого графа приведен на рис. 399. Его матрица смежности изображена на рис. 400.

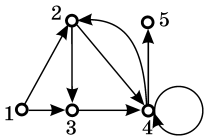


Рис. 396

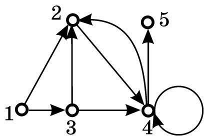


Рис. 397

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	0
4	0	1	0	1	1
5	0	0	0	0	0

Рис. 398

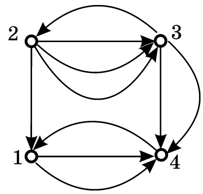


Рис. 399

	1	2	3	4
1	0	0	0	2
2	1	0	3	0
3	0	1	0	2
4	1	0	0	0

Рис. 400

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	1	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	0	2

1

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	1	0
3	1	0	0	0
4	0	1	1	0

2

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	0	0
3	0	0	0	2
4	0	0	0	0

3

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	0	0	0	2
3	0	0	2	0
4	0	0	0	0

4

	1	2	3	4
1	0	0	2	0
2	1	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	1	0

5

	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	1	0

6

	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	2	1
4	0	0	0	0

7

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	1	0	0	0

8

Рис. 401

Всякий неориентированный граф может быть представлен в виде орграфа. Для этого достаточно все его ребра заменить парами встречных дуг.

Если в орграфе две вершины соединены парой встречных дуг, то пару можно заменить одним неориентированным ребром. Граф, содержащий дуги и неориентированные ребра, называется **смешанным** графом.

Упражнения

1. (УСЕ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) являются ли кратными две встречные дуги, соединяющие две вершины?

2) является ли нуль-граф на пяти вершинах частичным по отношению к орграфу, приведенному на рис. 396?

3) могут ли ориентированный и неориентированный графы иметь одну и ту же матрицу смежности?

4) может ли основание орграфа содержать кратные ребра, если в орграфе нет ни одной кратной дуги?

5) несвязный орграф D содержит изолированную вершину. Удалим эту вершину, получим ориентированный подграф D_1. Изоморфны ли орграфы D и D_1?

6) орграф D состоит из двух вершин, соединенных дугой. Эту дугу заменили встречной дугой. Получился новый орграф D_1. Верно ли, что орграфы D и D_1 изоморфны?

7) верно ли, что если две матрицы смежности не совпадают, то соответствующие орграфы всегда неизоморфны?

2. (ХХН). Сколько ребер имеет основание орграфа, приведенного на рис. 399?

3. На рис. 401 изображены восемь матриц смежности, каждая из которых задает некоторый орграф на четырех вершинах. Укажите:

1) (УМБ) несвязные орграфы;

2) (УТВ) орграфы, содержащие петли;

3) (ЛЯТ) орграфы, содержащие кратные дуги;

4) (ЦАД) орграфы, основания которых — полные графы.

25.2. СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ ОРГРАФА

Степени вершин орграфа определяются несколько сложнее по сравнению с неориентированными графами, поскольку в орграфах необходимо учитывать, сколько дуг входит в каждую вершину и сколько выходит. **Степень входа** вершины равна числу входящих в нее дуг. **Степень выхода** вершины равна числу выходящих из нее дуг.

В [44, с. 77] вместо терминов «степень входа вершины» и «степень выхода вершины» используются словосочетания: «отрицательная степень вершины» и «положительная степень вершины». В [10, с. 118] применены термины: «полустепень захода» и «полустепень исхода» и используются обозначения соответственно: $id(v)$ и $od(v)$. В данной книге применяются ранее принятые обозначения вида $\rho(i)$, где i — номер вершины, но с добавлением нижних индексов «вх» и «вых», обозначающих соответственно «вход» и «выход». Например, запись $\rho(8)_{\text{вых}} = 6$ читается так: степень выхода восьмой вершины равна шести, т. е. из восьмой вершины выходит шесть дуг.

В орграфе, приведенном на рис. 399, степени вершин равны:

$$\rho(1)_{\text{вх}} = 2;\quad \rho(1)_{\text{вых}} = 2;\quad \rho(2)_{\text{вх}} = 1;\quad \rho(2)_{\text{вых}} = 4;$$
$$\rho(3)_{\text{вх}} = 3;\quad \rho(3)_{\text{вых}} = 3;\quad \rho(4)_{\text{вх}} = 4;\quad \rho(4)_{\text{вых}} = 1.$$

Если в орграфе n вершин, то число K его дуг равно:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{\text{вх}} + \sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{\text{вых}}}{2}. \tag{10}$$

Например, в ориентированом графе (рис. 399) число дуг равно:

$$K = \frac{2+1+3+4+2+4+3+1}{2} = 10.$$

Степени входа и выхода орграфа обладают следующим свойством: сумма степеней входа всех вершин равна сумме степеней выхода всех вершин, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{\text{вх}} = \sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{\text{вых}}.$$

Следовательно, формулу (10) можно упростить и записать в виде:

$$K = \sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{\text{вх}}, \text{ либо } K = \sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{\text{вых}}.$$

Если ориентированный граф на n вершинах представлен матрицей смежности, то степень выхода i-й вершины равна сумме всех чисел i-й строки матрицы. Степень входа i-й вершины равна сумме чисел i-й колонки матрицы ($i = 1, 2, ..., n$).

Упражнения

1. (АИЮ). Определите степень входа каждой из вершин графа на рис. 396.

2. (ЭЛЫ). Определите степень выхода каждой из вершин графа на рис. 397.

3. Орграфы на рис. 401 заданы матрицами смежности. Укажите номера орграфов (т. е. их матриц):

1) (ЭЭТ) содержащих хотя бы одну вершину со степенью входа, равной трем;

2) (ШЛК) содержащих хотя бы одну вершину со степенью выхода, равной трем;

3) (ЦТС) в которых каждая из вершин 1 и 2 имеет степень входа, равную единице;

4) (ЕМУ) в которых каждая из вершин 1 и 2 имеет степень выхода, равную единице.

25.3. МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ В ОРГРАФАХ

Маршруты, цепи и циклы в орграфах определяются так же, как и в случае неориентированных графов, но с учетом того, что движение возможно лишь в направлении стрелок. Например, последовательность вершин 1, 3, 2, 4 (рис. 396) маршрутом не является, поскольку движение от вершины 3 к вершине 2 осуществлено навстречу стрелке. Примеры «правильных» маршрутов (рис. 396): 1, 2, 3, 4, 2; 1, 3, 4, 2, 4, 5; 1, 3, 4, 2, 3, 4 и др. В связи с этим в орграфах существует понятие **достижимости**. Вершина v_2 называется достижимой из вершины v_1, если существует маршрут, ведущий из вершины v_1 к вершине v_2.

Если в маршруте нет повторяющихся дуг, то маршрут называется **ориентированной цепью**. Если в ориентированной цепи нет повторяющихся вершин, то такая цепь называется **простой ориентированной цепью**. Простая ориентированная цепь может быть замкнутой и разомкнутой. Замкнутая простая ориентированная цепь называется простым **ориентированным циклом**.

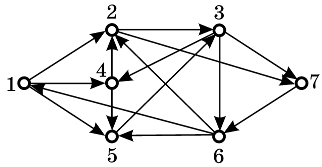


Рис. 402

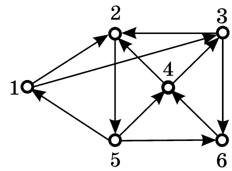


Рис. 403

Чтобы найти все простые ориентированные цепи, соединяющие две заданные вершины, можно воспользоваться методом, рассмотренным в подразделе 23.3 данного раздела, но с соблюдением условия: не двигаться навстречу стрелкам. Для примера найдем все простые цепи, соединяющие вершины 1 и 7 в орграфе на рис. 402. Из вершины 1 выходят три дуги: (1, 2), (1, 4) и (1, 5). Дугу, входящую в вершину 1, не учитываем. На втором этапе продолжаем движение из вершин 2, 4, 5. В результате получим двухзвенные (по две дуги) простые цепи:

1, 2, 3; 1, 2, 7; 1, 4, 2; 1, 4, 5; 1, 5, 3.

Одна из них — цепь 1, 2, 7 — является искомой. Остальные имеют продолжение. После завершения всех этапов получаем девять простых цепей:

1, 2, 7; 1, 2, 3, 7; 1, 4, 2, 7; 1, 5, 3, 7; 1, 4, 2, 3, 7;
1, 4, 5, 3, 7; 1, 5, 3, 4, 2, 7; 1, 5, 3, 6, 2, 7; 1, 4, 5, 3, 6, 2, 7.

Аналогичным образом можно найти циклы, начинающиеся, например, в вершине 1 и в ней же заканчивающиеся. После первого этапа получаем три дуги: 1, 2; 1, 4; 1, 5.

После второго — пять цепей:

1, 2, 3; 1, 2, 7; 1, 4, 2; 1, 4, 5; 1, 5, 3.

После третьего — десять:

1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 3, 7; 1, 2, 7, 6; 1, 4, 2, 3;
1, 4, 2, 7; 1, 4, 5, 3; 1, 5, 3, 4; 1, 5, 3, 6; 1, 5, 3, 7.

Начиная с четвертого этапа, появляются искомые циклы. После четвертого этапа получаем следующие три цикла:

1, 2, 3, 6, 1; 1, 2, 7, 6, 1; 1, 5, 3, 6, 1.

После пятого — пять циклов:

1, 2, 3, 7, 6, 1; 1, 4, 2, 3, 6, 1; 1, 4, 2, 7, 6, 1;
1, 4, 5, 3, 6, 1; 1, 5, 3, 7, 6, 1.

После шестого — два цикла:

1, 4, 2, 3, 7, 6, 1; 1, 4, 5, 3, 7, 6, 1.

После седьмого находим самый длинный цикл: 1, 5, 3, 4, 2, 7, 6, 1, содержащий все вершины орграфа. Общее число циклов, начинающихся в вершине 1 и в ней же оканчивающихся, равно 11.

Упражнения

1. На рис. 403 изображен связный орграф, содержащий шесть вершин. Пусть начальной является вершина 1, конечной — вершина 6.

1) (МД1). Сколько существует простых цепей, ведущих от вершины 1 к вершине 6?

2) (392)! Сколько среди них цепей, содержащих по три вершины? по четыре вершины? по пять вершин? по шесть вершин?

2. (303). Сколько простых ориентированных циклов содержит орграф на рис. 403, если каждый цикл начинается и заканчивается в вершине 1?

3. (424). Укажите последовательность вершин, образующих самый длинный цикл в графе на рис. 403. Начинается цикл с вершины 1 и заканчивается также вершиной 1.

4. Обратимся к рис. 403:

1) (ИЯШ). Сколько простых ориентированных циклов содержит орграф, если каждый цикл начинается с вершины 2 и заканчивается в этой же вершине 2?

2) (Р76). Сколько среди них циклов, содержащих по две дуги? по три дуги? по четыре дуги? по пять дуг?

3) (237). Укажите номера вершин самого длинного цикла, в котором началом и концом является вершина 2.

25.4.
СВЯЗНОСТЬ ОРГРАФА. ЭЙЛЕРОВЫ ЦЕПИ И ЦИКЛЫ В ОРГРАФЕ

Орграф на n вершинах называется **сильно связным**, если существует простая ориентированная цепь, соединяющая любые две вершины v_i и v_j ($i, j = 1, 2, ..., n$). Примером является орграф, приведенный на рис. 404. В этом орграфе имеется всего 49 упорядоченных пар вершин: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1) и т. д. Для каждой из этих пар существует по крайней мере одна простая цепь. Например, для пары (1, 1) имеем 1, 2, 4, 1 (а также 1, 2, 3, 6, 7, 4, 1). Вершины 2 и 1 соединены короткой цепью 2, 4, 1 и более длинной — 2, 3, 6, 7, 4, 1. Вершина 3 соединена с вершиной 2 четырьмя простыми цепями: 3, 6, 2; 3, 6, 7, 5, 2; 3, 6, 7, 4, 5, 2; 3, 6, 7, 4, 1, 2 и т. д.

Орграф называется **слабо связным**, если его основанием является связный граф [32; 44]. Орграф называется **несвязным**, если число компонент его основания превышает единицу.

Ориентированная замкнутая цепь называется **эйлеровой**, если она содержит все дуги графа (эйлеров цикл). Если ориентированная разомкнутая цепь содержит все дуги графа, то такая цепь называется **полуэйлеровой**.

Теорема. Орграф содержит замкнутую эйлерову цепь тогда и только тогда, когда он является слабо связным и когда каждая вершина имеет степень входа, равную степени выхода. (Доказательство можно найти в [44, с. 79].) Пример, иллюстрирующий теорему, приведен на рис. 405. Замкнутая цепь, содержащая все дуги графа, имеет вид 1, 4, 5, 3, 5, 2, 4, 3, 2, 1 либо 1, 4, 3, 2, 4, 5, 3, 5, 2, 1 и др.

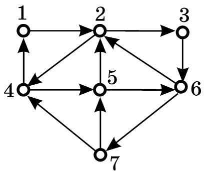


Рис. 404

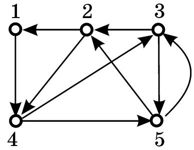


Рис. 405

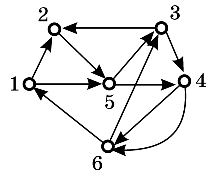


Рис. 406

Следствие из теоремы: ориентированный граф содержит разомкнутую эйлерову цепь, если одновременно выполняются следующие условия:

а) орграф является слабо связным;

б) в орграфе существует одна вершина, степень выхода которой на единицу больше степени входа;

в) в орграфе существует одна вершина, степень входа которой на единицу больше степени выхода;

г) степень входа каждой из остальных вершин равна степени выхода.

На рис. 406 приведен орграф, для которого:

$$\rho(1)_{\text{вых}} - \rho(1)_{\text{вх}} = 1;\ \ \rho(2)_{\text{вх}} - \rho(2)_{\text{вых}} = 1;\ \ \rho(3)_{\text{вх}} = \rho(3)_{\text{вых}} = 2;$$
$$\rho(4)_{\text{вх}} = \rho(4)_{\text{вых}} = 2;\ \ \rho(5)_{\text{вх}} = \rho(5)_{\text{вых}} = 2;\ \ \rho(6)_{\text{вх}} = \rho(6)_{\text{вых}} = 2,$$

следовательно, орграф является полуэйлеровым. Пример полуэйлеровой цепи:

1, 5, 3, 2, 5, 4, 6, 3, 4, 6, 1, 2.

Упражнения

1. (ООЕ). Укажите слабо связные орграфы (рис. 407).

2. (362). Укажите сильно связные орграфы (рис. 407).

3. (А13). Укажите несвязные орграфы (рис. 407).

4. (455). Укажите полуэйлеровы орграфы (рис. 407).

5. (ПИ6). Укажите эйлеровы орграфы (рис. 407).

6. (137). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) существуют ли сильно связные орграфы на двух вершинах?

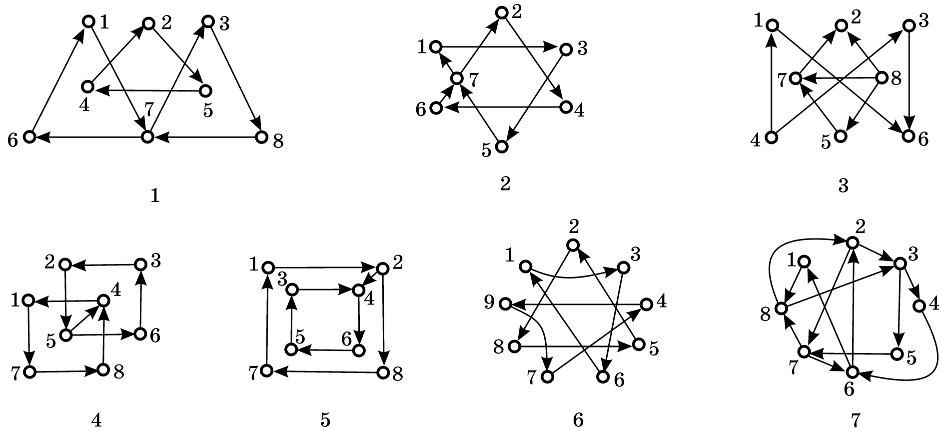


Рис. 407

2) существуют ли сильно связные орграфы, не являющиеся слабо связными?

3) верно ли, что всякая полуэйлерова цепь является простой цепью в орграфе?

4) существуют ли слабо связные орграфы, являющиеся и сильно связными?

5) верно ли, что всякий эйлеров цикл является простым циклом в орграфе?

6) существуют ли орграфы, в которых сумма степеней входа всех вершин на 2 больше суммы степеней выхода всех вершин?

7) является ли сильно связным орграф, состоящий из одной вершины и одной петли?

25.5. ПОЛНЫЙ ОРГРАФ

Орграф называется **полным**, если его основание есть полный граф. Полный орграф называют также **турниром** [10; 41]. (В [10, с. 120] вместо термина «ориентированный полный граф» используется словосочетание «направленный полный граф».)

Полный орграф можно определить с использованием понятия дуги: орграф без петель называется полным, если каждая пара его вершин соединена точно одной дугой.

В случае неориентированных графов для всякого n существует единственный полный граф (n — число вершин). Для турниров верным является другое утверждение: если n — число вершин, то существует S полных орграфов:

$$S = 2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}, \qquad (11)$$

где $n > 1$. (В принципе можно принять и $n = 1$. Но в этом случае граф представляет собой изолированную вершину, т. е. в нем нет дуг.)

Чтобы убедиться в справедливости формулы (11), возьмем в качестве исходного какой-либо полный орграф с n вершинами и каждой его дуге поставим во взаимно однозначное соответствие двоичный разряд. Каждую дугу исходного графа обозначим нулем. Получим двоичное число, состоящее из C_n^2 нулей. Заменим в этом числе какой-либо нуль единицей и направление соответствующей дуги поменяем на обратное — получим новый полный орграф, отличающийся от исходного ориентацией дуги, которой соответствует единица. Аналогичным образом можно выбирать любые двоичные числа, при этом различным числам будут соответствовать различные орграфы.

Таким образом, общее число полных орграфов на n вершинах равно числу всех двоичных кодов, длина каждого из которых составляет C_n^2 двоичных разрядов, что и доказывает справедливость формулы (11).

Пример полного орграфа на пяти вершинах приведен на рис. 408. На рис. 409

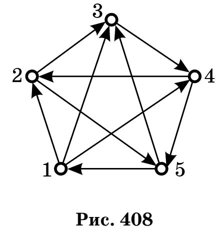


Рис. 408

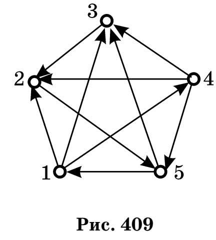


Рис. 409

изображен другой полный орграф с тем же числом вершин, но отличающийся от графа на рис. 408 ориентацией дуг (2, 3) и (3, 4).

Из формулы (11) следует, что число полных орграфов быстро растет с увеличением числа n.

Например:

- если $n = 2$, то $S = 2$;
- если $n = 3$, то $S = 8$;
- если $n = 4$, то $S = 64$;
- если $n = 5$, то $S = 1024$, и т. д.

Приведем несколько теорем о полных орграфах.

Теорема 1. Если полный орграф на n вершинах содержит хотя бы две вершины, степени выхода которых одинаковы, то в этом орграфе имеется хотя бы один простой цикл, содержащий три вершины [3, с. 66].

На рис. 408 изображен ориентированный граф, в котором вершины 2, 4, 5 имеют одинаковую степень выхода. Следовательно, в нем найдутся такие три вершины, что соединяющие их дуги образуют простой цикл:

$$1, 2, 5, 1; \quad 1, 4, 5, 1; \quad 3, 4, 5, 3 \quad \text{и др.}$$

Теорема 2. Во всяком полном орграфе имеется простая цепь, проходящая через все вершины орграфа [3].

Для орграфов на рис. 408 и 409 примерами являются цепи соответственно

$$2, 3, 4, 5, 1, 2; \quad 2, 5, 1, 4, 3, 2.$$

Теорема 3. Всякий полный сильно связный орграф — гамильтонов [41].

Теорема 4. Всякий полный орграф — полугамильтонов.

Очевидно, что теорема 4 является следствием из теоремы 2.

Упражнения

1. (У51). Сколько существует турниров на шести вершинах, если во всех турнирах дуги (1, 2), (1, 3), (2, 3) имеют одну и ту же ориентацию?

2. (С32). Сколько турниров можно построить на основе орграфа, содержащего 10 вершин и 36 дуг, путем дополнения его до полного, если ориентация всех 36 дуг исходного орграфа в каждом турнире является неизменной?

3. (РАЗ). Укажите номера вершин в графе на рис. 409, последовательность которых образует гамильтонов цикл, если начальной является вершина 1.

4. (ВБО). Определите сумму степеней выхода всех вершин турнира на десяти вершинах.

5. (5С5). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что существуют эйлеровы турниры на шести вершинах?

2) верно ли, что существуют турниры на девяти вершинах, содержащие эйлеров цикл?

3) является ли гамильтоновым граф на рис. 409?

4) существуют ли полные орграфы, не являющиеся сильно связными?

5) всякий ли турнир является слабо связным орграфом?

6) существуют ли полные орграфы, у которых каждая вершина имеет степень входа, равную степени выхода?

7) существуют ли турниры, содержащие 66 дуг?

25.6. О ТЕОРИИ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_m$ — непустые подмножества некоторого множества E. Составим из них семейство L, содержащее m подмножеств:

$$L = (M_1, M_2, \ldots, M_m).$$

Из каждого подмножества, входящего в семейство L, выберем по одному элементу так, чтобы получилось упорядоченное множество W, содержащее m различных элементов. Множество W называется **трансверсалью** семейства L. (В [41, с. 148] трансверсаль называется также **системой различных представителей**.)

Рассмотрим двудольный орграф (рис. 410) для случая, когда

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad L = (M_1, M_2, M_3),$$
$$M_1 = \{1, 2\}; \quad M_2 = \{1, 2, 3\}; \quad M_3 = \{2, 4, 5\}.$$

На рис. 410 дуги показывают, из каких элементов множества E состоят подмножества M_1, M_2 и M_3. Например, от вершины M_1 ведут две дуги к вершинам с номерами 1 и 2. Это значит, что подмножество M_1 содержит два элемента: $M_1 = \{1, 2\}$.

Выберем из каждого подмножества M_1, M_2, M_3 по одному элементу так, чтобы выбранные элементы не повторялись:

$$1 \in M_1, \quad 2 \in M_2, \quad 4 \in M_3.$$

Получим трансверсаль вида

$$W_1 = \{1, 2, 4\}.$$

Из рис. 410 видно, что существуют и другие трансверсали:

$$W_2 = \{1, 2, 5\};$$
$$W_3 = \{1, 3, 4\};$$
$$W_4 = \{2, 3, 4\}.$$

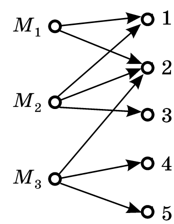


Рис. 410

Очевидно, что не всякое упорядоченное подмножество множества E является трансверсалью. Например, если выбрать

$$1 \in M_1, \quad 1 \in M_2, \quad 2 \in M_3,$$

то трансверсаль не получим, так как все элементы, входящие в трансверсаль, должны быть различными. Не является трансверсалью и множество $\{3, 4, 5\}$, поскольку в нем отсутствует элемент, принадлежащий подмножеству M_1.

25.7. МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ВСЕХ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ

Если дано множество E и семейство L, то возможны следующие вопросы:

1) существует ли для L трансверсаль?

2) как найти все трансверсали?

