

И. И. ПРИВАЛОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

УЧЕБНИК

Издание пятнадцатое,
стереотипное



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2009

ББК 22.161.5я73

П 75

Привалов И. И.

П 75 Введение в теорию функций комплексного переменного: Учебник. 15-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 432 с., ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0913-6

Учебник отличается строгостью выводов и простотой изложения материала. Рассмотрены, в частности, следующие темы: конформные отображения, линейные преобразования, интеграл Коши, теоремы Коши и Пикара, ряды аналитических функций, ряды Лорана, особые точки, вычеты, бесконечные произведения, аналитическое продолжение, эллиптические функции.

Учебник предназначен для студентов математических, физических и технических специальностей вузов.

ББК 22.161.5я73

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»

lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com; 192029, Санкт-Петербург,
Общественный пер., 5. Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

по России и зарубежью

«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13
тел.: (812) 567-85-78, 567-14-45; факс: (812) 567-54-93; ICQ: 446-869-967
e-mail: trade@lanpbl.spb.ru; www.lanpbl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области

«ЛАНЬ-ПРЕСС», 109263, Москва, 7-ая ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@ultimanet.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае

«ЛАНЬ-ЮГ». 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (8612) 74-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

«Сова»: <http://www.symplex.ru>; «Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>
«Библион»: <http://www.biblion.ru>

Подписано в печать 17.04.09.

Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108^{1/32}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 22,68. Тираж 1500 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru

© Издательство «Лань», 2009
© И. И. Привалов, наследники, 2009
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловия	10
Введение	11

Г Л А В А I

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Комплексные числа и действия над ними	16
1. Понятие комплексного числа (16). 2. Сложение и умножение комплексных чисел (16). 3. Вычитание и деление комплексных чисел (18).	
§ 2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Теоремы о модуле и аргументе	19
1. Геометрическое изображение комплексных чисел (19). 2. Геометрическое истолкование сложения и вычитания комплексных чисел (20). 3. Понятие о модуле и аргументе (20). 4. Теоремы о модуле и аргументе (21). 5. Геометрическое изображение числа $1/\alpha$ (23). 6. Геометрическое построение произведения и частного комплексных чисел (24).	
§ 3. Пределы	25
1. Основной принцип теории пределов (25). 2. Понятие предельной точки (26). 3. Ограниченные и неограниченные последовательности комплексных чисел (27). 4. Теорема Больцано — Вейерштрасса (27). 5. Понятие сходящейся последовательности комплексных чисел (28). 6. Основные теоремы теории пределов (29). 7. Критерий Коши (29).	
§ 4. Числовая сфера. Бесконечно удаленная точка	31
1. Изображение комплексных чисел на сфере. Бесконечно удаленная точка (31). 2. Формулы стереографической проекции (32). 3. Основное свойство стереографической проекции (33). 4. Сохранение углов (34).	
§ 5. Ряды	35
1. Понятие сходящегося и расходящегося ряда (35). 2. Необходимый признак сходимости ряда (36). 3. Понятие абсолютно сходящегося ряда (36). 4. Сложение и вычитание рядов (38). 5. Теорема о двойных рядах (38). 6. Перестановка членов ряда (40). 7. Умножение рядов (41).	
Упражнения к гл. I	43

Г Л А В А II

КОМПЛЕКСНОЕ ПЕРЕМЕННОЕ И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Функции комплексного переменного	45
1. Понятие функции комплексного переменного (45). 2. Понятие области. Линия Жордана (46). 3. Непрерывность функции комплексного переменного (49). 4. Теорема о равномерной непрерывности. Лемма Гейне — Бореля (52).	

§ 2. Ряды функций	54
1. Понятие равномерно сходящегося ряда (54). 2. Теорема о непрерывности суммы ряда (56). 3. Признак равномерно сходящегося ряда (57).	
§ 3. Степенные ряды	58
1. Понятие области сходимости степенного ряда (58). 2. Первая теорема Абеля (58). 3. Круг сходимости (59). 4. Понятие наибольшего предела (61). 5. Определение радиуса сходимости (63). 6. Равномерная сходимость степенного ряда (66). 7. Вторая теорема Абеля (67).	
§ 4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Элементарные функции	69
1. Понятие производной (61). 2. Понятие функции, аналитической в области (70). 3. Понятие дифференциала (71). 4. Условия Коши — Римана (72). 5. Сопряженные гармонические функции (76). 6. Дифференцирование степенных рядов (77). 7. Показательная функция. Функции тригонометрические и гиперболические (78). 8. Однолистные функции. Обратные функции (82). 9. Радикал, логарифм и арксинус (84). 10. Ветви многозначных функций. Понятие о точках разветвления (86). 11. Понятие о римановой поверхности (92).	
§ 5. Конформное отображение	97
1. Геометрический смысл аргумента производной (97). 2. Геометрический смысл модуля производной (99). 3. Конформное отображение (100). 4. Конформное отображение II рода (100). 5. Геометрический смысл дифференциала (102). 6. Главная часть отображения $w = f(z)$ (103).	
Упражнения к гл. II	105

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ И ДРУГИЕ ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Линейная функция	108
1. Целая линейная функция (108). 2. Функция $w = 1/z$ (109). 3. Общая линейная функция (110). 4. Круговое свойство линейной функции (111). 5. Параметры и инвариант линейного преобразования (112). 6. Отображение верхней полуплоскости на самое себя (115). 7. Инвариантность пары взаимно симметричных точек при линейном преобразовании (116). 8. Отображение круга на верхнюю полуплоскость (117). 9. Отображение круга самого в себя (117). 10. Представление линейного преобразования посредством симметричных отображений (118). 11. Различные типы линейных преобразований (119). 12. Природа двойных точек (123). 13. Геометрическая интерпретация эллиптического преобразования (125). 14. Характер преобразования круга самого в себя (125).	
§ 2. Линейные преобразования и геометрия Лобачевского	127
1. Евклидово изображение геометрии Лобачевского в круге (127). 2. Вычисление неевклидова расстояния двух точек с данными аффиксами (128). 3. Неевклидова окружность (129). 4. Неевклидова длина кривой (129). 5. Неевклидова площадь (130). 6. Горициклы (130). 7. Гиперциклы (130). 8. Евклидово изображение геометрии Лобачевского на полуплоскости (131). 9. Неевклидова длина окружности (132). 10. Угол параллелизма в геометрии Лобачевского (133). 11. Неевклидова площадь круга и треугольника (134).	

§ 3. Некоторые элементарные функции и отображения, даваемые ими	135
1. Степенная функция и радикал (135). 2. Показательная и логарифмическая функции (138).	
Упражнения к гл. III	141

Г Л А В А IV

ТЕОРЕМА КОШИ. ИНТЕГРАЛ КОШИ

§ 1. Интегралы по комплексному переменному	143
1. Понятие интеграла по комплексному переменному (143). 2. Основные свойства интеграла по комплексному переменному (145).	
3. Интегрирование равномерно сходящегося ряда (146). 4. Теорема Коши (148).	
§ 2. Теорема Коши	149
1. Основная лемма (149). 2. Приведение доказательства теоремы Коши к простейшему случаю (151). 3. Доказательство теоремы Коши (152). 4. Понятие неопределенного интеграла в комплексной области (155). 5. Распространение теоремы Коши на случай сложных контуров (158). 6. Логарифмическая функция (160). 7. Лемма (163). 8. Обобщение теоремы Коши (164).	
§ 3. Интеграл Коши	166
1. Формула Коши (166). 2. Распространение формулы Коши на случай сложных контуров (168). 3. Интеграл типа Коши (169). 4. Существование производных всех порядков для функции, аналитической в области (172). 5. Теорема Морера (173). 6. Различные точки зрения в построении теории аналитических функций (173). 7. О предельных значениях интеграла типа Коши (174). 8. О предельных значениях интеграла типа Коши в случае, когда граничная функция удовлетворяет условию Гёльдера—Липшица (179). 9. Интеграл Пуассона (185).	
Упражнения к гл. IV	188

Г Л А В А V

РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В СТЕПЕННОЙ РЯД

§ 1. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций	190
1. Первая теорема Вейерштрасса (190).	
§ 2. Ряд Тейлора	195
1. Приложение теоремы Вейерштрасса к степенным рядам (195).	
2. Разложение аналитической функции в степенной ряд (196). 3. Понятие голоморфной функции и его эквивалентность с понятием аналитической функции (199). 4. Свойство единственности аналитических функций (200). 5. Принцип максимального модуля (203). 6. Нули аналитической функции (206). 7. Порядок нуля (207). 8. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда (207). 9. Теорема Лиувилля (208). 10. Вторая теорема Вейерштрасса (208).	
Упражнения к гл. V	209

Г Л А В А VI

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Ряд Лорана	211
1. Разложение аналитической функции в ряд Лорана (211). 2. Правильная и главная части ряда Лорана (213). 3. Единственность разложения Лорана (214).	

§ 2. Классификация особых точек однозначной функций	215
1. Три типа изолированных особых точек (215). 2. Устранимая особая точка (215). 3. Полнос (216). 4. Связь между нулем и полюсом (217). 5. Существенно особая точка (218). 6. Поведение функции в окрестности изолированной особой точки (220).	
§ 3. Поведение аналитической функции в бесконечности	221
1. Окрестность бесконечно удаленной точки (221). 2. Разложение Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки (222). 3. Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки (223). 4. Условия обращения интеграла типа Коши в интеграл Коши (224).	
§ 4. Простейшие классы аналитических функций	224
1. Целые функции (224). 2. Мероморфные функции (226). 3. Разложение рациональной функции на простейшие дроби (227). 4. Основная теорема алгебры (227).	
§ 5. Приложения к гидродинамике	227
1. Невихревой и свободный от источников поток жидкости (227). 2. Характеристическая функция потока (229). 3. Обтекание круглого цилиндра потоком без циркуляции (230). 4. Чисто циркулярный поток (232). 5. Общий случай (233).	
Упражнения к гл. VI	234

Г Л А В А VII

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ

§ 1. Общая теория вычетов	237
1. Вычет функции относительно изолированной особой точки (237). 2. Основная теорема о вычетах (238). 3. Вычисление вычета функции относительно полюса (239). 4. Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки (240). 5. Вычисление интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ (242).	
§ 2. Приложения теории вычетов	244
1. Основная теорема алгебры (244). 2. Теорема Руше (245). 3. Приложения теории вычетов к вычислению определенных интегралов (246). Разложение $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби (251).	
Упражнения к гл. VII	255

Г Л А В А VIII

ТЕОРЕМА ПИКАРА

§ 1. Предложение Блоха	256
1. Теорема об обращении голоморфной функции (256). 2. Доказательство предложения Блоха (257).	
§ 2. Теорема Ландау	259
1. Доказательство теоремы Ландау (259). 2. Малая теорема Пикара (260).	
§ 3. Неравенство Шоттки	261
1. Вывод неравенства Шоттки (261). 2. Обобщенное неравенство Шоттки (262).	
§ 4. Общая теорема Пикара	263
Упражнения к гл. VIII	264

Г Л А В А IX

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ ИХ
К АНАЛИТИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

§ 1. Бесконечные произведения	265
1. Сходящиеся и расходящиеся бесконечные произведения (265).	
2. Основной критерий сходимости бесконечного произведения (266).	
3. Изображение голоморфной функции в виде бесконечного произведения (270).	
§ 2. Приложения бесконечных произведений к теории целых функций	271
1. Формула Вейерштрасса (271). 2. Изображение целой функции в виде бесконечного произведения (274). 3. Изображение мероморфной функции в виде отношения двух целых функций (276). 4. Задача Миттаг-Леффлера (277).	
§ 3. Обобщение теоремы единственности аналитических функций	278
1. Возможные обобщения теоремы единственности аналитических функций (278). 2. Формула Якоби и Иенсена (279). 3. Доказательство теоремы единственности (281). 4. Невозможность дальнейшего обобщения теоремы единственности для ограниченных функций (282).	
Упражнения к гл. IX	283

Г Л А В А X

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

§ 1. Принцип аналитического продолжения	285
1. Понятие аналитического продолжения (285). 2. Понятие полной аналитической функции в смысле Вейерштрасса (286). 3. Распространение функции действительного переменного на комплексную область по принципу аналитического продолжения (290).	
§ 2. Примеры	290
1. Примеры однозначных функций (290). 2. Примеры многозначных функций (291).	
Упражнения к гл. X	293

Г Л А В А XI

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Общие свойства эллиптических функций	294
1. Определение эллиптической функции (294). 2. Параллелограммы периодов (295). 3. Основные теоремы (296). 4. Эллиптические функции второго порядка (301).	
§ 2. Функции Вейерштрасса	303
1. Лемма (304). 2. Функции σ , ζ и \wp (304).	
§ 3. Простейшие аналитические представления произвольной эллиптической функции	311
1. Представление эллиптической функции в виде суммы простейших элементов (311). 2. Представление эллиптической функции в виде отношения произведений элементарных множителей (313).	
§ 4. Функции σ_h	314
§ 5. Эллиптические функции Якоби	317
§ 6. Функции θ	319
1. Разложение целой периодической функции (319). 2. Функция θ (320). 3. Функции θ_h (323). 4. Свойства функций θ (326).	

§ 7. Представление эллиптических функций Якоби посредством функций зета	330
§ 8. Формулы сложения для эллиптических функций Якоби.	331
Упражнения к гл. XI.	333

ГЛАВА XII

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Условия, определяющие конформное отображение	336
1. Отображение единичного круга самого на себя (336). 2. Условия, определяющие единственность конформного отображения (338).	
§ 2. Основные принципы теории конформного отображения	339
1. Принцип сохранения области (339). 2. Принцип взаимно однозначного соответствия (344). 3. Принцип симметрии Римана — Шварца (345). 4. Обобщение принципа симметрии (350). 5. Принцип Шварца аналитического продолжения (351). 6. Принцип симметрии для гармонической функции (352). 7. Приложение принципа симметрии (354).	
§ 3. Общие преобразования единичного круга во внутреннюю область	355
1. Аналитическое выражение голоморфной функции, преобразующей круг $ z < 1$ во внутреннюю область (355). 2. Лемма Шварца (358). 3. Приложение леммы Шварца к оценке производной функции, удовлетворяющей условиям леммы (360). 4. Общая форма леммы Шварца (361). 5. Существование двойной точки преобразования (362).	
§ 4. Единственность аналитических функций	363
1. Однозначное определение аналитической функции по ее граничным значениям (363). 2. Обобщение теоремы единственности (364).	
§ 5. Конформные отображения на верхнюю полуплоскость областей, ограниченных линиями второго порядка	365
1. Равносторонняя гипербола (365). 2. Парабола (367). 3. Гипербола и эллипс (371). 4. Отображение внутренности эллипса на полуплоскость (375).	
§ 6. Конформное отображение односвязных областей.	376
1. Упрощение постановки теоремы Римана (378). 2. Вспомогательная функция и ее основные свойства (379). 3. Основная лемма (380). 4. Доказательство предложения Римана (381).	
§ 7. Соответствие границ при конформном отображении.	383
1. Постановка задачи (385). 2. Доказательство предложения о соответствии границ (386).	
§ 8. Отображение прямоугольника и произвольного многоугольника на верхнюю полуплоскость	389
1. Прямоугольник (389). 2. Эллиптическая функция Якоби (393). 3. Многоугольник (395). 4. Треугольник (400). 5. Отображение внешней области многоугольника на верхнюю полуплоскость (404).	
Упражнения к гл. XII.	405

ГЛАВА XIII

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Проблема коэффициентов	407
1. Внутренняя теорема площадей (408). 2. Внешняя теорема площадей (410). 3. Верхняя граница для модуля коэффициента при z^2 в разложении однолистной функции (411). 4. Константа Кебе (412). 5. Теорема искажения (412). 6. Границы для модуля однолистной функции (413). 7. Теорема вращения (415). 8. Общая граница для модулей	

коэффициентов в разложении однолистной функции (416). 9. Общая граница для модулей действительных коэффициентов в разложении однолистной функции (417).	
§ 2. Границы выпуклости и звездообразности	418
1. Граница выпуклости (418). 2. Граница звездообразности (419).	
§ 3. Свойства функций, дающих однолистные конформные отображения единичного круга на области специального вида	420
1. Звездообразные и выпуклые функции (420). 2. Верхние границы модулей коэффициентов в разложениях выпуклой и звездообразной функций (421).	
§ 4. Экстремальные свойства функции, отображающей область на круг	423
1. Лемма (423). 2. Первая экстремальная проблема (425). 3. Вторая экстремальная проблема (426).	
Предметный указатель	429

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании моей книги «Введение в теорию функций комплексного переменного» частично переработан и дополнен текст предыдущего издания. В этой работе принимал участие А. И. Маркушевич, которому я выражаю глубокую благодарность.

И. Привалов

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Существенным отличием этого издания от предыдущего является включение отдельной главы XI, посвященной изложению элементов теории эллиптических функций.

И. Привалов

При подготовке девятого издания А. И. Маркушевич вновь просмотрел весь текст книги и внес в него необходимые уточнения и поправки.

Тринадцатое издание печатается без изменений.

ВВЕДЕНИЕ

Те операции, которые приходится рассматривать в математике, можно разделить на два класса: прямые и обратные. Так, действию сложения соответствует обратное действие — вычитание, умножению — деление, возведению в целую положительную степень — извлечение корня.

Производя действие сложения над двумя любыми целыми положительными числами, мы в результате этого действия получим всегда число также целое положительное; другими словами, отправляясь от натурального ряда чисел, мы с помощью прямого действия сложения не выходим за пределы этого ряда. Обратное действие — вычитание — выводит нас за пределы совокупности натуральных чисел и становится всегда выполнимым лишь после присоединения к натуральному ряду нуля и целых отрицательных чисел. Следующее обратное действие — деление — требует для своей выполнимости дальнейшего обобщения понятия числа, которое совершается путем введения дробных чисел. Совокупность чисел целых и дробных, называемых рациональными числами, будет замкнутой по отношению к первым четырем основным действиям алгебры: сложению, вычитанию, умножению и делению, т. е. при выполнении любого из этих действий над двумя любыми рациональными числами (кроме деления на нуль) мы в результате получаем элемент той же совокупности — число рациональное. Наконец, обратное действие — извлечение корня — даже в простейшем случае квадратного радикала дает нам примеры, с одной стороны, чисел действительных, но не рациональных, называемых иррациональными числами, а с другой стороны, чисел вида $y\sqrt{-1}$, где y обозначает действительное число. Числа вида $y\sqrt{-1}$, где y — любое действительное число, не равное нулю, называют *чисто мнимыми*.

Уже на приведенных примерах видно, что обратные операции приводят нас к необходимости постепенного расширения понятия числа. Если мы перейдем к обратной операции, более сложной, нежели извлечение квадратного корня, — решению квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a , b и c суть действительные числа, то увидим, что корнями его будут числа вида $x + y\sqrt{-1}$, где через x и y обозначены числа действительные. Такие числа называются *комплексными*. В случае $y = 0$ комплексное число

обращается в действительное, при $y \neq 0$ оно называется *мнимым*, а при $x = 0$, $y \neq 0$ оно будет *чисто мнимым*. Совокупность комплексных чисел содержит в себе действительные числа и представляет собою область, замкнутую по отношению ко всем математическим операциям. Так, например, из алгебры известно, что корнями любого уравнения n -й степени с комплексными коэффициентами служат числа комплексные. Возможность производить все математические операции в области комплексных чисел, не выходя за пределы этой области, в значительной степени определяет собою то огромное значение, какое эти числа имеют в математике.

В настоящей книге мы будем заниматься изучением свойств функций комплексного переменного $z = x + y\sqrt{-1}$, где x и y суть действительные независимые переменные. Функции комплексного переменного находят себе многочисленные приложения, с одной стороны, в различных прикладных математических дисциплинах, как-то: теоретическая физика, гидродинамика, теория упругости, небесная механика, с другой стороны, в различных отделах чистой математики, как-то: алгебра, аналитическая теория чисел, дифференциальные уравнения и др. Кроме того, теория функций комплексного переменного представляет собою логически стройное и гармонически связанное здание, и знакомство с основными вопросами этой теории, бесспорно, является необходимым элементом математического образования.

Чтобы отметить мощь методов функций комплексного переменного, я ограничусь указанием лишь на некоторые крупные достижения, сделанные в области чистой математики с помощью этих методов: труднейшие проблемы распределения простых чисел ставятся в зависимость от распределения нулей некоторой функции комплексного переменного; проблема Варинга об изображении всякого целого положительного числа в виде суммы ограниченного числа любых степеней решена на основании методов функций комплексного переменного; труднейшая проблема небесной механики, так называемая задача «о трех телах», в общем виде разрешена путем привлечения методов комплексного анализа. Наконец, можно указать многочисленные примеры из основных отделов математики, хорошо знакомых читателю, с целью мотивировать то громадное значение и ту исключительную роль, которые свойственны функциям комплексного переменного.

Ограничимся приведением лишь немногих примеров. Так, предложение о том, что всякое алгебраическое уравнение имеет по крайней мере один комплексный корень, является основным в алгебре. Далее, из интегрального исчисления хорошо известно о значении, какое имеют комплексные числа при интегрировании рациональных функций и решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Необходимо также

указать, что многие вопросы классического анализа получили ясное очертание и нашли свое полное решение лишь благодаря обращению к комплексному анализу. Так, известное тождество Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ позволило ему раскрыть парадокс И. Бернулли и Лейбница, заключающийся в следующем.

Замечая, что

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

разложим дробь $\frac{1}{1+x^2}$ на простейшие дроби ¹⁾;

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$$

и, проинтегрировав, найдем:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{x-i}{i+x}.$$

Полагая здесь $x = 1$, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} 1 &= \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i} \ln \frac{1-i}{i+1} = \frac{1}{4i} \ln \left(\frac{1-i}{i+1} \right)^2 = \frac{1}{4i} \ln (-1) = \\ &= \frac{1}{8i} \ln (-1)^2 = \frac{1}{8i} \ln 1 = 0, \text{ т. е. } \frac{\pi}{4} = 0. \end{aligned}$$

Эйлер раскрыл этот парадокс, показав периодичность показательной функции e^z . Действительно, заменяя в тождестве Эйлера x через $-iz$, получим:

$$e^z = \cos(-iz) + i \sin(-iz) = \cos iz - i \sin iz. \quad (1)$$

Заменяя в последнем равенстве z через $z + 2\pi i$, имеем:

$$e^{z+2\pi i} = \cos(iz - 2\pi) - i \sin(iz - 2\pi) = \cos iz - i \sin iz = e^z \text{ } ^2),$$

т. е. функция e^z не меняет своего значения при замене z на $z + 2\pi i$, иными словами, $2\pi i$ есть период этой функции. Определяя натуральный логарифм $z = \ln w$ из равенства $e^z = w$, мы видим вследствие периодичности e^z , что определенному значению w соответствует бесчисленное множество различных значений $z = \ln w$, разнящихся друг от друга на кратное $2\pi i$. Если $w > 0$, то одно значение $z = \ln w$ действительное, все остальные мнимые; в случае

¹⁾ В дальнейшем символом i обозначается $\sqrt{-1}$.

²⁾ Здесь мы воспользовались периодичностью синуса и косинуса от комплексного переменного. Это будет доказано в гл. II, § 4, п. 7.

же $w < 0$ все без исключения значения $z = \ln w$ суть мнимые. Таким образом, логарифмическая функция есть многозначная, и парадокс исчезает, если примем $\ln | = 2\pi i$.

Тождество Эйлера вскрывает зависимость между функциями тригонометрической и показательной. Далее, из формулы (1) заменой z на $-z$ получаем:

$$e^{-z} = \cos iz + i \sin iz. \quad (2)$$

Путем сложения и вычитания тождеств (1) и (2) находим

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

что дает выражения гиперболических синуса и косинуса через тригонометрические и, таким образом, позволяет получить все формулы гиперболической тригонометрии, отправляясь от формул обычной тригонометрии.

Укажем еще на один факт из теории степенных рядов, полное объяснение которого может быть дано лишь с точки зрения функций комплексного переменного. Из анализа известно, что разложение

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

имеет место лишь при значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| < 1$. Оставаясь в области действительного переменного x , мы не в состоянии раскрыть связи между природой функции и фактом сходимости изображающего ее ряда лишь при значениях x , удовлетворяющих условию $-1 < x < +1$. В самом деле, функция

$\frac{1}{1+x^2}$ определена для всех значений x в промежутке от $-\infty$ до $+\infty$, и значения независимого переменного -1 и $+1$ не являются для нее исключительными. Отсюда нельзя понять, почему ряд $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ перестает сходиться при значениях x , удовлетворяющих неравенствам $x \leq -1$ и $x \geq +1$. Картина этого явления, однако, вполне выясняется, если рассматривать его в комплексной области. Действительно, знаменатель дроби $\frac{1}{1+x^2}$ обращается в нуль при $x = \pm i$, и следовательно, эти два значения независимого переменного являются особыми для нашей функции. Изображая комплексное число $\alpha = a + bi$ точкой на плоскости с координатами a и b и замечая, что расстояния вышеотмеченных особых точек от начала координат равны единице, мы заключаем: данная функция не имеет особых точек внутри круга с центром в начале координат радиуса единица, в то время как на его окружности имеются особые точки этой функции. Это обстоятельство,

как далее обнаружим, обуславливает расходимость данного ряда для значений x , модуль которых больше единицы.

В заключение несколько слов о плане настоящего курса. В первых главах мы будем заниматься развитием в комплексной области известных из действительного анализа основных понятий и операций, как-то: предела, производной, интеграла; таким образом, будем строить по аналогии с действительной областью аналитический аппарат для исследования функций комплексного переменного. Построив этот фундамент, мы перейдем к выяснению основных свойств класса дифференцируемых функций комплексного переменного, называемых аналитическими, т. е. изложим наиболее важные отделы теории таких функций.

ГЛАВА I

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Комплексные числа и действия над ними

1. Понятие комплексного числа. Комплексным числом α называется пара действительных чисел a и b , взятых в определенном порядке: $\alpha = (a, b)$. Если $b = 0$, соответствующую пару мы условимся кратко обозначать через a , полагая $(a, 0) = a$. Таким образом, совокупность всех действительных чисел является частью совокупности всех комплексных чисел. После введения понятия комплексного числа как пары действительных чисел определим основные операции над этими числами.

Так как совокупность всех действительных чисел является частью области всех комплексных чисел, то при установлении основных арифметических операций над комплексными числами мы должны потребовать, чтобы эти операции, будучи применены к действительным числам, давали в результате те же числа, какие получаются в арифметике действительных чисел. С другой стороны, если мы хотим, чтобы комплексные числа имели универсальное применение в вопросах анализа, мы должны потребовать, чтобы вводимые основные операции над ними удовлетворяли обычным аксиомам арифметики действительных чисел.

2. Сложение и умножение комплексных чисел. Сложение двух комплексных чисел $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$ мы определим с помощью равенств

$$\alpha + \beta = (a + c, b + d). \quad (I)$$

Применяя это определение к двум действительным числам a и c , найдем:

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) = a + c,$$

т. е. первое требование, накладываемое нами на вводимые операции, выполняется в отношении сложения.

Умножение двух комплексных чисел α и β определим с помощью равенства

$$\alpha\beta = (ac - bd, ad + bc). \quad (II)$$

Это определение, будучи применимо к двум действительным числам a и c , дает $(a, 0)(c, 0) = (ac, 0) = ac$, т. е. действие умноже-

ния не приводит к противоречию с арифметикой действительных чисел. Пользуясь определениями (I) и (II), легко проверить, что операции сложения и умножения комплексных чисел подчиняются известным пяти законам арифметики:

- 1) коммутативность сложения: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,
- 2) коммутативность умножения: $\alpha\beta = \beta\alpha$,
- 3) ассоциативность сложения: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,
- 4) ассоциативность умножения: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$,
- 5) дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Читателю рекомендуется проверить справедливость всех этих законов в области комплексных чисел.

В операциях с комплексными числами особую роль играет число, изображаемое парой $(0, 1)$ и обозначаемое буквой i . Возводя эту пару в квадрат, что сводится к умножению ее на самое себя, получаем в силу определения (II):

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

т. е. $i^2 = -1$, откуда берет свое начало обозначение $i = \sqrt{-1}$. Заметив это, мы всякое комплексное число можем записать так:

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi,$$

т. е. *всякое комплексное число $\alpha = (a, b)$ может быть представлено в виде суммы действительного числа a и чисто мнимого числа bi .*

Принято называть a действительной частью комплексного числа α и обозначать через $R(\alpha)$ (от французского слова *reelle*), b — коэффициентом при мнимой части числа α и обозначить через $I(\alpha)$ (от французского слова *imaginaire*). Очевидно, если $I(\alpha) = 0$, то комплексное число α обращается в действительное число, если $R(\alpha) = 0$ — в чисто мнимое. Два комплексных числа, по определению, называются равными, если равны между собой их действительные части и равны их мнимые части.

Два комплексных числа, имеющих одну и ту же первую компоненту, но противоположные по знаку вторые компоненты, называются *сопряженными* и обозначаются так:

$$\alpha = a + bi, \quad \bar{\alpha} = a - bi.$$

Как частный случай равенства (II) отметим закон умножения двух сопряженных чисел $\alpha \cdot \bar{\alpha} = a^2 + b^2$.

В арифметике модулем сложения называется такое число, от прибавления которого результат не меняется — число 0; аналогично 1 есть модуль умножения, т. е. число, от умножения на которое результат не меняется. Покажем, что в области всех комплексных чисел имеется один модуль сложения — число 0 и один модуль умножения — число 1.

Действительно, пусть δ есть модуль сложения, т. е.

$$\alpha + \delta = \alpha, \quad (1)$$

где α — произвольное комплексное число. Покажем, что такое число δ существует и притом единственное. Прибавляя к обеим частям равенства (1) число $-\alpha = \alpha \cdot -1$, получим: $\delta = 0$.

Пусть, далее, ε есть модуль умножения, т. е.

$$\alpha \cdot \varepsilon = \alpha, \quad (2)$$

где $\alpha \neq 0$. Умножая обе части равенства (2) на число $\beta = \frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2}$, получим:

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \alpha \bar{\alpha} \cdot \varepsilon = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \alpha \bar{\alpha}.$$

Так как $\bar{\alpha} \cdot \alpha = a^2 + b^2$, то отсюда следует: $\varepsilon = 1$.

На основании определения (II) произведение двух комплексных чисел есть нуль, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Справедливо и обратное положение: если произведение двух комплексных чисел равно нулю, то по крайней мере один из сомножителей есть нуль. В самом деле, пусть $\alpha \cdot \xi = 0$, $\alpha \neq 0$. Умножая обе части этого равенства на число $\beta = \frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2}$, получим: $\xi = 0$.

3. Вычитание и деление комплексных чисел. Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Разностью двух комплексных чисел $\beta = c + di$ и $\alpha = a + bi$ мы называем, по определению, число z , удовлетворяющее равенству

$$\alpha + z = \beta. \quad (3)$$

Покажем, что операция вычитания однозначно выполняется в области комплексных чисел. Прибавим к обеим частям равенства (3) число $-\alpha$, получим:

$$z = \beta + (-\alpha) = \beta - \alpha = c - a + (d - b)i.$$

Наконец, деление есть действие, обратное умножению. Так, под символом $\frac{1}{\alpha}$ ($\alpha \neq 0$) мы, по определению, понимаем число z , удовлетворяющее равенству

$$\alpha \cdot z = 1. \quad (4)$$

Умножая обе части равенства (4) на число $\frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2}$, найдем

$$z = \frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2}.$$

Частное двух комплексных чисел β и α мы обозначим через $\frac{\beta}{\alpha}$, полагая

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \beta.$$

Итак, деление, за исключением деления на нуль, всегда и при этом однозначно выполняется в области комплексных чисел.

Равенства

$$(a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i,$$

$$(a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i,$$

будучи сравнены с равенствами (I) и (II), показывают, что если в сумме или произведении двух комплексных чисел заменим слагаемые или сомножители сопряженными им числами, то в результате получим числа сопряженные. Так как вычитание и деление являются действиями, обратными по отношению к сложению и умножению, то то же заключение справедливо и в отношении этих действий. Таким образом, если каждому комплексному числу мы приведем в соответствие его сопряженное число, то получим отображение системы всех комплексных чисел на самое себя с тем свойством, что уравнения

$$\alpha + \beta = \gamma, \quad \alpha - \beta = \gamma, \quad \alpha \cdot \beta = \gamma, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \gamma$$

остаются справедливыми, если заменить входящие в них числа им сопряженными. Отсюда, в частности, вытекает, что всякое равенство между комплексными числами, обе части которого содержат действия сложения, вычитания, умножения и деления, не нарушается, если каждое из комплексных чисел заменить сопряженным с ним числом.

§ 2. Геометрическое изображение комплексных чисел, Теоремы о модуле и аргументе

1. Геометрическое изображение комплексных чисел. Всякое комплексное число $\alpha = (a, b)$ мы можем изображать как точку на плоскости с координатами a и b (рис. 1). Число α называют *аффиксом* этой точки. В дальнейшем точку с аффиксом α мы часто будем обозначать через α . Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называют комплексной числовой плоскостью. Начало координат, которому соответствует число 0, называют нулевой точкой. При таком изображении комплексных чисел действительные числа изображаются точками оси абсцисс, точки же оси ординат представляют чисто мнимые числа. Поэтому ось абсцисс называют *действительной осью*, ось ординат — *мнимой осью*. Комплексное число α можно также изображать вектором, начало которого находится в нулевой точке, а конец — в точке α (рис. 1). При таком изображении комплексного числа его действитель-

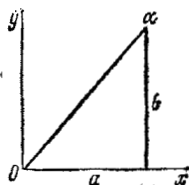


Рис. 1.

тельная часть a и коэффициент при мнимой части b являются проекциями изображающего вектора на действительную и мнимую оси.

2. Геометрическое истолкование сложения и вычитания комплексных чисел. Чтобы дать геометрическую интерпретацию суммы двух комплексных чисел α и β , представим эти числа в виде соответствующих векторов. Тогда сумма $\alpha + \beta$ изобразится вектором, компоненты которого равны суммам соответствующих компонент векторов α и β (согласно определению сложения), т. е. число $\alpha + \beta$ представится диагональю параллелограмма, построенного на векторах α и β как сторонах (рис. 2).

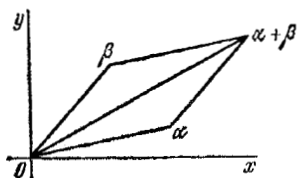


Рис. 2.

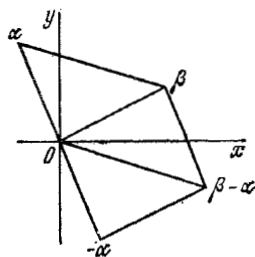


Рис. 3.

Заметив, что $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$, мы должны сложить по правилу параллелограмма два вектора β и $-\alpha$; в результате получится вектор, изображающий разность $\beta - \alpha$ (рис. 3).

3. Понятие о модуле и аргументе. Прежде чем дать геометрическое истолкование операций умножения и деления, мы познакомимся с представлением комплексного числа в тригонометрической форме. Расстояние r точки α от нулевой точки, т. е. длина вектора α , будет

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha}}.$$

Это положительное число r называется *модулем* комплексного числа α и обозначается через $|\alpha|$; в случае действительного числа α модуль, очевидно, совпадает с абсолютной величиной α . Числа, имеющие один и тот же модуль r , изображаются, очевидно, точками окружности радиуса r с центром в нулевой точке. Число 0 есть единственное комплексное число с модулем, равным нулю.

Направление вектора α определяется с помощью угла φ между положительным направлением оси Ox и направлением этого вектора; следовательно, φ изображает угол, на который нужно повернуть положительное направление оси Ox , чтобы оно совпало с направлением вектора α , считая этот угол положительным, если вращение совершается против часовой стрелки, и отрицательным— в противном случае. Это число φ называется *аргументом* ком-

плексного числа α и обозначается через $\arg \alpha$ (рис. 4). Очевидно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Для каждого числа α его аргумент φ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на кратное 2π . Число 0 есть единственное комплексное число, аргумент которого неопределенный. Так как r и φ являются полярными координатами точки $\alpha = (a, b)$, то имеем: $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$, и, следовательно,

$$\alpha = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

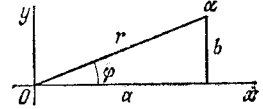


Рис. 4.

Эта форма комплексного числа носит название тригонометрической.

4. Теоремы о модуле и аргументе. Составляя произведение двух комплексных чисел

$$\alpha = r (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \beta = \rho (\cos \psi + i \sin \psi),$$

получим:

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= r\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) (\cos \psi + i \sin \psi) = \\ &= r\rho [\cos (\varphi + \psi) + i \sin (\varphi + \psi)]. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем:

$$\begin{aligned} |\alpha\beta| &= |\alpha| \cdot |\beta|, \\ \arg(\alpha\beta) &= \arg \alpha + \arg \beta, \end{aligned} \tag{5}$$

т. е. *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, аргумент произведения двух комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей.*

Пользуясь векторами для изображения комплексных чисел, можно сказать, что вектор произведения $\alpha\beta$ получается из вектора множимого α путем *поворота* последнего на угол $\arg \beta$ и *растяжения* в $|\beta|$ раз. В частном случае, когда $|\beta| = 1$, умножение сводится к простому повороту: так, например, умножению на i соответствует поворот на 90° , а умножению на -1 — поворот на 180° . В случае, когда $\arg \beta = 0$ (β — число положительное), умножение сводится к одному лишь растяжению.

Равенства (5) легко распространяются на случай произведения $\alpha\beta\gamma \dots \lambda$ произвольного числа комплексных сомножителей. Для такого произведения имеют место равенства

$$\begin{aligned} |\alpha\beta\gamma \dots \lambda| &= |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\gamma| \dots |\lambda|, \\ \arg(\alpha\beta \dots \lambda) &= \arg \alpha + \arg \beta + \dots + \arg \lambda, \end{aligned}$$

и, в частности, если все сомножители равны между собой,

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n, \quad \arg(\alpha^n) = n \arg \alpha. \tag{6}$$

Равенства (6) выражают так называемую *формулу Муавра*:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (6')$$

Полагая $\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, мы определим $\sqrt[n]{\alpha}$ как комплексное число, которое, будучи возведено в степень n , равно α . Модуль этого числа, очевидно, будет равен $\sqrt[n]{r}$, аргумент же будет равен $\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, где k — любое целое число. Давая k значения $0, 1, 2, \dots, n-1$, получим n различных значений аргумента выражения $\sqrt[n]{\alpha}$; следовательно, $\sqrt[n]{\alpha}$ имеет n различных значений согласно формуле

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (6'')$$

Геометрически эти n значений выражения $\sqrt[n]{\alpha}$, очевидно, изображаются вершинами некоторого правильного n -угольника, вписанного в окружность, с центром в нулевой точке, радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Заметив, что по определению частного

$$\beta = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha \quad (\alpha \neq 0),$$

находим из (5):

$$|\beta| = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \cdot |\alpha| \quad \text{и} \quad \arg \beta = \arg \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) + \arg \alpha,$$

откуда

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = \frac{|\beta|}{|\alpha|}, \quad (7)$$

т. е. модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей, и

$$\arg \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) = \arg \beta - \arg \alpha, \quad (8)$$

т. е. аргумент частного двух комплексных чисел равен разности аргументов делимого и делителя.

Из рис. 2 мы усматриваем, что модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей слагаемых, так как в треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон (знак равенства может быть в случае, когда треугольник обращается в отрезок):

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \quad (9)$$

Из рис. 3 мы видим, что разность $\beta - \alpha$ двух комплексных чисел может быть изображена вектором, начало которого находится в точке α и конец в точке β , так как такой вектор эквивалентен

вектору с началом в нулевой точке и концом в точке $\beta - \alpha$. Следовательно, *модуль разности $\beta - \alpha$ равен расстоянию между точками α и β ; далее, модуль разности двух комплексных чисел больше или равен разности их модулей:*

$$|\beta - \alpha| \geq |\beta| - |\alpha|, \tag{10}$$

так как в треугольнике $O\alpha\beta$ (рис. 3) сторона $\alpha\beta$ больше разности двух других сторон (равенство может быть в случае, если треугольник обращается в отрезок).

5. Геометрическое изображение числа $\frac{1}{\alpha}$. Покажем, как из точки α можно получить точку $\frac{1}{\alpha}$. С этой целью построим сначала

точку, изображающую число $\beta = \frac{1}{\bar{\alpha}}$;

так как $|\beta| = \frac{1}{|\alpha|}$ или $|\alpha| \cdot |\beta| = 1$ и $\arg \beta = -\arg \bar{\alpha} = \arg \alpha$, то точка β получается из точки α путем применения преобразования *инверсии*, состоящего в следующем: на луче $O\alpha$ отыскиваем точку β на расстоянии от O , равном $\frac{1}{|\alpha|}$.

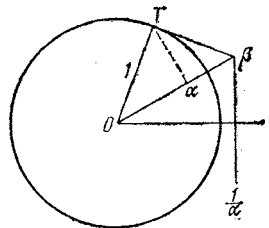


Рис. 5.

Если $|\alpha| < 1$, то это построение можно выполнить так. Описывая из нулевой точки как центра окружность радиуса единица, соединяем прямой линией ее центр с точкой α и восставляем в этой точке перпендикуляр к проведенной прямой до пересечения в точке T с окружностью; проводя, наконец, касательную к окружности в точке T , получим в пересечении ее с прямой $O\alpha$ искомую точку β (рис. 5).

Действительно, из треугольника $OT\beta$ (рис. 5) находим: $\frac{|\beta|}{1} = \frac{1}{|\alpha|}$, или $|\alpha| \cdot |\beta| = 1$; с другой стороны, очевидно, имеем $\arg \beta = \arg \alpha$.

Такие две точки α и β называют взаимно симметричными относительно окружности с центром в нулевой точке радиуса единица¹⁾. Заметив, далее, что $\frac{1}{\alpha} = \bar{\beta}$, мы должны выполнить симметрическое отображение точки β относительно действительной оси, чтобы получить искомую точку $\frac{1}{\alpha}$ (рис. 5).

¹⁾ Беря окружность с центром в нулевой точке радиуса R и выполняя то же построение, мы получим из точки α точку $\beta = \frac{R^2}{\bar{\alpha}}$.

Точки α и β называются *взаимно симметричными* относительно упомянутой окружности.

6. Геометрическое построение произведения и частного комплексных чисел. Рассмотрим шесть комплексных чисел α , α' , α'' , β , β' , β'' , связанных условием

$$\frac{\alpha'' - \alpha}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta'' - \beta}{\beta' - \beta}. \quad (11)$$

Числа α , α' , α'' служат вершинами одного треугольника; числа β , β' , β'' являются вершинами другого треугольника (рис. 6).

Условие (11) выражает тот факт, что эти два треугольника подобны между собой и одинаково расположены. Действительно, из условия (11) следует, если мы вычтем по 1 из его обеих частей:

$$\frac{\alpha'' - \alpha'}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta'' - \beta'}{\beta' - \beta}.$$

Переходя к модулям получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} |\alpha'' - \alpha| : |\alpha' - \alpha| : |\alpha'' - \alpha'| &= \\ &= |\beta'' - \beta| : |\beta' - \beta| : |\beta'' - \beta'|, \end{aligned}$$

т. е. стороны треугольника $\alpha\alpha'\alpha''$ пропорциональны соответствующим сторонам треугольника $\beta\beta'\beta''$, что доказывает подобие треугольников. Докажем теперь, что наши

треугольники одинаково расположены, т. е. если угол при вершине α в треугольнике $\alpha\alpha'\alpha''$ отсчитывается от стороны $\alpha\alpha'$ к стороне $\alpha\alpha''$ по направлению часовой стрелки (или против направления часовой стрелки), то и угол при вершине β в треугольнике $\beta\beta'\beta''$ отсчитывается от стороны $\beta\beta'$ к стороне $\beta\beta''$ в том же направлении. Действительно, из условия (11) следует:

$$\arg(\alpha'' - \alpha) - \arg(\alpha' - \alpha) = \arg(\beta'' - \beta) - \arg(\beta' - \beta).$$

Но левая часть изображает по величине и направлению угол при вершине α в треугольнике $\alpha\alpha'\alpha''$, отсчитываемый от стороны $\alpha\alpha'$ к стороне $\alpha\alpha''$, а правая часть изображает также по величине и направлению угол при вершине β в треугольнике $\beta\beta'\beta''$, отсчитываемый от стороны $\beta\beta'$ к стороне $\beta\beta''$. Из этого равенства и следует наше утверждение.

Если из точек α , α' , α'' , β , β' , β'' даны, например, первые пять точек, то легко построить шестую:

$$\beta'' = \beta + (\beta' - \beta) \frac{\alpha'' - \alpha}{\alpha' - \alpha}. \quad (11')$$

Для этого необходимо построить треугольник $\beta\beta'\beta''$ с данной стороной $\beta\beta'$, который был бы подобен и одинаково расположен с треугольником $\alpha\alpha'\alpha''$.

Принимая, в частности, $\beta = 0$, $\alpha = 0$, $\alpha' = 1$, мы получим построение произведения $\beta' \cdot \alpha''$, а выбору $\beta = 0$, $\beta' = 1$, $\alpha = 0$ будет соответствовать построение частного $\frac{\alpha''}{\alpha'}$.

§ 3. Пределы

1. Основной принцип теории пределов. После того как мы ввели понятие комплексного числа и определили основные алгебраические операции для комплексных чисел, мы должны заняться рассмотрением основной операции анализа бесконечно малых — перехода к пределу в комплексной области. Вся теория пределов действительных чисел может быть построена на одном принципе, который в своей геометрической форме выражается таким образом.

Пусть дана на числовой прямой последовательность отрезков $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$, из которых каждый содержит следующий, и пусть длины этих отрезков стремятся к нулю при неограниченном возрастании номера n . *Существует одна и только одна точка, которая принадлежит всем отрезкам данной последовательности* (рис. 7).

Заметим, что две различные точки s и s' не могут принадлежать

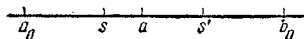


Рис. 7.

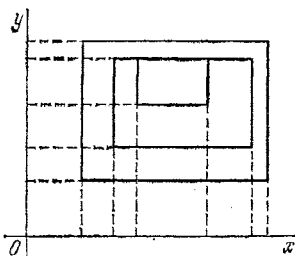


Рис. 8.

всем отрезкам: действительно, в противном случае длины всех отрезков i_n были бы не меньше положительного расстояния между точками s и s' , что невозможно, так как с неограниченным возрастанием n длина отрезка i_n стремится к нулю. Следовательно, двух точек, общих всем отрезкам нашей последовательности, существовать не может; существование же одной такой точки доказывается в теории иррациональных чисел. Этот принцип выражает свойство непрерывности числовой прямой.

Этот принцип легко распространяется на случай комплексной числовой плоскости. Пусть дана на плоскости последовательность прямоугольников $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ со сторонами, параллельными осям координат, из которых каждый содержит следующий, и пусть диагональ прямоугольника r_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n (рис. 8). *Существует единственная точка, принадлежащая всем прямоугольникам данной последовательности.*

Для доказательства этого принципа рассмотрим проекции всех прямоугольников r_n на действительную и мнимую оси. На действительной оси мы получим последовательность отрезков $i_1, i_2, \dots, \dots, i_n, \dots$, из которых каждый отрезок содержит следующий; на мнимой оси мы также получим последовательность отрезков $j_1, j_2, \dots, j_n, \dots$ таких, что каждый отрезок содержит следующий. Так как по условию диагональ прямоугольника r_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n , то длины отрезков i_n и j_n должны также стремиться к нулю. По вышеупомянутому принципу на действительной оси существует одна точка a^* , принадлежащая всем отрезкам i_n ; по тому же принципу на мнимой оси существует единственная точка b^* , принадлежащая всем отрезкам j_n . Очевидно, точка плоскости с координатами a^*, b^* принадлежит всем прямоугольникам r_n .

Такая точка есть единственная, т. е. не может существовать двух различных точек, принадлежащих всем прямоугольникам r_n . Действительно, расстояние между этими точками было бы не больше диагонали прямоугольника r_n , что невозможно, так как по условию эта последняя стремится к нулю при неограниченном возрастании n .

Этот принцип мы положим в основу теории пределов комплексных чисел.

2. Понятие предельной точки. Пусть имеем бесконечную последовательность комплексных чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (12)$$

Мы назовем число z *предельным числом* для данной последовательности (12), если оно удовлетворяет условию: *при любом положительном сколь угодно малом ε неравенство $|z - z_n| < \varepsilon$ выполняется для бесконечного множества натуральных чисел n .* Этому определению предельного комплексного числа

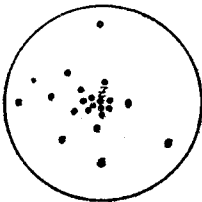


Рис. 9.

можно придать геометрическую форму, если числа $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, z$ рассматривать как точки числовой плоскости. Будем называть любой круг с центром в точке z *окрестностью* этой точки. Заметив, что $|z - z_n|$ есть расстояние между точками z и z_n , мы скажем, что *точка z есть предельная точка для последовательности точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, если в сколь угодно малой окрестности точки z лежат точки, изображающие бесконечное множество членов данной последовательности (12).* Другими словами, около предельной точки z образуется сгусток точек из последовательности $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ (рис. 9).

Примечание. Числа последовательности (12), равные между собою, изображаются одной и той же точкой, называемой *кратной* точкой. Кратность точки равна числу равных чисел, изображением которых она является; в част-

ности, кратность точки может оказаться бесконечной, если среди чисел данной последовательности имеется бесконечное множество равных между собой. Каждая точка считается за столько точек, какова ее кратность. Так, например, последовательность точек $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \dots$, имеет единственную предельную точку 0 .

Может случиться, что последовательность точек не имеет предельной точки, как, например, последовательность $1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Бывают случаи, когда последовательность имеет несколько предельных точек, как, например, последовательность $1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 4/5, \dots$, которая имеет две предельные точки: 0 и 1 , причем первая точка не принадлежит последовательности, вторая же есть элемент последовательности.

3. Ограниченные и неограниченные последовательности комплексных чисел. Пример последовательности $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, не имеющей предельной точки, характерен тем, что точки этой последовательности уходят в бесконечность. Мы будем называть последовательность комплексных чисел *ограниченной*, если модули всех чисел этой последовательности остаются меньше некоторого положительного числа M :

$$|z_n| < M.$$

В противном случае последовательность чисел носит название *неограниченной*. Заметим, что в случае ограниченной последовательности точек существует круг с центром в нулевой точке достаточно большого постоянного радиуса M , внутри которого лежат все точки данной последовательности (рис. 10).

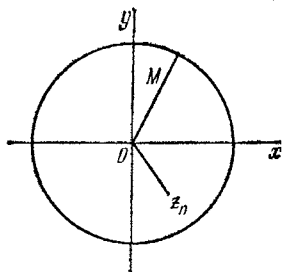


Рис. 10.

Неограниченная последовательность точек, как мы видели на примере, может не иметь предельной точки. Этого обстоятельства не может представиться в случае ограниченной последовательности точек, как это следует из теоремы Больцано—Вейерштрасса.

4. Теорема Больцано—Вейерштрасса. *Всякая бесконечная ограниченная последовательность точек имеет по крайней мере одну предельную точку.* Это положение теории пределов мы докажем, воспользовавшись вышеустановленным принципом вложенных прямоугольников (п. 1).

Пусть имеем ограниченную последовательность точек

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (12)$$

Все точки этой последовательности лежат внутри некоторого прямоугольника r_1 со сторонами, параллельными осям координат. Разделив стороны прямоугольника r_1 пополам и соединяя середины противоположных сторон, мы разобьем прямоугольник r_1 на четыре конгруэнтных прямоугольника (рис. 11). Среди этих четырех прямоугольников имеется по крайней мере один, содержащий бесконечное множество точек данной последовательности (12), так как в противном случае в прямоугольнике r_1 было бы

конечное число точек последовательности (12). Назовем этот прямоугольник r_2 и разделим его снова тем же способом на четыре конгруэнтных прямоугольника. По крайней мере в одном из них, назовем его r_3 , будет снова лежать бесконечное множество точек данной последовательности (12). Снова разделив его на четыре конгруэнтных прямоугольника, найдем новый прямоугольник r_4 и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим бес-

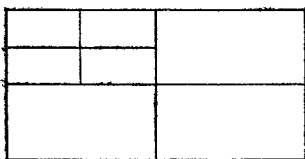


Рис. 11.

конечную последовательность прямоугольников r_1, r_2, r_3, \dots , каждый из которых содержит следующий, с диагоналями, стремящимися к нулю, и таких, что каждому прямоугольнику r_n принадлежит бесконечное множество точек данной последовательности (каждая точка считается столько раз, какова ее кратность).

На основании принципа вложенных прямоугольников (п. 1) мы заключаем, что существует точка, принадлежащая всем прямоугольникам r_n . Эта точка будет предельной для данной последовательности точек. В самом деле, описав около этой точки как центра окружность произвольно малого радиуса ϵ , мы видим, что, начиная с некоторого достаточно большого n , все прямоугольники r_n будут лежать внутри этой окружности, и так как в каждом прямоугольнике r_n имеется бесконечное множество точек данной последовательности, то и внутри проведенной окружности будет находиться бесконечное множество таких точек. Следовательно, построенная точка есть предельная для данной последовательности точек (12), чем и доказывается наша теорема.

5. Понятие сходящейся последовательности комплексных чисел.

Мы только что показали, что всякая ограниченная последовательность чисел имеет по крайней мере одно предельное число.

Если ограниченная последовательность чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (12)$$

имеет единственное предельное число z , то говорят, что эта последовательность сходится к числу z , и символически это обозначают так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Следовательно, согласно определению сходящаяся последовательность точек удовлетворяет двум условиям:

- 1) эта последовательность ограничена;
- 2) эта последовательность имеет единственную предельную точку.

Вспомнив определение предельной точки (п. 2), легко выразить с помощью неравенства сходимость последовательности чисел (12) к числу z : *при любом сколь угодно малом положительном ϵ неравен-*

ство $|z - z_n| < \varepsilon$ удовлетворяется, начиная с некоторого достаточно большого n , или, что то же,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z - z_n| = 0.$$

Геометрически: *последовательность точек z_n сходится к точке z , если все точки этой последовательности, кроме, быть может, конечного числа точек, лежат внутри сколь угодно малой окрестности точки z .*

6. Основные теоремы теории пределов. Пользуясь установленным понятием предела последовательности комплексных чисел, мы можем перенести в комплексную область известные теоремы о пределах последовательностей действительных чисел. Так, если две данные последовательности комплексных чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots; \quad z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \dots \quad (13)$$

сходятся соответственно к числам z и z' , то, образуя новую последовательность чисел

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots, \quad (14)$$

где положено $\omega_n = z_n \pm z'_n$ или $\omega_n = z_n \cdot z'_n$, или $\omega_n = \frac{z_n}{z'_n}$ (в последнем случае $z'_n \neq 0$), мы убеждаемся, что эта последовательность (14) сходится и имеет своим пределом ω , причем $\omega = z \pm z'$ или $\omega = z \cdot z'$, или $\omega = \frac{z}{z'}$ (в последнем случае предполагается $z' \neq 0$), т. е.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm z'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n z'_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{z'_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n \neq 0). \end{aligned}$$

На доказательстве этих элементарных теорем теории пределов мы не останавливаемся, так как оно проводится аналогично доказательству соответствующих предложений теории пределов действительных чисел.

7. Критерий Коши. Как известно из основ теории пределов, Коши дал критерий, характеризующий сходящуюся последовательность чисел. Этот признак Коши состоит в следующем: *условие, необходимое и достаточное для сходимости последовательности комплексных чисел*

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, \quad (12)$$

заключается в том, чтобы при всяком сколь угодно малом положительном ε существовало натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что неравенство $|z_{N+m} - z_N| < \varepsilon$ выполняется, каково бы ни было натуральное число m .

Геометрически этот критерий означает, что *последовательность точек z_n будет сходящейся лишь в том случае, если все ее точки, начиная с номера N , $N = N(\varepsilon)$, лежат внутри круга с центром в точке z_N радиуса ε .*

Необходимость этого условия доказывается весьма легко. В самом деле, если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, то найдется такое число $N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, что при $n \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ имеет место неравенство

$$|z - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметив, что $z_{N+m} - z_N = (z_{N+m} - z) + (z - z_N)$, имеем:

$$|z_{N+m} - z_N| \leq |z_{N+m} - z| + |z - z_N|.$$

По условию будем иметь:

$$|z - z_N| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |z_{N+m} - z| < \frac{\varepsilon}{2},$$

следовательно,

$$|z_{N+m} - z_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при всяком $m \geq 0$, что и нужно.

Покажем достаточность признака. Предполагая условие Коши выполненным, мы видим, что все точки последовательности (12), начиная с точки z_N , лежат внутри круга радиуса ε с центром в этой точке. Следовательно, последовательность точек (12) есть ограниченная. Остается показать, что она не может иметь двух различных предельных точек A и B . В самом деле, допуская противное, примем $\varepsilon < \frac{1}{2} \overline{AB}$. Этому числу ε соответствует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что абсолютная величина разности $|z_{N+m} - z_N| < \varepsilon$, т. е. все точки последовательности (12), начиная с точки z_N , лежат внутри круга с центром в точке z_N радиуса ε (рис. 12). Вне этого круга может находиться лишь конечное число точек данной последовательности, и, следовательно, обе предельные

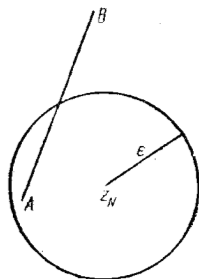


Рис. 12.

точки A и B должны лежать внутри круга или на его окружности. В таком случае расстояние между ними \overline{AB} должно быть не больше диаметра 2ε , а мы приняли $\overline{AB} > 2\varepsilon$, откуда следует противоречие. Итак, при выполнении условия Коши последовательность точек (12) сходится, так как она ограничена и не может иметь более одной предельной точки, а значит, — по теореме Больцано—Вейерштрасса (п. 4) — имеет одну предельную точку.

§ 4. Числовая сфера. Бесконечно удаленная точка

1. Изображение комплексных чисел на сфере. Бесконечно удаленная точка. Последовательность точек

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (12)$$

называется, как известно, неограниченной, если имеются точки этой последовательности, лежащие вне круга с центром в нулевой точке сколь угодно большого радиуса. Неограниченная последовательность точек, как мы видели, может не иметь предельных точек. В этом случае условимся говорить, что последовательность чисел (12) стремится к бесконечности, что символически будем записывать так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty. \quad (15)$$

Последнее равенство выражает, что бесконечная последовательность чисел (12) не имеет предельного числа.

Чтобы дать равенству (15) простое геометрическое истолкование, будем изображать комплексные числа точками на сфере.

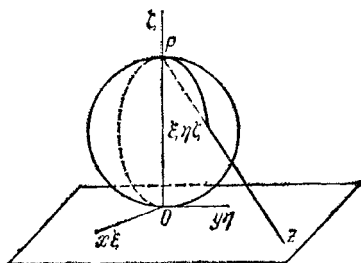


Рис. 13.

С этой целью возьмем сферу, касательную к плоскости в нулевой точке O (рис. 13). Диаметр сферы OP , проходящий через точку O , будет перпендикулярным к плоскости; вторую точку его пересечения со сферой, точку P , назовем полюсом. Всякое комплексное число z изображается точкой на плоскости; соединяя эту точку с полюсом прямой линией Pz , получим в пересечении этой прямой и сферы единственную точку (отличную от P), которую примем за изображение комплексного числа z . Итак, каждое комплексное число изображается некоторой точкой сферы; обратно, каждой точке сферы, кроме полюса P , соответствует единственная точка на плоскости, получающаяся в пересечении с плоскостью луча, проходящего через P и рассматриваемую точку; таким образом, всякая точка сферы, кроме полюса P , изображает некоторое комплексное число. Итак, мы устанавливаем взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками плоскости и точками сферы (с исключением точки P). Эта сфера, из которой выкинута точка P , является изображением совокупности всех комплексных чисел. Посмотрим, каково взаимное отношение точки P с другими точками сферы. Если последовательность чисел z_n стремится к бесконечности, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, то изображающие их точки на

сфере неограниченно приближаются к точке P . Естественно принять точку P за изображение бесконечности, а соответствующую

ей единственную точку плоскости назвать *бесконечно удаленной* точкой этой плоскости.

Итак, на комплексной числовой плоскости мы принимаем единственную бесконечно удаленную точку (изображаемую на сфере точкой P) в отличие от плоскости проективной геометрии, где рассматривается бесконечно удаленная прямая, т. е. бесконечное множество различных бесконечно удаленных точек.

Таким образом, путем указанного преобразования, называемого *стереографической проекцией*, мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между точками сферы и точками плоскости, включая ее единственную бесконечно удаленную точку. Эта сфера, точки которой изображают совокупность всех комплексных чисел и бесконечности, носит название *комплексной числовой сферы*, или *сферы Римана*. Преимущество изображения комплексных чисел на сфере вместо плоскости состоит в том, что здесь наглядно изображается единственная бесконечно удаленная точка плоскости.

Если под окрестностью точки P на сфере понимать часть поверхности сферы, содержащую точку P и ограниченную любой окружностью, плоскость которой перпендикулярна к OP , то под окрестностью бесконечно удаленной точки плоскости нужно будет понимать стереографическую проекцию этой части сферы, т. е. *внешность* любого круга, с центром в начале координат. Тогда условие сходимости последовательности точек (12) к бесконечно удаленной точке может быть выражено в форме, совершенно аналогичной условию п. 5 § 3: последовательность точек z_n сходится к бесконечно удаленной точке, если все точки этой последовательности, кроме конечного числа точек, лежат внутри произвольной окрестности бесконечно удаленной точки.

Во всем дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем обозначать буквой z любую обыкновенную точку плоскости и совокупность таких точек будем называть *плоскостью комплексного переменного*. Плоскость комплексного переменного вместе с бесконечно удаленной точкой будем называть *расширенной плоскостью комплексного переменного*. Заметим, что бесконечно удаленная точка плоскости, подобно нулевой точке, не имеет определенного аргумента.

2. Формулы стереографической проекции. В предыдущем пункте мы дали геометрическое определение стереографической проекции; теперь мы займемся выводом формул этого преобразования, т. е. решим задачу: *зная комплексное число, определить координаты соответствующей точки сферы, и обратно*. Для решения этой задачи выберем систему пространственных осей координат $O\xi\eta\zeta$ таким образом, что оси $O\xi$ и $O\eta$ совпадают соответственно с осями Ox и Oy на числовой плоскости, а ось $O\zeta$ направлена по диаметру OP (рис. 13). Величину диаметра сферы для простоты примем за единицу.

Комплексное число $z = x + yi$ изображается на плоскости точкой с координатами x, y ; на сфере пусть это число изобразится точкой с координатами ξ, η, ζ . Так как центр сферы лежит в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ и радиус ее равен $\frac{1}{2}$, то ξ, η, ζ должны удовлетворять следующему уравнению сферы:

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta). \quad (16)$$

Далее, так как три точки $(0, 0, 1)$, (ξ, η, ζ) и $(x, y, 0)$ лежат на одной и той же прямой линии, то их координаты должны удовлетворять соотношениям

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}. \quad (17)$$

Из этих равенств (17) можно выразить x и y через ξ, η, ζ . Так, сравнивая первое отношение с третьим, а затем второе с третьим, найдем:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \quad \text{или} \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}. \quad (18)$$

Эти формулы (18) дают выражения координат точки плоскости через координаты соответствующей точки сферы. Для получения обратных формул заметим, что

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{\zeta}{1 - \zeta}, \quad (18')$$

откуда находим:

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}; \quad (19)$$

зная же ζ из формул (18) немедленно определяем ξ и η :

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}; \quad (19')$$

$$\eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (19'')$$

Формулы (19), (19') и (19'') дают выражения для координат точки сферы через компоненты x и y комплексного числа.

3. Основное свойство стереографической проекции. Теперь мы докажем следующее весьма важное свойство стереографической проекции: *при стереографической проекции всякая окружность плоскости переходит в окружность сферы и обратно*. Необходимо заметить, что в этой сокращенной формулировке теоремы слово «окружность» нужно понимать в его широком смысле, включая сюда и прямую линию как окружность с бесконечно большим радиусом.

Действительно, уравнение любой окружности на плоскости xy имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (20)$$

где A, B, C и D — действительные числа. В частности, при $A = 0$ уравнение (20) определяет прямую линию. Чтобы определить соответствующую линию на сфере, заменим в уравнении (20) x и y их выражениями через ξ, η, ζ ; по формулам (18) и (18') найдем:

$$A \frac{\xi}{1-\zeta} + B \frac{\xi}{1+\zeta} + C \frac{\eta}{1-\zeta} + D = 0$$

или

$$B\xi + C\eta + (A - D)\zeta + D = 0. \quad (21)$$

Полученное уравнение (21), будучи первой степени, определяет плоскость. Таким образом, координаты ξ, η, ζ удовлетворяют двум уравнениям: (16) и (21), и следовательно, точки (ξ, η, ζ) лежат на пересечении сферы (16) с плоскостью (21), т. е. образуют окружность на числовой сфере.

Легко видеть, что, наоборот, всякая окружность сферы (16) перейдет в окружность числовой плоскости, так как, пользуясь произволом чисел A, B, C и D , мы можем представить уравнение любой плоскости в виде (21). Очевидно, окружность сферы переходит в прямую линию плоскости в том случае, если эта окружность проходит через полюс сферы, так как плоскость (21) при $A = 0$ проходит через точку $P(0, 0, 1)$.

Этот факт, впрочем, очевидно и геометрически: окружность сферы, соответствующая прямой линии плоскости, должна проходить через точку P , соответствующую бесконечно удаленной точке плоскости.

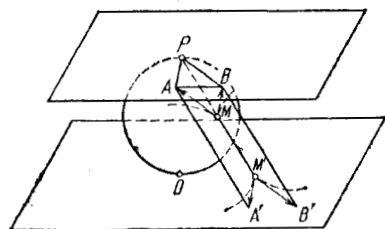


Рис. 14.

4. Сохранение углов. Рассмотрим две кривые на сфере, пересекающиеся в какой-либо точке M , и пусть касательные к этим кривым в этой точке образуют угол α (рис. 14). Покажем, что касательные к стереографическим проекциям этих кривых в точке M' , явля-

ющейся проекцией точки M , также образуют угол α , т. е. что величины углов при стереографической проекции сохраняются. Для этого заметим сначала, что когда секущая к кривой стремится к совпадению с касательной к этой кривой, то проекция секущей стремится к совпадению с проекцией касательной и в то же время стремится к совпадению с касательной к проекции кривой. Отсюда следует, что проекция касательной к сферической кривой есть касательная к проекции этой кривой. Продолжим теперь касательные к сферическим кривым до пересечения в точках A и B с касательной плоскостью к сфере в точке P . Очевидно, что треугольник APB равен треугольнику AMB , так как сторона AB — общая для этих треугольников, $AP = AM$ как касательные к сфере, про-

веденные из одной и той же точки, и $BP = BM$ по той же причине. Поэтому $\widehat{APB} = \widehat{AMB} = \alpha$. Но касательные к проекциям кривых параллельны прямым AP и BP , так как эти касательные по предыдущему являются прямыми пересечения плоскостей PAM и PBM с плоскостью проекций. Следовательно, угол между ними равен $\widehat{APB} = \alpha$, что и требовалось доказать.

§ 5. Ряды

1. Понятие сходящегося и расходящегося ряда, Рассмотрим бесконечный ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (22)$$

все члены которого суть комплексные числа, и образуем сумму первых n членов этого ряда:

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n. \quad (23)$$

Давая n значения 1, 2, 3, ..., мы получаем бесконечную последовательность комплексных чисел $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, соответствующую ряду (22). Обратно, зная последовательность чисел s_n , легко написать соответствующий ей ряд, для которого сумма первых n членов равна s_n :

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \dots + (s_n - s_{n-1}) + \dots$$

Мы условимся говорить, что ряд (22) *сходится*, если соответствующая ему последовательность чисел s_n *сходится*, и в этом случае назовем суммой ряда (22) предел указанной последовательности. Следовательно, ряд (22) называется сходящимся, если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Число s есть сумма данного бесконечного ряда. Если последовательность чисел (23) не сходится, то ряд (22) называют расходящимся.

В случае расходящегося ряда может случиться, что либо сумма s_n первых n его членов стремится к бесконечности, либо s_n не стремится ни к какому определенному пределу. В первом случае ряд называют собственно расходящимся, во втором — колеблющимся. Из изложенного следует, что вопрос о сходимости или расходимости ряда (22) эквивалентен вопросу о сходимости или расходимости соответствующей последовательности комплексных чисел (23). Например, ряд $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$ сходится при $|q| < 1$ и есть собственно расходящийся при $|q| > 1$. Действительно, сумма s_n первых n членов этого ряда представляется так:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Так как $|q^n| = |q|^n$, то в случае $|q| < 1$ число q^n стремится к нулю при неограниченном возрастании n , а в случае $|q| > 1$ стремится к бесконечности. Следовательно, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q} \quad \text{при } |q| < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \quad \text{при } |q| > 1.$$

2. Необходимый признак сходимости ряда. Предполагая ряд (22) сходящимся, легко показать, что его общий член u_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n . Действительно, так как последовательность чисел s_n сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = 0,$$

так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} = s \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

или, что то же,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (24)$$

Итак, во всяком сходящемся ряде общий член стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера n . Равенство (24) выражает необходимый признак сходимости бесконечного ряда; следовательно, в тех случаях, когда этот признак не выполняется, ряд расходится. Так, например, ряд $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$ расходится при $|q| \geq 1$, так как в этом случае его общий член q^n не стремится к нулю при неограниченном возрастании n : при $|q| > 1$ число q^n стремится к бесконечности, при $|q| = 1$ модуль этого числа q^n все время равен единице. В предыдущем пункте мы видели, что этот ряд есть собственно расходящийся, если $|q| > 1$; при $|q| = 1$ этот ряд будет, вообще говоря, колеблющимся (за исключением $q = 1$, когда он собственно расходящийся), потому что в этом случае сумма первых n его членов $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ($q \neq 1$) не стремится к бесконечности при неограниченном возрастании n .

Установленный признак сходимости (24), будучи необходимым, не является достаточным, т. е. этот критерий может выполняться и в случае расходящегося ряда, как это показывает пример известного из анализа гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

3. Понятие абсолютно сходящегося ряда. В теории рядов с комплексными членами весьма важным является понятие абсолютно сходящегося ряда. Рассмотрим вместе с рядом (22) новый ряд, членами которого являются модули членов ряда (22):

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (22')$$

Исследование сходимости ряда (22') с положительными членами представляет задачу более простую, нежели исследование сходимости ряда (22). В самом деле, сумма первых n членов ряда (22') — обозначим ее σ_n — не убывает с возрастанием n и, следовательно, либо остается ограниченной при любом n , либо стремится к бесконечности при неограниченном возрастании n . В первом случае последовательность неубывающих чисел σ_n имеет единственный предел, и, следовательно, ряд (22') сходится; во втором случае этот ряд расходится. Таким образом, сходимость ряда с положительными членами характеризуется тем фактом, что суммы первых n его членов образуют ограниченную последовательность чисел. Пользуясь этим замечанием в теории рядов выводят различные достаточные признаки сходимости таких рядов.

Что же касается зависимости между рядами (22) и (22'), то она устанавливается при помощи следующей теоремы:

Если ряд (22'), образованный из модулей членов данного ряда (22), сходится, то сходится и данный ряд (22); короче, из сходимости ряда (22') вытекает сходимость ряда (22).

При доказательстве теоремы воспользуемся необходимым и достаточным признаком сходимости Коши (§ 3, п. 7). Заметив, что

$$\begin{aligned} |s_{N+m} - s_N| &= |u_{N+1} + u_{N+2} + \dots + u_{N+m}| \leq \\ &\leq |u_{N+1}| + |u_{N+2}| + \dots + |u_{N+m}|, \end{aligned}$$

представим последнюю сумму в виде разности $\sigma_{N+m} - \sigma_N$; получим:

$$|s_{N+m} - s_N| \leq \sigma_{N+m} - \sigma_N. \quad (25)$$

По условию теоремы ряд (22') сходится, следовательно, в силу необходимости признака Коши, при любом, сколь угодно малом, положительном ϵ найдется такое $N = N(\epsilon)$, что $\sigma_{N+m} - \sigma_N < \epsilon$, где m — произвольное целое положительное число. Из равенства (25) следует:

$$|s_{N+m} - s_N| < \epsilon,$$

причем последнее неравенство имеет место при всяком $\epsilon > 0$, $N = N(\epsilon)$, независимо от $m \geq 0$. В силу достаточности признака Коши отсюда следует сходимость данного ряда (22).

Условимся называть ряд с комплексными числами (22) абсолютно или безусловно сходящимся, если сходится ряд (22'), составленный из модулей его членов. Доказанная теорема убеждает нас в том, что всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся. Было бы ошибочным обратное заключение: иначе говоря, существуют ряды сходящиеся, но не абсолютно. Такие ряды назовем *условно сходящимися*. Примером условно сходящегося ряда может служить ряд $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$. Из теории рядов известно, что

этот ряд сходится; ряд же из модулей его членов, будучи гармоническим, расходится. Примером абсолютно сходящегося ряда может служить ряд $1 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + \dots$.

Абсолютно сходящиеся ряды имеют важное значение в анализе, так как основные операции над ними, как мы это далее обнаружим, подчиняются тем же законам, что и действия над конечными суммами.

4. Сложение и вычитание рядов. Пусть нам даны два ряда с комплексными членами:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (22)$$

$$u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n + \dots \quad (26)$$

Складываем (или вычитая) соответствующие члены этих рядов, мы образуем новый ряд:

$$(u_1 \pm u'_1) + (u_2 \pm u'_2) + \dots + (u_n \pm u'_n) + \dots, \quad (27)$$

называемый *суммой* (или *разностью*) *двух данных рядов*. Если данные ряды сходятся и имеют соответственно суммы s и s' , то ряд (27) сходится и имеет своей суммой $S = s \pm s'$. В самом деле, обозначая через s_n и s'_n суммы первых n членов рядов (22) и (26), имеем:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \quad s' = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n,$$

откуда следует:

$$s \pm s' = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \pm s'_n).$$

Последнее равенство убеждает нас в справедливости вышесказанного утверждения, так как

$$s_n \pm s'_n = (u_1 \pm u'_1) + (u_2 \pm u'_2) + \dots + (u_n \pm u'_n)$$

является суммой первых n членов ряда (27).