Признак, по которому можно определить, имеется ли в L трансверсаль, дает теорема Ф. Холла, доказанная им в 1935 г. С формулировкой и доказательством теоремы можно ознакомиться по [41]. Здесь мы ее рассматривать не будем, а сразу перейдем ко второй задаче, т. е. выясним, как найти все трансверсали. Процесс их нахождения поясним на примере орграфа, приведенного на рис. 410. Но сначала заменим (для удобства) символы M_1, M_2, M_3 буквами A, B, C соответственно, т. е. примем:

$$A = \{1, 2\};\ \ B = \{1, 2, 3\};\ \ C = \{2, 4, 5\}.$$

Введем логические переменные:

$A_1 = 1$, если в искомую трансверсаль входит элемент $1 \in A$, и $A_1 = 0$, если не входит;

$A_2 = 1$, если элемент $2 \in A$ входит в искомую трансверсаль, и $A_2 = 0$, если не входит;

$B_1 = 1$, если элемент $1 \in B$ входит в трансверсаль, и $B_1 = 0$, если не входит, и так далее до переменной C_5, которая принимает единичное значение, если элемент $5 \in C$ входит в искомую трансверсаль, и $C_5 = 0$, если не входит.

Согласно рис. 410 можно записать:

$$A_1 + A_2 = 1,$$

если в искомую трансверсаль входит либо элемент $1 \in A$, либо элемент $2 \in A$. Аналогично интерпретируются и следующие две дизъюнкции:

$$B_1 + B_2 + B_3 = 1;\ \ C_2 + C_4 + C_5 = 1.$$

Во всех трех случаях знак «плюс» обозначает операцию дизъюнкции.

Составляем булево уравнение вида

$$(A_1 + A_2)(B_1 + B_2 + B_3)(C_2 + C_4 + C_5) = 1.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$A_1B_2C_4 + A_1B_2C_5 + A_1B_3C_2 + A_1B_3C_4 + A_1B_3C_5 +$$
$$+ A_2B_1C_4 + A_2B_1C_5 + A_2B_3C_4 + A_2B_3C_5 = 1.$$

Это уравнение имеет девять решений, каждое из которых показывает, какие элементы из множеств A, B, C необходимо взять, чтобы получилась трансверсаль. Следовательно, семейство $L = (A, B, C)$ имеет 9 трансверсалей:

$$\{1, 2, 4\},\ \ \{1, 2, 5\},\ \ \{1, 3, 2\},\ \ \{1, 3, 4\},\ \ \{1, 3, 5\},$$
$$\{2, 1, 4\},\ \ \{2, 1, 5\},\ \ \{2, 3, 4\},\ \ \{2, 3, 5\}.$$

Заметим, что все полученные множества являются упорядоченными, т. е. множества, например $\{1, 2, 4\}$ и $\{2, 1, 4\}$, не совпадают, хотя и состоят из одних и тех же элементов: в трансверсаль $\{1, 2, 4\}$ входит элемент 1 из множества A, элемент 2 из множества B и элемент 4 из множества C. Трансверсаль $\{2, 1, 4\}$ образована иначе: в нее входит элемент 2 из множества A, элемент 1 из множества B и элемент 4 из множества C.

Основу рассмотренного метода нахождения всех трансверсалей составляет метод Петрика, который неоднократно использовался в предыдущих разделах.

Методами теории трансверсалей решаются такие задачи, как задача о свадьбах, о составлении расписаний, о назначении на должность и др. В задаче о свадьбах главным является понятие **совершенного паросочетания**, определяемого следующим образом: «Совершенным паросочетанием из V_1 в V_2 в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ называется взаимно однозначное соответствие между вершинами из V_1 и подмножеством вершин из V_2, обладающее тем свойством, что соответствующие вершины соединены ребром» [41, с. 145]. Из этого определения видно, что совершенное паросочетание — это не что иное, как трансверсаль в «матримониальной» интерпретации (матримониальный — относящийся к браку, супружеству). Пусть V_1 — множество юношей, V_2 — множество девушек, с каждой из которых знаком хотя бы один юноша из множества V_1. Суть задачи о свадьбах состоит в том, что требуется выяснить, может ли каждый юноша жениться только на знакомой ему девушке. Рассмотренный метод не только дает ответ на этот вопрос, но и позволяет найти все варианты «матримониальных» трансверсалей.

25.8. НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Транспортной сетью называется орграф, в котором имеются точно одна вершина со степенью входа, равной нулю, точно одна вершина со степенью выхода, равной нулю, и в котором каждой дуге поставлено в соответствие некоторое число, называемое **пропускной способностью дуги** [32]. Вершина со степенью входа, равной нулю, называется **источником**. В эту вершину не входит ни одна дуга. Вершина со степенью выхода, равной нулю, называется **стоком**. Из нее не выходит ни одна дуга. Примером транспортной сети является орграф, приведенный на рис. 411. Вершина 1 в этом графе является источником, вершина 8 — стоком. Все остальные вершины называются **промежуточными**. Каждой дуге поставлена в соответствие ее пропускная способность.

Для каждой из промежуточных вершин справедливо утверждение: суммарный входной поток равен суммарному выходному потоку, т. е. ни в одной вершине проходящая через сеть субстанция не накапливается.

Если ориентированная цепь состоит из нескольких последовательных дуг, то ее максимальная пропускная способность определяется той дугой, пропускная способность которой имеет наименьшее значение по сравнению с другими дугами данной цепи. На этом очевидном положении основан метод нахождения максимальной пропускной способности сети, который мы рассмотрим на примере орграфа, приведенного на рис. 411.

Этап 1. Рассмотрим цепь 1, 2, 3, 8. Ее пропускная способность равна двум. Уменьшим на эту величину пропускные способности всех дуг цепи 1, 2, 3, 8. Тогда пропускная способность дуг (2, 3) и (3, 8) будет равна нулю. Дуги с нулевой пропускной способностью удаляем из орграфа. Получим орграф, приведенный на рис. 412. Таким образом, результатом первого этапа является число $n_1 = 2$, представляющее собой ту часть искомой пропускной способности сети, которую дает цепь 1, 2, 3, 8.

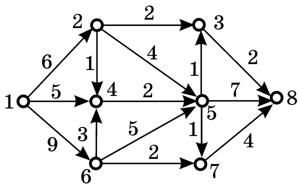


Рис. 411

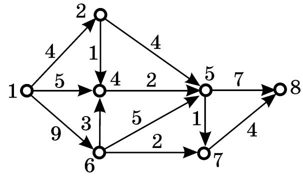


Рис. 412

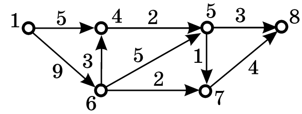


Рис. 413

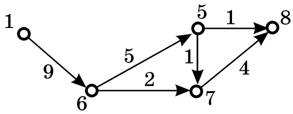


Рис. 414

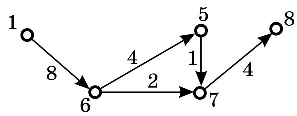


Рис. 415

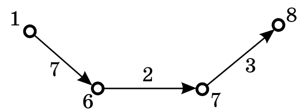


Рис. 416

Э т а п 2. Рассмотрим цепь 1, 2, 5, 8 (рис. 412). Ее максимальная пропускная способность равна 4. Следовательно, $n_2 = 4$. Уменьшим на 4 пропускные способности дуг (1, 2), (2, 5), (5, 8). После удаления дуг с нулевой пропускной способностью получим орграф, изображенный на рис. 413.

Э т а п 3. Пропускная способность цепи 1, 4, 5, 8 (рис. 413) равна двум, т. е. $n_3 = 2$. Удалив дугу (4, 5), получаем орграф, приведенный на рис. 414.

Э т а п 4. Пропускная способность цепи 1, 6, 5, 8 (рис. 414) равна единице, т. е. $n_4 = 1$. После удаления дуги (5, 8) получим орграф, представленный на рис. 415.

Э т а п 5. Рассмотрим цепь 1, 6, 5, 7, 8. Ее пропускная способность равна единице, следовательно, $n_5 = 1$.

Э т а п 6. Осталась единственная цепь (рис. 416). Ее пропускная способность равна двум, т. е. $n_6 = 2$.

Таким образом, пропускная способность N сети, приведенной на рис. 411, равна сумме шести составляющих:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6, \tag{50}$$

где каждое слагаемое обозначает пропускную способность соответствующей цепи, соединяющей источник со стоком. Подставим в (50) найденные значения n_i ($i = 1, 2, ..., 6$):

$$N = 2 + 4 + 2 + 1 + 1 + 2 = 12.$$

Таким образом, максимальная пропускная способность рассмотренной сети равна 12. Этот результат можно получить и другим путем. Если найти все разрезы сети и вычислить их пропускные способности, то разрезу с наименьшей пропускной способностью будет соответствовать максимальная пропускная способность сети.

Например, если в орграфе (рис. 411) провести разрез через дуги (3, 8), (5, 7), (5, 8) и (6, 7), то получим разрез с пропускной способностью, равной $2 + 7 + 1 + 2 = 12$. Других разрезов с пропускной способностью, меньшей 12, в орграфе нет. Следовательно, число 12 и есть максимальная пропускная способность сети.

Упражнения

1. (ОЛ1)! Определите максимальную пропускную способность цепи: 1, 2, 3, 7; 1, 4, 6, 7; 1, 3, 6, 7 (рис. 417).

2. (983). Определите максимальную пропускную способность сети (рис. 417), если вершина 1 — источник, вершина 7 — сток.

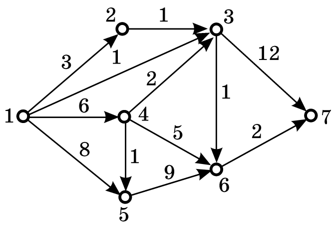


Рис. 417

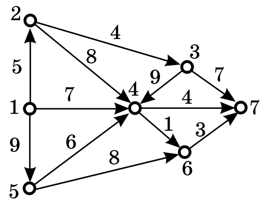


Рис. 418

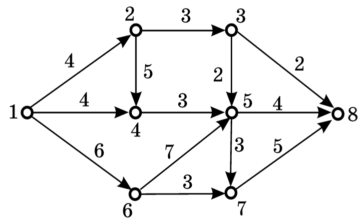


Рис. 419

3. (285). Определите максимальную пропускную способность сети (рис. 418), если вершина 1 — источник, вершина 7 — сток.

4. (У87). Найдите максимальную пропускную способность сети (рис. 419), где 1 — источник, 8 — сток.

25.9. ОРГРАФЫ И БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ДИАГРАММЫ ХАССЕ

В разделе «Бинарные отношения» теории множеств данного курса дискретной математики рассмотрены два основных способа задания бинарных отношений — аналитический, путем посимвольного перечисления элементов отношения, и табличный, основу которого составляет координатная сетка.

Теперь рассмотрим еще один способ — с помощью орграфов.

Пусть дано множество aRb, где a, $b \in A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, R обозначает «a делится на b». Поставим во взаимно однозначное соответствие каждому элементу множества A некоторую вершину орграфа и соединим дугами те его вершины, которым соответствует высказывание «a делится на b». Всякое число делится на самого себя — это отмечаем в орграфе петлями. Число 2 делится на единицу, проводим дугу от вершины 2 к вершине 1. Число 3 делится на единицу, соединяем вершины 3 и 1 и т. д. Получим орграф, приведенный на рис. 420.

При построении орграфа некоторого отношения необходимо иметь в виду, что ориентация дуг определяется записью aRb, где a — начало дуги, b — ее окончание, т. е. стрелка всегда показывает направление от a к b. Проиллюстрируем это еще одним примером. Пусть отношение вида «быть братом» задано на множестве детей {Таня, Зина, Толя, Костя} одних и тех же родителей. Поставим в соответствие каждому из детей определенную вершину орграфа: 1 — Таня, 2 — Зина, 3 — Толя, 4 — Костя. Толя по отношению к самому себе братом не является, и Костя сам себе не брат. Поэтому в орграфе

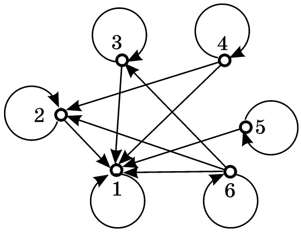


Рис. 420

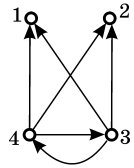


Рис. 421

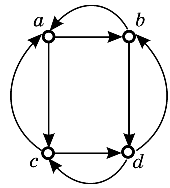


Рис. 422

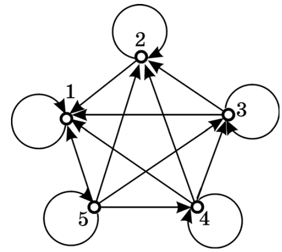


Рис. 423

(рис. 421) петель нет. Толя — брат Тани, Зины и Кости. Следовательно, вершину 3 соединяем дугами со всеми остальными вершинами. То же самое относится и к Косте. Вершины 3 и 4 соединены встречными дугами. Это значит, что если Толя брат Кости, то и Костя брат Толи.

Рассмотрим примеры некоторых отношений.

Симметричные отношения. Пусть даны четыре прямые a, b, c, d. При этом a и b перпендикулярны, c и d также перпендикулярны. Кроме того, a и d параллельны, параллельны и b и c [3]. На множестве этих прямых рассмотрим отношение перпендикулярности. В данном случае — это множество упорядоченных пар вида

$$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\}.$$

Соответствующий орграф приведен на рис. 422.

Отношение перпендикулярности является антирефлексивным, так как ни одна прямая не является перпендикулярной самой себе. Поэтому в орграфе нет петель. Отношение перпендикулярности симметрично, следовательно, в орграфе каждая пара вершин соединена двумя встречными дугами.

Рефлексивные отношения. Примером может служить полный орграф, в котором каждые две вершины соединены встречными дугами и каждая вершина содержит петлю (отношения параллельности, равенства и др.).

Транзитивные отношения. Особенность транзитивного отношения состоит в том, что для всякой пары дуг, у которых конец одной дуги совпадает с началом другой, существует третья дуга, соединяющая начало первой дуги с концом второй. Эта третья дуга называется **транзитивно замыкающей** [16, с. 15], или **транзитивным замыканием** [48, с. 437]. Орграф, иллюстрирующий транзитивное отношение, приведен на рис. 423 (петли не учитываем). Всякая тройка вершин в этом графе отличается тем, что две вершины соединены двумя цепями. Одна из них содержит две дуги, а третья является транзитивным замыканием. Например, цепь 4, 3, 2 транзитивно замыкает дуга (4, 2).

Антисимметричные отношения. В качестве примера рассмотрим отношение aRb, где $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, R — «больше или равно». Орграф приведен на рис. 423. Если отношение «больше или равно» заменить отношением «больше», то в орграфе исчезнут петли, а остальные дуги сохранятся. Отношение «больше или равно» является частично упорядоченным. Его граф содержит транзитивно замыкающие дуги и петли. Удалим все петли и транзитивно замыкающие дуги. Получится граф, который называют диаграммой Хассе. Диаграммы Хассе более 100 лет применяли в генеалогии для задания отношения родства. Это отношение не является транзитивным. Например, если «a отец b» и «b отец c», то a не является отцом c, в связи с чем соответствующие графы не содержат транзитивно замыкающих дуг [16].

Рассмотренных примеров вполне достаточно, чтобы получить представление о том, как задаются бинарные отношения при помощи графов.

25.10. СКОЛЬКО СУЩЕСТВУЕТ ГРАФОВ?

Этому очень непростому вопросу уделим некоторое внимание в завершение темы «Теория графов». Прежде всего, отметим, что однозначного ответа на данный вопрос нет, поскольку существует две задачи перечисления графов. В первой задаче определяется число помеченных графов, во второй — непомеченных.

Первая задача является проще второй. Для помеченных графов справедлива формула вида:

$$G_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

где G_n — число помеченных графов на n вершинах. С ее помощью можно определить число всех возможных связных и несвязных графов на n вершинах. Например, если $n = 3$, то существует 8 помеченных графов (рис. 424). Непомеченных же только 4 графа: *а*, *б*, *д*, *з*. Каждый из них является представителем группы изоморфных графов. Первую группу образует единственный граф *а*, вторую — графы *б*, *в*, *г*, связанные отношением изоморфизма, третью — графы *д*, *е*, *ж* и четвертую — граф *з*.

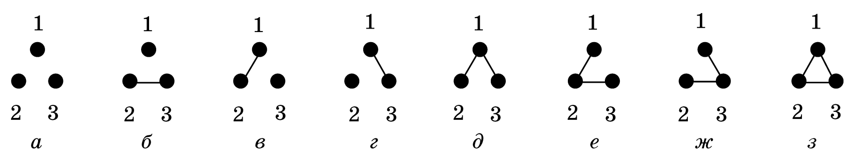


Рис. 424

Выявление изоморфных графов составляет основную трудность при подсчете непомеченных графов. Для нахождения их числа такой же простой формулы, как для числа помеченных графов, не найдено до сих пор.

Еще более сложным является вопрос о числе псевдографов и ориентированных графов.

Следует, однако, отметить, что главные усилия исследователей направлены не на поиски формулы для нахождения всех возможных графов вообще, а на отыскание способов, позволяющих определить число графов заданного вида. Например, в [45] рассматриваются такие частные случаи, как эйлеровы графы, турниры, деревья, полные орграфы и др. При этом частные случаи в свою очередь распадаются на еще более узкие подклассы графов. Иллюстрацией могут служить перечислительные задачи, рассмотренные в предыдущих подразделах, такие как число ребер полного неориентированного графа (с. 480), число ребер полного двудольного графа (с. 504), число ребер дополнения полного двудольного графа (с. 504), число помеченных деревьев (с. 518), число турниров, т. е. полных ориентированных графов (с. 533) и др. Можно предположить, что чем уже класс графов, тем проще их перечисление. На самом деле это не всегда так. Например, для определения числа эйлеровых графов в [45, с. 145] используется формула вида

$$u(x) = x + x^3 + x^4 + 4x^5 + 8x^6 + 37x^7 + 184x^8 + \ldots,$$

где $u(x)$ — производящая функция, коэффициенты которой показывают, сколько существует непомеченных графов с числом вершин, равным показателю степени при соответствующем коэффициенте. Формула эта проста, но нахождение коэффициентов — задача сложная.

Теория перечисления графов в настоящее время представляет собой быстро развивающийся раздел дискретной математики. По всем ее направлениям существует обширная литература (см. с. 473), в основном зарубежная. Каждый, кто заинтересуется этой теорией, в литературе может найти сведения как о достигнутых результатах в перечислении графов, так и о проблемах, ждущих своих исследователей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современная дискретная математика получила такое развитие, что осветить в небольшом учебном пособии даже главные ее результаты совершенно невозможно. В связи с этим возникла весьма непростая задача: какие темы следует считать первоочередными, чтобы включить их в учебное пособие для обязательного изучения. В общем случае в такой постановке задача представляется практически неразрешимой, поскольку всегда возможен вопрос — на каком основании та или иная тема попала в разряд второстепенных и не вошла в круг первоочередных, на который трудно дать убедительный ответ. Даже в частном случае, когда выбор определяется прикладной значимостью математических тем, задача хотя и упрощается, но все еще остается достаточно трудной. Например, теория конечных групп находит применение в ядерной физике, кристаллографии, алгебраической теории автоматов и др., в связи с чем ее следовало бы включить в круг тем для обязательного изучения. Большое применение на практике находят теория вероятностей (решение комбинаторных вероятностных задач), теория формальных грамматик, теория алгоритмов и многие другие. Они также могут претендовать на то, чтобы оказаться среди первоочередных.

Однако для начального знакомства с основными понятиями прикладной дискретной математики в пособие решено включить только пять тем, имеющие, по мнению автора, наибольшее прикладное значение. Важнейшей из них является булева алгебра логики, поэтому ей отведено центральное место во всем пособии. Вопросам применения алгебры логики посвящен практически весь раздел под названием «Теория конечных автоматов». Кроме того, в разделах «Комбинаторика» и «Теория графов» приведены примеры комбинаторных задач, решаемых формальными логическими методами.

В пособии отражены лишь начальные сведения по приведенным в нем разделам прикладной дискретной математики. В то же время их вполне достаточно для решения многих практических задач из таких областей, как разработка комбинационных схем (электронных или контактных) и синтез несложных многотактных устройств дискретного действия.

Материал, представленный в пособии, может служить исходной точкой (стартовой площадкой) для решения сложных практических задач, для которых «ручные» методы не дают необходимого эффекта. Но для этого следует обращаться не к учебным пособиям (поскольку информация в них излагается также лишь на ознакомительном уровне), а к специальным изданиям. Например, синтез комбинационных схем на основе булевых функций многих переменных (десятки, сотни) сводится к таким проблемам, как минимизация соответствующих булевых формул в классе ДНФ и КНФ, повышение их порядка (нахождение абсолютно минимальных форм), представление схем в виде однородных сред и др., для решения которых необходим компьютер.

Данное пособие не повторяет ни одно из существующих изданий того же назначения. Его главная особенность заключается в том, что изложение материала сопровождается большим числом упражнений. При этом обеспечивается возможность самоконтроля двумя путями: традиционным — при помощи открытых ответов и автоматизированным — с применением компьютера или специализированного устройства «Символ». В этом, по мнению автора, состоит наиболее важная особенность данного пособия.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Все нижеприведенные задания разбиты на группы по 20 дидактически одинаковых задач в каждой группе. Задачи имеют сквозную нумерацию. Это обеспечивает простоту формирования контрольных заданий любого объема: следует лишь указать соответствующие номера задач.

Контрольные работы охватывают около 70% материала всего пособия. Это число обеспечивает минимальный уровень внешнего контроля. При необходимости количество контрольных работ можно увеличить за счет упражнений, приведенных в конце соответствующих подразделов.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Найдите элементы множества P, если

$$A = \{0, 2, 3, 7, 8\};$$
$$B = \{1, 3, 6, 7, 9\};$$
$$C = \{0, 1, 4, 7, 8, 9\};$$
$$I = \{0, 1, 2, ..., 9\}.$$

1. (ЗЕР). $P = A\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}\cup B\cap C$.

2. (ЗАГ). $P = \bar{B}\cap C\cup\bar{A}\cap C\cup\bar{A}\cap B$.

3. (830). $P = B\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}$.

4. (977). $P = \bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap C\cup A\cap B$.

5. (039). $P = B\cap C\cup\bar{A}\cap C\cup\bar{A}\cap B$.

6. (ЕЛО). $P = \bar{B}\cap C\cup A\cap\bar{C}\cup A\cap B$.

7. (332). $P = B\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}$.

8. (ВОВ). $P = \bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap C\cup\bar{A}\cap\bar{B}$.

9. (ЭГО). $P = B\cap C\cup\bar{A}\cap C\cup A\cap B$.

10. (ТОЧ). $P = \bar{B}\cap C\cup A\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap B$.

11. (256). $P = B\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap B$.

12. (154). $P = \bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap C\cup A\cap B$.

13. (537). $P = B\cap C\cup\bar{A}\cap C\cup A\cap B$.

14. (296). $P = \bar{B}\cap C\cup\bar{A}\cap B\cup A\cap\bar{B}$.

15. (РИФ). $P = B\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap\bar{B}\cup A\cap\bar{C}$.

16. (ВАН). $P = \bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap C\cup A\cap\bar{B}$.

17. (372). $P = A\cap B\cup\bar{B}\cap C\cup A\cap\bar{B}$.

18. (Д87). $P = B\cap\bar{C}\cup\bar{B}\cap C\cup\bar{A}\cap C$.

19. (ЛУР). $P = A\cap C\cup\bar{A}\cap\bar{C}\cup B\cap\bar{C}$.

20. (ЗАЙ). $P = B\cap C\cup\bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}$.

2. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Упражнения 21–40 (в отличие от предыдущих) необходимо выполнять в два этапа. Сначала заданное выражение следует упростить и проинвертировать, а затем найти элементы множества P, выраженного через множества:

$A = \{0, 3, 4, 9\}$; $C = \{0, 1, 2, 4, 7, 8, 9\}$;
$B = \{1, 3, 4, 7\}$; $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

21. (280). $\bar{P} = A \cap B \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup A \cap C \cup \bar{B} \cap C$.

22. (Я81). $\bar{P} = \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C$.

23. (РЗХ). $\bar{P} = A \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

24. (ФОЗ). $\bar{P} = B \cap \bar{C} \cup A \cap B \cup \bar{A} \cap C \cup \bar{A} \cap B$.

25. (ЭХИ). $\bar{P} = A \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap C$.

26. (ТБ5). $\bar{P} = A \cap \bar{B} \cup A \cap C \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap C$.