Итак, всякие два сходящихся ряда можно почленно складывать или вычитать. Операции сложения и вычитания распространяются, следовательно, на класс всех (условно или безусловно) сходящихся бесконечных рядов. Иначе будет обстоять дело с операцией умножения, которую, вообще говоря, нельзя применять к условно сходящимся рядам.

5. Теорема о двойных рядах. Из данного бесконечного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (22)$$

возможно образовать — и притом бесконечным множеством различных способов — бесконечное множество рядов таких, что каждый член u_n первоначального ряда входит в один и только в один

из новых рядов. Например, таким разложением ряда (22) на бесконечное множество рядов будет:

$$\begin{aligned} & u_1 + u_2 + u_4 + u_7 + u_{11} + \dots, \\ & u_3 + u_5 + u_8 + u_{12} + \dots, \\ & u_6 + u_9 + u_{13} + \dots, \\ & u_{10} + u_{14} + \dots, \\ & u_{15} + \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

В общем случае такое разложение ряда (22) на бесконечное множество рядов обозначим в виде таблицы

$$\left. \begin{array}{l} u_{\alpha_1} + u_{\alpha_2} + u_{\alpha_3} + \dots \\ u_{\beta_1} + u_{\beta_2} + u_{\beta_3} + \dots \\ u_{\gamma_1} + u_{\gamma_2} + u_{\gamma_3} + \dots \\ \dots \end{array} \right\} \quad (28)$$

Докажем, следующее предложение: *если ряд (22) абсолютно сходится и имеет своей суммой s , то каждый из рядов (28) также абсолютно сходится; если суммы рядов (28) обозначим соответственно через s_1, s_2, s_3, \dots , то ряд*

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots \quad (29)$$

абсолютно сходится и имеет своей суммой s .

З а м е ч а н и е. Свойство, выражаемое этой теоремой, верно для бесконечного ряда лишь при условии его абсолютной сходимости. Для условно сходящегося ряда, вообще говоря, нельзя утверждать, что его часть сходится. Например, ряд $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$ сходится; однако ряды $1 + 1/3 + 1/5 + \dots$, $-1/2 - 1/4 - 1/6 - \dots$ расходятся.

Докажем, что ряд $|u_{\alpha_1}| + |u_{\alpha_2}| + \dots$ есть сходящийся. Действительно, его частичные суммы (суммы любого числа первых членов) остаются меньше конечного числа

$$\sigma = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

Следовательно, первый из рядов (28) абсолютно сходится; аналогично докажем, что каждый из рядов (28) абсолютно сходится.

Покажем теперь, что ряд (29) абсолютно сходится. Складываем неравенства

$$\begin{aligned} |s_1| &\leq |u_{\alpha_1}| + |u_{\alpha_2}| + \dots + 1, \\ |s_2| &\leq |u_{\beta_1}| + |u_{\beta_2}| + \dots, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ |s_m| &\leq |u_{\mu_1}| + |u_{\mu_2}| + \dots, \end{aligned}$$

получим

$$|s_1| + |s_2| + \dots + |s_m| \leq \sigma;$$

так как последнее неравенство верно при любом m , то отсюда следует абсолютная сходимость ряда (29).

Остается показать, что сумма абсолютно сходящегося ряда (29) совпадает с суммой s первоначального ряда (22). Для этого достаточно показать, что разность $s - (s_1 + s_2 + \dots + s_m)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании m . Оценим модуль этой разности. Так как s есть сумма данного ряда (22), а s_1, s_2, \dots, s_m — суммы первых m рядов таблицы (28), то мы можем утверждать, что

$$|s - (s_1 + s_2 + \dots + s_m)| \leq |u_{\nu_1}| + |u_{\nu_2}| + \dots,$$

где индексы ν_1, ν_2, \dots суть номера всех тех членов данного ряда, которые не входят ни в один из m первых рядов таблицы (28). Обозначая через n произвольное натуральное число, выберем m столь большим, чтобы все индексы ν_1, ν_2, \dots были больше n .

В этом случае, очевидно, имеем: $|s - (s_1 + s_2 + \dots + s_m)| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots$; так как данный ряд абсолютно сходится, то, считая n достаточно большим, мы вправе утверждать:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots < \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. Итак, мы видим, что, начиная с достаточно большого m , выполняется неравенство

$$|s - (s_1 + s_2 + \dots + s_m)| < \varepsilon,$$

что доказывает сходимость ряда (29) к сумме s .

6. Перестановка членов ряда. В абсолютно сходящемся ряде возможно произвольно переставлять его члены, не меняя суммы

¹⁾ Теорема о том, что модуль суммы не больше суммы модулей слагаемых, легко распространяется на случай абсолютно сходящихся рядов. Действительно, полагая

$$\sigma = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad \text{и} \quad \sigma_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n,$$

имеем:

$$|\sigma_n| \leq |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|,$$

и с тем большим основанием

$$|\sigma_n| \leq |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n| + |v_{n+1}| + \dots$$

при любом n , откуда $|\sigma| \leq |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n| + |v_{n+1}| + \dots$

ряда. Действительно, переставив члены ряда (22), получим новый ряд

$$u_{\alpha_1} + u_{\alpha_2} + u_{\alpha_3} + \dots, \quad (30)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ обозначают совокупность всех натуральных чисел, написанных в каком-либо порядке. Полагая $s_1 = u_{\alpha_1}, s_2 = u_{\alpha_2}, \dots$, мы видим на основании доказанной в предыдущем пункте теоремы, что если ряд (22) абсолютно сходится, то абсолютно сходится и новый ряд (30), причем сумма нового ряда равна по-прежнему s .

Из теории рядов известно, что в ряде, условно сходящемся, вообще говоря, нельзя переставлять члены без изменения его суммы. Более того, существует предложение, в силу которого условно сходящиеся ряды с комплексными членами разбиваются на две группы. Для каждого из рядов первой группы существует такая прямая, что путем перестановки членов ряда можно получить из него новый сходящийся ряд, сумма которого изображается любой точкой прямой; при этом невозможно получить ни одного ряда, сумма которого изображается точкой, не лежащей на одной прямой. Для ряда второй группы путем перестановки членов можно получить новый сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму. Примером ряда первой группы может служить известный ряд $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$, примером ряда второй группы — ряд $1 + i - 1/2 - i/2 + 1/3 + i/3 - 1/4 - i/4 + \dots$.

7. Умножение рядов. Пусть даны два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots, \quad (22)$$

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 + \dots \quad (26)$$

Образуем новый ряд:

$$u_1 u'_1 + (u_1 u'_2 + u_2 u'_1) + \dots + (u_1 u'_n + u_2 u'_{n-1} + \dots + u_n u'_1) + \dots, \quad (31)$$

называемый *произведением двух данных рядов*.

Докажем следующее предложение: *если данные ряды (22) и (26) абсолютно сходятся и имеют своими суммами соответственно s и s' , то новый ряд (31) также абсолютно сходится и имеет суммой число $S = s \cdot s'$.*

Для доказательства рассмотрим попарные произведения всех членов рядов (22) и (26)

$$u_1 u'_1, u_1 u'_2, u_2 u'_1, u_1 u'_3, u_2 u'_2, \dots \quad (32)$$

и покажем, что ряд, членами которого являются числа (32), абсолютно сходится. Для этого достаточно доказать, что любая сумма вида $|u_1 u'_1| + |u_1 u'_2| + |u_2 u'_1| + \dots + |u_k u'_k|$ остается меньше постоянного числа. Обозначая через n наибольший номер входя-

щих в рассматриваемую сумму членов рядов (22) и (26), легко усматриваем, что она не больше произведения:

$$(|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|)(|u'_1| + |u'_2| + \dots + |u'_n|),$$

а следовательно, и подавно меньше $\sigma\sigma'$, где положено: $\sigma = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$; $\sigma' = |u'_1| + |u'_2| + |u'_3| + \dots$. Итак, к ряду, членами которого елужат числа (32), можно применить доказанную в п. 5 теорему о двойных рядах, положив:

$$s_1 = u_1u'_1, \quad s_2 = u_1u'_2 + u_2u'_1, \quad \dots,$$

$$s_n = u_1u'_n + u_2u'_{n-1} + \dots + u_nu'_1, \quad \dots$$

На основании этой теоремы ряд (31) абсолютно сходится. Остаётся показать, что сумма ряда (31) равна ss' . С этой целью иначе группируем члены (32), а именно полагаем $s_1 = u_1u'_1 + u_1u'_2 + u_1u'_3 + \dots$; $s_2 = u_2u'_1 + u_2u'_2 + u_2u'_3 + \dots$ и т. д. Ряды s_1, s_2, \dots абсолютно сходятся на основании общей теоремы п. 5. Вынося в первом ряде u_1 за скобку, убеждаемся, что его сумма s_1 равна u_1s' . Аналогично будем иметь: $s_2 = u_2s'$ и т. д. Наконец, ряд $s_1 + s_2 + \dots$ или $u_1s' + u_2s' + \dots$ есть абсолютно сходящийся, сумма которого, очевидно, равна:

$$(u_1 + u_2 + \dots) s' = ss'.$$

В силу теоремы п. 5 эта сумма совпадает с суммой ряда (31).

Итак, мы видим, что основные операции над конечными суммами, как-то: перестановка порядка слагаемых и умножение таких сумм, распространяются на бесконечные ряды при условии их абсолютной сходимости.

Перемножая два условно сходящихся ряда, мы можем в результате получить, вообще говоря, расходящийся ряд. Таким образом, теорема об умножении рядов неприменима к условно сходящимся рядам. Однако, как мы увидим далее, эта теорема может быть распространена на условно сходящиеся ряды, если а priori известно, что в результате их умножения получается сходящийся ряд.

При изложении теории рядов мы ограничились рассмотрением основных свойств сходящихся рядов. Расходящиеся ряды имеют также обширные применения в математическом анализе. Подобно тому как со всяким сходящимся рядом связывается определенное число, называемое его суммой, можно дать различные регулярные процессы, с помощью которых определяются суммы для более или менее широких классов расходящихся рядов. Однако изложение теории расходящихся рядов выходит за пределы настоящего курса.

Упражнения к главе I

1. Выразить $\cos nx$ и $\sin nx$ через степени $\sin x$ и $\cos x$, пользуясь формулой Муавра.

Отв.

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots$$

$$\sin nx = n \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots$$

2. Где лежат точки z , для которых $|z| + R(z) \leq 1$?

Отв. Внутри параболы $r = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$ и на ней.

3. Представить в комплексной форме выражение $\sqrt{1+i}$.

$$\text{Отв. } \sqrt{1+i} = \pm \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right).$$

4. Определить x и y , если $x + yi = \sqrt{a+bi}$.

$$\text{Отв. } x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}; \text{ знаки нуж-$$

но взять одинаковые, если b положительное, и разные, если b отрицательное.

5. Где лежат точки z , для которых:

$$a) |z| \leq 2; \quad б) |z| > 2; \quad в) R(z) \geq 1/2; \quad г) R(z^2) = a;$$

$$д) |z^2 - 1| = a > 0; \quad е) \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1; \quad ж) \left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = 1?$$

Отв. г) Гипербола, пара прямых при $a = 0$. д) Лемниската. е) Правая полуплоскость, включая границу. ж) Прямая, перпендикулярная в середине отрезка $z_1 z_2$.

6. Когда три точки z_1, z_2, z_3 лежат на прямой линии?

Отв. Отношение разностей $(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)$ должно быть действительным числом.

7. Когда четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на окружности?

$$\text{Отв. Двойное отношение } \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \text{ — действительное число.}$$

8. Проверить тождество $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Какое геометрическое предложение выражает это уравнение?

Отв. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна удвоенной сумме квадратов смежных сторон.

9. Какая точка z делит отрезок $z_1 z_2$ в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$?

$$\text{Отв. } z = \frac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

10. Треугольник имеет вершины z_1, z_2, z_3 . Где лежит его центр тяжести, если а) в каждой вершине помещена масса λ , б) в вершинах помещены массы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?

11. Показать, что центр тяжести системы материальных точек с массами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, находящихся в геометрических точках z_1, z_2, \dots, z_n , лежит в точке

$$z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_n z_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}.$$

12. Для трех точек z_1, z_2, z_3 выполняются условия

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad \text{и} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

Показать, что z_1, z_2, z_3 суть вершины вписанного в единичный круг равно-
стороннего треугольника.

13. Показать, что если $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$, то четыре точки z_i являются вершинами вписанного в единичный круг прямоугольника.

14. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ — произвольная последовательность точек, z_0 — ее предельная точка. Показать, что из последовательности z_i можно всегда брать частичную последовательность z'_1, z'_2, \dots , так, чтобы $z'_n \rightarrow z_0$.

15. Из условия $z_n \rightarrow z_0$ показать, что $z'_n = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} \rightarrow z_0$. Верно ли это, если $z_0 = \infty$?

16. Доказать, что бесконечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится тогда и только тогда, когда при произвольном выборе целых положительных чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+p_n}) = 0.$$

Г Л А В А II

**КОМПЛЕКСНОЕ ПЕРЕМЕННОЕ
И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

§ 1. Функции комплексного переменного

1. Понятие функции комплексного переменного. Рассмотрим множество E комплексных чисел и условимся, что комплексное число $z = x + yi$ может быть отождествлено с каждым числом этого множества E ; в таком случае мы назовем z *комплексным переменным*, а E — его *областью изменения*. Геометрически область E изменения комплексного переменного z изобразится посредством множества точек в комплексной числовой плоскости или на числовой сфере. По-прежнему мы будем обозначать это множество точек через E и будем его называть областью изменения комплексного переменного z . Если мы воспользуемся для изображения чисел множества E числовой сферой, то нет необходимости исключать случай, когда бесконечно удаленная точка принадлежит к E , т. е. когда среди чисел множества E имеется бесконечность. Мы назовем ω функцией независимого комплексного переменного z , если каждому значению, которое может принимать z , т. е. каждому числу множества E , соответствует определенное комплексное числовое значение $\omega = u + vi$. Символически это обозначается так: $\omega = f(z)$. Если $z = x + yi$, то u и v суть действительные функции для действительных переменных x , y . Таким образом, задание ω как функции комплексного переменного z сводится к заданию двух функций u и v переменных x и y . Может случиться, что каждому значению комплексного переменного z соответствует несколько различных значений переменного ω . В этом случае ω называется многозначной функцией комплексного переменного z , тогда как в первом случае она называется однозначной функцией. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем иметь дело лишь с однозначными функциями.

Каждой точке множества E , которое служит областью изменения переменного z , соответствует определенное комплексное число ω . Изображая последнее как точку в числовой плоскости или на числовой сфере, мы получаем множество точек E' . Итак, задание ω как функции комплексного переменного z геометрически сводится к установлению соответствия между множествами точек E и E' ,

в силу которого каждой точке множества E отвечает определенная точка множества E' . В этом случае говорят, что множество точек E отображается на множество точек E' . При этом некоторые точки множества E' могут оказаться кратными, что будет тогда, когда различным значениям z соответствует одно и то же значение w . Рассматривая соответствие между точками множеств E и E' как отображение множества E' на множество E , мы получаем для каждого значения комплексного переменного w , изменяющегося на множестве точек E' , одно или несколько (конечное или бесконечное множество) значений z . Следовательно, обратно, z можно рассматривать как функцию комплексного переменного w . Такая функция носит название *обратной* функции по отношению к функции $w = f(z)$. Если различным значениям комплексного переменного z соответствуют различные значения функции w , то отображение множества E и E' будет взаимно однозначным, т. е. таким, что каждой точке множества E отвечает единственная точка множества E' и, обратно, каждой точке множества E' — одна точка множества E . В этом случае z , рассматриваемое как обратная функция w , будет также однозначной функцией. В общем же случае функция, обратная однозначной функции, может быть многозначной и даже бесконечнозначной. Более того, функция, обратная однозначной, может иметь при каждом значении независимого переменного бесконечное множество значений, образующих непрерывную линию. Например, $w = |z|$ есть однозначная функция комплексного переменного z . Рассматривая же z как функцию w , мы видим, что данному значению $w = c$ отвечает бесконечное множество значений z , для которых $|z| = c$, т. е. целая окружность. Впрочем, явления такого рода не могут иметь места для класса дифференцируемых функций, изложение теории которых представляет главную задачу настоящего руководства.

2. Понятие области. Линия Жордана. В предыдущем пункте мы считали функцию комплексного переменного $w = f(z)$ определенной на некотором произвольном множестве точек E . В дальнейшем мы почти исключительно будем принимать за множество точек E , на котором изменяется независимое переменное z , так называемую область плоскости, определение которой мы и должны теперь дать. Предварительно выясним понятие внутренней точки множества.

Точку P называют *внутренней* точкой множества E , если все точки достаточно малого круга с центром в точке P принадлежат этому множеству E . Так, например, рассматривая все точки, заключенные между двумя concentрическими окружностями, мы получаем множество, состоящее из одних внутренних точек. Присоединяя же к этому множеству точки, лежащие на окружности (на одной или обеих), мы будем иметь множество, которое содержит точки, не являющиеся для него внутренними: такими будут все точки, расположенные на окружностях.

Областью мы называем множество G точек плоскости, удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) G состоит из одних внутренних точек,
- 2) любые две точки множества можно соединить ломаной с достаточно большим числом звеньев так, чтобы все точки этой линии принадлежали самому множеству.

Так, вышеприведенный пример множества представляет область; во втором же случае мы не имеем области. Когда дана область G , то все точки плоскости можно разделить на два класса по отношению к этой области. К первому классу мы отнесем все точки области G , ко второму — точки, не принадлежащие G . Очевидно, точка Q , не принадлежащая области G (точка второго класса), может быть двоякого типа: либо все точки достаточно малого круга с центром в этой точке Q не принадлежат области G , — такую точку Q мы назовем *внешней* точкой области G , — либо, при сколь угодно малом круге с центром в точке Q , в этом круге будут всегда точки области G , — такую точку Q мы назовем *границной* точкой области G . Совокупность всех граничных точек области G называют ее *границей*. Единственным примером области без границы служит вся расширенная плоскость комплексного переменного. Таким образом, отвлекаясь от этого случая, можно сказать, что всякая область G имеет границу. Существенно отметить, что не всегда существуют внешние точки области G ; так, например, совокупность всех точек плоскости, не лежащих на отрезке действительной оси $[-1, +1]$, представляет область, не имеющую внешних точек.

Множество, состоящее из области G и ее границы, называется *замкнутой областью* и обозначается через \bar{G} .

Выяснив понятие области, перейдем к определению понятия непрерывной линии в смысле Жордана. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ суть действительные непрерывные функции переменного t , изменяющегося на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$. Два уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (1)$$

дают параметрическое изображение *непрерывной* линии. Если мы потребуем, чтобы двум различным значениям параметра t (за исключением, быть может, значений $t = \alpha$ и $t = \beta$, соответствующих началу и концу линии) соответствовали всегда две различные точки линии, то наша линия не будет иметь кратных точек. Такую линию мы будем называть *линией Жордана* или просто *непрерывной линией*. Если мы положим $z = x + iy$, так что $z(t) = x(t) + iy(t)$, то ее аналитическое изображение может быть записано с помощью одного уравнения:

$$z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \quad (1')$$

Когда параметр t изменяется, возрастая на отрезке $[\alpha, \beta]$, точка z описывает линию Жордана, началом которой служит точка $z(\alpha)$

и концом точка $z(\beta)$; тем самым на линии (l') устанавливается положительное направление.

Геометрически линия Жордана, очевидно, представляет множество точек плоскости, являющееся взаимно однозначным и непрерывным отображением прямолинейного отрезка. Если начало и конец линии Жордана совпадают между собой, т. е. $z(\alpha) = z(\beta)$, то она называется замкнутой. Как показал Жордан, непрерывная замкнутая линия без кратных точек делит плоскость на две разные области: одну, не содержащую бесконечно удаленной точки, называемую внутренней по отношению к данной линии, другую, содержащую бесконечно удаленную точку и называемую внешней по отношению к данной кривой. Для обеих этих областей данная линия является границей. Мы будем предполагать, что вышеуказанное положительное направление на линии выбрано так, что внутренняя часть кривой лежит слева от точки $z(t)$, движущейся в этом направлении. Замкнутую линию Жордана геометрически мы можем рассматривать как взаимно однозначный и непрерывный образ окружности. Действительно, не уменьшая общности, мы можем положить $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ и рассматривать параметр t как аргумент точки окружности. Область, лежащая внутри замкнутой линии Жордана, обладает одним замечательным свойством: какую бы замкнутую непрерывную линию мы ни провели в этой области, ее внутренняя часть также принадлежит данной области.

Вообще, всякую область, обладающую этим свойством, мы назовем *односвязной*, а области, не обладающие упомянутым свойством, — *много связными*. Так, например, часть плоскости, лежащая внутри многоугольника, есть односвязная область, границей которой служит этот многоугольник: наоборот, часть плоскости, лежащая вне многоугольника, будет много связной, так как внутренняя часть замкнутой жордановой кривой, окружающей многоугольник, не вся принадлежит данной области. Точно так же много связной будет область, состоящая из точек z кругового кольца $r < |z - z_0| < R$.

Для областей, лежащих в расширенной плоскости, понятие односвязности несколько обобщается. Именно, такая область называется односвязной, если для замкнутой жордановой кривой, принадлежащей области, либо внутренняя, либо внешняя часть (включая и бесконечно удаленную точку) принадлежит этой области. Например, внешняя часть многоугольника является здесь односвязной или много связной, смотря по тому, включаем ли мы в нее бесконечно удаленную точку или же исключаем.

Мы уже отметили, что часть плоскости, лежащая внутри произвольной замкнутой линии Жордана, есть односвязная область, границей которой служит эта линия Жордана. Рассматривая области, границы которых состоят из нескольких замкнутых линий Жордана, мы будем иметь примеры много связных областей. Так, пусть l_0, l_1, \dots, l_n суть замкнутые линии Жордана, такие, что

каждая из линий I_1, I_2, \dots, I_n лежит вне остальных и все они расположены внутри I_0 (рис. 15).

Множество точек плоскости, лежащих одновременно внутри линии I_0 и вне всех линий I_1, I_2, \dots, I_n , будет представлять область, границей которой служит совокупность точек линий I_0, I_1, \dots, I_n . Например, множество точек z , удовлетворяющих неравенству $r < |z - z_0| < R$, представляет область, граница которой состоит из двух окружностей радиусов r и R с общим центром в точке z_0 . При $n = 0$ мы имеем прежний простейший случай односвязной области. Наоборот, в случае $n > 0$ в области существуют такие непрерывные замкнутые линии, внутренние части которых не целиком принадлежат области. Таким образом, область, граница которой состоит из нескольких $n + 1$ замкнутых линий, будет многосвязной и именно $n + 1$ -связной. Например, множество точек, лежащих внутри кругового кольца, — двухсвязная область; область, изображенная на рис. 15, — трехсвязная и т. д.

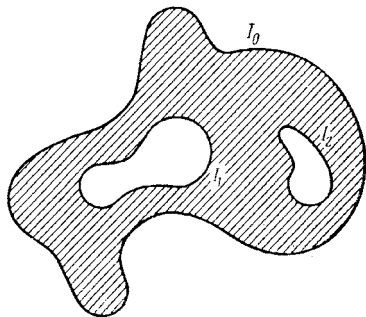


Рис. 15.

Область называется ограниченной, если все ее точки лежат внутри некоторого круга с центром в нулевой точке достаточно большого постоянного радиуса. В противном случае область называется неограниченной. В дальнейшем, если не оговорено противное, под словом «область» мы будем понимать произвольную ограниченную или неограниченную область плоскости, односвязную или многосвязную, не содержащую бесконечно удаленной точки, и будем ее обозначать через G . Множество точек, состоящее из точек области G и ее граничных точек, мы будем называть *замкнутой областью* и обозначать через \bar{G} .

3. Непрерывность функции комплексного переменного. Пусть дана однозначная функция $w = f(z)$ комплексного переменного, определенная в области G плоскости. Мы скажем, что *функция $f(z)$ стремится к пределу A , когда z стремится к точке z_0 области G , если она удовлетворяет условию: для каждого произвольно малого положительного числа ϵ можно определить положительное число $\delta = \delta(\epsilon)$, такое, что имеет место неравенство $|f(z) - A| < \epsilon$ для всех z ($z \neq z_0$), удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$.*

Символически это записывают так:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A. \quad (2)$$

В частности, если $A = f(z_0)$, функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , т. е., по определению, $f(z)$ непрерывна в точке z_0 , если для каждого сколь угодно малого положительного числа ε существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что выполняется неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad (3)$$

для всех z , удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \delta, \quad (4)$$

или, короче:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2')$$

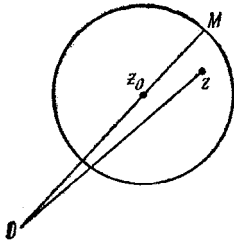


Рис. 16.

Геометрически это определение означает, что для всех точек z , лежащих внутри круга $|z - z_0| < \delta$ с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса δ , соответствующие значения функции $w = f(z)$ изображаются точками, лежащими внутри круга $|w - w_0| < \varepsilon$ с центром в точке $w_0 = f(z_0)$ сколь угодно малого радиуса ε . Мы можем формулировать короче определение непрерывности таким образом: функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , если для всех точек достаточно малой окрестности точки z_0 соответствующие значения функции лежат в произвольно малой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке области G , называется непрерывной в этой области. Например, $w = z^n$ непрерывна в каждой точке z_0 плоскости. Действительно, полагая $w_0 = z_0^n$, имеем:

$$w - w_0 = z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1});$$

переходя к модулям, мы получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |w - w_0| &= |z - z_0| \cdot |z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1}| \leq \\ &\leq |z - z_0| (r^{n-1} + r^{n-2}r_0 + \dots + r_0^{n-1}), \end{aligned}$$

где положено: $|z| = r$, $|z_0| = r_0$. Рассматривая теперь окрестность δ точки z_0 , мы видим, что для всех точек z этой окрестности имеет место очевидное неравенство $r = |z| < OM = r_0 + \delta$ (рис. 16). Поэтому будем иметь:

$$\begin{aligned} |w - w_0| &\leq |z - z_0| \{(r_0 + \delta)^{n-1} + (r_0 + \delta)^{n-2}r_0 + \dots + r_0^{n-1}\} \leq \\ &\leq n\delta(r_0 + \delta)^{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что мы можем δ выбрать столь малым, чтобы $|w - w_0|$ был меньше любого наперед заданного положительного числа ε . Итак, $w = z^n$ есть функция, непрерывная во всей плоскости комплексного переменного z .

Так как определение непрерывности функции комплексного переменного с формальной стороны аналогично соответствующему определению для функции действительного переменного, то доказательство теорем об операциях над непрерывными функциями остаются теми же в комплексной области, что и в действительном анализе. Так, *сумма, разность и произведение двух функций $f(z)$ и $\varphi(z)$, непрерывных в точке z_0 (в области G), есть функция, непрерывная в той же точке (в той же области); также частное таких функций есть функция, непрерывная в точке z_0 (в области G), если $\varphi(z_0) \neq 0$ [если $\varphi(z) \neq 0$ в области G].* Пользуясь этим предложением, мы можем, например, заключить, что любая целая рациональная функция $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ непрерывна во всей плоскости комплексного переменного z ; далее, всякая рациональная функция $w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}$ непрерывна в каждой точке плоскости комплексного переменного z , за исключением тех значений z , при которых знаменатель равен нулю.

Примеры. 1. $f(z) = 0$; $f(z) = \varphi$, если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Это есть функция, однозначно определенная во всей плоскости комплексного переменного z , непрерывная во всякой точке, отличной от точек действительной положительной оси. Будет ли функция непрерывной в этих последних точках? Очевидно, нет, так как в противном случае для всех точек z достаточно малой окрестности точки $z = r$ должно быть $|f(z) - f(r)| < \varepsilon$, т. е. $|f(z)| < \varepsilon$, что не выполняется, если точка z находится на луче, для которого $\varphi > \varepsilon$. Заметим, что если z приближается к точке $z_0 = r$ вдоль положительной действительной оси ($\varphi = 0$), то условие непрерывности выполняется, так как для таких точек все время $|f(z_0) - f(z)| = 0$ и, значит, $|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon$. Однако определение непрерывности функции w в точке z_0 требует, чтобы при произвольном приближении точки z к точке z_0 значение функции w стремилось к w_0 .

2. $w = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Эта функция непрерывна во всей плоскости комплексного переменного z , так как, очевидно, $\lim_{z \rightarrow z_0} |z| = |z_0|$.

3. $w = \arg z$. Это есть функция, определенная во всей плоскости комплексного переменного z , кроме $z = 0$, многозначная, потому что каждый вектор имеет бесконечное множество различных направляющих углов, различающихся друг от друга на кратное 2π . Когда точка z описывает окружность, внутри которой лежит начало координат, то при одном положительном обходе этой окружности $w = \arg z$ возрастает на 2π , при n -кратном обходе — на $2n\pi$. Если же точка z описывает окружность, для которой нулевая точка будет внешней, то $w = \arg z$ после обхода принимает первоначальное значение. Действительно, после обхода окружности (рис. 17) $w = \arg z$ может принять лишь такое значение, которое разнится от начального значения на кратное 2π . Однако вектор z все время остается в угле, образованном двумя касательными к окружности, проведенными из точки $z = 0$; следовательно, $\arg z$ не может принимать значения, которые отличались бы от начального его значения больше, чем на угол между обеими касательными. Так как этот угол меньше π , то при обходе указанной окружности $\arg z$ должен вернуться к первоначальному значению. Отсюда следует, что $w = \arg z$ можно рассматривать как однозначную непрерывную функцию в окрест-

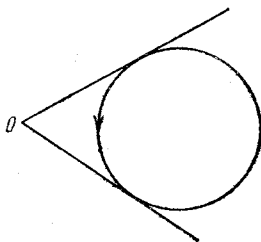


Рис. 17.

ности любой точки z ($z \neq 0$) плоскости, не содержащей нулевой точки. Аналогично можно показать, что $\omega = \arg z$ есть функция, однозначная и непрерывная во всякой односвязной области, не содержащей нулевой точки.

Иногда функция $\omega = f(z)$ рассматривается определенной также и в граничных точках области G , т. е. во всей замкнутой области \bar{G} . Тогда под непрерывностью функции в граничной точке z_0 области \bar{G} понимают следующее: условия непрерывности (3) и (4) выполняются для всех точек z , принадлежащих области G , т. е. точки z , лежащие вне области \bar{G} , оставляют вне рассмотрения. *Функция, непрерывная во всех точках замкнутой области \bar{G} , называется непрерывной в \bar{G} .*

Подобным же образом говорят также о непрерывности вдоль кривой, понимая под этим, что условия непрерывности (3), (4) выполняются только для точек, лежащих на рассматриваемой кривой, не обращая внимания на значения функции в других точках.

Так, в примере 1 функция $f(z)$ непрерывна вдоль действительной положительной оси во всякой точке этой линии, так как в этих точках она все время равна нулю, несмотря на то, что эта функция не будет просто непрерывной ни в какой точке этой линии.

4. Теорема о равномерной непрерывности. Лемма Гейне—Бореля. Функция $\omega = f(z)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области G , обладает свойством, которое выражается следующей теоремой:

Каково бы ни было малое положительное число ϵ , существует число $\delta = \delta(\epsilon)$ такое, что для любых двух точек z' и z'' области \bar{G} , расстояние между которыми $|z' - z''| < \delta$, разность соответствующих значений функции удовлетворяет неравенству

$$|\omega' - \omega''| = |f(z') - f(z'')| < \epsilon.$$

Это свойство выражает, как говорят, равномерную непрерывность функции в замкнутой области \bar{G} . Теорема, следовательно, утверждает, что любая функция, непрерывная в замкнутой области \bar{G} (т. е. непрерывная во всякой точке области \bar{G}), равномерно непрерывна в области \bar{G} .

Из условия непрерывности функции в каждой точке z области \bar{G} следует, что при любом $\epsilon > 0$ существует круг с центром в точке z радиуса ρ_z такой, что для любых двух точек z' и z'' , лежащих внутри этого круга, имеем: $|f(z') - f(z'')| < \epsilon$. С изменением z радиус ρ_z изменяется, и возникает вопрос: не будет ли он становиться меньше сколь угодно малого числа? Сформулированная теорема утверждает, что радиус этого круга можно считать большим некоторого постоянного положительного числа. Доказательство этой теоремы будет основано на следующем вспомогательном предложении, известном под именем леммы Гейне—Бореля:

Если каждая точка z замкнутой и ограниченной области \bar{G} есть центр круга K_z , то существует конечное число этих кругов, покрывающих область G , т. е. таких, что всякая точка области \bar{G} лежит внутри по крайней мере одного из этих кругов.

Для доказательства заключим область \bar{G} внутри квадрата Q_1 со сторонами, параллельными осям координат, и разделим этот квадрат на четыре конгруэнтных квадрата. Предполагая утверждение неверным для области \bar{G} , мы должны допустить, что оно неверно для множества точек области \bar{G} , лежащих хотя бы на одном из этих четырех квадратов. Обозначим такой квадрат через Q_2 и разделим его снова на четыре конгруэнтных квадрата; получим квадрат Q_3 . Продолжая такое разделение дальше, мы получим последовательность квадратов Q_n , каждый из которых содержит часть области \bar{G} , для которой наше утверждение неверно, т. е. для которой необходимо покрытие бесконечно многими кругами K_z . Пусть z_0 есть точка, принадлежащая всем квадратам Q_n (гл. I, § 3, п. 4). Если n достаточно большое, то в произвольной окрестности точки z_0 лежат квадраты Q_n и, следовательно, точки области \bar{G} . Таким образом, точка z_0 принадлежит сама области \bar{G} и является, следовательно, центром круга K_{z_0} . Обозначим радиус этого круга через ρ . Выбирая n столь большим, чтобы диагональ квадрата Q_n была меньше ρ , мы видим, что все точки области \bar{G} , принадлежащие такому Q_n , покрываются с помощью одного круга K_{z_0} , в то время как, по предположению, для покрытия этих точек необходимо бесконечное множество кругов системы K_z . Полученное противоречие убеждает нас в справедливости леммы.

З а м е ч а н и е. Лемма, очевидно, остается верной, если вместо области \bar{G} возьмем непрерывную кривую или вообще любое ограниченное замкнутое множество точек плоскости. Множество точек плоскости называется ограниченным, если оно целиком лежит в конечной части плоскости; оно называется, сверх того, замкнутым, если содержит все свои предельные точки, т. е. точки z плоскости, в произвольных окрестностях которых находятся точки множества, отличные от z .

Обращаясь к доказательству теоремы о равномерной непрерывности, рассмотрим для каждой точки z области \bar{G} круг с центром в z радиуса ρ_z такой, что для любых двух точек z' и z'' , лежащих внутри этого круга, имеет место неравенство $|f(z') - f(z'')| < \epsilon$; это следует непосредственно из непрерывности функции $f(z)$ в каждой точке z области \bar{G} . Как в лемме Гейне—Бореля, поставим в соответствие каждой точке z области \bar{G} круг с центром в этой точке радиуса $\frac{1}{2}\rho_z$. На основании леммы существует система конечного числа таких кругов, покрывающая область \bar{G} . Пусть радиус наименьшего среди этих кругов равен δ ; мы утверждаем, что это число δ удовлетворяет условиям доказываемой теоремы. В самом деле, если $|z' - z''| < \delta$ и точка z' лежит внутри круга

с центром в точке ζ радиуса $\frac{1}{2} \rho_{\zeta}$, то $\delta \leq \frac{1}{2} \rho_{\zeta}$ и, следовательно, точки z' и z'' лежат внутри круга с центром в точке ζ радиуса ρ_{ζ} ; отсюда следует: $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

§ 2. Ряды функций

1. Понятие равномерно сходящегося ряда. Пусть имеем ряд

$$u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots, \quad (5)$$

все члены которого суть однозначные функции комплексного переменного z , определенные в некоторой области G ; предположим, что этот ряд сходится во всякой точке z области G . В этом случае сумма s ряда (5) будет однозначно определена в каждой точке z области G и, следовательно, будет представлять однозначную функцию $s(z)$ в области G . Предположим, что все члены сходящегося ряда (5) суть непрерывные функции в области G ; тогда возникает вопрос: не будет ли и сумма ряда непрерывной функцией? Легко дать примеры, когда сходящиеся ряды непрерывных функций представляют разрывные функции. Возьмем сначала пример из области действительного переменного. Предполагая $0 \leq x \leq 1$, образуем ряд, сумма первых n членов которого $s_n(x)$ равна x^n . Это будет ряд

$$x + (x^2 - x) + \dots + (x^n - x^{n-1}) + \dots$$

Если $0 \leq x < 1$, то $s_n(x) = x^n$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n ; если же $x = 1$, то $s_n(1) = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(1) = 1$.

Следовательно, сумма рассматриваемого ряда $s(x)$ равна нулю при $0 \leq x < 1$ и равна единице при $x = 1$. Итак, сумма $s(x)$ имеет точку разрыва при $x = 1$, несмотря на то, что данный ряд сходится в каждой точке отрезка $0 \leq x \leq 1$ и все его члены — непрерывные функции. Этот пример можно, конечно, рассматривать и с точки зрения комплексного переменного, если заметить, что $x = R(z)$.

В качестве другого примера возьмем ряд

$$z + (z^2 - z) + \dots + (z^n - z^{n-1}) + \dots,$$

предполагая $|z| < 1$ или $z = 1$. Если $|z| < 1$, то сумма его первых n членов $s_n(z) = z^n$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n , потому что $|s_n(z)| = |z|^n$. Если же $z = 1$, то $s_n(1) = 1$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(1) = 1$. Итак, сумма рассматриваемого ряда $s(z)$ равна нулю во всякой точке z , лежащей внутри круга $|z| < 1$, и равна единице в точке $z = 1$ окружности этого круга. Здесь, как

и в первом примере, функция $s(z)$ оказывается разрывной при $z = 1$ и изображается в виде суммы сходящегося ряда непрерывных функций.

Итак, для того чтобы сумма сходящегося ряда непрерывных функций была непрерывной функцией, нужно на этот ряд наложить дополнительное ограничение. Таким ограничением может служить условие равномерной сходимости ряда. Обозначая через $s_n(z)$ сумму первых n членов данного ряда (5), сходящегося в области G , рассмотрим разность $s(z) - s_n(z)$, которая вследствие сходимости ряда стремится к нулю при неограниченном возрастании n для любой точки z области G . Это значит, что выполняется неравенство

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon, \quad (6)$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, если $n \geq N(\varepsilon, z)$. При изменении точки z в области G может случиться, что $N(\varepsilon, z)$ принимает сколь угодно большие значения. В этом случае нельзя найти такое число $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого выполнялось бы неравенство (6) во всей области G . Другая возможность состоит в том, что $N(\varepsilon, z)$ для всех точек области G остается меньше некоторого числа $N = N(\varepsilon)$. В этом случае неравенство (6) выполняется для всех рассматриваемых точек z при $n \geq N = N(\varepsilon)$; в этом случае говорят, что данный ряд (6) сходится равномерно в области G к функции $s(z)$.

Итак, ряд (5), по определению, сходится равномерно в области G к функции $s(z)$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε можно найти такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$, какова бы ни была точка z в области G .

Иными словами, в случае равномерной сходимости ряда его сумму можно аппроксимировать с любой степенью точности ε посредством суммы одного и того же числа n первых членов, принимая $n \geq N = N(\varepsilon)$.

В предыдущем примере $|s(z) - s_n(z)| = |z^n| = |z|^n$, если $|z| < 1$. Для того чтобы выполнялось неравенство $|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$, нужно потребовать, чтобы было $|z|^n < \varepsilon$, откуда $n > \ln \frac{1}{\varepsilon} / \ln \frac{1}{|z|}$. Обозначая через $N(\varepsilon, z)$ наибольшее целое число, содержащееся в количестве $\ln \frac{1}{\varepsilon} / \ln \frac{1}{|z|} + 1$, мы видим, что для выполнения неравенства (6) необходимо, чтобы было $n \geq N(\varepsilon, z)$. Когда $|z|$ стремится к единице, то $N(\varepsilon, z)$ стремится к бесконечности, и, следовательно, нельзя указать натуральное число N , которое было бы больше, чем $N(\varepsilon, z)$, для любого z , $|z| < 1$. Следовательно, этот ряд не будет равномерно сходиться в круге, $|z| < 1$. Однако этот ряд будет равномерно сходящимся

во всяком круге $|z| \leq r$, $r < 1$. В самом деле, так как $\ln \frac{1}{|z|} \geq \ln \frac{1}{r}$, то

$$\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{|z|}} \leq \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{r}},$$

и, следовательно, обозначая через $N = N(\varepsilon)$ наибольшее натуральное число, содержащееся в выражении $\ln \frac{1}{\varepsilon} / \ln \frac{1}{r} + 1$, имеем: $N(\varepsilon, z) \leq N = N(\varepsilon)$, каково бы ни было z , $|z| \leq r$.

2. Теорема о непрерывности суммы ряда. Если ряд (5) сходится равномерно в области G и все члены этого ряда суть непрерывные функции в точке z_0 области, то и сумма ряда будет непрерывной функцией в той же точке.

Для доказательства теоремы обозначим через $z_0 + h$ любую точку области G и посмотрим, как изменяется сумма ряда $s(z)$, когда мы переходим от точки z_0 к точке $z_0 + h$, т. е. оценим модуль разности $s(z_0 + h) - s(z_0)$.

Обозначая через $s_N(z)$ сумму первых N членов ряда (5), представим эту разность так:

$$s(z_0 + h) - s(z_0) = [s(z_0 + h) - s_N(z_0 + h)] + [s_N(z_0 + h) - s_N(z_0)] + [s_N(z_0) - s(z_0)],$$

откуда получаем:

$$|s(z_0 + h) - s(z_0)| \leq |s(z_0 + h) - s_N(z_0 + h)| + |s_N(z_0 + h) - s_N(z_0)| + |s(z_0) - s_N(z_0)|. \quad (7)$$

Вследствие равномерной сходимости данного ряда мы можем при любом $\varepsilon > 0$ выбрать натуральное число $N = N(\varepsilon/3)$ так, чтобы выполнялось неравенство $|s(z) - s_N(z)| < \varepsilon/3$, какова бы ни была точка z области G . В частности, полагая здесь $z = z_0$ и $z = z_0 + h$, имеем два неравенства:

$$|s(z_0) - s_N(z_0)| < \varepsilon/3, \quad (8)$$

$$|s(z_0 + h) - s_N(z_0 + h)| < \varepsilon/3. \quad (9)$$

С другой стороны, заметим, что $s_N(z)$ как сумма конечного числа функций, непрерывных в точке z_0 , есть функция, непрерывная в этой точке (гл. II, § 1, п. 3). Следовательно, считая $|h|$ достаточно малым, $|h| < \delta = \delta(\varepsilon/3)$, можно написать:

$$|s_N(z_0 + h) - s_N(z_0)| < \varepsilon/3. \quad (10)$$

Наконец, из неравенства (7) путем сложения неравенств (8), (9) и (10) следует:

$$|s(z_0 + h) - s(z_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

если $|h| < \delta$, что доказывает непрерывность функции $s(z)$ в точке z_0 .

С л е д с т в и е. Ряд функций, непрерывных в области G , равномерно сходящийся в этой области, изображает функцию, непрерывную в той же области.

Действительно, так как все члены ряда суть непрерывные функции в каждой точке области G , то согласно теореме сумма ряда должна быть непрерывной функцией в каждой точке области G , т. е. всюду в области.

3. Признак равномерно сходящегося ряда. Весьма часто можно заключить о равномерной сходимости ряда (5) на основании следующего простого признака:

Если все члены ряда (5) в области G удовлетворяют условию

$$|u_n(z)| \leq a_n, \quad (11)$$

где a_n — постоянные положительные числа, причем числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (12)$$

сходится, то данный ряд (5) сходится равномерно (и притом абсолютно) в области G . Действительно, ряд

$$|u_1(z)| + |u_2(z)| + \dots + |u_n(z)| + \dots$$

сходится во всякой точке z области G , так как его члены не больше соответствующих членов a_n сходящегося ряда (12). Следовательно, данный ряд (5) абсолютно сходится в каждой точке z области G . Обозначая через $s(z)$ и $s_n(z)$ соответственно сумму ряда (5) и сумму первых n его членов, получим:

$$|s(z) - s_n(z)| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \quad (13)$$

Так как ряд (12), по условию, сходится, то его остаточный член $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ будет меньше ϵ , каково бы ни было $\epsilon > 0$, начиная с достаточно большого $n \geq N = N(\epsilon)$.

Таким образом, из неравенства (13) получаем:

$$|s(z) - s_n(z)| < \epsilon \quad \text{при} \quad n \geq N = N(\epsilon),$$

независимо от точки z области G , что и доказывает равномерную сходимость ряда (5) в области G . В качестве примера рассмотрим ряд

$$z + (z^2 - z) + \dots + (z^n - z^{n-1}) + \dots,$$

равномерную сходимость которого мы уже обнаружили при

$$|z| \leq r, \quad r < 1$$

(гл. II, § 2, п. 1). Здесь $u_n(z) = z^n - z^{n-1}$, следовательно:

$$|u_n(z)| = |z^n - z^{n-1}| = |z|^{n-1} |z - 1| \leq r^{n-1} (r + 1) = a_n.$$

Так как ряд с общим членом $a_n = r^{n-1}(r+1)$ при $r < 1$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то на основании доказанного признака рассматриваемый ряд должен сходиться равномерно (и абсолютно) при $|z| \leq r$, $r < 1$.

§ 3. Степенные ряды

1. Понятие области сходимости степенного ряда. В теории функций комплексного переменного особо важное значение имеет класс так называемых *степенных рядов*.

Степенным рядом называется ряд вида

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots, \quad (14)$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ суть постоянные комплексные числа, а z — независимое комплексное переменное.

Ряд (14) представляет собой частный случай общего ряда (5) функций, когда общий член $u_n(z) = c_nz^n$. *Областью сходимости степенного ряда (14) назовем множество всех точек z плоскости, в которых этот ряд сходится.* Очевидно, всякий ряд вида (14) сходится при $z = 0$, т. е. нулевая точка принадлежит всегда области сходимости. Естественно возникает вопрос: существуют ли такие степенные ряды, области сходимости которых состоят из единственной нулевой точки? Примером такого ряда может служить ряд

$$1 + z + 2^2z^2 + \dots + n^nz^n + \dots,$$

общий член которого n^nz^n в случае любого $z \neq 0$ стремится к бесконечности при неограниченном возрастании n , так как, начиная с некоторого достаточно большого n , будет $n|z| > 2$ и, следовательно, $|n^nz^n| = (n|z|)^n > 2^n$. Итак, этот ряд расходится при любом $z \neq 0$. Оставляя в стороне класс таких рядов, предположим, что ряд (14) сходится в некоторой точке z_0 , отличной от нулевой точки; в этом случае имеет место следующая теорема:

2. Первая теорема Абеля. *Если степенной ряд (14) сходится при $z = z_0$, то он сходится, и притом абсолютно, при всяком z , для которого $|z| < |z_0|$.*

В терминах геометрии это предложение Абеля может быть формулировано так: *если степенной ряд (14) сходится в точке z_0 , то он абсолютно сходится во всякой точке, лежащей внутри окружности с центром в нулевой точке, проходящей через точку z_0 (рис. 18).*

Вследствие условия ряд

$$c_0 + c_1z_0 + c_2z_0^2 + \dots + c_nz_0^n + \dots$$

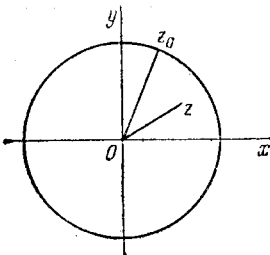


Рис. 18.

следовательно, рассматриваемый ряд абсолютно сходится при всяком z .

Наконец, к третьему типу мы отнесем всякий степенной ряд, не принадлежащий ни к первому, ни ко второму типу. Исследуем область сходимости ряда последнего вида. Такой ряд имеет, с одной стороны, точки сходимости, отличные от нулевой точки, а с другой стороны, он имеет точки расходимости. Проведем из нулевой точки произвольную полупрямую и отметим на ней какую-нибудь точку сходимости A ряда, отличную от нулевой точки, и какую-нибудь точку расходимости B нашего ряда. Так как наш ряд принадлежит

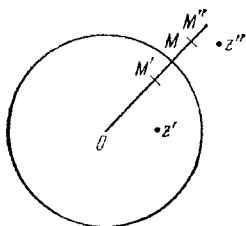


Рис. 19.

к третьему типу, то на основании теоремы Абеля точки A и B на полупрямой существуют. Обозначим через I_1 отрезок AB . Разделим отрезок I_1 пополам, и пусть A_1 есть его середина. Возможно одно из двух: либо в точке A_1 ряд сходится, либо расходится. В первом случае за второй отрезок I_2 примем A_1B , во втором случае AA_1 . Подобно отрезку I_1 отрезок I_2 имеет левым своим концом точку сходимости ряда, а правым — точку расходимости ряда. Затем снова делим пополам отрезок I_2 , и если его середина есть точка сходимости ряда, то за отрезок I_3 принимаем правую его половину, а если середина отрезка I_2 есть точка расходимости ряда, то за отрезок I_3 принимаем левую половину отрезка I_2 . Продолжая этот процесс неограниченно, получим бесконечную последовательность отрезков $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$ таких, что каждый отрезок принадлежит предыдущему, причем длина отрезка I_n , равная $\frac{\text{дл. } I_1}{2^n}$, стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Кроме того, отметим, что всякий отрезок I_n имеет своим левым концом точку сходимости ряда, а правым — точку расходимости ряда. На основании принципа вложенных отрезков (гл. I, § 3, п. 1) существует точка, общая всем отрезкам I_n ; обозначим ее через M .

Проведя через точку M окружность с центром в нулевой точке (рис. 19), мы видим, что данный ряд абсолютно сходится во всякой точке, лежащей внутри этой окружности. Действительно, пусть z' — любая точка, расположенная внутри проведенной окружности. Выберем на радиусе OM внутреннюю точку M' , служащую левым концом отрезка I_n , так, чтобы $Oz' < OM'$. Так как в точке M' данный ряд сходится, то по теореме Абеля он будет абсолютно сходящимся в точке z' . Во всякой точке z'' , лежащей вне построенной окружности, данный ряд расходится. В самом деле, выберем вне радиуса OM на луче OM точку M'' , служащую правым концом отрезка I_n , так, чтобы $Oz'' > OM''$. Так как в точке M'' ряд расходится, то по теореме Абеля он будет расходящимся и в точке z'' .

Полагая $OM = R$, мы можем все сказанное резюмировать в таких словах:

Существует круг с центром в нулевой точке радиуса R такой, что данный степенной ряд сходится (и притом абсолютно) внутри этого круга и расходится вне этого круга.

Чтобы это предложение было верным для любого степенного ряда, остается включить сюда ряды двух первых типов. В первом случае (область сходимости состоит из одной нулевой точки) нужно, очевидно, положить $R = 0$, а во втором случае (ряд сходится во всей плоскости) нужно положить $R = +\infty$.

Этот круг радиуса R называют *кругом сходимости* степенного ряда, а число R — его *радиусом сходимости*. Согласно изложенному всякий степенной ряд имеет определенный радиус сходимости R , причем $0 \leq R \leq +\infty$. Что касается точек, лежащих на окружности круга сходимости ($0 < R < +\infty$), то в одних из этих точек ряд может сходиться, в других расходиться.

Мы показали, что всякий степенной ряд (14) имеет круг сходимости определенного радиуса R . Задача, которую мы теперь поставим, состоит в том, чтобы определить радиус сходимости степенного ряда в зависимости от его коэффициентов. Полное решение этой задачи может быть дано с помощью понятия о наибольшем пределе последовательности действительных неотрицательных чисел, какое мы и должны предварительно выяснить.

4. Понятие наибольшего предела. Пусть дана последовательность действительных неотрицательных чисел ¹⁾:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (16)$$

Может случиться, что последовательность чисел (16) неограниченная, т. е. среди чисел (16) найдутся числа, большие любого наперед заданного положительного числа. В этом случае условимся говорить, что наибольший предел l последовательности чисел (16) равен $+\infty$. Второй случай будет тот, когда последовательность чисел (16) ограниченная, $a_n < A$, т. е. все точки, изображающие числа (16), лежат на конечном отрезке $[0, A]$. Как мы знаем, ограниченная последовательность точек имеет по крайней мере одну предельную точку (гл. I, § 3, п. 4); вообще говоря, множество всех предельных точек нашей последовательности (16) будет бесконечным множеством (обозначим его через E), лежащим на отрезке $[0, A]$. Когда мы имеем конечное число точек отрезка, то среди них имеется одна точка, лежащая правее всех остальных. В случае бесконечного множества точек, расположенных на конечном отрезке, может случиться, что у множества нет самой правой точки. Например, множество точек отрезка $[0, 1]$: $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots$,

¹⁾ Мы ограничиваемся рассмотрением наибольшего предела последовательности неотрицательных чисел, так как для дальнейших приложений нам этого достаточно.

не имеет точки, которая была бы расположена правее всех остальных. Однако такого обстоятельства не может быть для рассматриваемого множества E предельных точек.

Действительно, легко показать, что среди точек множества E предельных точек ограниченной последовательности (16) существует точка, лежащая правее всех остальных. С этой целью разделим отрезок OA , который мы обозначим через I_1 , пополам, и пусть A_1 есть его середина. Возможно одно из двух: либо отрезок A_1A содержит бесконечное множество точек данной последовательности, либо нет. В первом случае за второй отрезок I_2 примем A_1A , во втором случае OA_1 . Подобно отрезку I_1 отрезок I_2 содержит бесконечное множество точек данной последовательности. Затем снова делим пополам отрезок I_2 , и если правая его половина содержит бесконечное множество точек данной последовательности, то за отрезок I_3 принимаем правую его половину, а если правая половина отрезка I_2 содержит конечное число точек последовательности [в частности, совсем лишена точек (16)], то за отрезок I_3 принимаем левую половину отрезка I_2 . Продолжая этот процесс неограниченно, получим бесконечную последовательность отрезков $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$ таких, что каждый отрезок принадлежит предыдущему, причем длина отрезка I_n , равная $\frac{\text{дл. } I_1}{2^n}$, стремится к нулю,

когда n неограниченно возрастает. Кроме того, отметим, что всякий отрезок I_n содержит бесконечное множество точек данной последовательности, причем правее его может находиться лишь конечное число таких точек.

На основании принципа вложенных отрезков (гл. I, § 3, п. 1) существует точка, общая всем отрезкам I_n , которую мы обозначим через A_* .

Докажем теперь, что A_* есть самая правая предельная точка данной последовательности. Для этого мы покажем, во-первых, что никакая точка, лежащая правее A_* , не может быть предельной точкой для данной последовательности и, во-вторых, что A_* есть предельная точка. Действительно, пусть A' лежит правее A_* . Выбирая n достаточно большим, мы можем считать, что точка A' лежит правее отрезка I_n . Но вправо от отрезка I_n может находиться лишь конечное число точек данной последовательности и, следовательно, точка A' не может для нее быть предельной. Сама же точка A_* , очевидно, есть предельная для данной последовательности, потому что произвольная окрестность этой точки содержит отрезок I_n (если n достаточно велико), на котором лежит бесконечное множество точек данной последовательности.

Итак, множество E предельных точек ограниченной последовательности (16) имеет точку, лежащую правее всех остальных точек множества E . Число, соответствующее этой «самой правой» предельной точке, будет предельным числом данной последовательности чисел (16), наибольшим среди всех предельных чисел этой

последовательности. Таким образом, мы доказали существование конечного числа l , наибольшего среди предельных чисел ограниченной последовательности (16) неотрицательных чисел. Согласно предыдущему всякая последовательность неотрицательных чисел имеет наибольший предел l , конечный или равный $+\infty$, т. е. $0 \leq l \leq +\infty$. Символически это записывают так: $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Так как любое предельное число последовательности неотрицательных чисел не меньше нуля, то в случае $l = 0$ данная последовательность чисел (16) должна сходиться к нулю.

5. Определение радиуса сходимости. Отправляясь от коэффициентов степенного ряда (14), образуем последовательность чисел:

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \sqrt[n]{|c_n|}, \dots \quad (17)$$

Все члены этой последовательности рассматриваются как действительные неотрицательные числа.

Обозначим через l наибольший предел последовательности чисел (17) $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Тогда радиус сходимости R степенного ряда

(14) определяется по формуле

$$R = \frac{1}{l}. \quad (18)$$

Эта формула носит название формулы Коши—Адамара.

З а м е ч а н и е. В случае $l = 0$ в формуле (18) нужно положить $R = +\infty$, в случае $l = +\infty$ необходимо принять $R = 0$.

При выводе формулы (18) мы рассмотрим отдельно три случая

- | | | |
|----|-------------------|-------------------|
| 1) | $l = +\infty$ | $(R = 0)$, |
| 2) | $l = 0$ | $(R = +\infty)$, |
| 3) | $0 < l < +\infty$ | $(R = 1/l)$. |

В случае 1) ($l = +\infty$) последовательность чисел (17) неограниченная. Нам нужно доказать, что степенной ряд (14) расходится во всякой точке z , отличной от нулевой точки. Допуская противное, предположим, что ряд (14) сходится в некоторой точке $z_0 \neq 0$. Тогда имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ (гл. 1, § 5, п. 2); следовательно, существует

постоянное положительное число g такое, что выполняется неравенство $|c_n z_0^n| < g$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Мы можем предполагать число g большим единицы. Из последнего неравенства путем извлечения из обеих его частей корня n -й степени следует: $\sqrt[n]{|c_n|} \times |z_0| < \sqrt[n]{g}$, или $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{g}{|z_0|}$, так как $\sqrt[n]{g} < g$ ($g > 1$).

Таким образом, последовательность чисел (17) оказывается ограниченной. Полученное противоречие убеждает нас в расхождении ряда (14) при любом $z \neq 0$.

В случае 2) ($l = 0$) нам нужно показать, что ряд (14) сходится в любой точке $z = z_0$. Так как последовательность чисел (17) сходится к нулю, то, начиная с достаточно большого n , имеем:

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon,$$

например

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_0|},$$

откуда

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z_0| < 1/2,$$

или, по возведении в степень n :

$$|c_n| |z_0|^n = |c_n z_0^n| < 1/2^n.$$

Так как ряд с общим членом $1/2^n$ сходится, то абсолютно сходится и ряд с общим членом $c_n z_0^n$.

Если, наконец, l есть конечное число, отличное от нуля, то доказательство формулы (18) сводится к следующему: ряд (14) абсолютно сходится при любом $z = z_1$, для которого $|z_1| < 1/l$, и расходится для каждого $z = z_2$, для которого $|z_2| > 1/l$.

Так как l есть наибольший предел последовательности чисел (17), то имеем, начиная с достаточно большого n :

$$\sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon, \quad (19)$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. Заметив, что $l|z_1| < 1$, положим $\varepsilon = \frac{1-l|z_1|}{2|z_1|}$. Неравенство (19) примет вид

$$\sqrt[n]{|c_n|} < l + \frac{1-l|z_1|}{2|z_1|} = \frac{1+l|z_1|}{2|z_1|},$$

или

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z_1| < \frac{1+l|z_1|}{2} = q < 1. \quad (20)$$

Возводя обе части неравенства (20) в степень n , найдем:

$$|c_n| |z_1|^n < q^n, \quad \text{или} \quad |c_n z_1^n| < q^n. \quad (21)$$

Так как ряд с общим членом q^n , $q < 1$, сходится, то в силу (21) абсолютно сходится данный степенной ряд при $z = z_1$.

С другой стороны, из определения l как предельного числа последовательности чисел (17) следует, что при бесконечно многих значениях n имеем:

$$\sqrt[n]{|c_n|} > l - \varepsilon, \quad (22)$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Заметив, что $l|z_2| > 1$, положим $\varepsilon = \frac{l|z_2| - 1}{|z_2|}$. Неравенство (22) перепишется так:

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|z_2|}, \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z_2| > 1,$$

что по возведении в степень n дает:

$$|c_n| \cdot |z_2|^n > 1, \quad \text{или} \quad |c_n z_2^n| > 1.$$

Так как последнее неравенство имеет место для бесконечного множества значений n , то $c_n z_2^n$ не может стремиться к нулю при неограниченном возрастании n . Отсюда следует расходимость данного ряда (14) при $z = z_2$ (гл. I, § 5, п. 2).

Примеры. 1. Радиус сходимости ряда $1 + z + z^4 + z^9 + \dots$ равен единице. В самом деле, здесь $c_n = 1$, если n — квадрат целого числа, и равно 0 в противном случае. Таким образом, $\sqrt[n]{|c_n|} = 1$ или 0, смотря по тому, имеем ли мы первый или второй случай. Предельные числа последовательности (17) будут 0 и 1. Следовательно, $l = 1$ и $R = 1$.

2. Радиус сходимости ряда

$$1 + \frac{z}{1^s} + \frac{z^2}{2^s} + \dots + \frac{z^n}{n^s} + \dots$$

равен единице. Действительно,

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{n^{\frac{s}{n}}} = \frac{1}{e^{\frac{s \ln n}{n}}}.$$

Так как $\frac{\ln n}{n}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то $\sqrt[n]{|c_n|}$ стремится к единице. Следовательно, $l = 1$ и $R = 1$.

3. Ряд $1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$ сходится во всей плоскости комплексного переменного z . Действительно, $(n!)^2 = (1 \cdot n) [2(n-1)] \dots (n \cdot 1)$. Каждая скобка правой части последнего равенства не меньше n , так как имеем:

$$a(n-a+1) - n = (a-1)(n-a) \geq 0 \quad (a = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, получаем $(n!)^2 > n^n$, или $n! > (\sqrt{n})^n$, далее $\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{n}$, т. е.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \quad \text{откуда} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0, \quad \text{т. е.} \quad l = 0.$$

Следовательно, $R = \infty$.

4. Аналогичным образом можно показать, что ряды

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \quad z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

сходятся во всей плоскости комплексного переменного z , а ряд $1 + z + 2!z^2 + \dots + n!z^n + \dots$ сходится лишь в нулевой точке ($R = 0$).

Мы указывали, что на окружности круга сходимости степенной ряд в разных случаях может вести себя различно. Так, взяв пример 2 при $s = 0, 1$ и 2 , получаем три ряда, для которых $R = 1$:

$$1 + z + z^2 + \dots, \quad 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \dots, \quad 1 + \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots$$

Первый ряд расходится во всех точках окружности $|z| = 1$; последний сходится во всех точках этой окружности, а второй ряд сходится в одних точках этой окружности (например, при $z = -1$) и расходится в других (при $z = 1$)¹⁾.

Исследованию вопроса о сходимости степенного ряда на окружности его круга сходимости посвящены многочисленные работы, в которых дается освещение этой проблемы с различных точек зрения.

6. Равномерная сходимость степенного ряда. Мы видели, что степенной ряд

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (14)$$

абсолютно сходится во всякой точке внутри его круга сходимости. Возникает вопрос: не будет ли ряд (14) равномерно сходящимся внутри его круга сходимости, т. е. при $|z| < R$? На вопрос в такой формулировке нужно ответить отрицательно; так, ряд

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

не будет равномерно сходящимся при $|z| < 1$. В самом деле, с одной стороны, имеем $|1 + z + z^2 + \dots + z^N| < N + 1$ независимо от z , если $|z| < 1$. С другой стороны, когда z стремится к единице, $|z| < 1$, функция $\frac{1}{1-z}$ стремится к бесконечности. Таким

образом, модуль разности $\frac{1}{1-z} - (1 + z + z^2 + \dots + z^N)$ не может оставаться меньше любого наперед заданного положительного числа независимо от z , $|z| < 1$. Однако всякий степенной ряд равномерно сходится в круге $|z| \leq r$, если $r < R$. Действительно, $|c_n z^n| = |c_n| |z|^n \leq |c_n| r^n$, и так как числовой ряд с общим членом $|c_n| r^n$ сходится ($r < R$), то в силу признака равномерно сходящихся рядов (гл. II, § 2, п. 3) данный ряд сходится равномерно.

Заметив, что члены степенного ряда (14) суть непрерывные функции, из доказанного мы заключаем [на основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда (гл. II, § 2, п. 2)]:

Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная при $|z| \leq r$ каково бы ни было r , $r < R$, а, значит, и при $|z| < R$, т. е. внутри всего круга сходимости. Итак, степенной ряд, для которого $R > 0$, изображает непрерывную функцию внутри его круга сходимости.

¹⁾ Можно было бы показать, что этот ряд расходится лишь при $z = 1$, в остальных же точках окружности $|z| = 1$ сходится.

7. Вторая теорема Абеля. Мы видели, что степенной ряд

$$P(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots \quad (14')$$

может сходиться в точках, лежащих на окружности его круга сходимости. Во всякой такой точке z_0 , $|z_0| = R$, функция $P(z)$ имеет определенное конечное значение, и возникает вопрос: каким образом это значение $P(z_0)$ связано со значениями $P(z)$ в точках z , внутренних к кругу сходимости?

На этот вопрос дает ответ следующая теорема, принадлежащая Абелю:

Если степенной ряд (14') сходится в точке z_0 окружности его круга сходимости, то его сумма $P(z)$ стремится к пределу $P(z_0)$, когда точка z стремится к z_0 , оставаясь на радиусе Oz_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0).$$

Другими словами, сумма $P(z)$ ряда (14') есть функция, непрерывная в точке z вдоль радиуса Oz_0 .

Не уменьшая общности теоремы, мы можем предполагать радиус сходимости равным единице и $z_0 = 1$. Действительно, полагая $z = z_0\zeta$, получим $P(z) = P(z_0\zeta) = Q(\zeta)$, причем радиус сходимости преобразованного ряда $Q(\zeta)$ будет единица, потому что неравенство $|z| < |z_0|$ равносильно неравенству $|\zeta| < 1$; точке $z = z_0$ будет соответствовать точка $\zeta = 1$. Так как по условию ряд (14') сходится при $z = z_0$, то ряд $Q(\zeta)$ будет сходящимся при $\zeta = 1$. Далее, мы можем ради простоты предполагать $P(1) = 0$, так как в противном случае вместо $P(z)$ взяли бы $P(z) - P(1)$. Итак, пусть данный ряд (14') имеет радиус сходимости $R = 1$ и сходится в точке $z = 1$ к значению 0. Нужно доказать, что

$$\lim_{z \rightarrow 1} P(z) = 0, \quad (23)$$

если z остается положительным и $z < 1$. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, \quad (24)$$

радиус сходимости которого тоже равен единице. Перемножая ряды (14') и (24) что возможно в силу их абсолютной сходимости при $|z| < 1$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{1-z} &= (c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots)(1 + z + z^2 + \dots) = \\ &= c_0 + (c_0 + c_1)z + (c_0 + c_1 + c_2)z^2 + \dots, \end{aligned}$$

или

$$\frac{P(z)}{1-z} = s_0 + s_1z + s_2z^2 + \dots + s_nz^n + \dots, \quad (25)$$

где $s_n = c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n$ представляет частичную сумму ряда $P(1)$. Ряд (25) имеет радиус сходимости, равный единице.

В самом деле, его радиус сходимости R не может быть, очевидно, меньше единицы, так как этот ряд получился в результате умножения рядов (14') и (24) с радиусами сходимости, равными единице; с другой стороны, R не может быть больше единицы, так как в противном случае ряд

$$P(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \quad (26)$$

имел бы радиус сходимости больше единицы, что невозможно.

Желая оценить $P(z)$, обозначим через m натуральное число, пока произвольное, и перепишем (26) в виде

$$P(z) = (1-z) \cdot \sum_{n=0}^m s_n z^n + (1-z) \sum_{n=m+1}^{\infty} s_n z^n. \quad (27)$$

Пусть ε — данное сколь угодно малое положительное число. Выберем m столь большим, чтобы при $n > m$ имело место неравенство $|s_n| < \varepsilon/2$, что возможно, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$. Из равенства (27) находим, вспомнив, что z — положительное число, меньшее единицы:

$$|P(z)| < (1-z)M + \frac{\varepsilon}{2}(1-z) \sum_{m+1}^{\infty} z^n,$$

где

$$M = |s_0| + |s_1| + \dots + |s_m|$$

и, следовательно, не зависит от z . Так как $\sum_{m+1}^{\infty} z^n = \frac{z^{m+1}}{1-z}$, то последнее неравенство имеет вид

$$|P(z)| < (1-z)M + \frac{\varepsilon}{2} z^{m+1} < (1-z)M + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (28)$$

До сих пор z было произвольным положительным числом, меньшим единицы. Считая теперь $1-z < \varepsilon/(2M)$, из (28) будем иметь:

$$|P(z)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

что убеждает нас в справедливости теоремы.

Анализируя это доказательство, читатель обнаружит, что теорема справедлива и в том случае, когда z любым образом приближается к z_0 , оставаясь внутри какого-либо угла раствора, меньшего π , с вершиной в точке z_0 и с биссектрисой вдоль радиуса Oz_0 .

Теорема Абеля имеет в анализе многочисленные приложения. Так, известно, что $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ ($-1 < x < +1$). При $x = 1$ этот ряд будет $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ и,

следовательно, сходится. По доказанной теореме Абеля сумма последнего ряда равна:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \ln 2, \quad \text{т. е.} \quad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

С помощью теоремы Абеля можно распространить теорему об умножении абсолютно сходящихся рядов на случай рядов, условно сходящихся. Действительно, имея два сходящихся ряда с комплексными членами:

$$\left. \begin{aligned} s &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \\ s' &= u'_1 + u'_2 + u'_3 + \dots + u'_n + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

составим их произведение:

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n + \dots, \quad (30)$$

где положено: $\omega_n = u_1 u'_n + u_2 u'_{n-1} + \dots + u_n u'_1$.

Предположим, что ряд (30) сходится, и обозначим его сумму через S . В этом случае можно доказать, что $S = s \cdot s'$, т. е. два любых сходящихся ряда (29) можно перемножить по известному правилу (гл. I, § 5, п. 7), если в результате получается сходящийся ряд (30).

Для доказательства образуем два степенных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n z^n. \quad (29')$$

Так как при $z = 1$ по условию оба эти ряда сходятся, то они абсолютно сходятся при $|z| < 1$ (гл. II, § 3, п. 2). Вследствие этого мы можем их перемножить по известному правилу (гл. I, § 5, п. 7):

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n \sum_{n=1}^{\infty} u'_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n z^n. \quad (31)$$

Так как ряды (29) и (30) сходятся согласно условию, то по второй теореме Абеля имеем:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} u'_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n, \quad \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n.$$

Заметив это, из равенства (31) путем перехода к пределу получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} u'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n, \quad \text{или} \quad ss' = S.$$

§ 4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Элементарные функции

1. **Понятие производной.** Пусть $w = f(z)$ есть однозначная функция, определенная в области G плоскости комплексного переменного z . Определение дифференцируемости по комплексному

переменному с формальной стороны совершенно аналогично соответствующему определению для функций действительного переменного. Мы скажем, что *функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z области G , если отношение*

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad (32)$$

где $z+h$ — любая точка области, стремится к определенному конечному пределу, когда $\Delta z = h$ любым образом стремится к нулю при постоянном z . Предел этого отношения (32) мы назовем *производной функции $f(z)$ в точке z* и обозначим через $f'(z)$, так что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z). \quad (33)$$

Равенство (33) означает следующее: при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и данном z найдется соответствующее положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что неравенство $\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| < \varepsilon$ имеет место для всех h , для которых $|h| < \delta$.

Функция $w = f(z)$, дифференцируемая в точке z , называется *моногой* в этой точке.

2. Понятие функции, аналитической в области. Если функция $w = f(z)$ является моногой в каждой точке области G , то мы скажем, что она *аналитическая в области G* . Следовательно, по определению однозначная функция называется аналитической в области G , если в каждой точке этой области она имеет определенную конечную производную.

Таким образом, функция может быть аналитической только в некоторой области; однако и о каждой отдельной точке такой области говорят, что в ней наша функция аналитическая. При этом важно заметить, что функция, аналитическая в точке, по определению должна быть аналитической в некоторой окрестности этой точки. Так, например, функция $w = zR(z)$, непрерывная во всей плоскости, имеет в точке $z = 0$ производную, равную нулю, потому что отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{hR(h)}{h} = R(h)$ стремится к нулю вместе с h . Эта функция, моногой в нулевой точке, не будет аналитической в этой точке, так как в любой другой точке плоскости эта функция не будет дифференцируемой. В самом деле, отношение

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{(z+h)R(z+h) - zR(z)}{h} = \\ &= z \frac{R(z+h) - R(z)}{h} + R(z+h) \end{aligned}$$

при $z \neq 0$ не стремится к определенному пределу, когда h стремится к нулю. Это будет очевидным, если положим $h = h_1 + h_2i$ и заметим, что отношение

$$\frac{R(z+h) - R(z)}{h} = \frac{h_1}{h_1 + h_2i}$$

имеет предел, равный единице при $h_2 = 0$ и h_1 , стремящемся к нулю, и это же отношение стремится к нулю при $h_1 = 0$ и h_2 , стремящемся к нулю.

Приведенный пример дает функцию, непрерывную во всей плоскости и нигде не дифференцируемую, кроме $z = 0$. Взяв $\omega = R(z)$, аналогично предыдущему мы показали бы, что эта функция, непрерывная во всей плоскости, нигде не дифференцируема. Другим примером непрерывной и нигде не дифференцируемой функции может служить: $\omega = \bar{z} = x - yi$. Таким образом, мы видим, что весьма легко образовать примеры непрерывных функций комплексного переменного, лишенных производных в каждой точке плоскости. Простота образования таких функций объясняется тем, что требование дифференцируемости функции в точке по комплексному переменному гораздо более сильное, нежели по действительному переменному. Действительно, предполагая дифференцируемость функции $\omega = f(z)$ в точке z , мы считаем, что предел отношения $\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ будет одним и тем же числом

независимо от направления, по которому переменная точка $z + h$ приближается к постоянной точке z . Еще более сильным будет требование дифференцируемости функции в каждой точке области; отсюда становится понятным, что функции, аналитические в области, должны обладать рядом специфических свойств, присущих только им одним среди множества всех функций комплексного переменного. Основная задача настоящего руководства и состоит в том, чтобы выявить основные замечательные свойства таких функций. Так как определение производной функции комплексного переменного совершенно аналогично с формальной стороны соответствующему определению для функции действительного переменного, то все известные из дифференциального исчисления правила дифференцирования легко могут быть перенесены в комплексную область. Отсюда, в частности, следует, что целая рациональная функция есть аналитическая во всей плоскости; функция рациональная есть аналитическая во всей плоскости комплексного переменного, кроме точек, в которых ее знаменатель обращается в нуль.