27. (236). $\bar{P} = A \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cup B \cap \bar{C} \cup A \cap C$.

28. (ТЯЛ). $\bar{P} = A \cap C \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C$.

29. (8Р8). $\bar{P} = A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap C \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

30. (А39). $\bar{P} = A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap C$.

31. (БББ). $\bar{P} = B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

32. (7СС). $\bar{P} = \bar{A} \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

33. (АУТ). $\bar{P} = \bar{B} \cap \bar{C} \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C$.

34. (ТУФ). $\bar{P} = A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap C$.

35. (ЗУХ). $\bar{P} = \bar{A} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B}$.

36. (БВК). $\bar{P} = A \cap C \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

37. (ЭЛЛ). $\bar{P} = B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap C$.

38. (569). $\bar{P} = A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C$.

39. (ЕТМ). $\bar{P} = A \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

40. (ХВП). $\bar{P} = B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap \bar{C}$.

3. УПРОЩЕНИЕ ФОРМУЛ С УЧЕТОМ ОТНОШЕНИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ

Упростите следующие выражения с учетом того, что $A \subset B \subset C \subset D \subset I$; $A \neq \varnothing$. При самоконтроле буквы в формулах располагать в алфавитном порядке.

41. (561). $\bar{A} \cap \bar{C} \cap D \cup \bar{B} \cap \bar{C} \cap D \cup A \cap B$.

42. (ОЗФ). $\bar{B} \cap \bar{C} \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cap D \cup \bar{A} \cap B$.

43. (ОИХ). $A \cap B \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cup A \cap C \cup \bar{B} \cap \bar{C}$.

44. (ПВХ). $A \cap \bar{C} \cup B \cap \bar{D} \cup \bar{A} \cap C \cap \bar{D}$.

45. (773). $A \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{C} \cap D \cup B \cap C \cap D$.

46. (УВЗ). $A \cap C \cap D \cup B \cap \bar{C} \cap D \cup B \cap C \cap D$.

47. (ДАЧ). $\bar{A} \cap \bar{B} \cup B \cap \bar{C} \cup \bar{C} \cap D$.

48. (ЗАИ). $B \cap D \cup A \cap \bar{C} \cup \bar{C} \cap \bar{D}$.

49. (685). $A \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cap D \cup \bar{C} \cap \bar{D}$.

50. (ЕМК). $\bar{A} \cap B \cap C \cup B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{C}$.

51. (557). $A \cap C \cap D \cup \bar{B} \cap C \cap D \cup B \cap \bar{C}$.

52. (ЭММ). $A \cap D \cup B \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{B} \cap C \cap D$.

53. (МАЛ). $A \cap C \cup \bar{C} \cap \bar{D} \cup B \cap \bar{C} \cap D$.

54. (268). $A \cap B \cap \bar{C} \cup A \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

55. (МПО). $\bar{A} \cap B \cup \bar{B} \cap C \cap D \cup \bar{C} \cap D$.

56. (599). $B \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap B$.

57. (120). $B \cap \bar{D} \cup \bar{A} \cap B \cap D \cup \bar{B} \cap \bar{D}$.

58. (ОПК). $B \cap C \cup B \cap \bar{D} \cup \bar{C} \cap D$.

59. (ПИХ). $A \cap B \cup B \cap C \cup \bar{B} \cap \bar{C}$.

60. (ААЙ). $\bar{B} \cap \bar{D} \cup B \cap C \cup C \cap D$.

БУЛЕВА АЛГЕБРА

4. ТЕОРЕМА ПОГЛОЩЕНИЯ

Используя теорему поглощения, упростите следующие булевы выражения.

61. (АСС). $A\bar{B} + A\bar{B}C + A\bar{B}CD$.

62. (АНО). $A\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{C}D$.

63. (591). $A\bar{B}C + \bar{B}C + A\bar{B}CD$.

64. (В92). $AB + CD + AB\bar{C}$.

65. (ЛАЗ). $\bar{A}B + BC + \bar{A}B\bar{D}$.

66. (КИЧ). $P\bar{Q} + R + P\bar{Q}RS$.

67. (А45). $\bar{P}QRS + QR + PQR$.

68. (НТ6). $\bar{X}YZ + Z + \bar{X}Y$.

69. (ШГ7). $\bar{X}Y + \bar{X}YZ + Z$.

70. (ТЫМ). $AB\bar{C} + B\bar{C} + DE$.

71. (119). $B\bar{C} + B\bar{C}D + AB\bar{C}D$.

72. (БСБ). $ACD + CD + ABCD = \ldots$

73. (ВШВ). $\bar{P}QR + QR + ST$.

74. (ЛОГ). $P\bar{Q}R + P\bar{Q}T + P$.

75. (ШВД). $P\bar{Q}R + PR + RT$.

76. (ХВЕ). $\bar{P} + \bar{P}Q + \bar{P}Q\bar{R} + \bar{P}T$.

77. (ЕЕЖ). $STU + QSTU + STUV$.

78. (ЯУЗ). $\bar{A}E + \bar{A}BE + \bar{A}CEF + F$.

79. (ЛУЧ). $\bar{C}DE + \bar{C}D\bar{F} + \bar{C}D + EF$.

80. (АУК). $\bar{A}C\bar{E} + BC\bar{E} + C\bar{E}F + C\bar{E}$.

5. ИНВЕРТИРОВАНИЕ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Не меняя последовательности вхождений аргументов, найдите инверсные выражения с использованием теоремы де Моргана.

81. (ЯЙН). $A\bar{B} + B\bar{C} + AC$.

82. (ЛОС). $ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

83. (ЛЁН). $AC + B\bar{C} + \bar{D}$.

84. (35Т). $ABC + A\bar{B}\bar{D}$.

85. (ТЛЕ). $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{D} + \bar{A}D$.

86. (662). $A\bar{C}\bar{D} + B\bar{C} + \bar{B}D$.

87. (513). $BC + \bar{A}\bar{C}D + \bar{E}$.

88. (904). $B\bar{C}\bar{D} + \bar{B}CD + \bar{A}\bar{E}$.

89. (Б35). $A\bar{C}\bar{E} + \bar{A}\bar{D}\bar{E} + B$.

90. (А26). $BC + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{D}$.

91. (457). $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$.

92. (ЯИМ). $A\bar{C}\bar{E} + \bar{A}CD + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$.

93. (589). $BD + \bar{B}\bar{C}E + \bar{A}$.

94. (ОЗО). $AD + B\bar{D} + \bar{A}\bar{C}\bar{E}$.

95. (961). $\bar{B}\bar{C}\bar{E} + \bar{B}\bar{C}D + C\bar{D}$.

96. (562). $ABE + \bar{A}\bar{B}\bar{E} + B\bar{C}\bar{E}$.

97. (ВИЗ). $BCD + B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}E$.

98. (ЕВИ). $AD + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{E}$.

99. (ОИЙ). $BC + \bar{B}E + \bar{E}F$.

100. (ЯМК). $PQ + RS + \bar{P}\bar{Q}\bar{S}$.

6. ИНВЕРТИРОВАНИЕ КОНЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Не меняя последовательности вхождений аргументов, найдите инверсные выражения с использованием теоремы де Моргана.

101. (ДД1). $(A + B)(C + \bar{D})(B + \bar{C})$.

102. (МБК). $(A + B + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{D})\bar{E}$.

103. (ФА7). $(B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(\bar{D} + E)$.

104. (УЛ5). $(A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + B + C + D)$.

105. (ЕТ2). $(\bar{A} + \bar{B})(\bar{B} + C)(\bar{C} + D + E)$.

106. (УЯР). $(P + Q + R)(\bar{P} + \bar{Q} + S)(Q + \bar{S})$.

107. (ММ6). $(\bar{P} + \bar{Q} + S)(Q + \bar{R} + \bar{S})(\bar{P} + \bar{R})$.

108. (ЗИЦ). $(A + \bar{B} + \bar{D})(\bar{B} + \bar{C} + D)E$.

109. (НОН). $(A + \bar{B} + \bar{E})(\bar{C} + \bar{D} + E)(B + \bar{C})$.

110. (ЯШ8). $(\bar{P} + Q + \bar{R})(\bar{Q} + S)(\bar{P} + \bar{Q})$.

111. (ЦВИ). $(P + Q + R + S)(\bar{P} + \bar{Q} + \bar{R} + \bar{S})(P + \bar{Q})$.

112. (ЭРЭ). $(X + Y + Z)(\bar{Y} + \bar{Z})(\bar{X} + Y)$.

113. (РАП). $(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})(C + \bar{D} + E)$.

114. (ИВВ). $(A+\bar{C})(\bar{C}+\bar{D}+E)(B+\bar{C}+\bar{E})$.
115. (УНЕ). $(A+B+\bar{C})(\bar{B}+\bar{C}+D)\bar{E}\bar{F}$.
116. (ДАК). $(\bar{A}+C+\bar{D})(B+\bar{D}+E)(A+\bar{C}+\bar{E})$.
117. (МОМ). $(A+B)(B+\bar{C})(\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})\bar{E}\bar{F}$.
118. (ДЕТ). $(B+\bar{C}+D)(A+\bar{B}+\bar{D})(\bar{E}+\bar{F})$.
119. (ПОД). $(P+\bar{Q}+\bar{R}+\bar{S})(\bar{Q}+R+S+\bar{T})(\bar{P}+Q)$.
120. (ЕНН). $(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})EF$.

7. НАХОЖДЕНИЕ СОВЕРШЕННЫХ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Представьте следующие булевы функции в СДНФ (т. е. в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы). Найдите номера минтермов, входящих в булевы функции, зависящие от четырех аргументов. При нахождении минтермов можно пользоваться теоремой разложения либо картой Вейча для четырех переменных.

При самоконтроле указать только номера минтермов. Номера представить в десятичной системе и упорядочить их по возрастанию.

121. (ЛВЗ). $f=ABC+\bar{A}CD$.
122. (ТБХ). $f=BD+\bar{A}\bar{B}C$.
123. (ДОК). $f=CD+\bar{C}\bar{D}$.
124. (КА1). $f=\bar{B}\bar{D}+\bar{A}D$.
125. (ШИО). $f=BC+\bar{A}BD$.
126. (ФО5). $f=BD+\bar{A}C$.
127. (ЭКИ). $f=C+\bar{A}BD$.
128. (ЭР7). $f=\bar{A}B+\bar{A}D$.
129. (СЕМ). $f=AB+BD$.
130. (А40). $f=AD+\bar{A}\bar{C}\bar{D}$.
131. (А2Б). $f=\bar{A}\bar{B}+ABD$.
132. (ТТТ). $f=CD+\bar{A}\bar{C}\bar{D}$.
133. (85С). $f=CD+B\bar{C}\bar{D}$.
134. (93Т). $f=\bar{A}\bar{D}+AD$.
135. (ФПК). $f=A\bar{C}+\bar{A}C$.
136. (ЛЕН). $f=AB+\bar{A}\bar{B}$.
137. (ЯСК). $f=BCD+A\bar{B}$.
138. (7Б8). $f=ABD+\bar{A}\bar{B}D$.
139. (ФАО). $f=AC+\bar{B}C$.
140. (УРП). $f=ABC$.

8. ТЕОРЕМА СКЛЕИВАНИЯ

Укажите номера минтермов, к которым можно применить теорему склеивания, и приведите конъюнкцию, получившуюся в результате применения этой теоремы.

141. (АБИ). (1, 3, 6, 10, 12, 15).
142. (1Б1). (1, 5, 6, 10, 12, 15).
143. (ДАХ). (1, 6, 9, 10, 12, 15).
144. (8БЗ). (0, 3, 6, 9, 10, 13).
145. (5УЧ). (0, 6, 7, 9, 10, 12).
146. (ЦТ5). (2, 9, 10, 12, 15).
147. (АУК). (0, 5, 6, 9, 11, 12).
148. (767). (0, 3, 5, 6, 11, 12).
149. (537). (0, 3, 5, 9, 10, 14).
150. (ЯВЫ). (0, 3, 5, 9, 14, 15).
151. (5БН). (0, 7, 8, 11, 13, 14).
152. (ТБО). (0, 1, 7, 11, 13, 14).
153. (Б7Б). (0, 2, 7, 11, 13, 14).
154. (НОМ). (3, 4, 7, 8, 13, 14).
155. (ЯКТ). (3, 4, 8, 11, 13, 14).
156. (НАФ). (2, 3, 4, 8, 13, 14).
157. (114). (1, 2, 4, 7, 8, 15).
158. (356). (2, 4, 8, 9, 15).
159. (ТХЛ). (1, 2, 6, 8, 11, 13).
160. (УФН). (1, 6, 8, 11, 13, 14).

9. НАХОЖДЕНИЕ СОКРАЩЕННЫХ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Найдите сокращенные ДНФ функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов. Для самоконтроля укажите число простых импликант и общее число букв.

161. (655). $f = (0, 1, 2, 3, 5, 7, 12, 13, 15)$.
162. (ЙОГ). $f = (4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 15)$.
163. (УТЕ). $f = (0, 1, 3, 7, 8, 12, 14, 15)$.
164. (ЮГ8). $f = (0, 1, 4, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 15)$.
165. (ЦОЦ). $f = (0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15)$.
166. (454). $f = (3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$.
167. (733). $f = (0, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15)$.
168. (ВЕХ). $f = (0, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 14)$.
169. (965). $f = (2, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15)$.
170. (ЛВЛ). $f = (0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12, 14)$.
171. (ЦАЙ). $f = (1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 15)$.
172. (432). $f = (2, 3, 7, 8, 12, 13, 15)$.
173. (У39). $f = (0, 1, 2, 5, 7, 10, 11, 15)$.
174. (359). $f = (2, 4, 7, 9, 11, 13, 15)$.
175. (ИТВ). $f = (1, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13)$.
176. (НАШ). $f = (3, 4, 7, 8, 14, 15)$.
177. (АРЗ). $f = (1, 3, 4, 5, 8, 11, 13, 15)$.
178. (924). $f = (0, 1, 3, 7, 8, 11, 12, 14, 15)$.
179. (ТЕЦ). $f = (3, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 15)$.
180. (ПНЕ). $f = (0, 1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15)$.

10. НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Найдите минимальные дизъюнктивные нормальные формы булевых функций, представленных в СДНФ в виде наборов номеров минтермов четырех переменных. Для самоконтроля укажите число простых импликант, число вхождений аргументов и число простых импликант, содержащих по две буквы.

181. (Н20). $f = (0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15)$.
182. (ШТА). $f = (0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15)$.
183. (НОО). $f = (1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$.
184. (ЕЕТ). $f = (0, 1, 3, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 15)$.
185. (Э63). $f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15)$.
186. (ЕУР). $f = (1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15)$.
187. (ЛЭИ). $f = (2, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15)$.
188. (ОКО). $f = (0, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15)$.
189. (ОЧУ). $f = (3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$.
190. (93Ш). $f = (0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14)$.
191. (396). $f = (0, 1, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 15)$.
192. (75У). $f = (3, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 15)$.
193. (ЦОН). $f = (0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15)$.
194. (Р93). $f = (0, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13)$.
195. (РЕГ). $f = (0, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12)$.
196. (С56). $f = (1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14)$.
197. (Т36). $f = (1, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$.
198. (ЦНБ). $f = (1, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 15)$.
199. (5ЯН). $f = (0, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15)$.
200. (ОДД). $f = (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15)$.

11. НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ДНФ ИНВЕРСИЙ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Найдите минимальные ДНФ инверсий булевых функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов. Для самоконтроля укажите число простых импликант и число вхождений аргументов.

201. (ЦОХ). $f = (1, 3, 7, 11, 13, 15)$.

202. (ФОМ). $f = (4, 5, 8, 9, 12)$.

203. (Э26). $f = (1, 2, 3, 5, 6, 10, 13, 14)$.

204. (НИР). $f = (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10)$.

205. (КРА). $f = (6, 7, 10, 15)$.

206. (КОВ). $f = (0, 6, 7, 8, 10, 15)$.

207. (864). $f = (0, 1, 6, 10, 13, 14)$.

208. (9МИ). $f = (0, 4, 7, 8, 11, 12, 15)$.

209. (ЦОБ). $f = (0, 1, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 15)$.

210. (ИВК). $f = (0, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 15)$.

211. (ЧТ5). $f = (3, 15)$.

212. (120). $f = (2, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15)$.

213. (Я79). $f = (1, 3, 4, 7, 8, 12)$.

214. (470). $f = (5, 6, 8, 10, 11, 13)$.

215. (ТАЛ). $f = (0, 2, 4, 8, 9, 11, 12, 14)$.

216. (МЯУ). $f = (2, 5, 6, 8, 9, 14)$.

217. (БЕЗ). $f = (0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15)$.

218. (ЭВА). $f = (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 14)$.

219. (Ц20). $f = (0, 1, 4)$.

220. (ПД7). $f = (0, 1, 8, 10, 14, 15)$.

12. НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ КОНЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Найдите минимальные конъюнктивные нормальные формы булевых функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов. Для самоконтроля укажите число вхождений аргументов и число знаков дизъюнкции.

221. (550). $f = (0, 1, 2, 8, 9, 10, 12, 14)$.

222. (УФФ). $f = (0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14)$.

223. (736). $f = (0, 1, 4, 8, 9, 11, 12, 14)$.

224. (ББЛ). $f = (5, 7, 8, 10, 12, 14)$.

225. (232). $f = (3, 6, 7, 8, 12)$.

226. (534). $f = (1, 2, 3, 9, 10, 13, 14)$.

227. (В53). $f = (0, 1, 2, 6, 8, 10, 11, 12)$.

228. (ОРК). $f = (0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13)$.

229. (ФУМ). $f = (1, 5, 6, 7, 9, 10)$.

230. (855). $f = (0, 1, 2, 5, 6, 9, 11, 13, 15)$.

231. (АХС). $f = (1, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 15)$.

232. (АРТ). $f = (0, 3, 4, 8, 11, 12, 14)$.

233. (УНН). $f = (1, 2, 6, 10, 11, 14)$.

234. (РЕД). $f = (2, 6, 9, 10, 11, 13, 14)$.

235. (ДАФ). $f = (0, 7, 8, 10, 11, 14, 15)$.

236. (ТОН). $f = (0, 4, 6, 10, 12, 13, 15)$.

237. (УА1). $f = (1, 4, 8, 10, 11, 12, 14)$.
238. (232). $f = (1, 2, 6, 7, 9, 10)$.
239. (АА3). $f = (0, 4, 7, 8, 11, 12)$.
240. (СПИ). $f = (1, 5, 8, 11, 13, 14, 15)$.

13. МИНИМИЗАЦИЯ ДНФ С УЧЕТОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

Найдите минимальные ДНФ булевых функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов. В квадратных скобках указаны неопределенные состояния. Для самоконтроля укажите десятичные номера наборов, на которых Вы доопределите функцию единицами, и укажите число вхождений аргументов минимальной ДНФ.

241. (9МТ). $f = (7, 9, 11, 14, 15)$, $[0, 3, 4, 5]$.
242. (БЦК). $f = (7, 10, 14, 15)$, $[2, 3, 5, 6, 13]$.
243. (ШЕИ). $f = (5, 10, 11, 13, 15)$, $[3, 6, 7]$.
244. (ХАО). $f = (3, 6, 7, 13, 15)$, $[2, 5, 11]$.
245. (РЕ1). $f = (3, 4, 9, 11)$, $[5, 7, 10, 15]$.
246. (К95). $f = (1, 4, 7, 10, 15)$, $[5, 13]$.
247. (67Р). $f = (3, 7, 12, 15)$, $[0, 4, 5, 6, 9]$.
248. (ТАЮ). $f = (11, 13, 14, 15)$, $[3, 5, 7, 10]$.
249. (ПХВ). $f = (0, 4, 15)$, $[1, 2, 3, 7, 8, 12]$.
250. (ТАВ). $f = (4, 6, 10, 11)$, $[0, 2, 7, 13, 15]$.
251. (ШИФ). $f = (3, 5, 7, 11)$, $[2, 4, 6, 10, 14]$.
252. (Т15). $f = (3, 4, 5, 10, 11, 12)$, $[0, 2, 9, 13]$.
253. (62Т). $f = (1, 6, 7, 9, 11)$, $[0, 5, 10, 13, 15]$.
254. (Х14). $f = (0, 7, 11, 15)$, $[1, 2, 4, 8, 12]$.
255. (351). $f = (1, 3, 12, 14)$, $[5, 9, 10, 11, 15]$.
256. (Х64). $f = (5, 6, 7, 15)$, $[3, 10, 11, 13, 14]$.
257. (ЯРК). $f = (1, 9, 14, 15)$, $[3, 5, 6, 7]$.
258. (479). $f = (2, 13, 15)$, $[5, 6, 7, 8, 9, 12]$.
259. (АЗУ). $f = (4, 7, 11, 14)$, $[1, 3, 9, 10, 15]$.
260. (СТМ). $f = (1, 2, 6, 7, 14)$, $[3, 5, 10, 11, 13, 15]$.

14. НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ КНФ С УЧЕТОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

Найдите минимальные конъюнктивные нормальные формы следующих булевых функций, зависящих от четырех аргументов и заданных наборами минтермов. В квадратных скобках указаны неопределенные состояния. Для самоконтроля укажите число вхождений аргументов минимальной КНФ и число знаков дизъюнкции.

261. (К78). $f = (0, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$, $[1, 2, 7, 15]$.
262. (ГТО). $f = (0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13)$, $[14, 15]$.
263. (ОТС). $f = (1, 2, 6, 9, 10, 13, 14, 15)$, $[7, 11, 12]$.
264. (УРМ). $f = (2, 5, 8, 13, 14)$, $[6, 7, 12, 15]$.
265. (РТТ). $f = (2, 4, 8, 12)$, $[3, 5, 6, 14]$.
266. (2ТО). $f = (0, 4, 9, 10, 12, 14)$, $[3, 7, 8, 15]$.
267. (213). $f = (1, 2, 8, 10, 12, 15)$, $[0, 4, 6, 9, 11]$.
268. (ИЛО). $f = (3, 7, 8, 9, 11, 13)$, $[0, 1, 5, 12, 15]$.

269. (ТЕХ). $f = (6, 8, 10, 12, 13), [0, 1, 2, 5, 7]$.
270. (ФСУ). $f = (1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 12), [3, 5, 11, 14, 15]$.
271. (ТБШ). $f = (2, 4, 10, 12, 13), [0, 3, 11, 14, 15]$.
272. (ФУМ). $f = (2, 3, 4, 9, 10, 12), [1, 7, 13, 15]$.
273. (АТ7). $f = (6, 9, 10, 11, 13, 14), [2, 3, 5, 7, 15]$.
274. (Р38). $f = (1, 2, 6, 9, 10, 13, 14), [0, 3, 12, 15]$.
275. (ЗЫШ). $f = (3, 7, 9, 13), [1, 2, 11, 15]$.
276. (273). $f = (2, 7, 9, 13, 14), [1, 4, 5, 6, 8, 10]$.
277. (УДЭ). $f = (0, 2, 4, 8, 14), [3, 5, 7, 13, 15]$.
278. (У51). $f = (3, 6, 9, 13), [5, 7, 15]$.
279. (8ЯР). $f = (0, 4, 10, 12, 15), [5, 7, 14]$.
280. (АЕТ). $f = (0, 2, 12, 14), [1, 5, 7, 9, 10, 13]$.

15. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В нижеприведенных упражнениях 281–300 все функции не являются симметрическими. Но каждая из них содержит импликанту, представляющую собой симметрическую функцию. Укажите десятичные номера тех минтермов, после удаления которых останется симметрическая функция с одиночным a-числом. Все функции зависят от пяти аргументов.