3. Понятие дифференциала. Подобно производной понятие дифференциала для функций комплексного переменного с формальной стороны аналогично соответствующему понятию дифференциала функции действительного переменного.

Вспомнив, что производная функции комплексного переменного $w = f(z)$ в точке b определяется как

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

имеем:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \eta, \quad (34)$$

где η стремится к нулю вместе с Δz . Из равенства (34) находим:

$$\Delta w = f'(z) \cdot \Delta z + \eta \Delta z. \quad (35)$$

Последняя формула (35) показывает, что бесконечно малое приращение функции Δw есть сумма двух бесконечно малых величин: $f'(z) \Delta z$ и $\eta \Delta z$. Эти две бесконечно малые величины разной природы. Первая из них равна произведению Δz на величину $f'(z)$, не зависящую от Δz , и при $f'(z) \neq 0$ является бесконечно малой того же порядка, что и Δz ; отношение же второй величины к Δz , равное η , стремится к нулю вместе с Δz , т. е. второе слагаемое формулы (35) всегда есть бесконечно малая величина высшего порядка относительно Δz .

Первое слагаемое формулы (35) $f'(z) \Delta z$ называется *линейной частью* приращения Δw , или, иначе, *дифференциалом* функции w , и обозначается так:

$$dw = f'(z) \Delta z. \quad (36)$$

В частности, при $w = z$ из равенства (36) находим: $dz = 1 \cdot \Delta z$, т. е. дифференциал независимого переменного совпадает с его приращением. Заменяя в формуле (36) Δz через dz , получаем:

$$dw = f'(z) dz, \quad (36')$$

откуда

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df(z)}{dz}, \quad (37)$$

т. е. дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал независимого переменного; производная же равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Формула (35) получена в предположении, что функция $w = f(z)$ в точке z имеет конечную производную. Из этой формулы усматриваем, что при Δz бесконечно малом Δw тоже бесконечно мало, а это значит, что данная функция непрерывна в точке z , т. е. *всякая функция, дифференцируемая в точке, необходимо непрерывна в этой точке.*

4. Условия Коши—Римана (С.—R.). Пусть $w = f(z) = u + iv$ есть однозначная функция комплексного переменного $z = x + iy$, определенная в области G . Эта функция будет известна, если даны две функции u и v двух действительных переменных

x, y . Если функции u и v взять независимо друг от друга, то функция $f(z)$, вообще говоря, не будет дифференцируемой, несмотря на то, что обе функции u и v имеют каждая частные производные относительно x и y .

Так, в вышеуказанном примере $w = \bar{z} = x - yi$ — непрерывной, нигде не дифференцируемой функции, $u = x, v = -y$ имеют каждая частные производные по x и y . Следовательно, в случае дифференцируемости функции $f(z)$ ее действительная часть u и коэффициент при мнимой части v должны быть выбраны не независимо, а так, чтобы выполнялись некоторые условия. Выводом этих условий мы теперь и займемся.

Итак, пусть функция $f(z)$ в некоторой точке z имеет определенную конечную производную. Таким образом, имеем:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = f'(z). \quad (38)$$

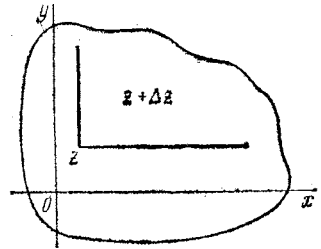


Рис. 20.

Так как $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ может стремиться к нулю по произвольному закону, то, в частности, мы можем считать $\Delta y = 0$ и Δx стремящимся к нулю. Геометрически (рис. 20) это означает, что мы заставляем точку $z + \Delta z$ приближаться к точке z по прямой линии, параллельной действительной оси. При этом условии равенство (38) нам даст:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x} = f'(z),$$

или

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = f'(z),$$

что может быть записано в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z). \quad (39)$$

Аналогично, принимая $\Delta x = 0$, т. е. заставляя точку $z + \Delta z$ приближаться к точке z (рис. 20) по прямой линии, параллельной мнимой оси, получим из равенства (38):

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{i \Delta y} = f'(z), \quad \text{или} \quad -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = f'(z),$$

что можно записать так:

$$-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = f'(z). \quad (39')$$

Так как правые части равенств (39) и (39') равны между собой, то должны быть равны и левые части этих равенств:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (40)$$

Сравнивая между собой в обеих частях последнего равенства (40) действительные и мнимые части, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{C.—R.})$$

Итак, мы видим, что если функция $w = u + vi$ дифференцируема в точке $z = x + yi$, то в этой точке существуют частные производные функций u и v , причем эти последние связаны между собой условиями (C.—R.). Эти условия носят название *условий Коши—Римана*¹⁾.

Мы показали, что условия (C.—R.) необходимы для того, чтобы функция $w = f(z)$ была монотонной в точке z . Покажем, что эти условия достаточны при дополнительном условии, что функции u и v дифференцируемы в рассматриваемой точке

$$\bar{z} = x + yi,$$

т. е. что

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \eta_1, \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \eta_2,$$

где η_1 и η_2 — бесконечно малые величины высшего порядка, чем

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Заметив это, мы можем написать:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) + \frac{\eta_1 + i \eta_2}{dx + i dy}$$

Заменяя здесь $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ по формулам (C.—R.) и замечая, что отношение $\frac{\eta_1 + i \eta_2}{dx + i dy} = \eta_3$ есть величина бесконечно малая вместе с $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, мы для отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ получим следующее выражение:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + i \frac{\partial v}{\partial x} dx + i \frac{\partial u}{\partial x} dy}{dx + i dy} + \eta_3, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_3.$$

¹⁾ Так как эти условия были найдены значительно раньше в работах Даламбера и Эйлера, то их называют также *условиями Даламбера—Эйлера*.

Переходя в последнем равенстве к пределу при Δz , стремящемся к нулю (или, что то же, при $|\Delta z| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, стремящемся к нулю), получим:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Из предыдущего вытекает, что для функции $w = f(z)$, аналитической в области G , условия (С.—R.) выполняются в каждой точке этой области; и обратно: если условия (С.—R.) имеют место повсюду в области G и функции u и v дифференцируемы в области, то функция $w = u + vi$ будет аналитической в G .

Естественно, возникает вопрос: не будет ли выполнение условий (С.—R.) повсюду в области G (без дополнительных условий дифференцируемости функций u и v) достаточным для того, чтобы функция $w = u + vi$ была аналитической в области G ? На простом примере легко показать, что это не так. В самом деле, пусть

$$w = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & \text{при } z \neq 0, \\ 0 & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

Во всякой точке z плоскости, отличной от нулевой точки, функция w дифференцируема, а потому во всякой такой точке выполняются условия (С.—R.). Легко показать, что и в нулевой точке условия (С.—R.) выполняются.

Действительно, при $z = 0$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^4}} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x e^{\frac{1}{(\Delta x)^4}}} = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = 0.$$

Аналогично находим при $z = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta y)^4}} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y e^{\frac{1}{(\Delta y)^4}}} = 0,$$

откуда $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = 0$. Итак, в нулевой точке все четыре частных производные функции u и v равны нулю и, следовательно, условия (С.—R.) остаются в силе. Таким образом, для рассматриваемой функции условия (С.—R.) выполнены во всей плоскости комплексного переменного z , в то время как наша функция не будет аналитической повсюду в плоскости, потому что в нулевой точке

она не будет даже непрерывной. Чтобы это показать, достаточно приближать точку z к нулевой точке по прямой линии $y = x$; тогда

$$z = x + yi = (1 + i)x, \quad z^4 = (1 + i)^4 x^4 = -4x^4, \quad e^{-\frac{1}{z^4}} = e^{\frac{1}{4x^4}};$$

когда x стремится к нулю, последнее выражение стремится к бесконечности. В рассмотренном примере сама функция не является непрерывной повсюду в плоскости, хотя во всякой точке плоскости она удовлетворяет условиям (С.—R.).

Если предполагать, что u и v непрерывные функции, то можно доказать, что выполнение условий (С.—R.) повсюду в области G необходимо и достаточно для того, чтобы данная функция была аналитической в области G ¹⁾. Однако доказательство этого положения выходит за пределы настоящего руководства.

5. Сопряженные гармонические функции. В дальнейшем мы убедимся в том, что функция, аналитическая в области G , имеет производные всех порядков. В частности, для такой функции u и v имеют непрерывные частные производные второго порядка в области G . Посмотрим, как нужно выбирать u и v для того, чтобы функция $u + vi$ была аналитической в рассматриваемой области.

Дифференцируя первое из условий (С.—R.) относительно x , а второе относительно y , получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x};$$

складывая эти равенства, имеем:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (41)$$

Уравнение $\Delta u = 0$ носит название уравнения Лапласа и всякая функция, удовлетворяющая этому уравнению, называется *гармонической*. Итак, u есть гармоническая функция в области G . Покажем также, что и v является гармонической функцией в области G . Для этого нужно продифференцировать первое из равенств (С.—R.) относительно y , второе же относительно x и вычесть результаты:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Однако, если взять за u и v две произвольные функции, гармонические в области G , то $u + vi$ не будет, вообще говоря, аналитической функцией в этой области. Для того чтобы $u + vi$ была функцией, аналитической в области G , нужно, очевидно, поступить таким образом: взяв за одну из этих функций, например u , про-

¹⁾ Попытку доказать эту теорему сделал Люман (1923), но его доказательство содержало пробел. Полное доказательство теоремы было получено Д. Е. Меньшовым (1933).

извольную гармоническую функцию, определить затем v из уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (\text{C.—R.})$$

Заметим, что выражение

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

есть полный дифференциал, так как $\Delta u = 0$; следовательно, v определяется квадратурами с точностью до произвольного постоянного слагаемого:

$$v = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Так определяемая гармоническая функция v называется сопряженной с гармонической функцией u .

6. Дифференцирование степенных рядов. Как мы уже указывали, всякий многочлен является аналитической функцией во всей плоскости комплексного переменного. Покажем теперь, что всякий степенной ряд, по отношению к которому многочлен является лишь весьма частным случаем, представляет собой аналитическую функцию внутри круга сходимости, причем производная от этой функции может быть получена путем почленного дифференцирования степенного ряда. Заметим сначала, что ряд $\varphi(z) = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \dots$, полученный почленным дифференцированием данного ряда: $f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$, имеет тот же радиус сходимости, что и данный ряд. В самом деле,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+1)c_{n+1}|} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\sqrt[n]{|c_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] = \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|c_{n+1}|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \end{aligned}$$

откуда по формуле Коши—Адамара следует, что радиусы сходимости обоих рядов одинаковы. Пусть теперь z_0 — произвольная точка внутри круга сходимости. Опишем внутри того же круга окружность $|z| = r$ так, чтобы точка z_0 лежала внутри нее, и пусть z_1 — какая-либо другая точка, лежащая внутри этой окружности.

Выражение $\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{(c_0 + c_1z_1 + c_2z_1^2 + c_3z_1^3 + \dots) - (c_0 + c_1z_0 + c_2z_0^2 + c_3z_0^3 + \dots)}{z_1 - z_0} = \\ = c_1 + c_2(z_1 + z_0) + c_3(z_1^2 + z_1z_0 + z_0^2) + \dots \end{aligned}$$

Выбирая число n настолько большим, чтобы сумма

$$(n+1)|c_{n+1}|r^n + (n+2)|c_{n+2}|r^{n+1} + (n+3)|c_{n+3}|r^{n+2} + \dots$$

была меньше $\varepsilon/3$, представим $\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} - \varphi(z_0)$ в виде

$$\begin{aligned} & \{ [c_1 + c_2(z_1 + z_0) + \dots + c_n(z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1})] - \\ & - (c_1 + 2c_2z_0 + \dots + nc_nz_0^{n-1}) \} + \{ c_{n+1}(z_1^n + z_1^{n-1}z_0 + \dots + z_0^n) + \\ & + c_{n+2}(z_1^{n+1} + z_1^n z_0 + \dots + z_0^{n+1}) + \dots \} - \\ & - \{ (n+1)c_{n+1}z_0^n + (n+2)c_{n+2}z_0^{n+1} + \dots \}. \end{aligned}$$

Первая из фигурных скобок стремится к нулю, когда $z_1 \rightarrow z_0$, и поэтому может быть сделана по модулю меньшей $\varepsilon/3$, если только z_1 лежит в достаточно малой окрестности точки z_0 . Чтобы оценить модуль второй скобки, перейдем к модулям отдельных слагаемых и заменим $|z_1|$ и $|z_0|$ большим числом r . Получим тогда, что этот модуль меньше, чем $(n+1)|c_{n+1}|r^n + (n+2)|c_{n+2}|r^{n+1} + \dots$, т. е. меньше, чем $\varepsilon/3$. Точно так же, переходя от модуля суммы к сумме модулей и заменяя $|z_0|$ большим числом r , получим, что модуль третьей фигурной скобки также меньше, чем $\varepsilon/3$. Итак, $\left| \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} - \varphi(z_0) \right| < \varepsilon$, если z_1 находится в достаточно малой окрестности точки z_0 , откуда следует, что $\lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}$ существует и равен $\varphi(z_0)$, т. е.

$$f'(z_0) = c_1 + 2c_2z_0 + 3c_3z_0^2 + \dots$$

7. Показательная функция. Функции тригонометрические и гиперболические. Мы видели, что степенные ряды

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} \dots, \quad z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \quad 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

сходятся абсолютно во всей плоскости комплексного переменного z (гл. II, § 3, п. 5). Суммы таких рядов будут, как мы только что видели, функциями комплексного переменного z , аналитическими во всей плоскости. Из анализа известно, что если z принимает действительные значения x , то суммы этих рядов суть соответственно e^x , $\sin x$, $\cos x$. Условимся при любом комплексном значении z суммы наших рядов обозначать соответственно через e^z , $\sin z$, $\cos z$, т. е. положим:

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, мы определим три функции комплексного переменного z , аналитические во всей плоскости. Покажем, что известные

в случае действительного z свойства этих функций распространяются на случай любого комплексного z .

Так, формула умножения показательной функции

$$e^z \cdot e^t = e^{z+t} \quad (42)$$

доказывается для любых комплексных z и t посредством умножения соответствующих рядов. Заметив, что

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \dots,$$

получаем:

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^t &= \left(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \dots\right) = \\ &= 1 + \frac{z+t}{1} + \frac{(z+t)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Ряд, стоящий в правой части последнего равенства, получается из ряда для e^z заменой z на $z+t$; следовательно, его сумма равна e^{z+t} , и формула (42) доказана. Полагая в формуле (42) $t = -z$, найдем:

$$e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1,$$

откуда

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}. \quad (43)$$

Пользуясь формулой (43), легко вывести формулу деления показательной функции:

$$\frac{e^z}{e^t} = e^z \cdot e^{-t} = e^{z-t},$$

т. е.

$$\frac{e^z}{e^t} = e^{z-t}. \quad (44)$$

В действительной области тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$ не связаны с показательной функцией e^z . Рассматривая эти функции в комплексной области, Эйлер установил замечательное соотношение между ними:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (45)$$

Для доказательства тождества (45) заменим в ряде для e^z букву z через iz и соберем отдельно члены, не содержащие i , и члены, содержащие i ; получим:

$$e^{iz} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right).$$

Заметив, что ряд, стоящий в скобках, выражает $\sin z$, а ряд, стоящий вне скобок, определяет $\cos z$, получаем тождество (45). Так как

ряд для $\cos z$ содержит лишь четные степени z , а ряд, выражающий $\sin z$, — лишь нечетные степени z , то имеем:

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Заменяя в тождестве Эйлера (45) z на $-z$, получаем:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (45')$$

Складывая тождества (45) и (45'), находим:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (46)$$

Вычитанием же их получаем:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (46')$$

Эти формулы также носят имя Эйлера.

Пользуясь тождеством Эйлера, легко доказать, что показательная функция e^z имеет период $2\pi i$. Действительно, с одной стороны, по формуле (42) имеем: $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i}$, с другой стороны, в силу тождества (45) имеем: $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$. Следовательно, получаем: $e^{z+2\pi i} = e^z$, т. е. функция e^z не изменяет своего значения при прибавлении к независимому переменному постоянного числа $2\pi i$.

Наконец, пользуясь тождеством Эйлера, получаем так называемую показательную форму для представления любого комплексного числа:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

откуда

$$z = r e^{i\varphi}. \quad (47)$$

Известные из тригонометрии формулы сложения и вычитания синуса и косинуса

$$\cos(z \pm t) = \cos z \cos t \mp \sin z \sin t, \quad (48)$$

$$\sin(z \pm t) = \sin z \cos t \pm \cos z \sin t \quad (49)$$

распространяются и на комплексную область.

В самом деле, по формуле (42) имеем: $e^{i(z+t)} = e^{iz} \cdot e^{it}$, откуда в силу тождества Эйлера получим:

$$\cos(z+t) + i \sin(z+t) = (\cos z + i \sin z) (\cos t + i \sin t). \quad (50)$$

Изменяя в тождестве (50) знаки у z и t , найдем:

$$\cos(z+t) - i \sin(z+t) = (\cos z - i \sin z) (\cos t - i \sin t). \quad (51)$$

Раскрывая скобки в равенствах (50) и (51) и складывая их между собой, получим:

$$\cos(z+t) = \cos z \cos t - \sin z \sin t;$$

Сравнивая формулы (54) и (55) соответственно с формулами (46') и (46), получим:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad (56)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz. \quad (57)$$

Эти формулы показывают, что гиперболические синус и косинус могут быть выражены посредством круговых синуса и косинуса, если воспользоваться комплексными числами. Записав формулы (56) и (57) в виде

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z$$

и полагая $iz = z'$, имеем:

$$\sin z' = i \operatorname{sh} z, \quad \cos z' = \operatorname{ch} z. \quad (58)$$

Отсюда вытекает следующее: любое соотношение между тригонометрическими функциями $\sin z$ и $\cos z$ переходит в соответствующее соотношение между гиперболическими функциями $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$, если в этом соотношении мы заменим $\sin z$ через $i \operatorname{sh} z$, а $\cos z$ через $\operatorname{ch} z$.

Таким образом, параллельно формулам обычной тригонометрии мы получаем все формулы гиперболической тригонометрии.

Отметим еще формулы дифференцирования введенных нами функций. По доказанному в п. 6 этого параграфа производную от суммы степенного ряда можно получить, почленно дифференцируя степенной ряд, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{de^z}{dz} &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = e^z, \\ \frac{d \sin z}{dz} &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \cos z, \\ \frac{d \cos z}{dz} &= -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots = -\sin z, \\ \frac{d \operatorname{sh} z}{dz} &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \operatorname{ch} z, \\ \frac{d \operatorname{ch} z}{dz} &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

Таким образом, формулы дифференцирования, установленные для действительных значений аргумента, остаются в силе и для комплексных значений аргумента.

8. Однолистные функции. Обратные функции. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция, аналитическая в некоторой области G и, кроме того, принимающая в разных точках области разные значения, т. е. такая, что $f(z_1) \neq f(z_2)$, если $z_1 \neq z_2$. Такая функция называется *однолистной* в области G . Предположим еще, что производная $f'(z)$ этой функции непрерывна и не обращается в нуль внутри области G (впоследствии мы увидим, что произ-

водная однолистной функции обладает этими свойствами). Рассмотрим теперь наряду с плоскостью комплексного переменного z плоскость комплексного переменного w и пусть E — множество всех точек $w = f(z)$ этой плоскости, соответствующих точкам области G . Покажем, что *это множество есть область*, т. е. что оно, во-первых, состоит из одних лишь внутренних точек, и, во-вторых, — связное.

Действительно, пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — какая-либо точка области G и $w_0 = u_0 + iv_0 = f(z_0)$ — соответствующая ей точка множества E . К уравнениям $u - u(x, y) = 0$, $v - v(x, y) = 0$ можно применить теорему существования неявных функций, так как левые части этих уравнений обращаются в нуль при $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$, $v = v_0$, непрерывны по всем четырем переменным и имеют непрерывные частные производные, причем якобиан

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

не равен нулю. Поэтому существуют две непрерывные в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, удовлетворяющие уравнениям $u - u(x, y) = 0$, $v - v(x, y) = 0$ и обращающиеся соответственно в x_0 и y_0 в точке (u_0, v_0) . Если взять окрестность точки (u_0, v_0) достаточно малой, то точки $[x(u, v), y(u, v)]$ будут сколь угодно близки к (x_0, y_0) , т. е. будут лежать в области G . А это значит, что некоторая окрестность точки (u_0, v_0) целиком состоит из точек, соответствующих точкам области G в силу уравнений $u - u(x, y) = 0$, $v - v(x, y) = 0$, или, что то же, в силу уравнения $w = f(z)$, т. е. вся состоит из точек множества E . Иными словами, всякая точка w_0 множества E является внутренней для этого множества. Чтобы доказать связность E , возьмем две любые точки w_1 и w_2 этого множества и пусть z_1 и z_2 — соответствующие им точки области G . Соединим z_1 и z_2 дугой Жордана, лежащей внутри G . Если точка z будет описывать эту линию от z_1 к z_2 , то точка $w = f(z)$ опишет линию Жордана от w_1 к w_2 . Последняя линия принадлежит к множеству E по самому определению этого множества. Итак, E действительно является областью.

В силу уравнения $w = f(z)$ каждой точке w области E соответствует одна и только одна точка z области G [только одна, потому что двум разным точкам z в силу однолиственности $f(z)$ должны соответствовать разные точки w]. Поэтому z можно рассматривать как функцию от w , определенную в области E . Эта функция — обозначим ее через $z = F(w)$ — является *обратной* по отношению к функции $w = f(z)$. Из того, что мы вывели выше, пользуясь теоремой о неявных функциях, следует, что эта функция непрерывна [в самом деле, функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ непрерывны относи-

тельно u и v). Покажем, что функция $z = F(w)$ — аналитическая в области E .

Действительно, если точкам w_0 и w_1 области E соответствуют точки z_0 и z_1 области G , то, переписывая отношения $\frac{z_1 - z_0}{w_1 - w_0}$ в виде $\frac{1}{\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}}$ и замечая, что, когда $w_1 \rightarrow w_0$, z_1 также стремится к z_0 , найдем:

$$\lim_{w_1 \rightarrow w_0} \frac{z_1 - z_0}{w_1 - w_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)},$$

т. е. производная от $z = F(w)$ существует и равна $F'(w) = \frac{1}{f'(z)}$, что и требовалось доказать.

9. Радикус, логарифм и арксинус. Применим результаты п. 8 к функциям z^n (n — целое положительное число), e^z и $\sin z$. Для этого мы должны будем установить для каждой из этих функций области однолиственности, т. е. такие области, в различных точках которых функция принимает различные значения. Таких областей можно найти бесчисленное множество.

Рассмотрим, например, функцию e^z . Если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то $|e^{z_1}| = e^{x_1}$ и $|e^{z_2}| = e^{x_2}$; поэтому e^{z_1} не может равняться e^{z_2} , если $x_1 \neq x_2$. Положим $x_1 = x_2 = x$ и $y_1 \neq y_2$. Тогда

$$\begin{aligned} e^{z_1} - e^{z_2} &= e^x (e^{iy_1} - e^{iy_2}) = e^x [(\cos y_1 + i \sin y_1) - (\cos y_2 + i \sin y_2)] = \\ &= e^x \left[-2 \sin \frac{y_1 + y_2}{2} \sin \frac{y_1 - y_2}{2} + 2i \cos \frac{y_1 + y_2}{2} \sin \frac{y_1 - y_2}{2} \right] = \\ &= 2i \sin \frac{y_1 - y_2}{2} e^x e^{i \frac{y_1 + y_2}{2}}. \end{aligned}$$

Это выражение может обратиться в нуль в том и только в том случае, если $\sin \frac{y_1 - y_2}{2} = 0$, т. е. $y_1 - y_2 = 2k\pi$. Поэтому, если мы выберем область в виде полосы шириной 2π со сторонами, параллельными действительной оси, то внутри нее, в двух различных точках z_1 и z_2 , функция e^z будет необходимо принимать различные значения. Аналогичным образом можно подобрать области однолиственности и для других функций.

Мы возьмем сначала для функции z^n область $0 < \arg z < 2\pi/n$, для функции e^z — область $0 < I(z) < 2\pi$ и для функции $\sin z$ — область $-\pi/2 < R(z) < \pi/2$ (рис. 21, а, б, в). Определим теперь вид областей, которые описываются переменными $w = z^n$, $w = e^z$ и $w = \sin z$, в то время, когда точка z описывает соответствующую область плоскости z . Для примера рассмотрим функцию $w = \sin z$. Представляя ее в виде $u + iv = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy +$

$+ \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$, получаем: $u = \sin x \operatorname{ch} y$, $v = \operatorname{sh} y \cos x$, откуда следует, что, в то время как точка z описывает прямые $x = c$, точка w описывает линии $u = \sin c \operatorname{ch} y$, $v = \cos c \operatorname{sh} y$. Если $c = 0$ (что в плоскости z соответствует мнимой оси), то $u = 0$ и $v = \operatorname{sh} y$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. в плоскости w мы получаем также мнимую ось $u = 0$.

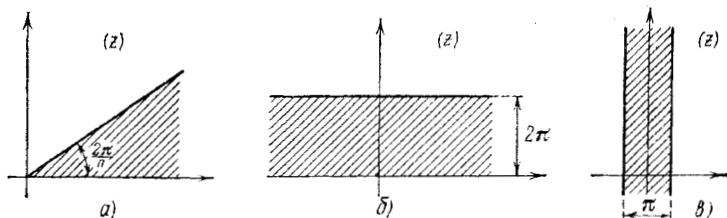


Рис. 21.

Если же $c \neq 0$ ($-\pi/2 < c < \pi/2$), то, исключая параметр y , получаем уравнение гиперболы $\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$ с полуосями $|\sin c|$ и $|\cos c|$; при этом отрицательным значениям c соответствуют левые ветви гипербол, а положительным — правые ветви, так как знаки u и c в силу уравнения $u = \sin c \operatorname{ch} y$ совпадают. Когда c изменяется от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, то в плоскости z мы получаем совокупность прямых $x = c$, заполняющих собой всю

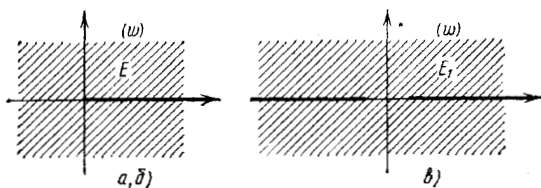


Рис. 22.

вертикальную полосу, а в плоскости w — совокупность ветвей гипербол $\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$, заполняющих область E_1 , которую можно получить, выбрасывая из плоскости w части действительной оси от $-\infty$ до -1 и от $+1$ до $+\infty$ (рис. 22, б). Аналогично можно определить вид областей, описываемых точками $w = z^n$ и $w = e^z$. Последние две области будут одинаковы: они состоят из всех точек плоскости w , не принадлежащих положительной части действительной оси (рис. 22, а, б).

На основании п. 8 в каждой из указанных областей определена соответствующая обратная функция. Именно в области E — функ-

ция $z = \sqrt[n]{w}$ (радикал), обратная по отношению к функции $w = z^n$, и функция $z = \ln w$ (логарифм), обратная по отношению к функции $w = e^z$; в области E_1 — функция $z = \arcsin w$ (арксинус), обратная по отношению к $w = \sin z$.

Все эти функции являются аналитическими в соответствующих областях, причем производные от них вычисляются по формулам

$$\frac{d(\sqrt[n]{w})}{dw} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{nw}, \quad \frac{d(\ln w)}{dw} = \frac{1}{w},$$

$$\frac{d(\arcsin w)}{dw} = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}},$$

совпадающим с формулами, известными для действительных значений переменных.

10. Ветви многозначных функций. Понятие о точках разветвления. Мы уже отмечали, что для каждой из функций z^n , e^z , $\sin z$ существуют области однолиственности, отличные от выбранных нами. В частности, для функции $w = z^n$ в качестве таких областей можно взять любой угол с вершиной в начале координат и раствором $\frac{2\pi}{n}$; для функций e^z — любую полосу ширины 2π со сторонами, параллельными действительной оси, для функции $\sin z$ — любую полосу:

$$(2k - 1)\frac{\pi}{2} < R(z) < (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Эти области можно выбирать так, чтобы они, не налегая друг на друга, заполнили собой всю плоскость (как это уже имеет место

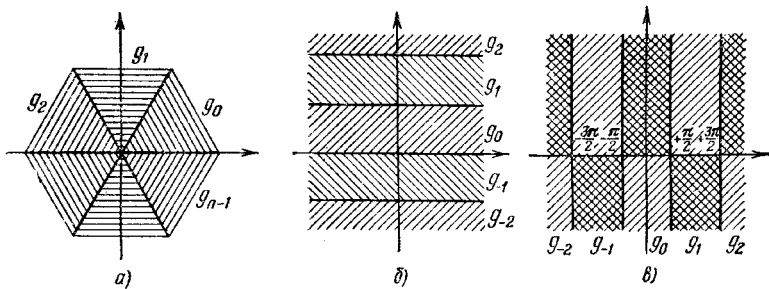


Рис. 23.

для указанных областей однолиственности $\sin z$). Такой выбор произведен на рис. 23. Каждая из изображенных здесь областей преобразуется посредством соответствующей функции (z^n , e^z или $\sin z$) в области, указанные на рис. 22. Обратное, если w изменяется в одной из этих последних областей, то z можно считать изменяющимся в любой из соответствующих областей рис. 23, благодаря чему можно было бы говорить не об одной, а об n функциях, обратных

функции z^n , определенных в области E , и о бесконечном множестве функций, обратных функциям e^z и $\sin z$, определенных в областях E и E_1 соответственно. Эти функции рассматриваются как *различные ветви многозначных функций* $\sqrt[n]{z}$, $\ln z$ и $\arcsin z$, причем первая из этих функций имеет n ветвей (n -значная функция), а последние две — бесконечное множество ветвей (*бесконечнозначные функции*). Чтобы фиксировать какую-либо из ветвей, достаточно лишь указать, в какой из областей рис. 23 должно изменяться z . В соответствии с обозначениями на этой фигуре мы будем пока пользоваться следующими обозначениями для ветвей наших функций: $(\sqrt[n]{w})_0, (\sqrt[n]{w})_1, \dots, (\sqrt[n]{w})_{n-1}; \dots, (\ln w)_{-2}, (\ln w)_{-1}, (\ln w)_0, (\ln w)_1, (\ln w)_2, \dots; \dots, (\arcsin w)_{-2}, (\arcsin w)_{-1}, (\arcsin w)_0, (\arcsin w)_1, (\arcsin w)_2, \dots$. Здесь, например, $(\ln w)_{-2}$ обозначает ту ветвь логарифма, значения которой попадают внутрь полосы g_{-2} , рис. 23, б.

Необходимо иметь в виду, что понятие ветви тесно связано с определенным выбором областей однолиственности. Так, для функции $w = z^n$ можно было бы брать области однолиственности: $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$, представленные на рис. 24, а. Это — углы: $2\pi k/n - \pi/n \leq \arg z \leq 2\pi k/n + \pi/n$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), заключенные между биссектрисами углов рис. 23, а. Если z изменяется

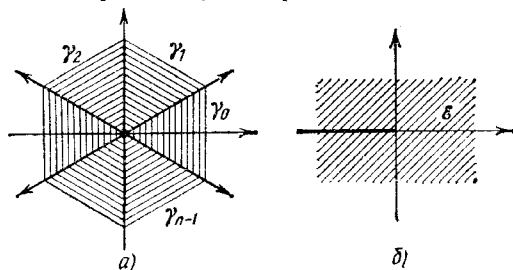


Рис. 24.

в любой из этих областей, то $w = z^n$ описывает одну и ту же область \mathcal{E} , изображенную на рис. 24, б. В самом деле, когда точка $z = re^{i\alpha}$ описывает луч $\arg z = \alpha = \text{const}$, то точка $w = z^n = r^n e^{in\alpha}$ описывает, очевидно, луч $\arg w = n\alpha = \text{const}$, и если α меняется от $2\pi k/n - \pi/n$ до $2\pi k/n + \pi/n$, то луч $\arg z = \alpha$, вращаясь против часовой стрелки, пробегает всю область γ_k , в то время как соответствующий ему луч $\arg w = n\alpha$, вращаясь в том же направлении — от луча $\arg w = 2\pi k - \pi \sim -\pi$ до луча $\arg w = 2\pi k + \pi \sim \pi$, — пробегает всю область \mathcal{E} .

В области \mathcal{E} также может быть определена функция, обратная функции $w = z^n$, и притом n различными способами, сообразно n различным областям $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$. Иными словами, в области \mathcal{E} также могут быть определены n ветвей функции $z = \sqrt[n]{w}$.

Если фиксировать одну из областей $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$, например γ_0 , то мы получим одну определенную ветвь функции $z = \sqrt[n]{\omega}$. При этом, когда ω находится в верхней полуплоскости ($0 < \arg \omega < \pi$), точка z будет находиться внутри угла: $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$, т. е. в части плоскости z , принадлежащей как области γ_0 , так и области g_0 , а когда ω будет находиться в нижней полуплоскости ($-\pi < \arg \omega < 0$), то точка z будет находиться внутри угла: $-\pi/n < \arg z < 0$, т. е. в части плоскости z , принадлежащей как области γ_0 , так и области g_{n-1} .

А это значит, что рассматриваемая нами ветвь функции будет в части области \mathcal{E} (в верхней полуплоскости) совпадать с ранее определенной ветвью $(\sqrt[n]{\omega})_0$, а в другой части области \mathcal{E} (в нижней полуплоскости) будет совпадать с другой из ранее определенных ветвей, именно с $(\sqrt[n]{\omega})_{n-1}$. Итак, было бы неправильно рассматривать ветви одной и той же многозначной функции как отдельные функции; в нашем примере при изменившемся выборе областей однолиственности две ветви $(\sqrt[n]{\omega})_0$ и $(\sqrt[n]{\omega})_{n-1}$, рассматривавшиеся сначала как различные, определяют одну и ту же ветвь.

Мы установили наличие различных ветвей функций $\sqrt[n]{\omega}$, $\ln \omega$ и $\arcsin \omega$, пользуясь понятием областей однолиственности. К тому же результату легко прийти и иным путем. Так, полагая $\omega = re^{i\varphi}$ и $z = \rho e^{i\alpha}$, выводим последовательно из уравнения $\omega = z^n$:

$$r e^{i\varphi} = \rho^n e^{in\alpha}, \quad \rho^n = r, \quad n\alpha = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$ (имеется в виду арифметическое значение радикала) и $\alpha = \varphi/n + 2k\pi/n$. Придавая здесь k значения $0, 1, 2, \dots, n-1$, получим n различных значений функции $\sqrt[n]{\omega}$, соответствующих n различным ветвям этой многозначной функции:

$$z_k = (\sqrt[n]{\omega})_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi}{n} + i \frac{2k\pi}{n}}.$$

Значения эти имеют один и тот же модуль; аргументы их представляют арифметическую прогрессию с разностью $2\pi/n$. Очевидно, что точки z_k по одной размещаются в областях рис. 23, а или 24, а.

Фиксируя какое-либо исходное значение радикала $z_m = (\sqrt[n]{\omega})_m$, заставим точку ω в плоскости ω описать некоторую замкнутую кривую. Если эта кривая не заключает внутри начала координат, то непрерывно изменяющийся аргумент ω вернется к прежнему значению, когда точка вновь примет исходное положение. Соответственно с этим и значение $\sqrt[n]{\omega}$ останется прежним.

Не то будет, если точка в плоскости ω опишет замкнутую кривую, заключающую внутри начало координат. После полного обхода аргумент ω либо увеличится на 2π , когда обход делался против часовой стрелки, либо уменьшится на 2π , когда обход делался по часовой стрелке. В соответствии с этим непрерывно меняющееся по мере обхода значение $\sqrt[n]{\omega}$ в первом случае перейдет от $(\sqrt[n]{\omega})_m$ к $(\sqrt[n]{\omega})_{m+1}$ ($(\sqrt[n]{\omega})_n$ следует полагать равным $(\sqrt[n]{\omega})_0$), во втором случае — от $(\sqrt[n]{\omega})_m$ к $(\sqrt[n]{\omega})_{m-1}$ ($(\sqrt[n]{\omega})_{-1}$ следует полагать равным $(\sqrt[n]{\omega})_{n-1}$).

Повторяя обход вокруг начала координат в том или в другом направлении достаточное количество раз, мы можем перейти от значения $(\sqrt[n]{\omega})_m$ к любому другому значению радикала в той же точке $(\sqrt[n]{\omega})_k$. Точка, обладающая тем свойством, что обход вокруг нее переводит от одной ветви многозначной функции к другой ветви, называется *точкой разветвления* этой функции (или *критической точкой*). Таким образом, точка $\omega = 0$ является точкой разветвления для функции $z = \sqrt[n]{\omega}$. Так как полный поворот на угол $\pm 2\pi$ около начала координат в то же время является и полным поворотом около бесконечно удаленной точки (для лучшего уяснения этого факта следует вместо плоскости ω представить себе риманову сферу), то бесконечно удаленная точка также является точкой разветвления функции $\sqrt[n]{\omega}$. Других точек разветвления эта функция не имеет, так как обход в плоскости ω по любой кривой, не заключающей внутри начала координат, не изменяет значения радикала. Заметим, что точка $z = \sqrt[n]{\omega}$, в то время как точка ω делает полный оборот около начала координат, описывает незамкнутую дугу, соединяющую точки z_m и z_{m+1} (или z_m и z_{m-1}) двух соседних областей однолиственности. Новому обороту (в прежнем направлении) соответствует движение точки z вдоль новой незамкнутой дуги $z_{m+1} z_{m+2}$ (или $z_{m-1} z_{m-2}$) и т. д. После n оборотов точки ω около начала координат точка z сделает один оборот около начала координат. В случае же, когда точка ω описывает замкнутую кривую, не содержащую внутри начала координат, то точка z описывает также замкнутую кривую, не содержащую внутри начала координат. (На своем пути она может выходить из первоначальной области однолиственности и побывать во всех остальных сколько угодно раз; в конце пути она займет первоначальное положение.)

Переходя к функции $z = \ln \omega$, рассмотрим соотношение $\omega = e^z$. Полагая здесь $z = x + iy$, $\omega = re^{i\varphi}$, получаем: $re^{i\varphi} = e^x \cdot e^{iy}$, откуда

$$e^x = r, \quad y = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

или $x = \operatorname{In} r$ (подразумевается действительное значение логарифма положительного числа r), $y = \varphi + 2k\pi$. Таким образом,

$$z_k = (\operatorname{In} \omega)_k = \operatorname{In} r + (\varphi + 2k\pi) i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Разным значениям k соответствуют разные значения z_k ; таким образом, мы имеем здесь бесконечное множество разных значений $\operatorname{In} \omega$, соответствующих бесчисленным ветвям этой многозначной функции. Значения z_k имеют одну и ту же действительную часть; коэффициенты при i образуют арифметическую прогрессию с разностью 2π . Очевидно, что точки с аффиксами z_k размещаются по одной во всех областях рис. 23, б. Фиксируя какое-либо исходное значение $z_m = (\operatorname{In} \omega)_m$, заставим точку плоскости ω описать замкнутую кривую, начальной и исходной точкой которой является ω . Рассуждая, как и выше, придем к заключению, что точка $\omega = 0$, а также и точка $\omega = \infty$ являются точками разветвления функции $z = \operatorname{In} \omega$. Именно, если точка ω делает около начала координат k оборотов, то значение $(\operatorname{In} \omega)_m$ переходит в значение $(\operatorname{In} \omega)_{m+k}$, когда обороты делаются против часовой стрелки, и в значение $(\operatorname{In} \omega)_{m-k}$, когда обороты делаются по часовой стрелке. Таким образом, путем достаточного числа оборотов около начала координат, совершаемых в должном направлении, можно перейти от одного значения логарифма в точке ω к любому другому значению в той же точке.

Отличие от предыдущего случая заключается в том, что, производя обороты вокруг начала координат в одном и том же направлении, мы никогда не вернемся к исходному значению, но всегда будем получать новые. Это отличие характеризуют, говоря, что точка $\omega = 0$ является для функции $z = \sqrt[n]{\omega}$ точкой разветвления *конечного порядка*, а именно порядка $n - 1$, в то время как для функции $z = \operatorname{In} \omega$ та же точка служит точкой разветвления *бесконечного порядка*. Говорят также, что в первом случае точка разветвления является *алгебраической*, а во втором — *трансцендентной*. Других точек разветвления, кроме $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, функция $z = \operatorname{In} \omega$ не имеет. Заметим, что если ω описывает замкнутую кривую вокруг начала координат, то точка $z = \operatorname{In} \omega$ описывает незамкнутую дугу, соединяющую точки $(\operatorname{In} \omega)_m$ и $(\operatorname{In} \omega)_{m+1}$ (или $(\operatorname{In} \omega)_m$ и $(\operatorname{In} \omega)_{m-1}$) двух соседних областей однолиственности функции $\omega = e^z$. Сколько бы оборотов вокруг начала координат ни делала точка ω (в одном и том же направлении), соответствующая дуга, описываемая точкой $z = \operatorname{In} \omega$, никогда не замкнется (с каждым оборотом ордината точки z увеличивается или уменьшается на 2π). Если же точка ω описывает замкнутую кривую, не заключающую внутри точки $\omega = 0$, то точка $z = \operatorname{In} \omega$ также описывает замкнутую кривую.

Обратимся, наконец, к функции $\operatorname{arcsin} \omega$. Прежде всего из уравнения $\omega = \frac{e^{2i} - e^{-2i}}{2i}$ имеем: $e^{2i} - e^{-2i} - 2i\omega = 0$, откуда

$e^{2zi} - 2i\omega e^{zi} - 1 = 0$. Решая это уравнение относительно e^{zi} , получим: $e^{zi} = i\omega \pm \sqrt{1 - \omega^2}$ и далее $z = \frac{1}{i} \ln(i\omega \pm \sqrt{1 - \omega^2})$.

Так как произведение выражений $\zeta_1 = i\omega + \sqrt{1 - \omega^2}$ и $\zeta_2 = i\omega - \sqrt{1 - \omega^2}$ равно -1 , то $|\zeta_1| \cdot |\zeta_2| = 1$, а $\arg \zeta_1 + \arg \zeta_2 = (2k - 1)\pi$ (k — целое число). Считая, что аргументы ζ_1 и ζ_2 не превосходят π по абсолютной величине, мы получаем лишь две возможности: $\arg \zeta_1 + \arg \zeta_2 = \pi$ и $\arg \zeta_1 + \arg \zeta_2 = -\pi$, откуда следует, что оба аргумента либо неотрицательны, либо неположительны и что по крайней мере один из них не больше $\frac{\pi}{2}$ по абсолютной величине. Обозначая через ζ то из чисел ζ_1 , ζ_2 , аргумент которого α не больше $\frac{\pi}{2}$, получаем для другого значение $-\frac{1}{\zeta}$, в соответствии с чем $z = \frac{1}{i} \ln \zeta$, либо $z = \frac{1}{i} \ln\left(-\frac{1}{\zeta}\right)$, откуда

$$z = \frac{1}{i} [\ln |\zeta| + \alpha i + 2k_1 \pi i],$$

либо

$$z = \frac{1}{i} [-\ln |\zeta| - \alpha i + (2k_2 + 1) \pi i]$$

(так как $\arg\left(-\frac{1}{\zeta}\right) = -\alpha \pm \pi$). Эти формулы можно объединить в одну:

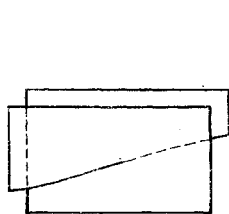
$$z_k = (-1)^k (\alpha - i \ln |\zeta|) + k\pi.$$

При наших обозначениях значение $z_0 = \alpha - i \ln |\zeta|$ попадает внутрь области g_0 рис. 23, σ (или на границу ее при $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$). Остальные точки располагаются по одной в областях g_k , так что точки в соседних областях симметричны относительно точек $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

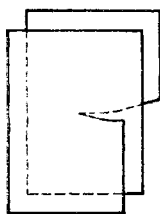
Можно проверить, подобно тому как это было сделано выше, что для функции $z = \operatorname{arcsin} \omega$ точками разветвления будут точки $\omega = -1$, $\omega = +1$ и $\omega = \infty$. В самом деле, при обходе по какой-либо замкнутой кривой, заключающей внутри одну из точек -1 и $+1$ и не заключающей другой, выражение $\sqrt{1 - \omega^2}$ изменит знак (для него каждая из точек -1 и $+1$ является точкой разветвления и притом первого порядка). Но это означает, что корень ζ_1 квадратного уравнения перейдет в $\zeta_2 = -\frac{1}{\zeta_1}$ и наоборот и, следовательно, $z = \frac{1}{i} \ln \zeta$ перейдет в $z = \frac{1}{i} \ln\left(-\frac{1}{\zeta}\right)$, что соответствует переходу от первоначальной точки z к точке, симметричной ей относительно соответствующей точки $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$. Если же ω описывает замкнутую кривую, заключающую внутри обе точки

-1 и $+1$, что можно рассматривать как обход вокруг одной лишь точки $\omega = \infty$, то аргумент выражения $\zeta = i\omega \pm \sqrt{1 - \omega^2}$ изменится на 2π , вследствие чего $\frac{1}{i} \ln \zeta$ изменится на 2π , что соответствует сдвигу точки z в направлении действительной оси на расстояние 2π .

11. Понятие о римановой поверхности. Чтобы получить наглядное представление о взаимоотношении ветвей функции $\sqrt[n]{\omega}$, заметим, что половинам углов g_k или γ_k соответствует в плоскости ω попеременно то верхняя, то нижняя полуплоскости. Именно,



a)



b)

Рис. 25.

когда мы проходим один за другим эти полууглы в направлении против часовой стрелки, начиная с полуугла $0 < \arg z < \pi/n$, то в плоскости ω получаем поочередно сначала верхнюю полуплоскость, затем нижнюю.

Представим себе, что мы имеем по n экземпляров верхних и нижних

полуплоскостей, которые для наглядности будем предполагать бумажными листами неограниченных размеров. Склеивая тогда верхнюю и нижнюю полуплоскости вдоль отрицательной полуоси (а края вдоль положительной полуоси оставляя свободными), мы получим область E рис. 22, соответствующую полууглам, образующим область g_0 . Если теперь ко второму полууглу присоединить следующий, то эти полууглы составят область γ_1 , которой соответствует в плоскости ω область \mathcal{E} , изображенная на рис. 24. Эта последняя образована нижней и верхней полуплоскостями, соединенными вдоль положительной оси, и нам остается лишь приклеить к свободному краю нижней полуплоскости новый экземпляр верхней полуплоскости. Получим область, образованную тремя полуплоскостями, соответственно трем полууглам плоскости z . При этом две полуплоскости (верхние), соответствующие первому и третьему полууглам, будут находиться одна над другой. Это отвечает тому факту, что в первом и третьем полууглах функция $\omega = z^n$ принимает одни и те же значения (именно в точках $\rho e^{i\alpha}$ и $\rho e^{i\alpha + \frac{2\pi}{n}i}$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$).

Отрицательная полуось третьей полуплоскости и положительная полуось первой будут оставаться свободными (рис. 25, a, на котором полуплоскости для наглядности деформированы). Далее, мы можем присоединить в плоскости z четвертый полуугол, которому должна соответствовать нижняя полуплоскость. Так как

третий и четвертый полууглы вместе образуют область g_1 , а ей отвечает область E рис. 22, состоящая из верхней и нижней полуплоскостей, соединенных вдоль отрицательной полуоси, то мы должны приклеить к свободной отрицательной полуоси третьей (верхней) полуплоскости новый экземпляр нижней полуплоскости. Положительная полуось этой последней останется свободной (рис. 25, б). Продолжая далее этот процесс присоединения новых полууглов и соответствующих им полуплоскостей, мы дойдем до последнего полуугла, которому будет соответствовать нижняя полуплоскость; ее положительная полуось, так же как и положительная полуось первой (верхней) полуплоскости, остается свободной. Но последний и первый полууглы вместе образуют область γ_0 (рис. 24, а).

Соединяя эти полууглы, мы, с одной стороны, получим полную плоскость z , а с другой — должны будем соединить последнюю (нижнюю) и первую (верхнюю) полуплоскости вдоль положительной полуоси, благодаря чему получим замкнутую n -листную поверхность, называемую *римановой поверхностью* функции $z = \sqrt[n]{w}$.

Заметим, что на нашей модели последнее склеивание не удастся произвести фактически, так как нижний и верхний полулисты будут разделяться $n - 1$ лежащими между ними листами. Поэтому последнее склеивание нужно понимать лишь в том смысле, что мы мысленно отождествляем точки свободных положительных полуосей с одинаковыми абсциссами.

Имея перед глазами риманову поверхность, легко составить себе полное представление о функции $\omega = z^n$ и ей обратной функции $z = \sqrt[n]{\omega}$. То обстоятельство, что риманова поверхность имеет n листов, соответствует тому факту, что одно и то же значение ω принимается в n различных точках плоскости z , или, иными словами, что каждому значению ω соответствует n различных значений z (исключая точки разветвления $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, которым соответствует лишь по одной точке: $z = 0$ и $z = \infty$).

Если точка z , переходя из одного полуугла в другой, опишет замкнутый контур вокруг начала координат, то точка ω , переходя из одной полуплоскости на другую и побывав, таким образом, на всех листах, опишет также замкнутый контур. Оставаясь на римановой поверхности, мы можем любую точку A_1 соединить непрерывной кривой с любой другой точкой A_2 . Эти две точки, в частности, могут лежать одна над другой, т. е. иметь один и тот же аффикс. Заставляя точку A двигаться вдоль этой кривой от A_1 к A_2 , мы заставим соответствующую точку z непрерывно перейти от значения z_1 , соответствующего A_1 , к значению z_2 , соответствующему A_2 , т. е. мы можем непрерывным изменением перейти от одной ветви функции $z = \sqrt[n]{\omega}$ к другой. Если, наконец, мы выделим на римановой поверхности какую-либо область, не содержащую

взаимно налегающих частей, т. е. не содержащую точек с одинаковыми аффиксами, то, оставаясь в пределах такой области, мы для каждого ω будем иметь единственное соответствующее ему значение z , т. е. можем говорить об определенной ветви функции $z = \sqrt[n]{\omega}$ (область плоскости z , соответствующая этой области римановой поверхности, будет областью однолиственности функции $\omega = z^n$).

Аналогичным образом можно построить римановы поверхности и для функций $z = \ln \omega$ и $z = \arcsin \omega$. Для функции $z = \ln \omega$ построение будет буквально тем же, только здесь верхние и нижние полуплоскости будут соответствовать уже не полууглам, а полосам:

$$k\pi < I(\omega) < (k+1)\pi \quad (k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots),$$

вдвое более узким, чем первоначальные. Так как среди этих полос нет ни первой, ни последней, которые могли бы граничить между собой, как граничили между собой первый и последний полууглы предыдущего примера, то и среди полуплоскостей не будет ни первой, ни последней, края которых следовало бы склеивать между собой, как мы это только что делали. Риманова поверхность функции $z = \ln \omega$ является *бесконечнолистной*. Также бесконечнолистной будет и риманова поверхность функции $z = \arcsin \omega$; однако связь отдельных листов здесь сложнее, чем в предыдущих случаях. Когда z меняется в области g_0 (рис. 23, в), то, как мы видели, ω описывает всю область E_1 . Из равенства $v = \operatorname{sh} y \cos x$ (п. 9 этого параграфа) следует, что знак v совпадает со знаком y , т. е. что заштрихованной полуполосе ($y > 0$) соответствует верхняя, а незаштрихованной полуполосе ($y < 0$) — нижняя полуплоскость плоскости ω . Если теперь точка z будет описывать область g_k : $k\pi - \pi/2 < R(z) < k\pi + \pi/2$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то точка $z - k\pi$ будет описывать область g_0 и именно: верхнюю полуполосу, когда z описывает верхнюю полуполосу области g_k , и нижнюю полуполосу, когда z описывает нижнюю полуполосу области g_k . Но $\sin(z - k\pi) = (-1)^k \sin z$. Поэтому при k четном, верхней полуполосе области g будет соответствовать, как и в случае области g_0 , верхняя полуплоскость ω , а нижней полуполосе — нижняя полуплоскость; при k нечетном верхней полуполосе, будет соответствовать нижняя полуплоскость, а нижней полуполосе — верхняя. (На рис. 23, в полуполосы, которым соответствуют верхние полуплоскости плоскости ω , заштрихованы.) Каждая полуполоса граничит вдоль части прямой с одной из трех полуполос и притом заштрихованная граничит с незаштрихованными и незаштрихованная с заштрихованными. Отсюда следует, что, присоединяя к полуполосе любую из этих соседних трех, мы получим область однолиственности функции $\sin z$. В самом деле, внутри одной и

той же полуполосы $\sin z$ принимает разные значения в разных точках; если же одна из двух точек находится в одной, а другая в другой из двух соседних полуполос, то соответствующие точки $w = \sin z$ лежат одна в верхней, а другая в нижней полуплоскости w , т. е. также различны. Мы уже знаем область, которую списывает $w = \sin z$, когда z описывает область g_0 (или одну из полос g_h). Остается лишь отметить, что парам двух соседних верхних или двух соседних нижних полуполос соответствует одна из областей E_2 или E_3 рис. 26: E_2 состоит из верхней и нижней полуплоскостей, склеенных вдоль части действительной оси от $+1$ до $+\infty$, а E_3 — из верхней и нижней полуплоскостей, склеенных вдоль части действительной оси от $-\infty$ до -1 . В самом деле, когда точка z описывает полупрямую $z = (2k - 1)\frac{\pi}{2} + iy$ (y , сохраняя знак, меняется от 0 до $\pm\infty$), по которой граничат полуполосы, то точка $w = \sin z = (-1)^{k-1} \operatorname{ch} y$ должна описывать линию, по которой склеиваются полуплоскости w ; при k нечетном получаем часть действительной оси от $+1$ до $+\infty$, при k четном — часть

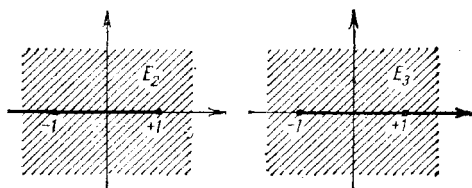


Рис. 26.

действительной оси от $-\infty$ до -1 . Желая получить риманову поверхность функции $z = \arcsin w$, мы построим для большей наглядности сначала часть этой поверхности, соответствующую верхней полуплоскости z , затем — нижней и, наконец, обе части соединим вместе. Начав с верхней полуполосы области g_0 , будем присоединять к ней одну за другой верхние полуполосы, лежащие вправо от нее; для переменного w мы будем получать при этом поочередно то верхние, то нижние полуплоскости, причем они должны скрепляться между собой то вдоль части действительной оси от $+1$ до $+\infty$, то от $-\infty$ до -1 . При этом каждый раз будут оставаться свободными части действительных осей между -1 и $+1$. Кроме того, останется свободной часть от $-\infty$ до -1 действительной оси первой (верхней) полуплоскости, соответствующая левому свободному краю верхней полуполосы g_0 . Если мы к этому краю присоединим соседнюю левую верхнюю полуполосу, то к свободной части действительной оси первой полуплоскости придется приклеить новую нижнюю полуплоскость. Продолжая в плоскости z присоединять одну за другой верхние полуполосы, лежащие слева от начальной, мы должны будем соответственно приклеивать к уже построенной части римановой поверхности все новые и новые полуплоскости, скрепляя две соседние поочередно то вдоль отрезка $(-\infty, -1)$, то вдоль отрезка $(+1, +\infty)$. В итоге получим часть

римановой поверхности функции $z = \arcsin w$, соответствующую верхней полуплоскости z ; она состоит из бесконечного множества листов, среди которых нет ни первого, ни последнего. На каждом из них остаются свободными (несклеенными) два края отрезка $[-1, +1]$: один край принадлежит верхней, другой — нижней полуплоскости. Если мы заставим точку двигаться по этой поверхности так, чтобы ее проекция на плоскость w описывала круг с центром в начале координат, то точка не сможет описать более половины оборота, если радиус круга меньше единицы: она остановится у несклеенных краев. В случае же, когда радиус круга будет больше единицы, точка будет описывать неограниченное множество кругов, лежащих друг над другом на разных листах. При этом, отправляясь от некоторого начального положения точки и двигаясь все время в одну и ту же сторону, мы побываем лишь на части листов, соответствующих верхним полуполосам, лежащим, например, вправо (или влево) от некоторой из них; чтобы побывать на всех остальных листах, пришлось бы, вернувшись к начальному положению, двигаться в противоположном направлении.

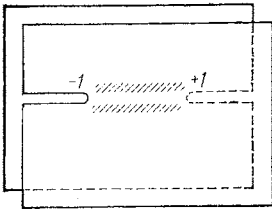


Рис. 27.

Совершенно аналогичную структуру имеет часть римановой поверхности $z = \arcsin w$, соответствующая нижней полуплоскости z (нижним полуполосам). Чтобы получить из этих двух частей всю риманову [поверхность, достаточно заметить, что, соединяя две полуполосы, верхнюю и нижнюю, в одну область g_h , мы должны соответствующие им полуплоскости w соединить вдоль отрезка $[-1, +1]$, тогда получится область E_1 рис. 22. Таким образом, мы должны приклеить к каждой полуплоскости первой части римановой поверхности соответствующую ей полуплоскость второй части вдоль остающихся свободными отрезков $[-1, +1]$. При этом соответствующими считаются полуплоскости (верхняя и нижняя), отвечающие полуполосам одной и той же области g_h . Заметим, что последние склеивания на модели из бумажных листов (по необходимости ограничиваясь конечным числом их) не удастся фактически провести, так как, склеив два каких-нибудь края от -1 до $+1$, мы создадим преграду для склеивания свободных краев, находящихся по разные стороны от заклеенного листа. На рис. 27 представлено схематически склеивание двух соответствующих листов обеих частей римановой поверхности. (Верхняя полуплоскость верхнего листа склеена с нижней полуплоскостью нижнего листа вдоль отрезка $[-1, +1]$; вдоль того же отрезка склеены между собой нижняя полуплоскость верхней и верхняя полуплоскость нижней плоскости.)

§ 5. Конформное отображение

1. **Геометрический смысл аргумента производной.** Пусть $\omega = f(z)$ есть функция, аналитическая в области G . Значения функции $\omega = u + vi$ будем изображать точками в плоскости uv . Каждой точке $z = x + yi$ в плоскости независимого переменного z будет соответствовать одна точка $\omega = u + vi$ в плоскости функции ω (рис. 28 и 29). При движении точки z в плоскости xy по некоторой линии C соответствующая ей точка ω будет описывать в плоскости uv линию Γ , являющуюся образом линии C . Пусть z_0 — произвольная точка области G и C — линия, данная вместе со своим направлением, выходящая из этой точки и имеющая определенную касательную в точке z_0 . Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$. В плоскости uv

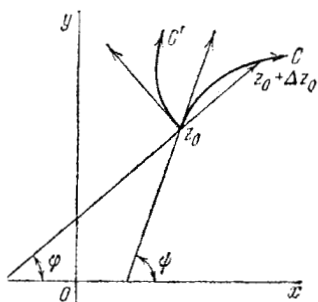


Рис. 28.

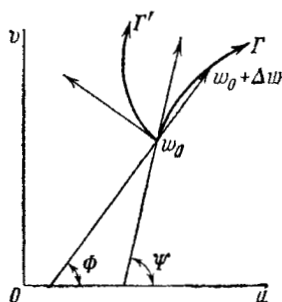


Рис. 29.

образом линии C будет линия Γ , выходящая из точки $\omega_0 = f(z_0)$. Если уравнение произвольно выбранной линии C есть $z = z(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), то уравнение линии Γ получим, если заменим в равенстве $\omega = f(z)$ переменное z через $z(t)$: $\omega = f[z(t)] = \omega(t)$ ($0 \leq t \leq 1$).

Чтобы выяснить геометрический смысл производной $f'(z_0)$, представим комплексное число $f'(z_0)$ в тригонометрической форме: $f'(z_0) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, и выясним геометрическое значение аргумента α производной и ее модуля r . Возьмем произвольную точку $z_0 + \Delta z_0$ на линии C и обозначим через $\omega_0 + \Delta \omega_0$ соответствующую ей точку на плоскости uv , лежащую на линии Γ . При стремлении точки $z_0 + \Delta z_0$ по линии C к точке z_0 соответствующая ей точка $\omega_0 + \Delta \omega_0$ движется по линии Γ к точке ω_0 , причем Δz_0 и $\Delta \omega_0$ одновременно стремятся к нулю. Из равенства

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega_0}{\Delta z_0} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

находим:

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right| = r, \quad (59)$$

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \alpha \quad (60)$$

(с точностью до кратных 2π). Здесь входит требование, чтобы $f'(z_0) \neq 0$, так как в противном случае угол α не имел бы определенного значения. Рассмотрим ближе равенство (60). Так как аргумент дроби равен разности аргументов числителя и знаменателя, то

$$\arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \arg \Delta w_0 - \arg \Delta z_0,$$

и равенство (60) примет вид

$$\lim \arg \Delta w_0 - \lim \arg \Delta z_0 = \alpha. \quad (60')$$

Вясним геометрический смысл равенства (60'), пользуясь рис. 28 и 29. Очевидно, $\Delta z_0 = (z_0 + \Delta z_0) - z_0$ изображается вектором, соединяющим точку z_0 с точкой $z_0 + \Delta z_0$; также Δw_0 есть вектор, идущий от точки w_0 к точке $w_0 + \Delta w_0$. Следовательно, $\arg \Delta z_0$ есть угол φ между положительным направлением оси Ox и соответствующим вектором Δz_0 , а $\arg \Delta w_0$ есть угол Φ оси Ou с вектором Δw_0 . Таким образом, равенство (60') будет вида

$$\lim \Phi - \lim \varphi = \alpha. \quad (60'')$$

В пределе направление вектора Δz_0 совпадает с направлением касательной к линии C в точке z_0 (рис. 28), а направление вектора Δw_0 — с направлением касательной к линии Γ в точке w_0 (рис. 29), которая необходимо должна существовать вследствие равенства (60''). Обозначая через ψ и Ψ углы осей Ox и Ou соответственно с касательными к линиям C и Γ в точках z_0 и w_0 , перепишем (60'') таким образом:

$$\Psi - \psi = \alpha, \text{ или } \Psi = \psi + \alpha. \quad (61)$$

Будем считать положительные направления осей Ox и Ou совпадающими между собой. Тогда из равенства (61) усматриваем, что α есть угол, на который поворачивается касательная к линии C в точке z_0 при отображении $w = f(z)$, или, иначе, α есть угол между первоначальным и отображенным направлениями. Существенно важно заметить, что линию C мы берем произвольной; при изменении направления линии C будут изменяться ψ и Ψ , но α остается постоянным. Следовательно, проводя из точки z_0 другую линию C' и обозначая соответствующую ей линию, выходящую из точки w_0 , через Γ' (рис. 28 и 29), мы можем заключить, что равенство (61) остается в силе для этой пары линий. Оно примет вид

$$\Psi' = \psi' + \alpha, \quad (61')$$

где ψ' и Ψ' суть значения соответственно ψ и Ψ для линий C' и Γ' . Вычитая (61) из равенства (61'), получим:

$$\Psi' - \Psi = \psi' - \psi. \quad (62)$$

Заметив, что $\psi' - \psi$ обозначает угол между касательными в точке z_0 к линиям C и C' , а $\Psi' - \Psi$ — соответствующий угол для Γ и Γ' , усматриваем из равенства (62) следующее: две произвольные линии, выходящие из точки z_0 , отображаются в две соответствующие линии, выходящие из точки $w_0 = f(z_0)$, так что угол между касательными к данным и отображенным линиям будет один и тот же как по величине, так и по направлению. Это значит, что если положительное направление линии C в точке z_0 переводится в положительное направление линии C' путем поворота на некоторый угол в определенном направлении, то соответствующее направление линии Γ переходит в направление линии Γ' путем поворота на тот же угол и в том же направлении. Итак, *отображение с помощью аналитической функции обладает свойством сохранения (консерватизма) углов во всех точках, где производная $f'(z)$ не равна нулю.*

2. Геометрический смысл модуля производной. После того как мы выяснили геометрический смысл аргумента производной, обратимся к рассмотрению ее модуля. Равенство (59) может быть записано так:

$$\lim \frac{|\Delta w_0|}{|\Delta z_0|} = r. \quad (59')$$

Геометрически $|\Delta z_0|$ обозначает длину вектора Δz_0 , т. е. расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z_0$ (рис. 28); аналогично $|\Delta w_0|$ есть расстояние между соответствующими точками w_0 и $w_0 + \Delta w_0$ (рис. 29). Равенство (59') показывает, что отношение бесконечно малого расстояния между отображенными точками к бесконечно малому расстоянию между первоначальными точками, в пределе равное $r = |f'(z_0)|$, не зависит от направления линии C . Из этого ясно, что $r = |f'(z_0)|$ можно рассматривать как величину масштаба в точке z_0 при изображении с помощью функции $w = f(z)$. Если $r > 1$, то масштаб увеличивается, т. е. происходит растяжение произвольного бесконечно малого элемента, выходящего из точки z_0 ; если $r < 1$, то, наоборот, происходит сжатие; при $r = 1$ масштаб остается неизменным, т. е. бесконечно малый элемент, выходящий из точки z_0 , заменяется ему эквивалентным бесконечно малым элементом, выходящим из точки w_0 .

Так как $r = |f'(z_0)|$ зависит только от z_0 и не зависит от направления линии C , то масштаб — его обычно называют искажением в данной точке z_0 — будет одним и тем же независимо от направления. Таким образом, можно сказать, что изображение с помощью аналитической функции $w = f(z)$ обладает в каждой точке z_0 , где $f'(z_0) \neq 0$, растяжением, не зависящим от направления.

3. Конформное отображение. Итак, всякое аналитическое отображение, т. е. изображение, устанавливаемое с помощью аналитической функции $w = f(z)$, обладает в каждой точке z_0 , где $f'(z_0) \neq 0$, двумя свойствами:

- 1) консерватизма углов,
- 2) постоянства растяжений.

Если мы возьмем в плоскости комплексного переменного z бесконечно малый треугольник, одна из вершин которого находится в точке z_0 , то ему в плоскости переменного w будет соответствовать бесконечно малый криволинейный треугольник с вершиной в точке w_0 (рис. 30 и 31). Соответственные углы в этих треугольниках будут равны в силу свойства консерватизма углов; отношения же соответственных сторон с точностью до бесконечно малых

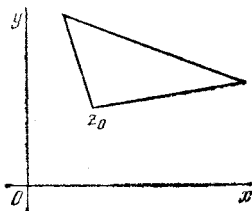


Рис. 30.

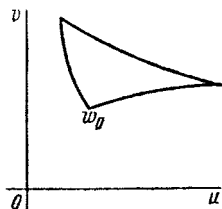


Рис. 31.

будут равны одному и тому же постоянному числу $r \neq 0$. Такие два бесконечно малых треугольника называются подобными между собой. Итак, аналитическое отображение будет отображением подобия в бесконечно малом [вблизи каждой точки, где $f'(z) \neq 0$]. Отображение, обладающее свойством консерватизма углов и свойством постоянства растяжений, называется *конформным отображением*.

Резюмируя исследование, произведенное в пп. 1 и 2, мы скажем: всякое отображение, устанавливаемое с помощью аналитической функции $w = f(z)$, есть конформное во всех точках, где производная этой функции не равна нулю. Из предыдущего легко видеть, что и обратно, если однозначная функция $w = f(z)$ дает конформное отображение, то функция $f(z)$ будет аналитической с производной, не равной нулю.

4. Конформное отображение II рода. При аналитическом отображении углы между соответствующими направлениями сохраняются не только по величине, но и по направлению отсчета.

Всякое отображение плоскости комплексного переменного z (или ее части) на плоскость w , при котором углы сохраняются по величине, направление же их отсчета меняется на обратное, обладающее, сверх того, свойством постоянства растяжений, называется *конформным отображением II рода* в отличие от ана-

литических отображений, называемых *конформными отображениями I рода*. Все такие отображения устанавливаются с помощью функций, тесно связанных с аналитическими функциями.

Пусть нам дано отображение $w = \bar{z}$. Будем изображать переменное w в той же плоскости, что и z ; мы видим, что при рассматриваемом отображении всякая точка z переходит в точку, ей симметричную относительно действительной оси. Ясно, что при таком отображении всякие два направления, выходящие из точки z и образующие между собой некоторый угол α , перейдут в два соответствующих направления, симметричных с первыми, угол между которыми будет $-\alpha$, т. е. величина углов сохраняется, направление же их отсчета меняется на обратное (рис. 32). Далее, это отображение обладает свойством постоянства растяжений, так как при нем не происходит вообще никакого изменения масштаба. Следовательно, рассматриваемое отображение $w = \bar{z}$ есть конформное отображение II рода.

Предполагая теперь $f(z)$ аналитической функцией, мы можем заключить, что отображение $w = \overline{f(z)}$ будет конформным II рода. В самом деле, это преобразование может быть разбито на два последовательных отображения: $\zeta = f(z)$ и $w = \bar{\zeta}$. При первом преобразовании углы сохраняются как по величине, так и по направлению; при втором же — направление отсчета углов меняется на обратное. Следовательно, в результирующем отображении углы сохраняются по величине, но направление их отсчета меняется на обратное. Кроме того, данное отображение обладает свойством постоянства растяжений, так как это последнее свойство присуще обоим составляющим преобразованиям.

Итак, мы доказали, что *всякое преобразование, устанавливаемое с помощью функции, значения которой являются сопряженными со значениями аналитической функции, есть конформное II рода*. Обратное, *всякое конформное отображение II рода осуществляется с помощью функции, сопряженной с некоторой аналитической функцией*. В самом деле, если $w = F(z)$ устанавливает конформное отображение II рода, то $w = \overline{F(z)}$ должно определять конформное отображение I рода, и следовательно, $\overline{F(z)}$ есть функция, аналитическая в рассматриваемой области: $\overline{F(z)} = f(z)$, откуда следует:

$$F(z) = \overline{f(z)}.$$

Мы видели, что аналитическое отображение характеризуется двумя свойствами: консерватизмом углов и постоянством растя-

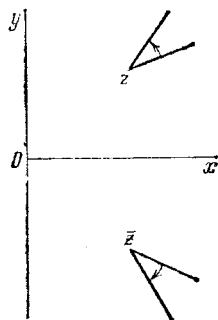


Рис. 32.

жений. Естественно поставить вопрос: всякое ли непрерывное отображение, обладающее свойством консерватизма углов, будет аналитическим, т. е. свойство сохранения углов влечет ли постоянство растяжений? Или другой аналогичный вопрос: непрерывное отображение, обладающее постоянным растяжением не будет ли всегда конформным I или II рода? Не касаясь разбора этих вопросов, мы лишь заметим, что обе поставленные задачи решаются в положительном смысле и притом элементарными методами, если а priori предполагать для данного отображения $w = u + vi$ непрерывность частных производных функций u и v . Решение тех же проблем становится гораздо более трудным, если рассматривать произвольное непрерывное преобразование а priori, не предполагая существования частных производных функций u и v . Однако за последнее время сделаны большие успехи в решении указанных проблем и в их общей постановке. Так доказано, что *всякое непрерывное и взаимно однозначное отображение, обладающее консерватизмом углов, необходимо есть аналитическое* ¹⁾.

Вопрос о том, будет ли требование взаимной однозначности преобразования существенным для справедливости теоремы или же предложение остается в силе и без этого ограничения, не разрешен еще до конца. Что касается второй проблемы, то она решена исчерпывающим образом ²⁾. Доказано, что *всякое непрерывное и взаимно однозначное отображение, обладающее постоянством растяжений, необходимо должно быть конформным I или II рода*. С другой стороны, на простом примере легко показать, что здесь требование взаимной однозначности отображения является существенным. Действительно, легко дать пример непрерывного отображения с постоянным растяжением, которое не будет конформным ни I, ни II рода. С этой целью возьмем следующее преобразование: $w = z$, если точка z находится в верхней полуплоскости, $w = \bar{z}$, если точка z лежит в нижней полуплоскости (на действительной оси z и \bar{z} совпадают). Очевидно, это отображение будет непрерывным во всей плоскости комплексного переменного z , будет обладать постоянным растяжением и тем не менее оно не будет ни аналитическим во всей плоскости, ни сопряженным с аналитическим во всей плоскости. Вторая проблема, следовательно, получает отрицательное решение, если рассматривать однозначные, но не взаимно однозначные отображения.

5. Геометрический смысл дифференциала. Возвращаясь к обозначениям п. 1, предположим, что линия C , данная вместе со своим

¹⁾ M e n s c h o f f D., Sur la representation conforme des domaines planes. — Math. Ann., 1926.

²⁾ V o h r H., Über streckentreue und conforme Abbildung. — Math. Zeitschr., Bd. 1, 1918, S. 403.

направлением, выходит из точки z_0 и имеет определенную касательную в этой точке. В плоскости w , $w = f(z)$, линии C будет соответствовать как ее образ линия Γ , выходящая из точки $w_0 = f(z_0)$. Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$. Если уравнение произвольно выбранной линии C есть $z = z(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), то уравнение линии Γ получим, если заменим в равенстве $w = f(z)$ переменное z через $z(t)$:

$$w = f[z(t)] = w(t).$$

Заметим, что

$$(dz)_0 = (dx)_0 + i(dy)_0 = (\cos \psi + i \sin \psi) (ds)_0 = e^{i\psi} (ds)_0$$

и аналогично

$$(dw)_0 = (du)_0 + i(dv)_0 = (\cos \Psi + i \sin \Psi) (d\sigma)_0 = e^{i\Psi} (d\sigma)_0,$$

где ψ и Ψ — углы с осями Ox и Ou касательных к линиям C и Γ соответственно в точках z_0 и w_0 , а $(ds)_0$ и $(d\sigma)_0$ суть дифференциалы дуг линий C и Γ , образованные в тех же точках z_0 и w_0 .

Рассматривая написанные выше уравнения, мы видим, что геометрически $(dz)_0$ изображается вектором длины $(ds)_0$, направленным по касательной к линии C в точке z_0 , аналогично $(dw)_0$ есть вектор длины $(d\sigma)_0$, направленный по касательной к линии Γ в точке w_0 . Отсюда, в частности, получаем:

$$f'(z_0) = \left(\frac{dw}{dz} \right)_0 = \frac{(dw)_0}{(dz)_0} = \frac{(d\sigma)_0}{(ds)_0} e^{i(\Psi - \psi)},$$

т. е. $|f'(z_0)| = \frac{(d\sigma)_0}{(ds)_0}$ есть отношение дифференциала отображенной дуги к дифференциалу первоначальной дуги в соответствующих точках.

Мы можем сказать также, что $|f'(z_0)|$ есть предел отношения элемента $(\Delta\sigma)_0$ отображенной дуги к элементу $(\Delta s)_0$ первоначальной дуги в соответствующих точках, что совпадает с результатом п. 2. Из выражения производной $f'(z_0)$ мы, далее, усматриваем, что

$$\arg f'(z_0) = \Psi - \psi,$$

т. е. $\arg f'(z_0)$ есть угол между первоначальным и отображенным направлениями (считая положительные направления осей Ox и Ou совпадающими между собой). Это заключение также совпадает с соответствующим результатом п. 1.

6. Главная часть отображения $w = f(z)$. Предположим, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют полные дифференциалы в точке $z_0 = x_0 + iy_0$; рассмотрим линейную часть отображения $w = u + iv$ бесконечно малого круга с центром в точке z_0 . Под линейной частью отображения $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ мы понимаем

$$\left. \begin{aligned} u - u_0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0), \\ v - v_0 &= a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0), \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где величины, входящие в (63), имеют следующие значения:

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad a = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0, \quad b = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, \\ v_0 = v(x_0, y_0), \quad a_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0, \quad b_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0.$$

Окружность радиуса ρ с центром в точке z_0

$$x - x_0 = \rho \cos \varphi, \quad y - y_0 = \rho \sin \varphi$$

переходит на плоскости (u, v) в кривую

$$u - u_0 = \rho (a \cos \varphi + b \sin \varphi), \quad v - v_0 = \rho (a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi).$$

Исключив φ из этих равенств, получим:

$$[a_1(u - u_0) - a(v - v_0)]^2 + [b_1(u - u_0) - b(v - v_0)]^2 = \delta^2 \rho^2, \quad (64)$$

где положено: $\delta = ab_1 - a_1b$. Уравнение (64), очевидно, представляет эллипс с центром в точке (u_0, v_0) , являющийся образом нашей окружности радиуса ρ , причем этот эллипс вырождается в двойной прямолинейный отрезок, если $\delta = 0$.

Посмотрим, при каких условиях этот эллипс превращается в окружность, т. е. при каких условиях преобразование (63) переводит окружность плоскости (x, y) в окружность же плоскости (u, v) .

Условия обращения эллипса (64) в окружность будут:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2, \quad aa_1 + bb_1 = 0, \quad (65)$$

причем при $\delta = 0$ вместо окружности мы получим точку. Действительно, в этом последнем случае, пользуясь тождеством

$$(a_1^2 + b_1^2)(a^2 + b^2) - (aa_1 + bb_1)^2 = (ab_1 - a_1b)^2,$$

видим, что при $\delta = 0$ условия (65) обращаются в такие: $a = b = a_1 = b_1 = 0$, и следовательно, преобразование (63) вырождается в следующее:

$$u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{или} \quad w = f(z) = w_0.$$

Очевидно, этот частный случай соответствует обращению в нуль производной $f'(z)$ в точке z_0 .

Обращаясь к исследованию общего случая $\delta \neq 0$, из условий (65) находим:

$$a_1 = -kb, \quad b_1 = ka, \quad k^2(a^2 + b^2) = a^2 + b^2.$$

В данном случае $a^2 + b^2 \neq 0$, потому что $\delta \neq 0$, и сокращая последнее соотношение на $a^2 + b^2$, получим $k^2 = 1$, откуда $k = \pm 1$, и следовательно, условия (65) примут вид

$$a_1 = -b, \quad b_1 = a, \quad (66)$$

или

$$a_1 = b, \quad b_1 = -a. \quad (67)$$

Первая группа (66) представляет условия Коши — Римана для точки (x_0, y_0) , и при этих условиях преобразование (63) будет:

$$u - u_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0); \quad v - v_0 = -b(x - x_0) + \\ + a(y - y_0),$$

или

$$\omega - \omega_0 = (a - ib)(z - z_0).$$

С геометрической точки зрения это линейное преобразование сводится к параллельному переносу, вращению и подобному изменению, т. е. действительно всякая окружность радиуса ρ плоскости z с центром в точке z_0 переходит в окружность с центром в точке ω_0 , причем направление обхода сохраняется.

Итак, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы однозначная функция $f(z)$, имеющая полный дифференциал в точке z_0 , обладала производной по комплексному переменному, отличной от нуля, заключается в следующем: *если ограничиться рассмотрением лишь линейной части отображения $\omega = f(z)$, то всякому кругу плоскости z с центром в точке z_0 соответствует круг плоскости ω с центром в точке $\omega_0 = f(z_0)$ и тем же направлением обхода.*

Очевидно, в этом случае мы имеем постоянство растяжений в точке z_0 и консерватизм углов, т. е. конформность отображения, что вполне согласуется с результатом п. 3. Обращение в нуль производной $f'(z)$ в точке z_0 характеризуется тем геометрическим фактом, что круг плоскости z с центром в точке z_0 с помощью линейной части отображения $\omega = f(z)$ переходит в точку ω_0 и, таким образом, в этом случае конформность нарушается.

Заметим, наконец, что при условиях (67) преобразование (63), очевидно, будет: $\omega - \omega_0 = (a + ib)(\bar{z} - \bar{z}_0)$, т. е. сопряженным с предыдущим линейным преобразованием. С геометрической точки зрения это преобразование характеризуется тем, что круг плоскости z с центром в точке z_0 переходит в круг плоскости ω с центром в точке ω_0 , причем направление обхода изменяется на обратное. Таким образом, случаю (67) соответствует конформное отображение II рода (п. 4).

Упражнения к главе II

1. Будет ли дифференцируемой функция $|z|$?

Отв. Нет.

2. Установить выполняемость условий Коши — Римана для функций $f(z) = z, z^2, z^n, e^z, \sin z \cos z$.

3. Если функция $f(z)$ в каждой точке области удовлетворяет условию $f'(z) = 0$, то доказать, что $f(z)$ есть постоянное в этой области.

4. Написать условия Коши — Римана в полярных координатах.

Отв. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$

5. Показать, что функция $w = \ln r + \varphi i$ ($-\pi < \varphi < \pi$), где $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, есть аналитическая всюду, кроме нулевой точки.

6. Определить радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, если $a_n = \frac{1}{n^n}$, $a_n = n^{1-n}$, $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_n = n^n$.

Отв. $R = \infty, 1, e, 0$.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет радиус сходимости r и $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^n$ — радиус сходимости r' .

Какой радиус сходимости R имеют ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + a'_n) z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a'_n) z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot a'_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a'_n} z^n?$$

(В последнем случае все $a'_n \neq 0$).

Отв. В первых двух случаях R не меньше наименьшего из чисел r и r' , т. е. $R \geq \frac{r+r'-|r-r'|}{2}$. В третьем случае $R \geq rr'$ и в четвертом $R \leq \frac{r}{r'}$.

8. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет радиус сходимости r и в некоторой точке z_0 окружности круга сходимости абсолютно сходится. Показать, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно для всех z , $|z| \leq r$.

9. Коэффициенты a_0, a_1, a_2, \dots степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — действительные положительные числа, монотонно стремящиеся к нулю. Доказать, что: а) его радиус сходимости r не меньше единицы; б) если $r = 1$, то он сходится во всех граничных точках его круга сходимости, кроме, быть может, $z = 1$.

10. Будет ли функция $f(z) = \frac{1}{1-z}$ внутри единичного круга непрерывна? Будет ли она равномерно непрерывна?

Отв. Непрерывна, но не равномерно непрерывна.

11. Функция $f(z)$ определена при $|z| < 1$ и не только непрерывна, но и равномерно непрерывна. Доказать, что если $z_n \rightarrow z_0$, где $|z_n| < 1$, а z_0 — граничная точка, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ и имеет значение, зависящее только от z_0 .

12. Доказать, что при условии задачи 11 однозначно определенные граничные значения $f(z_0)$ образуют непрерывную функцию вдоль окружности $|z| = 1$.

13. Для $0 < |z| < 1$ доказано, что $\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|$.

14. Для любого z показать, что $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$.

15. Пусть z движется по лучу, выходящему из начала координат, и по модулю неограниченно возрастает. Для каких направлений этого луча существует $\lim e^z$, для каких нет?

Отв. При $-\frac{\pi}{2} < \arg z < +\frac{\pi}{2}$, $|e^z| \rightarrow \infty$; при $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi$, $e^z \rightarrow 0$, когда $\arg z = \pm\pi/2$, предела нет.

16. Чему равны значения e^{2+i} , $\cos(5-i)$, $\sin(1-5i)$?

Отв. $e^{2+i} = e^2 (\cos 1 + i \sin 1) = 3,992 + i6,218$,

$$\cos(5-i) = \cos 5 \frac{e + e^{-1}}{2} + i \sin 5 \frac{e - e^{-1}}{2} = 0,438 + i1,127,$$

$$\sin(1-5i) = \sin 1 \frac{e^5 + e^{-5}}{2} - i \cos 1 \frac{e^5 - e^{-5}}{2} = 62,45 - i40,09.$$

17. Какая зависимость существует между а) $\operatorname{arccos} z$ и $\ln z$; б) $\operatorname{arctg} z$ и $\ln z$?

Отв. а) $\operatorname{arccos} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$; б) $\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{1-iz}{1+iz}$.

18. Дано $w = u + iv = \ln(z - c)$. Полагая $z = x + yi$, $c = a + bi$, найти u и v . Проверить условия Коши — Римана в любой точке.

Отв. $u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $v = \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a}$.

19. Переменное $z = x + yi$ описывает отрезок $x = 1$, $-1 \leq y \leq +1$. Чему равна длина линии, получающейся при отображении этого отрезка в плоскости $w = z^2$?

Отв. $2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

20. Какую линию описывает $w = z^2$, когда z изменяется в пределах $R(z) = 1$, $-1 \leq I(z) \leq +1$?

Отв. Дугу параболы $y^2 = 4(1-x)$, заключенную между точками $(0, -2)$ и $(0, 2)$.

21. Если элемент площади плоскости z есть $d\omega$, то как выразится элемент площади отображенной плоскости $w = f(z)$?

Отв. $|f'(z)|^2 \cdot d\omega$, где z — точка элемента $d\omega$.

22. Если z описывает область G , то чему равна площадь области D , получающейся при отображении G с помощью аналитической функции $w = f(z)$?

Отв. $\iint |f'(z)|^2 dx dy$, где интеграл распространен на область G .

23. Если $w = z^2$ и z описывает область, определяемую условиями $1 \leq |z| \leq 2$, $-\pi/4 \leq \arg z \leq +\pi/4$, то чему равна площадь области, описываемой при этом точкой w ?

Отв. $7,5\pi$.

ЛИНЕЙНЫЕ И ДРУГИЕ ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

При выяснении геометрического смысла производной (гл. II, § 5, п. 3) мы видели, что отображение, устанавливаемое с помощью функции $w = f(z)$, аналитической в некоторой области G , является конформным во всех точках z , для которых $f'(z) \neq 0$. Настоящую главу мы посвятим рассмотрению некоторых отображений, выполняемых с помощью простейших аналитических функций.

§ 1. Линейная функция

1. Целая линейная функция. Мы начнем с исследований линейной функции вида

$$w = az + b, \quad (1)$$

где a и b — некоторые постоянные комплексные числа ($a \neq 0$). Очевидно, что отображение (1) будет конформным во всей плоскости комплексного переменного z ($w' = a \neq 0$) и притом взаимно однозначным. Рассмотрим сначала три частных случая, причем ради простоты z и w будем изображать точками на одной плоскости.

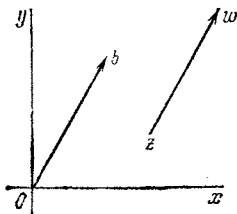


Рис. 33.

а) $w = z + b$. Ясно, что при таком отображении точка z переносится в точку w в направлении вектора b на расстояние, равное его длине (рис. 33). Полагая $w = u + vi$, $z = x + yi$, $b = b_1 + b_2i$, мы запишем преобразование (1) в виде двух формул: $u =$

$= x + b_1$, $v = y + b_2$. Два последних равенства представляют собой известные формулы параллельного переноса осей координат

б) $w = e^{i\alpha}z$. В таком случае имеем: $|w| = |z|$, $\arg w = \arg z + \alpha$, т. е. точка z переходит в точку w при помощи поворота вектора z около нулевой точки на угол α (рис. 34). Таким образом, отображение б) есть не что иное, как вращение около начала координат на угол α . Кроме того, можно написать $w = u + vi = (x + yi)(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, откуда находим: $u =$

$= x \cos \alpha - y \sin \alpha$, $v = x \sin \alpha + y \cos \alpha$. Два последних равенства являются известными формулами поворота осей координат.

в) $w = rz$, где r — действительно положительное постоянное число. В данном случае имеем: $|w| = r|z|$, $\arg w = \arg z$, т. е. точка z преобразуется в точку w , лежащую на прямой Oz на расстоянии от точки O , равном r раз

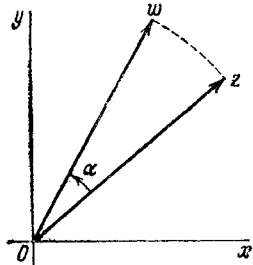


Рис. 34.

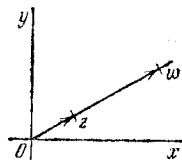


Рис. 35.

взятому расстоянию точки z . Это — так называемое *преобразование подобия* с центром подобия в точке O и коэффициентом подобия r (рис. 35).

Общее преобразование $w = az + b$ производится путем трех простейших вышеописанных отображений. В самом деле, пусть $a = re^{\alpha i}$. Повернем сначала вектор Oz на угол α : $z' = e^{\alpha i} \cdot z$. Изменим, далее, $|z'|$ в r раз: $z'' = rz'$. Наконец, сделаем параллельный перенос точки z'' : $w = z'' + b$. Проверка дает: $w = z'' + b = rz' + b = re^{\alpha i} \cdot z + b = az + b$. Однако можно рассматривать отображение, даваемое функцией $w = az + b$, с несколько иной точки зрения. С этой целью найдем комплексное число A , удовлетворяющее следующему условию:

$$w - A = a(z - A), \quad (1')$$

откуда вытекает: $A - aA = b$ и, следовательно, $A = \frac{b}{1-a}$. Если $a \neq 1$ (когда $a = 1$, отображение будет простым параллельным переносом), то преобразование (1') представляет собой вращение около точки A , соединенное с отображением подобия. Итак, мы можем точку z перевести в точку w либо с помощью параллельного переноса ($a = 1$), либо ($a \neq 1$) при помощи одного вращения около точки $A = \frac{b}{1-a}$ и отображения подобия (рис. 36).

2. Функция $w = 1/z$. Соответствие, даваемое этой формулой, взаимно однозначно во всех точках плоскости, причем нулевой

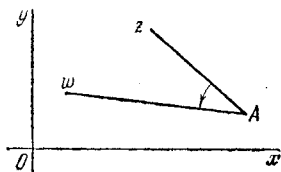


Рис. 36.

точке $z = 0$ (или $w = 0$) соответствует бесконечно удаленная точка $w = \infty$ (или $z = \infty$). Для исследования отображения, даваемого этой функцией, проще всего ввести полярные координаты, полагая $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$. Легко видеть, что в данном случае будет:

$$\rho = 1/r, \quad \theta = -\varphi. \quad (2)$$

Опишем из нулевой точки, как центра окружность C радиуса единица. При преобразовании (2) эта окружность переходит сама в себя, а именно каждая ее точка преобразуется в симметричную точку относительно действительной оси.

Преобразование (2) удобно разбить на два более простых:

$$r' = 1/r, \quad \varphi' = \varphi; \quad (I)$$

$$\rho = r', \quad \theta = -\varphi'. \quad (II)$$

При первом из этих преобразований аргумент сохраняется, а модуль изменяется на обратный. Точка z , находящаяся внутри окружности C , преобразуется в точку w' , находящуюся вне окружности и лежащую на продолжении отрезка Oz , причем произведение расстояний от точки O до отображенной и первоначальной точки равно единице. Такое отображение мы называем *инверсией* относительно окружности C (гл. I, § 2, п. 5). Точки z и w' , переходящие одна в другую с помощью преобразования (I), мы называли взаимно симметричными относительно окружности C . Геометрическое построение точки w' по данной точке z (или обратно) было указано в гл. I, § 2, п. 5. Следует заметить, что отображение (I) может быть записано в виде

$$w' = 1/\bar{z}; \quad (I')$$

оно не будет, следовательно, аналитическим преобразованием и принадлежит к классу конформных отображений II рода (гл. II, § 5, п. 4). При таком отображении углы хотя и сохраняются по абсолютной величине, но имеют разные направления.

Преобразование (II) можно записать в виде $w = \bar{w}'$. Очевидно, это преобразование также есть конформное II рода, переводящее каждую точку в точку, ей симметричную относительно действительной оси. Совокупность двух неаналитических (конформных II рода) отображений (I) и (II) дает аналитическое (при $z \neq 0$) отображение $w = 1/z$. Это отображение будет сохранять углы во всех точках плоскости z , включая $z = 0$ и $z = \infty$, если под углом двух линий при $z = \infty$ мы будем понимать угол, образованный отображенными линиями посредством функции $w = 1/z$ в плоскости w при $w = 0$.

3. Общая линейная функция. Общее линейное преобразование имеет вид

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3)$$

где a , b , c и d — постоянные комплексные числа и притом такие, что $ad - bc \neq 0$, так как в противном случае наша линейная функция (3) не зависела бы от z . Обратное, z можно выразить через w :

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}. \quad (4)$$

Соответствие, даваемое функцией (3), будет, следовательно, взаимно однозначным. Точке $z = -d/c$ будет соответствовать бесконечно удаленная точка плоскости w , а точке $w = a/c$ будет соответствовать бесконечно удаленная точка плоскости z . Общее линейное преобразование (3) сохраняет углы во всех точках расширенной плоскости комплексного переменного z . Действительно, производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(cz + d)a - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

есть конечное число, не равное нулю во всякой точке z , $z \neq -d/c$, $z \neq \infty$, откуда следует инвариантность углов во всех упомянутых точках z . В бесконечно удаленной точке углы также сохраняются, так как, выполнив подстановку $z = 1/z'$, мы найдем, что функция $\frac{a + bz'}{c + dz'}$ в точке $z' = 0$ есть аналитическая, если $c \neq 0$, и имеет производную $-\frac{ad - bc}{c^2}$, не равную нулю. Если же $c = 0$, то мы обнаружим то же самое, рассматривая функцию $\frac{d}{az + b}$ при $z = \infty$. Наконец, при $z = -d/c$ мы также немедленно обнаружим консерватизм углов, рассматривая функцию $\frac{cz + d}{az + b}$.

Изучим состав общего линейного преобразования (3). Покажем, что это преобразование совершается при помощи вышерассмотренных отображений. Действительно, выполняя деление, мы найдем:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}. \quad (3')$$

Введя новое переменное $z' = c(cz + d)$, мы убеждаемся в доказываемом.

4. Круговое свойство линейной функции. Перейдем теперь к рассмотрению свойств общего линейного преобразования. Оно обладает одним замечательным свойством, характеризующим это преобразование. Это свойство состоит в следующем. Если точка z описывает окружность на плоскости комплексного переменного z , то точка w на w -плоскости описывает тоже окружность или прямую линию. Если же точка z описывает прямую линию, то w описывает прямую или окружность. Считая прямую линию за

окружность бесконечно большого радиуса, мы можем описанное свойство формулировать короче: *при линейном преобразовании окружность переходит в окружность*, т. е. при таком преобразовании имеет место инвариантность системы всех окружностей.

Как обнаружить это свойство? Очевидно, для этого достаточно показать справедливость доказываемого свойства по отношению к преобразованиям пп. 1 и 2.

Что касается преобразований а) и б), то это совершенно ясно из их геометрического смысла (п. 1). Перейдем к преобразованию в). Уравнение окружности имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + mx + ny + l = 0. \quad (5)$$

При $A = 0$ уравнение (5) определяет прямую линию. Подставляя в уравнение (5) вместо x и y их значения u/r и v/r , мы получаем в плоскости ω опять уравнение окружности. Итак, в этом случае окружность переходит в окружность. Перейдем, наконец, к преобразованию $\omega = 1/z$ (п. 2).

Уравнение (5) можно записать в таком виде:

$$A\bar{z}z + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0,$$

где A и C — действительные постоянные. При преобразовании $\omega = 1/z$ получаем: $A \frac{1}{\omega\bar{\omega}} + \frac{\bar{B}}{\omega} + \frac{B}{\bar{\omega}} + C = 0$, или, приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, находим:

$$A + \bar{B}\bar{\omega} + B\omega + C\omega\bar{\omega} = 0. \quad (5')$$

Уравнение же (5') определяет окружность в плоскости ω . [При $C = 0$ уравнение (5') представляет прямую линию.]

Итак, мы видим, что при всех четырех преобразованиях, пп. 1 и 2, окружность переходит в окружность, а потому то же свойство будет присуще и общему линейному преобразованию, которое представляет собой комбинацию только что указанных преобразований.

5. Параметры и инвариант линейного преобразования. Общее линейное преобразование $\omega = \frac{az + b}{cz + d}$ зависит от трех параметров, за которые могут быть приняты, например, отношения чисел a , b , c и d к одному из них. Чтобы определить эти параметры, а вместе с ними и самое преобразование, нужны три уравнения между a , b , c и d . Мы получим их, указав точки ω_1 , ω_2 и ω_3 , в которые искомым преобразованием переводятся какие-либо три точки z_1 , z_2 и z_3 . Задавая точки z_1 , z_2 и z_3 произвольно, получаем уравнения

$$\omega_k = \frac{az_k + b}{cz_k + d} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Чтобы исключить a , b , c и d из этих уравнений и из уравнения

$\omega = \frac{az + b}{cz + d}$, образуем разности

$$\begin{aligned} \omega - \omega_1 &= \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)}, & \omega - \omega_2 &= \frac{(ad - bc)(z - z_2)}{(cz + d)(cz_2 + d)}, \\ \omega_3 - \omega_1 &= \frac{(ad - bc)(z_3 - z_1)}{(cz_3 + d)(cz_1 + d)}, & \omega_3 - \omega_2 &= \frac{(ad - bc)(z_3 - z_2)}{(cz_3 + d)(cz_2 + d)}. \end{aligned}$$

Деля почленно первое из этих уравнений на второе и третье на четвертое, затем полученные таким образом равенства снова деля почленно друг на друга, получим:

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} : \frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \quad (7)$$

Это и есть искомое линейное преобразование. Отметим, что преобразование (7) будет единственным линейным преобразованием, переводящим точки z_1 , z_2 и z_3 в точки ω_1 , ω_2 и ω_3 , так как к этому преобразованию мы пришли, допустив только, что *общее* линейное преобразование подчиняется условиям (6).

Так как за z_1 , z_2 , z_3 , z и ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω могут быть приняты любые четверки точек, соответствующих друг другу при линейном преобразовании, то полученное соотношение выражает следующее общее свойство линейного преобразования: отношение $\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ сохраняется при линейном преобразовании, т. е. является его *инвариантом*. Это отношение называется *двойным* или *ангармоническим отношением четырех точек* и обозначается через (z_1, z_2, z, z_3) . Выясним геометрический смысл ангармонического отношения в том случае, когда четыре точки z_1 , z_2 , z и z_3 лежат на одной окружности (в частном случае — на одной прямой). Пусть точки z_1 , z_2 , z , z_3 лежат на прямой

$$\zeta = \zeta_0 + te^{i\alpha} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

проходящей через точку ζ_0 и пересекающей ось x под углом α . Тогда имеем:

$$z_1 = \zeta_0 + t_1 e^{i\alpha}, \quad z_2 = \zeta_0 + t_2 e^{i\alpha}, \quad z = \zeta_0 + t e^{i\alpha}, \quad z_3 = \zeta_0 + t_3 e^{i\alpha},$$

откуда

$$(z_1, z_2, z, z_3) = (t_1, t_2, t, t_3),$$

т. е. ангармоническое отношение четырех точек, лежащих на прямой, есть действительное число, равное взятому с надлежащим знаком отношению расстояний от одной из них (z) до двух других (z_1 и z_2), деленному на отношение расстояний от четвертой точки (z_3) до тех же двух (z_1 и z_2). Пусть теперь точки z_1 , z_2 , z и z_3 лежат на окружности $\zeta = \zeta_0 + re^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) с центром ζ_0 радиуса r . Тогда имеем:

$$z_1 = \zeta_0 + re^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \zeta_0 + re^{i\varphi_2}, \quad z = \zeta_0 + re^{i\varphi}, \quad z_3 = \zeta_0 + re^{i\varphi_3}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 (z_1, z_2, z, z_3) &= \frac{e^{i\varphi} - e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi} - e^{i\varphi_2}} : \frac{e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_2}} = \\
 &= \frac{e^{\frac{i(\varphi+\varphi_1)}{2}} \cdot 2i \sin \frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{e^{\frac{i(\varphi+\varphi_2)}{2}} \cdot 2i \sin \frac{\varphi-\varphi_2}{2}} : \frac{e^{\frac{i(\varphi_3+\varphi_1)}{2}} \cdot 2i \sin \frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}{e^{\frac{i(\varphi_3+\varphi_2)}{2}} \cdot 2i \sin \frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}} = \\
 &= \frac{2 \sin \frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi-\varphi_2}{2}} : \frac{2 \sin \frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}}.
 \end{aligned}$$

Мы видим, что и здесь ангармоническое отношение является действительным числом, равным взятому с надлежащим знаком отношению длин хорд (или дуг окружности), соединяющих одну из точек (z) с двумя другими (z_1 и z_2), деленному на отношение длин хорд (дуг), соединяющих четвертую точку z_3 с теми же двумя.

Соединяя полученный в начале этого пункта результат с фактом инвариантности окружностей при линейном преобразовании, мы приходим к следующему выводу. Возьмем в плоскости z три

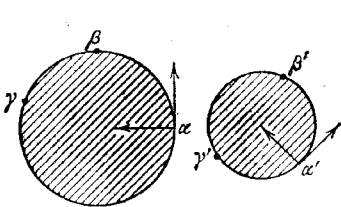


Рис. 37.

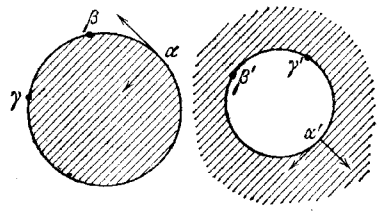


Рис. 38.

точки α, β, γ . Через эти точки можно провести окружность и притом только одну. Точно так же в плоскости w зададим три точки α', β', γ' , которые определяют проходящую через них окружность. На основании предыдущего мы можем сказать, что существует единственная линейная функция, которая переведет первую окружность во вторую, причем точкам α, β и γ будут соответствовать точки α', β', γ' .

Так как окружность $\alpha'\beta'\gamma'$ служит границей двух различных областей (внутренности и внешности окружности), то нужно еще выяснить, в какую из этих двух областей перейдет внутренность окружности $\alpha\beta\gamma$. Для этого достаточно проследить, куда перейдут точки внутренней нормали к окружности $\alpha\beta\gamma$. Но нормаль к $\alpha\beta\gamma$ переходит в нормаль к $\alpha'\beta'\gamma'$; остается лишь из двух направлений нормали к $\alpha'\beta'\gamma'$ выбрать такое, чтобы угол между ними и окружностью отсчитывался бы в том же направлении, в каком отсчитыв-

вается угол между внутренней нормалью к $\alpha\beta\gamma$ и самой окружностью $\alpha\beta\gamma$. Различные случаи представлены на рис. 37 (внутренность круга $\alpha\beta\gamma$ переходит во внутренность круга $\alpha'\beta'\gamma'$) и 38 (внутренность переходит во внешность).

6. Отображение верхней полуплоскости на самое себя. Верхнюю полуплоскость можно рассматривать как частный случай круга бесконечно большого радиуса. Займемся вопросом: какова

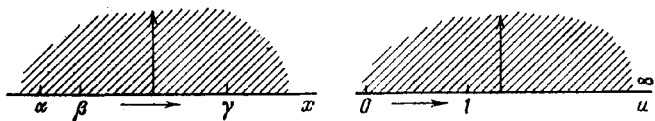


Рис. 39.

должна быть линейная функция, переводящая верхнюю полуплоскость плоскости z в верхнюю полуплоскость плоскости w ? Из предыдущего пункта ясно, что для этого надо перевести действительную ось, ограничивающую верхнюю полуплоскость, самое в себя.

Отметим на действительной оси плоскости z три точки α , β , γ и предположим, что при нашем преобразовании они переходят

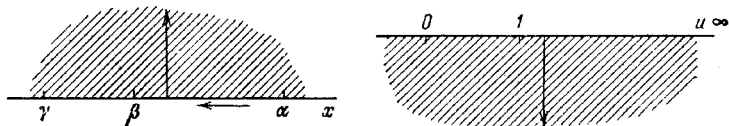


Рис. 40.

соответственно в точки 0 , 1 , ∞ . В силу п. 5 получаем: если, например, $\alpha < \beta < \gamma$, то верхняя полуплоскость плоскости z с помощью формулы (6) перейдет в верхнюю же полуплоскость плоскости w (рис. 39); если же, например, $\gamma < \beta < \alpha$, то верхняя полуплоскость плоскости z перейдет в нижнюю полуплоскость w (рис. 40).

Линейное преобразование (7), переводящее верхнюю полуплоскость самое в себя, можно представить в виде

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (8)$$

где a , b , c , d — действительные вполне произвольные числа, удовлетворяющие условию

$$ad - bc > 0. \quad (9)$$

В самом деле, из формулы $\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$ мы усматриваем, что при действительном z производная $\frac{dw}{dz}$ имеет положительные значения при условии $ad - bc > 0$.

Если же $ad - bc < 0$, то тогда функция (8) будет отображать верхнюю полуплоскость плоскости z на нижнюю полуплоскость плоскости w , а нижнюю z -полуплоскость в верхнюю w -полуплоскость.

7. Инвариантность пары взаимно симметричных точек при линейном преобразовании. Пусть имеем окружность произвольного радиуса R . Две точки P и P' мы называем взаимно симметричными относительно этой окружности, если они лежат на одной полупрямой, выходящей из центра, так, что произведение их расстояний от центра окружности равно квадрату радиуса R (гл. I, § 2, п. 5). Возьмем любую пару точек, взаимно симметричных относительно данной окружности. Отображая эту окружность с помощью произвольного линейного преобразования, мы докажем, что пара взаимно симметричных точек перейдет в пару точек, взаимно симметричных относительно отображенной окружности.

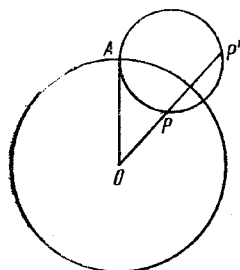


Рис. 41.

Предварительно покажем, что пара взаимно симметричных точек P и P' характеризуется тем свойством, что пучок окружностей, проходящих через эти точки, является ортогональным к основной окружности (рис. 41). В самом деле, через точку P и произвольную точку A основной окружности можно провести окружность, ортогональную к основной, и притом только одну (эта окружность превращается в прямую OP , если точка A лежит на этой прямой). Рассматривая точку пересечения P' построенной окружности с полупрямой OP , из рис. 41 получаем:

$$AO^2 = OP \cdot OP', \text{ или } R^2 = OP \cdot OP',$$

т. е. точки P и P' являются взаимно симметричными относительно основной окружности. Таким образом, любая окружность, проходящая через точку P ортогонально к основной, принадлежит пучку окружностей, проходящих через точки P и P' . Обратно, произвольная окружность этого пучка пересекает основную окружность в некоторой точке A (ибо точка P лежит внутри, а точка P' — вне основного круга) и, следовательно, совпадает с некоторой окружностью, ортогональной к основной.

Обращаясь теперь к доказательству теоремы настоящего пункта, заметим, что линейное преобразование переводит данную окружность и пучок ортогональных к ней окружностей, проходя-

щих через точки P и P' , в некоторую другую окружность (п. 4) и пучок ортогональных к ней окружностей, проходящих через соответствующие точки Q и Q' . По доказанному, точки Q и Q' взаимно симметричны.

В частности, если данная окружность переходит при линейном преобразовании в прямую, то центры всех окружностей преобразованного ортогонального пучка лежат на этой прямой. Отсюда следует, что соответствующие точки Q и Q' симметричны к этой прямой.

8. Отображение круга на верхнюю полуплоскость. Найдем преобразование, которое переводило бы круг с центром в нулевой точке единичного радиуса в верхнюю полуплоскость. Это преобразование мы ищем в виде

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (10)$$

Точки 0 и ∞ являются взаимно симметричными относительно окружности $|\omega| = 1$; соответствующие им точки $z = -b/a$ и $z = -d/c$ по доказанному в предыдущем пункте должны быть симметричными относительно действительной оси, т. е., полагая $-b/a = \beta$, имеем: $-d/c = \beta$. [Очевидно, $c \neq 0$, так как бесконечно удаленной точке плоскости z должна соответствовать конечная точка плоскости ω , а именно точка, лежащая на окружности единичного радиуса.] Пользуясь введенными обозначениями, перепишем равенство (10) в виде

$$\omega = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - \beta}{z - \beta}. \quad (11)$$

Так как при $z = 0$ $|\omega| = 1$, то из равенства (11) следует:

$$|a/c| = 1, \text{ или } a/c = e^{\alpha i}.$$

Окончательно получаем:

$$\omega = e^{\alpha i} \frac{z - \beta}{z - \beta}. \quad (12)$$

В каком случае наш круг будет переходить в верхнюю полуплоскость? Центру круга $\omega = 0$ будет соответствовать в силу формулы (12) точка $z = \beta$. Отсюда видно, что, для того чтобы круг переходил в верхнюю полуплоскость, надо, чтобы точка β лежала в верхней полуплоскости, т. е. $I(\beta) > 0$.

9. Отображение круга самого в себя. Пусть дан круг с центром в нулевой точке единичного радиуса. Предположим, что при отображении круга $|z| \leq 1$ на круг $|\omega| \leq 1$ некоторая точка $z = \alpha$ ($\alpha \neq 0$, $|\alpha| < 1$) переходит в нулевую точку $\omega = 0$. Точка, симметричная с нулевой точкой относительно окружности $|\omega| =$

$= 1$, будет, очевидно, бесконечно удаленной точкой. Таким образом, вследствие теоремы п. 7 мы должны иметь:

$$\omega = \infty \text{ при } z = 1/\bar{\alpha}.$$

Итак, искомое преобразование будет иметь вид

$$\omega = k \frac{z - \alpha}{z - 1/\bar{\alpha}}, \quad (13)$$

где k — постоянное число.

Перепишем формулу (13) в виде

$$\omega = k\bar{\alpha} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1} = k' \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (13')$$

и заметим, что $1/z = \bar{z}$ при $|z| = 1$ и, следовательно, $|1 - \bar{\alpha}z| = |1/z - \bar{\alpha}| = |\bar{z} - \bar{\alpha}| = |z - \alpha|$. Так как окружности $|z| = 1$ соответствует окружность $|\omega| = 1$, то выводим, что $|k'| = 1$ и, следовательно, $k' = e^{i\theta}$. Итак, формула (13') примет вид

$$\omega = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}. \quad (14)$$

Очевидно, результат (13') распространяется и на случай $\alpha = 0$.

Окончательно: *линейное преобразование, переводящее круг $|z| \leq 1$ самого в себя, будет иметь вид*

$$\omega = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad (15)$$

причем $|\alpha| < 1$; если же $|\alpha| > 1$, то формула (15) переводит внутренность круга $|z| \leq 1$ во внешнюю часть круга $|\omega| \leq 1$.

10. Представление линейного преобразования поередством симметричных отображений. Мы знаем, что всякое линейное преобразование (3) может быть разложено на следующие элементарные преобразования: 1) параллельный сдвиг, 2) вращение, 3) подобие, 4) преобразование вида $\omega = 1/z$. С другой стороны, мы видели, что преобразование 4) эквивалентно двум последовательным симметричным отображениям относительно окружности и действительной оси. Что касается преобразования 1), то, очевидно, оно равносильно двум последовательным симметричным отображениям относительно двух параллельных прямых (расположенных перпендикулярно к направлению сдвига на расстоянии друг от друга, равном половине сдвига). Преобразование 2) — вращение эквивалентно двум последовательным симметричным отображениям относительно двух пересекающихся прямых (с точкой пересечения в центре вращения и углом, равным половине угла вращения). Наконец, преобразование 3) — подобие равносильно двум последовательным инверсиям относительно двух концентрических окружностей (с центром в центре подобия и отношением квадратов радиусов, равным коэффициенту подобия).

Таким образом, всякое линейное преобразование (2) эквивалентно четному числу симметричных отображений относительно прямых и окружностей. Это справедливо также и для бесконечно удаленной точки, если за соответствующую ей точку будем принимать при симметрии относительно прямой ее самое, а при инверсии относительно окружности — центр этой последней. Покажем, что справедливо обратное предложение, т. е. четное число последовательных симметрий представляет некоторое линейное преобразование.

В самом деле, симметричное отображение $[z, w]$ ¹⁾ относительно окружности с центром в точке α и радиуса R может быть аналитически записано так:

$$w - \alpha = \frac{R^2}{z - \alpha},$$

или

$$w - \alpha = \frac{R^2}{\bar{z} - \alpha}. \quad (16)$$

Чтобы представить аналитически преобразование симметрии относительно прямой, произведем вслед за рассматриваемой симметрией $[z, w]$ две последовательные симметрии относительно параллельной прямой, проходящей через начало координат; затем две последовательные симметрии относительно действительной оси; все это не изменит рассматриваемого преобразования $[z, w]$; но, с другой стороны, группируя две первые симметрии, мы получим параллельный сдвиг $[z, z + h]$, группируя две следующие, мы получим вращение вокруг начала координат $[z + h, (z + h)e^{i\theta}]$, и тогда, чтобы получить w , остается выполнить симметрию относительно действительной оси, т. е.

$$w = \overline{(z + h)e^{i\theta}},$$

или

$$w = e^{-i\theta}\bar{z} + e^{-i\theta}h, \quad (17)$$

что и выражает симметрию относительно прямой.

Из рассмотрения формул (16) и (17) немедленно вытекает, что произведение двух любых симметрий есть линейное преобразование. Заметив, с другой стороны, что линейные преобразования образуют *группу* (т. е. произведение двух линейных преобразований есть снова линейное преобразование), мы заключаем, что четное число последовательных симметричных отображений эквивалентно произведению некоторого числа линейных преобразований, а значит, одному линейному преобразованию.

II. Различные типы линейных преобразований. Всякое линейное преобразование $w = \frac{az + b}{cz + d}$, отличное от тождественного

¹⁾ Символ $[z, w]$ обозначает, что z преобразуется в $w = f(z)$.

$w = z$, имеет не более двух неподвижных точек, т. е. точек, которые при линейном преобразовании переходят сами в себя: в самом деле, эти точки определяются как корни уравнения

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

или

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (18)$$

Решая квадратное уравнение (18), мы получаем две неподвижные точки данного линейного преобразования:

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Эти точки совпадают между собой, если $(a - d)^2 + 4bc = 0$; в противном случае мы имеем две различные неподвижные точки.

З а м е ч а н и е. В частности, может случиться, что неподвижной точкой будет бесконечно удаленная точка плоскости комплексного переменного z . Очевидно, это будет только в том случае, когда $c = 0$, т. е. для целого линейного преобразования. Наконец, обе неподвижные точки сливаются с бесконечно удаленной точкой, когда $c = 0$ и $d = a$, т. е. в случае параллельного переноса.

Рассмотрим ближе линейное преобразование L с двумя различными неподвижными точками, которые обозначим через z_1 и z_2 . Для большей ясности мы будем изображать z и w точками в одной плоскости. Перейдем к вспомогательной плоскости, в которой мы будем изображать переменные v и ζ , где положено:

$$v = \frac{w - z_1}{w - z_2} = S(w), \quad \zeta = \frac{z - z_1}{z - z_2} = S(z).$$

В случае $z_2 = \infty$ нужно принять:

$$v = w - z_1 = S(w), \quad \zeta = z - z_1 = S(z).$$

Из формул $v = S(w)$, $w = L(z)$ и $z = S^{-1}(\zeta)$ (S^{-1} означает преобразование, обратное S) вытекает: $v = SLS^{-1}(\zeta)$.

Для линейной функции SLS^{-1} , устанавливающей зависимость между v и ζ , неподвижными точками будут 0 и ∞ ; поэтому эта зависимость должна быть вида $v = K\zeta$, где K — некоторое комплексное постоянное. Отсюда вытекает, что данное линейное преобразование L можно представить в виде

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = K \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (19)$$

или (в случае $z_2 = \infty$)

$$w - z_1 = K(z - z_1).$$

Это есть так называемая *нормальная форма* линейного преобразования с двумя различными неподвижными точками. Постоянное K легко может быть выражено через первоначальные коэф-

коэффициенты, если заметим, что $K = \frac{\omega - z_1}{\omega - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1}$ не зависит от z . Полагая $z = 0$, $\omega = b/d$, мы найдем:

$$K = \frac{a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}. \quad (20)$$

В случае $z_2 = \infty$ имеем:

$$K = a/d.$$

Мы будем различать три случая:

1) K — число действительное и положительное,

2) $K = e^{\alpha i}$ ($\alpha \neq 0$),

3) $K = re^{\alpha i}$ ($\alpha \neq 0$, $r \neq 1$).

В первом случае данное преобразование (19) мы назовем *гиперболическим*, во втором — *эллиптическим* и в третьем — *локсодромическим*.

Что касается геометрического смысла этих преобразований, то он усматривается немедленно в специальном случае

$$v = Kz. \quad (21)$$

Так, гиперболическому преобразованию соответствует преобразование подобия, эллиптическому — вращение и локсодромическому — преобразование, соединенное из вращения и подобия. В случае преобразований (21) первого и второго типов особую роль играют две системы линий: с одной стороны, система прямых линий, проходящих через нулевую точку, с другой стороны, система окружностей с центром в этой точке $\zeta = 0$. Оба эти семейства линий остаются неизменными при наших отображениях. В случае гиперболических преобразований (21) каждая из упомянутых прямых переходит сама в себя, в то время как окружности переставляются между собой. В случае же эллиптических преобразований (21), наоборот, каждая из упомянутых окружностей переходит сама в себя, а прямые переставляются.

Чтобы перейти к общему случаю (19), остается ввести в рассмотрение два семейства окружностей, которые получаются в плоскости z из предыдущих семейств с помощью отображения:

$$\zeta = \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad \text{или} \quad \zeta = z - z_1.$$

Это, очевидно, будут два семейства линий, из которых первое состоит из всех окружностей, проходящих через две неподвижные точки z_1 и z_2 , а второе — из окружностей, им ортогональных (рис. 42). В случае $z_2 = \infty$ первое семейство линий состоит из пучка прямых с центром в точке z_1 , а второе — из окружностей с центром в z_1 .

При гиперболическом преобразовании каждая из окружностей первого семейства переходит сама в себя и сами в себя переходят

также и области, ограниченные этими окружностями; при эллиптическом преобразовании то же имеет место по отношению к окружностям второго семейства. Заметим, что при локсодромическом преобразовании не существует прямых или окружностей, которые бы переходили сами в себя вместе с ограниченными ими областями. Достаточно рассмотреть преобразование вида $v = K\zeta$, где $|K| \neq 1$ и K не является действительным положительным числом. Так как окружность (прямая) $A\zeta\bar{\zeta} + \bar{B}\zeta +$

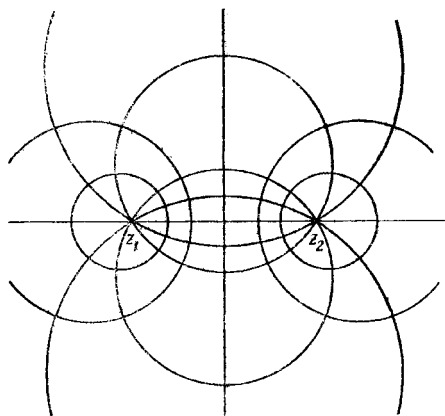


Рис. 42.

$+ \bar{B}\zeta + C = 0$ (A и C — действительные числа) преобразуется в $A\bar{v}\bar{v} + \bar{B}K\bar{v} + BK\bar{v} + CK\bar{K} = 0$, то для совпадения образа с прообразом мы должны потребовать пропорциональности соответствующих коэффициентов в этих уравнениях. При $A \neq 0$ получаем: $\bar{B}K = \bar{B}$, $BK = B$, $CK\bar{K} = C$, откуда $B = 0$ и $C = 0$, т. е. неподвижная окружность вырождается в точку $\zeta = 0$. При $A = 0$ следует предположить сначала, что $B \neq 0$ (иначе получим

другой случай вырождения неподвижной окружности — точку $\zeta = \infty$); тогда из $\bar{B}K : \bar{B} = BK : B = CK\bar{K} : C$ получим, что $\bar{K} = K$, т. е. что K — действительное (отрицательное) число, и далее, что $C = 0$. Таким образом, в этом специальном случае сами в себя переходят прямые, проходящие через начало координат. Но здесь преобразование $v = K\zeta$ сводится к соединению подобия относительно начала координат и поворота на 180° , благодаря чему полуплоскости, ограниченные указанными прямыми, не переходят сами в себя, но попарно меняются местами. Этим и заканчивается доказательство нашего утверждения, которое легко было бы усмотреть и чисто геометрически, минуя выкладки.

Переходя теперь к рассмотрению линейных преобразований с одной неподвижной точкой z_0 , мы назовем их *параболическими*. Снова будем z и w изображать точками одной плоскости. Полагая $v = \frac{1}{w - z_0}$, $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$, перейдем к вспомогательной плоскости ζ, v . В случае $z_0 = \infty$ нужно считать:

$$v = w, \quad \zeta = z. \quad (22)$$

Преобразование, связывающее ζ и v , имеет единственную неподвижную точку в бесконечности, а потому оно будет вида $v = \zeta + h$. Отсюда в общем случае нормальная форма параболического отображения запишется так:

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h,$$

или

$$w = z + h. \quad (23)$$

Специальным случаем параболического преобразования, к которому приводится общий случай, будет, таким образом, преобразование переноса. Прямые линии плоскости ζ , параллельные вектору h , переходят при таком преобразовании каждая отдельно сама в себя, в то время как их ортогональные линии, образующие другое семейство параллельных прямых, переставляются между собой. Роль только что упомянутых двух семейств прямых линий принимают в плоскости z соответствующие им два ортогональных семейства окружностей, которые проходят через точку z_0 .

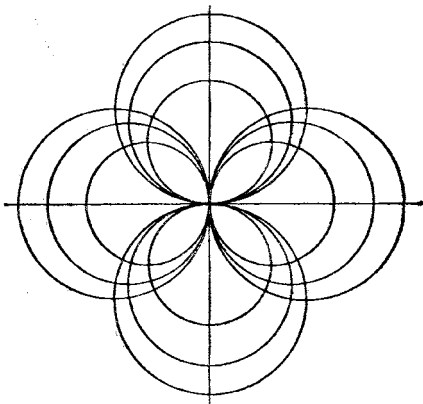


Рис. 43.

Окружности каждого семейства, будучи изображениями параллельных прямых, должны иметь одно и то же направление в точке z_0 , т. е. должны в этой точке касаться одной и той же прямой (рис. 43).

Здесь сами в себя переходят окружности одного из указанных семейств, причем ограничиваемые ими области переходят сами в себя.

12. Природа двойных точек. Пусть ζ — двойная точка преобразования $\{z, f(z)\}$, т. е.

$$f(\zeta) = \zeta,$$

лежащая на конечном расстоянии. Назовем точку ζ *притягивающей*, если в достаточно малой ее окрестности имеет место неравенство

$$\left| \frac{f(z) - \zeta}{z - \zeta} \right| < q < 1.$$

Будем называть ее *отталкивающей*, если в достаточно малой ее окрестности выполняется неравенство

$$\left| \frac{f(z) - \xi}{z - \xi} \right| \geq q > 1.$$

Наконец, назовем двойную точку *безразличной*, если модуль указанного отношения имеет предел, равный единице, когда z стремится к ξ . То же определение возможно распространить и на двойную бесконечно удаленную точку, заменяя предыдущее отношение через $\left| \frac{z}{f(z)} \right|$.

Считая преобразование $[z, f(z)]$ аналитическим, рассмотрим производную $f'(\xi) = s$; число s называют *множителем* двойной точки. Очевидно, имеет место следующее заключение:

если $|s| < 1$, ξ — *притягивающая* двойная точка, так как в ее окрестности $|f(z) - \xi| < |z - \xi| (|s| + \epsilon)$;

если $|s| > 1$, ξ — *отталкивающая* двойная точка, потому что в ее окрестности $|f(z) - \xi| > |z - \xi| (|s| - \epsilon)$;

если $|s| = 1$, ξ — *безразличная* двойная точка.

Обращаясь теперь к линейному преобразованию, предположим, что оно имеет две двойные точки на конечном расстоянии. Приведа его к нормальной форме (19)

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = K \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

мы получаем:

$$\frac{w - z_1}{z - z_1} = K \frac{w - z_2}{z - z_2},$$

откуда следует:

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{w - z_1}{z - z_1} = K, \quad \text{или} \quad \left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=z_1} = K.$$

Аналогично найдем:

$$\lim_{z \rightarrow z_2} \frac{w - z_2}{z - z_2} = \frac{1}{K}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=z_2} = \frac{1}{K}.$$

Таким образом, двойные точки эллиптического преобразования — безразличные. В преобразованиях гиперболическом и локсодромическом двойные точки имеют множители K и $1/K$: одна точка будет притягивающей, другая — отталкивающей. Наконец, из нормальной формы параболического преобразования $\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h$ следует:

$$\frac{w - z_0}{z - z_0} = 1 - h(w - z_0),$$

откуда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - z_0}{z - z_0} = 1,$$

т. е. двойная точка параболического преобразования есть безразличная. Все эти результаты легко распространить на случай, когда двойная точка лежит в бесконечности.

13. Геометрическая интерпретация эллиптического преобразования. Рассмотрим произвольную сферу, расположенную таким образом, чтобы неподвижные точки z_1 и z_2 эллиптического преобразования были стереографическими проекциями концов некоторого диаметра сферы.

Легко видеть, что семейству окружностей плоскости, проходящих через z_1 и z_2 , будут соответствовать большие круги сферы, проходящие через концы диаметра (меридианы), и семейству окружностей плоскости, ортогональных к первым, будут соответствовать круги сферы, плоскости которых перпендикулярны к диаметру (параллели). При эллиптическом преобразовании окружности первого семейства переходят друг в друга, а окружности второго семейства переходят сами в себя. Следовательно, точки сферы, соответствующие точкам плоскости, перемещаются с меридиана на меридиан, оставаясь на одних и тех же параллелях. Это преобразование сферы в самое себя может быть получено путем поворота ее как одного целого вокруг рассматриваемого диаметра. В самом деле, углы между меридианами в силу свойства стереографической проекции, указанного в § 4 гл. I, равны углам между соответствующими окружностями первого семейства, но угол между любой из этих окружностей и полученной из нее линейным преобразованием в силу конформности один и тот же и равен α . Поэтому и угол между любым меридианом и полученными из него после преобразования также равен α . А это и значит, что преобразование сферы, соответствующее в силу стереографической проекции эллиптическому преобразованию, сводится к повороту сферы около диаметра на угол α .

14. Характер преобразования круга самого в себя. Всякое линейное преобразование, которое сохраняет окружность вместе с ограниченной ею областью, необходимо должно быть эллиптическим, гиперболическим или параболическим (но не локсодромическим). Обратно, для всякой окружности можно найти линейные преобразования этих различных видов, которые сохраняют эту окружность и не обращаются в бесконечность внутри нее.

В самом деле, достаточно сначала произвольно выбрать двойные точки, симметричные относительно данной окружности или расположенные на окружности (различные или слившиеся в одну), затем определить параметр K или h так, чтобы линейная подстановка обращалась в бесконечность в точке, заданной вне окружности. Тогда, очевидно, внутренности окружности будет соответствовать она сама, и положительное направление на контуре сохраняется. В эллиптическом преобразовании двойные точки будут симметричными относительно данной окружности. Окружности пучка, для которых двойные точки являются сим-

метричными, будут инвариантными, а также инвариантными будут кольца, ограниченные двумя из них (рис. 44).

С точки зрения проективной геометрии в этом случае на инвариантной окружности устанавливается проективное соответствие с мнимыми двойными точками, так что точки окружности перемещаются в одном и том же направлении (по часовой стрелке или против часовой стрелки).

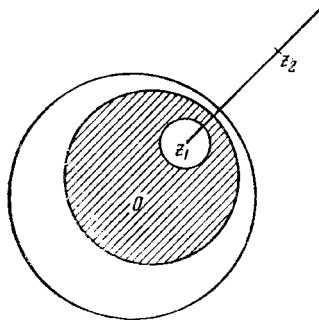


Рис. 44.

Если преобразование гиперболическое, то двойные точки находятся на основной окружности, и окружности пучка, проходящего через эти двойные точки, будут инвариантны; следовательно, будут неизменяемыми луночки, ограниченные двумя дугами окружностей с оконечностями в двойных точках z_1, z_2 (рис. 45).

С геометрической точки зрения на инвариантной окружности устанавливается проективное соответствие с действительными двойными точками z_1 и z_2 . На всякой дуге $z_1 z_2$ преобразование осуществляет перемещение точек окружности в направлении от z_1 к z_2 , если z_1 — отталкивающая точка, а z_2 — притягивающая. Окружности, касательные к основной в каждой из двойных точек, переставляются между собой. Очевидно, в отталкивающей точке

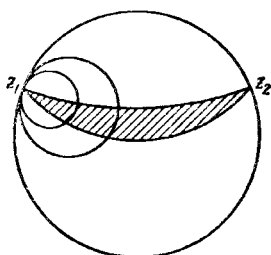


Рис. 45.

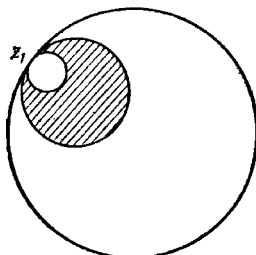


Рис. 46.

достаточно малые окружности увеличиваются при помощи преобразования, в притягивающей же точке — уменьшаются.

В силу исследования соответствия на инвариантной окружности заключаем, что предыдущее предложение справедливо для всех окружностей, внутренних к основной и касательных в двойной точке, а не только для достаточно малых.

Если преобразование параболическое, то имеется одна двойная точка на окружности, и касательные к ней окружности в двой-

ной точке являются неизменяемыми. Следовательно, будут неизменяемыми также круговые луночки, ограниченные двумя соприкасающимися в двойной точке окружностями (рис. 46). С геометрической точки зрения на инвариантной окружности устанавливается проективное соответствие со слившимися двойными точками; преобразование осуществляет переменное перемещение все время в одном направлении.

§ 2. Линейные преобразования и геометрия Лобачевского

1. Евклидово изображение геометрии Лобачевского в круге. Известно, что аксиоматика геометрии Лобачевского отличается от аксиоматики геометрии Евклида только в одном пункте, а именно: вместо постулата Евклида о параллельных прямых «через точку, внешнюю к прямой, можно провести прямую и притом только одну, не встречающуюся данной прямой», вводится следующий постулат Лобачевского «через точку, внешнюю к прямой, проходит бесконечное множество прямых, не встречающихся данной прямой; эти прямые заполняют некоторый угол, стороны которого — граничные прямые — называются *параллельными* данной прямой». При этом «свойство параллелизма двух прямых не зависит от точки, выбранной на одной или другой прямой».

Чтобы выполнить евклидово изображение этой геометрии, мы будем рассматривать в части евклидова пространства евклидовы геометрические элементы и операции, которые заставим соответствовать элементам и операциям геометрии Лобачевского, обозначая их тем же названием с присоединением эпитета «неевклидов»; мы установим, что эти элементы обладают свойствами, выражающимися в указанных терминах посредством фундаментальных предложений геометрии Лобачевского.

Обозначим через G внутреннюю часть евклидовой окружности Γ , называемой *фундаментальной*. Условимся за неевклидову точку принимать точку внутри G , за неевклидову прямую — часть окружности, ортогональной к Γ , расположенную на G . Через две точки A, B проходит единственная неевклидова прямая Δ (рис. 47); эта окружность Δ встречает Γ в точках α и β . По определению неевклидово расстояние между точками A и B будет логарифм ангармонического отношения четырех точек α, β, B, A окружности Δ с точностью до множителя k , которому можно приписать произвольное положительное числовое значение:

$$D(A, B) = k \ln(\alpha, \beta, B, A) > 0. \quad (24)$$

Легко видеть, что неевклидово расстояние $D(A, B)$ неограниченно возрастает, когда одна из точек A или B стремится к α или β . Таким образом, окружность Γ может быть рассматриваема как изображение множества бесконечно удаленных точек неевклидовой плоскости. По определению неевклидов угол между двумя неевклидовыми прямыми будет углом между двумя соответствующими окружностями. Неевклидовы перемещения будут линейными преобразованиями, сохраняющими внутренность окружности Γ .

Чтобы показать, что эти определения удовлетворяют постулатам геометрии Лобачевского, констатируем, не входя в детали, лишь следующее:

а) Неевклидовы перемещения сохраняют неевклидовы прямые, расстояния и углы. Это очевидно в силу свойств линейных преобразований, сохраняющих внутренность окружности Γ .

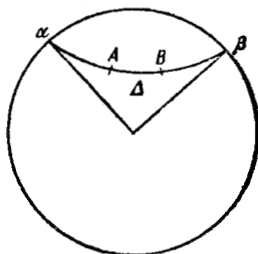


Рис. 47.

б) Неевклидовы расстояния складываются из неевклидовой прямой, т. е. если A, B, C — три точки на неевклидовой прямой, то

$$D(A, C) = D(A, B) + D(B, C). \quad (25)$$

Действительно, обозначим через α, β, a, b, c аффиксы в комплексной плоскости точек α, β, A, B, C окружности Δ и покажем, что

$$(\alpha, \beta, c, a) + (\alpha, \beta, b, a) = (\alpha, \beta, c, b).$$

Справедливость последнего равенства легко проверить, написав его в раскрытом виде:

$$\begin{aligned} \frac{c-\alpha}{c-\beta} \cdot \frac{a-\beta}{a-\alpha} &= \\ &= \frac{b-\alpha}{b-\beta} \cdot \frac{a-\beta}{a-\alpha} \cdot \frac{c-a}{c-\beta} \cdot \frac{b-\beta}{b-\alpha}. \end{aligned}$$

Логарифмируя это равенство и умножая на k , найдем (25).

в) Постулат Лобачевского о параллельных выполняется.

Рассмотрим неевклидовы прямые, выходящие из точки P , и изучим их расположение относительно неевклидовой прямой Δ , не содержащей P . Вводя окружности $P\alpha, P\beta$, касательные к Δ в точках α, β , мы видим, что неевклидовы прямые, выходящие из P , разделяются на два класса: встречающиеся Δ и ее не встречающие; последние принадлежат некоторому углу, заштрихованному на рис. 48, ограниченному прямыми $P\alpha, P\beta$, параллельными прямой Δ . Так как условие параллелизма выражается при изображении условием встречи в точке фундаментальной окружности евклидовых окружностей, ортогональных к основной окружности, то отсюда становится очевидным формулированное выше свойство параллелизма.

2. Вычисление неевклидова расстояния двух точек с данными аффиксами. Обозначим аффиксы данных точек через z_1, z_2 и выполним неевклидово перемещение, переводящее z_1 в центр O окружности Γ (рис. 49). Если Γ есть единичная окружность, а ω_2 — точка, соответствующая точке z_2 , и $|z_2| = r$, то

$$D(z_1, z_2) = D(O, \omega_2) =$$

$$= k \ln(-1, +1, r, 0) = k \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

В самом деле, при неевклидовом перемещении неевклидова прямая $z_1 z_2$ переходит в прямую $O\omega_2$, причем $D(z_1, z_2) = D(O, \omega_2)$. С другой стороны, посредством вращения около точки O точка ω_2 переходит в точку с аффиксом r и, значит, $D(O, \omega_2) = D(O, r)$.

Окончательно находим:

$$D(z_1, z_2) = D(O, r) = k \ln(-1, +1, r, 0) = k \ln \frac{1+r}{1-r},$$

что и нужно было доказать.

Итак, чтобы выразить $D(z_1, z_2)$ через аффиксы точек z_1 и z_2 , остается сделать это для $r = |z_2|$.

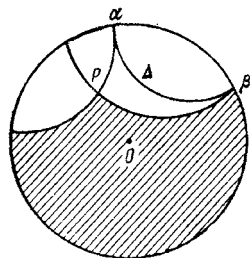


Рис. 48.

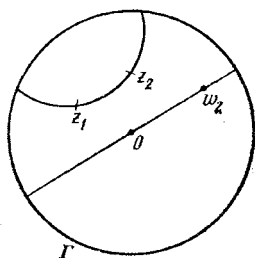


Рис. 49.

Заметив, что линейное преобразование, переводящее z_1 в центр окружности Γ и сохраняющее эту окружность, есть

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_1}{1 - z\bar{z}_1},$$

находим: $w_2 = e^{i\theta} \frac{z_2 - z_1}{1 - z_2\bar{z}_1}$, и, значит, $r = |w_2| = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - z_2\bar{z}_1} \right|$. Итак, мы получили следующую формулу для вычисления неевклидова расстояния между двумя точками с данными аффиксами z_1 и z_2 :

$$D(z_1, z_2) = k \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad (26)$$

где

$$r = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - z_2\bar{z}_1} \right|.$$

3. **Неевклидова окружность.** По определению *неевклидовой окружностью* назовем место точек, неевклидово расстояние которых до данной точки есть постоянное число d ($d > 0$). На основании формулы (26), если z_1 есть данная точка, то неевклидова окружность есть евклидова кривая, имеющая уравнение

$$\left| \frac{z - z_1}{1 - z\bar{z}_1} \right| = \frac{e^{d/k} - 1}{e^{d/k} + 1},$$

или

$$\frac{|z - z_1|}{\left| z - \frac{1}{\bar{z}_1} \right|} = |z_1| \frac{e^{d/k} - 1}{e^{d/k} + 1}.$$

Из последнего уравнения мы усматриваем, что она изображает окружность, внутреннюю к фундаментальной, принадлежащую к пучку окружностей с точками Понселе z_1 и $1/\bar{z}_1$, симметричными относительно Γ . Точками Понселе пучка окружностей называют две точки, симметричные относительно каждой окружности пучка, или, что то же, основание пучка, ортогонального к данному. Всякая внутренняя к Γ окружность может быть, очевидно, рассматриваемая и притом однозначным способом как неевклидова окружность. Точка z_1 называется *неевклидовым центром*, неевклидовы прямые, выходящие из z_1 , — *неевклидовыми радиусами*. Легко видеть, что они ортогональны к неевклидовой окружности и ко всем окружностям с тем же неевклидовым центром. В самом деле, это будут окружности, ортогональные к Γ и проходящие через z_1 , а значит, они будут ортогональны ко всем окружностям пучка с точками Понселе z_1 и $1/\bar{z}_1$.

4. **Неевклидова длина кривой.** Длина дуги кривой в геометрии Лобачевского определяется, как и в евклидовой геометрии, посредством вписанной в нее ломаной линии и перехода к пределу. Отсюда следует, что для определения неевклидовой длины дуги кривой нужно взять точки деления на евклидовом изображении, образовать сумму неевклидовых расстояний всех пар последовательных точек и перейти к пределу. Мы знаем, что неевклидово расстояние точек z и $z + \Delta z$ равно $k \ln \frac{1+r}{1-r}$, где

$$r = \frac{|\Delta z|}{|1 - (z + \Delta z)\bar{z}|}.$$

Считая Δz бесконечно малым, мы видим, что это расстояние эквивалентно

$$2kr = \frac{2k |\Delta z|}{|1 - (z + \Delta z)\bar{z}|},$$

и следовательно, $\frac{2k(\Delta z)}{1-|z|^2}$. Таким образом, мы получаем, что

$$D(z, z + \Delta z) = \frac{2k|\Delta z|}{1-|z|^2} (1 + \varepsilon),$$

где ε стремится к нулю вместе с $|\Delta z|$ равномерно относительно z во всякой замкнутой области, расположенной внутри G . Отсюда непосредственно видно, что неевклидова длина дуги L , внутренней к Γ , будет:

$$k \int_L \frac{2 ds}{1-|z|^2}. \quad (27)$$

5. Неевклидова площадь. Площадь области d в геометрии Лобачевского определяется, как и в евклидовой геометрии, посредством вписанного в d квадрильяжа и перехода к пределу. Отсюда следует, что для определения неевклидовой площади нужно взять на евклидовом изображении d квадрильяж из окружностей, ортогональных к Γ , образовать сумму неевклидовых площадей всех его элементов и перейти к пределу.

Из п. 4 мы усматриваем, что элемент неевклидовой площади имеет выражение $\frac{4k^2 d\omega}{(1-|z|^2)^2}$, где $d\omega$ — элемент евклидовой площади. Отсюда мы заключаем, что неевклидова площадь области d , внутренней вместе со своей границей к G , будет:

$$k^2 \iint_d \frac{4 d\omega}{(1-|z|^2)^2} = k^2 \iint_d \frac{4 dx dy}{(1-|z|^2)^2}. \quad (28)$$

6. Горнички. Рассмотрим семейство неевклидовых параллельных между собой прямых, изображаемых на рис. 50 окружностями, ортогональными к Γ в точке α . Их ортогональные траектории изображаются окружностями, касательными к Γ в точке α , и называются *горничками*.

Легко показать, что неевклидова длина частей неевклидовых прямых, заключенных между двумя определенными горничками, будет одна и та же для всего семейства неевклидовых прямых, соответствующих одной и той же точке α . Действительно, выполним линейное преобразование, переводящее точку α в бесконечно удаленную. При этом область G перейдет в полуплоскость, неевклидовы прямые, проходящие через α , перейдут в полупрямые, перпендикулярные к границе Γ_1 полуплоскости, два горничка преобразуются в две прямые, параллельные с Γ_1 , наконец, неевклидова длина частей неевклидовых прямых, заключенных между двумя горничками, становится равной неевклидовой длине соответствующих параллельных прямолинейных отрезков, заключенных между параллельными прямыми, откуда вытекает, что эта длина сохраняет неизменное значение для всего семейства.

7. Гиперциклы. Мы видели, что ортогональными траекториями неевклидовых прямых, выходящих из одной точки, служат неевклидовы окружности (окружности, внутренние к Γ); в предыдущем пункте мы обнаружили, что ортогональные траектории семейства параллельных неевклидовых прямых будут горнички (окружности, касательные к Γ).

Итак, мы рассмотрели, с одной стороны, семейство неевклидовых прямых, изображаемых пучком окружностей, ортогональных к Γ , с двумя действительными центрами, с другой стороны, семейство параллельных неевклидовых прямых, изображаемых пучком окружностей, ортогональных к Γ , с одним центром.

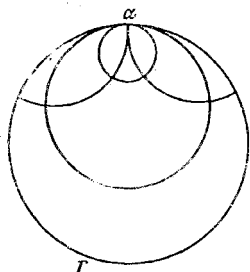


Рис. 50.

Теперь естественно рассмотреть семейство неевклидовых прямых иного вида, изображаемых пучком окружностей, ортогональных к Γ , с мнимыми центрами. Точки Понселе α , β этого пучка, очевидно, действительные и лежат на Γ ; они служат центрами пучка окружностей, ортогональных к рассматриваемому пучку. Внутренние к Γ части окружностей, проходящих через α , β , назовем *гиперциклами* (рис. 51).

Мы видели, что неевклидова окружность есть геометрическое место точек, неевклидово расстояние которых до данной точки — центра — есть величина постоянная. Покажем, что гиперцикл есть геометрическое место точек, неевклидово расстояние которых до данной неевклидовой прямой $\alpha\beta$ есть величина постоянная.

С этой целью выполним линейное преобразование, переводящее α в бесконечность. Тогда область G внутренняя к Γ , преобразуется в полуплоскость, Γ — в прямую Γ_1 границу этой полуплоскости, неевклидова прямая $\alpha\beta$ — в полупрямую, перпендикулярную к Γ_1 в точке β_1 (рис. 52). Вопрос сводится к тому, чтобы найти в полуплоскости геометрическое место точек M таких, что на окружности с центром β_1 , проходящей через M , ангармоническое отношение (u, v, M, ω) имело данную постоянную величину, где u, v — точки на Γ_1 , ω — точка на полупрямой.

Мы получим два геометрических места в зависимости от того, будет ли точка с одной или с другой стороны от полупрямой. Чтобы определить эти геометрические места, нужно ввести в рассмотрение четыре луча: $u\omega, uM, vM$ и касательную к окружности в точке u , и заметить, что их ангармоническое отношение должно быть неизменным; это будет лишь в том случае, когда угол $u\beta_1M$ сохраняет неизменную величину и, значит, точка M должна лежать на полупрямой β_1M . Итак, искомые геометрические места точки M в полуплоскости будут две симметричные относительно полупрямой $\beta_1\omega$ полупрямые.

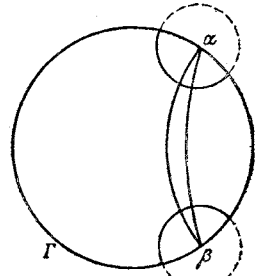


Рис. 51.

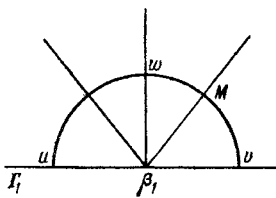


Рис. 52.

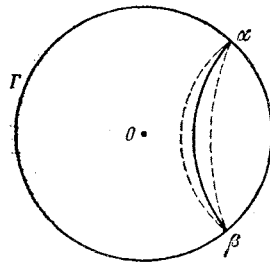


Рис. 53.

Возвращаясь к рис 51, мы получаем два гиперцикла, проходящие через α, β , где они составляют равные углы с окружностью $\alpha\beta$, ортогональной к Γ (рис. 53).

Резюмируя, мы скажем: *часть любой окружности S , внутренняя к Γ , есть неевклидова окружность, горицикл или гиперцикл, смотря по тому, будет ли S внутренней, касательной или секущей окружностью с Γ . Эти классы линий инвариантны при неевклидовом перемещении. Очевидно, неевклидова прямая есть частный вид гиперцикла.*

8. Евклидово изображение геометрии Лобачевского на полуплоскости. Вместо того, чтобы изображать геометрию Лобачевского на внутренности G

единичного круга, как мы это делали до сих пор, можно выполнить это изображение на верхней полуплоскости. Для этого достаточно совершить линейное преобразование области G единичного круга на верхнюю полуплоскость (z) и за новое изображение всех элементов геометрии Лобачевского принять им соответствующие элементы при этом линейном преобразовании.

Таким образом, неевклидовыми точками будут точки верхней полуплоскости, бесконечно удаленными неевклидовыми точками будут точки действительной оси и бесконечно удаленная точка плоскости (z). Далее неевклидовы прямые изобразятся полуокружностями и полупрямыми, ортогональными к действительной оси, неевклидовы окружности — окружностями, лежащими в верхней полуплоскости, горициклы — окружностями, касательными к действительной оси, и прямыми, ей параллельными; наконец, гиперциклы изобразятся лежащими в верхней полуплоскости дугами окружностей, проходящих через любые две точки α , β действительной оси, а также пучками полупрямых верхней полуплоскости, выходящими из любой точки действительной оси. Что касается формул, выведенных выше для неевклидовых расстояний между двумя точками, длины и площади, то они примут более простой вид. Их выражения можно получить, отправляясь от ранее полученных, производя вышеуказанное линейное преобразование:

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}},$$

где θ и $\beta > 0$.

Так, из формулы (26) мы получим

$$D(z_1, z_2) = k \ln \frac{1 + \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} \right|}{1 - \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} \right|}, \quad (26')$$

потому что $r = \left| \frac{w_2 - w_1}{1 - w_2 \bar{w}_1} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} \right|$ в силу линейного преобразования. Полагая в формуле (26') $\bar{z}_1 = z$, $z_2 = z + \Delta z$ и считая Δz бесконечно малым, получим для элемента дуги неевклидову длину $k \frac{ds}{y}$. В самом деле,

$$D(z, z + \Delta z) = k \ln \frac{1 + \left| \frac{\Delta z}{2iy + \Delta z} \right|}{1 - \left| \frac{\Delta z}{2iy + \Delta z} \right|} \sim 2k \left| \frac{\Delta z}{2iy + \Delta z} \right| \sim k \frac{|\Delta z|}{y} \sim k \frac{ds}{y}.$$

Таким образом, неевклидова длина дуги L , лежащей в верхней полуплоскости, будет:

$$k \int_L \frac{ds}{y}. \quad (27')$$

Наконец, вместо формулы (28) для неевклидовой площади области d , лежащей вместе со своей границей в верхней полуплоскости, найдем:

$$k^2 \iint_d \frac{dx dy}{y^2}. \quad (28')$$

9. Неевклидова длина окружности. Рассмотрим неевклидову окружность с центром в A радиуса r и определим ее длину (рис. 54). По условию для

радиуса r имеем: $r = \frac{D(C, C')}{2} = \frac{k}{2} \ln \frac{IC'}{IC}$, потому что ангармоническое отношение четырех точек I, ∞, C', C на прямой IC' равно IC'/iC .
 Для сокращения письма положим:

$$IC = d, IC' = d',$$

так что $d'/d = e^{2r/k}$.