281. (АНЕ). $f = (2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 17, 18, 20, 24, 26)$.
282. (ВОЛ). $f = (1, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24, 29)$.
283. (ННК). $f = (1, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 19, 21, 22, 25, 26, 28)$.
284. (СЯХ). $f = (4, 7, 9, 11, 13, 14, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 28, 30)$.
285. (534). $f = (6, 7, 11, 13, 14, 15, 19, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29)$.
286. (АРО). $f = (1, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 16, 17, 18, 20, 24)$.
287. (09У). $f = (3, 7, 11, 12, 13, 14, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 29)$.
288. (ЦПН). $f = (1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 17, 18, 20, 24)$.
289. (ЯНД). $f = (1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24, 26, 27)$.
290. (ЧУЛ). $f = (3, 4, 7, 11, 12, 13, 14, 19, 21, 22, 25, 26, 27, 28)$.
291. (047). $f = (3, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 19, 21, 22, 25, 26, 28, 29)$.
292. (ЛЯ2). $f = (3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24, 30)$.
293. (ФЭМ). $f = (2, 7, 11, 13, 14, 16, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 28)$.
294. (436). $f = (2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 17, 18, 20, 24)$.
295. (НТС). $f = (2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 17, 18, 20, 22, 24, 27)$.
296. (К70). $f = (7, 8, 9, 11, 13, 14, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30)$.
297. (ФЕН). $f = (3, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, 24)$.
298. (5А7). $f = (5, 7, 11, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28)$.
299. (ВЕС). $f = (7, 10, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 28)$.
300. (МАУ). $f = (3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24)$.

16. ЧИСЛОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В упражнениях 301–320 системы трех функций f_1, f_2, f_3 представлены числовым способом, т. е. в виде ω-наборов. Найдите минимальные ДНФ этих трех функций. При самоконтроле для каждой из них укажите число вхождений аргументов. Все функции зависят от трех переменных.

301. (П81). 1 2 7 3 2 5 5 2.
302. (КВД). 0 5 7 0 0 5 7 6.
303. (ЭНК). 1 2 1 1 5 4 3 1.
304. (ЭЭР). 0 1 3 5 7 4 1 3.
305. (ПИН). 2 5 6 2 5 6 7 1.
306. (БТР). 6 7 6 5 1 0 2 1.
307. (ВИО). 1 2 3 4 5 0 1 6.
308. (ШИК). 2 5 6 7 3 4 2 1.
309. (ВАТ). 1 1 1 0 0 1 7 3.
310. (ЖУР). 1 0 0 2 2 2 3 3.
311. (ГЛА). 5 6 6 5 1 4 0 0.
312. (ТИК). 6 7 6 7 5 4 1 3.
313. (ШУК). 1 2 4 5 5 2 1 0.
314. (СКД). 1 1 6 6 7 7 1 1.
315. (БЛБ). 5 4 3 3 4 5 3 4.
316. (Э64). 6 7 6 7 3 1 6 7.
317. (ИРР). 0 0 1 2 0 0 3 4.
318. (ВИД). 2 5 7 7 2 5 5 4.
319. (788). 6 2 2 5 4 1 3 2.
320. (РИФ). 0 2 3 1 4 7 6 5.

17. БУЛЕВЫ УРАВНЕНИЯ

Найдите минимальные ДНФ неизвестных функций X, зависящих от аргументов A, B, C в заданных булевых уравнениях.

321. (РИС). $X + B\bar{C} + AC = B + C$.
322. (У39). $X + \bar{A}B + \bar{A}\bar{C} = B + \bar{A}\bar{C}$.
323. (266). $X + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C = \bar{C} + \bar{A}\bar{B}$.
324. (570). $X + \bar{A}C = AB + C$.
325. (ХАС). $X + ABC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C = \bar{A} + BC$.
326. (ВКТ). $X + \bar{A}BC = AB + BC$.
327. (МИК). $X + B\bar{C} = \bar{B}C + B\bar{C}$.
328. (НЭП). $X + ABC + A\bar{B}\bar{C} = BC + \bar{A}C + A\bar{B}\bar{C}$.
329. (ДЕМ). $X + AC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = AC + \bar{A}\bar{C} + AB$.
330. (589). $X + AC + \bar{A}B\bar{C} = A + \bar{B}C + B\bar{C}$.
331. (ОАО). $X + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} = \bar{B} + \bar{A}\bar{C}$.
332. (ДАР). $X + A\bar{B} + \bar{A}B = \bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C$.
333. (БИТ). $X + \bar{A}C + \bar{A}\bar{B} = A\bar{C} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}C$.
334. (ДИК). $X + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B} = ABC + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}$.
335. (АЗО). $X + \bar{A}B + \bar{B}C = A\bar{B} + \bar{A}C + \bar{A}B$.
336. (УТ5). $X + BC + \bar{A}C = C + \bar{A}B$.
337. (МАФ). $X + BC + \bar{A}\bar{C} = B + \bar{B}\bar{C}$.
338. (УКИ). $X + A\bar{C} + A\bar{B} = \bar{C} + A\bar{B}C$.
339. (ОКЗ). $X + \bar{A}C + \bar{B}C = \bar{B} + \bar{A}BC$.
340. (МТХ). $X + BC + \bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{C} + \bar{A}C + ABC$.

18. ПОРОГОВЫЕ ФУНКЦИИ

Пороговую функцию, заданную весами и порогом, представьте в минимальной дизъюнктивной нормальной форме. Для самоконтроля укажите число вхождений аргументов и число конъюнкций, содержащих по две буквы.

341. (РП6). [1, 2, 4, 3; 5].
342. (АП7). [2, 2, 4, 4; 4].
343. (АПК). [4, 7, 5, 2; 6].
344. (5П2). [3, 4, 2, 3; 3].
345. (Ю25). [1, 2, 1, 6; 5].
346. (УРФ). [3, 4, 4, 5; 5].
347. (УП5). [2, 4, 3, 4; 5].
348. (КБ8). [5, 6, 4, 6; 5].
349. (ФОМ). [3, 3, 5, 4; 6].
350. (ЖТО). [4, 3, 4, 6; 7].
351. (РЭК). [5, 6, 4, 4; 5].
352. (АЙ7). [4, 7, 6, 5; 5].

353.(АНС). [2, 2, 6, 3; 4].
354. (ААТ). [3, 4, 5, 6; 6].
355. (ОТК). [4, 5, 5, 6; 9].
356. (739). [3, 4, 4, 5; 8].
357. (ВЛБ). [4, 6, 6, 4; 5].
358. (ОРС). [5, 6, 7, 8; 12].
359. (ИРТ). [4, 5, 4, 5; 14].
360. (ТШУ). [5, 5, 4, 4; 13].

19. НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В упражнениях 361–380 все функции представлены наборами номеров минтермов, зависящих от четырех переменных A, B, C, D. Найдите производные от этих функций, дифференцируя их по переменной D. Найденные производные минимизируйте в классе дизъюнктивных нормальных форм. При самоконтроле укажите общее число вхождений аргументов и число знаков дизъюнкции для минимальных ДНФ.

361. (ЦАФ). f = (4, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15).
362. (НКЦ). f = (1, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15).
363. (ЗЫЙ). f = (5, 6, 7, 9, 11, 13, 15).
364. (778). f = (1, 3, 7, 11, 12, 13, 14, 15).
365. (КЛЕ). f = (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 11).
366. (592). f = (3, 7, 11, 13, 14, 15).
367. (ДОО). f = (2, 3, 6, 7, 9, 11, 13, 15).
368. (ФОК). f = (1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15).
369. (ИРО). f = (1, 3, 7, 12, 13, 14, 15).
370. (КБ8). f = (2, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14).
371. (ВЕЧ). f = (2, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15).
372. (ЕКТ). f = (1, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15).
373. (ЭКЗ). f = (0, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15).
374. (759). f = (2, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13).
375. (АРК). f = (0, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15).
376. (ПУР). f = (2, 3, 6, 7, 13, 14, 15).
377. (КТУ). f = (3, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15).
378. (368). f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 14, 15).
379. (ИЙП). f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15).
380. (927). f = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15).

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

1. СИНТЕЗ КОНТАКТНЫХ СТРУКТУР

Постройте контактную структуру, управляющую индикатором (электрической лампочкой) при помощи четырех реле A, B, C, D. Состояния 7, 8, 9, 10, 11, 12 не используются.

Структуру представьте в классе параллельно-последовательных схем для ДНФ и КНФ. Для самоконтроля укажите минимально необходимое число контактов для ДНФ и КНФ. Индикатор горит только при следующих условиях.

381. (960). Включено реле A, а B выключено, либо включено реле C, а D выключено.

382. (924). Включено реле B, а реле A и D выключены, либо включено реле C.

383. (658). Включено реле B, а реле A выключено, либо включены реле A и C, а D выключено.

384. (КТВ). Включено реле A, а D выключено, либо включено реле B, а C выключено.

385. (СТО). Включено реле B, а C выключено, либо включено реле D, а A выключено.

386. (ООФ). Включено реле A, а реле B, C и D выключены, либо включено реле D.

387. (НЕФ). Включено четное число реле.

388. (ЗЕШ). Включены любые два реле из четырех заданных либо ни одного.

389. (М97). Включены любые два реле из четырех заданных либо любые три.

390. (СЯО). Включены либо все реле, либо ни одного, либо реле A и C включены, а реле D выключено.

391. (ХНО). Включены любые два реле, либо реле A включено, а реле B и C выключены.

392. (ИРА). Включены любые три реле, либо включено реле C, а реле D выключено.

393. (128). Включено реле A, а C выключено, либо включено реле D, либо все реле выключены.

394. (616). Включены реле B и C, а реле A выключено, либо включены реле C и D.

395. (435). Включены либо все реле, либо ни одного, либо реле A включено, а реле C выключено.

396. (РЯД). Включено одно из трех реле A, B, C, либо все четыре реле включены.

397. (ЭОШ). Включены реле B и C, либо выключены реле A и D.

398. (364). Выключены два реле A и C, либо включено реле D.

399. (43Ш). Включены реле B и C, а реле D выключено, либо включены все реле, либо ни одного.

400. (ЭЕЕ). Включено четное число реле.

2. ПОСТРОЕНИЕ КОМБИНАЦИОННОЙ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ ДНФ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Постройте комбинационную схему на элементах И и ИЛИ для минимальной ДНФ функции, заданной набором минтермов четырех переменных. Для самоконтроля укажите число двухвходовых, число трехвходовых и число четырехвходовых элементов И.

401. (673). $f = (0, 3, 7, 11, 13, 14, 15)$.

402. (ОРЕ). $f = (0, 1, 2, 3, 5, 10, 12, 15)$.

403. (АПИ). $f = (1, 2, 4, 7, 9, 10, 12, 15)$.

404. (АН2). $f = (0, 1, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15)$.

405. (ХЕШ). $f = (0, 3, 5, 12, 15)$.

406. (УРМ). $f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15)$.

407. (СТО). $f = (1, 2, 7, 11, 12, 13)$.

408. (ЛОТ). $f = (0, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$.

409. (1П6). $f = (3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15)$.

410. (ЛЮН). $f = (1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 13, 14)$.

411. (КАУ). $f = (0, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 15)$.

412. (ОАХ). $f = (0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15)$.

413. (УИШ). $f = (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15)$.

414. (ТА1). $f = (0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15)$.

415. (ИСК). $f = (0, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 15)$.
416. (ТХН). $f = (0, 1, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15)$.
417. (ДОО). $f = (1, 3, 6, 7, 10, 11, 13, 15)$.
418. (ИЮЛ). $f = (1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15)$.
419. (338). $f = (1, 2, 7, 8, 11, 12, 14)$.
420. (720). $f = (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15)$.

3. ПОСТРОЕНИЕ КОМБИНАЦИОННОЙ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ КНФ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Постройте комбинационную схему на элементах И и ИЛИ для минимальной КНФ функции, заданной набором минтермов четырех переменных. Для самоконтроля укажите число двухвходовых элементов ИЛИ, число трехвходовых элементов ИЛИ и число входов элемента И.

421. (ФИИ). $f = (0, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11)$.
422. (2РЕ). $f = (0, 1, 2, 3, 7, 8, 12)$.
423. (5ЯЗ). $f = (2, 5, 6, 10, 13, 14, 15)$.
424. (ОСИ). $f = (0, 2, 5, 6, 7)$.
425. (ЛВХ). $f = (0, 2, 6)$.
426. (345). $f = (2, 3, 6, 9, 12)$.
427. (ВАК). $f = (0, 1, 4, 13)$.
428. (СУЛ). $f = (2, 3, 4, 9, 11, 13)$.
429. (ЦБН). $f = (7, 10, 11, 14)$.
430. (ТББ). $f = (8, 11, 13, 14)$.
431. (ТАВ). $f = (1, 5, 6, 9, 10, 13)$.
432. (ВХТ). $f = (3, 5, 6, 7, 9, 10)$.
433. (РАФ). $f = (1, 2, 3, 4, 7, 8, 11)$.
434. (АНХ). $f = (1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 12, 14)$.
435. (ФАИ). $f = (0, 1, 2, 4, 7, 13, 14)$.
436. (835). $f = (6, 8, 9, 10, 11, 12, 14)$.
437. (КВК). $f = (8, 9, 10, 13, 15)$.
438. (РИЛ). $f = (0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12)$.
439. (СУМ). $f = (0, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 13)$.
440. (Р29). $f = (4, 7, 8, 11, 13, 14)$.

4. СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННОЙ СХЕМЫ

Комбинационная схема имеет четыре входа и один выход. На вход схемы произвольно поступают двоичные числа. В упражнениях 441–460 указаны десятичные эквиваленты входных двоичных чисел, которым на выходе соответствует высокий (единичный) уровень. При всех остальных входных двоичных числах на выходе имеется низкий уровень. Постройте схему на элементах И и ИЛИ для минимальной ДНФ булевой функции, описывающей работу схемы. Для самоконтроля укажите число двухвходовых элементов И и число трехвходовых элементов И.

441. (ВЛБ). (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15).
442. (ФИС). (3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15).
443. (ЕСТ). (0, 1, 3, 5, 6, 7, 12, 13, 15).
444. (Я61). (0, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12).

445. (НОХ). (0, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15).
446. (903). (0, 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15).
447. (ЖУЧ). (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13).
448. (УМК). (0, 1, 3, 4, 7, 12, 13, 14, 15).
449. (ЯЛЛ). (0, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14).
450. (ПАМ). (0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15).
451. (659). (1, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15).
452. (НИО). (0, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15).
453. (20Я). (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15).
454. (ЯС1). (1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15).
455. (922). (0, 1, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15).
456. (153). (0, 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 15).
457. (ЭВИ). (0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15).
458. (ВТ5). (0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15).
459. (ЯТ6). (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15).
460. (ПГ7). (0, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13).

5. СИНТЕЗ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ КОДОВ

Постройте преобразователь четырехзначного двоичного кода n в пятизначный двоичный код $n + N$ при условии, что на вход могут подаваться только числа $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, а числа 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 подаваться не будут. Булевы функции, описывающие состояния выходов, представьте в минимальных ДНФ. Для самоконтроля укажите числа a и b, где a — число элементов И, b — число элементов ИЛИ во всей схеме преобразователя. Выход каждого элемента И подключайте только к одному элементу ИЛИ.

461. (ЛТ1). $N = 1$.
462. (982). $N = 2$.
463. (533). $N = 3$.
464. (ЦБИ). $N = 4$.
465. (ТБ5). $N = 5$.
466. (ЕКК). $N = 6$.
467. (АЕ7). $N = 7$.
468. (378). $N = 8$.
469. (УП9). $N = 9$.
470. (ИНО). $N = 10$.
471. (МЭР). $N = 11$.
472. (УХВ). $N = 12$.
473. (ОЙТ). $N = 13$.
474. (ПУФ). $N = 14$.
475. (572). $N = 15$.
476. (ЭТЛ). $N = 16$.
477. (ЛБН). $N = 17$.
478. (92П). $N = 18$.
479. (РЭК). $N = 19$.
480. (ЕТС). $N = 20$.

6. СИНХРОННЫЙ АВТОМАТ НА *JK*-ТРИГГЕРАХ

Изобразите схему синхронного автомата на шести JK-триггерах. Комбинационная схема, управляющая входами триггеров, реализует систему функций вида:

$JA = B$; $KA = B$;
$JB = A + C$; $K_B = \bar{A} + \bar{C}$;
$J_C = \bar{A} + \bar{B}$; $KC = A + B$;
$JD = F$; $KD = E$;
$J_E = \bar{D} + F$; $K_E = \bar{D} + \bar{F}$;
$J_F = \bar{D} + \bar{E}$; $K_F = \bar{D} + E$.

Пусть автомат находится в некотором состоянии, принимаемом за исходное. Если на его синхровход подать один импульс, то автомат перейдет в состояние a. Если подать еще один импульс, то автомат перейдет в состояние b. Найдите десятичные эквиваленты чисел a и b, если исходным является следующее состояние (десятичное).

481. (730). 12.
482. (181). 29.
483. (АТ2). 16.
484. (063). 57.
485. (АБИ). 18.
486. (ОИЛ). 27.
487. (ШОШ). 36.
488. (535). 10.
489. (АЛК). 21.
490. (ВВ8). 45.
491. (33Д). 2.
492. (КПБ). 9.
493. (ЭХС). 30.
494. (56С). 56.
495. (ВШТ). 20.
496. (КВД). 41.
497. (ЕС2). 55.
498. (ВВЛ). 2.
499. (ГОЯ). 35.
500. (МИН). 24.

7. СИНТЕЗ АВТОМАТА НА *JK*-ТРИГГЕРАХ

Постройте синхронный автомат на JK-триггерах для заданной последовательности смены его состояний. Найдите минимальные ДНФ булевых функций, описывающих работу комбинационной схемы, которая управляет входами всех триггеров автомата. Для самоконтроля найдите числа a, b, c, d, где a — число однобуквенных выражений среди шести найденных булевых функций; b — число двухбуквенных выражений; c — число четырехбуквенных выражений; d — число элементов ИЛИ в схеме автомата. При подаче на вход схемы тактовых импульсов последовательность смены состояний имеет следующий вид (нулевое состояние является начальным для всех нижеприведенных последовательностей).

501. (ЛАФ). 0, 3, 7, 4, 2, 5, 6, 1.
502. (НП2). 0, 4, 5, 1, 6, 7, 3, 2.
503. (5ТЗ). 0, 3, 5, 6, 7, 1, 2, 4.
504. (994). 0, 5, 6, 7, 1, 2, 4, 3.
505. (615). 0, 1, 7, 6, 5, 3, 2, 4.
506. (Б36). 0, 5, 7, 1, 6, 4, 2, 3.
507. (557). 0, 1, 4, 6, 5, 2, 7, 3.
508. (РУМ). 0, 4, 5, 1, 7, 3, 2, 6.
509. (ПКН). 0, 6, 2, 5, 4, 7, 3, 1.
510. (1ДО). 0, 4, 5, 7, 1, 2, 3, 6.
511. (РАН). 0, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3.
512. (5ДО). 0, 1, 2, 3, 7, 6, 5, 4.
513. (736). 0, 1, 3, 2, 6, 7, 5, 4.
514. (ТОС). 0, 5, 6, 3, 4, 2, 1, 7.
515. (ФЕХ). 0, 6, 5, 7, 4, 3, 1, 2.
516. (30Г). 0, 5, 7, 1, 2, 3, 6, 4.
517. (ЭЗУ). 0, 5, 3, 1, 6, 2, 4, 7.
518.(ФЕВ). 0, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 7.
519. (ПЗФ). 0, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 7.
520. (11Ш). 0, 2, 3, 4, 7, 6, 5, 1.

КОМБИНАТОРИКА

1. ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ И ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Сколько существует n-разрядных десятичных чисел, в каждом из которых цифра a встречается k раз (числа могут начинаться с нуля), при следующих значениях чисел n, a, k соответственно?

521. (75Г). 5, 3, 2.
522. (ЕЕФ). 6, 5, 4.
523. (ББ7). 7, 9, 6.
524. (168). 8, 5, 6.
525. (А60). 8, 1, 5.
526. (917). 4, 6, 0.

527. (ТОГ). 5, 8, 3.
528. (ИФА). 6, 3, 5.
529. (С99). 9, 2, 7.
530. (КРЕ). 9, 4, 6.
531. (ИЕР). 6, 7, 3.
532. (АЙН). 5, 4, 4.
533. (ИЯК). 4, 4, 2.
534. (ДИА). 7, 4, 5.
535. (ТЕР). 8, 3, 7.
536. (873). 9, 5, 8.
537. (НАР). 10, 4, 8.
538. (ИРА). 11, 9, 9.
539. (КОЗ). 6, 6, 2.
540. (АОН). 7, 6, 4.

2. ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ

541. (2БФ). Сколько слов длины 3 можно составить из букв слова «диффузия», если в каждом из слов все буквы разные?

542. (НАТ). Из алфавита выделили k знаков. Известно, что из них три знака можно выбрать 1140 способами. Найдите k.

543. (ИЦК). Множество содержит семь цифр. Из булеана этого множества удалили все те его элементы, которые содержат три цифры, и удалили все элементы, содержащие по четыре цифры. Сколько элементов осталось?

544. (ЦАИ). Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры расположены в порядке возрастания или в порядке убывания (с нуля числа начинаться не могут)?

545. (521). Сколько существует восьмизначных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры разные, нет цифр 0 и 9 и чередуются четные и нечетные цифры?

546. (АММ). Сколько существует семизначных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры разные, нет цифр 0, 8, 9 и чередуются четные и нечетные цифры?

547. (ТУК). Сколько существует семизначных десятичных чисел, в каждом из которых цифры расположены в порядке убывания?

548. (ААТ). Сколько существует подмножеств, содержащих по пять элементов множества P, если известно, что существует 84 подмножества, каждое из которых состоит из трех элементов множества P?

549. (ОНА). Сколько существует различных булевых функций четырех аргументов, СДНФ которых содержит не более трех минтермов?

550. (ВРТ). Сколькими способами можно расположить на шашечной доске черную и белую шашки, если ни одно из четырех крайних полей не занимать?

551. (ТРЖ). Множество A состоит из десяти цифр, множество B — из семи букв. Из множества A взяли три цифры, из множества B — две буквы и образовали из них множество C. Сколько существует таких множеств?

552. (304). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых нет четных цифр и нет цифр, являющихся простыми числами?

553. (ВЯЛ). Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, начинающихся с какой-либо из цифр 5, 6, 7, 8 и оканчивающихся нулем либо цифрой 9?

554. (РАЦ). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых цифры двух старших разрядов являются четными, а все остальные — нечетными?

555. (65У). Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно переводить с любого из семи языков на любой другой из этих же семи языков?

556. (С23). Некто забыл последние четыре цифры телефонного номера нужной ему фирмы. Помнит только, что в номере нет нулей и девяток и есть одна цифра 5. Какое максимальное число номеров ему придется набрать, если он попытается дозвониться до фирмы путем проб и ошибок?

557. (ЭХА). Сколько существует шестизначных десятичных чисел, если в каждом числе цифры расположены в порядке возрастания и если каждое число начинается с единицы и оканчивается девяткой?

558. (А8В). По окружности расположено 12 точек. Выбрали пять рядом стоящих точек и каждую из них соединили прямыми линиями с каждой из остальных семи точек. Найдите число точек пересечения, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые.

559. (ТР5). Сколько различных восьмизначных кодов можно получить, используя нечетные десятичные цифры и шесть букв некоторого алфавита, если каждый код представляет собой сочетание четырех цифр и четырех букв, где цифры не повторяются и упорядочены по возрастанию, а буквы также не повторяются и упорядочены по алфавиту?

560. (ЮВЗ). Сколько существует восьмизначных десятичных чисел, если в каждом из них три раза встречается цифра 3, три раза — цифра 5 и два раза — цифра 9?

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

1. ДВОЙСТВЕННЫЕ ГРАФЫ

Постройте граф, двойственный по отношению к заданному, представленному множеством (набором) ребер. В фигурных скобках указаны пары чисел. Это номера вершин, соединенных ребрами. Для двойственного графа определите число ребер, число вершин и число граней.

561. (ВАФ). {{1, 2}, {1, 6}, {1, 7}, {2, 3}, {2, 6}, {3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7}}.

562. (ШАХ). {{1, 2}, {1, 8}, {2, 3}, {2, 7}, {3, 4}, {3, 6}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7}, {7, 8}}.