Полуокружность имеет неевклидову длину:

$$\frac{L}{2} = k \int_C^{C'} \frac{ds}{y}.$$

Обозначая через R евклидов радиус окружности, т. е.

$$R = OC = OC' = \frac{d' - d}{2},$$

имеем:

$$y = d + R(1 - \cos \omega), ds = R d\omega,$$

и, значит,

$$\frac{L}{2} = k \int_0^\pi \frac{R d\omega}{d + R(1 - \cos \omega)} = k \int_0^\pi \frac{R d\omega}{\frac{d + d'}{2} - \frac{d' - d}{2} \cos \omega}.$$

Последний интеграл легко вычислить, если положить $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = u$;

$$\frac{L}{2} = 2k \int_0^\infty \frac{R du}{d + d'u^2} = \frac{2kR}{\sqrt{dd'}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d'}{d}} u \right]_0^\infty = \frac{kR\pi}{\sqrt{dd'}}.$$

Исключая R , получим: $\frac{L}{2} = \frac{k}{2} \left(\sqrt{\frac{d'}{d}} - \sqrt{\frac{d}{d'}} \right) \pi$. Заметив, что $d'/d = e^{2r/k}$, окончательно найдем:

$$L = k\pi (e^{r/k} - e^{-r/k}) = 2k\pi \sin \frac{r}{k}. \quad (29)$$

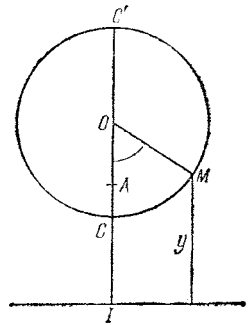


Рис. 54.

10. Угол параллелизма в геометрии Лобачевского. Неевклидов перпендикуляр AH , опущенный из точки A на неевклидову прямую K , образует с двумя

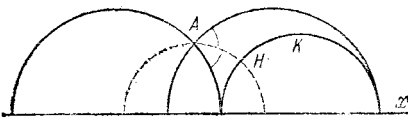


Рис. 55.

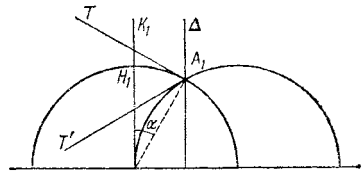


Рис. 56.

неевклидовыми параллельными прямыми один и тот же угол, как мы это докажем; этот неевклидов угол называется *неевклидовым углом параллелизма* (рис. 55). Задача настоящего пункта состоит в том, чтобы вычислить значение этого угла Π (p) в функции $p = D(A, H)$.

Не уменьшая общности, ради простоты мы можем посредством неевклидова перемещения, т. е. линейного преобразования, сохраняющего верхнюю полу-плоскость, изобразить неевклидову прямую K в виде прямой K_1 , перпендикулярной к действительной оси.

Очевидно, две неевклидовы параллельные прямые, проходящие через точку A , изобразятся тогда посредством прямой Δ , перпендикулярной к Ox , и полуокружности, касательной в точке I к K_1 (рис. 56).

Неевклидов перпендикуляр, опущенный из A_1 на K_1 , изобразится полуокружностью с центром в I , проходящей через A_1 .

Проведем прямолинейный отрезок A_1I и обозначим через α угол A_1IH_1 .

Очевидно, тогда имеем из рис. 56: $\Delta A_1T = \pi/2 - \alpha$, $T'A_1I = \alpha$ и, значит, $TA_1T' = \pi/2 - \alpha = \Delta A_1T = \Pi(p)$, чем доказывается равенство углов, образованных A_1H с $A_1\Delta$ и A_1I . С другой стороны, мы видели, что $\Pi(p) = \pi/2 - \alpha$.

Вычислим $\rho = D(A_1, H_1) = k \int_{A_1H_1} \frac{ds}{y}$. Очевидно, получаем:

$$\rho = k \int_{\Pi(p)}^{\pi/2} \frac{R d\omega}{R \sin \omega} = k \int_{\Pi(p)}^{\pi/2} \frac{d\omega}{\sin \omega} = k \left[\ln \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \right]_{\Pi(p)}^{\pi/2},$$

или

$$\rho = -k \ln \operatorname{tg} \frac{\Pi(p)}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\Pi(p)}{2} = e^{-\rho/k}. \quad (30)$$

11. **Неевклидовы площади круга и треугольника.** Пользуясь обозначениями п. 8 (рис. 54), для неевклидовой площади круга получаем выражение

$$S = k^2 \iint \frac{dx dy}{y^2} = k^2 \iint \frac{\rho d\rho d\omega}{(d + R - \rho \cos \omega)^2}.$$

Выполняя внутреннее интегрирование по ω в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, а наружное по ρ в пределах от 0 до R и заменяя в результате R через $(d' - d)/2$, найдем для S следующее выражение:

$$S = \pi k^2 \left(\sqrt{\frac{d'}{d}} - 2 + \sqrt{\frac{d}{d'}} \right),$$

или

$$S = \pi k^2 \left(e^{\frac{r}{k}} - 2 + e^{-\frac{r}{k}} \right) = \pi k^2 \left(e^{\frac{r}{2k}} - e^{-\frac{r}{2k}} \right)^2 = 4\pi k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2k}. \quad (31)$$

Займемся вычислением неевклидовой площади треугольника. Она будет выражаться следующим двойным интегралом:

$$S = k^2 \iint \frac{dx dy}{y^2},$$

где интегрирование берется по области криволинейного треугольника ABC (рис. 57).

Полагая в формуле Грина

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy,$$

$P = \frac{1}{y}$, $Q = 0$, получим для S выражение

$$S = k^2 \iint_{ABC} \frac{dy dx}{y^2} = k^2 \int_{ABC} \frac{dx}{y}. \quad (32)$$

Чтобы вычислить интеграл (32), подсчитаем сначала его значение вдоль дуги AB . Принимая за начало координат центр окружности AB (параллельный перенос вдоль оси Ox , очевидно, не меняет интеграла), найдем:

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad \frac{dx}{y} = -d\theta.$$

Таким образом, интеграл равен вариации θ вдоль AB с противоположным знаком, т. е. вариации с противоположным знаком α вдоль AB , где α означает угол между положительными направлениями касательной к дуге AB и оси Ox (рис. 58). Искомый интеграл, следовательно, есть сумма вариаций α вдоль трех сторон треугольника, взятая с противоположным знаком. Полная вариация, этого угла α , когда точка описывает контур в положительном направлении, отправляясь от какой-либо его точки и возвращаясь в нее, очевидно, равна 2π .

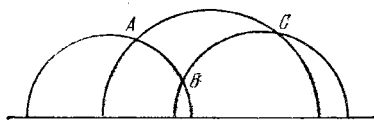


Рис. 57.

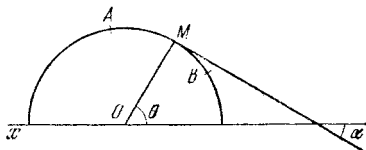


Рис. 58.

В эту полную вариацию входит сумма, которая нас интересует, и сумма вариаций в вершинах A, B, C , каковые будут $\pi - A, \pi - B, \pi - C$. Таким образом, окончательно получаем:

$$\int_{ABC} \frac{dx}{y} = - \left[\int_{AB} d\alpha + \int_{BC} d\alpha + \int_{CA} d\alpha \right] = \\ = - [2\pi - (\pi - A + \pi - B + \pi - C)] = \pi - (A + B + C).$$

В силу своего геометрического смысла, определяемого формулой (32), этот интеграл существенно положителен, т. е. $\pi - (A + B + C) > 0$, откуда мы заключаем: *сумма углов неевклидова треугольника меньше π* . Кроме того, мы видим, что неевклидова площадь треугольника равна избытку π над суммой трех его углов, умноженной на k^2 .

В частности, неевклидова площадь любого треугольника не может превзойти конечной величины πk^2 . Эта максимальная неевклидова площадь, равная πk^2 , очевидно, будет у треугольников, у которых все три угла равны нулю. Легко видеть, что изображения всех вершин такого треугольника лежат на фундаментальной окружности, т. е. все три вершины будут бесконечно удаленными точками плоскости Лобачевского.

§ 3. Некоторые элементарные функции и отображения, даваемые ими

1. Степенная функция и радикал. Рассмотрим функцию

$$w = z^n, \tag{33}$$

где n есть натуральное число, большее единицы. Функция, обратная этой, есть

$$z = \sqrt[n]{w}. \tag{33'}$$

Функция $m = z^n$ имеет производную, отличную от нуля во всякой конечной точке плоскости, кроме начала координат. Следова-

тельно, во всякой такой точке сохраняются углы при отображении с помощью функции $w = z^n$.

Посмотрим, как ведет себя наша функция в окрестности нулевой точки. Для этого введем полярные координаты:

$$z = re^{\varphi i}, \quad w = \rho e^{\theta i},$$

после чего равенство (33) даст:

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi. \quad (34)$$

Из второго равенства (34) видно, что углы в нулевой точке не сохраняются, а увеличиваются в n раз. Консерватизм углов

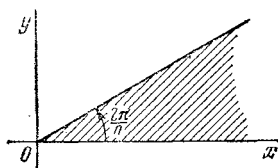


Рис. 59.

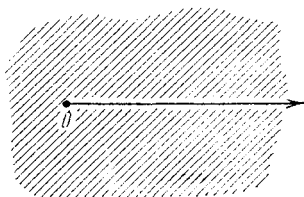


Рис. 60.

нарушается и в бесконечно удаленной точке плоскости z , потому что функция $\frac{1}{w\left(\frac{1}{z}\right)}$ в окрестности $z = 0$ совпадает с данной функцией. Точки 0 и ∞ будут точками разветвления функции $z = \sqrt[n]{w}$ (гл. II, § 4, п. 10).

Особенность точек 0 и ∞ , а также название их точками разветвления будут еще более ясными, если мы заметим, что каждой точке плоскости w , кроме этих двух, соответствует n различных точек плоскости z . Из соотношений (34) видно, что окружности с центром в нулевой точке плоскости переменного z ($r = \text{const}$) переходят на плоскости w тоже в окружности ($\rho = \text{const}$); полупрямым, выходящим из нулевой точки ($\varphi = \text{const}$), будут соответствовать тоже полупрямым ($\theta = \text{const}$).

Возьмем на плоскости переменного z угол величины $2\pi/n$, образуемый положительной действительной осью и полупрямой, выходящей из нулевой точки (рис. 59). Этот угол $0 \leq \varphi \leq 2\pi/n$ с помощью функции (33) отобразится на всю плоскость переменного w , разрезанную на положительной полуоси (рис. 60). Действительно, при $\varphi = 0$ угол $\theta = 0$; при $\varphi = 2\pi/n$ угол $\theta = 2\pi$.

Рассмотрим теперь некоторые простейшие отображения, связанные с функцией $w = z^n$. Совершенно ясно, что эта функция дает возможность отобразить угол величины π/n , $0 \leq \varphi \leq \pi/n$ (рис. 61), на верхнюю полуплоскость (рис. 62).

Зададимся задачей отобразить полуокруг с центром в нулевой точке радиуса единица на верхнюю полуплоскость. Сначала отобразим отрезок от -1 до $+1$ в положительную действительную полуось так, чтобы точке -1 соответствовала точка 0 , а точке $+1$ — точка ∞ . В качестве отображающей функции можно взять:

$$w' = -\frac{z+1}{z-1}. \quad (35)$$

Легко видеть, что действительно такая функция удовлетворяет требуемым условиям, так как при изменении z от -1 до $+1$ функция w' пробегает, возрастая, все значения от 0 до $+\infty$.

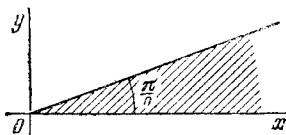


Рис. 61.

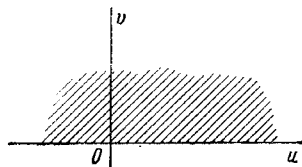


Рис. 62.

Посмотрим, во что эта функция будет переводить полуокружность. Имеем:

$$w' = -\frac{e^{\varphi i} + 1}{e^{\varphi i} - 1} = -\frac{e^{\frac{\varphi}{2} i} + e^{-\frac{\varphi}{2} i}}{e^{\frac{\varphi}{2} i} - e^{-\frac{\varphi}{2} i}} = -\frac{1}{i} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{i}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}. \quad (36)$$

Когда точка z пробегает полуокружность от 1 до -1 , то φ меняется от 0 до π , значит, w' будет изменяться по положительной мнимой полуоси. Заметим, что когда точка z описывает полуокружность в положительном направлении (рис. 63), то область

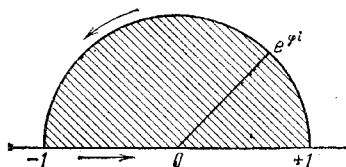


Рис. 63.

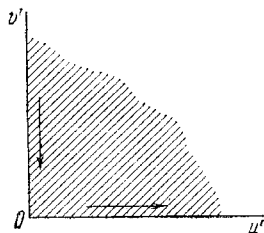


Рис. 64.

полуокруга остается слева. Из предыдущих формул (35) и (36) нетрудно видеть, каково будет направление соответствующего обхода на плоскости w' . На нашем чертеже (рис. 64) оно обозначено стрелками. Так как отображенная область должна находиться также слева при обходе переменным w' полуоси Ov' и полуоси Ou' , то отсюда заключаем, что наш полуокруг с помощью

функции (35) отобразится на координатный угол плоскости w' . Для того чтобы преобразовать полученный координатный угол в верхнюю полуплоскость, нужно взять:

$$w = w'^2.$$

Итак, искомая функция напишется таким образом:

$$w = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2. \quad (37)$$

Как отобразить сектор с углом, равным π/n , радиуса единица на верхнюю полуплоскость? Очевидно, что функция $w' = z^n$ будет переводить этот сектор в полукруг. Этот же последний с помощью уже знакомой нам функции (37) мы можем отобразить на верхнюю полуплоскость. Таким образом, искомая функция есть

$$w = \left(\frac{z^n + 1}{z^n - 1} \right)^2. \quad (38)$$

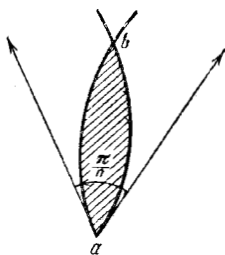


Рис. 65.

Как отобразить область, заключенную между двумя пересекающимися под углом π/n окружностями на верхнюю полуплоскость?

Обозначая через a и b вершины данного двуугольника (рис. 65), берем линейную функцию

$$\frac{z-a}{z-b}. \quad (39)$$

Эта функция переведет точку a в точку 0, а точку b в ∞ . Следовательно, одну дугу окружности линейная функция (39) переведет в один луч, выходящий из нулевой точки, другую дугу окружности в другой луч, составляющий с первым угол π/n , так как функция (39) в точке a имеет производную, отличную от нуля. Остается отобразить угол, ограниченный двумя только что упомянутыми лучами, на полуплоскость. Это мы умеем делать. Итак, искомая функция имеет вид

$$w = \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^n. \quad (40)$$

2. Показательная и логарифмическая функции. Рассмотрим теперь показательную функцию

$$w = e^z. \quad (41)$$

Обратная этой функции будет, как известно, логарифмическая функция

$$z = \ln w. \quad (41')$$

Представим z в декартовых координатах, а w — в полярных: $z = x + yi$, $w = re^{i\varphi}$. Равенство (41) заменится следующими двумя формулами:

$$r = e^x, \quad \varphi = y. \tag{41''}$$

Из последних равенств (41'') видно, что прямой $x = \text{const}$ на плоскости w соответствует окружность $r = \text{const}$, а прямой $y = \text{const}$ соответствует полупрямая $\varphi = \text{const}$ (рис. 66 и 67).

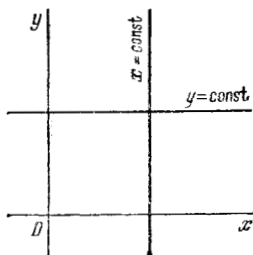


Рис. 66.

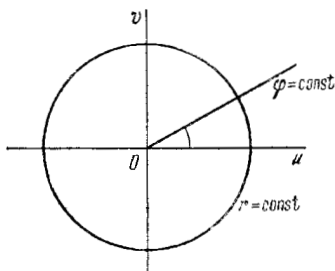


Рис. 67.

Возьмем на плоскости z полосу, заключенную между действительной осью и прямой $y = 2\pi : 0 \leq y < 2\pi$.

Эта полоса отобразится с помощью функции (41) на всю плоскость переменного w . Действительно, нижней границе нашей полосы, т. е. действительной оси плоскости z , по предыдущему будет соответствовать положительная действительная полуось плоскости w , верхней границе полосы — та же полуось.

Возьмем теперь полосу на плоскости z шириной π , ограниченную действительной осью и прямой $y = \pi : 0 \leq y \leq \pi$. С помощью показательной функции (41) эта полоса отобразится на верхнюю полуплоскость $v \geq 0$. Верхнюю полуплоскость, как мы знаем (§ 1, п. 8), можно отобразить на круг с помощью линейного преобразования. Если нам дана полоса какой угодно ширины и как-либо расположенная на плоскости z , то, применяя уже знакомые нам операции переноса, вращения и подобия (§ 1, п. 1), мы ей придадим предыдущий вид, а затем отобразим на верхнюю полуплоскость, последнюю же преобразуем в круг. Итак, мы видим, как любую полосу можно отобразить на круг.

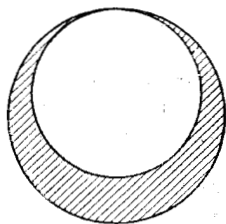


Рис. 68.

Как отобразить область, заключенную между двумя соприкасающимися окружностями, на круг (рис. 68)? При помощи одной и той же линейной функции мы можем отобразить наши

окружности на прямые, заставляя отвечать точке соприкосновения точку ∞ . Эти прямые будут параллельны, так как окружности соприкасаются. Итак, мы можем отобразить заданную область на полосу, а следовательно, по предыдущему и на круг.

Рассмотрим еще два примера. Пусть в плоскости w дан криволинейный четырехугольник, две стороны которого суть концентрические полуокружности радиусов r и 1 ($r > 1$), а две другие стороны — прямолинейные отрезки оси Ou (рис. 69). Когда

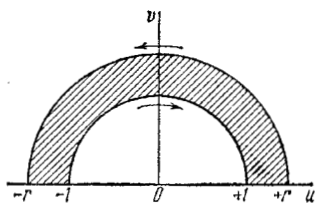


Рис. 69.

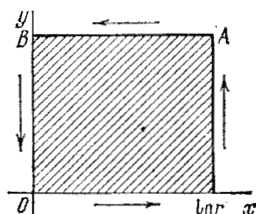


Рис. 70.

точка w движется по большой полуокружности от r до $-r$, то соответствующая точка $z = \ln w$ будет описывать прямолинейный отрезок длины π , параллельный оси Oy и отстоящий от нее на расстоянии $\ln r$ (ибо $z = \ln r + \varphi i$). Когда w движется по оси Ou от $-r$ до -1 , т. е. когда $w = r'e^{-i\varphi}$, где r' меняется от r до 1 , то z движется по отрезку AB , параллельному оси Ox (рис. 70). Далее, когда точка z движется по малой окружности от -1 до $+1$, то точка z движется по мнимой оси от B до O . Наконец, когда w

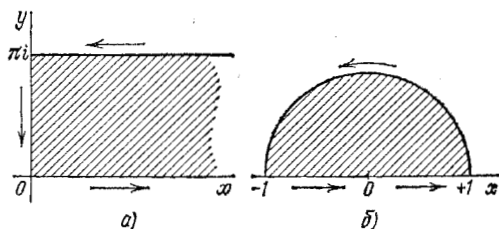


Рис. 71.

описывает ось Ou от 1 до r , то z изменяется по действительной оси от 0 до $\ln r$. Итак, с помощью логарифмической функции наш криволинейный четырехугольник отображается на обыкновенный прямоугольник.

В качестве последнего примера возьмем полуполосу шириной π , которая ограничена: 1) положительной полуосью Ox , 2) полупрямой $y = \pi$, простирающейся от мнимой полуоси до бесконечности, и 3) мнимой полуосью (рис. 71, а). Как отобразить ее на

верхнюю полуплоскость? Возьмем функцию $w' = -e^{-z}$ и посмотрим, во что она переведет нашу полуполосу в плоскости w' . Пусть z описывает полупрямую $y = \pi$ от ∞ до оси Oy . В этом случае значение w' будет:

$$w' = -e^{-(x+\pi i)} = e^{-x}.$$

Когда x изменяется от $+\infty$ до 0, то w' , следовательно, будет изменяться от 0 до 1. Пусть, далее, z движется по оси Oy от πi до 0; w' примет вид $w' = -e^{-yi}$, откуда $|w'| = 1$. Следовательно, точка w' описывает при этом полуокружность от точки +1 до точки -1, так как y меняется от π до 0 (рис. 71, б). Наконец, когда точка z движется по оси Ox от 0 до ∞ , то $w' = -e^{-x}$ изменяется по оси Ow' от -1 до 0. Итак, функция $w' = -e^{-z}$ отображает полуполосу на полукруг. Так как мы уже отображали полукруг на верхнюю полуплоскость (п. 1) с помощью функции $w = \left(\frac{w'+1}{w'-1}\right)^2$, то мы можем данную полуполосу перевести на верхнюю полуплоскость посредством преобразования

$$w = \left(\frac{e^{-z} - 1}{e^{-z} + 1}\right)^2.$$

Упражнения к главе III

1. Выполнить графически инверсию прямой относительно окружности. **Указание.** Следует отдельно рассмотреть случаи, когда прямая пересекается с основной окружностью, имеет касание и не пересекается с ней.

2. Выполнить графическое построение инверсии окружности, проходящей через полюс. **Указание.** Построение будет обратным построению задачи 1.

3. Выполнить графически инверсию окружности, не проходящей через полюс. **Указание.** Следует отдельно рассмотреть случаи, когда окружность пересекается с основной окружностью, касается ее и не пересекается с ней.

4. Зная центр α и радиус r окружности, определить положение центра и величину радиуса окружности, являющейся инверсией данной, принимая полюс в начале координат и радиус инверсии равным R .

$$\text{Отв. } \beta = \frac{R^2\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}, \quad \rho = \frac{R^2(r)}{|\alpha|^2 - r^2}.$$

5. Написать линейное преобразование единичного круга самого в себя, зная двойные точки $\frac{1}{2}$, 2 и точку $\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$, переходящую в бесконечность.

$$\text{Отв. } \frac{w-1/2}{w-2} = i \frac{z-1/2}{z-2}.$$

6. Написать линейное преобразование единичного круга самого в себя, зная двойные точки i , $-i$ и точку $2i$, переходящую в бесконечность.

$$\text{Отв. } \frac{w-i}{w+i} = 3 \frac{z-i}{z+i}.$$

7. Написать линейное преобразование единичного круга самого в себя, зная его двойную точку 1 и точку $1+i$, переходящую в бесконечность.

$$\text{Отв. } \frac{1}{w-1} = \frac{1}{z-1} - i, \quad \text{или } w = \frac{(i-1)z+1}{-z+(1+i)}.$$

8. Составить линейное преобразование верхней полуплоскости на единичный круг, переводящее точки действительной оси $-1, 0, +1$ в точки $+1, i, -1$ окружности.

Отв. $w = (z - i) : (iz - 1)$.

9. Пользуясь изображением геометрии Лобачевского на полуплоскости, решить задачу: зная евклидовы центр $z_0 = x_0 + iy_0$ и радиус ρ окружности, найти ее неевклидовы центр z и радиус R .

Отв. $z = x_0 + i\sqrt{y_0^2 - \rho^2}$, $R = \frac{k}{2} \ln \frac{y_0 + \rho}{y_0 - \rho}$.

10. Решить задачу 9 построением.

11. Отобразить на верхнюю полуплоскость единичный круг с купурой, идущей от центра по радиусу действительной оси.

Отв. $w = \left(\frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1} \right)^2$.

12. Область задачи 11 отобразить на единичный круг так, чтобы точки $-1, 0$ и 1 перешли в точки $i, -i$ и 1 .

Отв. $\zeta = \frac{z + 1 + 2i\sqrt{z}}{i(z + 1) + 2\sqrt{z}}$.

ТЕОРЕМА КОШИ. ИНТЕГРАЛ КОШИ

§ 1. Интегралы по комплексному переменному

1. **Понятие интеграла по комплексному переменному.** Перейдем к определению понятия интеграла в комплексной области. Пусть $w = f(z)$ есть произвольная непрерывная функция комплексного переменного z , определенная в некоторой области G плоскости переменного z , и C — произвольная гладкая линия, лежащая в этой области, с началом в точке z_0 и концом в точке Z (рис. 72)¹⁾. Разобьем дугу z_0Z линии C на произвольное число n частичных дуг с помощью точек $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = Z$, расположенных последовательно в положительном направлении линии C . Каждой частичной дуге приведем в соответствие число $f(z_h) \Delta z_h$, полученное от умножения значения данной функции в левом конце этой дуги на соответствующее этой дуге приращение Δz_h переменного $z: \Delta z_h = z_{h+1} - z_h$. Составим, далее, сумму всех таких произведений, распространив ее на все частичные дуги:

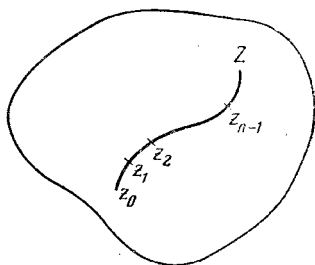


Рис. 72.

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k) \Delta z_k. \tag{1}$$

Заставляя максимум длин всех частичных дуг стремиться к нулю, докажем, что выражение (1) стремится к определенному конечному пределу, не зависящему от того закона, по которому все частич-

¹⁾ Линия Жордана называется *гладкой*, если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную. Аналитически гладкая линия может быть представлена уравнением $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), где $z'(t)$ непрерывна и отлична от нуля, причем $z(t_1) \neq z(t_2)$, если $t_1 \neq t_2$, кроме, быть может, случая $t_1 = \alpha, t_2 = \beta$. Линия Жордана называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких дуг (простейший пример кусочно-гладкой линии — контур многоугольника).

ные дуги стремятся к нулю. С этой целью, введя обозначения

$$z_k = x_k + y_k i, \quad f(z_k) = u(x_k, y_k) + v(x_k, y_k) i = u_k + v_k i, \\ \Delta z_k = \Delta x_k + i \Delta y_k,$$

представим выражение (1) в виде

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k) \Delta z_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_k + v_k i) (\Delta x_k + i \Delta y_k) = \\ = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=0}^{k=n-1} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k). \quad (2)$$

Заставляя максимум длин всех частичных дуг стремиться к нулю, мы видим, что обе суммы правой части последнего равенства (2) стремятся соответственно к пределам

$$\int_C u dx - v dy \quad \text{и} \quad i \int_C v dx + u dy;$$

следовательно, левая часть равенства (2) стремится к определенному конечному пределу, когда длины всех частичных дуг по произвольному закону стремятся к нулю. Этот предел мы назовем интегралом от $f(z) dz$ вдоль линии C и обозначим через $\int_C f(z) dz$.

Итак, имеем:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (3)$$

Эта формула дает выражение интеграла по комплексному переменному через два действительных криволинейных интеграла. Формулу (3) легко запомнить, если написать в таком виде:

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + vi) (dx + idy). \quad (3')$$

Что касается фактического вычисления интеграла по комплексному переменному, то, предполагая уравнение линии C в виде $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), имеем:

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \{u[z(t)] x'(t) - v[z(t)] y'(t)\} dt + \\ + i \int_{\alpha}^{\beta} \{v[z(t)] x'(t) + u[z(t)] y'(t)\} dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt, \quad (4)$$

или

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} R(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} I(t) dt, \quad (4')$$

где $R(t)$ и $I(t)$ суть соответственно действительная часть и коэффициент при мнимой части выражения $f[z(t)] \cdot z'(t)$. На основании формулы (4') вопрос вычисления интеграла по комплексному переменному приводится к вычислению обыкновенных определенных интегралов.

До сих пор мы предполагали, что путь интегрирования Γ есть гладкая линия. Если мы имеем произвольную кусочно-гладкую линию Γ , состоящую из гладких линий C_1, C_2, \dots, C_n , то по определению полагаем:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad (5)$$

Очевидно, формула (4'), выражающая интеграл по комплексному переменному с помощью обыкновенных определенных интегралов, остается в силе и для интеграла, взятого вдоль линии Γ .

З а м е ч а н и е Определение интеграла по комплексному переменному, очевидно, остается в силе, если данная функция $f(z)$ непрерывна лишь вдоль линии Γ .

Пример. Пусть Γ — произвольная кусочно-гладкая линия, соединяющая две точки z_0 и Z . Тогда интеграл

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1} (Z^{n+1} - z_0^{n+1}),$$

если n есть целое число, отличное от -1 . (При отрицательном n линия Γ не должна проходить через точку $z = 0$.) В самом деле, пусть $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) есть параметрическое изображение линии Γ ; тогда имеем:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \int_{\alpha}^{\beta} z^n z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{n+1} \frac{d}{dt} [z(t)]^{n+1} dt = \frac{1}{n+1} (Z^{n+1} - z_0^{n+1}).$$

Таким образом, значение интеграла от функции z^n ($n \neq -1$) не зависит от пути интегрирования. В частности, если Γ есть замкнутый контур, то $Z = z_0$ и

$$\int_{\Gamma} z^n dz = 0.$$

2. Основные свойства интеграла по комплексному переменному. Отметим теперь ряд простейших свойств интеграла по комплексному переменному, непосредственно вытекающих из его определения:

$$1) \quad \int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma^+} f(z) dz,$$

где Γ^+ и Γ^- обозначают один и тот же путь, проходимый соответственно в положительном и отрицательном направлениях.

$$2) \quad \int_{\Gamma} af(z) dz = a \int_{\Gamma} f(z) dz \quad (a — \text{постоянное}),$$

$$3) \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z) dz,$$

если путь интегрирования Γ описывается движущейся точкой, проходящей последовательно его части $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

$$4) \quad \int_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)] dz = \\ = \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \int_{\Gamma} f_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z) dz.$$

Все эти четыре свойства немедленно доказываются, исходя из определения интеграла как предела суммы, аналогично соответствующим свойствам обыкновенных интегралов.

5) Если вдоль линии Γ имеет место неравенство $|f(z)| \leq M$, где M есть постоянное число, то, обозначая через l длину линии Γ , имеем:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq Ml.$$

Действительно:

$$\left| \sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} |f(z_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=0}^{k=n-1} |\Delta z_k| \leq Ml,$$

так как $\sum_{k=0}^{k=n-1} |\Delta z_k|$ обозначает длину ломаной, вписанной в Γ .

Переходя к пределу, из последнего неравенства получим:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq Ml.$$

6) Неравенство 5) может быть выведено также из более точного неравенства

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| = \int_{\Gamma} |f(z)| ds.$$

Последнее вытекает из неравенства

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)| |\Delta z_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)| \Delta s_k$$

переходом к пределу.

3. Интегрирование равномерно сходящегося ряда. Свойство 4) предыдущего пункта показывает, что интеграл от суммы конечного числа слагаемых равен сумме интегралов от слагаемых. Из интегрального исчисления известно, что, вообще говоря, нельзя интегрировать почленно бесконечный ряд функций, даже если он сходится к непрерывной функции. Однако интеграл суммы рав-

номерно сходящегося ряда непрерывных функций может быть определен через почленное интегрирование.

Как известно (гл. II, § 2, п. 2), сумма равномерно сходящегося на линии Γ ряда непрерывных функций

$$s(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots \quad (6)$$

есть функция, непрерывная на Γ . Из условия равномерной сходимости ряда (6) вдоль линии Γ следует, что при любом ε ($\varepsilon > 0$) существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что сумма n первых членов ряда (6) $s_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z)$ отличается от суммы ряда $s(z)$ по модулю меньше, нежели на ε , вдоль Γ , как только $n \geq N = N(\varepsilon)$ (гл. II, § 2, п. 1).

Следовательно, если положим:

$$s(z) = s_n(z) + r_n(z), \quad (7)$$

то вдоль Γ имеем:

$$|r_n(z)| < \varepsilon. \quad (8)$$

Обозначая через l длину линии Γ , получаем в силу (8), на основании свойства 5) (п. 2):

$$\left| \int_{\Gamma} [s(z) - s_n(z)] dz \right| = \left| \int_{\Gamma} r_n(z) dz \right| < \varepsilon l,$$

или

$$\left| \int_{\Gamma} s(z) dz - \int_{\Gamma} u_1(z) dz - \int_{\Gamma} u_2(z) dz - \dots - \int_{\Gamma} u_n(z) dz \right| < \varepsilon l,$$

т. е.

$$\int_{\Gamma} s(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma} u_1(z) dz + \int_{\Gamma} u_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} u_n(z) dz \right\}. \quad (9)$$

Равенство (9) иначе может быть записано в таком виде:

$$\int_{\Gamma} s(z) dz = \int_{\Gamma} u_1(z) dz + \int_{\Gamma} u_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} u_n(z) dz + \dots \quad (10)$$

Доказанное предложение может быть еще сформулировано таким образом: *если вдоль пути интегрирования последовательность непрерывных функций $s_n(z)$ сходится равномерно к функции $s(z)$, то имеем:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} s_n(z) dz = \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) dz = \int_{\Gamma} s(z) dz. \quad (10')$$

Примечание. Это предложение может быть расширено следующим образом. Пусть равномерно для всех точек z , принадлежащих пути интегрирования Γ , имеем $\lim_{t \rightarrow \tau} f(z, t) = f(z)$, где $f(z, t)$ и $f(z)$ суть функции, непрерывные

вдоль Γ . Другими словами, для любого сколь угодно малого ε ($\varepsilon > 0$) существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $|f(z, t) - f(z)| < \varepsilon$ при условии $|t - \tau| < \delta$, считая z произвольной точкой на Γ .

Поступая аналогично предыдущему доказательству, получим:

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \int_{\Gamma} f(z, t) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

4. Теорема Коши. Из определения интеграла от непрерывной функции $f(z)$ следует, что его значение зависит, вообще говоря, не только от подынтегральной функции, но и от пути интегрирования Γ . Иными словами, соединяя точки z_0 и Z двумя различными линиями Γ и Γ' , принадлежащими односвязной области G , и вычисляя $\int f(z) dz$ вдоль каждой из этих линий, мы получим, вообще говоря, разные числа. Естественно возникает вопрос: каким условиям должна удовлетворять функция $f(z)$ для того, чтобы значение ее интеграла не зависело от пути интегрирования, а определялось лишь положениями начальной и конечной точек этого пути? Легко показать, поступая так же, как в случае действительных криволинейных интегралов, что эта задача об условиях независимости интеграла от пути интегрирования равносильна задаче нахождения условий, при которых данный интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, равен нулю. Решение этой задачи мы можем поставить в зависимость от соответствующей задачи для действительных криволинейных интегралов вследствие того, что интеграл по комплексному переменному выражается через два действительных криволинейных интеграла. Итак, предположим, что функция $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$, аналитическая в односвязной области G , имеет в каждой точке этой области непрерывную производную. Отсюда следует, что функции u и v непрерывны в области G вместе с их частными производными, которые удовлетворяют уравнениям (гл. II, § 4, п. 4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{C.—R.})$$

Обозначая через Γ произвольный замкнутый контур, лежащий в области G , и замечая, что в силу формулы (3)

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy, \quad (11)$$

мы имеем на основании известной теоремы¹⁾:

$$\int_{\Gamma} u dx - v dy = 0, \quad (12)$$

¹⁾ См., например, Поссэ К. А. Курс интегрального исчисления. — М.: ОНТИ, 1935, гл. VI, § 2 (изд. 2-е), или Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Гостехиздат, 1950, т. II, п. 71 (изд. 10-е).

так как

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

и

$$\int_{\Gamma} v dx + u dy = 0, \quad (12')$$

так как

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вследствие равенств (12) и (12') формула (11) принимает вид

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (13)$$

Итак, мы доказали, что *если функция $f(z)$, однозначная в односвязной области G , имеет в каждой точке этой области непрерывную производную, то интеграл от этой функции, взятый вдоль любого замкнутого контура, принадлежащего области G , равен нулю.* Это предложение является основным в теории аналитических функций и называется теоремой Коши. В изложенном доказательстве теоремы Коши существенно предположение непрерывности производной функции $f(z)$. Однако это ограничение не является необходимым для справедливости этой теоремы, и в следующей главе мы изложим другое доказательство теоремы Коши, предполагая лишь существование в области G конечной производной функции $f(z)$. Таким образом, мы установим предложение Коши для любой функции $f(z)$, аналитической в области G .

§ 2. Теорема Коши

1. Основная лемма. Пусть $f(z)$ есть непрерывная функция, определенная в некоторой области G плоскости комплексного переменного z , и Γ — произвольная кусочно-гладкая линия, лежащая в этой области. При любом сколь угодно малом ε ($\varepsilon > 0$) существует ломаная линия P , вписанная в Γ , целиком лежащая в области G , такая, что

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon, \quad (14)$$

т. е. значение интеграла $\int_{\Gamma} f(z) dz$ можно аппроксимировать с любой степенью точности посредством значения того же интеграла, взятого вдоль ломаной линии P , вписанной в Γ и лежащей в области G .

Для доказательства рассмотрим замкнутую область \bar{D} , часть области G , содержащую внутри линию Γ . Так как по условию функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке области \bar{D} , то она равномерно непрерывна в этой области (гл. II, § 1, п. 4). Следовательно, при любом сколь угодно малом ε ($\varepsilon > 0$) существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon,$$

если $|z' - z''| < \delta$, причем z' и z'' суть любые две точки области \bar{D} .

Разобьем линию Γ на n дуг s_0, s_1, \dots, s_{n-1} , длина каждой из которых была бы меньше δ , и впишем в линию Γ ломаную линию P ,

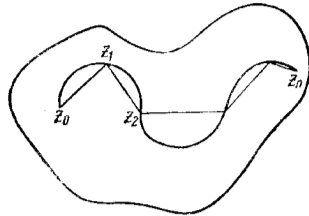


Рис. 73.

звенья которой l_0, l_1, \dots, l_{n-1} стягивают эти дуги. Обозначим вершины ломаной линии P через $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n$ (рис. 73). Так как длина каждой дуги s_k меньше δ , то расстояние между любыми двумя точками одной и той же дуги и поэтому меньше δ . То же самое будет для наших звеньев l_k . Сравним теперь значение

$\int_{\Gamma} f(z) dz$ со значением того же интеграла вдоль ломаной линии P .

С этой целью рассмотрим сумму, являющуюся приближенным значением $\int_{\Gamma} f(z) dz$:

$$S = f(z_0) \Delta z_0 + f(z_1) \Delta z_1 + \dots + f(z_{n-1}) \Delta z_{n-1}. \quad (15)$$

Заметив, что $\Delta z_k = \int_{s_k} dz$, представим выражение (15) в виде

$$S = \int_{s_0} f(z_0) dz + \int_{s_1} f(z_1) dz + \dots + \int_{s_{n-1}} f(z_{n-1}) dz. \quad (15')$$

С другой стороны, интеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$ можно представить как сумму интегралов, взятых по дугам s_k :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{s_0} f(z) dz + \int_{s_1} f(z) dz + \dots + \int_{s_{n-1}} f(z) dz. \quad (16)$$

Производя почленное вычитание равенств (16) и (15'), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz - S &= \int_{s_0} (f(z) - f(z_0)) dz + \int_{s_1} (f(z) - f(z_1)) dz + \dots \\ &\quad \dots + \int_{s_{n-1}} (f(z) - f(z_{n-1})) dz. \end{aligned}$$

Замечая, что на каждой дуге s_k имеем: $|f(z) - f(z_k)| \leq \varepsilon$, получаем:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - S \right| \leq \varepsilon s_0 + \varepsilon s_1 + \dots + \varepsilon s_{n-1} = \varepsilon l, \quad (17)$$

где l есть длина всей линии Γ .

Поступая аналогично, оценим модуль разности $\int_P f(z) dz - S$.

Заметив, что $\Delta z_k = \int_{l_k} dz$, представим выражение (15) в виде

$$S = \int_{l_0} f(z_0) dz + \int_{l_1} f(z_1) dz + \dots + \int_{l_{n-1}} f(z_{n-1}) dz. \quad (15'')$$

С другой стороны, интеграл $\int_P f(z) dz$ можно представить как сумму интегралов, взятых по звеньям l_k :

$$\int_P f(z) dz = \int_{l_0} f(z) dz + \int_{l_1} f(z) dz + \dots + \int_{l_{n-1}} f(z) dz. \quad (16')$$

Вычитая почленно из равенства (16') равенство (15''), получим:

$$\begin{aligned} \int_P f(z) dz - S &= \int_{l_0} (f(z) - f(z_0)) dz + \int_{l_1} (f(z) - f(z_1)) dz + \dots \\ &\quad \dots + \int_{l_{n-1}} (f(z) - f(z_{n-1})) dz. \end{aligned}$$

Так как на каждом звене l_k имеем $|f(z) - f(z_k)| \leq \varepsilon$, то находим:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - S \right| &\leq \varepsilon l_0 + \varepsilon l_1 + \dots + \varepsilon l_{n-1} = \\ &= \varepsilon (l_0 + l_1 + \dots + l_{n-1}) < \varepsilon l. \quad (18) \end{aligned}$$

Из неравенства (17) и (18) получаем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - S \right| + \left| S - \int_P f(z) dz \right| < \\ &< \varepsilon l + \varepsilon l = 2\varepsilon l. \end{aligned}$$

Итак, всегда возможно вписать в линию Γ ломаную линию P так, что разность значений $\int f(z) dz$ вдоль Γ и вдоль P будет по модулю меньше произвольно малого положительного числа.

2. Приведение доказательства теоремы Коши к простейшему случаю. Теорема Коши может быть формулирована таким образом: *если $f(z)$ есть функция, аналитическая в некоторой односвяз-*

ной области G , то $\int f(z) dz$, взятый вдоль любого замкнутого контура Γ , лежащего в G , равен нулю.

Если мы допустим, что предложение Коши доказано в случае произвольной замкнутой ломаной линии P , принадлежащей области G , то эта теорема будет верна для любой замкнутой кусочно-гладкой линии Γ . Действительно, предполагая ε ($\varepsilon > 0$) сколь угодно малым числом, впишем в замкнутый контур Γ на основании леммы п. 1 замкнутую ломаную линию P так, чтобы иметь:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Так как по допущению имеем: $\int_P f(z) dz = 0$, то из последнего неравенства следует:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon, \text{ т. е. } \int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Итак, первое упрощение доказательства теоремы Коши состоит в том, что мы сводим его к случаю, когда контуром интегрирования является замкнутая ломаная линия.

Покажем теперь, что доказательство этого случая приводится к случаю, когда линией интегрирования служит периметр треугольника. В самом деле, разбивая данный многоугольник с периметром P диагоналями на треугольники (рис. 74), представим $\int_P f(z) dz$ как сумму интегралов, взятых по периметрам треугольников, на которые разбит данный многоугольник:

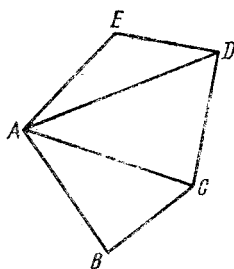


Рис. 74.

$$\int_P f(z) dz = \int_{ABCA} + \int_{ACDA} + \int_{ADEA}, \quad (19)$$

так как интегрирование по каждой диагонали совершается два раза в противоположных направлениях, а потому уничтожается.

Таким образом, если мы допустим, что предложение Коши доказано для случая, когда контуром интегрирования служит периметр произвольного треугольника области G , то оно вследствие равенства (19) будет тем самым доказано для замкнутой ломаной линии P , а значит, и для линии Γ .

3. Доказательство теоремы Коши. На основании предыдущего пункта доказательство теоремы Коши приводится к доказательству следующего предложения: если $f(z)$ есть функция, аналитическая в односвязной области G , то интеграл $\int f(z) dz$, взятый

вдоль периметра Δ произвольного треугольника, принадлежащего области G , равен нулю.

Положим $\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| = M$ и докажем, что $M = 0$.

Разделив стороны данного треугольника пополам, соединив попарно полученные точки деления, мы разобьем данный треугольник, на четыре конгруэнтных треугольника с периметрами $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ (рис. 75). Очевидно, имеем:

$$\int_{\Delta} f(z) dz = \int_{\Delta_1} + \int_{\Delta_2} + \int_{\Delta_3} + \int_{\Delta_4}, \quad (20)$$

так как интегрирование по каждому отрезку, соединяющему точки деления, совершается два раза в противоположных направлениях и потому уничтожается. Так как $\left| \int_{\Delta} \right| = M$,

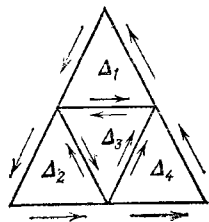


Рис. 75.

то из равенства (20) следует, что найдется хотя бы один периметр Δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$), модуль интеграла по которому будет не меньше, чем $M/4$. Пусть, например, это будет периметр Δ_1 :

$$\left| \int_{\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}. \quad (21)$$

С этим треугольником периметра Δ_1 поступим так же, как с первоначальным, разбив его на четыре конгруэнтных треугольника. Следовательно, опять найдется такой треугольник с периметром $\Delta^{(2)}$, принадлежащий треугольнику с периметром Δ_1 , что имеем:

$$\left| \int_{\Delta^{(2)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}. \quad (22)$$

Очевидно, этот процесс можно продолжать до бесконечности. Таким образом, мы получим последовательность треугольников с периметрами $\Delta = \Delta^{(0)}, \Delta_1 = \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}, \dots$, из которых каждый содержит следующий, и таких, что имеют место неравенства

$$\left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (23)$$

Обозначая длину периметра Δ через U и замечая, что длины периметров $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}, \dots$ суть соответственно $U/2, U/2^2, \dots, U/2^n, \dots$, мы оценим величину модуля $\int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz$. Так как мы имеем последовательность треугольников, из которых ка-

ждый содержит все следующие и длины периметров которых стремятся к нулю при неограниченном возрастании n , то вследствие основного принципа теории пределов (гл. I, § 3, п. 1) существует точка z_0 , принадлежащая всем треугольникам указанной последовательности. Эта точка лежит в области G , где функция $f(z)$ есть аналитическая, т. е. в точке z_0 функция $f(z)$ имеет конечную производную. Таким образом, при любом сколь угодно малом ε ($\varepsilon > 0$) существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что имеет место неравенство

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \quad (24)$$

если

$$|z - z_0| < \delta. \quad (25)$$

Неравенство (24), будучи умножено на $|z - z_0|$, запишется в виде

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon |z - z_0|. \quad (25')$$

Неравенство (25') выполняется при условии (25), т. е. для любой точки z , лежащей внутри круга с центром в точке z_0 радиуса δ . Начиная с достаточно большого n , периметр $\Delta^{(n)}$ лежит внутри этого круга, и следовательно, мы можем воспользоваться при оценке интеграла $\int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz$ неравенством (25'). Заметим, что

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz = \int_{\Delta^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)] dz, \quad (26)$$

так как $\int_{\Delta^{(n)}} dz = 0$ и $\int_{\Delta^{(n)}} z dz = 0$ (§ 1, п. 1). Из равенства (26) получаем в силу неравенства (25'):

$$\left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| < \int_{\Delta^{(n)}} \varepsilon |z - z_0| |dz|. \quad (27)$$

Так как $|z - z_0|$ есть расстояние любой точки z периметра $\Delta^{(n)}$ треугольника от точки z_0 , лежащей на этом треугольнике, то имеем:

$$|z - z_0| < U/2^n.$$

Следовательно, из неравенства (27) получим:

$$\left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| < \varepsilon \frac{U}{2^n} \cdot \frac{U}{2^n} = \varepsilon \frac{U^2}{4^n}. \quad (28)$$

Сравнивая неравенства (23) и (28), находим:

$$M/4^n < \varepsilon U^2/4^n$$

или

$$M < \varepsilon U^2,$$

откуда следует: $M = 0$, так как ε — число сколь угодно мало

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы Коши мы воспользовались тем, что интегралы $\int dz$ и $\int z dz$, взятые вдоль любого замкнутого контура, равны нулю. Этот факт может быть обнаружен непосредственно, исходя из определения интеграла. В самом деле, согласно определению имеем:

$$\int dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z_k = 0,$$

так как $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta z_k = 0$, если $z_n = z_0$;

$$\int z dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_k \Delta z_k = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} \Delta z_k,$$

откуда следует:

$$2 \int z dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_k + z_{k+1}) \Delta z_k = \lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1}^2 - z_k^2) = 0,$$

так как $\sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1}^2 - z_k^2) = 0$, если $z_n = z_0$.

4. Понятие неопределенного интеграла в комплексной области.

Из доказанной теоремы Коши, как было указано в § 1, п. 4, вытекает следующее предложение:

Если функция $f(z)$ есть аналитическая в односвязной области G , то значение интеграла $\int_{\Gamma} f(z) dz$, взятого вдоль произвольной кусочно-гладкой линии Γ , принадлежащей области G , не зависит от линии Γ , а определяется лишь положениями начальной и конечной точек этой линии. Другими словами, значение интеграла $\int_{\Gamma} f(z) dz$ не изменится, если мы будем произвольно деформировать линию Γ , не выходя за пределы области G , оставляя ее начало и конец неподвижными.

Рассмотрим выражение

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi, \quad (29)$$

где за путь интегрирования можно взять произвольную кусочно-гладкую линию Γ , соединяющую точки z_0 и z , лежащую в данной односвязной области G . Вследствие вышеупомянутого предложения значение функции $F(z)$ не будет зависеть от пути интегрирования и, следовательно, $F(z)$ есть однозначная функция, определенная в области G . Покажем, что в каждой точке z области G функция $f(z)$ имеет производную, равную $f'(z)$. Действительно,

обозначая через $z + h$ любую точку области G , лежащую в произвольно малой окрестности точки z , рассмотрим разность

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta, \quad (30)$$

причем за путь интегрирования в последнем интеграле можно взять прямолинейный отрезок, соединяющий точки z и $z+h$ (рис. 76). Разделив равенство (30) на h , находим:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta. \quad (30')$$

Заметив, что

$$f(z) = f(z) \frac{1}{h} \int_z^{z+h} d\zeta = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) d\zeta, \quad (31)$$

вычтем из равенства (30') равенство (31); тогда мы получим следующее:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \quad (32)$$

Вследствие непрерывности функции $f(z)$ в точке z , при любом сколь угодно малом ε ($\varepsilon > 0$) существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что имеем: $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$, $|\zeta - z| < \delta$. Следовательно, если считать, что $|h| < \delta$, то модуль подынтегральной функции в интеграле (32) будет меньше ε . Таким образом, из равенства (32) находим:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon \cdot \frac{|h|}{|h|} = \varepsilon,$$

при $|h| < \delta$, т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z),$$

или

$$F'(z) = f(z). \quad (33)$$

Итак, интеграл от функции $f(z)$, аналитической в односвязной области G , рассматриваемый как функция своего верхнего предела, есть функция, аналитическая в той же области, производная которой равна подынтегральной функции.

З а м е ч а н и е. Это доказательство основано лишь на двух свойствах функции $f(z)$:

- 1) $f(z)$ есть непрерывная функция в области G ,
- 2) $\int f(z) dz$, взятый вдоль любого замкнутого контура, лежащего в G , равен нулю.

При этих условиях $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ есть функция, аналитическая в области G , причем $F'(z) = f(z)$. Этим замечанием мы впоследствии воспользуемся.

Назовем *неопределенным интегралом* или *примитивной функцией* от $f(z)$ всякую функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую всюду в области G условию

$$\Phi'(z) = f(z). \quad (34)$$

Согласно изложенному $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ является примитивной функцией для функции $f(z)$. Покажем, что любая примитивная функция $\Phi(z)$ будет иметь вид

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C, \quad (35)$$

где C есть произвольное постоянное.

Действительно, из равенств (34) и (33) путем их вычитания следует:

$$(\Phi(z) - F(z))' = \psi'(z) = 0, \quad (36)$$

где через $\psi(z)$ обозначена разность $\Phi(z) - F(z)$.

Полагая $\psi(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ и замечая, что $\psi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}i$ (гл. II, § 4, п. 4), получаем вследствие равенства (36):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

в области G . Следовательно, функции u и v суть постоянные в области G , а потому имеем:

$$\psi(z) = u + vi = C \text{ или } \Phi(z) - F(z) = C,$$

откуда

$$\Phi(z) = F(z) + C. \quad (35)$$

Таким образом, понимая под $\Phi(z)$ одну из примитивных функций для функции $f(z)$, перепишем равенство (35) в виде

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C = \Phi(z). \quad (35)$$

Полагая здесь $z = z_0$, получим: $C = \Phi(z_0)$. Заменяя в равенстве (35) постоянное C найденным значением, получим:

$$\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0). \quad (37)$$

Формула (37) выражает определенный интеграл через неопределенный. Итак, ограничиваясь функциями, аналитическими в односвязной области G , мы видим, что подобно обыкновенным интегралам интегрирование по комплексному переменному можно рассматривать с двух точек зрения: 1) как процесс суммирования, 2) как действие, обратное дифференцированию.

5. Распространение теоремы Коши на случай сложных контуров. Пусть Γ есть произвольная замкнутая кусочно-гладкая линия и $f(z)$ — функция, аналитическая внутри Γ , а также в каждой точке линии Γ . В этом случае имеем:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (38)$$

Действительно, около каждой точки, лежащей внутри Γ или на Γ , можно описать, как около центра, круг, внутри которого данная функция $f(z)$ есть аналитическая. В силу леммы Гейне—Бореля (гл. II, § 1, п. 4) существует конечное число таких кругов, содержащих внутри себя все точки замкнутой области с границей Γ . Совокупность точек, лежащих внутри этих кругов, представляет область G , содержащую линию Γ вместе с внутренними точками. В области G функция $f(z)$ есть аналитическая, причем внутри Γ нет граничных точек области G , а потому вследствие теоремы Коши имеем равенство (38).

Рассмотрим теперь $n + 1$ замкнутых кусочно-гладких линий $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ таких, что каждая из линий $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ лежит вне остальных и все они расположены внутри Γ_0 . Множество точек плоскости, лежащих одновременно внутри Γ_0 и вне линий $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, будет представлять $n + 1$ -связную область D , граница которой состоит из линий $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. В этом случае мы скажем, что граница области D представляет собой сложный контур $\Gamma = \Gamma_0^+ + \Gamma_1^- + \dots + \Gamma_n^-$, состоящий из линии Γ_0 , проходимой в положительном направлении, и остальных линий $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, проходимых в отрицательном направлении. Другими словами, если точка движется по сложному контуру Γ , то точки области D остаются с левой стороны (рис. 77). Предполагая функцию $f(z)$ аналитической в замкнутой области \bar{D} , мы покажем, что

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (39)$$

где положено:

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_1} + \dots + \int_{\Gamma_n}.$$

В этом заключается обобщение теоремы Коши на случай сложного контура.

Для доказательства соединим линии $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ в циклическом порядке с помощью вспомогательных линий (рис. 77): ab, cd, ef и рассмотрим две замкнутые линии: $\gamma = amfencrba$ и $\gamma' = abp'cdn'efm'a$. Так как функция $f(z)$ согласно условию будет аналитической как внутри, так и на каждой из этих линий γ и γ' , то по доказанному имеем:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad \int_{\gamma'} f(z) dz = 0.$$

Складывая между собой последние два равенства, окончательно получим:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

потому что интегрирования по вспомогательным линиям (ab, cd, ef) совершаются два раза в противоположных направлениях, а потому уничтожаются.

Доказанное равенство (39) можно также записать в виде

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z) dz, \quad (39')$$

где интегрирование совершается в положительном направлении линий $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. В самом деле, заметим, что в силу равенства (39) имеем:

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz + \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z) dz = 0; \quad (39'')$$

перенесем все члены равенства (39''), кроме первого члена, в правую часть и изменим в этих членах направление интегрирования; тогда получим формулу (39').

В частности, если замкнутая линия Γ_0 содержит внутри себя замкнутую линию Γ_1 и функция $f(z)$ будет аналитической как между этими линиями Γ_0 и Γ_1 , так и на самих линиях, то значение интеграла $\int f(z) dz$ вдоль любой из этих линий будет одним и тем же числом.

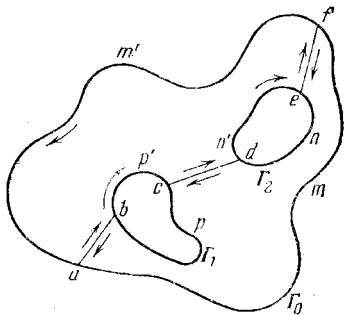


Рис. 77.

6. Логарифмическая функция. Если нулевая точка лежит вне замкнутого контура, то $\int \frac{dz}{z}$, взятый вдоль этого контура, равен нулю, потому что функция $1/z$ есть аналитическая всюду в плоскости комплексного переменного z , кроме $z = 0$. Если же нулевая точка лежит внутри замкнутого контура, то на основании предыдущего (п. 5) $\int \frac{dz}{z}$, взятый вдоль этого контура, имеет определенное постоянное значение, не зависящее от формы контура. Чтобы вычислить это значение, достаточно принять за контур интегрирования окружность C с центром в нулевой точке произвольного радиуса R . В этом случае имеем:

$$z = Re^{i\varphi}, dz = Rie^{i\varphi} d\varphi \text{ и } \frac{dz}{z} = i d\varphi.$$

Следовательно, получаем:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i d\varphi = 2\pi i. \quad (40)$$

Полученное число $2\pi i$ представляет значение интеграла $\int \frac{dz}{z}$ вдоль любого замкнутого контура, окружающего нулевую точку.

Рассмотрим теперь функцию

$$\omega = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (41)$$

где интегрирование может совершаться по любой линии, соединяющей точку 1 с точкой z (рис. 78). Если z есть действительное положительное число x и путем интегрирования служит отрезок

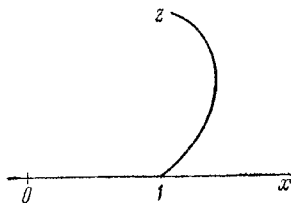


Рис. 78.

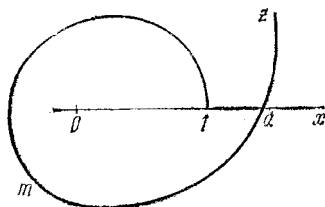


Рис. 79.

$[1, x]$ действительной оси, то $\omega = \ln x$. Естественно, считая z произвольным комплексным числом, положить $\omega = \ln z$. Таким образом, мы определяем здесь логарифмическую функцию в плоскости комплексного переменного z иным способом, чем в гл. II, § 4, п. 9.

Изучим ее свойства. Прежде всего заметим, что $\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$

будет многозначной функцией, имеющей в каждой точке z бесконечное множество различных значений соответственно различным путям интегрирования, соединяющим точки 1 и z . Так, обозначая

через $(\ln z)_0$ значение интеграла $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, взятого вдоль пути,

не окружающего нулевую точку (рис. 78), мы видим, что значение того же интеграла, взятого вдоль пути, окружающего один раз в положительном направлении нулевую точку, будет $(\ln z)_0 + 2\pi i$, потому что имеем (рис. 79):

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{|m\alpha|} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{|a\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i + (\ln z)_0.$$

Если путь интегрирования делает n оборотов в положительном или отрицательном направлении около нулевой точки, то, очевидно, к значению $(\ln z)_0$ прибавляется (или отнимается) число $2\pi in$. Таким образом, при всяком $z \neq 0$ имеем:

$$w = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z = (\ln z)_0 + 2\pi ik, \quad (41)$$

где k обозначает любое целое число, т. е. все значения $\ln z$ отличаются друг от друга на кратное $2\pi i$.

Если z — число, действительное положительное, то одно из этих значений будет действительным $(\ln z)_0$, все остальные — мнимыми. Это действительное значение $\ln z$ и рассматривается в анализе. Если же z — число отрицательное или мнимое, то все значения $\ln z$ будут мнимыми.

Таким образом, функция $w = \ln z$, определенная во всей плоскости комплексного переменного z , кроме $z = 0$, является бесконечнозначной. Чтобы иметь возможность рассматривать эту функцию как однозначную, очевидно, нужно выбрать такую область плоскости, в которой нельзя провести замкнутой линии, окружающей нулевую точку. Так, если мы разрежем плоскость вдоль отрицательной действительной оси, то любой замкнутый контур, лежащий в этой «разрезанной плоскости», будет оставлять вне себя нулевую точку. В этой «разрезанной плоскости» $w = \ln z$ может быть рассматриваема как однозначная функция комплексного переменного z .

Докажем теперь, что функция $w = \ln z$ является обратной относительно показательной функции

$$e^w = z. \quad (42)$$

Так как показательная функция e^w во всей плоскости переменного w отлична от нуля (гл. II, § 4, п. 7), то значение $z = 0$ мы оставляем вне рассмотрения. Пусть z есть данное число, отличное от нуля: $z = \rho e^{i\varphi}$ ($-\pi < \varphi \leq +\pi$). Из уравнения (42) мы получаем, полагая $w = u + vi$: $e^{ue^{vi}} = \rho e^{i\varphi}$, и, следовательно, должны иметь:

$$e^u = \rho, \quad v = \varphi + 2\pi k, \quad (43)$$

где k — любое целое число.

Когда u , возрастая, пробегает все действительные значения, то $\rho = e^u$ возрастает, принимая всевозможные положительные значения. Таким образом, уравнение $e^w = \rho$ имеет единственное действительное решение $u = \ln \rho$.

Итак, если $z = \rho e^{i\varphi}$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$), то общее решение уравнения (42) будет: $w = \ln \rho + i\varphi + 2\pi ik$, где k — любое целое число. Если z изменяется в «разрезанной плоскости» ($k = 0$), то, очевидно, функция w будет однозначной. Итак, существует функция $w = \ln \rho + i\varphi$, однозначная в «разрезанной плоскости», удовлетворяющая уравнению (42). Дифференцируя тождество $e^w = z$ относительно z , получим $e^w \frac{dw}{dz} = 1$, откуда $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$.

Таким образом, в «разрезанной плоскости» w должна быть примитивной функцией для функции $1/z$, обращающейся в нуль при $z = 1$. Отсюда на основании п. 4 можно написать: $w = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$,

где интегрирование совершается по любому пути, соединяющему точку 1 и z , лежащему в «разрезанной полуплоскости».

Если мы заставим переменное z изменяться во всей плоскости, то, очевидно, общее решение w уравнения (42) будет совпадать с функцией $\ln z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$, где интегрирование производится по любому пути между точками 1 и z . Итак, мы доказали, что логарифмическая функция, определенная нами посредством интеграла, совпадает с обращением показательной функции.

В заключение заметим, что вычисление интеграла $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$, взятого вдоль замкнутого контура Γ , содержащего внутри себя точку z_0 , приводится с помощью подстановки $z = z_0 + \xi k$ вычислению $\int_{\Gamma'} \frac{d\xi}{\xi}$, где замкнутый контур Γ' содержит внутри себя

нулевую точку. Следовательно, значение $\int_{\Gamma'} \frac{dz}{z - z_0}$ равно $2\pi i$. Очевидно, этот интеграл равен нулю, если точка z_0 лежит вне замкнутого контура интегрирования, потому что подынтегральная функ-

ция $\frac{1}{z - z_0}$ является аналитической всюду в плоскости комплексного переменного z , кроме точки $z = z_0$.

7. Лемма. Чтобы придать теореме Коши более общую форму, мы докажем в настоящем пункте вспомогательное предложение, касающееся непрерывной функции с ограниченным изменением¹⁾.

Пусть $f(x)$ есть непрерывная функция с ограниченным изменением в интервале $a \leq x \leq b$, а T — ее полная вариация. Обозначим через $k(y)$ число, которое указывает, как часто значение y принимается функцией $f(x)$ в интервале $a \leq x \leq b$, т. е. $k(y)$ есть число корней уравнения $f(x) = y$, заключенных в интервале $a \leq x \leq b$. Очевидно, $k(y)$ может равняться бесконечности. Тогда имеет место следующая формула:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} k(y) dy,$$

где интеграл берется в смысле Лебега.

При доказательстве, не уменьшая общности, можем считать $a = 0$, $b = 1$. Разделим интервал $0 \leq x \leq 1$ на 2^n равных интервалов

$$\frac{r-1}{2^n} \leq x < \frac{r}{2^n} \quad (r = 1, 2, 3, \dots, 2^n)$$

и обозначим через $k_n(y)$ число, которое показывает, во скольких из этих интервалов функция $f(x)$ принимает значение y .

Очевидно,

$$k_{n+1}(y) \geq k_n(y),$$

т. е. при измельчении разбиения число интервалов, в которых функция принимает данное значение y , не может убывать. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(y) = k(y).$$

Действительно, если $k(y)$ равно нулю или единице, то $k_n(y) = k(y)$ для каждого n . В случае $1 < k(y) < \infty$ пусть $x_1, x_2, \dots, x_r(y)$ — решения уравнения $f(x) = y$; заключенные в интервале $0 \leq x < 1$, и δ — наименьшее из чисел $x_r - x_{r-1}$ [$r = 2, 3, \dots, k(y)$]. Тогда, очевидно, $k_n(y) = k(y)$ для каждого n , для которого $1/2^n < \delta$, и, значит, при всех достаточно больших n . Наконец, в случае $k(y) = \infty$ обозначим через m произвольное целое число > 1 . Тогда существуют числа x_1, x_2, \dots, x_m : $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1$ такие, что $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_m) = y$. Пусть δ — наименьшее из чисел $x_r - x_{r-1}$ ($r = 2, 3, \dots, m$). Очевидно, что $k_m(y) \geq m$ для каждого m , для которого $\frac{1}{2^m} < \delta$, и, значит, начиная с достаточно большого m , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(y) = \infty$. Итак, доказано, что всегда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(y) = k(y).$$

¹⁾ Относительно функций с ограниченным изменением см., например, Александров П. С. и Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. — М.: ГОНТИ, 1938.

Обозначим теперь через $k_{n,r}(y)$ функцию, равную единице, если $f(x)$ принимает значение y в интервале $(r-1)/2^n \leq x < r/2^n$, и равную нулю в противном случае. Очевидно, можем написать:

$$k_n(y) = \sum_{r=1}^{2^n} k_{n,r}(y). \quad (I)$$

Обозначим через $M_{n,r}$ и $m_{n,r}$ верхнюю и нижнюю границу функции $f(x)$ в интервале $(r-1)/2^n \leq x < r/2^n$; тогда будет:

$$k_{n,r}(y) = \begin{cases} 0 & (y > M_{n,r}), \\ 1 & (M_{n,r} > y > m_{n,r}), \\ 0 & (y < m_{n,r}). \end{cases}$$

и поэтому $\int_{-\infty}^{\infty} k_{n,r}(y) dy = M_{n,r} - m_{n,r}$, а следовательно, в силу (I)

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_n(y) dy = \sum_{r=1}^{2^n} (M_{n,r} - m_{n,r}).$$

С другой стороны, вследствие определения

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{2^n} (M_{n,r} - m_{n,r}).$$

Сопоставляя два последних равенства и замечая, что $k_n(y)$ — возрастающая последовательность функций, имеющая своей предельной функцией $k(y)$, получим:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} k(y) dy,$$

что и нужно.

Из доказанной леммы вытекают два геометрических следствия:

1) Если C — произвольная спрямляемая линия Жордана, то множество чисел c , для которых прямая $x = c$ имеет бесконечно много точек, общих с кривой C , есть множество меры нуль по Лебегу.

Действительно, пусть $x = f(t)$, $y = g(t)$ ($a \leq t \leq b$) — уравнения спрямляемой линии Жордана C , где f и g — непрерывные функции с ограниченным изменением. Число $k(c)$, которое показывает, как часто функция $f(t)$ в интервале $a \leq t \leq b$ принимает значение c , равно в этом случае числу общих точек прямой $x = c$ с кривой C . По доказанной в этом пункте лемме функция $k(c)$ суммируема, и, значит, множество чисел c , для которых $k(c) = \infty$, имеет меру нуль.

2) Каждому положительному числу δ соответствует число α такое, что на каждой прямой

$$x = \alpha + t\delta \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

может лежать лишь конечное число точек кривой C .

Для доказательства нам достаточно показать, что множество чисел α , которое не имеет требуемого свойства, представляет собой не все числа. Это множество чисел α , не имеющих требуемого свойства, есть меры нуль, так как оно есть единение счетного числа множеств, которые получаются из нуля-множества следствия 1) посредством сдвигов $c' = c - t\delta$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

8. Обобщение теоремы Коши. Пользуясь последним результатом, возможно придать теореме Коши следующую форму:

Если $f(z)$ есть функция, аналитическая в области D , внутренней к жордановой спрямляемой кривой C , и, кроме того, $f(z)$ непрерывна в замкнутой области \bar{D} , то

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Пусть ε — произвольно малое положительное число. Согласно условию $f(z)$ — функция, равномерно непрерывная на D . Следовательно, существует число δ ($0 < \delta < 1$) такое, что имеет место неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ для любой пары точек z_1, z_2 области D , удовлетворяющей условию $|z_1 - z_2| < 2\delta$. Согласно следствию 2) леммы п. 7 выбираем число α и соответственно β , так что на каждой прямой $x = \alpha + m\delta$ и $y = \beta + m\delta$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) может лежать лишь конечное число точек, общих с кривой C . Прямые $x = \alpha + m\delta$, $y = \beta + m\delta$ делят D , область, внутреннюю к C , на конечное число областей, из которых каждая ограничена жордановой спрямляемой кривой. Обозначим эти кривые C_1, C_2, \dots, C_r . Очевидно, имеем:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=1}^r \int_{C_n} f(z) dz,$$

где все пути интегрирования проходятся в положительных направлениях. Из кривых C_1, C_2, \dots, C_r пусть первые q , и только они, содержат точки C . Остальные будут тогда квадраты, расположенные внутри C , и для них $\int_{C_n} f(z) dz = 0$ вследствие теоремы Коши (п. 2). Итак,

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=1}^q \int_{C_n} f(z) dz. \quad (\text{II})$$

Обозначая через l и l_n длины кривых C и C_n , заметим, что $\sum_{n=1}^q l_n - l$ не превосходит суммы периметров тех квадратов сети, стороны которых содержат точки C . Число этих квадратов не превосходит $4(1/\delta + 1)$; следовательно,

$$\sum_{n=1}^q l_n - l \leq 16\delta \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right), \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^q l_n \leq l + 16l + 16\delta < 17l + 16,$$

так как $\delta < 1$. Возвращаясь теперь к равенству (II), оценим модуль интеграла $\int_{C_n} f(z) dz$:

$$\int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} [f(z) - f(z_0)] dz,$$

где z_0 — постоянная точка, выбранная на C_n . Так как диаметр линии C_n не превосходит $\delta\sqrt{2} < 2\delta$, то пока z находится на C_n , имеем:

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

и, значит,

$$\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \leq \int_{C_n} |f(z) - f(z_0)| |dz| < \varepsilon l_n.$$

Из равенства (II) после этого получаем:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \sum_{n=1}^q \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| < \varepsilon \sum_{n=1}^q l_n < \varepsilon (17l + 16).$$

Так как ε — сколь угодно малое положительное число, а $17l + 16$ — вполне определенное постоянное, то правая часть — произвольно малое положительное число. Левая же часть последнего неравенства есть определенное постоянное число, не отрицательное. Отсюда это число может быть лишь нулем, т. е.

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = 0, \text{ или } \int_C f(z) dz = 0,$$

что и нужно было доказать.

§ 3. Интеграл Коши

1. Формула Коши. Пусть G есть односвязная область, ограниченная произвольной кусочно-гладкой линией Γ , и $f(z)$ — функция, аналитическая в замкнутой области \bar{G} . Это значит, что функция $f(z)$ имеет определенную конечную производную в каждой точке некоторой области G' , содержащей \bar{G} . Формула Коши, к выводу которой мы сейчас перейдем, выражает значение функции $f(z)$ во всякой точке, внутренней к линии Γ , через значения этой функции на контуре Γ . Отсюда вытекает, что значения аналитической функции тесно связаны между собой, так как ее значения вдоль замкнутого контура Γ вполне определяют ее значения внутри Γ . Эта формула Коши имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (44)$$

где z — любая точка внутри Γ , и интегрирование совершается по контуру Γ в положительном направлении.

Для доказательства, обозначив через z произвольную точку области G , рассмотрим функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}. \quad (45)$$

Эта функция $\varphi(\zeta)$ есть аналитическая во всех точках замкнутой области \bar{G} , кроме точки $\zeta = z$. Описывая около точки z , как центра, окружность γ произвольно малого радиуса ρ , целиком лежащую в области G , мы видим, что $\varphi(\zeta)$ будет аналитической функцией во всех точках, лежащих между контурами Γ и γ , включая и самые контуры (рис. 80). Следовательно, на основании теоремы Коши (§ 2, п. 5) имеем:

$$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (46)$$

Равенство (46) показывает, что значение $\int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta$ не зависит от радиуса ρ вспомогательной окружности γ , будучи постоянным числом, равным значению $\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta$. Чтобы определить это постоянное значение $\int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta$, заметим, что функция $\varphi(\zeta)$ стремится к определенному конечному пределу, когда точка ζ стремится к точке z . Действительно, из равенства (45) следует:

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \varphi(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z).$$

Следовательно, если принять $f'(z)$ за значение функции $\varphi(\zeta)$ в точке $\zeta = z$, то $\varphi(\zeta)$ становится непрерывной функцией всюду в замкнутой области \bar{G} , и мы можем предположить: $|\varphi(\zeta)| \leq M$, где M — постоянное, какова бы ни была точка ζ области G . Пользуясь последним неравенством, получаем:

$$\left| \int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta \right| < M \cdot 2\pi\rho,$$

откуда следует, что $\int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = 0$, так как ρ можно принять сколь угодно малым, а значение нашего интеграла есть постоянное число.

Обращаясь к равенству (46), перепишем его так:

$$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = 0. \quad (46)$$

Заменяя в последнем равенстве $\varphi(\zeta)$ по формуле (45), получим:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad \text{или} \quad \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad (47)$$

Так как в силу § 2, п. 6 имеем: $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\zeta - z} = 2\pi i$, то формула (47)

примет вид

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \cdot 2\pi i, \quad \text{или} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

что и нужно доказать.

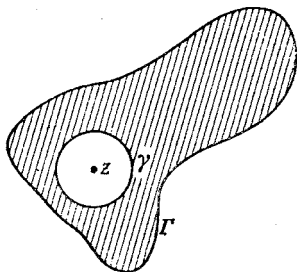


Рис. 80.

2. Распространение формулы Коши на случай сложных контуров. В предыдущем пункте мы предполагали область G односвязной. Легко показать, что установленная в предыдущем пункте формула Коши может быть распространена на случай многосвязной области G . Итак, рассмотрим многосвязную область G , границей которой является сложный контур Γ , состоящий из конечного числа кусочно-гладких замкнутых линий. Предполагая $f(z)$

аналитической функцией в замкнутой области \bar{G} , установим формулу Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (48)$$

где z — любая точка области G , а интегрирование совершается вдоль сложного контура Γ в положительном направлении (рис. 81). Для доказательства окружим точку z замкнутым контуром γ

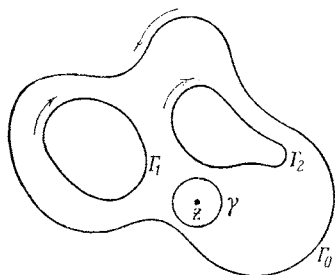


Рис. 81.

(например, окружностью с центром в точке z), настолько малым, чтобы все точки этого контура γ вместе с его внутренними точками принадлежали области G (рис. 81). Рассмотрим сложный контур $\Gamma' = \Gamma + \bar{\gamma}$, полученный от присоединения к первоначальному контуру Γ линии $\bar{\gamma}$, проходимой в отрицательном направлении. Область, ограниченную контуром Γ' , обозначим через G' . Очевидно, функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ будет аналитической в замкнутой области \bar{G}' ,

а потому на основании теоремы Коши (§ 2, п. 5) имеем:

$$\int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0, \text{ или } \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \int_{\bar{\gamma}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

откуда находим:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (49)$$

где интегрирование совершается по контурам Γ и γ в положительном направлении. Так как функция $f(z)$ есть аналитическая во всех точках, внутренних к контуру γ , включая и точки самого контура, то на основании предыдущего пункта имеем:

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z).$$

Внося последнюю формулу в равенство (49), получим окончательно:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z),$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (48)$$

Выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где $f(z)$ есть функция, аналитическая в замкнутой области \bar{G} , границей которой служит контур Γ , называется *интегралом Коши*. По доказанному интеграл Коши изображает данную функцию $f(z)$ во всякой точке z , внутренней к контуру Γ , т. е. лежащей в области G . Очевидно, во всякой точке z , лежащей вне замкнутой области \bar{G} , интеграл Коши равен нулю. В самом деле, функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ есть аналитическая во всех точках замкнутой области \bar{G} , если точка z лежит вне этой области G . Следовательно, на основании теоремы Коши (§ 2, п. 5) имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

3. Интеграл типа Коши. Пусть L есть произвольная кусочно-гладкая линия, замкнутая или незамкнутая, и $\varphi(z)$ — определенная вдоль L непрерывная функция. Выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (50)$$

имеет определенное значение для каждой точки z , не лежащей на L , и, следовательно, определяет однозначную функцию $F(z)$ во всех точках z , не принадлежащих L . Если L есть замкнутая линия и функция $\varphi(z)$ — аналитическая повсюду, внутри L и на L , то, как известно, выражение (50) равно $\varphi(z)$, если точка z лежит внутри L , и равно нулю, если точка z лежит вне L . В этом случае выражение (50) мы назвали интегралом Коши. Естественно назвать выражение (50) при общих вышеуказанных предположениях относительно функции $\varphi(z)$ и интегралом типа Коши. При образовании интеграла типа Коши нужно, следовательно, а priori задать функцию $\varphi(z)$ лишь на контуре интегрирования L . Непрерывность $\varphi(\zeta)$ мы требуем лишь для того, чтобы интеграл (50) наверное имел смысл.

Т е о р е м а 1. *Функция $F(z)$, определенная интегралом типа Коши (50), есть аналитическая во всякой односвязной области G , не содержащей точек линии L , и для ее производной имеет место формула*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \quad (51)$$

Доказательство. Пусть z есть произвольная точка области G . Теорема будет доказана, если мы покажем, что функция $F(z)$ имеет в этой точке производную, определяемую по формуле (51). Обозначим через $z+h$ любую точку области G и рассмотрим отношение

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h}. \quad (52)$$

Заставляя h стремиться к нулю при z постоянном, мы покажем, что отношение (52) стремится к конечному пределу, определяемому по формуле (51). С этой целью преобразуем отношение (52) таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z - h} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}. \end{aligned} \quad (53)$$

Заставляя h стремиться к нулю и переходя к пределу под знаком последнего интеграла, мы получили бы из равенства (53):

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \quad (51)$$

Остается доказать, что выполненный нами формально переход к пределу действительно возможен. Для доказательства составим разность между нашим выражением $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}$ и его предполагаемым пределом $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}$ и покажем, что эта разность стремится к нулю вместе с h . Действительно, эта разность имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}. \quad (54)$$

Оценим модуль разности (54). Очевидно, имеем:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \right| < \frac{|h|}{2\pi} \int_L \frac{M |d\zeta|}{|\zeta - z - h| |\zeta - z|^2}, \quad (55)$$

где предполагено, что $|\varphi(\zeta)| \leq M$, так как $\varphi(\zeta)$ по условию есть непрерывная вдоль L функция. Обозначая через $2d$ ($d > 0$) расстояние от линии L до точки z , т. е. минимум всевозможных расстояний между точками, из которых одна принадлежит L , а другая есть точка z , имеем $|\zeta - z| > d$, $|\zeta - z - h| > d$, если $|h|$

достаточно мало, какова бы ни была точка ζ , принадлежащая L . Заметив это, видим, что правая часть неравенства (55) меньше, чем

$$\frac{|h| Ml}{2\pi d^3}, \quad (56)$$

где через l обозначена длина линии L . Выражение (56) стремится к нулю вместе с h , следовательно, и разность (54) стремится к нулю вместе с h .

Таким образом, разность между отношением (52) и интегралом (51) стремится к нулю вместе с h , что и доказывает нашу теорему.

Формула (51) показывает, что для получения производной функции $F(z)$ нужно выполнить формальное дифференцирование по параметру z в интеграле типа Коши (50), посредством которого определяется эта функция $F(z)$.

Аналогично доказывается, что это дифференцирование можно повторить второй раз и вообще сколь угодно большое число раз.

Т е о р е м а II. *Функция $F(z)$, определяемая интегралом типа Коши (50), имеет в каждой точке z , лежащей вне L , производные всех порядков, для которых имеют место формулы*

$$F^n(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^3}, \quad (57)$$

и вообще

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \quad (58)$$

Чтобы доказать формулу (57), воспользуемся формулой (51); тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{F'(z+h) - F'(z)}{h} &= \frac{2!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^3} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(\zeta) \left[\frac{1}{n} \left(\frac{2}{(\zeta - z - h)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) - \frac{2}{(\zeta - z)^3} \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (59)$$

Вопрос сводится к тому, чтобы доказать, что интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, стремится к нулю вместе с h . Квадратная скобка под этим интегралом, равная

$$h \frac{3(\zeta - z) - 2h}{(\zeta - z)^3 \cdot (\zeta - z - h)^2},$$

имеет модуль, меньший, чем $|h| M_1$, где M_1 не зависит от ζ , так как

$$\left| \frac{3(\zeta - z) - 2h}{(\zeta - z)^3 (\zeta - z - h)^2} \right| < M_1$$

при достаточно малых значениях h , какова бы ни была точка ζ на L . Таким образом, модуль интеграла, стоящего во второй части равенства (59), меньше, чем $\frac{|h|l}{2\pi} MM_1$ (где M и l имеют те же значения, что в теореме I), и, следовательно, стремится к нулю вместе с h . Применяя метод полной индукции, аналогично докажем справедливость формулы (58) для любого натурального числа n . Читателю рекомендуется выполнить самостоятельно соответствующие вычисления.

4. Существование производных всех порядков для функции, аналитической в области. С помощью результатов предыдущего пункта мы можем доказать важное свойство аналитических функций. До сих пор мы называли однозначную функцию комплексного переменного z аналитической в области, если она имеет в каждой точке этой области конечную производную. В случае функции действительного переменного из факта существования конечной производной не следует непрерывности этой производной. В случае же функции комплексного переменного имеет место исключительно важное предложение: *если однозначная функция $f(z)$ комплексного переменного z имеет всюду в области G первую производную, то она имеет в этой области и производные всех высших порядков.*

З а м е ч а н и е. Очевидно, эта теорема утверждает не только существование производных любого порядка для функции, аналитической в области G , но и непрерывность этих производных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть z есть произвольная точка области G и C — кусочно-гладкий замкнутый контур, окружающий точку z , лежащий вместе со всеми своими внутренними точками в области G . Применяя формулу Коши (п. 1), имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

С другой стороны, на основании предыдущего пункта функция $f(z)$, изображаемая интегралом Коши, дифференцируема в точке z произвольное число раз. Следовательно, функция $f(z)$ имеет производные всех порядков повсюду в области G , так как точка z была взята произвольно в области G .

Наряду с основной формулой Коши (п. 2) имеет место — в случае приложимости этой формулы — следующее равенство:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Итак, мы видим, что требование дифференцируемости функции комплексного переменного гораздо более сильное, нежели соответствующее требование для функции действительного переменного: из существования конечной производной первого порядка

в каждой точке области вытекает существование, а следовательно, и непрерывность производных всех порядков в той же области.

В частности, отсюда следует, что производная функции, аналитической в области G , есть функция, аналитическая в той же области.

5. Теорема Морера. В § 2 этой главы (пп. 1—3) мы доказали основное предложение теории аналитических функций, в силу которого для всякой функции $f(z)$, аналитической в односвязной области G , имеет место равенство $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, где Γ есть про-

извольный кусочно-гладкий замкнутый контур, лежащий в области G . Как показал итальянский математик Морера (Морегга), это основное предложение обратимо:

Если функция $f(z)$, непрерывная в односвязной области G , для всякого кусочно-гладкого замкнутого контура Γ , лежащего в этой области, удовлетворяет равенству $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, то $f(z)$ есть аналитическая функция в области G .

Действительно, мы видели (§ 2, п. 4, замечание), что при условиях этой теоремы выражение $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ не зависит от пути,

соединяющего точки z_0 и z в области G , и определяет функцию $F(z)$, аналитическую в области G , причем имеем: $F'(z) = f(z)$. Так как на основании предыдущего пункта $F'(z)$ как производная функции, аналитической в области G , есть функция, аналитическая в G , то $f(z) = F'(z)$ есть функция, аналитическая в области G .

Примечание. Для справедливости этой теоремы нет необходимости предполагать, что $\int f(z) dz$ равен нулю, будучи взят по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру Γ . Достаточно предположить, что $\int f(z) dz = 0$ вдоль периметра произвольного треугольника, лежащего в области G .

Действительно, поступая, как § 2, п. 2, мы покажем, что интеграл $\int f(z) dz$ равен нулю, будучи взят вдоль периметра любого многоугольника области G , так как всякий многоугольник можно разбить на треугольники. Далее, зная, что $\int f(z) dz = 0$ вдоль периметра любого многоугольника, мы докажем, применяя основную лемму (§ 2, п. 1), что этот интеграл будет оставаться нулем, когда за путь интегрирования возьмем произвольную замкнутую кусочно-гладкую линию Γ .

6. Различные точки зрения в построении теории аналитических функций. При построении теории аналитических функций можно отправляться от различных эквивалентных между собой определений аналитической функции в области G . Так, во-первых, мы можем назвать функцией, аналитической в области G , однозначную функцию комплексного переменного, дифференцируемую в этой области. Это определение, основанное на дифференци-

альных свойствах функции, принадлежащее Коши, мы приняли за исходное определение при составлении настоящего руководства. Исходя из этого определения, мы доказали основное во всей теории предложение Коши, в силу которого для аналитической функции в односвязной области G (в указанном смысле) интеграл по любому замкнутому контуру Γ , принадлежащему области G , равен нулю. Отсюда мы имели возможность убедиться в существовании для аналитической функции производных всех порядков.

С другой стороны, мы видели (гл. II, § 4, п. 4), что условия, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $f(z) = u + + vi$ была аналитической в области G , заключаются в существовании уравнений Коши—Римана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. — R.})$$

где частные производные функций u и v можно предполагать непрерывными функциями в каждой точке области G . Этот путь приводит к одновременному рассмотрению двух сопряженных гармонических функций u и v в области G , связанных уравнениями (C. — R.), и определению аналитической функции в виде $u + + vi$. Построением теории аналитических функций, где отправным пунктом является пара сопряженных гармонических функций, занимался Риман.

Наконец, возможно стремиться получить все основные свойства аналитических функций, назвав функцией, аналитической в односвязной области G , всякую непрерывную функцию $f(z)$ комплексного переменного, для которой интеграл $\int f(z) dz$, взятый вдоль любого замкнутого контура этой области (достаточно, например, брать лишь периметры треугольников), равен нулю (п. 5). Рассмотрением свойств аналитических функций с этой третьей точки зрения впервые занимался Осгуд. Предыдущее изложение нас убеждает в равноправности указанных точек зрения при построении теории аналитических функций, так как все три вышеупомянутых определения равносильны между собой.

7. О предельных значениях интеграла типа Коши. Пусть C есть произвольная гладкая замкнутая линия и функция $\varphi(z)$ — аналитическая на линии C , т. е. в каждой точке этой линии; тогда интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (60)$$

представляет функцию $F(z)$, аналитическую всюду внутри контура C , и функцию $F_1(z)$, аналитическую всюду вне C .

Мы докажем, что функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (60')$$

(или $F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$) стремится к определенному конечному пределу, когда точка z приближается, оставаясь внутри C (или вне C), к произвольной точке z_0 контура C . Эти предельные значения интеграла типа Коши (60') образуют, следовательно, функцию $\varphi_i(z_0)$, определенную во всех точках z_0 контура C (соответственно функцию $\varphi_e(z_0)$, если точка z приближается к точке z_0 , оставаясь вне C), которая, как мы покажем, будет аналитической во всех точках z_0 и тесно связана с граничной функцией $\varphi(z_0)$. В интеграле типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

под z мы понимаем точку, лежащую внутри контура C . Естественно возникает вопрос, можно ли рассматривать значение интеграла типа Коши на контуре C , т. е. какой смысл имеет выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (61)$$

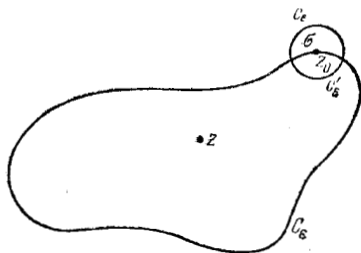


Рис. 82.

При обычном понимании процесса интегрирования формула (61) лишена смысла, так как функция $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}$ не интегрируема, вообще говоря, вдоль C , когда точка z_0 находится на линии C . Поэтому мы должны прежде всего определить смысл выражения (61). С этой целью опишем из точки z_0 , как центра, окружность сколь угодно малого радиуса ϵ и обозначим через σ наименьшую дугу линии C , отсекаемую этой окружностью, содержащую точку z_0 (рис. 82). Выкидывая из линии C дугу σ , обозначим оставшуюся часть линии C через C_ϵ . Выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} \quad (62)$$

имеет смысл при любом $\epsilon > 0$, так как функция $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}$ есть непрерывная вдоль C_ϵ . Заставляя ϵ стремиться к нулю, покажем, что выражение (62) стремится к определенному конечному пределу, который мы примем за значение интеграла (61).

Действительно, замкнем линию C_ϵ с помощью дуги c_ϵ построенной окружности, лежащей вне C (рис. 82). Таким образом, мы по-

лучим кусочно-гладкий замкнутый контур $\Gamma_\varepsilon = C_\varepsilon + c_\varepsilon$, для которого точка z_0 будет внутренней. Рассмотрим теперь интеграл типа Коши:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где z — точка внутри контура C .

Так как функция $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$ есть аналитическая на контурах C и $\Gamma_\varepsilon = C_\varepsilon + c_\varepsilon$, а также между ними, то по теореме Коши имеем:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \rightarrow z_0$, получим:

$$\varphi_i(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (63)$$

Эта формула показывает, что предельные значения $\varphi_i(z_0)$ интеграла типа Коши существуют в каждой точке контура C и образуют функцию аналитическую на контуре C .

Чтобы найти зависимость функции $\varphi_i(z_0)$ от граничной функции $\varphi(z_0)$, мы должны в формуле (63) перейти к пределу, заставляя ε стремиться к нулю. Предварительно вычислим тот предел, к которому стремится при этом интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}$.

Полагая в последнем интеграле

$$\zeta - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$$

вдоль дуги c окружности, имеем: $d\zeta = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$. Кроме того, положив

$$\varphi(\zeta) = \varphi(z_0) + \eta,$$

мы видим, что на c_ε модуль η стремится к нулю вместе с ε . Итак, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(z_0) + \eta}{\varepsilon e^{i\theta}} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta = \\ &= \frac{\varphi(z_0)}{2\pi} \int_{c_\varepsilon} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{c_\varepsilon} \eta d\theta. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} d\theta = \pi, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} \eta d\theta = 0,$$

то найдем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2} \varphi(z_0). \quad (64)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, из равенства (63) мы усматриваем, что выражение $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}$ стремится при этом к определенному конечному пределу, который мы условились обозначать через $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}$ и называть значением интеграла типа Коши в точке z_0 контура C . Таким образом, мы видим, что интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}$ имеет вполне определенный смысл, и формула (63) после перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ становится следующей:

$$\varphi_i(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2} \varphi(z_0). \quad (I)$$

Формула (I) дает выражение предельных значений $\varphi_i(z_0)$ интеграла типа Коши изнутри контура C через значения самого интеграла на контуре и данную граничную функцию $\varphi(z_0)$.

Чтобы получить аналогичную формулу для $\varphi_e(z_0)$, рассмотрим контур $\Gamma_\varepsilon = C_\varepsilon + c'_\varepsilon$, полученный после замыкания линии C_ε посредством дуги c'_ε маленькой окружности, лежащей внутри C и проходимой в отрицательном направлении (рис. 82).

Так как функция $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}$, где точка z вне C , есть аналитическая на контурах C и Γ_ε , а также между ними, то по теореме Коши имеем:

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c'_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \rightarrow z_0$, получим:

$$\varphi_e(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c'_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (65)$$

Из последнего равенства мы усматриваем, что предельные значения $\varphi_e(z_0)$ подобно $\varphi_i(z_0)$ образуют на контуре аналитическую функцию.

Замечая, что по формуле Коши будет:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c'_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{c'_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \varphi(z_0),$$

получим отсюда переходом к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ вследствие (64) такой результат:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2} \varphi(z_0).$$

Следовательно, заставляя ε стремиться к нулю, из равенства (65) мы получим:

$$\varphi_e(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2} \varphi(z_0). \quad (II)$$

Формула (II) выражает внешние предельные значения $\varphi_e(z_0)$ интеграла типа Коши через граничную функцию $\varphi(z_0)$ и значения интеграла на контуре.

Складывая доказанные формулы (I) и (II) и деля полученное равенство пополам, находим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{\varphi_i(z_0) + \varphi_e(z_0)}{2}, \quad (I')$$

т. е. значение интеграла типа Коши в любой точке контура интегрирования равно среднему арифметическому его предельных значений. Вычитая формулы (I) и (II), мы получим:

$$\varphi(z_0) = \varphi_i(z_0) - \varphi_e(z_0), \quad (II')$$

т. е. значение граничной функции в любой точке контура равно разности предельных значений в этой точке интеграла типа Коши.

Эти формулы (I') и (II') эквивалентны прежним формулам (I) и (II). В частности, если функция $\varphi(z)$ будет аналитической всюду внутри контура интегрирования C , так же как и на C , то интеграл типа Коши становится интегралом Коши; его предельные значения $\varphi_i(z_0)$ и $\varphi_e(z_0)$ в этом случае будут соответственно $\varphi(z_0)$ и 0 [ср. формулу (II')], и значение самого интеграла Коши в точке z_0 контура интегрирования C согласно формуле (I') будет равно $\frac{1}{2}\varphi(z_0)$.

Формулы (I) и (II) настоящего пункта впервые были получены русским математиком Ю. В. Сохоцким в 1873 г. при более общих предположениях относительно функции $\varphi(\zeta)$ (см. п. 8 этого параграфа). Они называются *формулами Сохоцкого*.

Пример. Пусть контуром интегрирования C служит окружность с центром в нулевой точке радиуса единица, а $\varphi(\zeta) = 1/\zeta$. В этом случае интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} = 0,$$

если точка z лежит внутри окружности C ; если же точка z лежит вне C , то рассматриваемый интеграл типа Коши равен $-1/z$. Следовательно, для данного случая имеем:

$$\varphi_i(z_0) = 0, \quad \varphi_e(z_0) = -1/z_0.$$

Отсюда по формуле (I') получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z_0)} = -\frac{1}{2z_0}.$$

Примечание. Мы исследовали предельные значения интеграла типа Коши, предполагая граничную функцию $\varphi(\zeta)$ аналитической во всех точках замкнутого контура интегрирования S , между тем как интеграл типа Коши имеет смысл в случае, если $\varphi(\zeta)$ есть произвольная непрерывная функция вдоль контура интегрирования L (замкнутого или нет) и даже разрывная при условии ее интегрируемости вдоль L . Естественно поставить вопрос о том, как ведет себя интеграл типа Коши при этих общих условиях, когда точка z приближается по нормали к точке z_0 контура интегрирования. Для исследования нашей проблемы в такой общей постановке необходимо привлечь наиболее сложные и тонкие методы современной теории функций действительного переменного, и мы поэтому лишены возможности изложить указанный вопрос с исчерпывающей полнотой на страницах настоящего руководства. Однако заметим, что даже в случае непрерывной граничной функции предельные значения интеграла типа Коши $\varphi_i(z_0)$ и $\varphi_e(z_0)$ не будут, вообще говоря, существовать во всех без исключения точках z_0 контура интегрирования. Множество таких исключительных точек контура интегрирования, где не существуют функции $\varphi_i(z_0)$ или $\varphi_e(z_0)$, есть, по терминологии теории множеств, так называемое «нуль-множество», т. е. это множество исключительных точек z_0 может быть покрыто с помощью конечной или бесконечной последовательности неперекрывающихся открытых дуг, сумма длин которых как угодно мала. Можно доказать, что формулы (I) и (II) остаются в силе для самого общего интеграла типа Коши, если пренебрегать «нуль-множествами». Кроме того, можно обнаружить в этом случае, что предельное значение $\varphi_i(z_0)$ [или $\varphi_e(z_0)$] остается одним и тем же, если мы будем приближать точку z к точке z_0 по любому пути, не касательному в точке z_0 к контуру интегрирования. Исчерпывающее решение этих вопросов читатель может найти в наших книгах «Интеграл Коши» (Научные записки Саратовского университета, 1918), а также «Граничные свойства однозначных аналитических функций» (изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1950).

8. О предельных значениях интеграла типа Коши в случае, когда граничная функция удовлетворяет условию Гельдера—Липшица. Пусть S есть произвольная гладкая замкнутая линия и функция $\varphi(\zeta)$ задана на линии S и удовлетворяет условию Гельдера—Липшица:

$$|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| < K |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha, \quad (\text{A})$$

где $0 < \alpha \leq 1$, K — некоторое постоянное, а ζ_1 и ζ_2 — любые две точки линии S . Интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (60)$$

представляет функцию $F(z)$, аналитическую всюду внутри контура S , и функцию $F_1(z)$, аналитическую всюду вне S .

Мы докажем, что функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad \left(\text{или} \quad F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right) \quad (60')$$

стремится к определенному конечному пределу, когда точка z приближается, оставаясь на внутренней нормали линии S (или на внешней нормали S), к произвольной точке z_0 контура S ¹⁾. Эти предельные значения интеграла типа Коши

¹⁾ Можно было бы доказать, что предельное значение интеграла типа Коши существует при любом стремлении точки z к точке z_0 изнутри S (или извне S). См. статью Привалов И. И. Об интегралах типа Коши. — ДАН СССР, 1939.

образуют, следовательно, функцию $\varphi_i(z_0)$, определенную во всех точках z_0 , контура C (соответственно функцию $\varphi_e(z_0)$, если точка z приближается к точке z_0 , оставаясь вне C), которая, как мы покажем, будет удовлетворять условию Гёльдера—Лишица вида (A) и тесно связана с граничной функцией $\varphi(z_0)$.

В интеграле типа Коши (60') под z мы понимаем точку, лежащую внутри контура C . Естественно, возникает вопрос, можно ли рассматривать значение интеграла типа Коши на контуре C , т. е. какой смысл имеет выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (61)$$

При обычном понимании процесса интегрирования формула (61) лишена смысла, так как функция $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}$ неинтегрируема, вообще говоря, вдоль C , когда точка z_0 находится на линии C . Поэтому мы должны прежде всего определить смысл выражения (61). С этой целью обозначим через s_0 значение дуги s контура C , соответствующее точке z_0 , а через C_ε — часть линии C , оставшуюся после удаления из C наименьшей дуги, концами которой служат точки $\zeta(s_0 - \varepsilon)$ и $\zeta(s_0 + \varepsilon)$. Под выражением (61) мы будем понимать предел выражения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}$$

при ε , стремящемся к нулю, т. е. положим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}, \quad (66)$$

показав, что последний предел существует и есть конечное число. В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \varphi(z_0) \int_{C_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0},$$

откуда при $\varepsilon \rightarrow 0$ найдем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2} \varphi(z_0),$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} d \ln(\zeta - z_0) = \frac{1}{2\pi i}. \quad \text{Изм. } C_\varepsilon \ln(\zeta - z_0) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \ln \left| \frac{\zeta(s_0 + \varepsilon) - z_0}{\zeta(s_0 - \varepsilon) - z_0} \right| + i \arg \frac{\zeta(s_0 + \varepsilon) - z_0}{\zeta(s_0 - \varepsilon) - z_0} \right\} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\zeta(s_0 + \varepsilon) - z_0}{\zeta(s_0 - \varepsilon) - z_0} \right| + \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arg \frac{\zeta(s_0 + \varepsilon) - z_0}{\zeta(s_0 - \varepsilon) - z_0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Последний интеграл существует вследствие абсолютной интегрируемости подинтегрального выражения, что мы усматриваем из неравенства

$$\left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| < K |\zeta - z_0|^{\alpha-1} ds,$$

вытекающего из условия (A) или из равносильного ему неравенства

$$\left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| < K_1 |s - s_0|^{\alpha-1} ds.$$

Последнее неравенство равносильно с предыдущим, потому что на гладком контуре имеем:

$$1 \geq \left| \frac{\zeta - z_0}{s - s_0} \right| > a > 0,$$

где a — некоторое постоянное, зависящее от контура.

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы установить формулы

$$\varphi_i(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2} \varphi(z_0), \quad (I)$$

$$\varphi_e(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2} \varphi(z_0), \quad (II)$$

дающие выражения предельных значений $\varphi_i(z_0)$ (соответственно $\varphi_e(z_0)$) интеграла типа Коши изнутри контура C (соответственно извне C) через значения самого интеграла на контуре и данную граничную функцию. Очевидно, формула (II) вытекает из формулы (I), если изменить направление пути интегрирования. Для вывода формулы (I) возьмем z на нормали z_0 , полагая $z = z_0 + \varepsilon i e^{i\varphi_0}$, где φ_0 — угол между положительными направлениями оси абсцисс и касательной к контуру C в точке z_0 , и рассмотрим разность

$$F(\varepsilon; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_G \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} \right]. \quad (67)$$

Очевидно, вследствие (66) мы установим формулу (I), если докажем, что разность $F(\varepsilon; z_0)$ стремится к пределу, равному $\frac{1}{2} \varphi(z_0)$, когда ε стремится к нулю.

Заметив, что

$$F(\varepsilon; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_C \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{z - z_0} d\zeta \right] + \varphi(z_0) \left(1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \right), \quad (68)$$

мы докажем наше утверждение, если обнаружим стремление к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ выражения, заключенного в квадратные скобки. Для этого заметим, что

$$\zeta - z_0 = \zeta(s) - z_0 = (s - s_0) [e^{i\varphi_0} + k]$$

и

$$\zeta - z = \zeta(s) - z_0 - \varepsilon i e^{i\varphi_0} = (s - s_0) [e^{i\varphi_0} + k] - \varepsilon i e^{i\varphi_0},$$

где $|k| < \eta$, сколь угодно малого положительного числа, если $|s - s_0| < h = h(\eta)$, и кроме того, положим: $\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta(s_0)) = f(s)$, $\varphi(z_0) = \varphi(\zeta(s_0)) = f(s_0)$, $d\zeta = e^{i\varphi} ds$, где φ — угол между положительными направлениями оси абсцисс и касательной к контуру C в точке $\zeta(s)$.

После этого легко получим:

$$\int_C \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z} d\zeta = \int_C \frac{[f(s) - f(s_0)] e^{i(\varphi - \varphi_0)} ds}{(s - s_0)(1 + ke^{-i\varphi_0}) - \varepsilon i}. \quad (69)$$

Пологая далее $s - s_0 = \sigma$ и обозначая для сокращения $ke^{-i\varphi_0} = m$, причем $|m| < \eta$ для $|\sigma| < h$ выражение (69) перепишем таким образом:

$$\int_C \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z} d\zeta = \int_C \frac{\varphi(\sigma) d\sigma}{(1 + m)\sigma - \varepsilon i}, \quad (70)$$

где $\varphi(\sigma) = e^{i(\varphi - \varphi_0)}(f(s) - f(s_0))$.

Выражение, стоящее между квадратными скобками в формуле (68), перепишется в виде

$$\begin{aligned} & \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta + \int_C \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z} d\zeta - \\ & - \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_\varepsilon} \frac{[\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)](z - z_0)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta + \int_{C - C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z} d\zeta = \\ & = \int_{C_\varepsilon} \frac{\varepsilon i \varphi(\sigma) d\sigma}{[(1 + m)\sigma - \varepsilon i](1 + m)\sigma} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\sigma) d\sigma}{(1 + m)\sigma - \varepsilon i}. \quad (71) \end{aligned}$$

Покажем сначала, что предел второго слагаемого формулы (71) при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен нулю. С этой целью заметим, что

$$|(1 + m)\sigma - \varepsilon i| > \sqrt{\sigma^2 - \varepsilon^2} - \frac{1}{2}|\sigma| > \frac{1}{2}\varepsilon \left(\text{считая } \eta < \frac{1}{2} \right),$$

и, значит, $\left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\sigma) d\sigma}{(1 + m)\sigma - \varepsilon i} \right| < \frac{2}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\varphi(\sigma)| d\sigma \rightarrow 0$. Последнее заключение

сделано на основании того, что функция $|\varphi(\sigma)| = |f(s_0 + \sigma) - f(s_0)|$ непрерывна и равна нулю при $\sigma = 0$. Теперь нам остается доказать, что предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ первого слагаемого формулы (71) равен нулю. Разбивая интервал интегрирования в исследуемом интеграле на части $(-h, -\varepsilon)$, (ε, h) , C_h , мы видим, что наш интеграл, взятый по C_h , стремится к нулю вместе с ε . Вопрос приводится, таким образом, к исследованию суммы:

$$\int_{\varepsilon}^h \frac{\varepsilon i \varphi(\sigma) d\sigma}{[(1 + m)\sigma - \varepsilon i](1 + m)\sigma} + \int_{-h}^{-\varepsilon} \dots \quad (72)$$

Замечая, что

$$\left| \int_{\varepsilon}^h \frac{\varepsilon i \varphi(\sigma) d\sigma}{[(1 + m)\sigma - \varepsilon i](1 + m)\sigma} \right| < 2\varepsilon \int_{\varepsilon}^h \frac{|\varphi(\sigma)| d\sigma}{\left(\sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma\right)}, \quad (73)$$

положим $\Phi(\sigma) = \int_0^\sigma |\varphi(\sigma)| d\sigma$ и перепишем правую часть неравенства (73) в виде

$$2\varepsilon \int_\varepsilon^h \frac{d\Phi(\sigma)}{\sigma \left(\sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma \right)} = 2\varepsilon \left(\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma \left(\sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma \right)} \right)_\varepsilon^h + \\ + 2\varepsilon \int_\varepsilon^h \Phi(\sigma) \frac{\left(\sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma \right)^2 + \frac{3}{4}\sigma^2}{\sigma^2 \left(\sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma \right)^2 \sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2}} d\sigma.$$

Обынтегрированный член стремится к нулю вместе с ε . Последний же интеграл представится так:

$$2\varepsilon \int_\varepsilon^h \Phi(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma^2 \sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2}} + \frac{3}{2} \varepsilon \int_\varepsilon^h \frac{\Phi(\sigma) d\sigma}{\left(\sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma \right)^2 \sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2}}. \quad (74)$$

Полагая здесь $\Phi(\sigma) = r(\sigma) \cdot \sigma$ и заменяя $\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2}}$ через единицу, убеждаемся, что выражение (74) меньше, чем

$$2\varepsilon \int_\varepsilon^h \frac{r(\sigma) d\sigma}{\sigma^2} + \frac{3}{2} \varepsilon \int_\varepsilon^h \frac{r(\sigma) d\sigma}{\left(\sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma \right)^2},$$

и, значит, подавно меньше, чем

$$2\varepsilon \sup_{0 \leq \sigma \leq h} r(\sigma) \int_0^h \frac{d\sigma}{\sigma^2} + 6\varepsilon \sup_{0 \leq \sigma \leq h} r(\sigma) \int_\varepsilon^h \frac{d\sigma}{\sigma^2} = \\ = 8\varepsilon \sup_{0 \leq \sigma \leq h} r(\sigma) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{h} \right] < 8 \sup_{0 \leq \sigma \leq h} r(\sigma).$$

Так как $\sup_{0 \leq \sigma \leq h} r(\sigma)$ можно считать сколь угодно малым вместе с η , то последнее выражение сколь угодно мало вместе с η .

То же заключение можно сделать относительно второго слагаемого суммы (72). Таким образом, справедливость формулы (1) доказана.

П р и м е ч а н и е. Из произведенного анализа легко усмотреть, что, во-первых, формула (66) имеет место равномерно относительно z_0 , во-вторых, выражение (68) стремится к $\frac{1}{2} \varphi(z_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно относительно z_0 . Следовательно, предельные значения $\varphi_i(z_0)$ и $\varphi_e(z_0)$ интеграла типа Коши, определяемые формулами (1) и (11), существуют по нормалям равномерно относительно точки z_0 , а это равносильно утверждению, что интеграл типа Коши стремится к своим предельным значениям $\varphi_i(z_0)$ и $\varphi_e(z_0)$ в любой точке z_0 контура C , когда точка z приближается к точке z_0 произвольным образом соответственно изнутри C и извне C .

Складывая установленные формулы (I) и (II) и деля полученное равенство пополам, находим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{\varphi_i(z_0) + \varphi_e(z_0)}{2}, \quad (I')$$

т. е. значение интеграла типа Коши в любой точке контура интегрирования равно среднему арифметическому его предельных значений. Вычитая формулы (I) и (II), мы получим:

$$\varphi(z_0) = \varphi_i(z_0) - \varphi_e(z_0), \quad (II')$$

т. е. значение граничной функции в любой точке контура равно разности предельных значений в этой точке интеграла типа Коши.

Установив формулы (I) и (II), дающие выражения для предельных значений $\varphi_i(z_0)$ и $\varphi_e(z_0)$ интеграла типа Коши, докажем теперь, что эти предельные значения удовлетворяют условию Гельдера—Лишица с тем же показателем α , если $\alpha < 1$, и с показателем, сколь угодно близким к единице, если $\alpha = 1$ ¹⁾.

Согласно формуле (II') теорему достаточно доказать для предельных значений $\varphi_e(z_0)$. Замечая, что $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2}$ (этот интеграл понимается как $\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}$), перепишем формулу (II) в виде

$$\varphi_e(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Таким образом, задача заключается в исследовании интеграла

$$g(z_0) = \int_C \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

как функции z_0 . Давая дуге s_0 приращение Δs_0 , получим:

$$g(z_0 + \Delta z_0) = \int_C \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0 + \Delta z_0)}{\zeta - z_0 - \Delta z_0} d\zeta,$$

откуда

$$g(z_0 + \Delta z_0) - g(z_0) = \int_C \left[\frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0 + \Delta z_0)}{\zeta - z_0 - \Delta z_0} - \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} \right] d\zeta. \quad (75)$$

Интегрируем сначала от $s_0 - \varepsilon$ до $s_0 + \varepsilon$, считая $\varepsilon = 3|\Delta s_0|$. Воспользовавшись условием (A), найдем, что эта часть интеграла (75) по модулю меньше, чем

$$K_1 \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} [|s - s_0 - \Delta s_0|^{\alpha-1} + |s - s_0|^{\alpha-1}] ds < K_2 |\Delta s_0|^\alpha, \quad (76)$$

так как

$$1 \geq \left| \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{s_1 - s_2} \right| > a > 0. \quad (77)$$

¹⁾ См. Привалов И. И. Интеграл Коши. — Научные записки Сар. ун-та, 1918; Об интегралах типа Коши. — ДАН СССР, 1939.

Остается выполнить интегрирование по дуге C_ε , полученной из C , путем выкидывания дуги $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$. Предварительно преобразуем подынтегральную функцию в интеграле (75) к виду

$$[\varphi(\xi) - \varphi(z_0 + \Delta z_0)] \frac{\Delta z_0}{(\xi - z_0)(\xi - z_0 - \Delta z_0)} - [\varphi(z_0 + \Delta z_0) - \varphi(z_0)] \frac{1}{\xi - z_0}. \quad (78)$$

Замечая, что $\left| \int_{C_\varepsilon} \frac{d\xi}{\xi - z_0} \right| < A$, где A — некоторое постоянное, мы заключаем:

$$\text{интеграл от функции (78), взятый вдоль линии } C_\varepsilon, \text{ по модулю будет меньше, чем} \\ K_3 |\Delta s_0|^\alpha + K_4 |\Delta s_0|^\alpha, \text{ если } \alpha < 1; \quad (79)$$

в случае же $\alpha = 1$ меньше, чем

$$K_5 |\Delta s_0| \ln \frac{1}{|\Delta s_0|} + K_6 |\Delta s_0| < K_7 |\Delta s_0|^{1-\eta}, \quad (80)$$

где $\eta > 0$ сколь угодно мало. При выводе оценок (79) и (80) мы воспользовались неравенствами (А) и (77). Объединяя оценки (76) и (79), соответственно (76) и (80), мы видим, что

$$|g(z_0 + \Delta z_0) - g(z_0)| < C_1 |\Delta s_0|^\alpha, \text{ если } \alpha < 1,$$

и

$$|g(z_0 + \Delta z_0) - g(z_0)| < C_2 |\Delta s_0| \ln \frac{1}{|\Delta s_0|} < C_3 |\Delta s_0|^{1-\eta},$$

где $\eta > 0$ сколь угодно мало, если $\alpha = 1$. Последние неравенства могут быть заменены в силу (77) им эквивалентными:

$$|g(z_0 + \Delta z_0) - g(z_0)| < C_1 |\Delta z_0|^\alpha, \text{ если } \alpha < 1,$$

и

$$|g(z_0 + \Delta z_0) - g(z_0)| < C_2' |\Delta z_0|^{1-\eta}, \text{ если } \alpha = 1.$$

Итак, высказанная выше теорема полностью доказана.

9. Интеграл Пуассона. Пусть $f(z)$ есть функция, аналитическая внутри и на границе круга K радиуса R (за центр круга мы примем, например, начало координат). Для произвольной точки $z = re^{i\varphi}$, лежащей внутри K , мы имеем по формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi}) \frac{Re^{i\psi}}{Re^{i\psi} - re^{i\varphi}} d\psi. \quad (81)$$

Рассмотрим точку z^* , симметричную относительно K с точкой z , т. е. $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{r} e^{i\varphi}$. Так как точка z^* лежит вне K , то функция $\frac{f(z)}{\xi - z^*}$ будет аналитической внутри и на границе круга K , а потому по теореме Коши получим:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z^*} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(Re^{i\psi}) \frac{re^{i\psi}}{re^{i\psi} - Re^{i\varphi}} d\psi. \quad (82)$$

Вычитая из (81) равенство (82), находим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi}) \left[\frac{Re^{i\psi}}{Re^{i\psi} - re^{i\psi}} - \frac{re^{i\psi}}{re^{i\psi} - Re^{i\psi}} \right] d\psi,$$

которое после элементарных преобразований примет вид

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi. \quad (83)$$

Сравнивая действительные части слева и справа последнего равенства, получим формулу

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi, \quad (84)$$

которая носит название *интегральной формулы Пуассона*. Так как каждая гармоническая функция u может быть рассматриваема как действительная часть аналитической функции, то с помощью этой формулы выражается значение любой гармонической функции внутри круга через ее граничные значения.

Заметим еще, что мы получим из формулы (84) частные производные функции u относительно r и φ (или x и y) для внутренней точки круга, если продифференцируем выражение, стоящее под знаком интеграла.

Формула (84) Пуассона принимает особенно простой вид при $r = 0$; тогда будет:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) d\psi, \quad (84')$$

т. е. значение гармонической функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности этого круга.

Пользуясь формулой Пуассона, можно доказать следующее предложение о сходимости последовательности аналитических функций, которым нам придется в дальнейшем пользоваться: *если последовательность функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ аналитических в области G , в точке $z = 0$ этой области сходится к нулю, а действительные части u_n этих функций сходятся равномерно к нулю во всей области G , то функции $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ сходятся равномерно к нулю во всякой замкнутой области, принадлежащей G .*

В самом деле, пусть \bar{G}^* — произвольная замкнутая область, принадлежащая G . Обозначим через R число такое, что замкнутый круг радиуса R с центром в любой точке \bar{G}^* целиком лежит в области G . Произвольную точку P в области \bar{G}^* примем за центр

круга радиуса R ; прилагая формулу (84), дифференцируем ее по r и полагаем затем $r = 0$; тогда получаем:

$$\frac{\partial u_n(0, \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{R\pi} \int_0^{2\pi} u_n(R, \psi) \cos(\psi - \varphi) d\psi.$$

Обозначим через M_n верхнюю границу $|u_n|$ в области G , т. е. $|u_n| \leq M_n$. Вследствие равномерной сходимости к нулю в области G функций u_n мы заключаем, что $M_n \rightarrow 0$, когда n неограниченно возрастает. С другой стороны, сравнивая последнюю формулу с равенством $\frac{\partial u_n}{\partial r} = \frac{\partial u_n}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u_n}{\partial y} \sin \varphi$, мы видим, что

$$\frac{\partial u_n(P)}{\partial x} = \frac{1}{R\pi} \int_0^{2\pi} u_n(R, \psi) \cos \psi d\psi, \quad \frac{\partial u_n(P)}{\partial y} = \frac{1}{R\pi} \int_0^{2\pi} u_n(R, \psi) \sin \psi d\psi.$$

Следовательно, в каждой точке P области \bar{G}^* имеем:

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leq \frac{2M_n}{R} \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right| \leq \frac{2M_n}{R}.$$

Так как $f'_n(z) = \frac{\partial u_n}{\partial x} - i \frac{\partial u_n}{\partial y}$, то

$$|f'_n(z)| \leq \frac{2\sqrt{2}}{R} M_n.$$

Чтобы оценить $f_n(z)$, воспользуемся формулой

$$f_n(z) = \int_0^z f'_n(\xi) d\xi + f_n(0).$$

Заметив, что каждая точка множества \bar{G}^* есть центр круга радиуса R , принадлежащего G , мы можем по лемме Гейне—Бореля найти конечное число N таких кругов, покрывающих все множество \bar{G}^* ; к этим кругам присоединим еще круг с центром в точке $z = 0$. Тогда интегрирование от нуля до z можно будет вести вдоль ломаной, звенья которой соединяют центры двух имеющих общие точки кругов. Последнее звено будет соединять центр соответствующего круга с точкой z (лежащей внутри этого круга). Длина такой ломаной будет меньше, чем $2R(N+1)$. В каждой ее точке выполняется оценка $|f'_n(\xi)| \leq \frac{2\sqrt{2}}{R} M_n$, следовательно,

$$|f_n(z)| < \frac{2\sqrt{2}}{R} M_n \cdot 2R(N+1) + |f_n(0)|.$$

Так как $M_n \rightarrow 0$ и $|f_n(0)| \rightarrow 0$, то отсюда и вытекает равномерная сходимость к нулю последовательности $\{f_n(z)\}$ на множестве \bar{G}^* .

Упражнения к главе IV

1. Вычислить $\int_0^{2+i} R(z) dz$, если путем интегрирования служит прямолинейный отрезок $z = (2+i)t$ ($0 \leq t \leq 1$); вычислить этот же интеграл, приняв за путь интегрирования ломаную, первое звено которой есть прямолинейный отрезок $[0, 2]$, а второе — отрезок $[2, 2+i]$.

Отв. $2+i$; $2(1+i)$.

2. Вычислить интегралы $\int_{z_0}^z dz$, $\int_{z_0}^z z dz$ для произвольного пути интегрирования процессом суммирования.

Отв. $z - z_0$; $\frac{z^2 - z_0^2}{2}$.

3. Вычислить $\int (z - z_0)^m dz$ (m — целое), если путем интегрирования служит: а) окружность с центром в точке z_0 радиуса R , б) эллипс с центром в точке z_0 и осями, параллельными осям координат, в) периметр квадрата с центром в точке z_0 и сторонами, параллельными осям координат.

Отв. 0, если $m \geq 0$ или $m < -1$; $2\pi i$ при $m = -1$.

4. Вычислить $\int_{-1}^{+1} |z| dz$, когда путями интегрирования служат: а) прямолинейный отрезок, б) верхняя половина окружности радиуса единица, в) нижняя половина этой окружности.

Отв. а) 1; б) 2; в) 2.

5. Функция $f(z)$ непрерывна при $|z - z_0| > r_0$. Обозначим через $M(r)$ максимум $|f(z)|$ на окружности $|z - z_0| = r > r_0$ и предположим, что $rM(r) \rightarrow 0$.

Доказать, что $\int_{k_r} f(z) dz \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, если k_r есть окружность $|z - z_0| = r$.

6. Функция $f(z)$ непрерывна при $0 < |z - z_0| < R$. Обозначим через $M(r)$ максимум $|f(z)|$ на окружности $|z - z_0| = r < R$ и предположим, что $rM(r) \rightarrow 0$.

Доказать, что $\int_{k_r} f(z) dz \rightarrow 0$, когда $r \rightarrow 0$, если k_r есть окружность $|z - z_0| = r < R$.

7. Обозначим через L радиус единичного круга. Для каких амплитуд этого радиуса имеет смысл интеграл $\int_L e^{-1/z} dz$?

Отв. Абсолютно сходится, если $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$, расходится при $\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$; сходится, если $\arg z = \pm\pi/2$.

8. Доказать формулу $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$ при произвольном целом

положительном n , если положено:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

9. Вычислить интегралы $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$ и $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$, отправляясь от функции e^{-z^2} и принимая за путь интегрирования границу кругового сектора радиуса R с углом $\pi/4$.

Отв. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

10. Полагая $a^z = e^{z \ln a}$, исследовать эту функцию. Что означает i^i ?

11. Исследовать функции $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}$ и $\arcsin z = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$.

12. Выразить $\operatorname{arctg} z$ через логарифмическую функцию.

Отв. $\frac{1}{2i} \ln \frac{i-z}{i+z}$.

13. С помощью интеграла Коши вычислить три интеграла $\int_C \frac{dz}{1+z^2}$, если C обозначает окружности: а) $|z-i|=1$, б) $|z+i|=1$, в) $|z|=2$, проходящие в положительных направлениях.

Отв. а) π ; б) $-\pi$; в) 0.

14. Какие значения может иметь $\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2}$, если за путь интегрирования принимать любые пути, вдоль которых подынтегральная функция непрерывна?

Отв. $\frac{\pi}{4} + k\pi$, где k — целое число.

ГЛАВА V

РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В СТЕПЕННОЙ РЯД

§ 1. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций

1. Первая теорема Вейерштрасса. Пусть мы имеем бесконечный ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad (1)$$

все члены которого суть функции, аналитические в некоторой области G . Предположим, что ряд (1) сходится в каждой точке z области G , и обозначим его сумму через $f(z)$. При каких условиях сумма сходящегося ряда аналитических функций будет сама функцией аналитической?

Таким условием является условие равномерной сходимости ряда (1) в области G или по крайней мере во всякой замкнутой области \bar{G}' , целиком лежащей в области G . Это устанавливается теоремой Вейерштрасса, состоящей из двух частей.

Итак, предположим, что ряд (1) сходится равномерно во всякой замкнутой области \bar{G}' , целиком лежащей в области G , и докажем, во-первых, что ряд (1) изображает функцию $f(z)$, аналитическую в области G , во-вторых, что после дифференцирования ряда (1) произвольное число раз получается новый ряд, который будет также равномерно сходящимся во всякой замкнутой области \bar{G}' , внутренней к G , и будет изображать соответствующую производную функции $f(z)$, или, короче: ряд (1) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.

З а м е ч а н и е Такой простой теоремы мы не имеем в действительной области, так как известно, что равномерно сходящийся ряд функций действительного переменного, вообще говоря, нельзя почленно дифференцировать.

Для доказательства первой части теоремы заметим, что в силу равномерной сходимости ряда (1) его сумма $f(z)$ есть непрерывная функция во всякой замкнутой области \bar{G}' , внутренней к области G , а значит, и всюду в области G (гл. II, § 2, п. 2). Нам достаточно показать, что во всякой точке z_0 области G функция $f(z)$ имеет конечную производную. Окружим точку z_0 замкнутым, кусочно-

гладким контуром G так, чтобы все его внутренние точки вместе с точками самого контура принадлежали области G (рис. 83). Данный ряд (1) по условию будет сходиться равномерно на контуре C . Обозначая через ζ произвольную точку контура C , а через z любую точку внутри C , разделим все члены ряда (1) на $\zeta - z$. Полученный ряд

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} + \dots + \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} + \dots \quad (2)$$

будет равномерно сходящимся для всех точек ζ , принадлежащих C . Такой ряд возможно почленно интегрировать вдоль линии C (гл. IV, § 1, п. 3).

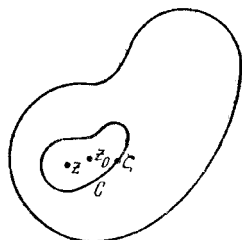


Рис. 83.

Производя интегрирование вдоль C и деля все члены полученного в результате ряда на $2\pi i$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_2(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

Так как функции $f_n(z)$ по условию суть аналитические всюду внутри C , включая точки самого контура C , то, пользуясь формулой Коши, перепишем ряд (3) в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (3')$$

В первой части ряда (3') стоит данный ряд (1), сумма которого равна $f(z)$; следовательно, имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (3'')$$

Так как функция $f(z)$ для всех точек z , внутренних к контуру C , изображается интегралом типа Коши (3''), то во всех этих точках z она имеет конечную производную (гл. IV, § 3, п. 3). В частности, функция $f(z)$ должна иметь конечную производную в точке $z = z_0$. Вспомнив, что под z_0 мы понимаем любую точку области G , мы заключаем отсюда, что $f(z)$ есть функция, аналитическая в области G , чем и доказывается первая часть теоремы Вейерштрасса.

К тому же заключению можно прийти иначе, воспользовавшись теоремой Морера (гл. IV, § 3, п. 5). В самом деле, во-первых, мы видели, что $f(z)$ есть функция, непрерывная в области G ,

во-вторых, вследствие равномерной сходимости ряда (1) на контуре C , его можно проинтегрировать почленно вдоль линии C :

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = \int_C f_1(\zeta) d\zeta + \int_C f_2(\zeta) d\zeta + \dots + \int_C f_n(\zeta) d\zeta + \dots, \quad (4)$$

где под C достаточно понимать любой кусочно-гладкий замкнутый контур, принадлежащий некоторой окрестности точки z_0 . Так как функции $f_n(z)$ суть аналитические всюду внутри C , включая точки самого контура C , то по основной теореме Коши имеем:

$$\int_C f_n(\zeta) d\zeta = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

а, следовательно, из равенства (4) получаем:

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Итак, сумма ряда (1) есть непрерывная функция в области G , для которой имеем: $\int_C f(\zeta) d\zeta = 0$; интеграл берется вдоль произвольного замкнутого контура C , принадлежащего некоторой окрестности точки z_0 . В силу теоремы Морера функция $f(z)$ должна быть аналитической в указанной окрестности точки z_0 . Вспомнив снова, что под z_0 мы понимаем любую точку области G , заключаем отсюда о справедливости нашего положения.

Перейдем теперь к доказательству второй части теоремы. По-прежнему окружим произвольную точку z_0 области G кусочно-гладким контуром C , все внутренние точки которого, включая и точки самого контура C , лежат в области G . Обозначая через ζ произвольную точку контура C , а через z любую точку внутри C , разделим данный ряд (1) на $(\zeta - z)^2$; получим ряд, равномерно сходящийся на контуре C :

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} = \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z)^2} + \frac{f_2(\zeta)}{(\zeta - z)^2} + \dots + \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} + \dots \quad (5)$$

Проинтегрировав ряд (5) почленно вдоль линии C и разделив все члены полученного ряда на $2\pi i$, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_2(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} + \dots \quad (6) \end{aligned}$$

Применяя формулу Коши, перепишем ряд (6) так:

$$f'(z) = f'_1(z) + f'_2(z) + \dots + f'_n(z) + \dots, \quad (6')$$

т. е. мы видим, что ряд, составленный из производных членов данного ряда (1), сходится к производной от суммы данного

ряда (1) во всякой точке z , лежащей внутри G , в частности при $z = z_0$. Вспомнив, что z_0 есть любая точка области G , мы убеждаемся в возможности почленного дифференцирования ряда (1) в каждой точке области G . Остается показать, что ряд (6'), составленный из производных членов данного ряда (1), сходится равномерно во всякой замкнутой области \bar{G}' , целиком лежащей в области G .

Действительно, пусть z_0 — любая точка области \bar{G}' . Опишем около точки z_0 , как центра, окружность Γ столь малого радиуса $2d$, чтобы она вместе со всеми внутренними точками принадлежала области G . Рассмотрим окрестность σ_{z_0} точки z_0 : $|z - z_0| < d$. Когда точка ζ описывает окружность Γ , а точка z остается в окрестности σ_{z_0} , расстояние между ними $|\zeta - z|$ остается все время больше положительного числа d . Так как данный ряд (1) сходится равномерно на окружности Γ , то при любом сколь угодно малом $\epsilon > 0$ имеем:

$$|f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \dots| < \epsilon, \text{ если } n \geq N = N(\epsilon),$$

какова бы ни была точка $\zeta \in \Gamma$.

Заметив это, рассмотрим все члены ряда (6'), начиная с $(n+1)$ -го:

$$f'_{n+1}(z) + f'_{n+2}(z) + \dots = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \dots}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \quad (7)$$

Из равенства (7) получаем:

$$|f'_{n+1}(z) + f'_{n+2}(z) + \dots| < \frac{\epsilon 4\pi d}{2\pi d^2} = \frac{2\epsilon}{d}.$$

Последнее неравенство показывает, что остаточный член производного ряда (6'), начиная с достаточно большого номера, будет по модулю меньше любого сколь угодно малого положительного числа независимо от точки z , принадлежащей окрестности σ_{z_0} . Другими словами, мы доказали, что ряд (6') равномерно сходится в окрестности σ_{z_0} произвольной точки z_0 , $z_0 \in \bar{G}'$. В силу леммы Гейне—Бореля (гл. II, § 1, п. 4) область \bar{G}' может быть покрыта конечным числом окрестностей σ , в каждой из которых по доказанному производный ряд равномерно сходится. Следовательно, ряд (6') равномерно сходится во всей области \bar{G}' .

Заметив, что производная аналитической функции есть функция аналитическая (гл. IV, § 3, п. 4), мы видим, что ряд (6') есть ряд функций, аналитических в области G , равномерно сходящийся во всякой замкнутой области \bar{G}' , целиком внутренней к G . Применяя к этому ряду последовательно доказанное положение, мы получаем:

$$f''(z) = f''_1(z) + f''_2(z) + \dots + f''_n(z) + \dots, \quad (8)$$

и вообще

$$f^{(p)}(z) = f_1^{(p)}(z) + f_2^{(p)}(z) + \dots + f_n^{(p)}(z) + \dots, \quad (8')$$

причем все получаемые ряды суть равномерно сходящиеся во всякой замкнутой области \bar{G}' , целиком внутренней к области G .

З а м е ч а н и е. Если данный ряд (1) сходится равномерно в области G , то в силу доказанного производный ряд (6') будет равномерно сходящимся во всякой замкнутой области \bar{G}' , целиком внутренней к G . Ошибочно было бы заключить, что производный ряд (6') сходится равномерно в области G . В самом деле, ряд $\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{n^2} + \dots$ сходится равномерно в круге $|z| \leq 1$. Его производный ряд

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots + \frac{z^{n-1}}{n} + \dots,$$

равномерно сходящийся по доказанному при $|z| \leq r$ ($r < 1$), не будет равномерно сходящимся в круге $|z| < 1$.

Вследствие доказанной теоремы Вейерштрасса равномерно сходящиеся ряды аналитических функций имеют особо важное значение, так как их суммы являются функциями аналитическими. Отсюда весьма важное значение приобретает проблема об изыскании критериев, более или менее широких, достаточных для равномерной сходимости ряда аналитических функций. Цикл вопросов, сюда относящихся, имеет следующую постановку: предполагая ряд (1) сходящимся на бесконечном множестве точек E в области G , имеющем по крайней мере одну предельную точку внутри G , найти условия, которые нужно наложить на последовательность функций

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z), \quad (9)$$

для того чтобы ряд (1) был равномерно сходящимся во всякой замкнутой области, целиком внутренней к G . Такими условиями будут, например: 1) равномерная ограниченность последовательности функций (9) во всякой замкнутой области, целиком внутренней к G^1 ; 2) выпуск двух различных постоянных значений всеми функциями последовательности (9) в области G^1 ; 3) возможность взаимно однозначного обращения каждой функции последовательности (9)²⁾ и др.

С другой стороны, заметим, что условие равномерной сходимости ряда (1) является лишь достаточным для того, чтобы сумма ряда была функцией аналитической; это условие далеко не есть необходимое, т. е. функция, аналитическая в области G , может быть изображена в виде суммы ряда функций, аналитических в G , сходящегося в этой области, но сходящегося не всюду равномерно. Естественно определить понятие сходимости ряда (1) «в особом смысле» так, чтобы это понятие было необходимым и достаточным условием для аналитичности в области G суммы ряда (1). Эта задача отчасти разрешена за последнее время. В связи с этим весьма ценной является проблема об изыскании структурных свойств функции $f(z)$, являющейся суммой произвольного сходящегося ряда (1) аналитических функций. Эта весьма трудная проблема в полном виде еще не разрешена до настоящего времени.

¹⁾ См., например, Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. — М.: Гостехиздат, 1950, стр. 294 — 295 и 689—690 или Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Гостехиздат, 1952, стр. 22—23, 77—79.

²⁾ Privaloff J., — Comptes Rendus, 1924.

§ 2. Ряд Тейлора

1. Приложение теоремы Вейерштрасса к степенным рядам. Мы уже видели, что всякий степенной ряд

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots, \quad (10)$$

радиус сходимости которого $R > 0$, изображает функцию $f(z)$, аналитическую внутри круга сходимости, и что производная $f'(z)$ этой функции может быть получена путем почленного дифференцирования ряда (гл. II, § 4, п. 6). Очевидно, что все эти результаты могут быть получены так же, как простое следствие теоремы Вейерштрасса. В самом деле, с одной стороны, мы знаем, что ряд (10) сходится равномерно во всяком круге $|z-a| \leq r$ ($r < R$), целиком внутреннем к кругу сходимости (гл. II, § 3, п. 6); с другой стороны, все члены этого ряда суть функции, аналитические во всей плоскости комплексного переменного z . Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса (§ 1) сумма ряда (10) должна быть функцией, аналитической внутри круга сходимости. Применяя вторую часть теоремы, мы видим, что степенной ряд (10) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.

В результате мы получаем степенные ряды:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \dots + nc_n(z-a)^{n-1} + \dots, \quad (11)$$

$$f''(z) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(z-a) + \dots \\ \dots + (n-1)nc_n(z-a)^{n-2} + \dots, \quad (12)$$

и вообще

$$f^{(p)}(z) = 2 \cdot 3 \dots pc_p + 2 \cdot 3 \dots p(p+1)c_{p+1}(z-a) \dots, \quad (13)$$

радиусы сходимости которых R , т. е. круги их сходимости будут совпадать с кругом сходимости данного ряда (10). В самом деле, радиус сходимости производного ряда (11) не может быть меньше R , но он в то же время не может быть больше R , так как в противном случае радиус сходимости первоначального ряда (10), получаемого почленным интегрированием производного ряда (11), был бы тоже больше R .

Таким образом, радиус сходимости производного ряда равен R . В частности, полагая в рядах (10), (11), (12) и (13) $z = a$, получим:

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, \quad c_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}, \dots \quad (14)$$

Степенной ряд (10), коэффициенты которого c_p определены по этим формулам, называется рядом Тейлора.

Таким образом, мы видим, что всякий степенной ряд с положительным радиусом сходимости есть ряд Тейлора.

Кроме формул (14) для коэффициентов c_p степенного ряда (10) можно дать другие выражения. Обозначая через C произвольную

окружность с центром в точке $z = a$, лежащую внутри круга сходимости ряда (10), и применяя формулу Коши, найдем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (15)$$

откуда дифференцированием по параметру z получим:

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}} \quad (16)$$

(гл. IV, § 3, п. 3).

В формулах (15) и (16) z обозначает любую точку, лежащую внутри C ; полагая в этих формулах, в частности, $z = a$, найдем:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a}, \quad (15')$$

$$f^{(p)}(a) = \frac{p!}{4\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{p+1}}. \quad (16')$$

Отсюда для коэффициентов c_p степенного ряда мы получаем на основании формул (14) следующие интегральные формулы:

$$c_p = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{p+1}} \quad (p = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

2. Разложение аналитической функции в степенной ряд.

В предыдущем пункте мы видели, что сумма всякого степенного ряда (10) с положительным радиусом сходимости есть функция, аналитическая внутри его круга сходимости. Докажем теперь обратное предложение: *функция, аналитическая внутри некоторого круга, разлагается в степенной ряд.*

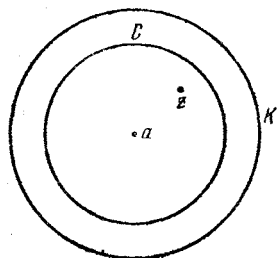


Рис. 84.

Пусть $f(z)$ есть функция, аналитическая внутри некоторой окружности K с центром в точке a , радиуса R . Обозначим через z произвольную точку внутри окружности K и опишем из точки a , как центра, окружность C радиуса ρ ($\rho < R$) так, чтобы точка z находилась внутри этой окружности (рис. 84).

Так как согласно условию функция $f(z)$ есть аналитическая внутри окружности C , включая точки самой окружности, то ее значение в точке z можно представить по формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (18)$$

Наша задача состоит в том, чтобы интеграл (18) выразить в виде суммы степенного ряда относительно $z - a$.

С этой целью преобразуем выражение $\frac{1}{\zeta - z}$ таким образом:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)}. \quad (19)$$

Какова бы ни была точка ζ на окружности C , модуль дроби $u = \frac{z - a}{\zeta - a}$ будет равен постоянному положительному числу q ($q < 1$), так как имеем: $|u| = \frac{|a - z|}{|\zeta - a|} = \frac{|z - a|}{\rho} = q < 1$. Следовательно, выражение $\frac{1}{1 - u}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1 - u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^n + \dots,$$

откуда, заменяя u его значением $\frac{z - a}{\zeta - a}$, получаем:

$$\frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^2 + \dots \quad (20)$$

Подставляя выражение (20) в формулу (19), находим:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z - a}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z - a)^2}{(\zeta - a)^3} + \dots \quad (21)$$

Ряд (20), а значит, и ряд (21) сходится равномерно при постоянном z , какова бы ни была точка ζ на окружности C , потому что модули его членов представляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой q не зависит от ζ (гл. II, § 2, п. 3). Умножая ряд (21) на $f(\zeta)$, мы, не нарушая его равномерной сходимости, получим:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} + \frac{(z - a)f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z - a)^2 f(\zeta)}{(\zeta - a)^3} + \dots \quad (22)$$

Интегрируя почленно ряд (22) вдоль окружности C , что мы вправе сделать вследствие его равномерной сходимости (гл. IV, § 1, п. 3), и деля все члены ряда, полученного после интегрирования, на $2\pi i$, находим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} + (z - a) \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^2} + (z - a)^2 \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^3} + \dots, \end{aligned}$$

или, пользуясь формулой (18), перепишем последний ряд так:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots, \quad (23)$$

где положено:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (24)$$

Коэффициенты c_n ряда (23), определяемые по формуле (24), не зависят от z , потому что за путь интегрирования C в интеграле (24) мы можем принять любой замкнутый контур, окружающий точку a , лежащий внутри окружности K , не изменяя при этом значений c_n . Коэффициенты c_n ряда (23) на основании предыдущего пункта могут быть выражены также формулами:

$$c_0 = f(a), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (24')$$

Итак, мы доказали, что во всякой точке z внутри окружности K функция $f(z)$ изображается в виде суммы ряда (23), степенного относительно $z - a$.

Мы называли функцию $f(z)$ аналитической в точке a , если эта функция является аналитической в некоторой окрестности этой точки, т. е. если существует круг с центром в точке a сколь угодно малого радиуса, внутри которого $f(z)$ есть аналитическая функция. Короче, мы будем называть такую точку a *правильной* точкой данной функции, а всякую неправильную точку функции $f(z)$ будем называть ее *особой* точкой. Например, для функции $\frac{1}{1-z}$ всякая точка z ($z \neq 1$) будет правильной; точка же $z = 1$ будет особой.

В предыдущем пункте мы видели, что степенной ряд внутри своего круга сходимости изображает аналитическую функцию $f(z)$, т. е. все точки, лежащие внутри этого круга, являются правильными точками для функции $f(z)$, изображаемой этим рядом. Что же касается окружности круга сходимости, то на ней будет по крайней мере одна особая точка функции $f(z)$. В самом деле, допустив противное, мы должны предполагать, что все точки окружности круга сходимости степенного ряда суть правильные точки для его суммы $f(z)$. В этом случае каждая точка окружности круга сходимости является центром некоторого круга k , внутри которого функция $f(z)$ будет аналитической. По лемме Гейне—Бореля (гл. II, § 1, п. 4) можно выбрать конечное число этих кругов k , образующих область G , так, чтобы каждая точка окружности круга сходимости находилась внутри по крайней мере одного из этих кругов. Обозначая через ρ наименьшее расстояние от окружности круга сходимости до границы области G , мы видим, что функция $f(z)$ будет аналитической внутри круга, концентрического с кругом сходимости, радиуса $R + \rho$. На основании результата настоящего пункта ряд Тейлора функции $f(z)$ должен сходиться внутри этого круга радиуса $R + \rho$, т. е. радиус схо-

димости данного ряда по крайней мере равен $R + \rho$, что невозможно, так как согласно условию он равен R .

Итак, если точка a есть правильная точка функции $f(z)$, то эта функция разлагается в ряд, степенной относительно $z - a$ в окрестности этой точки, причем окружность круга сходимости ряда имеет центр в точке a и проходит через ближайшую к точке a особую точку функции $f(z)$.

Это предложение устанавливает тесную связь между радиусом сходимости степенного ряда, с одной стороны, и природой функции, изображаемой этим рядом, с другой стороны; оно показывает, что теория степенных рядов получает полную ясность лишь в комплексной области. Так, например, оставаясь в области действительных чисел, нельзя понять, почему ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

перестает сходиться при значениях $x \leq -1$ и $x \geq +1$, в то время как функция $\frac{1}{1+x^2}$ определена для всех действительных значений независимого переменного x , причем значения $x = \pm 1$ не являются для нее исключительными. Картина этого явления, однако, вполне уясняется с точки зрения комплексного переменного. Действительно, функция $\frac{1}{1+z^2}$ имеет особые точки при $z = \pm i$, а потому радиус сходимости рассматриваемого ряда равен единице.

Пример. Как было ранее показано (гл. IV, § 2, п. 6), функция $\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ есть аналитическая во всякой односвязной области, не содержащей нулевой точки, в частности, всюду справа от мнимой оси. Следовательно, $\ln z$ можно разложить в степенной ряд в окрестности, например, $z = 1$, причем радиус сходимости этого ряда будет равен единице. Заметив, что

$$f(z) = \ln z, \quad f'(z) = \frac{1}{z}, \quad f''(z) = -\frac{1}{z^2}, \dots, \quad f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n},$$

получаем отсюда при $z = 1$:

$$c_0 = f(1) = 0, \quad c_1 = f'(1) = 1, \quad c_2 = \frac{f''(1)}{2!} = -\frac{1}{2}, \dots$$

$$\dots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

и, следовательно, находим:

$$\ln z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n - \dots$$

3. Понятие голоморфной функции и его эквивалентность с понятием аналитической функции. Условимся говорить, что функция $f(z)$ есть голоморфная в точке a , если она в некоторой

окрестности этой точки разлагается в степенной ряд относительно $z-a$. На основании предыдущего это свойство голоморфности функции в точке a эквивалентно свойству ее аналитичности в той же точке. Действительно, если функция $f(z)$ есть голоморфная в точке a , то согласно определению существует круг k с центром в точке a некоторого радиуса ρ , внутри которого $f(z)$ разлагается в степенной ряд относительно $z-a$. На основании п. 1 функция $f(z)$ как сумма степенного ряда должна быть аналитической внутри этого круга k , а следовательно, и в точке a .

Обратно, если $f(z)$ есть функция, аналитическая в точке a , то существует круг k с центром в этой точке некоторого радиуса ρ , внутри которого $f(z)$ будет аналитической функцией. Вследствие п. 2 $f(z)$ как функция, аналитическая внутри этого круга k , может быть представлена в виде суммы ряда, степенного относительно $z-a$, сходящегося внутри k . Следовательно, $f(z)$ будет функцией, голоморфной в точке a .

Функцию, голоморфную в каждой точке области G , мы будем кратко называть *голоморфной в этой области*.

Сказать, что функция $f(z)$ есть голоморфная в некоторой области G , очевидно, равносильно утверждению, что эта функция есть аналитическая в той же области G .

Таким образом, отправляясь от определения функции, аналитической в области, как однозначной функции, имеющей в каждой точке этой области конечную производную, мы показали, что такая функция будет голоморфной в той же области, т. е. в некоторой окрестности каждой точки этой области функция разлагается в степенной ряд.

В случае функций действительного переменного разложение в степенной ряд не всегда возможно, даже если функция имеет производные всех порядков; для функций же комплексного переменного возможность такого разложения следует из существования лишь первой производной всюду в рассматриваемой области.

4. Свойство единственности аналитических функций. Из теоремы Коши и полученного с ее помощью разложения аналитической функции в степенной ряд мы можем извлечь весьма важные следствия, которые нам позволят уяснить сущность аналитических функций. Определение произвольной функции комплексного переменного является настолько общим, что из поведения такой функции в некоторой части области G плоскости комплексного переменного ничего нельзя заключить об ее поведении в других частях области G . Так, например, пусть $f(z)$ определена во всей плоскости комплексного переменного z , причем $f(z) = i$ при $|z| \leq 1$. Отсюда мы ничего не можем сказать относительно значений функции $f(z)$ при $|z| > 1$, так как для этих значений z мы можем определить произвольно функцию $f(z)$. Несколько иначе обстоит дело, если функция $f(z)$ должна быть непрерывной; тогда в последнем примере значения функции $f(z)$ в точках,

бесконечно близких к окружности $|z| = 1$, должны со своей стороны бесконечно мало отличаться от i . В этом случае значения функции соединены между собой посредством некоторого, хотя еще весьма общего, закона. Это внутреннее свойство соединяет между собой функциональные значения так, что, зная значения функции в одной части z -плоскости, возможно делать более или менее точное заключение о поведении функции в других частях плоскости; очевидно, это свойство будет тем более сильным, чем более специальный класс функций мы будем рассматривать. Например, ограничиваясь рассмотрением целых рациональных функций 4-й степени:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad (25)$$

(a_k , x , y действительны), мы знаем, что такая функция вполне определяется посредством немногих заданий. Так, если мы знаем значения функции y для пяти значений независимого переменного x , то наша функция (25) вполне, т. е. однозначно, определена, причем пять значений независимого переменного x мы можем брать как угодно близко друг от друга. Таким образом, зная поведение функции y на сколь угодно малом интервале, мы можем судить о поведении ее при всех значениях независимого переменного x . Класс целых рациональных функций 4-й степени обладает, следовательно, очень сильным внутренним свойством, посредством которого соединяются между собой различные значения такой функции.

Особенно замечательным является тот факт, что класс функций, выделенный нами из совокупности общих функций комплексного переменного посредством лишь одного требования их дифференцируемости в области, названных нами функциями, аналитическими в этой области, обладает таким сильным внутренним свойством, которое позволяет, зная поведение такой функции в сколь угодно малой частичной области, сделать определенное заключение о ее поведении во всей основной области. Или, более точно, функция, аналитическая в области, будет вполне, т. е. однозначно, определена в этой области, если известны значения этой функции на сколь угодно малой дуге линии. В этом отношении уже формула Коши нам показывала, что мы можем определить все значения аналитической функции внутри замкнутого контура C , если известны ее значения на этом контуре. На основании теоремы о разложении аналитической функции в степенной ряд (п. 2) мы будем в состоянии обнаружить указанное свойство единственности аналитических функций в общем виде. Это свойство вследствие его громадного значения для построения всего здания теории аналитических функций наряду с интегралом Коши должно быть рассматриваемо как основное в этой теории.

Это свойство мы формулируем в общем виде таким образом: *если две функции $f(z)$ и $\varphi(z)$, голоморфные в некоторой области G ,*

имеют равные значения на бесконечном множестве точек E в этой области, причем множество E допускает по крайней мере одну предельную точку, лежащую внутри G , то эти функции равны между собой всюду в области G .

Мы докажем сначала это предложение для случая, когда область G есть круг, центр которого a является предельной точкой множества E . Итак, пусть

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots, \\ \varphi(z) &= c'_0 + c'_1(z-a) + c'_2(z-a)^2 + \dots \end{aligned}$$

суть разложения данных функций, которые имеют место во всякой точке z круга G . Чтобы доказать совпадение функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ всюду внутри круга G , достаточно показать, что коэффициенты c_n и c'_n равны между собой при любом n ($n \geq 0$). Согласно условию, если точка z принадлежит множеству E , то имеем:

$$f(z) = \varphi(z). \quad (26)$$

Так как точка a есть предельная точка множества E , то можно выбрать последовательность точек z_k этого множества, сходящуюся к точке a .