563. (ИМЗ). {{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6}, {2, 3}, {2, 6}, {2, 7}, {3, 7}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7}}.

564. (ТУЧ). {{1, 2}, {1, 8}, {2, 3}, {2, 8}, {3, 4}, {3, 7}, {4, 5}, {4, 6}, {5, 6}, {6, 7}, {7, 8]}.

565. (ЧУК). {{1, 2}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 5}, {2, 6}, {2, 7}, {3, 4}, {3, 7}, {4, 7}, {4, 8}, {5, 6}, {6, 7}, {7, 8}}.

566. (ЦКК). {{1, 2}, {1, 8}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 6}, {2, 7}, {2, 8}, {3, 4}, {3, 6}, {4, 5}, {4, 6}, {5, 6}, {6, 7}, {7, 8}}.

567. (КИЛ). {{1, 2}, {1, 8}, {2, 3}, {2, 7}, {3, 4}, {3, 6}, {3, 7}, {4, 5}, {4, 6}, {5, 6}, {6, 7}, {7, 8}}.

568. (АИМ). {{1, 2}, {1, 7}, {2, 3}, {2, 7}, {3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {3, 7}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7}}.

569. (БВН). {{1, 2}, {1, 6}, {2, 3}, {2, 5}, {2, 6}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}, {5, 6}}.

570. (ИИО). {{1, 2}, {1, 3}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 6}, {3, 4}, {3, 7}, {4, 7}, {4, 7}, {5, 6}, {6, 7}}.

571. (БЫР). {{1, 2}, {1, 8}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {3, 7}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7}, {6, 8}, {7, 8}}.

572. (НАФ). {{1, 2}, {1, 3}, {1, 7}, {1, 8}, {2, 3}, {2, 7}, {3, 4}, {3, 6}, {3, 7}, {4, 5}, {4, 6}, {5, 6}, {6, 7}, {7, 8}}.

573. (702). {{1, 2}, {1, 3}, {1, 8}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 7}, {3, 4}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7}, {7, 8}}.

574. (ВСЕ). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}\}$.

575. (РАД). $\{\{1, 2\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\}$.

576. (АОД). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\}$.

577. (НИН). $\{\{1, 2\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\}$.

578. (ФАЗ). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\}$.

579. (ЧАС). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\}$.

580. (58Т). $\{\{1, 2\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}\}$.

2. НАХОЖДЕНИЕ ПРОСТЫХ ЦЕПЕЙ

Найдите все простые цепи, соединяющие вершины 1 и 6 графа. В фигурных скобках указаны пары чисел. Это номера вершин, соединенных ребрами. Для самоконтроля укажите число простых цепей, содержащих два ребра; три ребра; четыре ребра; пять ребер.

581. (СУХ). $\{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.
582. (ОВН). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
583. (АСК). $\{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.
584. (ЕЩЁ). $\{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.
585. (ИФО). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
586. (КАН). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.
587. (КАС). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.
588. (ИЕЛ). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
589. (ГЛУ). $\{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
590. (КУБ). $\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$.
591. (ПВО). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
592. (ОСЭ). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
593. (АСС). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
594. (ИЭХ). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
595. (ДАК). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
596. (ВАП). $\{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
597. (НАЛ). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
598. (ИЯС). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
599. (ХВТ). $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.
600. (ЖУЗ). $\{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.

3. ДЕКОДИРОВАНИЕ ДЕРЕВЬЕВ

По заданному коду дерева постройте его графическое изображение методом Прюфера.

Найдите простую цепь, ведущую от вершины 3 к вершине 4. Укажите номера вершин простой цепи, соединяющей вершины 3 и 4. Вершину 3 считать началом простой цепи, вершину 4 — ее концом.

Для самоконтроля перечислите все вершины простой цепи, начиная с номера 3 и кончая номером 4. Кроме того, укажите число ребер, соединяющих вершины 1 и 9.

601. (ЗИФ). (10, 10, 9, 9, 9, 7, 7, 8).

602. (БК2). (10, 6, 10, 2, 1, 8, 1, 2).

603. (ВРЗ). (2, 3, 10, 5, 5, 10, 7, 7).

604. (344). (4, 4, 5, 5, 7, 4, 5, 9).

605. (ППШ). (2, 5, 10, 2, 10, 5, 10, 8).

606. (ЛЫК). (2, 7, 6, 5, 1, 2, 2, 9).

607. (ББЛ). (2, 9, 9, 10, 5, 10, 8, 7).

608. (ПНИ). (6, 3, 6, 5, 8, 7, 8, 9).

609. (БАО). (9, 9, 9, 10, 10, 8, 8, 8).

610. (ХХН). (9, 9, 10, 10, 5, 6, 7, 8).

611. (БКР). (3, 3, 6, 8, 7, 7, 7, 7).

612. (МЯТ). (10, 10, 10, 5, 6, 9, 9, 9).

613. (371). (1, 1, 7, 10, 10, 8, 8, 9).

614. (ЭШУ). (2, 2, 9, 7, 7, 7, 9, 9).

615. (292). (2, 2, 5, 5, 7, 7, 9, 9).

616. (АЕЦ). (2, 2, 4, 9, 2, 2, 9, 9).

617. (ОДИ). (2, 8, 9, 5, 8, 7, 6, 5).

618. (ОДК). (2, 3, 7, 8, 7, 7, 7, 7).

619. (727). (5, 5, 6, 7, 5, 6, 6, 7).

620. (ЛЫН). (6, 2, 6, 6, 6, 7, 6, 7).

ОТВЕТЫ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

1.1. Множества. **1.** 2, 4, 5. **2.** 5, 3, 5, 4, 3, 3. **3.** a, b, c, 1, 5, 7. **4.** э, л, е, м, н, т. **5.** 1, 2, 3, 4, 7. **6.** а, в, г, д. **7.** 1) а, б, д; 2) в, г, е. **8.** 1) а, в, е; 2) б, г, д. **9.** 0, 1, 0, 1, 1, 0. **10.** 1) 9; 2) 0, 2, 3; 3) 15. **11.** 1) a, b, c; 2) 5, 7, 8; 3) 1, 2, 3. **12.** в, д, е. **13.** Март, май. **14.** а, г, е. **15.** а, в, г, е.

1.2. Подмножества. **1.** 5. **2.** 1) а, г, д, е; 2) а, б, г, д; 3) а, б, в, г. **3.** 30. **4.** 2, 4. **5.** 1, 2. **6.** 5. **7.** 64. **8.** 32. **9.** 126. **10.** 254. **11.** 7. **12.** 512. **13.** 6. **14.** 64. **15.** 128. **16.** 16, 4, 1. **17.** 0, 2.

1.3. Диаграммы Венна. Универсальное множество. **1.** 0, 1, 4, 6, 8, 9. **2.** 10. **3.** 1024. **4.** 2, 3, 5, 7. **5.** о, ю, я. **6.** е, у. **7.** 1024. **8.** 32. **9.** 1) A, C, D, E, K, M; 2) б, в, е, а, г, д, ж, з; 3) 2; 4) 2, 16, 20, 52. **10.** 1) 9, 18; 2) 16; 3) 36, 72. **11.** б, в, е.

1.4. Объединение множеств. **1.** a, b, c, d. **2.** {3, 4, 6, 8}; {3, 6}; {4, 8}. **3.** б, г, д, ж, и. **4.** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}; {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}. **5.** 5, 6, 8, 9. **6.** 5, 6, 7. **7.** 2, 4, 6, 8. **8.** 5, 9. **9.** 7. **10.** 6; 8; 5. **11.** 5. **12.** 4. **13.** 12. **14.** 23. **15.** $2^n - 2$.

1.5. Пересечение множеств. **1.** 1) c, d; 2) 4; 3) 2, 3; 4) май. **2.** 1) 11; 2) 10, 11, 12; 3) 2. **3.** 1) 0, 1, 2, 3, 9; 2) a, b, c; 3) b, c, d. **4.** 12. **5.** 5, 7; 7; 7, 8. **6.** а, б, в. **7.** 64. **8.** 32. **9.** 4, 7; 4, 8. **10.** 1, 2, 3, 4, 7, 8. **11.** 256. **12.** 1, 2, 4, 5. **13.** б, в, г, е. **14.** 0.

1.6. Дополнение множества. **1.** 1) 1, 2, 5, 6; 2) $\varnothing$; 3) 6; 4) 1, 2, 3, 4, 5, 6. **2.** 0, 1, 4, 6, 8, 9. **3.** 22. **4.** 38. **5.** 1, 4, 7. **6.** 24. **7.** 3, 4; 3, 4, 5, 6. **8.** 3, 4, 5; 6, 7; 3, 4, 5, 6, 7. **9.** 32; 5.

1.7. Законы де Моргана. **1.** 1) 5, 6; 2) 1; 3) 1, 4, 5, 6; 4) 1, 2, 3, 4; 5) 1, 2, 3, 5, 6; 6) 2, 3. **2.** 1) $\bar{B}$; 2) A; 3) $\bar{A}$; 4) B; 5) $\varnothing$; 6) $\bar{A}B$. **3.** 1) $\neq\neq==\neq=$; 2) $==\neq==\neq$. **4.** 16. **5.** 2. **6.** 1) A, $\bar{A}$, I. 2) $\bar{A}$, $\varnothing$, I.

1.8. Разность множеств. **1.** 3, 4. **2.** 2, 4, 5, 6, 7, 8. **3.** 1) 1, 2; 2) 4, 6, 7, 9; 3) 0, 1, 2, 5, 6; 4) 0, 1, 2, 3, 5; 5) 0, 5, 6, 8; 6) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 9. **4.** 1) 0, 5, 7; 2) 0, 1, 2, 5; 3) 1, 2; 4) 3, 4, 6. **5.** а, б, д.

1.9. Симметрическая разность множеств. **1.** b, d, e. **2.** 1, 2, 3, 4; 1, 2, 5, 6. **3.** a, b, c, e, f. **4.** 2, 4, 5. **5.** a, b, e, f. **6.** 1) $\varnothing$; 2) I; 3) $\bar{B}$; 4) $\varnothing$. **7.** 6, 7. **8.** 1) а, б, д, е; 2) а, б, в, г, е.

1.10. Закон поглощения. **1.** 1) $\bar{A}\bigcap B$; 2) $\bar{D}$; 3) $\bar{A}$; 4) $\bar{B}$; 5) $A\bigcap C$; 6) $\bar{C}$. **2.** 1) 2, 3; 2) 0, 1, 4, 5, 8, 9; 3) 2, 3. **3.** 1) $A\bigcap\bar{B}$; 2) $C\bigcap D$; 3) $\bar{A}\bigcap B$; 4) $A\bigcap\bar{B}\bigcap\bar{C}$; 5) $A\bigcup\bar{B}$; 6) B. **4.** 4, 5, 6, 7. **5.** 2, 4, 6.

1.11. Закон склеивания. **1.** 1) $A \cap B$; 2) $A \cap C$; 3) $\bar{A}$; 4) $\bar{B}$. **2.** 1) 1, 3, 6, 7; 2) 1; 3) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 4) 3, 6, 7. **3.** 1) $= = \neq \neq = =$; 2) $\neq = \neq \neq = =$. **4.** 1) C; 2) $B \cup \bar{C}$; 3) $\varnothing$; 4) B.

1.12. Теоретико-множественные преобразования. **1.** 1) $A \cap B \cup C$; 2) $A \cup C$; 3) $B \cup \bar{C}$; 4) $\bar{A} \cup B$. **2.** 1) $A \cup B$; 2) $\bar{A} \cap \bar{B}$; 3) I; 4) $A \cup \bar{B}$; 5) $\bar{A} \cap B$; 6) $\bar{B}$. **3.** 1) $A \cap C$; 2) $\bar{B} \cap \bar{D}$; 3) $B \cap D$; 4) $\varnothing$; 5) $\bar{B} \cap \bar{D}$; 6) $B \cup C$. **4.** 1) I; 2) $\bar{E}$; 3) E; 4) $\varnothing$; 5) $\bar{E}$; 6) I. **5.** 1) $A \cup D$; 2) $\bar{A} \cap \bar{D}$; 3) $\bar{A} \cup D$; 4) $A \cap \bar{D}$; 5) $\bar{A}$; 6) $\varnothing$. **6.** 1) 4, 5; 2) 1, 2, 3; 3) 1, 2, 3, 6, 7; 4) 6, 7; 5) 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9; 6) 8, 9. **7.** 1) 3, 4, 5; 2) 2, 4, 5; 3) 4, 6. **8.** 1) 1, 2, 3, 4, 5; 2) 6, 7; 3) 1, 2, 4; 4) 1, 2, 4, 6, 7, 8; 5) 1, 2, 4, 6, 7; 6) 3, 5.

2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

2.1. Декартово произведение множеств. **1.** b, b. **2.** 6; 4. **3.** b, c, e; m, n. **4.** 70. **5.** 35. **6.** 64. **7.** 14. **8.** 4. **9.** 8; 8. **10.** 1, 4, 7. **11.** 2; 1; 2; 3. **12.** 5, 6, 7; 15.

2.2. Степень множества. **1.** 625. **2.** 3125. **3.** 11. **4.** 3; 5. **5.** 128. **6.** 216. **7.** 10.

2.3. Понятие бинарного отношения. **1.** 17. **2.** 35. **3.** 21. **4.** 30. **5.** 35. **6.** 10. **7.** 4. **8.** 3, 4, 6. **9.** 1) 210; 2) 1056; 3) 100.

2.4. Симметрия отношений. **1.** 2, 5, 6, 7. **2.** 1, 3, 4. **3.** 2, 3, 4, 6. **4.** 5, 7, 8. **5.** 1. **6.** 1, 4, 5. **7.** 6. **8.** 2, 3. **9.** 7. **10.** 2, 3, 4, 5, 6.

2.5. Транзитивность отношений. **1.** 1, 2, 6. **2.** 5, 8. **3.** 3, 4, 7. **4.** 1, 3, 5, 7. **5.** 4, 8. **6.** 2, 6. **7.** 4, 5, 7.

2.6. Рефлексивность отношений. **1.** 2, 4, 7. **2.** 1, 2, 4, 5, 7. **3.** 1, 2, 3, 4, 7. **4.** 2, 3, 4, 5, 6. **5.** 1, 2, 3, 5. 6. **6.** 2, 3, 4, 5, 6, 7. **7.** 1, 3, 4, 5, 6.

2.7. Отношения эквивалентности. **1.** 1, 3, 5. **2.** 2, 5, 6, 7. **3.** 1, 4, 7. **4.** 50. **5.** 5.

2.8. Отношения строгого порядка. **1.** 1, 3. **2.** 5, 7. **3.** 10.

2.9. Отношения нестрогого порядка. **1.** 2, 4, 7. **2.** 3, 5, 6.

2.10. Упорядоченные множества. **1.** 15. **2.** 1) 15; 2) 15; 3) 21; 4) 21. **3.** 1, 4, 5, 6.

2.11. Отношения соответствия. **1.** 120. **2.** 1, 6, 9. **3.** 2. **4.** 3, 4. **5.** 5, 7, 8.

2.12. Функциональные отношения. Отображения. **1.** 20. **2.** 1) 1, 2; 2) 1, 2, 3, 4. **3.** 3, 4, 6. **4.** 4, 6.

2.13. Реляционная алгебра. **1.** 1) 7; 2; 2) 2; 3; 5; 3) 21; 20. **2.** 10001. **3.** 1; 3, 5, 5. **4.** 4, 4, 5, 4; 1, 0, 1, 1; 2, 0, 0, 2. **5.** 3, 4, 5, 7.

3. БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

3.2. Сравнение бесконечных множеств. **1.** 1) 0; 2) 29; 3) 1, 4, 9. **2.** 11, 12, 13, 14. **3.** 2, 4, 5. **4.** 3. **5.** 1, 2, 5, 8. **6.** 1, 4, 27. **7.** 99.

3.3. Счетные множества. **1.** 3, 4, 5, 7, 8. **2.** 1, 2, 4, 7. **3.** 3, 5, 6. **4.** 1, 2, 3, 4, 5. **5.** 6, 7, 8, 9, 10. **6.** 23. **7.** 1, 2, 4, 6, 7, 8.

3.4. Несчетные множества. **1.** 1, 2, 3, 5, 6, 7. **2.** 1, 3, 4, 5, 6, 7. **3.** 2, 3, 7.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

4.1. Вводные понятия. **1.** 3, 4, 6, 8. **2.** 1, 2, 3, 5, 8. **3.** 1, 2, 3, 6, 7.

4.2. Нечеткие множества. **1.** 1, 2, 3, 4, 5, 6. **2.** 0, 8. **3.** 6. **4.** 0, 7. **5.** 6.

4.3. Объединение нечетких множеств. **1.** 1, 2, 4; 2, 3, 4, 8. **2.** 1, 2, 3, 4, 8. **3.** 0,3; 0,9. **4.** 2, 4. **5.** 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8. **6.** 1, 2, 3, 5, 6, 8. **7.** 2, 3, 5, 6, 7, 8. **8.** 0,1; 1. **9.** 6; 6; 6.

4.4. Пересечение нечетких множеств. **1.** 1) 0; 2) 0,5; 3) 0,7; 4) 0,7; 5) 0; 6) 0. **2.** 1) 1, 2, 4, 5, 8; 2) 5, 8; 3) 4, 5, 8; 4) 3, 4, 5, 6, 8; 5) 3, 4, 6; 6) 3, 4, 5, 6, 8. **3.** 1) 0,2; 0,7; 2) 0,2; 0,7; 3) 0,2; 0,7; 4) 0; 0; 5) 0; 0; 6) 0,7; 0,7. **4.** 1, 3, 4, 6, 7.

4.5. Дополнение нечеткого множества. **1.** 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 2) 3, 4, 5, 6, 7, 8; 3) 1, 2, 3, 7, 8; 4) 1, 4, 5, 6, 7. **2.** 1) 1, 4, 6, 8; 2) 3, 5, 7; 3) 2, 7; 4) 5, 7. **3.** 1) 1, 2; 2) 4, 5, 6; 3) 2, 3, 8. **4.** 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 2) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 3) 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 4) 1, 2, 3, 7, 8; 5) 4, 5, 6, 7; 6) 1, 7. **5.** 1) 1; 0,6; 2) 0,6; 1; 0,9; 3) 1; 0,9. **6.** 1) 1, 2, 3, 5, 7; 2) 0,7; 3) 4, 8. **7.** 1) 2, 3, 5, 7, 8; 2) 0,2; 0,4; 3) 1, 4, 6.

БУЛЕВА АЛГЕБРА

5. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

5.1. Двоичные числа. **1.** 1) 18; 2) 92; 3) 113; 4) 129; 5) 209; 6) 158; 7) 128; 8) 136; 9) 255. **2.** 1) 1100; 2) 1010; 3) 10000; 4) 10001; 5) 11001; 6) 100000; 7) 11110; 8) 110001; 9) 1000000; 10) 111100; 11) 11111; 12) 111111. **3.** 1) 10111; 2) 10100; 3) 11001; 4) 10011; 5) 100000; 6) 10110. **4.** 1) 1, 0, 0; 2) 1, 1, 1, 1; 3) 1, 0, 0, 0; 4) 1, 0, 1; 5) 1, 0, 0, 1; 6) 1, 1, 0, 0. **5.** 1, 2, 4, 8. **6.** 1) 6, 7, 9, 1, 14; 2) 13, 10, 4, 8, 3; 3) 1, 8, 4, 11, 5. **7.** 1) 3, 9, 12; 2) 6; 3) 3, 5, 12; 4) 3, 9, 18; 5) 6, 10, 17; 6) 3, 10, 20, 24. **8.** 1) 6, 7; 2) 4, 5; 3) 4, 5, 6, 7; 4) 1, 3, 9, 11; 5) 0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13; 6) 3, 7, 11, 15; 7) 0, 2, 4, 6; 8) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 9) 6, 7, 14, 15; 10) 0, 1, 8, 9; 11) 1, 3, 5, 7; 12) 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14.

5.2. Понятие высказывания. **1.** 2, 3, 4, 6. **2.** 2, 3, 6. **3.** 1, 2, 4. **4.** 1, 2, 5.

5.3. Аксиомы булевой алгебры. **1.** 1, 4, 5. **2.** 1, 2, 4, 5. **3.** 1, 4, 6. **4.** 2, 3, 4, 5. **5.** 2, 3, 4. **6.** 1, 3, 5, 6.

5.5. Теоремы одной переменной. **1.** 1, 3, 4. **2.** 2, 3, 4. **3.** 1. **4.** 2, 4, 5, 6.

5.6. Дизъюнктивные и конъюнктивные формы. **1.** 1) 1, 2, 3, 5; 2) 2, 3, 5; 3) 1, 2, 3, 4, 5. **2.** 1) 2, 4, 5; 2) 1, 2, 4, 5; 3) 1, 2, 4, 5.

5.7. Теоремы поглощения, склеивания и де Моргана. **1.** $\bar{A}; K$. **2.** 1) PQ; 2) XZ; 3) BC. **3.** 1) B; 2) BC; 3) BD; 4) VYZ. **4.** 1) $B + C + D$; 2) BCD. **5.** 1) $\bar{A}BC\bar{D}$; 2) 0; 3) D; 4) 0.

5.8. Инвертирование сложных выражений. **1.** 1, 2, 3. **2.** 1, 2, 4. **3.** 1) BC; 2) XY; 3) BC.

6. ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ ФОРМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

6.1. Понятие булевой функции. **1.** 1) 0; 2) D; 3) 1; 4) 0. **2.** 1) 3, 6; 2) 0, 3, 7; 3) 1, 6, 7; 4) 5, 6, 7; 5) 1, 2, 3, 6; 6) 1, 3, 4, 6. **3.** 1) 010000; 2) 000100; 3) 010110; 4) 111100; 5) 110111. **4.** 1, 3, 4. **5.** 13, 14, 15. **6.** 8. **7.** 1, 2, 4. **8.** C. **9.** $XY\bar{Z}$.

6.2. Как задать булеву функцию. **1.** 4; 4. **2.** 2; 6. **3.** 13. **4.** 0. **5.** 64. **6.** 8, 8, 8, 8. **7.** 4; 5.

6.3. Минтермы. **1.** 0111. **2.** 1) 11001; 2) 1101; 3) 010; 4) 101010; 5) 10100; 6) 01. **3.** 1) $\bar{A}\bar{B}CD$; 2) $ABC\bar{D}\bar{E}\bar{F}$; 3) ABC; 4) $AB\bar{C}\bar{D}$; 5) $ABCDE$; 6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; 7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}DE$; 8) $ABCD$; 9) $\bar{A}\,B$. **4.** 1, 4, 5, 6. **5.** 1, 4, 7, 8. **6.** 1) $\bar{A}B\bar{C}D\bar{E}$; 2) $A\bar{B}C\bar{D}\bar{E}$; 3) $ABCDE$; 4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}E$; 5) $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$; 6) $ABCD\bar{E}$; 7) $\bar{A}\,\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$; 8) $\bar{A}BCDE$. **7.** 1) 9; 2) 1; 3) 1; 4) 5; 5) 2; 6) 0. **8.** 1) 0; 2) $ABP\bar{Q}R$; 3) $AB\bar{C}D$; 4) $A\bar{B}C$; 5) $A\bar{B}C$; 6) 0. **9.** 32. **10.** 128. **11.** 32. **12.** 32. **13.** 32. **14.** 16. **15.** 6. **16.** 5; 5. **17.** 2; 3; 3. **18.** 10.

6.4. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. **1.** 1) 7; 2) 15; 3) 9; 4) 9; 5) 1; 6) 1. **2.** 1) $AB\bar{C} + ABC$; 2) $A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$; 3) $\bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$; 4) $A\bar{B}C$; 5) $A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$; 6) $\bar{A}\,\bar{B}C + A\bar{B}C + ABC$. **3.** 1, 2, 3, 6. **4.** 1, 3, 4. **5.** 1, 4, 5, 6. **6.** 1) $\bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$; 2) $\bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + ABC$; 3) ABC; 4) $\bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$; 5) $\bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C}$; 6) $A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$. **7.** 1) 0, 1, 4, 7, 10; 2) 7, 8, 13; 3) 14, 15; 4) 8, 9, 10, 11; 5) 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15; 6) 0, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15.