Из условия

$$f(z_k) = \varphi(z_k) \quad (26')$$

путем перехода к пределу, вследствие непрерывности функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ в точке a получаем: $f(a) = \varphi(a)$, или $c_0 = c'_0$.

Заметив это, равенство (26) перепишем в виде

$$c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots = c'_1(z-a) + c'_2(z-a)^2 + \dots, \quad (26'')$$

где z обозначает любую точку множества E . Сокращая это равенство (26'') на $z-a$, получим:

$$c_1 + c_2(z-a) + \dots = c'_1 + c'_2(z-a) + \dots \quad (26''')$$

Последнее равенство имеет место для всех точек z множества E , в частности при $z = z_k$. Переходя к пределу в предположении, что $\lim z_k = a$, аналогично предыдущему получим: $c_1 = c'_1$. Поступая так далее, найдем: $c_2 = c'_2$, ... и вообще $c_n = c'_n$ при любом n .

Пусть теперь две функции $f(z)$ и $\varphi(z)$, голоморфные в области G , имеют равные значения на бесконечном множестве точек E этой области, причем множество E допускает предельную точку a , лежащую внутри G . Мы докажем тождественность наших функций всюду в области G , если покажем, что они имеют равные значения в произвольной точке b области G . С этой целью соединим точки a и b произвольной непрерывной линией L , лежащей в области G (рис. 85). Обозначим через d ($d > 0$) расстояние линии L до границы области G , т. е. минимум всевозможных расстояний между двумя точками, из которых одна принадлежит линии L ,

а другая — границе области G . Очевидно, круг с центром в любой точке линии L радиуса $d/2$ целиком лежит в области G . Вследствие разобранный выше частного случая данные функции совпадают между собой всюду внутри круга с центром в точке a радиуса $d/2$, так как точка a есть предельная точка множества E (рис. 85). Заставляя центр круга радиуса $d/2$ непрерывно двигаться по линии L от точки a до точки b , мы видим, что наши функции должны совпадать все время между собой внутри круга, каково бы ни было положение этого движущегося круга. Следовательно, в частности, имеем: $f(b) = \varphi(b)$, что и нужно.

Итак, мы доказали, что функция $f(z)$, голоморфная в области G , определена единственным образом, если известны ее значения на бесконечной последовательности точек z_k , имеющей хотя бы одну предельную точку внутри G . Однако остается до сих пор нерешенным вопрос, как нужно а priori

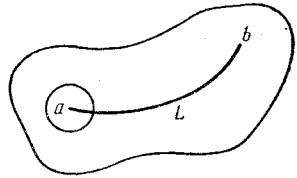


Рис. 85.

выбирать значения $f(z_k)$ функции в точках заданной бесконечной последовательности для того, чтобы они были значениями некоторой функции $f(z)$, голоморфной в области G .

Как следствие доказанной теоремы отметим, что две функции $f(z)$ и $\varphi(z)$, голоморфные в области G , тождественно равны между собой в этой области, если:

1) $f(z) = \varphi(z)$ всюду в произвольно малой окрестности некоторой точки области G ,

2) $f(z) = \varphi(z)$ на произвольно малой линии, целиком лежащей в G .

Это есть одно из замечательных свойств аналитических функций, не присущее произвольным непрерывным функциям комплексного переменного: в случае произвольной функции комплексного переменного, непрерывной в области G , значения ее в окрестности одной точки области G никоим образом не определяют ее значений во всех точках этой области.

5. Принцип максимального модуля. Формула Коши (44) (гл. IV, § 3, п. 1) принимает особенно простой вид, когда Γ есть окружность $|\zeta| = R$ и $z = 0$. Полагая $\zeta = Re^{i\psi}$, $d\zeta = iRe^{i\psi} d\psi$, найдем:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi}) d\psi, \quad (44')$$

т. е. значение голоморфной функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности этого круга.

Пользуясь формулой (44'), можно установить весьма важный принцип теории аналитических функций, называемый *принципом*

максимального модуля. Согласно этому принципу модуль функции, голоморфной в открытой области G , ни в какой точке этой области не может достигать своего максимума, за исключением случая, когда функция есть тождественное постоянное.

В самом деле, обозначим через M верхнюю границу модуля переменной функции $f(z)$, аналитической в области G , и предположим противное принципу, что в некоторой точке z_0 области G модуль функции $f(z)$ равен своему максимуму, т. е. $|f(z_0)| = M$.

Применим формулу (44') к кругу с центром в точке z_0 , принадлежащему вместе со своей периферией области G ; тогда получим:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\psi}) d\psi,$$

откуда вытекает:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\psi})| d\psi. \quad (27)$$

Так как

$$|f(z_0 + Re^{i\psi})| \leq M, \quad \text{а} \quad |f(z_0)| = M,$$

то из неравенства (27) усматриваем, что $|f(z_0 + Re^{i\psi})| = M$ при любом ψ . Действительно, если бы мы при некотором значении $\psi = \psi_0$ имели

$$|f(z_0 + Re^{i\psi_0})| < M,$$

то вследствие непрерывности $|f(z)|$ неравенство $|f(z_0 + Re^{i\psi})| < M$ осуществлялось бы в некотором достаточно малом промежутке

$$\psi_0 - \varepsilon < \psi < \psi_0 + \varepsilon,$$

вне же этого промежутка

$$|f(z_0 + Re^{i\psi})| \leq M.$$

При таких условиях правая часть неравенства (27) была бы меньше, чем M , в то время как левая равна M , чего быть не может.

Итак, мы показали, что $|f(z)| = M$ на всякой достаточно малой окружности с центром в точке z_0 , или, что то же, в достаточно малой окрестности точки z_0 . Покажем теперь, что $|f(z)| = M$ всюду в области G . С этой целью соединим точку z_0 с произвольной точкой z_1 области G непрерывной линией L , лежащей в области G . Обозначим через d ($d > 0$) расстояние линии L до границы области G , т. е. минимум всевозможных расстояний между двумя точками, из которых одна принадлежит линии L , а другая — границе области G . Очевидно, круг с центром в любой точке линии L радиуса $d/2$ целиком лежит в области G . Вследствие

доказанного равенство $|f(z)| = M$ имеет место всюду внутри круга с центром в точке z_0 радиуса $d/2$. Заставляя центр круга радиуса $d/2$ непрерывно двигаться по линии L от точки z_0 до точки z_1 , мы видим, что равенство $|f(z)| = M$ должно выполняться все время внутри круга, каково бы ни было положение этого движущегося круга. Следовательно, в частности, имеем: $|f(z_1)| = M$. Так как z_1 — любая точка области G , то мы доказали справедливость равенства $|f(z)| = M$ всюду в области G . Отсюда же легко вывести, что $f(z)$ есть постоянное число.

В самом деле, функция $\ln f(z)$ имеет постоянную действительную часть, так как действительная часть логарифма равна логарифму модуля. Вследствие условий Коши—Римана (гл. II, § 4, п. 4) голоморфная функция $\ln f(z)$ с постоянной действительной частью есть постоянное число, а значит, и $f(z)$ есть постоянное число в области G , что невозможно.

Из доказанного принципа вытекает: если $f(z)$ есть функция, голоморфная в области G и непрерывная в замкнутой области \bar{G} , то максимальное значение ее модуля необходимо достигается на границе области G при условии, что $f(z)$ не есть постоянное число. В самом деле, функция $|f(z)|$, будучи непрерывной в замкнутой области \bar{G} , в силу известной теоремы классического анализа принимает свое максимальное значение M в некоторой точке z_0 этой области. В силу доказанного точка z_0 не может лежать в области G , следовательно, она расположена на границе области G .

Дадим еще другое доказательство основной теоремы этого пункта. Допустив, что модуль функции $f(z)$, голоморфной в области G , достигает своего максимума во внутренней точке a этой области, мы можем, очевидно, считать, что $f(a) = a_0 \neq 0$, так как иначе $f(z)$ тождественно равнялась бы нулю. Пусть в некоторой окрестности точки a

$$f(z) = a_0 + a_k(z-a)^k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots,$$

где $a_k \neq 0$. Выберем число δ настолько малым, чтобы круг $|z-a| \leq \delta$ лежал внутри области G и чтобы в нем выполнялось неравенство

$$|a_{k+1}(z-a) + a_{k+2}(z-a)^2 + \dots| < \frac{1}{2} |a_k|.$$

Обозначая, далее, одно из значений $\arg \frac{a_0}{a_k}$ через φ (например, значение, удовлетворяющее неравенству $0 \leq \arg \frac{a_0}{a_k} < 2\pi$), положим $z = \zeta = a + \delta e^{i\frac{\varphi}{k}}$. Тогда будем иметь:

$$\arg [a_k(\zeta - a)^k] = \arg a_k + k \arg(\zeta - a) = \arg a_k + \arg \frac{a_0}{a_k} = \arg a_0,$$

$$|a_0 + a_k(\zeta - a)^k| = |a_0| + |a_k| |\zeta - a|^k$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |f(\zeta)| &= |a_0 + a_k(\zeta - a)^k + a_{k+1}(\zeta - a)^{k+1} + \dots| \geq \\ &\geq |a_0 + a_k(\zeta - a)^k| - |a_{k+1}(\zeta - a)^{k+1} + \dots| = \\ &= |a_0| + |a_k|\delta^k - \delta^k|a_{k+1}(\zeta - a) + \dots| > \\ &> |a_0| + |a_k|\delta^k - \frac{1}{2}|a_k|\delta^k = |a_0| + \frac{1}{2}|a_k|\delta^k. \end{aligned}$$

Итак,

$$|f(\zeta)| > |a_0| = |f(a)|,$$

что противоречит сделанному допущению. Таким образом, модуль голоморфной функции не может достигать максимума внутри области, где функция голоморфна.

Рассуждая, как и в начале этого пункта, и пользуясь формулой (84') гл. IV, § 3, п. 9, читатель легко покажет, что функция, гармоническая в некоторой области, не может достигать во внутренних точках ни максимума, ни минимума (если она отлична от постоянной). Отсюда, в частности, следует, что функция, непрерывная в замкнутой области, гармоническая внутри и сохраняющая постоянное значение на границе, должна быть постоянной во всей области, ибо ее максимум и минимум, принимаемые на границе, совпадают.

6. Нули аналитической функции. Мы называем нулем функции $f(z)$, голоморфной в области G , всякую точку z_0 этой области, в которой имеет место равенство

$$f(z_0) = 0.$$

Множество всех нулей нашей функции $f(z)$, лежащих в области G , может быть конечным или бесконечным. Однако никакая точка области G не может быть предельной точкой множества нулей функции $f(z)$, если $f(z)$ не есть тождественный нуль (п. 4). Следовательно, все предельные точки множества нулей функции $f(z)$ должны находиться на границе области G . Отсюда, в частности, следует, что около всякого нуля функции $f(z)$ можно описать, как из центра, окружность достаточно малого радиуса так, что внутри этой окружности не имеется других нулей, кроме центра.

Легко видеть далее, что множество всех нулей функции $f(z)$ ($f(z) \not\equiv 0$), лежащих в области G , где данная функция является голоморфной, можно рассматривать в виде последовательности точек, т. е. все нули можно перенумеровать в помощь натуральных чисел.

Действительно, обозначим через \bar{G}_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) систему замкнутых областей, целиком лежащих в области G , и таких, что каждая из них содержится в следующей, причем расстояние

границы области \bar{G}'_n до границы области G пусть равно $1/n$, т. е. $1/n$ есть минимум расстояний между точками границы области \bar{G}'_n и всевозможными точками границы области G . В каждой замкнутой области \bar{G}'_n имеется лишь конечное число нулей функции $f(z)$, так как в противном случае существовала бы предельная точка этих нулей, лежащая в области G , что невозможно. Заметив это, рассмотрим сначала все нули функции $f(z)$, лежащие в области \bar{G}'_1 ; обозначим их через z_1, z_2, \dots, z_{k_1} ; затем рассмотрим те нули, которые лежат в \bar{G}'_2 и вне \bar{G}'_1 ; обозначим их через $z_{k_1+1}, z_{k_1+2}, \dots, z_{k_2}$ и т. д. В результате мы получим последовательность точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, исчерпывающую все различные нули функции $f(z)$, лежащие в области G , так как каждый нуль находится на определенном положительном расстоянии от границы области G и, следовательно, принадлежит области \bar{G}'_n , начиная с некоторого n . Все вышеупомянутые заключения о расположении нулей аналитической функции остаются в силе для множества тех точек области G , в которых функция $f(z)$, голоморфная в G , принимает постоянное значение c , так как точки, в которых $f(z) = c$, суть нули функции $f(z) - c$.

7. Порядок нуля. Если функция $f(z)$ ($f(z) \not\equiv 0$), голоморфная в области G , равна нулю в точке a этой области, то разложение ее для некоторой окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots, \quad (28)$$

так как $c_0 = f(a) = 0$.

Очевидно, все коэффициенты c_n разложения (28) не могут равняться нулю, так как в этом случае функция $f(z)$, равная нулю всюду в некоторой окрестности точки a , была бы по теореме единственности (п. 4) тождественным нулем в области G . Следовательно, среди коэффициентов c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) имеются отличные от нуля; обозначим через m ($m \geq 1$) наименьший номер таких коэффициентов.

Тогда имеем:

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0, \quad c_m \neq 0,$$

и следовательно, разложение (28) принимает вид

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \quad (28')$$

где $c_m \neq 0$.

В этом случае мы скажем, что точка a есть нуль порядка m для функции $f(z)$. Если $m = 1$, то нуль называют *простым*, при $m > 1$ — *кратным*.

8. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.
Если степенной ряд

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots \quad (29)$$

сходится в круге $|z| < R$ и изображает в нем функцию $f(z)$, модуль которой все время меньше M , то имеют место неравенства

$$|c_n| \leq M/R^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (30)$$

Неравенства (30) получаются немедленно, если воспользоваться интегральными формулами для коэффициентов степенного ряда (гл. V, § 2, п. 1):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где интегрирование совершается по произвольной окружности $|\zeta| = \rho$ ($\rho < R$). Оценивая $|c_n|$, находим:

$$|c_n| < M/\rho^n.$$

Так как последнее неравенство имеет место для всех ρ ($\rho < R$), то путем перехода к пределу при ρ , стремящемся к R , находим окончательно:

$$|c_n| \leq M_0 R^n. \quad (31)$$

9. Теорема Лиувилля. Если функция $f(z)$, голоморфная во всей плоскости, является ограниченной по модулю, то она есть тождественное постоянное.

Действительно, в рассматриваемом случае разложение

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (32)$$

имеет место во всякой точке z плоскости. Пользуясь неравенствами Коши (п. 8), имеем:

$$|c_n| \leq M/R^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

где M есть постоянное число, а R можно считать сколь угодно большим. Следовательно, имеем $c_n = 0$, если $n \geq 1$, и, значит, вследствие (32) будет: $f(z) = c_0$.

10. Вторая теорема Вейерштрасса. Пусть дан ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad (33)$$

все члены которого суть функции, голоморфные в области G и непрерывные в замкнутой области \bar{G} . При этих условиях мы докажем, что если ряд (33) сходится равномерно на границе области G , то он сходится также равномерно во всей замкнутой области \bar{G} .

Действительно, обозначая через ζ произвольную точку границы области G , по условию имеем:

$$|f_{N+1}(\zeta) + f_{N+2}(\zeta) + \dots + f_{N+p}(\zeta)| < \varepsilon \quad (34)$$

при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, если $N = N(\varepsilon)$ и $p \geq 1$. Так как функция $|f_{N+1}(z) + f_{N+2}(z) + \dots + f_{N+p}(z)|$ есть голоморфная в области G и непрерывная в замкнутой области \bar{G} , то неравенство (34) должно иметь место также во всех точках z

области G (п. 5). Таким образом, неравенство (34) остается в силе, если под ζ понимать любую точку замкнутой области \bar{G} , откуда следует равномерная сходимость ряда (33) во всей области \bar{G} (гл. II, § 2, п. 3).

Упражнения к главе V

1. Разложить главное значение $\sqrt[m]{z}$ в степенной ряд в окрестности $z = 1$; отдельно при $m = 2$.

$$\text{Отв. } 1 + \frac{1}{m}(z-1) + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\frac{(z-1)^2}{2!} + \dots;$$

$$1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}(z-1)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}(z-1)^3 - \dots$$

2. Доказать, что модуль голоморфной функции $f(z)$ не может иметь в точке z_0 минимума, не равного нулю.

3. Рассматривая аналитическую функцию $e^u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — гармонические сопряженные функции, показать, что гармоническая функция $u(x, y)$ не может принимать во внутренних точках области ни максимума, ни минимума.

4. Разложить главные значения функций $\operatorname{arctg} z$ и $\operatorname{arcsin} z$ в степенные ряды в окрестности нулевой точки.

$$\text{Отв. } z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots; \quad z + \frac{1}{2 \cdot 3} z^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} z^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} z^7 + \dots$$

5. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$.

Отв. При $|z| < 1$ абсолютно сходится; при $|z| \geq 1$ расходится.

6. Определить, в какой части своей области сходимости ряд задачи 5 сходится равномерно.

Отв. При $|z| \leq 1 - \delta$ ($\delta > 0$).

7. Доказать, что если ряд $\sum |f_n(z)|$ равномерно сходится в области G и $f_n(z)$ — аналитические функции в G , то $\sum |f'_n(z)|$ сходится равномерно в каждой замкнутой области, принадлежащей G .

8. Вычислить первые четыре коэффициента степенного ряда для функций

а) $e^{\frac{1}{1-z}}$; б) $\sin \frac{1}{1-z}$; в) $\ln(1+e^z)$.

$$\text{Отв. а) } e^{\frac{1}{1-z}} = e \left[1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{13}{6} z^3 + \frac{73}{24} z^4 + \dots \right];$$

$$\text{б) } \sin \frac{1}{1-z} = \sigma + \tau z + \left(\tau - \frac{1}{2} \sigma \right) z^2 + \left(\frac{5}{6} \tau - \sigma \right) z^3 + \dots,$$

где $\sigma = \sin 1$, $\tau = \cos 1$;

$$\text{в) } \ln(1+e^z) = \ln 2 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^4}{192} + \dots$$

9. Образовать полные степенные ряды для функций а) $\frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{1-z} \right)^2$; б) $\sin^2 z$ и $\cos^2 z$.

Отв. а)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) z^n,$$

б)
$$\sin^2 z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

$$\cos^2 z = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

10. Если $f(z)$ в односвязной области G есть аналитическая функция (не равная постоянному числу), то любой замкнутый контур C , принадлежащий G , содержит внутри себя только конечное число корней уравнения $f(z) = a$.

11. Существует ли функция, аналитическая в нулевой точке, которая в точках $z = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) принимает значения:

а) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$; б) $0, 1/2, 0, 1/4, 0, 1/6, \dots$;

в) $1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/6, 1/6, \dots$; г) $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots$

Отв. а) нет; б) нет; в) нет; г) да, $\frac{1}{1+z}$.

12. В точке z_0 аналитическая функция $f(z)$ имеет нуль порядка α . Какое поведение имеет в точке z_0 функция $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$? Какое поведение

в точке z_0 имеет функция $\Phi(z) = \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta$, если z_1 лежит в окрестности z_0 ,

в которой $f(z)$ — аналитическая функция, и путь интегрирования расположен в этой окрестности?

Отв. $F(z)$ имеет нуль порядка $\alpha + 1$; $\Phi(z) = \int_{z_1}^{z_0} f(\zeta) d\zeta = F(z_0)$.

Г Л А В А VI
ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ
ОДНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Ряд Лорана

1. **Разложение аналитической функции в ряд Лорана.** Пусть $f(z)$ есть функция, голоморфная внутри кругового кольца, граница которого состоит из двух окружностей K и k с общим центром в точке a . Обозначим радиусы этих окружностей соответственно через R и r (рис. 86). Мы образуем ряд, расположенный по положительным и отрицательным степеням $z - a$, который сходится к функции $f(z)$ в каждой точке z , лежащей внутри кольца, т. е. при условии $r < |z - a| = \rho < R$. С этой целью выберем два радиуса r' и R' так, чтобы $r < r' < \rho < R' < R$, и обозначим через c и C окружности этих радиусов с центром в точке a (рис. 86).

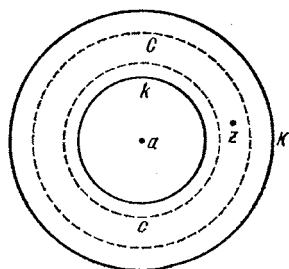


Рис. 86.

Согласно условию функция $f(z)$ будет голоморфной в кольце между этими окружностями, включая и сами окружности c и C . Применяя формулу Коши (гл. IV, § 3, п. 2), получаем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (1)$$

где пути интегрирования C и c проходятся оба в положительном направлении.

Замечая, что в первом интеграле формулы (1) ξ обозначает точку окружности C , имеем:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z - a}{\xi - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}. \quad (2)$$

Полученный ряд (2) сходится равномерно для всех точек ξ на окружности C , потому что имеем:

$$\left| \frac{z - a}{\xi - a} \right| = \frac{\rho}{R'} < 1$$

(ср. гл. V, § 2, п. 2).

Во втором интеграле формулы (1) ζ обозначает точку окружности c ; заметив, что имеем:

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \frac{1}{(z - a) \left(1 - \frac{\zeta - a}{z - a}\right)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}}, \quad (3)$$

получаем ряд (3), равномерно сходящийся для всех точек ζ на окружности c , так как

$$\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| = \frac{r'}{\rho} < 1.$$

Подставляя разложения (2) и (3) в интегралы формулы (1) и выполняя почленное интегрирование, что возможно сделать вследствие равномерной сходимости относительно ζ , получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) (z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) (\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}} d\zeta. \quad (4)$$

Полагая ради сокращения письма:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6)$$

перепишем равенство (4) в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - a)^{-n}. \quad (4')$$

Формулы (5) и (6) для c_n и b_n можно объединить в виде одной формулы

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots), \quad (7)$$

где контур интегрирования γ есть произвольная окружность с центром в точке a , лежащая внутри данного кольца.

В самом деле, так как подынтегральные функции формул (5) и (6) суть голоморфные всюду внутри данного кольца, то, не изменяя значений c_n и b_n , мы можем принять в них за путь интегрирования любую окружность γ с центром в точке a , лежащую внутри этого кольца; с другой стороны, имеем:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{-n+1}} = c_{-n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что коэффициенты c_n , определяемые формулой (7), не зависят от точки z , так как под γ мы вправе понимать любую окружность с центром в точке a , лежащую внутри данного кольца.

Разложение (4') на основании введенных обозначений мы можем записать так:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}, \quad (4'')$$

или

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \quad (4''')$$

Таким образом, мы получили изображение функции $f(z)$, справедливое для всех точек z , лежащих внутри данного кольца, посредством ряда (4'''), состоящего из двух частей: первая его часть, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, есть ряд, расположенный по возрастающим степеням $z-a$ (степенной ряд, относительно $z-a$); вторая часть, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$, представляет ряд, расположенный по убывающим отрицательным степеням $z-a$ (степенной ряд относительно $\frac{1}{z-a}$). Оба эти ряда сходятся в каждой точке z , лежащей внутри данного кольца. Ряд (4''') носит название ряда Лорана.

2. **Правильная и главная части ряда Лорана.** Рассмотрим отдельно те два ряда, из которых состоит ряд Лорана (4'''). Первый ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ есть обыкновенный степенной ряд, который, следовательно, сходится для всех точек z , лежащих внутри окружности K , и изображает функцию $f_1(z)$, голоморфную всюду внутри окружности K . Этот первый ряд, входящий в разложение Лорана (4'''), называется *правильной* частью ряда Лорана. Второй ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$ можно также рассматривать как обыкновенный степенной ряд, если положить:

$$c_{-n} = b_n, \quad \frac{1}{z-a} = z'. \quad (8)$$

В новых обозначениях этот ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^n. \quad (9)$$

Ряд (9) будет сходящимся, очевидно, при $\frac{1}{R} < |z'| < \frac{1}{r}$, так как первоначальный ряд сходится, если $r < |z-a| < R$.

Следовательно, ряд (9), будучи степенным относительно z' , сходится для всех точек z' , для которых имеем $|z| < 1/r$, и изображает функцию переменного z' , голоморфную при $|z'| < 1/r$.

Возвращаясь с помощью (8) к старому переменному z , мы видим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$ сходится при всех z , для которых имеет место неравенство $|z-a| > r$, т. е. во всех точках z , лежащих вне окружности k , и изображает функцию $f_2(z)$, голоморфную всюду вне k . Вторым ряд, входящий в разложение (4''), носит название *главной* части ряда Лорана. Итак, функция $f(z)$ представляется в виде суммы

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где $f_1(z)$ есть функция, голоморфная внутри окружности K , а $f_2(z)$ есть функция, голоморфная вне окружности k . Внутри кольца, заключенного между окружностями K и k , обе функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ суть голоморфные.

3. Единственность разложения Лорана. Подобно разложению Тейлора, найденное разложение (4'') Лорана есть *единственно* возможное для данной функции $f(z)$ (в данном круговом кольце).

Действительно, допустим, что во всех точках z , внутренних к некоторому кольцу, одновременно имеют место два разложения:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n (z-a)^n. \quad (10)$$

Умножая оба разложения (10) на $(z-a)^{-k-1}$ и интегрируя вдоль произвольной окружности с центром в точке a , лежащей внутри кольца, на которой оба ряда равномерно сходятся, получим:

$$2\pi i c_k = 2\pi i c'_k, \quad \text{или} \quad c_k = c'_k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Из изложенного в пп. 1 и 2 вытекает, что точная область сходимости ряда Лорана (4''') есть круговое кольцо с центром в точке a , внутри которого функция $f(z)$ голоморфна и на каждой окружности K и k которого имеется по крайней мере по одной особой точке этой функции. В частности, если внутри K функция $f(z)$ не имеет особых точек, то ее разложение Лорана обращается в ряд Тейлора.

Пример. Нетрудно получить разложение

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \text{если} \quad 1 < |z| < 2;$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n}, \quad \text{если} \quad 2 < |z| < +\infty.$$

Здесь мы имеем два различных разложения Лорана для одной и той же функции; однако это обстоятельство нисколько не противоречит теореме об единственности разложения, так как указанные разложения имеют место для разных круговых колец.

§ 2. Классификация особых точек однозначной функции

1. Три типа изолированных особых точек. Особенного внимания заслуживает случай, когда внутри окружности K ее центр a есть единственная особая точка однозначной функции $f(z)$. Разложение Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad (11)$$

в этом случае сходится во всякой точке z , лежащей внутри окружности K , кроме точки $z = a$, и изображает функцию $f(z)$, голоморфную всюду внутри окружности K , кроме ее центра. Точка a называется в этом случае *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, изображаемой всюду в окрестности такой точки (кроме $z = a$) разложением вида (11). В основу классификации изолированных особых точек однозначной функции $f(z)$ мы положим способ ее разложения в окрестности таких точек. Возможны три случая:

1. Разложение Лорана (11) содержит бесконечное множество отрицательных степеней $z - a$. В этом случае точка a называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

2. Разложение (11) содержит лишь конечное число отрицательных степеней $z - a$. В этом случае точку a назовем *полюсом* функции $f(z)$.

3. Разложение (11) совсем не содержит отрицательных степеней $z - a$. В этом случае точка a называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$.

Распределив изолированные особые точки однозначной функции на три типа, выясним теперь характер поведения функции в окрестности особой точки каждого из указанных типов (под окрестностью изолированной особой точки a мы понимаем совокупность всех точек z , удовлетворяющих условию $0 < |z - a| < R$, где R выбрано столь малым, чтобы функция $f(z)$ была голоморфной во всех точках z).

2. **Устраняемая особая точка.** Начнем с рассмотрения особой точки третьего типа. В этом случае разложение (11) обращается в обыкновенный степенной ряд и, следовательно, сходится всюду в окрестности точки a , включая и саму точку a ; его сумма будет представлять функцию, голоморфную всюду в окрестности точки a , включая саму точку a . Данная функция $f(z)$ совпадает с суммой нашего ряда, если $z \neq a$. Следовательно, мы сделаем данную функцию $f(z)$ голоморфной в точке a , если положим:

$$f(a) = c_0.$$

Итак, особая точка третьего типа исчезает, если мы надлежащим образом определим нашу функцию в этой точке. Из предыдущего следует, что если a есть устранимая особая точка, то имеем: $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$: в частности, существуют положительные числа M и η , такие, что имеем:

$$|f(z)| < M \text{ при } 0 < |z - a| < \eta. \quad (12)$$

Наличие неравенств (12) мы кратко выразим словами: *в достаточно малой окрестности устранимой особой точки данная функция ограничена*. В дальнейшем мы увидим, что обратно, если функция ограничена в окрестности изолированной особой точки, то эта точка есть устранимая особая точка.

3. **Полюс.** Перейдем теперь к анализу особой точки второго типа, названной нами полюсом. В этом случае разложение (11) содержит конечное число отрицательных степеней $z - a$. Обозначая через m наивысшую степень $\left(\frac{1}{z - a}\right)$, входящую в разложение Лорана (11), получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \frac{c_{-1}}{z - a} + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z - a)^m}, \quad (11')$$

где $c_{-m} \neq 0$. Если $m = 1$, то полюс a называют *простым*, при $m > 1$ его называют *кратным*; число m называется *порядком полюса*. Умножая обе части разложения (11') на $(z - a)^m$ ($z \neq a$), находим:

$$(z - a)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^{n+m} + c_{-1} (z - a)^{m-1} + c_{-2} (z - a)^{m-2} + \dots + c_{-m}. \quad (13)$$

В правой части полученного равенства (13) стоит обыкновенный степенной ряд, свободный член которого c_{-m} отличен от нуля.

Следовательно, точка a для функции $(z - a)^m f(z)$ является устранимой особой точкой, причем имеем:

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = c_{-m} \neq 0. \quad (14)$$

В частности, из равенства (14) следует:

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^m |f(z)| = |c_{-m}|. \quad (15)$$

Обозначая через q произвольное положительное число, меньшее, чем $|c_{-m}|$, мы можем найти вследствие (15) достаточно малое положительное число η , такое, что будем иметь:

$$|z - a|^m |f(z)| > q, \text{ если } 0 < |z - a| < \eta,$$

или

$$|f(z)| > \frac{q}{|z-a|^m} \quad \text{при} \quad 0 < |z-a| < \eta. \quad (16)$$

Последние неравенства (16) показывают, что $|f(z)|$ стремится к бесконечности, когда точка z стремится к точке a , что символически записывают таким образом:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty. \quad (15')$$

Короче можно сказать, что в полюсе функция обращается в бесконечность.

4. Связь между нулем и полюсом. Пусть функция $f(z)$ имеет в точке a нуль порядка m . Как известно (гл. V, § 2, п. 7), в некоторой окрестности такой точки a функция $f(z)$ может быть представлена в виде степенного ряда

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \quad (17)$$

где $c_m \neq 0$, или

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

при этом функция $\varphi(z)$ есть голоморфная в точке a и не равная нулю. Обратная величина $\frac{1}{f(z)}$ представляется вследствие (17) следующим образом:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m}, \quad (18)$$

причем функция $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ будет голоморфной в точке a и отличной от нуля. Заметив, что имеем:

$$\psi(z) = \psi(a) + \psi'(a)(z-a) + \dots,$$

получаем из (18) в окрестности точки a ($z \neq a$):

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{\psi(a)}{(z-a)^m} + \frac{\psi'(a)}{(z-a)^{m-1}} + \dots,$$

откуда следует, что точка a является полюсом m -го порядка для функции $\frac{1}{f(z)}$.

Обратно, предполагая точку a полюсом порядка m для функции $f(z)$, мы имели бы в окрестности такой точки ($z \neq a$):

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad (19)$$

где функция $\varphi(z)$ стремится к пределу, отличному от нуля, когда точка z стремится к точке a (п. 3) и, следовательно, может быть рассматриваема как функция, голоморфная в точке a и не равная

нулю [полагая $\varphi(a)$ равной указанному пределу (п. 2)]: Составив с помощью равенства (19) выражение

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \frac{1}{\varphi(z)} = (z-a)^m \cdot \psi(z) \quad (20)$$

и произведя те же вычисления, что выше, найдем:

$$\frac{1}{f(z)} = \psi(a)(z-a)^m + \psi'(a)(z-a)^{m+1} + \dots,$$

где $\psi(a) \neq 0$, откуда следует, что точка a является нулем порядка m для функции $\frac{1}{f(z)}$, если положим $\frac{1}{f(a)} = 0$.

Итак, резюмируя изложенное, мы приходим к выводу: *если точка a есть нуль порядка m для функции $f(z)$ (или полюс порядка m), то та же точка для функции $\frac{1}{f(z)}$ будет полюсом порядка m (соответственно нулем порядка m при условии $\frac{1}{f(a)} = 0$).*

Из изложенного следует, что если функция $f(z)$ не обращается в нуль, то она имеет точку a существенно особой точкой одновременно с функцией $\frac{1}{f(z)}$.

Пример. Рациональная функция, изображаемая несократимой дробью

$$\frac{p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n}{q_0 z^m + q_1 z^{m-1} + \dots + q_m},$$

имеет полюсами нули знаменателя, причем порядок каждого полюса равен порядку соответствующего нуля.

5. Существенно особая точка. Остается исследовать поведение функции $f(z)$ в окрестности существенно особой точки. Мы видели, что в случае устранимой особой точки a функция $f(z)$ стремится к определенному конечному пределу c_0 , когда точка z стремится к точке a (п. 2); в случае полюса функция стремится также к определенному пределу, равному бесконечности (п. 3). Если же a есть существенно особая точка, то здесь имеет место следующая теорема, принадлежащая Ю. В. Сохоцкому: *каково бы ни было постоянное число A , конечное или бесконечное, существует последовательность точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, сходящаяся к существенно особой точке a , такая, что имеем: $\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = A$.*

Короче это можно формулировать так: в сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция $f(z)$ принимает значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному числу, конечному или бесконечному.

Замечание. Чтобы дать геометрическую характеристику теоремы Сохоцкого, будем изображать точками плоскости ω значения функции $\omega = f(z)$, принимаемые ею в сколь угодно малой окрестности $0 < |z-a| < \delta$ существенно особой точки a . Теорема Сохоцкого утверждает, что *любая точка A*

плоскости w является предельной точкой для множества значений, принимаемых функцией $w = f(z)$ в сколь угодно малой окрестности точки a .

Переходя к доказательству теоремы Сохоцкого, предположим сначала, что $A = \infty$. Покажем, что существует последовательность точек z_n , $\lim z_n = a$, таких, что имеем: $\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = \infty$.

Обозначая для сокращения через $P(z-a)$ правильную часть разложения Лорана (11), содержащую положительные степени $z-a$ и свободный член, а через $Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$ его главную часть, содержащую отрицательные степени $z-a$, можем переписать (11) в виде

$$f(z) = P(z-a) + Q\left(\frac{1}{z-a}\right). \quad (11'')$$

Что касается правильной части $P(z-a)$, то при любом стремлении точки z к точке a имеем:

$$\lim_{z \rightarrow a} P(z-a) = c_0. \quad (21)$$

Полагая в главной части $Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$:

$$\frac{1}{z-a} = z', \quad (22)$$

будем иметь:

$$Q\left(\frac{1}{z-a}\right) = Q(z') = c_{-1}z' + c_{-2}z'^2 + \dots + c_{-n}z'^n + \dots \quad (23)$$

Так как ряд $Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$ сходится всюду, кроме точки $z=a$ (§ 1, п. 2), то ряд (23), очевидно, будет сходящимся во всей плоскости комплексного переменного z' . Функция $Q(z')$ по теореме Лиувилля (гл. V, § 2, п. 9) не может быть ограниченной во всей плоскости комплексного переменного z' , т. е., какое бы натуральное число N мы ни взяли, найдется точка z'_N , $|z'_N| > N$, такая, что будем иметь $|Q(z'_N)| > N$. Заставляя N пробегать значения 1, 2, 3, ..., n , ..., мы получим последовательность точек $z'_1, z'_2, z'_3, \dots, z'_n, \dots$, стремящуюся к бесконечности и такую, что будем иметь:

$$\lim_{z'_n \rightarrow \infty} Q(z'_n) = \infty.$$

Возвращаясь к прежнему переменному z , мы видим на основании (22), что последовательность точек z'_n преобразуется в последовательность точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, сходящуюся к точке a , такую, что имеем

$$\lim_{z_n \rightarrow a} Q\left(\frac{1}{z_n-a}\right) = \infty. \quad (24)$$

Заставляя точку z стремиться к точке a , проходя последовательность точек z_n , усматриваем из равенства (11'') на основании равенств (21) и (24):

$$\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = \infty.$$

Пусть теперь A есть произвольное конечное комплексное число. Может случиться, что в произвольно малой окрестности точки a существует точка z такая, что имеем $f(z) = A$. В этом случае теорема Сохоцкого справедлива. Таким образом, мы можем предположить, что в достаточно малой окрестности точки a функция $f(z)$ не равна A . Если так, то функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ будет голоморфной в этой окрестности точки a , кроме точки $z = a$, которую она имеет в качестве существенно особой точки [потому что $z = a$ — существенно особая точка для $f(z) - A$]. По доказанному существует последовательность точек z_n , сходящаяся к точке a , такая, что имеем: $\lim_{z_n \rightarrow a} \varphi(z_n) = \infty$, откуда следует: $\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = A$, что и нужно.

6. Поведение функции в окрестности изолированной особой точки. Мы исследовали поведение однозначной функции в окрестности изолированной особой точки каждого из трех вышеуказанных типов и видели, что в достаточно малой окрестности устранимой особой точки функция ограничена, в достаточно малой окрестности полюса она сколь угодно велика (по модулю) и, наконец, в сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция становится неопределенной. Резюмируя это исследование, мы видим, что, и обратно, изолированная особая точка будет устранимой, полюсом или существенно особой точкой, смотря по тому, будет ли в окрестности такой точки данная функция ограниченной, бесконечно большой или неопределенной.

Примеры. 1. Функция $e^{1/z}$ имеет при $z = 0$ существенно особую точку. Разложение Лорана в окрестности этой точки будет:

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

2. Функции $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ и $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ имеют полюсы соответственно при нулях $\cos z$ и $\sin z$. Легко показать, что это будут полюсы первого порядка. Напишем, например, разложение Лорана для функции $\operatorname{ctg} z$ в окрестности полюса $z = 0$. Разделив формально степенные ряды для $\cos z$ и $\sin z$, получим, ограничиваясь первыми членами, выражение

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \dots$$

Вследствие единственности такого разложения полученный ряд есть ряд Лорана для функции $\operatorname{ctg} z$, сходящийся в окрестности нулевой точки: $0 < |z| < \pi$. Из этого разложения усматриваем, что $z = 0$ есть полюс первого порядка.

Мы оставляем вне рассмотрения случаи неизолированных особых точек однозначной функции, а также случаи особых точек, в окрестности которых данная функция не является однозначной (например, $z = 0$ для функций $\ln z$ и $\sqrt[n]{z}$). Простейшим типом неизолированной особой точки однозначной функции будет тот случай, когда точка a является предельной для полюсов, например $z = 0$ для функции $\frac{1}{\sin(1/z)}$. Легко показать, что теорема Сохоцкого остается в силе для такой особой точки a . В самом деле, предположим, что функция $f(z)$ в достаточно малой окрестности точки a не равна A ; легко видеть, что функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ в точке $z = a$ имеет изолированную существенно особую точку, если мы положим $\varphi(z) = 0$ во всех полюсах функции $f(z)$. Таким образом, вопрос приводится к доказанной теореме Сохоцкого.

Примечание. Теорема Сохоцкого послужила началом весьма глубоких исследований о поведении однозначной функции в окрестности существенно особой точки. Предложение Сохоцкого показывает, что в сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция принимает значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному числу. Пикар (Picard) доказал более общее и глубокое предложение: *в сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция $f(z)$ принимает (и притом бесконечное число раз) любое конечное значение, за исключением, быть может, одного.* Доказательство этого предложения будет изложено в гл. VIII.

§ 3. Поведение аналитической функции в бесконечности

1. Окрестность бесконечно удаленной точки. До сих пор, исследуя поведение однозначной функции в окрестности изолированной особой точки, мы предполагали, что эта точка является конечной. Окрестностью изолированной особой точки a мы называли множество всех точек z , отличных от точки a , лежащих внутри круга с центром в точке a столь малого радиуса, чтобы во всех таких точках z функция была голоморфной. Опишем из нулевой точки, как центра, окружность радиуса R и допустим, что при достаточно большом R данная функция $f(z)$ не имеет особых точек вне круга радиуса R . В этом случае мы скажем, что бесконечно удаленная точка является изолированной особой точкой для данной функции. Множество всех точек плоскости, лежащих вне этого круга радиуса R (или радиуса, большего, чем R), мы назовем окрестностью бесконечно удаленной точки. Итак, предположим, что данная функция $f(z)$ есть голоморфная в окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. при $|z| > R$. Полагая $z = 1/z'$, мы видим, что функция

$$\varphi(z') = f(1/z') = f(z) \quad (25)$$

определена и голоморфна при $|z'| < 1/R$, за исключением точки $z' = 0$. Следовательно, окрестности бесконечно удаленной точки

плоскости z соответствует окрестность нулевой точки плоскости z' , причем в соответствующих точках z и z' функции $f(z)$ и $\varphi(z')$ имеют равные значения.

Отсюда естественно условиться называть бесконечно удаленную точку существенно особой точкой функции $f(z)$, полюсом порядка m или устранимой особой точкой в зависимости от того, будет ли нулевой точкой для функции $\varphi(z')$ существенно особой точкой, полюсом порядка m или устранимой особенностью.

2. Разложение Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Чтобы получить разложение Лорана для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, напишем соответствующее разложение для функции $\varphi(z')$ в окрестности нулевой точки:

$$\varphi(z') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z'^n, \quad (26)$$

и, полагая $z' = \frac{1}{z}$, будем иметь на основании (25):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad (27)$$

где положено: $c_n = b_{-n}$ ($a = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Заметим, что разложение (27) будет содержать бесконечное множество положительных степеней z , конечное число этих степеней или совсем их не будет содержать в зависимости от того, будет ли разложение (26) содержать бесконечное множество отрицательных степеней z' , конечное число этих степеней или совсем их не будет содержать. Отсюда в силу § 2, п. 1 мы заключаем, что бесконечно удаленная точка является для функции $f(z)$:

а) *существенно особой точкой*, если разложение (27), содержит бесконечное множество положительных степеней z ;

б) *полюсом порядка m* , если в разложение (27) входит конечное число положительных степеней z , причем c_m есть последний при них коэффициент, отличный от нуля ($m \geq 1$);

в) *устранимой особой точкой*, если в разложении (27) совсем нет положительных степеней z .

В этом последнем случае, принимая c_0 за значение функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке, мы уничтожаем эту особенность, так как $\varphi(z')$ будет при этом голоморфной функцией в нулевой точке. Поэтому в случае в), если $f(\infty) = c_0$, говорят, что $f(z)$ есть голоморфная функция в бесконечно удаленной точке.

Примеры. 1. Функция $f(z) = \frac{1}{1-z}$ имеет в бесконечности устранимую особую точку, так как при $|z| > 1$ имеем:

$$\frac{1}{1-z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Приняв $f(\infty) = 0$, мы можем сказать, что функция $f(z)$ имеет в бесконечности нуль первого порядка.

2. Целая рациональная функция степени z^m имеет бесконечно удаленную точку полюсом порядка m .

3. Функции e^z , $\sin z$, $\cos z$ имеют в бесконечности существенно особую точку.

3. Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Так как определение характера поведения функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки приводится с помощью новых обозначений к исследованию поведения функции $\varphi(z')$ в окрестности нулевой точки (п. 1), то все заключения § 2 немедленно переносятся на случай бесконечно удаленной точки.

Так, если функция $f(z)$ имеет в бесконечности полюс, то, каково бы ни было большое положительное число C , существует окрестность бесконечно удаленной точки, для всех точек которой имеем: $|f(z)| > C$, или короче: $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ (ср. § 2, п. 3).

Далее, теорема Сохоцкого для случая бесконечно удаленной существенно особой точки выразится так: *каково бы ни было постоянное число A , конечное или бесконечное, существует последовательность точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, стремящаяся к существенно особой точке ∞ , такая, что имеем: $\lim_{z_n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$* , или короче:

в произвольной окрестности бесконечно удаленной существенно особой точки функция $f(z)$ принимает значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному числу (ср. § 2, п. 4).

Наконец, в достаточно малой окрестности устранимой бесконечно удаленной особой точки функции $f(z)$ эта функция является ограниченной, т. е. существуют два постоянных положительных числа R и M таких, что имеем: $|f(z)| < M$ при всех z , $|z| > R$ (ср. § 2, п. 2).

Так как, с другой стороны, три типа указанных особенностей являются единственно возможными для изолированной особой точки, то и, обратно, функция $f(z)$, для которой бесконечность есть изолированная особая точка, имеет здесь:

а) *полюс*, если она в достаточно малой окрестности этой точки становится сколь угодно большой (по модулю);

б) *существенно особую точку*, если $f(z)$ в сколь угодно малой окрестности бесконечно удаленной точки становится неопределенной;

в) *устранимую особую точку*, если в достаточно малой окрестности этой точки функция $f(z)$ ограничена.

4. Условия обращения интеграла типа Коши в интеграл Коши. В гл. IV, § 3, п. 8 мы изучили предельные значения интеграла типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (28)$$

предполагая, что C есть произвольная гладкая замкнутая линия, а $\varphi(\zeta)$ — функция, заданная во всех точках линии C и удовлетворяющая условию Гельдера—Липшица.

В частности, мы установили, что функция $F(z)$, голоморфная внутри C , будет непрерывной вплоть до контура C , причем ее значения $\varphi_i(z_0)$ на C определяются формулой (1) (гл. IV, § 8) и, вообще говоря, не совпадают с граничной функцией $\varphi(z_0)$.

Условимся говорить, что *интеграл типа Коши (28) обращается в интеграл Коши*, если его предельные значения изнутри C совпадают с граничной функцией, т. е. если $\varphi_i(z_0) = \varphi(z_0)$ для всех точек z_0 . Так как $\varphi(z_0) = \varphi_i(z_0) - \varphi_e(z_0)$ (см. формулу (II') гл. IV, § 3, п. 8), то наше определение интеграла Коши равносильно условию $\varphi_e(z_0) = 0$, или, что то же, требованию обращения в нуль интеграла типа Коши всюду вне C . Последнее заключение сделано на основании принципа максимума модуля аналитической функции, примененного к функции, изображимой интегралом типа Коши вне C . Когда интеграл типа Коши обращается в интеграл Коши, то мы будем также говорить, что функция $F(z)$, голоморфная внутри C , *представима интегралом Коши*. Возникает вопрос, какие условия нужно наложить на граничную функцию $\varphi(\zeta)$ для того, чтобы соответствующий ей интеграл типа Коши обращался в интеграл Коши. Ответ на этот вопрос дают условия, достаточные для того, чтобы существовала функция $F(z)$, голоморфная внутри C и принимающая на контуре C заданные значения $\varphi(\zeta)$. Легко показать, что для того, чтобы интеграл типа Коши (28) обращался в интеграл Коши, необходимо и достаточно наличие условий

$$\int_C \varphi(\zeta) \zeta^n d\zeta = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (29)$$

В самом деле, разлагая интеграл типа Коши (28) в окрестности бесконечно удаленной точки в ряд Лорана, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int_C \varphi(\zeta) \zeta^n d\zeta,$$

откуда видно, что условия (29) необходимы и достаточны для того, чтобы интеграл типа Коши (28) вне контура C всюду равнялся нулю и, следовательно, обращался бы в интеграл Коши.

§ 4. Простейшие классы аналитических функций

1. Целые функции. На основании характера особых точек можно определить различные классы функций. Так, например, известно, что всякая целая рациональная функция имеет единственную особую точку в бесконечности, которая служит для нее полюсом.

Обратно, если однозначная функция $f(z)$ имеет в бесконечности единственную особую точку — полюс, то такая функция есть целая рациональная. В самом деле, разложение Лорана функции $f(z)$ для окрестности бесконечно удаленной точки содержит лишь конечное число положительных степеней z (§ 3, п. 2). Обозначим через $A_p z^p + A_{p-1} z^{p-1} + \dots + A_1 z$ часть этого разложения Лорана, содержащую положительные степени z

(главная часть функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки), и вычтем ее из данной функции. Полученная разность

$$F(z) = f(z) - (A_p z^p + A_{p-1} z^{p-1} + \dots + A_1 z) \quad (30)$$

будет голоморфной функцией во всякой точке z ; в бесконечности она имеет устранимую особую точку, так как ее разложение Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки в силу единственности такового не будет содержать положительных степеней z . Мы можем считать функцию $F(z)$ голоморфной во всей «расширенной» плоскости комплексного переменного z , если положим:

$$F(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z).$$

Такая функция, будучи ограниченной равномерно во всей плоскости, по теореме Лиувилля (гл. V, § 2, п. 9) есть тождественное постоянное c . Следовательно, имеем:

$$F(z) = f(z) - (A_p z^p + A_{p-1} z^{p-1} + \dots + A_1 z) = c,$$

откуда следует:

$$f(z) = c + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_p z^p,$$

т. е. $f(z)$ есть рациональная функция.

Далее, функцию, изображаемую бесконечным степенным рядом с радиусом сходимости $R = \infty$, мы называем *целой трансцендентной* функцией. Очевидно, такая функция имеет единственную особую точку в бесконечности, которая является для нее существенно особой точкой (§ 3, п. 2). Легко видеть, что и обратно: всякая однозначная функция $f(z)$, имеющая единственную особую точку в бесконечности в качестве своей существенной особенности, есть целая трансцендентная функция. В самом деле, обозначая через $A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_p z^p + \dots$ главную часть функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, образуем разность:

$$F(z) = f(z) - (A_1 z + A_2 z^2 + \dots). \quad (31)$$

Как и ранее, заключаем, что эта функция $F(z)$ должна быть ограниченной равномерно во всей плоскости, а потому по теореме Лиувилля есть постоянное число c . Следовательно, имеем: $F(z) = c$, откуда в силу равенства (31) следует:

$$f(z) = c + A_1 z + A_2 z^2 + \dots,$$

т. е. $f(z)$ есть целая трансцендентная функция.

Соединяя изложенное, мы можем назвать целой функцией всякую функцию, голоморфную во всей плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки, причем эта функция будет трансцендентной, рациональной или постоянным числом, смотря

по тому, будет ли бесконечно удаленная точка существенно особой точкой, полюсом или устранимой особенностью.

2. Мероморфные функции. Более общим, чем класс целых функций, будет класс так называемых мероморфных функций. Мероморфной функцией называют всякую однозначную функцию, не имеющую в конечной части плоскости других особых точек, кроме полюсов. В частности, всякая рациональная функция принадлежит к этому классу.

В самом деле, рациональная функция

$$\frac{p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n}{q_0 z^m + q_1 z^{m-1} + \dots + q_m}$$

во всей «расширенной» z -плоскости может иметь лишь полюсы в качестве своих особых точек (при $n > m$ бесконечно удаленная точка есть полюс порядка $n - m$, при $n \leq m$ бесконечно удаленная точка будет устранимой особенностью и, следовательно, может считаться правильной точкой при надлежащем определении функции в этой точке).

Покажем, что существует обратное предложение: если однозначная функция в «расширенной» плоскости не имеет других особых точек, кроме полюсов, то она есть функция рациональная.

Доказательство. Так как данная функция $f(z)$ в бесконечности может иметь лишь полюс, то она в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $|z| > R$ есть голоморфная функция. В круге $|z| \leq R$ может существовать лишь конечное число полюсов этой функции, так как в противном случае предельная точка полюсов была бы особой точкой, не принадлежащей к полюсам, что по условию невозможно. Итак, все возможные полюсы функции $f(z)$ имеются в конечном числе; обозначим их через z_1, z_2, \dots, z_k ; кроме того, бесконечно удаленная точка может быть также полюсом. В окрестности каждого полюса мы разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана и обозначим ее главную часть для точки z_λ через

$$h_\lambda(z) = \frac{c_{-1}^{(\lambda)}}{z - z_\lambda} + \frac{c_{-2}^{(\lambda)}}{(z - z_\lambda)^2} + \dots + \frac{c_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(z - z_\lambda)^{\alpha_\lambda}} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k),$$

а для точки ∞ — через $g(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_p z^p$.

Вычитая рациональную функцию $R(z) = h_1(z) + h_2(z) + \dots + h_k(z) + g(z)$ из данной функции $f(z)$, мы получим:

$$F(z) = f(z) - R(z). \quad (32)$$

Функция $F(z)$ будет иметь своими единственными особыми точками точки z_1, z_2, \dots, z_k и бесконечно удаленную точку; каждая из этих точек является устранимой особенностью функции $F(z)$, так как ее разложение Лорана в окрестности любой из этих точек в силу единственности этого разложения не будет содержать глав-

ной части. Следовательно, функцию $F(z)$ можно считать голоморфной всюду в «расширенной» плоскости комплексного переменного z , если надлежащим образом назначить ее значения в устранимых особых точках. Наконец, по теореме Лиувилля мы заключаем, что $F(z)$ тождественно равно постоянному числу c . Итак, имеем $F(z) = c$, откуда в силу равенства (32) следует: $f(z) = R(z) + c$, т. е. $f(z)$ есть рациональная функция, что и нужно.

3. Разложение рациональной функции на простейшие дроби. Заметив, что $h_\lambda(z)$ есть простейшая дробь (притом единственная), соответствующая полюсу z_λ рациональной функции $f(z)$, мы из п. 2, сверх того, заключаем: *всякая рациональная функция по выделению ее целой части может быть разложена на простейшие дроби и притом единственным образом.*

4. Основная теорема алгебры. С помощью теоремы Лиувилля (гл. V, § 2, п. 9) легко обнаружить справедливость основной теоремы высшей алгебры: *всякая целая рациональная функция*

$$g(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (n \geq 1)$$

имеет по крайней мере один нуль.

В самом деле, допуская противное этой теореме, мы должны положить, что функция $g(z)$ не равна нулю ни в какой точке z плоскости. В этом случае функция $f(z) = 1/g(z)$ будет голоморфной во всей плоскости. Заметив, что имеем:

$$f(z) = \frac{1}{z^n (a_0 + a_1/z + \dots + a_n/z^n)},$$

мы отсюда заключаем:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

Следовательно, бесконечно удаленная точка будет нулем функции $f(z)$, если принять $f(\infty) = 0$. По теореме Лиувилля такая функция $f(z)$ должна быть равна тождественно постоянному, а именно нулю, так как $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости основной теоремы алгебры.

§ 5. Приложения к гидродинамике

1. Невихревой и свободный от источников поток жидкости. Будем отправляться от рассмотрения векторного поля в области G плоскости xy , т. е. системы двух непрерывных функций $p(x, y)$ и $q(x, y)$, определенных в области G , которые мы примем за компоненты вектора W :

$$W_x = p(x, y), \quad W_y = q(x, y).$$

Это векторное поле можно интерпретировать гидродинамически, принимая его за распределение скорости установившегося плоского потока несжимаемой жидкости.

Считая жидкость G односвязной, мы предположим поток свободным от источников, т. е. что ни в какой части области G жидкость не возникает и не исчезает; это значит, что в каждой частичной области, принадлежащей G , с течением времени происходит изменение состояния жидкости исключительно посредством притока или утечки жидкости через границу этой частичной области. Это предположение приводит к условию, которому должен удовлетворять вектор скорости W .

Рассмотрим произвольную замкнутую кусочно-гладкую кривую Γ в области G и обозначим W_n нормальную к Γ компоненту вектора W , считая положительное направление нормали идущим от Γ внутрь области. Тогда выражение $\int_{\Gamma} W_n ds$ будет пропорционально увеличению количества жидкости, происходящему за единицу времени в области, ограниченной кривой Γ . Вследствие предположения об отсутствии источников это выражение должно быть равно нулю, какова бы ни была линия Γ , принадлежащая G . Заметив, что

$$W_n = p \cos(n, x) + q \cos(n, y) = -p \frac{dy}{ds} + q \frac{dx}{ds},$$

мы получаем условие

$$\int_{\Gamma} \left(q \frac{dx}{ds} - p \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_{\Gamma} q dx - p dy = 0.$$

На основании известной теоремы анализа мы отсюда заключаем: *свободный от источников поток жидкости характеризуется равенством*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\partial q}{\partial y}. \quad (33)$$

Равенство (33) должно иметь место в каждой точке односвязной области G , в которой нет источников у рассматриваемого потока жидкости.

Обозначим через W_s компоненту вектора скорости W в направлении касательной к кривой Γ , считая за положительное направление кривой то направление, при котором область, внутренняя к Γ , остается слева.

Выражение $\int_{\Gamma} W_s ds$ называют *циркуляцией потока* вдоль кривой Γ . Поток жидкости называется *невихревым* в G , если его циркуляция вдоль произвольной замкнутой кривой Γ , принадлежащей G , есть нуль. Заметив, что

$$W_s = p \cos(s, x) + q \cos(s, y) = p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds},$$

условие невихревого потока запишем так:

$$\int_{\Gamma} \left(p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_{\Gamma} p dx + q dy = 0.$$

Мы, таким образом, получаем: *невихревой поток жидкости характеризуется равенством*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (34)$$

Равенство (34) должно выполняться повсюду в области G при отсутствии в этой области вихрей у потока жидкости.

Рассмотрим ближе условие (34) невихревого потока жидкости. Это условие показывает, что p и q суть частные производные некоторой функции, которая может быть найдена квадратурами. Итак, имеем:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (35)$$

Функция u носит название *потенциала скоростей* данного потока. Зная эту функцию, мы определяем компоненты скорости потока согласно формулам (35). Очевидно, величина скорости равна

$$V \sqrt{p^2 + q^2} = V \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Если невихревой поток свободен от источников, то внося выражения (35) в уравнение (33), найдем:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (36)$$

Таким образом, каждый невихревой и свободный от источников поток жидкости обладает потенциалом скоростей $u(x, y)$, удовлетворяющим дифференциальному уравнению (36).

Кривые $u = \text{const}$ называются линиями уровня. Вдоль этих кривых не имеется движения жидкости, так как жидкость течет всюду к ним перпендикулярно. Действительно, обозначая через W_s компоненту скорости W в произвольном направлении s , очевидно, имеем:

$$W_s = p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds}.$$

Следовательно, в силу (35) получаем:

$$W_s = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial u}{\partial s},$$

откуда, в частности, вытекает: вдоль линии $u = \text{const}$ компонента скорости равна нулю.

2. **Характеристическая функция потока.** Дифференциальное уравнение траекторий потока, очевидно, будет:

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q}, \quad \text{или} \quad \frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = 0.$$

В силу условия (36) левая часть последнего уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $v(x, y)$, т. е.

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = 0 \quad (37)$$

есть дифференциальное уравнение траекторий потока.

Следовательно, уравнение $v = \text{const}$ изображает траектории нашего потока, которые согласно замечанию, сделанному в конце п. 1, будут ортогональными по отношению к линиям уровня $u = \text{const}$. Функция $v(x, y)$ носит название

функции потока. Из уравнения (37) вытекает, что функции u и v связаны соотношениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{С. — R.})$$

Таким образом, потенциал скоростей и функция потока в области G связаны условиями Коши—Римана (гл. II, § 4, п. 4) и представляют, следовательно, две сопряженные гармонические функции в этой области. Зная эти функции, мы можем полностью охарактеризовать соответствующий им поток.

Чтобы охарактеризовать поток жидкости в односвязной области G , мы можем вместо пары функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ввести в рассмотрение одну функцию комплексного переменного z , $z = x + yi$, а именно: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Согласно условиям (С.—R.) функция $f(z)$ есть аналитическая в области G (гл. II, § 4, п. 4); она носит название *характеристической функции потока*. Итак, всякому невихревому и свободному от источников в односвязной области G потоку жидкости соответствует характеристическая функция $f(z)$, являющаяся аналитической в области G ; обратно, задание любой функции $f(z)$, аналитической в односвязной области G , определяет в этой области невихревой и свободный от источников поток жидкости.

Вводя аналитическую функцию $f(z)$ как характеристику потока, мы можем применять теорию аналитических функций к изучению плоского течения жидкости.

Заметим, что скорость потока в любой точке $z = x + yi$ определяется по величине и направлению парой $p(x, y)$ и $q(x, y)$, или, что то же, комплексным числом: $p + iq$. С другой стороны, мы имеем:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = p - iq.$$

Таким образом, величина скорости в точке z равна:

$$|f'(z)|, \quad \text{так как} \quad |f'(z)| = \sqrt{p^2 + q^2},$$

направление же скорости образует с положительным направлением оси x угол, равный и противоположный по знаку с аргументом $f'(z)$. Иными словами, скорость потока в точке z вполне определяется комплексным числом $f'(z)$, т. е. числом, сопряженным со значением производной $f'(z)$ в этой точке.

Итак, мы пришли к гидродинамическому истолкованию модуля и аргумента производной функции комплексного переменного, а именно: рассматривая заданную в односвязной области аналитическую функцию $f(z)$ как характеристическую функцию соответствующего потока жидкости, мы можем утверждать, что $|f'(z)|$ равен величине скорости течения в точке z , а $\arg f'(z)$ с обратным знаком определяет направление этой скорости.

3. Обтекание круглого цилиндра потоком без циркуляции. Рассмотрим движение в покоящейся жидкости круглого цилиндра, который движется справа налево с постоянной скоростью a . Придавая всей системе движение в обратную сторону со скоростью a , мы получаем поток жидкости, имеющий в бесконечности скорость a , обтекающий неподвижный цилиндр.

Помещая начало координат в центре поперечного сечения цилиндра, примем это сечение за плоскость xu , выбрав положительное направление оси x совпадающим с направлением скорости a . Характеристическую функцию потока $w = f(z)$ мы предположим однозначной в области $|z| > R$, внешней к сечению цилиндра.

Согласно теореме Лорана

$$w = u + vi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}.$$

Очевидно, мы должны удовлетворить двум условиям: а) вектор скорости жидкости при $z = \infty$ направлен по оси x и равен a ; б) контур цилиндра $|z| = R$ есть часть траектории потока.

Мы знаем, что скорость $p + iq = \left(\frac{dw}{dz} \right)$, т. е.

$$p - iq = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n z^{-n-1}.$$

Так как бесконечно удаленная точка должна быть правильной точкой этого разложения, которое в этой точке принимает значение a , то имеем $a_n = 0$ при $n > 1$, $a_1 = a$.

Следовательно, условие а) приводит к такому виду характеристической функции:

$$w = az + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n},$$

где мы отбросили свободный член b_0 , так как его прибавление к w не влияет на величины компонент скорости p , q и на траекторию потока.

Полагая $b_n = \rho_n e^{\alpha_n i}$, $z = r e^{\theta i}$, получим:

$$u + vi = ar e^{\theta i} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n r^{-n} e^{(\alpha_n - n\theta) i},$$

откуда находим:

$$\begin{aligned} u &= ar \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n r^{-n} \cos(\alpha_n - n\theta), \\ v &= ar \sin \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n r^{-n} \sin(\alpha_n - n\theta). \end{aligned} \quad (38)$$

Второе условие б) дает нам, что v должно сохранять постоянное значение при $r = R$, т. е.

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|_{r=R} = 0.$$

Дифференцируя вторую из формул (38) по θ и подставляя затем $r = R$, получим:

$$aR \cos \theta - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n n R^{-n} \cos(\alpha_n - n\theta) = 0.$$

Заметив, что

$$\cos(\alpha_n - n\theta) = \cos \alpha_n \cos n\theta + \sin \alpha_n \sin n\theta,$$

приравниваем нулю коэффициенты при отдельных $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ и, таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} aR - \rho_1 R^{-1} \cos \alpha_1 &= 0, & \rho_1 R^{-1} \sin \alpha_1 &= 0, \\ n \rho_n R^{-n} \cos \alpha_n &= n \rho_n R^{-n} \sin \alpha_n = 0 & (n = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

откуда $\rho_n = 0$ ($n = 2, 3, \dots$), $\rho_1 = +aR^2$, $\alpha_1 = 0$. Следовательно, окончательный вид характеристической функции w будет:

$$w = az + \frac{aR^2}{z} = a \left(z + \frac{R^2}{z} \right).$$

Функции же u и v выражаются формулами

$$u = a \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad v = a \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta.$$

Траектории потока имеют уравнение

$$v = C, \quad \text{или} \quad \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta = C.$$

Так как $r \geq R$, то при $C > 0$ имеем $\sin \theta > 0$, т. е. траектории расположены в верхней полуплоскости; отрицательным же значениям C соответствуют траектории, идущие в нижней полуплоскости (рис. 87). Для $C = 0$ имеем линию

$$\left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta = 0,$$

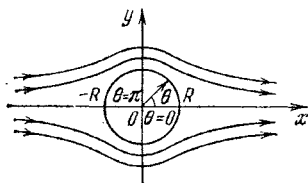


Рис. 87.

которая распадается на две: $\sin \theta = 0$, $r = R$, т. е. соответствующая траектория идет справа по положительной части оси x ($\theta = 0$) до встречи с цилиндром в точке $r = R$, $\theta = 0$, затем по окружности цилиндра, переходя в точке $r = R$, $\theta = \pi$ снова на ось x , но на отрицательную ее часть ($\theta = \pi$).

Точки $(\pm R, 0)$ замечательны тем, что в них скорость обращается в нуль, так как

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\pm R} = a - \frac{aR^2}{z^2} \Big|_{z=\pm R} = 0.$$

Эти точки носят название *критических точек потока*. Траектория в критических точках не имеет определенной касательной и разветвляется на две: прямую и окружность.

Для $C \neq 0$ траекториями течения будут линии третьего порядка, и их уравнение в декартовых координатах имеет вид

$$(x^2 + y^2 - R^2)y = C(x^2 + y^2).$$

Каждая из этих линий симметрична относительно оси y и имеет асимптоту $y = C$.

Потенциальная функция потока u является однозначной не только во всякой односвязной области, занятой потоком, что обусловлено отсутствием вихрей, но и во всей области $|z| > R$. Это последнее обстоятельство показывает, что циркуляция потока вдоль контура C , окружающего цилиндр, есть нуль, так как

$$\int_C p dx + q dy = \int_C du = 0.$$

Поэтому рассмотренный поток называют потоком без циркуляции.

4. Чисто циркулярный поток. Простейший пример течения с циркуляцией вокруг цилиндра представится в случае, когда характеристическая функция w имеет вид

$$w = \frac{l}{2\pi i} \ln z.$$

Полагая $z = re^{i\theta}$, определим функции u и v :

$$u + iv = \frac{l}{2\pi i} (\ln r + i\theta),$$

откуда

$$u = \frac{l}{2\pi} \theta, \quad v = -\frac{l}{2\pi} \ln r.$$

Таким образом, траекториями течения будут $v = \text{const}$ или $r = \text{const}$, т. е. концентрические окружности. Компоненты p и q скорости определяются по формуле

$$p + iq = \left(\frac{d\omega}{dz} \right) = -\frac{l}{2\pi i} \frac{1}{z} = \frac{l}{2\pi r} e^{i(\theta + \pi/2)},$$

т. е. величина скорости во всех точках окружности радиуса r , равная $\frac{l}{2\pi r}$, обратно пропорциональна r , направление же течения — против часовой стрелки.

Циркуляция потока вдоль контура C , окружающего цилиндр, будет:

$$\int_C p dx + q dy = \int_C du = \frac{l}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = l.$$

Итак, характеристическая функция ω соответствует потоку жидкости вокруг цилиндра, причем частицы жидкости текут по окружностям против часовой стрелки и скорость течения обратно пропорциональна расстоянию частицы от центра цилиндра.

5. Общий случай. Складывая оба движения, изученные в пп. 3 и 4, мы получим обтекание цилиндра потоком жидкости, имеющим в бесконечно удаленной точке скорость a , с циркуляцией l .

Характеристическая функция в этом общем случае будет:

$$w = \frac{l}{2\pi i} \ln z + a \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (39)$$

Траектории течения изображены на рис. 88. В этом случае критические точки потока будут смещены по сравнению со случаем п. 3, когда не было циркуляции. Эти точки определяются из условия

$$p - iq = \frac{dw}{dz} = 0,$$

или

$$-\frac{li}{2\pi} \frac{1}{z} + a \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) = 0,$$

т. е.

$$z^2 - \frac{li}{2\pi a} z - R^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение определяет две точки z :

$$z = \frac{li}{4\pi a} \pm \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{16\pi^2 a^2}}.$$

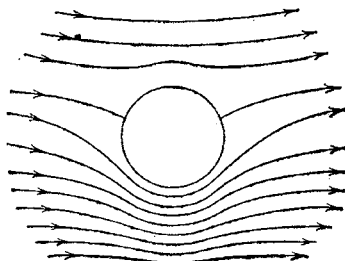


Рис. 88.

Считая циркуляцию l не очень большой, а именно $l < 4\pi aR$, мы получим для z два комплексных значения, отличающихся лишь знаком действительной части и по модулю равных R . Таким образом, в этом случае (рис. 88) критические точки лежат на самом цилиндре симметрично относительно оси y и радиус-вектор к ним образует с положительным направлением оси x угол θ , определяемый по формуле $\sin \theta = \frac{l}{4\pi aR}$. С увеличением l обе критические точки сбли-

жаются и при $I = 4laR$ они совпадают и оказываются в точке ($\theta = \pi/2$) пересечения оси y с контуром цилиндра (рис. 89). При дальнейшем увеличении I , если $I < 4laR$, мы получаем для z два чисто мнимых значения, из

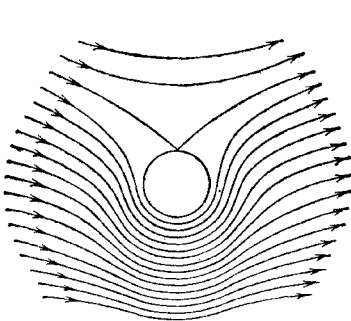


Рис. 89.

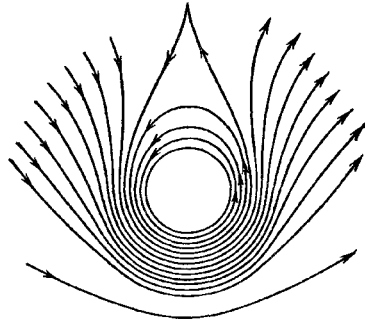


Рис. 90.

которых одно по модулю меньше R , другое же больше R . Следовательно, в этом случае мы имеем только одну критическую точку, лежащую на оси y (рис. 90).

Упражнения к главе VI

1. Разложить в ряд Лорана функцию $e^{\frac{1}{1-z}}$ при $|z| > 1$.

Отв. $1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} - \frac{19}{120z^5} + \dots$

2. Разложить в ряд Лорана функцию $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ при $|z| > 3$.

Отв. $\frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \frac{65}{z^5} + \dots$

3. Определить особенности при $z = \infty$ для функций $\frac{z^2+1}{e^z}$, $\cos z - \sin z$.

Отв. Существенно особые точки.

4. Обнаружить справедливость теоремы Сохоцкого для функции $e^{1/z}$, исследуя ее значения на лучах, выходящих из нулевой точки в окрестности $z = 0$. Каково будет множество точек z , в которых $e^{1/z} = c$, $c \neq 0$?

Отв. Бесконечное множество, имеющее нуль предельной точкой.

5. Функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют в точке $z = a$ полюсы соответственно m -го порядка и n -го порядка. Что можно сказать о характере точки $z = a$ для функций:

а) $f(z)\varphi(z)$, б) $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$, в) $f(z) + \varphi(z)$?

Отв. а) Полюс порядка $m+n$. б) Полюс порядка $m-n$, если $m > n$; если $m < n$, то нуль порядка $n-m$, при $m = n$ — правильную точку. в) Полюс порядка, равного наибольшему из чисел m, n ; при $m = n$ полюс порядка $\leq m$ или правильную точку.

6. Относительно степенного ряда $f(z) = \sum a_n z^n$ известно, что изображаемая им функция $f(z)$ имеет на окружности круга сходимости только одну особую

точку z_0 — полюс первого порядка. Показать, что в этом случае $\frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow z_0$ и, следовательно, $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \rightarrow r$, где r — радиус сходимости.

7. Внутри замкнутого контура C_1 лежит другой замкнутый контур C_2 . Функция $f(z)$ есть аналитическая в области G между контурами C_1 и C_2 .

В этом случае можно положить:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где $f(z)$ — аналитическая функция внутри C_1 , а $f_2(z)$ есть аналитическая функция вне C_2 , включая бесконечно удаленную точку. Функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ этим разложением определяются однозначно с точностью до аддитивного постоянного.

8. Разложить в ряд Лорана $\sqrt{(z-1)(z-2)}$ для $|z| > 2$.

$$\text{Отв. } \pm \left[c_0 z - c_1 + \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{z^2} + \dots \right], \text{ где}$$

$$c_n = \binom{\alpha}{n} + 2 \binom{\alpha}{n-1} \binom{\alpha}{1} + 2^2 \binom{\alpha}{n-2} \binom{\alpha}{2} + \dots + 2^n \binom{\alpha}{n} \text{ и } \alpha = \frac{1}{2}.$$

9. Разложить в ряд Лорана $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ при $0 < |a| < |z| < |b|$ и для $|z| > |b|$.

$$\text{Отв. } \frac{1}{a-b} \left[\dots + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{b} + \frac{z}{b^2} + \dots \right] \text{ и}$$

$$\frac{1}{b-a} \left[\frac{b-a}{z^2} + \frac{b^2-a^2}{z^3} + \frac{b^3-a^3}{z^4} + \dots \right].$$

10. Разложить в ряд Лорана $\ln \frac{1}{1-z}$ при $|z| > 1$.

Отв. Невозможно, так как функция не однозначна при $|z| > 1$.

11. Какие особенности имеют функции: а) $e^{1/z}$ при $z = 0$; б) $\sin \frac{1}{1-z}$ при $z = 1$; в) $\frac{1}{1-e^z}$ при $z = 2\pi i$?

Отв. а) Существенно особая точка; б) то же; в) полюс первого порядка.