6.5. Теорема разложения для ДНФ. **1.** 1) AB; 2) $\bar{A}B$; 3) $\bar{A}B + AB$; 4) $\bar{A}BC + ABC$. **2.** 1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 64. **3.** 1) 5; 2) 10; 3) 40; 4) 160. **4.** 1) 2; 2) 4; 3) 16; 4) 64.

6.6. Карта Вейча. **1.** 1) 7; 2) 9; 3) 13; 4) 19; 5) 1; 6) 25. **2.** 32. **3.** 2^n. **4.** 1) $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$; 2) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$; 3) $AB\bar{C}\bar{D}$; 4) $ABCD$; 5) $ABC\bar{D}$; 6) $A\bar{B}C\bar{D}$.

6.7. Нанесение функций на карту Вейча. **1.** 1) 7; 2) 14; 3) 5; 4) 13; 5) 12; 6) 12. **2.** 1) 12; 2) 1; 3) 3; 4) 6; 5) 15; 6) 7. **3.** 2; 4; 8; 16. **4.** 5; 10; 20; 40. **5.** 28.

6.8. Нахождение СДНФ при помощи карт Вейча. **1.** 64. **2.** 1) 64; 2) 40; 3) 28; 4) 0; 5) 24; 6) 56. **3.** 1) 2; 2) 63; 3) 8; 4) 0; 5) 64; 6) 8. **4.** 1) 32; 2) 32; 3) 0; 4) 14; 5) 1; 6) 11. **5.** 1) 4, 5; 2) 2, 6, 10, 12, 13, 14, 15; 3) 2, 3, 4, 5, 6, 7; 4) 3, 7, 14, 15; 5) 0, 2, 5; 6) 0, 1. **6.** 1) 0; 2) 0, 1, 14, 15; 3) 3, 7, 11, 15; 4) 0, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15; 5) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15; 6) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. **7.** 7, 10, 11, 14, 15. **8.** 7, 11, 13, 14, 15. **9.** 15. **10.** 1, 2, 5, 6. **11.** 7, 14, 15. **12.** 4, 5, 6.

6.9. Алгебраическое упрощение булевых формул. **1.** 1) 3; 3; 2) 1; 4; 3) 2; 8; 4) 3; 5; 5) 3; 5; 6) 1; 4; 7) 2; 6; 8) 1; 4. **2.** 1) $B + \bar{C}$; 2) $Y + \bar{Z}$; 3) $P + Q$; 4) $P + Q$; 5) P; 6) PQ; 7) $A + B + C$; 8) $\bar{A} + B + C$; 9) $A + \bar{B} + C$; 10) $X + Y + Z$; 11) $P + Q + R + S$; 12) $AB\bar{C}$; 13) $R\bar{S}T$; 14) $XY\bar{Z}$; 15) $\bar{B}C$; 16) $\bar{P}Q$.

6.10. Понятие импликанты. **1.** 1) 16; 2) 32; 3) 4096; 4) 256; 5) 16; 6) 65536; 7) 1; 8) 2. **2.** 1) 9; 2) 7; 3) 4; 4) 10; 5) 0; 6) 8. **3.** 1) 6; 2) 28; 3) 15; 4) 21; 5) 28; 6) 66.

6.11. Метод Квайна. **1.** 1) 10; 40; 2) 1; 10; 3) 3; 2; 4) 6; 17. **2.** 1) 3; 5; 2) 3; 5; 3) 2; 2; 4) 4; 9; 5) 1; 1; 6) 2; 2.

6.12. Нахождение простых импликант по карте Вейча. **1.** 1) 3; 6; 2) 1; 1; 3) 2; 3; 4) 3; 5; 5) 4; 9; 6) 8; 24; 7) 4; 12; 8) 5; 12. **2.** 1, 3, 4. **3.** 5; 5. **4.** 4; 8; 6. **5.** 10.

6.13. Метод Петрика. 1) 10; 12; 2) 10; 16; 3) 2; 8; 4) 2; 11.

6.14. Минимизация булевых формул при помощи карт Вейча. 1) 3;5; 2) 4; 12; 3) 3; 4; 4) 2; 2; 5) 4; 12; 6) 3; 7; 7) 4; 14; 8) 4; 12; 9) 4; 12; 10) 2; 4; 11) 2; 3; 12) 4; 12; 13) 3; 8; 14) 4; 14; 15) 3; 8; 16) 3; 8; 17) 3; 6; 18) 3; 7; 19) 4; 12; 20) 3; 8; 21) 2; 6; 22) 3; 7.

7. КОНЪЮНКТИВНЫЕ ФОРМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

7.2. Макстермы. **1.** 0011. **2.** 1) 10011; 2) 00111; 3) 1100; 4) 101. **3.** 1) 11; 2) 12; 3) 13; 4) 2; 5) 4; 6) 5. **4.** 1) $\bar{A} + \bar{B} + C + D$; 2) $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$; 3) $\bar{A} + B + C + D$; 4) $A + B + C + D$; 5) $A + \bar{B} + C + \bar{D}$; 6) $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D$. **5.** 1) $A + \bar{B} + \bar{C} + D$; 2) 1; 3) 1; 4) $A + B + C + D + \bar{E} + \bar{F}$. **6.** 19; 12. **7.** 64. **8.** 4. **9.** 1) 11; 2) 5; 3) 3; 4) 15; 5) 1; 6) 7; 7) 0; 8) 9; 9) 13. **10.** 1) 21; 2) 31; 3) 15; 4) 0; 5) 26; 6) 17; 7) 16; 8) 29. **11.** 1) 26; 2) 31; 3) 0; 4) 24; 5) 19; 6) 13. **12.** 1) $\bar{P} + Q + \bar{R} + S$; 2) $P + \bar{Q} + R + \bar{S}$; 3) $\bar{P} + Q + R + S$; 4) $P + Q + R + S$; 5) $\bar{P} + \bar{Q} + \bar{R} + \bar{S}$; 6) $P + \bar{Q} + \bar{R} + \bar{S}$; **13.** 1) $A\bar{B}\bar{C}D$; 2) $\bar{A}B\bar{C}D$; 3) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$; 4) $ABCD$. **14.** 2, 4, 6, 7.

7.3. Совершенная конъюнктивная нормальная форма. **1.** 3, 4, 5. **2.** 1) 0, 2, 6; 2) 0, 2, 4; 3) 0, 2, 3; 4) 0, 1, 2; 5) 2, 5, 6; 6) 0. **3.** 1) 4, 5, 6; 2) 0, 1; 3) 0, 1, 2, 3; 4) 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15; 5) 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15; 6) 8, 9, 10, 12, 13, 14. **4.** 1) 8; 2) 8;

3) 4; 4) 14; 5) 12; 6) 15. **5.** 1) 36; 2) 4; 3) 20; 4) 0; 5) 40; 6) 32. **6.** 1) 14, 2; 2) 8, 8; 3) 4, 12; 4) 4, 12; 5) 12, 4; 6) 12, 4. **7.** 1) 8; 2) 12; 3) 10; 4) 3; 5) 6; 6) 11.

7.4. Теорема разложения для КНФ. **1.** 1) 5, 2; 2) 3, 7; 3) 2, 1; 4) 3, 1; 5) 3, 1; 6) 5, 1. **2.** 1) 6, 6; 2) 12, 12; 3) 4, 1; 4) 7, 5; 5) 5, 2; 6) 2, 2. **3.** 1) 64; 2) 64; 3) 64; 4) 48; 5) 48; 6) 64.

7. 5. Нахождение сокращенных КНФ. **1.** 1) 9, 6; 2) 12, 8; 3) 12, 9; 4) 6, 5; 5) 10, 6. **2.** 1) 18, 9, 9; 2) 8, 2, 6; 3) 12, 6, 6.

7. 6. Нахождение тупиковых и минимальных КНФ. **1.** 1) 4, 3; 2) 5, 3; 3) 5, 2; 4) 6, 2; 5) 8, 3. **2.** 1) 5, 2, 10; 2) 14, 9, 13.

7.7. Перевод функций из КНФ в ДНФ. **1.** 1) 6, 3, 4; 2) 6, 3, 4; 3) 6, 3, 3. **2.** 1) 5, 6, 9, 10; 2) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15; 3) 11, 12. **3.** 1, 2, 5.

8. НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

8.1. Понятие неполностью определенной булевой функции. **1.** 16. **2.** 6. **3.** 32.

8.2. СДНФ неполностью определенных функций. **1.** 32. **2.** 5, 6. **3.** 0. **4.** 128. **5.** 1) 0, 2, 3, 4, 5, 6; 2) 0, 2, 4, 7; 3) 0, 1, 6, 7; 4) 0, 1, 3, 5, 6, 7. **6.** 4096. **7.** 14, 15.

8.3. СКНФ неполностью определенных функций. **1.** 9. **2.** 64. **3.** 5. **4.** 0, 1, 5. **5.** 1, 2, 5, 6. **6.** 0, 1, 4, 5, 6, 12, 14.

8.4. Минимизация ДНФ неполностью определенных функций. **1.** 1) $A+\bar{B}$; 2) $\bar{A}+C$; 3) $\bar{A}+B$; 4) C; 5) $\bar{A}+B$. **2.** 1) 4, 12, 6; 2) 2, 4, 0; 3) 2, 4, 2; 4) 4, 11, 6; 5) 4, 10, 4. **3.** 1) 7, 11, 15; 2) 1, 2, 5, 7, 9; 3) 1, 3, 5, 6, 9, 14, 15; 4) 0, 3, 7, 12.

8.5. Минимизация КНФ неполностью определенных функций. **1.** 1) 4, 3; 2) 7, 5; 3) 4, 1; 4) 4, 3; 5) 6, 3; 6) 5, 3; 7) 7, 5; 8) 0, 0. **2.** 1) 7, 3; 2) 7, 4; 3) 7, 4; 4) 4, 3; 5) 0, 0. **3.** 2, 5, 6.

9. ФОРМЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

9.1. Понятие порядка булевой функции. **1.** 3, 6, 7, 8. **2.** 2, 3, 6, 7, 9. **3.** 1, 2, 4, 5, 6, 7. **4.** 1) 1; 2) 1; 3) 3; 4) 5; 5) 3; 6) 3; 7) 4; 8) 6. **5.** 3, 4, 5, 6.

9.2. Граф-схема булевой функции. **1.** 1) 6, 4; 2) 6, 7; 3) 6, 5; 4) 5, 9; 5) 6, 10. **2.** $A+\bar{B}C$. **3.** $\bar{A}B+C$.

9.4. Повышение порядка булевых функций. **1.** 1) 2, 6; 2) 2, 8; 3) 1, 4; 4) 3, 7; 5) 4, 14; 6) 4, 8. **2.** 1) 8, 6; 2) 6, 5; 3) 5, 4; 4) 8, 6; 5) 14, 11; 6) 12, 9; 7) 12, 8. **3.** 1) 12, 8; 2) 8, 7; 3) 10, 8; 4) 13, 10. **4.** 1) 8, 4; 2) 7, 4; 3) 8, 4; 4) 6, 2; 5) 6, 2; 6) 10, 4.

9.6. О классификации форм высших порядков. **1.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12. **2.** 1) 6; 2) 12; 3) 15. **3.** 1) 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9; 2) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 3) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 4) 10; 5) 5; 6) 1, 5; 7) 10; 8) 7, 8, 9; 9) 6; 10) 1, 5; 11) 1, 2, 3, 4, 5; 12) 7, 8, 9.

10. СИММЕТРИЧЕСКИЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

10.1. Понятие симметрической функции. **1.** 2, 4, 5. **2.** 720. **3.** 1, 4, 6.

10.2. Способы представления симметрических функций. **1.** 1) 2, 1; 2) 3, 2; 3) 4, 4; 4) 5, 0. **2.** 1) 0; 2) 1, 2, 4; 3) 3, 5, 6, 9, 10, 12; 4) 7, 11, 13, 14. **3.** 1) 5, 9, 12; 2) 7, 13; 3) 3, 5, 6, 9, 12, 18, 24. **4.** 1) 28; 2) 11; 3) 120; 4) 1; 5) 1; 6) 56. **5.** 1) 16; 2) 224; 3) 450; 4) 64; 5) 7; 6) 3. **6.** 1) 2; 2) 3; 3) 6; 4) 8. **7.** 1) 4, 0; 2) 1, 2.

10.3. Операции над симметрическими функциями. **1.** 1) 0, 1, 2, 4; 2) 1, 2, 3, 4; 3) 0, 5, 6, 7. **2.** 1) 1, 2, 3, 4; 2) 1, 3, 4; 3) 1, 3, 5, 6. **3.** 1) 32; 2) 12; 3) 4; 4) 0; 5) 4; 6) 4. **4.** 1) 16; 2) 4; 3) 4; 4) 22; 5) 12; 6) 8. **5.** 1) 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14; 2) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14; 3) 0, 1, 2, 4, 8, 15; 4) 15; 5) 1, 2, 4, 8. **6.** 1) 0, 7, 11, 13, 14; 2) 7, 11, 13, 14, 15; 3) 0, 1, 2, 4, 8, 15; 4) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15; 5) 0, 1, 2, 4, 8, 15.

10.4. Разложение симметрических функций для ДНФ. **1.** 1, A, B, D, E. **2.** 2, A, B, D, E. **3.** 1, 2, 2, 3. **4.** 3, B, C, D, E, F. **5.** 5, P, Q, R, S, T. **6.** 0, C, D, E, F. **7.** 0, 4, C, D, E, F.

10.5. Разложение симметрических функций для КНФ. **1.** 2, 1, BC, BC. **2.** 0, A, B, C. **3.** 0, 3, 5, 6, 7. **4.** 1) 0, 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 15; 2) 2, A, B, C, D. **5.** 1, 2, A, B, C.

10.6. Общий случай симметрии булевых функций. **1.** 4, 5. **2.** 6, 6. **3.** $B\bar{C}\bar{D}$. **4.** 11, 9.

11. ЧИСЛОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

11.1. Понятие изображающего числа булевой функции. **1.** 1) 01011101; 2) 11001100; 3) 01010101; 4) 00011111; 5) 00010111; 6) 10000000. **2.** 1) 0111; 2) 0010; 3) 1111; 4) 0001; 5) 0000; 6) 1100. **3.** 1) B, C, D; 2) A, B, D; 3) P, Q, R. **4.** 1) 00010000; 2) 00000001; 3) 11111011; 4) 00000100; 5) 11111110; 6) 11101111; 7) 10000000; 8) 11110111; 9) 01111111. **5.** 1) 00001111; 2) 00110011; 3) 01010101; 4) 11110000; 5) 11001100; 6) 10101010.

11. 2. Операции над изображающими числами. **1.** 1) 01; 2) 00111101; 3) 0111. **2.** 1) 00110111; 2) 01000110; 3) 00011101. **3.** 1) C, E, K; 2) A, B, C, P, Q, R. **4.** 1) 11100100; 2) 11100000; 3) 00100110; 4) 01011000. **5.** 1) 00000001; 2) 0000 0000 0000 1111; 3) 0111 0000 0111 0101. **6.** 1) C, D; 2) A, B, C, D; 3) C, D; 4) B, C, D; 5) A, B; 6) A, B, C, D.

11.3. Изображающие числа функций высших порядков. **1.** 1) 0100 0111 111100000; 2) 0001 0001 1101 0011; 3) 0000 0000 0000 0100; 4) 0000 0001 0000 0001. **2.** $f = A(B + CD)$.

11.4. Восстановление булевой функции по изображающему числу. **1.** 1) 7, 8, 15; 2) 0, 1, 5, 6; 3) 0, 7; 4) 3, 7; 5) 0, 3, 4, 7, 15; 6) 10, 11, 12, 13, 14. **2.** 1) 0, 1, 4, 5, 6, 7; 2) 3, 5, 6, 7; 3) 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14; 4) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15; 5) 0, 2, 4, 6; 6) 0, 1, 2, 4. **3.** 6. **4.** 10. **5.** 7. **6.** 2^m. **7.** 1) $A\bar{B}\bar{C}$; 2) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; 3) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + ABC$; 4) $\bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC$; 5) $\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$; 6) $\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$. **8.** 1) BC; 2) $\bar{A}\bar{B}$; 3) C; 4) $\bar{A} + \bar{B} + C$; 5) $A + \bar{B} + \bar{C}$; 6) $B + \bar{C}$. **9.** 1) $\bar{X}$; 2) 1; 3) $X\,\bar{Y}\,\bar{Z}$; 4) 0; 5) X; 6) $\bar{Z}$. **10.** 32. **11.** 256. **12.** 1) 28; 2) 16; 3) 8.

11.5. Числовое представление систем булевых функций. **1.** 1) 1, 1, 0, 0, 4, 4, 6, 7; 2) 4, 4, 12, 12, 12, 13, 14, 10; 3) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3; 4) 1, 1, 5, 5, 1, 9, 5, 13. **2.** 1) 32; 2) 32. **3.** 63. **4.** 256. **5.** 1, 0. **6.** C, BC, AB. **7.** 11001010. **8.** 07007700. **9.** 1, 0, 8. **10.** 2, 6. **11.** 1) 3, 6, 3; 2) 3, 5, 7; 3) 2, 8, 2; 4) 4, 4, 4; 5) 5, 5, 6; 6) 4, 8, 0.

11.6. Зависимость и независимость булевых функций. **1.** 1, 4, 6. **2.** 1, 2, 3, 5, 6. **3.** 1) 1, 2, 4, 6; 2) 2, 4, 5.

11.7. Виды зависимости между двумя функциями. **1.** 1) 2, 1, 1, 3; 2) 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 3; 3) 2, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3. **2.** 1, 4, 5. **3.** 1) 3; 2) 13; 3) 7; 4) 11; 5) 11; 6) 5. **4.** 11. **5.** 1) 13; 2) 6; 3) 6; 4) 14. **6.** 0, 1. **7.** 31.

11.8. Нахождение явного вида логической зависимости. **1.** $f_1f_2f_3+\overline{f}_1\overline{f}_2\overline{f}_3=1$. **2.** 1) $f_1\overline{f}_2+\overline{f}_1f_2=1$; 2) $f_1+\overline{f}_2=1$; 3) $f_1+f_2=1$; 4) $\overline{f}_1+f_2=1$; 5) $f_1f_2+\overline{f}_1\overline{f}_2=1$; 6) $\overline{f}_1+\overline{f}_2=1$. **3.** $\overline{f}_1+\overline{f}_2=1$. **4.** 1) 0, 2, 6, 7; 2) 0, 2, 3, 4, 5, 6; 3) 1, 4, 5, 6; 4) 0, 1, 2, 6, 7. **5.** 1. **6.** $f_1f_2+\overline{f}_2f_3$. **7.** $\overline{f}_1\overline{f}_2+f_2f_3$.

12. БУЛЕВЫ УРАВНЕНИЯ

12.1. Уравнения с одной неизвестной переменной. **1.** 0, 0, 1. **2.** 1) 1, 3, 5, 6; 2) 1, 2, 3, 6. **3.** 1, 3, 6. **4.** 2, 5. **5.** 4, 7. **6.** 1) 1, 2, 6; 2) 4, 5. **7.** 1) 4, 5; 2) 1, 3, 6.

12.2. Уравнения с несколькими неизвестными переменными. **1.** 16. **2.** 1, 1, 1, 1. **3.** 1, 0, 1. **4.** 32. **5.** $AX+BY$.

12.3. Уравнения конъюнктивного типа. **1.** 1) 4, 16; 2) 0, 4, 5, 7; 3) $A+BC$; 4) 4, 5, 7; 5) 8, 256; 6) 0, 1, 8, 9, 10, 11, 14, 15; 7) $A+BC$; 8) 2, 5, 6. **2.** 1) 3, 8; 2) 2, 4, 5; 3) B; 4) 6, 64; 5) 4, 5, 8, 9, 10, 11.

12.4. Уравнения дизъюнктивного типа. **1.** 1) 1, 4, 7; 2) 8, 4; 3) 2, 3, 8, 9, 14, 15; 4) 3, 4, 6, 8. **2.** 1) 1, 64; 2) 1, 2, 3, 4, 5, 7. **3.** 1) 64, 3; 2) 1, 9.

12.5. Другие типы булевых уравнений. **1.** 1) 2, 6, 7; 2) 0, 1, 5; 3) 3, 4. **2.** 1) 1, 7; 2) 0, 2, 3, 4, 6; 3) 5; 4) $\overline{A}B+\overline{C}$; 5) $\overline{A}+B+\overline{C}$. **3.** 1) 2, 4, 5, 7; 2) 0, 1, 3; 3) 6; 4) A; 5) $AB\overline{C}$; 6) $A+B\overline{C}$.

12.6. Булевыми уравнения с несколькими неизвестными функциями. **1.** 1) 0, 1, 3, 4; 2) 0, 1, 3, 4; 3) 81; 4) 2, 5, 6, 7. **2.** 1) 48; 2) 0, 1, 2, 3, 5; 3) 4, 7; 4) 0, 2, 5; 5) 6. **3.** 1) 7; 2) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 3) 1. **4.** 31. **5.** 1) 343; 2) 2, 3, 5.

12.8. Неразрешимые уравнения. **1.** 1) 1, 2, 6; 2) 5, 7; 3) 0, 3, 4. **2.** 1) 4, 5; 2) 0, 1, 3, 6; 3) 2, 7. **3.** 1) 1, 4, 5; 2) 8; 3) 2, 3, 7; 4) $\overline{A}B+C$.

13. ПОРОГОВЫЕ ФУНКЦИИ

13.1. Основные понятия. **1.** 7, 4, 10. **2.** 1) 1, 3, 5, 7; 2) 1, 3, 5, 6, 7; 3) 7, 13, 15; 4) 7, 11, 13, 15. **3.** 1) 0, 1, 2, 4; 2) 0, 1, 4; 3) 0, 1, 2, 8; 4) 0, 2, 4, 8, 12. **4.** 1) $B+C$; 2) $A+BC$; 3) $B+C+D$; 4) $AB+BCD$. **5.** 1, 2, 3, 4. **6.** 3, 1, 2, 3, 1, 2. **7.** 3, 5, 6, 7.

13.2. Функции, определяемые порогом при неизменных весах. **1.** 0, 1, 2, 3, 4. **2.** 1) 7, 13; 2) 4, 10; 3) 5, 3; 4) 12; 5) 10, 11; 6) 0, 1; 7) 4, 5; 8) 6, 7. **3.** 2, 3, 4, 6.

13.4. Нахождение пороговых функций. **1.** 1) 6, 5, 5, 4; 2) 4, 3, 5, 3; 3) 4, 5, 5, 6. **2.** 2, 3, 4. **3.** 1) [1, 2, 2, 3; 5]; 2) [1, 2, 3, 2; 4]; 3) [1, 1, 1, 1; 2]; 4) [1, 2, 3, 2; 3]; 5) [2, 1, 3, 2; 4]; 6) [2, 1, 2, 1; 4].

13.5. Мажоритарные функции. **1.** 3, 5, 6, 7. **2.** 7, 10, 19. **3.** 25. **4.** 5, 2. **5.** 140. **6.** 126. **7.** 5, 11. **8.** 7, 3. **9.** 630.

13.6. Симметрические мажоритарные функции. **1.** 6, 7, 8, 9, 10, 11. **2.** 19, 10. **3.** 11, 5. **4.** 7, 3. **5.** 13, 6. **6.** 11, 10. **7.** 4, 5, 6, 7. **8.** 140.

14. БУЛЕВО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

14.1. Аксиомы алгебры Жегалкина. **1.** 1) 1, 0, 0; 2) 0, 1, 0. **2.** 1) 0, 1, 1; 2) 0, 1, 0. **3.** 1, 2, 4.

14.2. Перевод булевых выражений в алгебру Жегалкина и наоборот. **1.** 1) ABC; 2) BC; 3) AC; 4) BC. **2.** 1) $A\oplus B\oplus C$; 2) $AB\oplus C$; 3) $A\oplus BC$. **3.** 1) $B+C$; 2) $A+\overline{B}C$; 3) $A\overline{B}+\overline{C}$. **4.** 1, 4, 5, 6. **5.** 2, 3, 5, 6. **6.** 1) 7; 2) 0, 2, 3, 6; 3) 1, 2, 5, 6; 4) 3, 6, 7.

14.3. Применение карт Вейча в алгебре Жегалкина. **1.** 1) 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14; 2) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 11, 14; 3) 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 14; 4) 1, 2, 4, 6, 8, 11, 13, 15. **2.** 1) 0, 1, 2, 3, 4, 6, 10, 11, 13, 14; 2) 0, 2, 4, 8, 10, 13, 14, 15; 3) 0, 1, 2, 3, 7, 14; 4) 8, 9, 10, 11, 14. **3.** 1) 12, 4, 5; 2) 10, 4, 3; 3) 11, 5, 4; 4) 10, 3, 4. **4.** 1) 11, 6; 2) 16, 6; 3) 10, 4; 4) 15, 6.

14.4. Понятие производной от булевой функции. **1.** 0, 1, 2. **2.** 1) 1, 3, 5; 2) 1, 3, 7; 3) 0, 2, 4; 4) 2, 4, 6. **3.** 1) BC; 2) $\bar{A}\bar{B}C$; 3) $AB\bar{C}$.

14.5. Производная первого порядка. **1.** 1) BC; 2) B; 3) $B\bar{C}\bar{D}$; 4) $B+C$. **2.** 1) $A+\bar{C}$; 2) $A\bar{C}$; 3) $\bar{A}C$; 4) $\bar{A}C+D$. **3.** A, C, D, E. **4.** A, B, C, D, E. **5.** 1) $\bar{B}+CD$; 2) $\bar{B}\bar{C}\bar{D}$; 3) $\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$. **6.** $B+\bar{C}D$.

14.6. Дифференцирование булевых функций с применением карт Вейча. **1.** 14, 5. **2.** 13, 3. **3.** 1, 3, 4, 5, 6, 14, 15. **4.** 1) A, B, D, E; 2) 6, A, E. **5.** 1) 3, 9, 4, 4; 2) 0, 1, 2, 3, 4; 3) 1, 2, 7; 4) 2, 3, 7; 5) 2, 3, 7. **6.** 0, 1, 4, 5. **7.** 4, 1, 5.

14.7. Смешанные производные. **1.** 1) 1; 2) 0; 3) 0; 4) 1; 5) 0; 6) 0. **2.** $\bar{B}\bar{C}, \bar{C}$. **3.** $\bar{C}+\bar{D}$. **4.** 1) D; 2) $AC+\bar{A}\bar{C}$; 3) 1; 4) $A+D$; 5) 0.

14.8. Теоремы о разложении булевых функций. **1.** $\bar{A}, B, B$. **2.** 1) 2, 4; 2) 1, 3; 3) 7, 8; 4) 5, 6.

14.9. Разложение булевых функций в ряд Тейлора. **1.** 2, 4, 8. **2.** 1) 16; 2) 6; 3) 4, 4; 4) 6; 5) A, B, D; 6) B, D; 7) 3, B, B.

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

15. ДИОДНО-РЕЗИСТОРНЫЕ СХЕМЫ

15.2. Простейшие диодно-резисторные схемы. **1.** 1) 20, 0; 2) 20, 20; 3) 20, 20; 4) 20, 20; 5) 20, 20; 6) 20, 0. **2.** 1) 10, 30, 30; 2) 20, 20, 0; **3.** 1) 0, 15, 15; 2) 15, 15, 15; 3) 15, 15, 0. **4.** 1) 8, 0; 2) 10, 0; 3) 0, 12; 4) 0, 9. **5.** 1) 8, 0; 2) 6, 6; 3) 6, 0, 8; 4) 14, 8, 6. **6.** 1) 0, 10; 2) 10, 0; 3) 0, 0, 10; 4) 10, 10, 10. **7.** 1) 0, 12, 12; 2) 12, 6, 6; 3) 12, 12, 12; 4) 6, 6, 6. **8.** 8, 8, 8; 2) 0, 8, 8; 3) 0, 0, 8; 4) 0, 0, 8. **9.** 1) 20, 20, 20; 2) 0, 0, 20; 3) 20, 20, 0; 4) 0, 0, 0. **10.** 1) 25, 50, 25, 50; 2) 25, 25, 0; 3) 25, 25, 25; 4) 50, 50, 0. **11.** 1) 40, 40; 2) 0, 40, 40; 3) 40, 80, 40; 4) 40, 0, 40. **12.** 1) 0, 10, 10; 2) 10, 20, 15; 3) 15, 20, 10; 4) 0, 5, 10. **13.** 1) 10, 20, 20; 2) 5, 5, 15; 3) 0, 5, 5; 4) 0, 5, 5. **14.** 1) 0, 10, 10; 2) 10, 10, 30; 3) 30, 10, 10; 4) 10, 10, 30; 5) 30, 0, 0; 6) 0, 20, 20; 7) 0, 0, 20; 8) 20, 0, 20. **15.** 1) 10, 10, 10, 10; 2) 0, 0, 30, 0; 3) 0, 0, 30, 0; 4) 10, 40, 0, 0; 5) 0, 0, 0, 30; 6) 30, 30, 0. **16.** 1) 0, 4, 4; 2) 4, 4, 4; 3) 0, 4, 16; 4) 4, 16, 12; 5) 4, 8, 20; 6) 8, 20, 0; 7) 0, 4, 16; 8) 4, 4, 20.

15.3. Выпрямительный мост. **1.** 1, 4, 5, 6. **2.** b, d. **3.** 1) 1, 3; 2) 1, 2, 3, 4; 3) 2, 4. **4.** 1, 2, 3, 4. **5.** 1) 0, 14, 14; 2) 14, 14, 0. **6.** 1) 2, 4; 2) 1, 3; 3) 1, 2, 3, 4. **7.** 2, 4. **8.** 1) 0, 14, 0; 2) 14, 14, 14. **9.** 1) 14, 0, 0; 2) 14, 14, 0. **10.** 1) 0, 14, 0; 2) 14, 14, 14. **11.** 0, 100, 0, 100. **12.** 1) 0, 10, 10; 2) 10, 10, 20, 20; 3) 10, 0, 10. **13.** 1) 20, 0, 0; 2) 20, 20, 0, 0; 3) 20, 0, 0. **14.** 1) 20, 0, 20; 2) 20, 0, 20, 20; 3) 0, 0, 20. **15.** 1, 2, 3, 4. **16.** 1) 0, 20, 20; 2) 20, 20, 0, 0; 3) 20, 20, 0. **17.** 1) 0, 0, 0; 2) 20, 20, 0, 0; 3) 20, 0, 20. **18.** 1) 20, 0, 20; 2) 0, 20, 0, 0; 3) 0, 0, 20.

16. КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ

16.2. Контактная реализация логических операций И, ИЛИ, НЕ. **1.** 1) ABC; 2) $A\bar{B}C$; 3) $A\bar{B}C$; 4) $A\bar{B}$; 5) $A\bar{D}$; 6) $A+\bar{B}+C$. **2.** AC. **3.** 1. **4.** 1, C. **5.** $A\bar{B}, A\bar{B}$. **6.** 1) $\bar{D}, \bar{B}C$; 2) $A\bar{D}, AC$; 3) $\bar{D}, \bar{B}$; 4) A, AC.

16.3. Построение контактной структуры по булевой функции. **1.** 7, 4. **2.** 8. **3.** 1, 3, 4. **4.** $ABD+CD+\bar{A}\bar{B}C+K$.

16.4. Логический синтез контактных структур. **1.** $\bar{A}B\bar{C}D$, 2. **2.** $\bar{A}BC$, 1. **3.** 1, 2, 2, 3. **4.** 0, 3. **5.** 8, 4. **6.** 9, 9. **7.** 24, 24. **8.** 32.

16.5. Мостиковые структуры. **1.** 4, 10. **2.** 8, 4, 9. **3.** 15.

16.6. Симметрические структуры. **1.** 32. **2.** 16, 10. **3.** 224. **4.** 1) 39; 2) 11; 3) 140; 4) 20.

16.7. Полная симметрическая структура Шеннона. **1.** 1) 2; 2) 3; 3) 4. **2.** 1) 10; 2) 10; 3) 5; 4) 1. **3.** 56. **4.** 19. **5.** 22.

16.8. Структура «чет-нечет». **1.** 64. **2.** 1, 4, 5, 7, 8.

16.10. Структуры с перестраиваемой схемой соединений. **1.** $A, \bar{A}, A$. **2.** 1) 57; 2) 3; 3) 90; 4) 0; 5) 9; 6) 54.

16.11. Примеры контактных структур. **1.** 1, 2, 4, 6. **2.** 1, 3, 4.

17. КОМБИНАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

17.2. Элемент И. **1.** 1) 5, 5, 0; 2) 0, 0, 0; 3) 5, 5, 0; 4) 5, 5, 0; 5) 5, 5, 5; 6) 5, 5, 0. **2.** 1) 5, 5, 0, 5, 0; 2) 5, 0, 0, 5, 5. **3.** 0, 5, 0, 0.

17.3. Элемент ИЛИ. **1.** 1) 0, 5, 5, 5; 2) 5, 5, 0, 0; 3) 5, 0, 0, 0; 4) 0, 5, 5, 5. **2.** 1) 1, 9, 1, 10, 1; 2) 9, 1, 10, 0, 9; 3) 0, 9, 0, 9, 9; 4) 9, 9, 9, 9, 9. **3.** 0, 9, 9, 9.

17.4. Инвертор и схема И—НЕ. **1.** 1) 0, 6; 2) 6, 0. **2.** 1) 0, 0, 6, 6; 2) 6, 6, 6, 0; 3) 0, 6, 6, 0, 0; 4) 0, 0, 0, 6, 6. **3.** 1) 7, 0, 0, 0, 0; 2) 0, 0, 7, 7, 7; 3) 0, 0, 0, 0, 0; 4) 0, 0, 0, 7, 7.

17.5. Понятие суперпозиции. **1.** $AB + CD$. **2.** $AB + AC$. **3.** AB. **4.** 1, 2, 4, 6.

17.8. Комбинационные схемы и булевы функции высших порядков. **1.** 1) 2, 1; 2) 1, 2; 3) 3, 2; 4) 2, 3. **2.** 1) 0, 4, 3; 2) 1, 3, 2; 3) 4, 3, 2; 4) 4, 1, 4. **3.** 1) 3, 7, 11, 12, 13, 14, 15; 2) 2, 4, 0; 3) 4, 8, 8. **4.** 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1. **5.** 1. **6.** $A\bar{C}$. **7.** 2, 4, 1. **8.** 4, 6, 14.

17.9. Логический синтез комбинационных схем. **1.** 1) 4, 4; 2) 0, 1, 2, 3, 4, 5; 3) 10, 11, 12, 13, 14, 15; 4) 6. **2.** 1) $A + B + C$; 2) $BC + \bar{B}\bar{C}$; 3) $\bar{C}$; 4) D.

17.10. Синтез преобразователя двоичного числа в код «2 из 5». **1.** 1) 0100; 2) 0101; 3) 0110; 4) 1001. **2.** 1) 5, 4; 2) 22.

17.11. Полный дешифратор. **1.** 256. **2.** 01010. **3.** 160.

17.12. Синтез неполного дешифратора. **1.** 1) 10, 11, 12, 13, 14, 15; 2) 2, 6, 2; 3) 10, 12, 14. **2.** 7, 9.

17.13. Мультиплексор. **1.** 448. **2.** 0, 2, 5. **3.** 43.

17.14. Однородные среды. **1.** 1, 3, 4, 6. **2.** 1) 1; 2) ABC.

17.16. Схема «чет—нечет». **1.** 1) 2; 2) 5; 3) 0. **2.** 1) 3, 4, 5; 2) 1, 3, 4, 5, 6; 3) 2, 3, 4, 5. **3.** 1, 2, 3, 4, 5, 6.

17. 19. Обнаружение одиночных искажений в двоичных кодах. **1.** 1, 3, 5, 7. **2.** 2, 5, 7, 8, 9. **3.** 1) 128; 2) 1024. **4.** 128. **5.** 1, 2, 5, 6. **6.** 1) 9; 2) 256.

17.22. Рефлексные коды. Коды Грея. **1.** 1) 110000; 2) 010100; 3) 001010; 4) 110110; 5) 011010; 6) 111100. **2.** 1) 4, 5, 6, 7; 2) 8, 9, 10, 11; 3) 12, 13, 14, 15.

17.23. Преобразователь кода Грея в весовой двоичный код. **1.** 1) 00101; 2) 10010; 3) 01001; 4) 11010; 5) 11110; 6) 10111. **2.** 1) 00000; 2) 01010; 3) 10011; 4) 10100; 5) 11111; 6) 11100.

17.24. Преобразование произвольного рефлексного кода в двоичный весовой код. **1.** 1) 0, 2; 2) 3, 1; 3) 4, 0; 4) 7, 8. **2.** 1) 3, 0; 2) 1, 0. **3.** 1, 3, 8.

18. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПОЛНОТА СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

18.2. Самодвойственные функции. **1.** 1) 4; 2) 65536; 3) 16; 4) 2. **2.** 1) 25; 2) 13; 3) 6. **3.** 1) 16; 2) 4; 3) 32; 4) 2^{n-1}. **4.** 3, 5, 6, 7. **5.** 1) 3, 4, 5, 7; 2) 1, 4, 5, 6.

18.3. Линейные функции. **1.** 1) 2, 3, 4, 5; 2) 2, 3, 5, 6, 7. **2.** 1) 64; 2) 128; 3) 1024. **3.** 1, 4, 6, 7. **4.** 3, 4, 6.

18.4. Монотонные функции. **1.** 1) 1, 2, 4, 6; 2) 3, 5, 6. **2.** 3, 5, 6, 9. **3.** 1) 1, 2, 3, 4, 5, 7; 2) 1, 2, 5. **4.** 1) 1, 2, 4, 7; 2) 1, 3, 4, 5, 7. **5.** 1, 2, 3, 4, 6.

18. 5. Функции, сохраняющие единицу. **1.** 0, 1, 1, 0, 1, 0. **2.** 1) 1, 2, 4; 2) 2, 4. **3.** 1) 128; 2) 32768. **4.** 1) 1, 3, 4, 5; 2) 2, 3, 5, 6, 7. **5.** 1, 3, 5.

18. 6. Функции, сохраняющие нуль. **1.** 1) 1, 4; 2) 1, 2, 3, 5. **2.** 1, 4, 5, 6. **3.** 1) 1, 4, 5, 7; 2) 1, 2, 3, 5, 6. **4.** 128. **5.** 16384.

18.7. Теорема Поста о функциональной полноте. **1.** 2, 3, 4, 6. **2.** 1) 3, 4; 2) 1, 4, 6.

18.8. Функции двух аргументов. **1.** 1) 2, 3, 5; 2) 2, 3, 6. **2.** 1, 4, 5, 6. **3.** 1) 1, 2, 4, 6; 2) 2, 3, 4, 5. **4.** 1) 1, 2, 4; 2) 2, 4, 6. **5.** 1) 1, 3, 4, 6; 2) 1, 2, 5, 6. **6.** 1) 2, 5; 2) 3, 5, 6. **7.** 2, 4, 6. **8.** 2, 3, 4, 6, 7.

18.9. Минимальные полные системы элементарных функций. **1.** 5. **2.** 9, 6.

18. 10. О реальных системах логических элементов. **1.** 1) $ABC+\bar{D}$; 2) $\bar{A}+\bar{B}+CD$; 3) $\bar{B}\bar{C}$. **2.** 1) 4; 2) 6; 3) 12; 4) 3; 5) 5; 6) 11. **3.** 2, 3, 4, 7. **4.** 1) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15; 2) 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14; 3) 0, 1, 9; 4) 3, 6, 7, 11.

19. МНОГОТАКТНЫЕ АВТОМАТЫ

19.2. Триггер типа *RS*. **1.** 0, 1, 1. **2.** 1, 0, 1, 0. **3.** 0, 1, 0, 1. **4.** 1, 0, 1. **5.** 0, 1, 1. **6.** 0, 1, 0. **7.** 1, 1, 1, 0. **8.** 1, 1, 0, 1. **9.** 0, 0, 1, 1. **10.** 1, 0, 0, 1.

19.3. Триггер типа *T*. **1.** 1) 1, 0, 1, 0, 1; 2) 0, 1, 1, 0, 1. **2.** 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1. **3.** 0, 1, 1, 1, 1, 0. **4.** 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0. **5.** 1) 1, 5; 2) 2, 6; 3) 4, 8; 4) 4, 8.

19.4. Асинхронные автоматы на *T*-триггерах. **1.** B, E, F. **2.** 1) 101100; 2) 000000; 3) 111111. **3.** 000000. **4.** 1) 000011; 2) 000010; 3) 011100; 4) 011111; 5) 011110; 6) 011001. **5.** 1) 011010; 2) 010001; 3) 101101; 4) 100111; 5) 100001; 6) 111101. **6.** 1) 11110; 2) 10100; 3) 10000; 4) 11111. **7.** 1) 111111; 2) 111110; 3) 111011; 4) 000000; 5) 011111; 6) 111111; 7) 110011; 8) 010111.

19.5. Синтез синхронных автоматов на триггерах типа *T*. **1.** 1) 100, 2) 010; 3) 010. **2.** 1) 010; 2) 000; 3) 101. **3.** 1) 011; 2) 111; 3) 101.

19.6. Триггер типа *JK*. **1.** 2. **2.** 2, 4, 6, 8. **3.** 3, 4, 5, 6, 7.

19.7. Синтез простейших многотактных автоматов на *JK*-триггерах. **1.** 1) 100, 000; 2) 001, 100; 3) 110, 011. **2.** 011. **3.** 1) 101; 2) 111; 3) 011. **4.** 6. **5.** 1) 001; 2) 011; 3) 101. **6.** 1) 1, ×, 0, ×, 0, ×; 2) ×, 0, 0, ×, 1, ×; 3) 0, ×, 0, ×, ×, 1; 4) ×, 0, 1, ×, ×, 0; 5) 0, ×, ×, 0, 1, ×; 6) ×, 1, ×, 0, 0, ×; 7) 0, ×, ×, 1, ×, 0; 8) ×, 0, ×, 0, ×, 1. **7.** 1) $\bar{B}\bar{C}$; 2) $B\bar{C}$; 3) AC; 4) $\bar{A}C$; 5) $\bar{A}B+A\bar{B}$; 6) $AB+\bar{A}\bar{B}$.

19.8. Сдвиговый регистр. **1.** 10111. **2.** 1) 10110; 2) 22. **3.** 1) 6; 2) 3. **4.** 1) 2; 2) 31; 3) 19; 4) 0; 5) 29; 6) 20.

19.9. Синтез многофункциональных автоматов. **1.** 1) 5; 2) 1; 3) 4. **2.** 1) 6; 2) 19; 3) 27. **3.** 1) 24; 2) 30; 3) 23. **4.** 1) 10; 2) 2, 5; 3) 3, 4, 8, 9. **5.** 1) 6, 7, 10, 13, 14, 15; 2) 0, 1, 11, 12; 3) 0, 1, 11, 12; 4) 6, 7, 10, 13, 14, 15. **6.** 1) $Z\bar{E}+YE$; 2) $\bar{Z}\bar{E}+\bar{Y}E$.

19.14. Основная модель конечного автомата. **1.** 1) 10001; 2) 32; 3) 32; 4) 512. **2.** 10. **3.** 63. **4.** 128.

19.15. Автомат Мили. **1.** 0, 1, 0; 1, 1, 1. **2.** 2, 4, 5, 6.

19.16. Автомат Мура. **1.** 00100. **2.** 1, 2, 6.

КОМБИНАТОРИКА

20. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

20.1. Понятие факториала. **1.** 1) 7!; 2) $k!$; 3) $(n-3)!$; 4) $2 \cdot n!$; 5) 7!; 6) 9!; 7) 23!; 8) 18!. **2.** 1) $n!$; 2) $k!$; 3) $(k-2)!$; 4) $(n-2)!$; 5) $(k-1)!$; 6) $(k-1)!$. **3.** 1) $\frac{1}{k}$; 2) $k+2)$; 3) $\frac{k+1}{k-1}$; 4) $\frac{n^2}{n-1}$; **4.** 1) 15; 2) 32. **5.** 1) 2; 2) 2. **6.** 3, 5, 7, 8, 9. **7.** 0, 4.

20.2. Правило произведения в комбинаторике. **1.** 90. **2.** 64. **3.** 2187. **4.** 3125. **5.** 36; 30. **6.** 300. **7.** 30. **8.** 18000. **9.** 900. **10.** 12. **11.** 126. **12.** 112.

20.3. Правило суммы в комбинаторике. **1.** 11. **2.** 10. **3.** 14. **4.** 4, 7.

20.4. Правило суммы и диаграммы Венна. **1.** 1) 1, 2, 9; 2) 1, 2, 4, 5, 6; 3) 1, 2, 3, 7, 8, 9. **2.** 1) 8; 2) 13; 3) 12; 4) 8. **3.** а, б, в, г, д, е, ж, з, и. **4.** е, ж, к, л, м.

20.5. Перестановки без повторений. **1.** 120. **2.** 24. **3.** 144. **4.** 288. **5.** 600. **6.** 120. **7.** 10. **8.** 33!.

20.6. Перестановки с повторениями. **1.** 20. **2.** 1680. **3.** 151200. **4.** 90. **5.** 60. **6.** 180. **7.** 30. **8.** 2160.

20.7. Размещения без повторений. **1.** 720. **2.** 5040. **3.** 36. **4.** 720. **5.** 7, 3. **6.** 11, 4. **7.** 840. **8.** 720. **9.** 990. **10.** 4, 14. **11.** 3, 11. **12.** 4, 9.

20.8. Размещения с повторениями. **1.** 100. **2.** 900. **3.** 768. **4.** 216. **5.** 1024. **6.** 1. **7.** 3, 5. **8.** 125, 625. **9.** 36. **10.** 180. **11.** 1) 64; 2) 8; 3) 1024; 4) 1024; 5) 3136. **12.** 100. **13.** 125. **14.** 128.

20.9. Сочетания без повторений. **1.** 56. **2.** 84. **3.** 126. **4.** 128. **5.** 12. **6.** 9, 6. **7.** 5, 6. **8.** 1050. **9.** 210. **10.** 1) 60; 2) 30. **11.** 1) 14; 2) 10; 3) 20; 4) 16. **12.** 35. **13.** 220. **14.** 91. **15.** 126. **16.** 210. **17.** 1) 220; 2) 105. **18.** 252. **19.** 252.

20.10. Свойства сочетаний без повторений. **1.** 252. **2.** 8, 9. **3.** 3, 11. **4.** 715. **5.** 560.

20.11. Сочетания с повторениями. **1.** 816. **2.** 1) 1001; 2) 286; 3) 330; 4) 70. **3.** 1771. **4.** 190. **5.** 5005. **6.** 496. **7.** 325. **8.** 3003. **9.** 680. **10.** 39.

20.12. Упражнения на применение основных формул комбинаторики. **1.** 1) 1, 2, 3, 4; 2) 5, 6; 3) 3, 4, 5, 6; 4) 5, 6. **2.** 1, 2, 4, 6. **3.** 2, 3, 6. **4.** 1, 2, 3, 6. **5.** 1, 2, 4, 6. **6.** 1, 2, 3. **7.** 1, 7, 4. **8.** 1, 8, 1. **9.** 1, 6, 1. **10.** 1, 1, 27. **11.** 24, 1, 1. **12.** 1, 1, 10. **13.** 1, 1, 3. **14.** 12, 1, 45. **15.** 1, 3, 4, 5.

21. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

21.1. Разбиение множества на два подмножества. **1.** 35. **2.** 462. **3.** 256. **4.** 1) 56; 2) 28; 3) 35. **5.** 7. **6.** 12. **7.** 1) 495; 2) 462; 3) 2047.

21.2. Разбиение множества на несколько подмножеств. **1.** 105. **2.** 12600. **3.** 1575. **4.** 1. **5.** 25200. **6.** 560.

21.3. Задача о переключателях. **1.** 1295. **2.** 1) 3124; 2) 625; 3) 1, 3, 0, 1, 4. **3.** 179. **4.** 250. **5.** 51. **6.** 100. **7.** 264. **8.** 1) 16; 2) 10.

21.4. Задача о расписании занятий. **1.** 6, 2. **2.** 24.

21.6. Задача о беспорядках. **1.** 265. **2.** 44. **3.** 0, 1, 1. **4.** 630. **5.** 2. **6.** 1056.

21.7. Двоично-кодированные системы. **1.** 2, 4, 7. **2.** 5, 6, 6. **3.** 6, 6. **4.** 1) 2, 3, 4, 5, 6, 7; 2) 4, 5; 3) 1, 2, 3, 6, 7, 8; 4) 1, 8; 5) 1, 4, 7; 6) 1, 2, 3, 6, 7, 8. **5.** 1) 36; 2) 64; 3) 36; 4) 8; 5) 1; 6) 2. **6.** 22. **7.** 0, 4, 5, 9. **8.** 1) 1, 4, 6; 2) 4, 1, 1, 4; 3) 6, 4, 1. **9.** 9216. **10.** 3628800. **11.** 84. **12.** 45. **13.** 5, 7. **14.** 2, 3, 6.

21.8. Код Морзе. **1.** 1) 16; 2) 64; 3) 1024. **2.** 30. **3.** 35. **4.** 21. **5.** 1891. **6.** 5. **7.** 26.

21.9. Простые числа. **1.** 2, 3, 5, 7. **2.** 1) 5, 7; 2) 3, 7, 11; 3) 2, 5, 17. **3.** 1) 2, 2, 7; 2) 2, 5, 5, 5; 3) 7, 7, 11. **4.** 2, 3, 3. **5.** 1, 2, 3, 4, 6, 7. **6.** 20. **7.** 3, 5. **8.** 30. **9.** 3, 2. **10.** 8. **11.** 24. **12.** 11, 6. **13.** 3.

21.10. Задача о числе делителей. **1.** 1) 16; 2) 8; 3) 24; 4) 12; 5) 10; 6) 2. **2.** 1) 1, 2, 7, 14; 2) 1, 3, 9, 11, 33, 99; 3) 1, 5, 25; 4) 1, 2, 3, 4, 6, 12; 5) 1, 2, 4, 8; 6) 1, 2, 5, 10, 25, 50. **3.** 1) 25, 50, 100; 2) 32, 64, 128, 256; 3) 25, 30, 50, 60, 75, 100, 150, 300; 4) 40; 5) 33, 99; 6) 35, 70.

21.11. Задача о вписанных треугольниках. **1.** 1) 10; 2) 60; 3) 50. **2.** 15. **3.** 320. **4.** 364.

21.12. Задача о разбиении числа на слагаемые. **1.** 1) 8; 2) 4; 3) 2; 4) 1; 5) 1. **2.** 1) 21; 2) 35; 3) 35; 4) 21. **3.** 1) 13; 2) 9; 3) 5; 4) 2. **4.** 1) 3; 2) 7; 3) 11. **5.** 1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 30.

21.13. Задача о «счастливых» троллейбусных билетах. **1.** 55252. **2.** 1) 9; 2) 9; 3) 7. **3.** 1) 21; 2) 28; 3) 36; 4) 45. **4.** 1) 9; 2) 12; 3) 15; 4) 12.

21.14. Упражнения по всему курсу комбинаторики. **1.** 15. **2.** 3024. **3.** 1) 72; 2) 67. **4.** 1) 750; 2) 36. **5.** 10. **6.** 5. **7.** 15. **8.** 17. **9.** 8. **10.** 9. **11.** 19, 11, 2. **12.** 7, 17. **13.** 10. **14.** 11. **15.** 14. **16.** 17. **17.** 13. **18.** 10. **19.** 20. **20.** 504. **21.** 133. **22.** $m \cdot n$. **23.** 35. **24.** 210. **25.** 56. **26.** 28. **27.** 210. **28.** 1) $\frac{3}{35}$; 2 $\frac{25}{121}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{6}$. **29.** 25. **30.** 32768. **31.** 21. **32.** 64. **33.** 60. **34.** 99. **35.** 560. **36.** 10000. **37.** 1) 18; 2) 87; 3) 50; 4) 37; 5) 25. **38.** 992. **39.** 4960. **40.** 6510. **41.** 85680. **42.** 256. **43.** 300, 266. **44.** 1024. **45.** 768. **46.** 1) 9; 2) 6; 3) 10; 4) 6; 5) 4; 6) 13. **47.** 1) $\frac{k+1}{k-1}$; 2) k^2; 3) $k+1$; 4) $(n-2)!$; 5) $\frac{n-1}{2}$; 6) $(n-3)!$; 7) $n!$; 8) $\frac{k}{2}$. **48.** 120. **49.** 120. **50.** 5040. **51.** 5040. **52.** 96. **53.** 360. **54.** $k!$. **55.** 3. **56.** 0, 1, 2. **57.** 5, 120. **58.** 0, 1, 2, 4, 6. **59.** 132. **60.** 90000. **61.** 10. **62.** 35. **63.** 4455100. **64.** 784. **65.** 3^m. **66.** 3024. **67.** 20. **68.** 338240000. **69.** 11. **70.** 729. **71.** 5040. **72.** 1) 900; 2) 900; 3) 9000. **73.** 560. **74.** 1) 3; 2) 18; 3) 6; 4) 18. **75.** 1) 1296; 2) 90; 3) 720; 4) 210; 5) 625; 6) 24. **76.** 432. **77.** 2048. **78.** 4, 2, 2. **79.** 108. **80.** 496. **81.** 330. **82.** 10626. **83.** 64. **84.** 8. **85.** 7, 34. **86.** 14. **87.** 2, 3, 10. **88.** 81. **89.** 10. **90.** 1) 630; 2) 280. **91.** 15, 12. **92.** 640. **93.** 252. **94.** 126. **95.** 72. **96.** 72. **97.** 56. **98.** 220. **99.** 2025. **100.** 35. **101.** 800. **102.** 21. **103.** 90. **104.** 675. **105.** 781. **106.** 60. **107.** 1000. **108.** 300. **109.** 10206. **110.** 560. **111.** 24. **112.** 91. **113.** 1125. **114.** 126. **115.** 32. **116.** 240. **117.** 625. **118.** 3750. **119.** 201. **120.** 84. **121.** 500. **122.** 2016.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

22. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

22.2. Псевдограф. Мультиграф. **1.** *б*, *в*, *е*. **2.** *б*. **3.** *а*, *г*, *д*. **4.** 2, 3, 6, 7.

22.3. Подграф. Надграф. Частичный граф. **1.** 1) 6, 8; 2) 4, 2. **2.** 128. **3.** 1) 62; 2) 126. **4.** 128. **5.** 2048. **6.** 1) 4096; 2) 256; 3) 64. **7.** 1) 12; 2) 66; 3) 220.

22.4. Смежность. Инцидентность. Степень вершины. **1.** 1, 3, 5, 6, 8. **2.** 2, 3, 4, 6. **3.** 2, 6. **4.** 1) 0, 4; 2) 4, 0; 3) 1, 4; 4) 2, 2. **5.** 1) 1, 3, 5, 6, 7; 2) 1, 2, 4, 6. 3) 3, 4, 6.

22.5. Однородный граф. Полный граф. Дополнение графа. **1.** 21. **2.** 2, 19. **3.** 2, 3, 6, 7. **4.** 17. **5.** 45. **6.** 15. **7.** 12. **8.** 8, 124. **9.** 8, 20. **10.** 13. **11.** 14. **12.** 3, 24.

22.7. Изоморфизм. **1.** 1, 2, 4, 6. **2.** 1, 2, 4, 6, 7.

22.8. Матрицы смежности и инцидентности. **1.** 4, 5, 6, 7. **2.** 2, 3, 3, 2. **3.** 4, 5, 6, 7. **4.** 1, 2, 3, 8, 9, 10. **5.** 2. **6.** 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. **7.** 1, 4, 5, 7. **8.** 1, 5. **9.** 1, 3. **10.** 2, 3, 4, 5. **11.** 2. **12.** 45. **13.** 4.

23. СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

23.1. Маршруты, цепи, циклы. **1.** 1) 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9; 2) 2, 5, 6, 9; 3) 1, 3, 5, 6, 8, 9; 4) 5, 6, 9; 5) 1, 5, 6, 8, 9; 6) 5, 6, 9. **2.** 1) 4, 7; 2) 1, 5; 3) 3, 6, 8; 4) 9, 3. **3.** 1) 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9; 2) 1, 2, 5, 6, 7, 9; 3) 2, 5, 9; 4) 2, 5, 9; 5) 2, 4, 5, 9; 6) 2, 4, 5, 9. **4.** 2, 5, 6, 7.

23.2. Связность графа. **1.** 9. **2.** 4, 4. **3.** 1) 1, 3, 4, 5, 7, 8.; 2) 2, 6. **4.** 1, 3, 4, 5, 6.

23.3. Нахождение простых цепей. **1.** 19. **2.** 1) 36; 2) 38. **3.** 4, 7, 7. **4.** 1) 16; 2) 17; 3) 15; 4) 11; 5) 5. **5.** 1) 8; 2) 1, 1, 3, 3, 0; 3) 1, 3, 3. **6.** 16. **7.** 3, 4, 6.

23.4. Применение метода нахождения всех простых цепей. **1.** 1) $B + C + E$; 2) $A+\bar{B}+D+E$; 3) $\bar{A}+\bar{B}+C$. **2.** 1) 5, 9, 7; 2) 3, 5, 3; 3) 3, 5, 3.

23.5. Эйлеровы цепи и циклы. Уникурсальная линия. **1.** 7, 8. **2.** 1, 2, 3, 5. **3.** 2, 5. **4.** 2, 3, 4. **5.** 1, 2, 3, 4, 5, 6. **6.** 2, 5, 7. **7.** 2, 3, 7.

23.6. Гамильтоновы графы. **1.** 1, 3, 4, 5, 6. **2.** 2, 7. **3.** 1, 5, 6, 7, 8, 9. **4.** 1, 4, 5, 6, 8, 9. **5.** 3, 10.

23.7. Задача о коммивояжере. **1.** 1, 2, 4, 9, 5, 10, 8, 6, 3, 7. **2.** 1, 2, 6, 3, 7, 9, 8, 4, 5. **3.** 800. **4.** 6, 2, 1, 9, 7, 3, 4, 5, 8.

23.8. Двудольные графы. **1.** 28. **2.** 11, 13. **3.** 48. **4.** 162. **5.** 7, 7. **6.** 7, 17. **7.** 16. **8.** 1, 0, 3, 0, 2. **9.** 5, 7. **10.** 2, 5, 7, 8. **11.** 1, 2, 4, 5, 7. **12.** 1, 2, 7.

23.9. Метрика графа. **1.** 1) 2, 2, 2, 2, 2, 2; 2) 3, 3, 3, 4, 3, 3, 4. **2.** 3, 2. **3.** 3, 2, 3, 3. **4.** 1, 2, 3, 5, 6.

24. ПЛАНАРНЫЕ И ПЛОСКИЕ ГРАФЫ

24.1. Вводные понятия. **1.** 2, 5. **2.** 1, 2, 3, 4, 5, 6. **3.** 2, 5, 3. **4.** 1, 2, 7. **5.** 3, 4, 5, 6.

24.2. Теорема Эйлера о плоских графах. **1.** 48. **2.** 1. **3.** 12. **4.** 10. **5.** 16. **6.** 22. **7.** 16.

24.3. Гомеоморфизм. **1.** 1) Г, И, Л, М, П, С; 2) Е, Т, У, Ц, Ч, Ш, Э; 3) Б, Р, Ь. **2.** 1, 2, 5, 6. **3.** 1, 8. **4.** 2, 3, 4, 5. **5.** 2, 3, 4. **6.** 7. **7.** 1, 3, 4, 5, 7.

24.4. Критерий Понтрягина–Куратовского. **1.** 792. **2.** 210. **3.** 1, 4, 5, 7. **4.** 3, 5.

24.5. Двойственные графы. **1.** 12, 18, 8. **2.** 4, 10, 8. **3.** 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8. **4.** 1) 2, 7; 2) 1, 6, 8; 3) 1, 3, 6, 7, 8; 4) 6.

24.6. Инверсные структуры и двойственные графы. **1.** 1) 3, 8, 5; 2) 2, 3, 6, 8, 10, 14. **2.** 1) 5, 10, 8; 2) 0, 1, 2, 3, 6, 10.

24.8. Фундаментальная система циклов. **1.** 11. **2.** 17. **3.** 11. **4.** 28. **5.** 21. **6.** 190. **7.** 37. **8.** 14. **9.** 1, 2, 4, 5, 7.

24.10. Построение дерева по его коду. **1.** 1, 4, 6, 9. **2.** 1) 11, 41, 31, 22; 2) 34, 33, 32, 42; 3) 44, 43, 12, 13; 4) 14, 23, 21, 24. **3.** 342434. **4.** 5555556. **5.** 1) 6, 5; 2) 7, 6; 3) 7, 6. **6.** 1) 2, 6, 7, 8; 2) 2, 3, 4, 7, 8; 3) 1, 6, 7, 8, 9; 4) 2, 3, 5, 7, 8. **7.** 26343623. **8.** 1) 1342131111; 2) 122332111; 3) 43131111113; 4) 3113151111. **9.** 1) 2, 4, 5, 7, 8; 2) 3, 4, 5, 6; 3) 3, 6, 8; 4) 3, 5, 6. **10.** 1) 5, 6; 2) 1, 9; 3) 1, 2, 4, 6; 4) 2, 6, 7. **11.** 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8.

24.11. Разрезы. **1.** 2, 4. **2.** 6, 9, 0. **3.** $n - 1$. **4.** 10, 0, 0. **5.** 105. **6.** 21. **7.** 1, 3, 5, 6, 7.

24.12. Хроматическое число графа. Гипотеза четырех красок. **1.** 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 2. **2.** 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2. **3.** 3. **4.** 6. **5.** 8.

25. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

25.1. Понятие орграфа. Матрица смежности. Изоморфизм. **1.** 2, 3, 4, 6. **2.** 10. **3.** 1) 1, 3, 4; 2) 1, 4, 7; 3) 1, 3, 4, 5, 7; 4) 2, 8.

25.2. Степень вершины орграфа. **1.** 0, 2, 2, 3, 1. **2.** 2, 1, 2, 3, 0. **3.** 1) 4, 5, 7; 2) 7; 3) 3, 6, 7; 4) 3, 6.

25.3. Маршруты, цепи, циклы в орграфах. **1.** 1) 4; 2) 1, 1, 1, 1. **2.** 3. **3.** 1-3-6-4-2-5-1. **4.** 1) 7; 2) 0, 2, 3, 1; 3) 2-5-1-3-6-4-2.

25.4. Связность графа. **1.** 2, 4, 5, 7. **2.** 2, 7. **3.** 1, 3, 6. **4.** 4, 5. **5.** 2, 7. **6.** 1, 4, 7.

25.5. Полный орграф. **1.** 4096. **2.** 512. **3.** 1, 4, 3, 2, 5, 1. **4.** 45. **5.** 2, 3, 4, 5, 6, 7.

25.8. Нахождение максимальной пропускной способности транспортной сети. **1.** 1, 2, 1. **2.** 6. **3.** 11. **4.** 11.

ЛИТЕРАТУРА

Список использованной литературы состоит из двух частей. Первая часть условно названа «Цитированные источники». На них в тексте пособия приведены ссылки либо из них взяты цитаты. Во второй части, названной «Дополнительная литература», перечислены публикации, использованные при подготовке пособия, но ссылки на них не даны.

ЦИТИРОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Айзерман М. А. Логика. Автоматы. Алгоритмы / М. А. Айзерман, Л. А. Гусев, Л. И. Розоноэр, И. М. Смирнова, А. А. Таль. — М.: Физматгиз, 1963. — 556 с.
2. Аршинов М. Н. Коды и математика. Рассказы о кодировании / М. Н. Аршинов, Л. Е. Садовский. — М.: Наука, 1983. — 143 с.
3. Березина Л. Ю. Графы и их применение. — М.: Просвещение, 1979. — 143 с.
4. Бородин Л. Ф. Введение в теорию помехоустойчивого кодирования. — М.: Сов. радио, 1968. — 408 с.
5. Бохманн Д. Двоичные динамические системы / Д. Бохманн, Х. Постхоф. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 400 с.
6. Вавилов Е. Н. Синтез схем электронных цифровых машин / Е. Н. Вавилов, Г. П. Портной. — М.: Сов. радио, 1963. — 440 с.
7. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969. — 328 с.
8. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. — М.: Наука, 1965. — 128 с.
9. Виленкин Н. Я. Математика / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская, Л. П. Стойлова. — М.: Просвещение, 1977. — 352 с.
10. Гаврилов Г. П. Сборник задач по дискретной математике / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко — М.: Наука, 1977. — 368 с.
11. Гжегорчик А. Популярная логика. — М.: Наука, 1972. — 111 с.
12. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. — М.: Наука, 1972. — 288 с.
13. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. — М.: Физматгиз, 1962. — 476 с.
14. Грейнер Г. Р. Проектирование бесконтактных управляющих логических устройств промышленной электроники / Г. Р. Грейнер, В. П. Ильяшенко, В. П. Май, Н. Н. Первушин, Л. И. Токмакова. — М.: Энергия, 1977. — 384 с.
15. Голышев Л. К. Электронные вычислительные машины. — Киев: Гостехиздат УССР, 1963. — 428 с.
16. Горбатов В. А. Основы дискретной математики. — М.: Высшая школа, 1986. — 311 с.
17. Горелик А. Л. Методы распознавания / А. Л. Горелик В. А Скрипкин. — М.: Высшая школа, 1977. — 224 с.

18. Горский Д. П. Краткий словарь по логике / Д. П. Горский, А. А. Ивин, А. Л. Никифоров. — М.: Просвещение, 1991. — 208 с.
19. Дадаев Ю. Г. Арифметические коды, исправляющие ошибки. — М.: Сов. радио, 1969. — 168 с.
20. Ежов И. И. Элементы комбинаторики / И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. — М.: Наука, 1977. — 80 с.
21. Ершов Ю. Л. Математическая логика / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. — СПб: Лань, 2005. — 320 с.
22. Информатика. Энциклопедический словарь для начинающих / Сост. Д. А. Поспелов. — М.: Педагогика-Пресс, 1994. — 352 с.
23. Калбертсон Дж. Т. Математика и логика цифровых устройств. — М.: Просвещение, 1965. — 267 с.
24. Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. — М.: ИЛ, 1962. — 738 с.
25. Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник. — М.: Наука, 1975. — 720 с.
26. Криницкий Н. А. Автоматизированные информационные системы / Н. А. Криницкий, Г. А. Миронов, Г. Д. Фролов. — М.: Наука, 1982. — 384 с.
27. Криницкий Н. А. Алгоритмы вокруг нас. — М.: Наука, 1984. — 223 с.
28. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — СПб: Лань, 2007. — 396 с.
29. Кутузов Б. В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии. — М.: Учпедгиз, 1955. — 152 с.
30. Мелихов А. Н. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой / А. Н. Мелихов, Л. С. Бернштейн, С. Я. Коровин. — М.: Наука, 1990. — 272 с.
31. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1971. — 320 с.
32. Нефедов В. Н. Курс дискретной математики / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
33. Папернов А. А. Логические основы цифровых машин и программирования. — М.: Наука, 1968. — 591 с.
34. Петер Р. Игра с бесконечностью. — М.: Молодая гвардия, 1967. — 368 с.
35. Погорелов А. В. Геометрия. 6–10 кл. / А. В. Погорелов, Ю. В. Пухначев, Ю. П. Попов.— М.: Просвещение, 1984. — 287 с.
36. Политехнический словарь / Гл. ред. И. И. Артоболевский. — М.: Сов. энциклопедия, 1977. — 608 с.
37. Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика. — М.: Педагогика, 1989. — 352 с.
38. Советский энциклопедический словарь. — М.: Сов. энциклопедия, 1985. — 1600 с.
39. Столл Роберт Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. — М.: Просвещение, 1968. — 230 с.
40. Супрун Б. А. Первичные коды. — М.: Связь, 1970. — 161 с.
41. Уилсон Р. Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1977. — 207 с.
42. Фистер М. Логическое проектирование цифровых вычислительных машин. — Киев: Техника, 1964. — 384 с.
43. Фор Р. Современная математика / Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен. — М.: Мир, 1966. — 271 с.
44. Фудзисава Т. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур / Т. Фудзисава, Т. Касами. — М.: Радио и связь, 1984. — 240 с.
45. Харари Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. — М.: Мир, 1977. — 324 с.
46. Широкова П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. — М.: Наука, 1983. — 78 с.
47. Энциклопедия кибернетики. Т. 1. — Киев: Глав. ред. украинской сов. энциклопедии, 1975. — 607 с.
48. Энциклопедия кибернетики. Т. 2. — Киев: Глав. ред. украинской сов. энциклопедии, 1975. — 624 с.
49. Яглом И. Н. Необыкновенная алгебра. — М.: Наука, 1968. — 71 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бурова И. Н. Парадоксы теории множеств и диалектика. — М.: Наука, 1976. — 176 с.
2. Горбатов В. А. Дискретная математика / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова. — М.: ООО «Издательство АСТ»: ООО «Издательство Астрель», 2003. — 447 с.
3. Давыдов Э. Г. Игры, графы, ресурсы. — М.: Радио и связь, 1981. — 112 с.
4. Ивин А. А. Искусство правильно мыслить. — М.: Просвещение, 1986. — 224 с.
5. Игнатьев Е. И. Хрестоматия по математике. В царстве смекалки, или арифметика для всех. — Ростов н/Д: Кн. Изд-во, 1995. — 616 с.
6. Колмогоров А. Н. Математическая логика. Дополнительные главы / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 120 с.
7. Лавров И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. — М.: Физматлит, 2002. — 256 с.
8. Любимов К. В. Знакомимся с электрическими цепями / К. В. Любимов, С. М. Новиков. — М.: Наука, 1972. — 64 с.
9. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000. — 128 с.
10. Мелихов А. Н. Применение графов для проектирования дискретных устройств / А. Н. Мелихов, Л. С. Берштейн, В. М. Курейчик. — М.: Наука, 1974. — 304 с.
11. Москинова Г. И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Учебное пособие. — М.: Логос, 2003. — 240 с.
12. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. — СПб.: Питер, 2003. — 304 с.
13. Оре О. Графы и их применение. — М.: Мир, 1965. — 174 с.
14. Плотников А. Д. Дискретная математика. — М.: Новое знание, 2005. — 288 с.
15. Романовский И. В. Дискретный анализ. — СПб.: Невский диалект, 2000. — 240 с.
16. Форд Л. Р. Потоки в сетях / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон. — М.: Мир, 1966. — 276 с.
17. Чебурахин И. Ф. Синтез дискретных управляющих систем и математическое моделирование. — М.: Физматлит, 2004. — 248 с.
18. Шалыто А. А. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов. — СПб.: Наука, 2000. — 780 с.
19. Шевелев Ю. П. Сборник задач по логическому проектированию цифровых вычислительных устройств. — Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 1979. — 228 с.
20. Юдиницкий С. А. Проектирование дискретных систем автоматики / С. А. Юдиницкий, А. А. Тагаевская, Т. К. Ефремова. — М.: Машиностроение, 1980. — 232 с.
21. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003. — 384 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Юрий Павлович ШЕВЕЛЕВ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Зав. редакцией литературы по информационным технологиям и системам связи *О. Е. Гайнутдинова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967

www.lanbook.com
пункт меню **«Где купить»**
раздел **«Прайс-листы, каталоги»**

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109387, Москва, ул. Летняя, д. 6
тел.: (499) 722-72-30, (495) 647-40-77; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ». 350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазин
Издательство «Лань»: http://www.lanbook.com

магазин электронных книг
Global F5: http://globalf5.com/

Подписано в печать 14.01.21.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 48,10. Тираж 30 экз.

Заказ № 080-21.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета.
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.