12. Какие особенности имеют функции при $z = \infty$: а) $\frac{z^2+4}{e^z}$;

б) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$; в) e^{-1/z^2} ; г) $\frac{1}{\cos z}$; д) $\sin \frac{1}{1-z}$?

Отв. а) Существенно особая точка; б) полюс первого порядка; в) правильная точка; г) предельная точка полюсов; д) нуль первого порядка.

13. Какое существенное различие имеется между поведением действительной функции

$$y = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & \text{для } x = 0 \end{cases}$$

в функции комплексного переменного $w = e^{-1/z^2}$ в окрестности нулевой точки?

Отв. Функция y и все ее производные при $x = 0$ равны нулю. Кривая $y = f(x)$ в нулевой точке имеет с осью x соприкосновение, лучшее, чем любая парабола $y = x^n$. Функция w имеет в нулевой точке существенную особенность, т. е. стремится к любому наперед заданному числу, когда $z \rightarrow 0$.

14. Функция $f(z)$ — аналитическая в окрестности $|z| > R$ бесконечно удаленной точки. При каких условиях $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ будет однозначной аналитической функцией в области $|z| > R$, если z_0 и путь интегриации лежат в этой области? Что можно сказать о поведении $F(z)$ в бесконечно удаленной точке из поведения $f(z)$ в этой точке?

Отв. Когда $a_{-1} = 0$ в разложении $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Если это условие выполнено и $f(z)$ при $z = \infty$ имеет полюс порядка β , то $F(z)$ будет иметь полюс порядка $\beta + 1$; в частности, $F(z)$ будет иметь полюс первого порядка, если $f(z)$ при $z = \infty$ — правильная функция и $\neq 0$.

Если $f(z)$ при $z = \infty$ имеет нуль порядка α ($\alpha \geq 2$), то $F(z)$ имеет нуль порядка $\alpha - 1$.

Если $f(z)$ при $z = \infty$ имеет существенно особую точку, то $F(z)$ — то же.

Если $a_1 \neq 0$, то $F(z) - a_1 \ln z$ будет при $|z| > R$ однозначной аналитической функцией.

15. Плоский поток определяется характеристической функцией $w = f(z)$. Найдите траектории потока и укажите направление течения в случаях: а) $w = z$; б) $w = 1/z$; в) $w = z + 1/z$.

Отв. а) $y = \text{const}$, слева направо; б) $x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$, течение налево; в) $y(x^2 + y^2) - y = c(x^2 + y^2)$, течение направо.

16. Определить скорости потока в случаях предыдущей задачи 15.

Отв. а) $p = 1$, $q = 0$; б) $p = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $q = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$;

в) $p = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $q = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

17. Характеристическая функция потока $w = \ln z$.

Определить траектории потока, их направление и скорость движения жидкости. Чем является для потока $z = 0$?

Отв. Считая $z = re^{i\theta}$, уравнение траекторий будет: $\theta = \text{const}$; движение направлено от точки $z = 0$, которая является источником. Скорость по величине равна $1/r$ и направлена от точки $z = 0$. Точка $z = 0$ есть источник потока.

18. Чему равно количество жидкости, вытекающей в единицу времени через замкнутый контур, окружающий точку $z = 0$ предыдущей задачи?

Отв. 2π.

19. Характеристическая функция потока $w = \frac{1}{2\pi i} \ln z$.

Найти траектории потока, их направление и скорость движения жидкости. Чем является точка $z = 0$?

Отв. Если $z = re^{i\theta}$, то уравнение траекторий будет: $r = \text{const}$. Движение направлено против часовой стрелки. Величина скорости равна $\frac{1}{2\pi r}$.

Точка $z = 0$ является вихрем.

20. Чему равна циркуляция потока вдоль замкнутого контура, окружающего точку $z = 0$ предыдущей задачи?

Отв. 1.

Г Л А В А VII
Т Е О Р И Я В Ы Ч Е Т О В

§ 1. Общая теория вычетов

1. Вычет функции относительно изолированной особой точки.
Если функция $f(z)$ есть голоморфная в некоторой точке a , то по теореме Коши (гл. IV, § 2, п. 3) имеем:

$$\int_C f(z) dz = 0, \quad (1)$$

где путем интегрирования C служит произвольный, гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точку a и малый настолько, что функция $f(z)$ остается голоморфной всюду внутри этого контура, включая точки самого контура. Если же a будет изолированная особая точка функции $f(z)$ и замкнутый контур C целиком лежит в окрестности этой точки a , то значение нашего интеграла $\int_C f(z) dz$ будет, вообще говоря, отличным от нуля. Это значение, как следует из теоремы Коши (гл. IV, § 2, п. 5), не зависит от формы контура C и легко может быть вычислено. В самом деле, в окрестности точки a ($0 < |z - a| < r$) функция $f(z)$ может быть разложена в ряд Лорана (гл. VI, § 2, п. 1):

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a)^n + \dots + \frac{c_{-1}}{z - a} + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \dots, \quad (2)$$

который будет равномерно сходящимся на линии C , так как контур C лежит в окрестности точки a . Интегрируя почленно ряд (2) вдоль линии C , получим:

$$\int_C f(z) dz = c_{-1} \cdot 2\pi i, \quad (3)$$

так как имеют место равенства

$$\int_C (z-a)^m dz = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (\text{гл. IV, § 1, п. 1}),$$

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \quad (\text{гл. IV, § 2, п. 6}),$$

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0 \quad (n=2, 3, \dots) \quad (\text{гл. IV, § 1, п. 1}).$$

Значение интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$ условимся называть *вычетом*

(résidu) функции $f(z)$ относительно особой точки a . Согласно равенству (3) вычет функции $f(z)$ относительно особой точки a равен c_{-1} , т. е. коэффициенту при первой отрицательной степени разложения Лорана (2). Отсюда непосредственно вытекает, что вычет функции c_{-1} может быть отличным от нуля только в том случае, если a есть полюс или существенно особая точка (гл. VI, § 2, п. 1); для устранимой особой точки вычет непременно равен нулю (гл. IV, § 2, п. 1).

2. Основная теорема о вычетах. Пусть $f(z)$ есть функция, голоморфная во всякой точке области G , кроме конечного числа особых точек a_1, a_2, \dots, a_k . Обозначим через Γ произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки a_1, a_2, \dots, a_k и целиком лежащий в области G . При этих условиях $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$

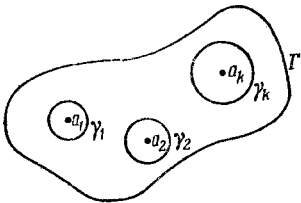


Рис. 91.

равен сумме вычетов функции $f(z)$ относительно a_1, a_2, \dots, a_k . Это утверждение представляет собой основную теорему в теории вычетов.

Для ее доказательства опишем из точек a_1, a_2, \dots, a_k как центров, окружности $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, настолько малые, чтобы они попарно не пересекались и целиком лежали внутри Γ (рис. 91). Так как функция $f(z)$ будет голоморфной в каждой точке замкнутой области, ограниченной сложным контуром

$$K = \Gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k,$$

то по теореме Коши (гл. IV, § 2, п. 5)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z) dz,$$

(4)

где интегрирование совершается по контурам $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ в положительном направлении. Последнее равенство доказывает основную теорему о вычетах, так как в правой части этого равенства стоят вычеты функции $f(z)$, соответствующие точкам a_1, a_2, \dots, a_k .

Очевидно, доказанное предложение представляет собой обобщение основной теоремы Коши (гл. IV, § 2, п. 2).

3. Вычисление вычета функции относительно полюса. В приложениях основной теоремы о вычетах мы должны сначала определить вычеты всех особых точек a_1, a_2, \dots, a_k , лежащих внутри контура Γ , после чего легко вычисляется на основании теоремы о вычетах значение интеграла $\int_{\Gamma} f(z) dz$. Поэтому весьма важно

дать более простой способ вычисления вычетов, не требующий в каждом отдельном случае разложения Лорана. Такой способ возможно дать, если точка является полюсом функции. Пусть сначала точка a есть простой полюс функции $f(z)$. В этом случае главная часть разложения Лорана содержит лишь одну первую отрицательную степень $(z - a)$:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a)^n + \dots + \frac{c_{-1}}{z - a}. \quad (5)$$

Умножая обе части разложения (5) на $(z - a)$ получаем:

$$(z - a) f(z) = c_{-1} + c_0(z - a) + c_1(z - a)^2 + \dots \quad (5')$$

Так как правая часть последнего равенства есть обыкновенный степенной ряд, то его сумма будет непрерывной функцией в точке a . Следовательно, переходя в равенстве (5') к пределу при z , стремящемся к a , получим:

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z). \quad (6)$$

Формула (6) позволяет быстро определить вычет функции относительно простого полюса.

Точка a есть простой полюс функции $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, если $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ суть голоморфные функции в точке a , причем $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. По формуле (6) вычет функции $f(z)$ относительно точки a определяется в этом случае так:

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)}{z - a}} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z) - \psi(a)},$$

так как согласно условию имеем: $\psi(a) = 0$. Заметив, что

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \varphi(a),$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\psi(z) - \psi(a)}{z - a} = \psi'(a) \neq 0,$$

окончательно получаем:

$$c_{-1} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (7)$$

Так, например, для определения вычета функции $\frac{1}{\cos z}$ относительно ее простого полюса $a = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ применим формулу (7):

$$c_{-1} = -\frac{1}{\sin a} = -\frac{1}{\sin(2n + 1)\frac{\pi}{2}}.$$

Полученное значение c_{-1} равно $+1$ или -1 , смотря по тому, будет ли n числом нечетным или четным.

Таким образом, имеем:

$$c_{-1} = (-1)^{n-1}.$$

Формулу (6) можно обобщить на случай произвольного полюса n -го порядка. В этом случае разложение Лорана будет:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \quad (8)$$

Умножив обе части этого разложения (8) на $(z-a)^n$, получим:

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + c_1(z-a)^{n+1} + \dots \quad (8')$$

Продифференцировав равенство (8') $n-1$ раз, мы получим в правой части обыкновенный степенной ряд, свободный член которого будет: $c_{-1}(n-1)!$. Следовательно, имеем:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1} [(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}} = c_{-1}(n-1)!,$$

откуда находим:

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1} [(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}}. \quad (9)$$

Формула (9) позволяет вычислять вычет функции относительно полюса a порядка n ; при $n=1$ она обращается в формулу (6), если считать условно: $0! = 1$.

4. Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки. До сих пор, рассматривая вычет функции относительно особой точки a , мы предполагали, что точка a является конечной. Понятие вычета можно распространить на случай бесконечно удаленной точки.

Предположим, что бесконечно удаленная точка является изолированной особенностью функции $f(z)$, и обозначим через C

произвольный замкнутый контур, лежащий целиком в окрестности этой точки, например, за C можно взять окружность достаточно большого радиуса. По-прежнему условимся называть вычетом функции $f(z)$ относительно бесконечно удаленной точки значение интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz$ с той лишь разницей, что интегри-

рование совершается теперь по контуру C в отрицательном направлении, так как контур C нужно проходить по часовой стрелке, чтобы бесконечно удаленная точка оставалась все время с левой стороны. В окрестности бесконечно удаленной точки разложение Лорана для функции $f(z)$ будет (гл. VI, § 3, п. 2):

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (10)$$

Так как этот ряд (10) сходится равномерно на контуре C , то мы можем интегрировать почленно вдоль C ; замечая при этом, что все члены, кроме второго, после интегрирования обратятся в нули, находим:

$$\int_{C^-} f(z) dz = c_{-1} \int_{C^-} \frac{dz}{z} = -c_{-1} 2\pi i,$$

откуда следует:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = -c_{-1}, \quad (11)$$

т. е. вычет функции относительно бесконечно удаленной точки равен коэффициенту при первой отрицательной степени разложения Лорана, взятому с противоположным знаком.

В случае устранимой особой точки, лежащей на конечном расстоянии, вычет всегда равен нулю. Этого может не быть в случае бесконечно удаленной точки. Так, например, функция $\frac{1}{z}$ в бесконечности имеет устранимую особенность, а соответствующий вычет равен -1 . Пользуясь понятием вычета функции относительно бесконечно удаленной точки, легко убедиться в справедливости, теоремы:

Если $f(z)$ есть функция, голоморфная во всякой точке расширенной плоскости комплексного переменного z , кроме конечного числа особых точек, то сумма вычетов относительно всех ее особенностей (включая и бесконечно удаленную точку) всегда равна нулю.

В самом деле, опишем из нулевой точки, как центра, окружность C столь большого радиуса, чтобы все особые точки функции (кроме бесконечно удаленной точки) лежали внутри этой окружности. По основной теореме о вычетах значение интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$ равно сумме вычетов относительно всех особых точек

функции $f(z)$, лежащих внутри C . С другой стороны, вычет той же функции относительно бесконечно удаленной точки изобразится через $\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz$. Следовательно, сумма всех вычетов будет равна:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = 0.$$

5. Вычисление интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. Пусть $f(z)$ —

функция, голоморфная внутри замкнутого кусочно-гладкого контура Γ и на самом этом контуре, исключая, может быть, конечное число полюсов, расположенных внутри Γ . Мы предположим еще, что $f(z)$ не обращается в нуль на Γ . Тогда, обозначая через a_1, a_2, \dots, a_k нули $f(z)$ внутри контура Γ , через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — порядки этих нулей, через b_1, b_2, \dots, b_m и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — соответственно полюсы $f(z)$ внутри Γ и порядки этих полюсов, будем иметь для любой функции $\varphi(z)$, голоморфной внутри Γ и на Γ , формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(a_i) - \sum_{j=1}^m \beta_j \varphi(b_j). \quad (12)$$

Результат, стоящий в правой части, можно прочесть как разность между суммой значений $\varphi(z)$ в нулях $f(z)$ и суммой значений $\varphi(z)$ в полюсах $f(z)$; при этом нужно только помнить, что каждое значение берется слагаемым столько раз, какова кратность соответствующей точки (нуля или полюса). Для доказательства формулы (12) применим к интегралу $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ основную теорему о вычетах.

Особые точки функции $F(z) = \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ внутри Γ могут лежать либо в нулях, либо в полюсах $f(z)$. Рассмотрим сначала нуль a_i . В его окрестности имеем разложения в ряды Тейлора:

$$f(z) = A_i (z - a_i)^{\alpha_i} + \dots, \quad f'(z) = A_i \alpha_i (z - a_i)^{\alpha_i - 1} + \dots, \\ \varphi(z) = \varphi(a_i) + \dots,$$

причем $A_i \neq 0$. Отсюда для $F(z)$ получаем:

$$F(z) = \frac{[\varphi(a_i) + \dots] \cdot [A_i \alpha_i + \dots]}{A_i (z - a_i) + \dots}.$$

Это означает, что $F(z)$ имеет в точке $z = a_i$ полюс первого порядка (при $\varphi(a_i) \neq 0$). Вычет $F(z)$ относительно a_i находим по формуле (7):

$$\frac{\varphi(a_i) A_i \alpha_i}{A_i} = \alpha_i \varphi(a_i).$$

Заметим, что при $\varphi(a_i) = 0$ $F(z)$ голоморфна в точке $z = a_i$, но тогда и найденный нами вычет обращается в нуль; поэтому, применяя основную теорему о вычетах, мы можем не делать разницы между случаями $\varphi(a_i) \neq 0$ и $\varphi(a_i) = 0$. Совершенно так же находим вычет $F(z)$ относительно полюса b_j функции $f(z)$. В окрестности точки b_j имеем разложения в ряды

$$f(z) = B_j(z - b_j)^{-\beta_j} + \dots, \quad f'(z) = -B_j\beta_j(z - b_j)^{-\beta_j-1} + \dots, \\ \varphi(z) = \varphi(b_j) + \dots,$$

причем $B_j \neq 0$. Отсюда для $F(z)$ получаем:

$$F(z) = \frac{[\varphi(b_j) + \dots] [-B_j\beta_j + \dots]}{B_j(z - b_j) + \dots}$$

(после умножения членов дроби на $(z - b_j)^{\beta_j+1}$). Это означает, что $F(z)$ имеет в точке b_j полюс первого порядка (при $\varphi(b_j) \neq 0$). Вычет $F(z)$ относительно b_j находим снова по формуле (7):

$$\frac{\varphi(b_j)(-B_j\beta_j)}{B_j} = -\beta_j\varphi(b_j).$$

Таким образом, сумма вычетов $F(z)$ относительно всех ее особых точек внутри Γ равна

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(a_i) - \sum_{j=1}^m \beta_j \varphi(b_j),$$

что и дает нам формулу (12).

Отметим важнейшие частные случаи этой формулы. Положим прежде всего $\varphi(z) = 1$. Тогда формула (12) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{j=1}^m \beta_j. \quad (13)$$

Здесь $\sum_{i=1}^k \alpha_i = N$ представляет число нулей функции $f(z)$ внутри контура Γ , а $\sum_{j=1}^m \beta_j = P$ — число полюсов той же функции, причем каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность. Называя интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно контура Γ (название это связано с тем, что $\frac{f'(z)}{f(z)}$ представляет логарифмическую производную $f(z)$: $\frac{d}{dz} [\ln f(z)]$), приходим к следующему предложению:

Логарифмический вычет функции $f(z)$ относительно замкнутого контура Γ равен разности между числом нулей и числом

полюсов $f(z)$ внутри Γ , причем каждый нуль и каждый полюс считается столько раз, какова его кратность.

Применяя это предложение к функции $f(z) - a$, где a — произвольное комплексное число, находим, что интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a}$,

где $f(z)$ — функция, голоморфная внутри замкнутого контура Γ и на нем, за исключением, быть может, конечного числа полюсов внутри Γ , причем $f(z)$ не обращается в a на контуре Γ , равен разности между числом корней уравнения $f(z) = a$, лежащих внутри Γ , и числом полюсов $f(z)$ внутри Γ . В частности, когда $f(z)$ голоморфна во всех точках внутри Γ без исключения, интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a}$

дает число корней уравнения $f(z) = a$, лежащих внутри контура Γ .

Другой важный частный случай формулы (12) получим, полагая $\varphi(z) = z$. Тогда будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i - \sum_{j=1}^m \beta_j b_j. \quad (14)$$

Правая часть этой формулы дает, очевидно, разность между суммой нулей функции $f(z)$, лежащих внутри Γ , и суммой полюсов той же функции, причем каждый нуль и каждый полюс берется слагаемым столько раз, какова его кратность. Наконец, полагая $\varphi(z) = z^n$, отметим еще формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^n \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i^n - \sum_{j=1}^m \beta_j b_j^n, \quad (15)$$

дающую разность между суммами n степеней нулей и полюсов $f(z)$, лежащих внутри Γ .

§ 2. Приложения теории вычетов

1. Основная теорема алгебры. Формула (13) имеет многочисленные приложения. Мы ограничимся лишь одним приложением этой формулы, показав, что всякая целая рациональная функция n -й степени

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (n \geq 1)$$

имеет n нулей, считая каждый нуль столько раз, каков его порядок. Мы знаем, что целая рациональная функция степени n имеет единственную особую точку — полюс порядка n в бесконечности (гл. VI, § 4, п. 1), т. е. имеем: $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$. Следовательно,

существует круг с центром в нулевой точке радиуса R такой, что во всех точках, удовлетворяющих условию $|z| \geq R$, функция $f(z)$ по модулю больше единицы; таким образом, все нули нашей

функции $f(z)$ лежат внутри этого круга: $|z| < R$. На основании формулы (13) предыдущего пункта число всех нулей данной функции будет:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (16)$$

где интегрирование совершается по окружности C упомянутого круга. Остается показать, что $N = n$. С этой целью мы заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -N$$

изображает вычет функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ относительно бесконечно удаленной точки, а следовательно, N равно этому вычету с обратным знаком. Так как

$$f(z) = z^n \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) = z^n \varphi(z),$$

исключая бесконечно удаленную точку, то отсюда получаем:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \ln f(z) = \frac{n}{z} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{n}{z} + \psi(z), \quad (17)$$

где $\psi(z)$ — функция, имеющая в бесконечно удаленной точке нуль не ниже второго порядка. Из соотношения (17) следует, что вычет функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ для бесконечно удаленной точки есть $-n$. Таким образом, имеем: $N = n$, что и нужно было доказать.

2. Теорема Руше. Пользуясь теорией вычетов, можно доказать весьма полезное положение, известное под названием теоремы Руше: *если две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические внутри и на контуре Γ , удовлетворяют на Γ условиям $\varphi(z) \neq 0$ и $|\psi(z)| < < \varphi(z)|$, то внутри Γ функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z) + \psi(z)$ имеют одинаковое число нулей.*

В самом деле, согласно § 1, п. 5 число нулей, лежащих внутри Γ , функции $\varphi(z) + \psi(z)$ будет:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi' + \psi'}{\varphi + \psi} dz,$$

так как функция $\varphi(z) + \psi(z)$ — аналитическая внутри и на самой контуре (согласно условию на контуре она не имеет нулей). С другой стороны, этот интеграл возможно представить так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi' + \psi'}{\varphi + \psi} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \ln(\varphi + \psi) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \ln \varphi dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \ln \left(1 + \frac{\psi}{\varphi} \right) dz. \end{aligned}$$

Полагая $\omega = 1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, мы видим, что последний интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\omega}{\omega},$$

где интегрирование распространяется по контуру Γ_1 , описываемому точкой $\omega = 1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, когда z описывает Γ .

Вследствие условия на Γ имеем:

$$\left| \frac{\psi}{\varphi} \right| < 1,$$

и потому контур Γ_1 лежит целиком внутри круга с центром в точке $\omega = 1$ радиуса единица. Так как этот круг не содержит внутри себя начала координат, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{d\omega}{\omega} = 0.$$

Итак, мы установили равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi' + \psi'}{\varphi + \psi} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi'}{\varphi} dz,$$

которое и есть аналитическое выражение предложения Руше.

В качестве примера приложения теоремы Руше покажем, что производная функции, однолистной в некоторой области, т. е. принимающей разные значения в разных точках области, не может обращаться в нуль в этой области. Допустив противное, положим, что $f'(a) = 0$, где a — некоторая точка области. Тогда $f(z)$ в окрестности точки a представляется степенным рядом $f(z) = a_0 + a_k(z-a)^k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots$, где $a_k \neq 0$ и $k \geq 2$. Выберем настолько малое число ρ , чтобы при $|z-a| \leq \rho f'(z)$ не обращалась в нуль в точках, отличных от точки a , и чтобы не обращалась в нуль сумма ряда $a_k + a_{k+1}(z-a) + \dots$. Обозначая через m ($m > 0$) минимум величины $|a_k(z-a)^k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots|$ при $|z-a| = \rho$, имеем по теореме Руше для всякого комплексного числа $-\alpha$, модуль которого меньше чем m , что функции $-\alpha + a_k(z-a)^k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots$ и $a_k(z-a)^k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots$ имеют одно и то же число k нулей в круге $|z-a| < \rho$. Но это значит, что уравнение $f(z) \equiv a_0 + a_k(z-a)^k + \dots = a_0 + \alpha$ имеет k корней в этом круге, причем корни простые, так как $f'(z) \neq 0$ при $z \neq a$. Мы пришли, таким образом, к выводу, что значение $a_0 + \alpha$ принимается функцией $f(z)$ в k ($k \geq 2$) различных точках, что противоречит предположению об однолистности $f(z)$.

3. Приложение теории вычетов к вычислению определенных интегралов. Как мы видели в предыдущих пунктах, теория вычетов может быть приложена к решению вопросов теоретического

характера. В настоящем пункте мы остановимся на некоторых приложениях теории вычетов к вычислению определенных интегралов.

Пусть $f(z)$ есть функция, голоморфная всюду в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением конечного числа особых точек a_1, a_2, \dots, a_k , лежащих сверху от действительной оси. Кроме того, предположим, что бесконечно удаленная точка является нулем функции $f(z)$ порядка по крайней мере второго. В этих условиях имеет место формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{res.} \quad {}^1) \text{ относительно } a_1, a_2, \dots, a_k. \quad (18)$$

В самом деле, разложение Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки будет:

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots \quad (19)$$

Опишем из нулевой точки, как центра, полуокружность K , лежащую в верхней полуплоскости, радиуса R столь большого, чтобы все особые точки a_1, a_2, \dots, a_k находились внутри полукруга, граница которого состоит из полуокружности K и отрезка $(-R, +R)$ действительной оси (рис. 92). В силу основной теоремы о вычетах (§ 1, п. 2)

$$\int_{-R}^{+R} f(x) dx + \int_K f(z) dz =$$

$$= 2\pi i \sum \text{res.} \text{ относительно } a_1, a_2, \dots, a_k.$$

(20)

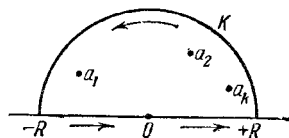


Рис. 92.

Покажем теперь, что $\int_K f(z) dz$ стремится к нулю, когда радиус R стремится к бесконечности. В самом деле, во всех точках полуокружности K имеем на основании (19):

$$|f(z)| \leq \frac{|c_{-2}|}{R^2} + \frac{|c_{-3}|}{R^3} + \dots = \frac{|c_{-2}|}{R^2} + \frac{1}{R^2} \left[\frac{|c_{-3}|}{R} + \dots \right]. \quad (21)$$

Выражение в скобках неравенства (21) может быть сделано сколь угодно малым, например меньше единицы, начиная с достаточно большого R . Следовательно, из неравенства (21) получаем:

$$|f(z)| < \frac{|c_{-2}| + 1}{R^2} \quad (22)$$

¹⁾ Читать: сумма вычетов.

всюду на полуокружности K , начиная с достаточно большого R . Пользуясь неравенством (22), оценим величину модуля интеграла

$$\int_K f(z) dz$$

$$\left| \int_K f(z) dz \right| < \frac{|c_2| + 1}{R^2} \pi R = \pi \frac{|c_2| + 1}{R},$$

т. е. имеем:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_K f(z) dz = 0.$$

Заметив это, из формулы (20) переходим к пределу при R , стремящемся к бесконечности, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{res. относительно } a_1, a_2, \dots, a_h,$$

что и доказывает формулу (18).

Примеры. 1. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Подынтегральная функция $\frac{1}{1+z^2}$ есть голоморфная всюду в верхней полуплоскости, кроме точки $z = i$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным $\frac{1}{2i}$, так как $(1+z^2)' = 2z$, и, следовательно, искомым вычет будет:

$$\frac{1}{(1+z^2)'_{z=i}} = \frac{1}{2i}. \quad (\S 1, \text{ п. 3})$$

В бесконечности наша функция имеет нуль второго порядка, если примем $\left(\frac{1}{1+z^2}\right)_{\infty} = 0$.

Таким образом, искомым интеграл вычисляется по формуле (18):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

2. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, где $n \geq 1$. Подынтегральная функция

$\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ удовлетворяет, очевидно, условиям приложимости формулы (18), причем имеем в верхней полуплоскости полюс $(n+1)$ -го порядка в точке $z = i$.

Чтобы найти соответствующий вычет, образуем выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[\frac{(z-i)^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}} \right] &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z+i)^{-n-1} = \\ &= \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)\dots 2n}{n!} \cdot \frac{1}{(z+i)^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в этом выражении при z , стремящемся к i , получим значение искомого вычета (§ 1, п. 3):

$$\frac{(-1)^n (n+1)(n+2)\dots 2n}{n!} \cdot \frac{1}{(2i)^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}.$$

Следовательно, по формуле (18) будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

3. Иногда удается с помощью простой подстановки так преобразовать искомый интеграл, что преобразованный интеграл вычисляется на основании основной формулы Коши или формулы, полученной из нее путем дифференцирования.

Так, например, чтобы вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx$, сделаем подстановку $e^{xi} = \zeta$, которая переводит отрезок действительной оси $0 \leq x \leq 2\pi$ в окружность C с центром в нулевой точке радиуса единица плоскости ζ . Таким образом, получаем соотношение

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \right)^{2n} dx = -\frac{i}{2^{2n}} \int_C \frac{(1+\zeta^2)^{2n} d\zeta}{\zeta^{2n+1}}. \quad (23)$$

Из основной формулы Коши находим:

$$\int_C \frac{(1+\zeta^2)^{2n} d\zeta}{\zeta^{2n+1}} = \frac{2\pi i}{(2n)!} \frac{d^{2n} (1+\zeta^2)^{2n}}{d\zeta^{2n}} \Big|_{\zeta=0}.$$

Заметив, что $\frac{1}{2n!} \frac{d^{2n} (1+\zeta^2)^{2n}}{d\zeta^{2n}} \Big|_{\zeta=0}$ есть коэффициент при ζ^{2n} в разложении

бинома $(1+\zeta^2)^{2n}$, находим для него значение

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Внося его в формулу (23), окончательно получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx &= 2\pi \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \\ &= 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}. \end{aligned}$$

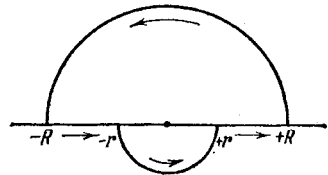


Рис. 93.

4. В заключение вычислим еще интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Из наших рассуждений будет также следовать существование этого интеграла. Мы будем отправляться от интеграла $\int \frac{e^{zi}}{z} dz$, принимая за путь интегрирования замкнутый контур, указанный на рис. 93.

Так как внутри контура интегрирования подынтегральная функция имеет единственную особую точку при $z = 0$ с вычетом, равным единице, то по основной теореме о вычетах (§ 1, п. 2) имеем:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{xi}}{x} dx + \int_{\substack{-r, +r \\ \rightarrow}} \frac{e^{zi}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{xi}}{x} dx + \int_{\substack{-R, +R \\ \leftarrow}} \frac{e^{zi}}{z} dz = 2\pi i.$$

Отметив очевидное равенство

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{xi}}{x} dx = - \int_r^R \frac{e^{-xi}}{x} dx,$$

соединим первый и третий интегралы равенства (24) в один:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{xi}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{xi}}{x} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx,$$

после чего равенство (24) примет вид

$$2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\substack{-r, +r \\ \rightarrow}} \frac{e^{zi}}{z} dz + \int_{\substack{-R, +R \\ \leftarrow}} \frac{e^{zi}}{z} dz = 2\pi i. \quad (24')$$

Чтобы найти интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, заставим теперь r стремиться к нулю, а R — к бесконечности. Покажем, что интеграл $\int_{\substack{-R, +R \\ \leftarrow}} \frac{e^{zi}}{z} dz$ стремится при этом к нулю.

В самом деле, разложим интеграл

$$\int_{\substack{-R, +R \\ \leftarrow}} \frac{e^{zi}}{z} dz = i \int_0^{\pi} e^{-R \sin \varphi + iR \cos \varphi} d\varphi \quad (z = Re^{i\varphi})$$

на три части: $\int_0^{\delta} + \int_0^{\pi-\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi}$, причем δ ($\delta > 0$) выберем столь малым, чтобы оба интеграла \int_0^{δ} и $\int_{\pi-\delta}^{\pi}$ по модулю были меньше, чем $\varepsilon/3$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Это возможно сделать, так как, например, имеем:

$$\left| \int_0^{\delta} e^{-R \sin \varphi + iR \cos \varphi} d\varphi \right| \leq \int_0^{\delta} e^{-R \sin \varphi} d\varphi < \delta,$$

потому что $e^{-R \sin \varphi} \leq 1$, и, следовательно, достаточно взять $\delta = \varepsilon/3$. После того как мы фиксировали постоянное δ , рассмотрим интеграл

$$\int_{\delta}^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R \sin \varphi + iR \cos \varphi}.$$

Очевидно, имеем:

$$\left| \int_{\delta}^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R \sin \varphi + iR \cos \varphi} \right| \leq \int_{\delta}^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R \sin \varphi}.$$

Так как при $\delta \leq \varphi \leq \pi - \delta$ будет: $\sin \varphi \geq \sin \delta$, то имеем

$$e^{-R \sin \varphi} \leq e^{-R \sin \delta}.$$

Поэтому получаем:

$$\left| \int_{\delta}^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R \sin \varphi + iR \cos \varphi} \right| \leq (\pi - 2\delta) e^{-R \sin \delta},$$

что будет меньше $\varepsilon/3$, начиная с достаточно большого R . Итак, мы показали

$$\left| \int_{-R, +R} \frac{e^{zi}}{z} dz \right| < \varepsilon$$

при достаточно больших значениях R , т. е.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R, +R} \frac{e^{zi}}{z} dz = 0. \quad (25)$$

Остается найти предел интеграла

$$\int_{-r, +r} \frac{e^{zi}}{z} dz = i \int_{\pi}^{2\pi} e^{-r \sin \varphi + ir \cos \varphi} d\varphi$$

при r , стремящемся к нулю, что будет равно πi , так как подынтегральная функция $e^{-r \sin \varphi + ir \cos \varphi}$ стремится при $r \rightarrow 0$ к единице равномерно относительно φ .

Таким образом, формула (24') в пределе при $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ нам дает:

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \pi i = 2\pi i, \quad \text{или} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4. Разложение $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби. Мы применим сейчас основную теорему о вычетах к задаче разложения функции $\operatorname{ctg} z$ в бесконечный ряд простейших дробей.

Прежде всего заметим, что функция $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ есть мероморфная с полюсами в тех точках, где $\sin z$ обращается в нуль. Вспомнив, что все нули функции $\sin z$ будут вида $z_k = k\pi$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (гл. II, § 4, п. 7) и замечая, что в этих точках $(\sin z)' = \cos z$ не обращается в нуль, мы заключаем: функция $\operatorname{ctg} z$ будет иметь простые полюсы в точках z_k с вычетами r_k , вычисляемыми по обычной формуле

$$r_k = \frac{\cos z}{(\sin z)'} \Big|_{z=k\pi} = 1.$$

Таким образом, главная часть функции $\operatorname{ctg} z$ в полюсе $z = k\pi$ будет:

$$\frac{1}{z - k\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

В частности, в полюсе $z = 0$ главная часть будет $1/z$, причем

$$\lim_{z \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} z - 1/z) = 0. \quad (26)$$

Заметив это, покажем, что функция $\operatorname{ctg} z$ будет ограничена по модулю на всей плоскости, если мы выделим из плоскости кружки $|z - k\pi| < \rho$ с центрами в точках $k\pi$ одного и того же радиуса ρ , где ρ — произвольное заданное положительное число (рис. 94).

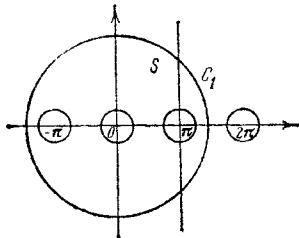


Рис. 94.

Так как функция $\operatorname{ctg} z$ имеет период π , то достаточно рассмотреть ее значения в замкнутой полосе S , ограниченной прямыми $x = 0$ и $x = \pi$ (рис. 94), причем из этой полосы удалены внутренности полукружков с центрами в точках $z = 0$ и $z = \pi$ радиуса ρ .

Во всякой ограниченной части полосы S наша функция $\operatorname{ctg} z$ непрерывна, а следовательно, ограничена по модулю. Таким образом, нам остается лишь показать, что модуль $|\operatorname{ctg} z|$ остается ограниченным, когда точка $z = x + iy$ любым образом удаляется в бесконечность, оставаясь в полосе S , т. е. при $0 \leq x \leq \pi$ и $y \rightarrow +\infty$ или $y \rightarrow -\infty$. С этой целью отправляемся от формулы

$$\operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}};$$

заменяя здесь модуль числителя суммой модулей, а модуль знаменателя абсолютной величиной от разности модулей, имеем:

$$|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{|e^y - e^{-y}|},$$

откуда легко усматриваем, что при $y \rightarrow \pm\infty$ правая часть последнего неравенства стремится к пределу 1.

Таким образом, при всех достаточно больших по абсолютной величине значениях y мы вправе принять, например, $|\operatorname{ctg} z| \leq 2$.

Проведем теперь окружности C_n с центром в начале координат и радиусами $(n + 1/2)\pi$. Считая ρ достаточно малым, например $\rho = \pi/4$, мы видим, что наши окружности C_n не будут проходить через выделенные на плоскости кружки, и, таким образом, по только что доказанному на этих окружностях $|\operatorname{ctg} z|$ будет ограниченным:

$$|\operatorname{ctg} z| < M. \quad (27)$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \zeta}{\zeta - z} d\zeta, \quad (28)$$

где интегрирование совершается по окружности C_n в положительном направлении, а z — любая точка внутри C_n , отличная от полюсов функции $\operatorname{ctg} z$. Чтобы применить к интегралу (28) основную теорему о вычетах, заметим, что подынтегральная функция внутри контура C_n имеет полюсы в точках z и $z_k = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) с вычетами, соответственно равными

$$\operatorname{ctg} z \text{ и } \frac{1}{z_k - z} = -\frac{1}{z - k\pi}.$$

Следовательно, применяя основную теорему о вычетах, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \zeta}{\zeta - z} d\zeta = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} - \sum_{k=-n}^n{}' \frac{1}{z - k\pi},$$

где штрих у знака суммы показывает, что надо исключить слагаемое, соответствующее $k = 0$. Заставляя в последней формуле z стремиться к нулю, воспользовавшись соотношением (26), найдем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \zeta d\zeta}{\zeta} = \sum_{k=-n}^n{}' \frac{1}{k\pi}.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, будем иметь:

$$\frac{z}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} - \sum_{k=-n}^n{}' \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right). \quad (29)$$

Покажем теперь, что интеграл, стоящий в левой части последнего равенства, стремится к нулю при неограниченном возрастании n .

В самом деле, принимая во внимание (27) и замечая, что

$$|\zeta - z| \geq |\zeta| - |z| > n\pi - |z|,$$

найдем:

$$\left| \frac{z}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta \right| < \frac{M|z|}{n\pi - |z|},$$

откуда вытекает стремление к нулю интеграла левой части соотношения (29) при $n \rightarrow \infty$. Переходя, наконец, к пределу при $n \rightarrow \infty$, из соотношения (29) получим:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^{+n} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right)$$

или

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right). \quad (30)$$

Существенно отметить, что согласно выводу формулы (30) в бесконечном ряде (30) мы должны соединять в один член два слагаемых, соответствующих индексам k и $-k$. Однако мы можем рассматривать в формуле (30) бесконечный ряд обычным образом, так как легко показать, что он абсолютно сходится и, следовательно, его сумма не зависит от порядка членов. Действительно, покажем, что наш ряд сходится абсолютно и равномерно во всякой ограниченной области, если отбросить конечное число первых слагаемых, имеющих полюсы в этой области. Заметив, что общий член ряда будет $\frac{z}{(z - k\pi)k\pi}$, мы будем иметь:

$$\left| \frac{z}{(z - k\pi)k\pi} \right| < \frac{L}{k^2\pi(\pi - L/|k|)},$$

так как во всякой ограниченной области $|z| < L$.

Коэффициент при $1/k^2$ при неограниченном возрастании $|k|$ стремится к конечному пределу $\frac{L}{\pi^2}$, а ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, как известно, сходится. Следовательно, ряд (30) сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области плоскости, если пренебречь конечным числом первых его членов. Группируя попарно слагаемые, относящиеся к значениям k , одинаковым по абсолютной величине, но различным по знаку, мы можем переписать формулу (30) в виде

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right)$$

или

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \quad (30')$$

Упражнения к главе VII

1. Вычислить с помощью теории вычетов интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x(x^2+1)^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{1+x^4}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Отв. $\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{3}{2e}\right)$; $\frac{\pi\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\frac{\pi}{24e^3} (3e^2 - 1)$.

2. Вычислить вычеты функций:

а) $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ при $z=1$ и при $z=2$;

б) $\frac{z}{(z-z_1)^m(z-z_2)}$ при $z=z_1$ и при $z=z_2$ ($z_2 \neq z_1$);

в) $e^{\frac{1}{1-z}}$ при $z=1$;

г) $\frac{1}{1-e^z}$ при $z=2k\pi i$.

Отв. а) $+1$ и -1 ; б) $-\frac{z_2}{(z_2-z_1)^m}$ и $\frac{z_2}{(z_2-z_1)^m}$; в) 1 ; г) -1 .

3. Функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в точке z_0 , причем $f(z_0) \neq 0$, а $g(z)$ имеет при $z=z_0$ нуль второго порядка. Какой вычет имеет $\frac{f(z)}{g(z)}$ в точке z_0 ?

Отв. $\frac{a_1 b_2 - a_0 b_3}{b_2^2}$, где $a_\nu = \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(z_0)$ и $b_\nu = \frac{1}{\nu!} g^{(\nu)}(z_0)$ ($\nu = 1, 2, 3$).

4. Зная, что $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, вычислить интегралы Френеля

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

отправляясь от функции e^{iz^2} и интегрируя ее вдоль замкнутого пути C , который идет от 0 по действительной оси до $+R$, затем вдоль $|z|=R$ до точки $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ и отсюда по прямой к точке 0.

5. Вычислить $\int_C \operatorname{tg} \pi z \, dz$, где C есть окружность $|z|=n$ ($n=1, 2, \dots$).

Отв. $-4n\pi i$.

ГЛАВА VIII

ТЕОРЕМА ПИКАРА

В гл. VI, § 2, п. 6 мы исследовали поведение однозначной функции в окрестности существенно особой точки, установив предложение Сохоцкого. Эта теорема показывает, что в сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция принимает значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному числу. Как было там же упомянуто, Пикар доказал более общее и глубокое предложение: *в сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция $f(z)$ принимает (и притом бесконечное число раз) любое конечное значение, за исключением, быть может, одного.* Эта замечательная теорема будет установлена в конце настоящей главы.

§ 1. Предложение Блоха

1. Теорема об обращении голоморфной функции. Рассмотрим функцию $w = F(z)$, голоморфную при $|z| \leq R$, причем $|F(z)| \leq M$. Пусть $F(0) = 0$ и $|F'(0)| = a > 0$.

Тогда существует такое число Φ , зависящее только от M и от произведения aR , что в круге $|w| < \Phi$ функция, обратная $w = F(z)$, будет однозначной и по модулю меньше, чем R .

Для доказательства этой теоремы будем исходить из разложения $F(z)$ в ряд Тейлора:

$$F(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (|z| \leq R).$$

Коэффициенты разложения удовлетворяют неравенствам Коши (гл. V, § 2, п. 8)

$$|a_k| \leq \frac{M}{R^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

откуда, в частности,

$$a = |a_1| \leq \frac{M}{R}. \quad (1)$$

На окружности $|z| = r$ ($0 < r \leq R$) для модуля $|F(z)|$ получаем оценку

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq r(a - |a_2|r - |a_3|r^2 - \dots) \geq r\left(a - \frac{M}{R^2}r - \frac{M}{R^3}r^2 - \dots\right) = \\ &= M + r\left(a + \frac{M}{R}\right) - \frac{M}{1 - \frac{r}{R}} = \varphi(r). \end{aligned}$$

При $r = \rho = R\left(1 - \sqrt{\frac{M}{M + aR}}\right)$ функция $\varphi(r)$ имеет максимум, равный

$$\Phi = \varphi(\rho) = M + (aR + M) - 2\sqrt{M(aR + M)} = (\sqrt{aR + M} - \sqrt{M})^2 > 0. \quad (2)$$

Последнее число удовлетворяет всем условиям теоремы. Действительно, для всякого ω , меньшего по модулю, чем Φ , уравнение $F(z) - \omega = 0$ имеет по теореме Руше в круге $|z| < \rho$ столько же корней, сколько их имеет в этом круге уравнение $F(z) = 0$. Но последнее имеет только один корень $z = 0$, ибо при $0 < |z| < \rho$

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq |z| (|a_1| - |a_2| |z| - |a_3| |z|^2 - \dots) > \\ &> |z| (a - |a_2| \rho - |a_3| \rho^2 - \dots) \geq |z| \frac{\Phi(\rho)}{\rho} > 0. \end{aligned}$$

Кроме того, Φ представляет функцию от M и aR . Итак, для всякого ω , принадлежащего кругу $|\omega| < \Phi = (\sqrt{aR + M} - \sqrt{M})^2$, уравнение $F(z) = \omega$ имеет одно и только одно удовлетворяющее неравенству $|z| < \rho < R$ решение. Теорема доказана.

Заметим, что в силу равенства (1)

$$\rho = R \left(1 - \sqrt{\frac{M}{M + aR}} \right) < R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0,29\dots R < 0,3R$$

и

$$\Phi = (\sqrt{aR + M} - \sqrt{M})^2 = \left(\frac{aR}{\sqrt{aR + M} + \sqrt{M}} \right)^2 > \frac{a^2 R^2}{M(\sqrt{2} + 1)^2} > \frac{a^2 R^2}{6M}$$

(так как $(\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} < 6$).

Следовательно, выражение (2) можно заменить более простым и также удовлетворяющим условию теоремы выражением

$$\Phi(M, aR) = \frac{a^2 R^2}{6M}. \quad (3)$$

2. Доказательство предложения Блоха. Предложение, установленное в п. 1, геометрически может быть сформулировано следующим образом. Рассмотрим семейство функций

$$\omega = F(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad (4)$$

голоморфных в круге $|z| \leq R$ и таких, что $|F(z)| \leq M$. Какова бы ни была функция семейства (4), существует в плоскости ω круг с центром в начале координат радиуса $\Phi(M, R) = \frac{R^2}{6M}$, который с помощью функции $\omega = F(z)$ взаимно однозначно отображается на некоторую область, лежащую внутри $|z| < R$.

Очевидно, радиус Φ этого круга уменьшится, если мы расширим наше семейство функций путем увеличения M . Естественно ожидать, что для семейства функций (4), модуль которых не ограничен никаким постоянным числом в круге $|z| \leq R$, вообще не может существовать в плоскости ω круга с центром в начале координат постоянного радиуса, который покрывался бы значениями любой функции этого семейства.

Действительно, это легко обнаружить на примере. Пусть

$$\omega_\varepsilon = \varepsilon (e^{z/\varepsilon} - 1) = z + \dots$$

Так как $e^{z/\varepsilon}$ не равно нулю ни при каком z и ε ($\varepsilon > 0$), то ω не принимает значения $-\varepsilon$. Таким образом, какой бы малый круг постоянного радиуса с центром в начале координат плоскости ω мы ни взяли, внутри него при достаточно малом ε найдется точка $-\varepsilon$, которая заведомо не будет значением соответствующей функции ω_ε нашего семейства.

Однако, варьируя в зависимости от функции семейства центр круга плоскости ω , сохраняя при этом радиус его неизменным, мы можем выбрать поло-

жение этого круга так, что он будет сплошь состоять из точек, изображающих значения функции данного семейства. Более того, мы сейчас докажем теорему Блоха, обобщающую только что высказанное утверждение, а именно:

Какова бы ни была функция семейства

$$w = F(z) = z + a_2 z^2 + \dots,$$

голоморфная при $|z| \leq R$, существует круг плоскости w с центром в некоторой точке, который взаимно однозначно отображается на некоторую область, лежащую внутри $|z| < R$. Радиус этого круга не зависит от функции, т. е. некоторое постоянное (зависящее только от R).

Не уменьшая общности, мы можем принять $R = 1$. В самом деле, образуем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \frac{F(Rx)}{R} = x + \dots$$

Эта функция будет голоморфной в круге $|x| \leq 1$. Допустим, что мы доказали нашу теорему для функции $\varphi(x)$ и получили для нее круг в плоскости w с центром в некоторой точке абсолютно постоянного радиуса B , который взаимно однозначно отображается на некоторую область внутри $|x| < 1$. Тогда, возвращаясь к общему случаю и замечая, что $|F(Rx)| = R|\varphi(x)|$, мы заключаем: существует круг плоскости $w = F$ с центром в некоторой точке, взаимно однозначно отображающийся на некоторую область внутри $|z| < R$. Радиус этого круга равен BR .

Для доказательства введем вспомогательную величину

$$\Omega(\vartheta) = \vartheta \max_{|x| \leq 1 - \vartheta} |\varphi'(x)| \quad (0 \leq \vartheta \leq 1).$$

$\Omega(\vartheta)$ как функция ϑ обладает свойствами:

1) $\Omega(0) = 0$; 2) $\Omega(1) = 1$; 3) $\Omega(\vartheta)$ непрерывна. Таким образом, существует $\vartheta_0 > 0$ такое, что $\Omega(\vartheta_0) = 1$, в то время как при $\vartheta < \vartheta_0$ имеем: $\Omega(\vartheta) < 1$. Обозначим через ξ ($|\xi| = 1 - \vartheta_0$) точку, в которой $|\varphi'(x)|$ достигает максимума для значений $|x| \leq 1 - \vartheta_0$.

Тогда

$$|\varphi'(\xi)| = 1/\vartheta_0.$$

В круге $|x - \xi| \leq \vartheta_0/2$ имеем: $|\varphi'(x)| \leq 2/\vartheta_0$, так как этот круг составляет часть круга $|x| \leq 1 - \vartheta_0/2$, и согласно определению $\Omega(\vartheta)$ получаем:

$$\max |\varphi'(x)| = \frac{\Omega(\vartheta_0/2)}{\vartheta_0/2} < \frac{1}{\vartheta_0/2} = \frac{2}{\vartheta_0} \quad (|x| \leq 1 - \vartheta_0/2).$$

Отметим теперь формулу

$$w^* = \varphi(x) - \varphi(\xi) = \int_{\xi}^x \varphi'(t) dt.$$

Так как в круге $|x - \xi| \leq \vartheta_0/2$ все время $|\varphi'(x)| \leq 2/\vartheta_0$, то в этом круге будет: $|w^*| = |\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq 2/\vartheta_0 \cdot \vartheta_0/2 = 1$. Итак, функция $w^* = \varphi(x) - \varphi(\xi)$ есть голоморфная в круге $|x - \xi| \leq \frac{\vartheta_0}{2}$, причем $|w^*| \leq 1$, $w^*(\xi) = 0$, $|w^{*'}(\xi)| = |\varphi'(\xi)| = 1/\vartheta_0$.

Применяя результат п. 1 к функции w^* , получим:

$$a = |w^{*'}(\xi)| = 1/\vartheta_0, \quad Ra = \vartheta_0/2 \cdot 1/\vartheta_0 = 1/2, \quad M = 1.$$

Отсюда следует вследствие результата п. 1, что обратная функция для $w^* = \varphi(x) - \varphi(\xi)$ есть однозначная внутри круга

$$|w^*| < \Phi\left(1, \frac{1}{2}\right) = B.$$

Иными словами, круг с центром в точке $\varphi(\xi)$ плоскости φ радиуса B взаимно однозначно отображается на некоторую область, лежащую внутри круга $|x - \xi| < \vartheta_0/2$, т. е. на область, внутреннюю к кругу $|x| < 1$.

Примечание. Очевидно, предложение Блоха останется в силе, если рассматривать функции, голоморфные лишь внутри круга $|x| < 1$. В этом случае абсолютное постоянное B должно быть заменено постоянным B_1 , считая $B_1 < B$. Действительно, достаточно применить результат Блоха к области $|x| \leq 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), в которой данные функции голоморфны. Радиус круга Блоха будет $B_1 = B(1 - \varepsilon)$, т. е. любое постоянное, меньшее B .

§ 2. Теорема Ландау

1. Доказательство теоремы Ландау. Обращаясь теперь к приложениям результата Блоха (§ 1, п. 2), рассмотрим функцию $w = f(z)$, голоморфную внутри круга $|z| < 1$ и выпускающую два значения 0 и 1. Построим вспомогательную функцию

$$F(z) = \ln \left[\sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi} - 1} \right]. \quad (5)$$

Эта функция $F(z)$ будет голоморфной внутри круга $|z| < 1$, так как данная функция $f(z)$ в этом круге не равна нулю и не равна единице. Кроме того, функция $F(z)$ выпускает значения вида $\pm \ln[\sqrt{n} - \sqrt{n-1}] + 2m\pi i$ ($n \geq 1$ — целое, m — любое целое), которые образуют в плоскости F множество точек E .

В самом деле, разрешая уравнение (5) относительно $f(z)$, найдем:

$$f(z) = -e^{\frac{\pi i}{2}(e^{2F(z)} + e^{-2F(z)})}, \quad (5')$$

и, следовательно, полагая $F(z)$ равным любому значению множества E , имеем бы:

$$f(z) = -e^{\frac{\pi i}{2}[(\sqrt{n} \mp \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1})^2]} = -e^{\frac{\pi i}{2}(4n-2)} = 1,$$

что невозможно.

Каждая точка плоскости F отстоит от множества точек E (т. е. от ближайшей точки этого множества) на расстоянии, меньшем b , где b — некоторое постоянное, что непосредственно вытекает из равенств

$$-\ln(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \ln \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \ln(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) \rightarrow \infty$$

и

$$\ln(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \ln(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = \ln \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \rightarrow 0.$$

Предполагая $F'(0) \neq 0$, рассмотрим функцию

$$\frac{F(z) - F(0)}{F'(0)} = z + a_2 z^2 + \dots$$

Для этой функции существует в силу результата Блоха (§ 1, п. 2) круг с центром в некоторой точке ее плоскости, постоянного радиуса B_1 , сплошь покрываемый ее значениями. Следовательно, для функции $F(z)$ будет существовать круг с центром в некоторой точке плоскости F радиуса $B_1 |F'(0)|$, сплошь покрываемый значениями $F(x)$. Так как этот круг не может содержать точек множества E , то должно выполняться неравенство

$$B_1 |F'(0)| < b, \quad \text{или} \quad |F'(0)| < b/B_1.$$

Последнее неравенство получено в предположении, что $F'(0) \neq 0$, но если $F'(0) = 0$, то это неравенство подавно справедливо.

Итак, имеем:

$$|F'(0)| < b/B_1 = C_1, \quad (6)$$

где C_1 — постоянное, не зависящее от функции $F(z)$. Возвращаясь к данной функции $f(z)$, определенной формулой (5'), пользуясь установленным неравенством (6), получим:

$$|f'(0)| < L[f(0)], \quad (7)$$

где L — символ определенной операции, не зависящей от вида функции f . Последнее неравенство непосредственно приводит нас к теореме Ландау, которая может быть сформулирована таким образом:

Если $f(z) = \alpha + \beta z + a_2 z^2 + \dots$ ($\beta \neq 0$) есть голоморфная функция внутри круга $|z| < R$, не принимающая значений 0 и 1, то имеет место неравенство

$$R < \Omega(\alpha, \beta),$$

где $\Omega(\alpha, \beta)$ зависит только от α и β .

В самом деле, полагая $\varphi(z) = f(Rz)$, получаем функцию $\varphi(z)$, голоморфную при $|z| < 1$ и выпускающую два значения: 0 и 1. Применяя к этой функции доказанное неравенство (7), получаем: $|\varphi'(0)| < L[\varphi(0)]$, или, возвращаясь к данной функции f , перепишем последнее неравенство так:

$$R|f'(0)| < L[f(0)], \quad \text{или} \quad R|\beta| < L(\alpha),$$

откуда вытекает:

$$R < \frac{L(\alpha)}{|\beta|} = \Omega(\alpha, \beta).$$

2. Малая теорема Пикара. Задолго до открытия Ландау Пикаром была установлена следующая теорема для целых функций: *всякая целая функция, не равная тождественно постоянному, принимает любое конечное значение, кроме, быть может, одного.*

Иными словами, уравнение $f(z) = A$, где $f(z)$ есть целая функция, имеет корень при всяком конечном значении комплексного числа A , кроме, быть может, одного исключительного значения. Примером целой функции с исключительным значением может служить e^z , которая не равна нулю ни при каком z . Примером целой функции, не имеющей исключительного значения, может служить любая целая рациональная функция или $\sin z$. Рассматриваемое предложение Пикара является частным случаем теоремы Ландау, установленной в п. 1. В самом деле, предполагая, что целая функция $f(z)$ выпускает два различных конечных значения a и b и не равна тождественно постоянному, мы немедленно придем к противоречию на основании теоремы Ландау.

Образовав функцию $F(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$, мы видим, что она голоморфна во всей плоскости, не принимает значений 0 и 1 и не равна тождественно постоянному. Следовательно, найдется такая точка — примем ее за начало координат, — в которой производная $F'(0) = \beta$ не равна нулю. Пусть разложение нашей функции в степенной ряд будет:

$$F(z) = \alpha + \beta z + a_2 z^2 + \dots$$

Так как функция $F(z)$ голоморфна и не принимает значений 0 и 1 внутри круга произвольного радиуса R : $|z| < R$, то по теореме Ландау имеем:

$$R < \Omega(\alpha, \beta).$$

Противоречивость этого неравенства очевидна, так как в левой его части стоит произвольно большое число R , а в правой — постоянное число $\Omega(\alpha, \beta)$.

§ 3. Неравенство Шоттки

1. Вывод неравенства Шоттки. Для установления так называемой большой теоремы Пикара, содержание которой было сформулировано в начале этой главы, нам необходимо вывести одно неравенство, известное под названием *неравенства Шоттки*. Вывод этого неравенства мы выполним на основании результата Блоха (§ 1, п.2), пользуясь методом, аналогичным примененному в § 2 (п. 1) для доказательства теоремы Ландау.

Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную внутри круга $|z| < 1$ и выпускающую значения 0 и 1. Переходя к вспомогательной функции $F(z)$, определенной формулой (5) в § 2 (п. 1), рассмотрим выражение

$$\varphi(\xi) = \frac{F[z + (1-r)\xi] - F(z)}{(1-r)F'(z)} = \xi + \dots,$$

где $|z| = r$. Это выражение будет голоморфной функцией ξ внутри круга $|\xi| < 1$, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$. В силу результата Блоха (§ 1, п.2) для этой функции существует круг с центром в некоторой точке плоскости φ абсолютного радиуса B_1 , который сплошь покрывается ее значениями. Следовательно, в плоскости F найдется круг с центром в некоторой точке радиуса $B_1(1-r)|F'(z)|$, сплошь покрываемый значениями функции $F[z + (1-r)\xi]$ при $|\xi| < 1$, а потому и подавно значениями $F(\xi)$ при $|\xi| < 1$. Так как, с другой стороны, функция $F(\xi)$ при $|\xi| < 1$ выпускает значения, изображаемые точками множества E (см. § 2, п. 1), то имеет место неравенство

$$B_1(1-r)|F'(z)| < b,$$

где b — абсолютное постоянное, большее расстояния любой точки плоскости F до множества точек E .

Последнее неравенство перепишем в виде

$$|F'(z)| < \frac{b}{B_1} \cdot \frac{1}{1-r}. \quad (8)$$

Это неравенство выведено в предположении $F'(z) \neq 0$, но в случае $F'(z) = 0$ оно очевидно. Итак, неравенство справедливо при всяком z , $|z| = r < 1$.

Отметим очевидное тождество

$$F(z) = F(0) + \int_0^z F'(t) dt.$$

Так как

$$|F'(t)| < \frac{b}{B_1} \cdot \frac{1}{1-|t|} \leq \frac{b}{B_1} \frac{1}{1-r} \quad \text{при} \quad |t| \leq r = |z|,$$

то считая за путь интегрирования прямолинейный отрезок длины r , соединяющий точки 0 и z , получаем из последнего тождества неравенство

$$|F(z)| < |F(0)| + \frac{b}{B_1} \frac{r}{1-r}.$$

Возвращаясь к данной функции $f(z)$, связанной с $f(z)$ формулой (5'), и пользуясь последним неравенством, получим:

$$|f(z)| < L[F(0), r],$$

или, замечая, что $F(0)$ выражается через $f(0)$, окончательно находим:

$$|f(z)| < \Omega[f(0), r], \quad (9)$$

где Ω зависит только от $f(0)$ и $r = |z|$.

Вследствие голоморфности функции $f(z)$ установленное неравенство (9), очевидно, остается в силе при $|z| \leq r$. Неравенство (9), принадлежащее Шоттки, показывает, что если семейство функций, голоморфных и выпускающих два значения, 0 и 1, внутри круга $|z| < 1$, имеет один и тот же свободный член $f(0)$, то модуль любой функции этого семейства в круге $|z| \leq r$ ($r < 1$) остается меньше некоторого постоянного числа, зависящего только от r . К этому предположению можно привести общий случай, когда рассматриваемая функция $f(z)$ будет голоморфной и выпускающей значения 0 и 1 внутри круга $|z| < R$.

В самом деле, полагая $\varphi(x) = f(Rx) = \tilde{f}(z)$, мы получаем функцию, удовлетворяющую условиям доказанного неравенства (9), причем $\varphi(0) = f(0)$. Следовательно, вследствие неравенства (9) будет:

$$|\varphi(x)| < \Omega [f(0), r] \quad \text{при} \quad |x| \leq r < 1,$$

или

$$|f(z)| < \Omega [f(0), r] \quad \text{при} \quad |z| \leq Rr.$$

Итак, если $f(z)$ есть функция, голоморфная и выпускающая значения 0 и 1 внутри круга $|z| < R$, то в круге $|z| \leq R\vartheta$ ($\vartheta < 1$) имеет место неравенство

$$|f(z)| < \Omega [f(0), \vartheta]. \quad (10)$$

Примечание. Из неравенства (1) вытекает также оценка снизу $|f(z)|$ в круге $|z| \leq R\vartheta$. В самом деле, функция $\frac{1}{f(z)}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Шоттки, а потому $\frac{1}{|f(z)|} < \Omega \left[\frac{1}{f(0)}, \vartheta \right]$ при $|z| \leq R\vartheta$. Отсюда следует:

$$|f(z)| > \frac{1}{\Omega \left[\frac{1}{f(0)}, \vartheta \right]} = \Omega_1 [f(0), \vartheta]. \quad (10')$$

Неравенство (10') справедливо в круге $|z| \leq R\vartheta$.

2. Обобщенное неравенство Шоттки. При доказательстве теоремы Пикара нам придется пользоваться неравенством Шоттки в обобщенном виде. По доказанному в предыдущем пункте модуль функции $f(z)$, голоморфной и выпускающей два значения, 0 и 1, внутри круга $|z| < R$, на круге $|z| \leq R\vartheta$, заключен между двумя пределами, которые зависят только от значения функции в центре круга и числа ϑ , представляющего отношение радиусов наружного и внутреннего кругов. Предполагая $\alpha \leq |f(0)| \leq \beta$, покажем, что эти пределы можно считать зависящими лишь от α , β и ϑ . В этом и будет заключаться нужное нам обобщение неравенства Шоттки.

Для этого, возвращаясь к рассуждениям п. 1, заметим, что наше утверждение будет оправдано, если мы покажем справедливость неравенства

$$|F(0)| < l(\alpha, \beta),$$

где F вспомогательная функция п. 1, а $l(\alpha, \beta)$ зависит только от α и β . Заметив, что

$$F(0) = \ln \left[\sqrt{\frac{\ln f(0)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\ln f(0)}{2\pi i} - 1} \right],$$

немедленно получаем:

$$|F(0)| \leq \ln \left[\sqrt{\frac{|\ln f(0)|}{2\pi} + 1} + \sqrt{\frac{|\ln f(0)|}{2\pi} + 2} \right] + 2\pi.$$

Обозначив через $\ln^+\sigma$ число $\ln \sigma$, если $\sigma > 1$, и нуль, если $\sigma \leq 1$. Тогда, очевидно, справедливо равенство

$$|\ln \sigma| < \ln^+\sigma + \ln^+ \frac{1}{\sigma},$$

и неравенство

$$\ln^+\sigma \leq \ln^+\sigma', \quad \text{если } \sigma \leq \sigma'.$$

Так как

$$\alpha < |f(0)| \leq \beta, \quad \text{то } \frac{1}{\beta} < \frac{1}{|f(0)|} \leq \frac{1}{\alpha}$$

и, следовательно, можно написать:

$$|\ln |f(0)|| < \ln^+\beta + \ln^+ \frac{1}{\alpha},$$

откуда становится очевидным неравенство

$$|F(0)| < l(\alpha, \beta).$$

Получив верхний предел для модуля функции $f(z)$ в круге $|z| \leq R\vartheta$, зависящем лишь от α , β и ϑ , мы для определения нижнего предела применим полученное неравенство к функции $1/f(z)$, как это было сделано в примечании к п. 1, замечая, что в данном случае модуль значения в центре заключен между числами $1/\beta$ и $1/\alpha$. Итак, обобщенное неравенство Шоттки формулируется в следующем виде: *если $f(z)$ есть функция, голоморфная и выпускающая два значения, 0 и 1, внутри круга $|z| < R$, причем $\alpha \leq |f(0)| \leq \beta$, то в круге $|z| \leq R\vartheta$ выполняется неравенство*

$$\Omega_1(\alpha, \beta, \vartheta) < |f(z)| < \Omega(\alpha, \beta, \vartheta). \quad (11)$$

§ 4. Общая теорема Пикара

Пользуясь предложением Шоттки, мы в состоянии доказать общую теорему Пикара, сформулированную в начале этой главы. Таким образом, теперь должно быть доказано, что *функция $f(z)$, голоморфная в некоторой окрестности существенно особой точки, может выпускать в ней не более как одно конечное значение*. Допуская противное, мы примем, что $f(z)$ выпускает два конечных значения, за которые можно считать 0 и 1. Путем линейного преобразования независимого переменного мы можем достигнуть того, что существенно особая точка будет бесконечно удаленной точкой, а функция $f(z)$ будет голоморфной и отличной от нуля и единицы при $|z| \geq 1/2$.

На основании теоремы Сохоцкого (гл. VI, § 2, п. 5), углублением которой и является доказываемое предположение, возможно задать бесконечную последовательность точек λ_n , сходящуюся к бесконечно удаленной точке $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$,

так, чтобы имело место неравенство

$$1/2 < |f(\lambda_n)| < 1,$$

каково бы ни было n .

Функции $f_n(z) = f(\lambda_n z)$ для больших значений n голоморфны в области $|z| \geq 1/2$, причем $1/2 < |f_n(1)| < 1$.

Прилагая теорему Шоттки (§ 3, п. 2) к кругу с центром в точке $z = 1$ радиуса $1/2$, мы видим, что эти функции в круге с центром $z = 1$ радиуса $1/4$ по модулю заключены между двумя постоянными. Отправляясь от круга с центром $z = 1$ радиуса $1/4$, возможно построить цепь из конечного числа кругов радиуса $1/4$ с центрами на окружности $|z| = 1$ так, чтобы центр каждого следующего круга лежал внутри предыдущего круга, и так, чтобы они в своей совокупности покрывали окружность $|z| = 1$. Последовательное многократное приложение обобщенной теоремы Шоттки к кругам радиуса $1/2$, concentрическим с звеньями цепи,

нам показывает, что в области, выметаемой кругами радиуса $1/4$, все функции $f_n(z)$ по модулю заключены между двумя постоянными числами. В частности, эти функции на окружности $|z| = 1$ ограничены по модулю. Это утверждение равносильно тому, что функция $f(z)$ на всех окружностях $|z| = |\lambda_n|$ имеет модуль, меньший постоянного числа. Так как функция, голоморфная в кольце, включая и его границу, достигает максимума своего модуля на границе, то $|f(z)|$ в области $|z| \geq 1/2$ меньше этого же постоянного числа. Это является противоречием с теоремой Сохоцкого, что и доказывает справедливость общей теоремы Пикара.

Прилагая доказанное к функции $f(z/\sigma)$ ($\sigma < 1$), мы видим, что $f(z)$ в области $|z| \geq 1/(2\sigma)$ принимает все конечные значения, за исключением, быть может, одного. Но так как функция $f(z)$ обладает этим свойством в каждой области $|z| \geq 1/(2\sigma)$, то она принимает все конечные значения, кроме исключительного, бесконечное число раз.

Упражнения к главе VIII

1. Целая функция, которая каждое значение принимает только один раз, есть целая линейная функция.
2. Функция, обратная целой функции, не может быть целой функцией, кроме случая линейной функции.
3. Доказать теорему Лиувилля, пользуясь интегральной формулой Коши.
4. Существуют ли целые трансцендентные функции, которые на каждом луче, выходящем из нулевой точки, по модулю стремятся к $+\infty$?

Отв. Да; пример: $e^z + z$.

5. Показать справедливость теоремы Пикара для функции e^z , т. е. определить корни уравнения $e^z = A$ ($A \neq 0$).
6. Какое исключительное значение имеет функция $e^z + 1$?
7. Показать, что $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ принимают все значения.
8. Проверить теорему Пикара для функции $e^{1/z}$ вблизи $z = 0$.

ГЛАВА IX

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ ИХ К АНАЛИТИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

§ 1. Бесконечные произведения

1. Сходящиеся и расходящиеся бесконечные произведения. Наряду с бесконечными рядами бесконечные произведения являются весьма ценным аналитическим аппаратом для изображения функций. Прежде чем воспользоваться этим аппаратом для изображения голоморфных функций комплексного переменного, мы должны дать краткий очерк теории бесконечных произведений.

Рассмотрим произведение p_n произвольного числа n числовых множителей, отличных от нуля, которые будем обозначать соответственно через

$$(1 + u_1), (1 + u_2), \dots, (1 + u_n),$$

где u_1, u_2, \dots, u_n суть комплексные числа:

$$p_n = (1 + u_1) (1 + u_2) \dots (1 + u_n). \quad (1)$$

Давая n значения 1, 2, 3, ..., мы получим последовательность комплексных чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, отличных от нуля, причем могут представиться лишь три случая:

1) Последовательность чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ сходится к конечному числу p , отличному от нуля, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ ($p \neq 0$).

2) Последовательность чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ сходится к числу 0, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$.

3) Последовательность чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ расходится, т. е. не стремится ни к какому конечному пределу.

В первом случае бесконечное произведение

$$(1 + u_1) (1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots \quad (2)$$

называется *сходящимся*, а число p принимают за значение этого произведения (2). В обоих последних случаях произведение (2) называют *расходящимся*. Например, бесконечное произведение

$$1 \cdot \frac{2^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{3^2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot \dots$$

сходится, так как в данном случае имеем:

$$p_n = 1 \cdot \frac{2^2}{(2+1)(2-1)} \cdot \frac{3^2}{(3+1)(3-1)} \cdot \frac{4^2}{(4+1)(4-1)} \cdots \\ \cdots \frac{(n-1)^2}{n(n-2)} \cdot \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \frac{2n}{n+1}$$

и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 2$.

Бесконечные же произведения

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \cdots$$

и

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdots$$

оба расходятся. В первом из них имеем:

$$p_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0 \quad (\text{случай 2});$$

во втором будет: $p_n = 1$, если n — число четное, и $p_n = \frac{n+3}{2}$, если n — нечетное; следовательно, последовательность чисел p_n расходится (случай 3).

Данное понятие сходимости бесконечного произведения можно выразить с помощью неравенств. В самом деле, пусть произведение (2) сходится к числу p :

$$p = (1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n) \cdots \quad (3)$$

В этом случае отношение $\frac{p}{p_n}$ стремится к единице при неограниченном возрастании n , так как имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{p_n} = \frac{p}{\lim_{n \rightarrow \infty} p_n} = \frac{p}{p} = 1 \quad (p \neq 0).$$

Очевидно, что, обратно, если это отношение p/p_n стремится к единице при неограниченном возрастании n , то произведение (2) сходится к числу p . Другими словами, *бесконечное произведение (2) называется сходящимся к числу p ($p \neq 0$), если при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что имеет место неравенство*

$$\left| \frac{p}{p_n} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{при } n \geq N.$$

2. Основной критерий сходимости бесконечного произведения. Основной задачей в теории бесконечных произведений является вопрос о том, как, зная элементы бесконечного произведения,

т. е. его множители, узнать, сходится оно или расходится. Мы ограничимся установлением лишь одной общей теоремы, которая позволяет привести исследование сходимости бесконечного произведения к рассмотрению сходимости соответствующего ряда.

Т е о р е м а. Если ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4)$$

абсолютно сходится, то сходится и произведение

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (4')$$

есть сходящийся. При доказательстве теоремы мы вправе предполагать, что все u_n по модулю меньше единицы, потому что из сходимости ряда (4') следует: $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$, и, значит, среди чисел u_n может быть лишь конечное число u_n , модули которых не меньше единицы; отбрасывая же конечное число множителей, мы не нарушаем сходимости или расходимости произведения.

Мы докажем сначала нашу теорему, предполагая, что все числа u_n суть действительные; обозначим их через a_n .

Итак, предполагая, что ряд

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (5)$$

сходится, докажем сходимость произведения

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \dots \quad (6)$$

Среди чисел a_n будут, вообще говоря, как положительные, так и отрицательные. Первые из них обозначим через b_1, b_2, \dots , а вторые — через $-c_1, -c_2, \dots$

Рассмотрим отдельно два произведения:

$$(1 + b_1)(1 + b_2) \dots \quad (7)$$

и

$$(1 - c_1)(1 - c_2) \dots \quad (8)$$

Если мы покажем, что оба эти произведения сходятся, то, очевидно, тем самым будет доказана сходимость произведения (6).

По условию ряды $b_1 + b_2 + \dots$ (7') и $c_1 + c_2 + \dots$ (8') суть сходящиеся. Заметив, что имеем:

$$\ln(1 + b_n) < b_n \quad (b_n < 1),$$

убеждаемся в сходимости ряда

$$\ln(1 + b_1) + \ln(1 + b_2) + \dots,$$

откуда следует, что выражение

$$\begin{aligned} \ln(1 + b_1) + \ln(1 + b_2) + \dots + \ln(1 + b_n) = \\ = \ln[(1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n)] \end{aligned}$$

стремится к определенному конечному пределу, когда n неограниченно возрастает. Следовательно, произведение

$$(1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n)$$

стремится к определенному конечному пределу, отличному от нуля, когда n стремится к бесконечности, что и доказывает сходимость произведения (7). Аналогично докажем сходимость произведения (8), показав, что ряд с общим членом $\ln(1 - c_n)$ сходится. Действительно, заметив, что имеем:

$$\ln(1 - c_n) = -\frac{c_n}{1 - \theta c_n} \quad (0 \leq \theta < 1),$$

убеждаемся в сходимости ряда с общим членом $\frac{c_n}{1 - \theta c_n}$, так как ряд с общим членом c_n по условию сходится, а отношение c_n : $\frac{c_n}{1 - \theta c_n} = 1 - \theta c_n$, начиная с достаточно большого n , остается заключенным между $1 - \varepsilon$ и 1 , каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Остается распространить нашу теорему на тот случай, когда числа u_n суть комплексные. Мы докажем, что комплексное число $p_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n)$ при неограниченном возрастании n стремится к определенному конечному пределу, отличному от нуля, если обнаружим, что $|p_n|$ стремится к конечному пределу, не равному нулю, и $\arg p_n$ стремится к определенному конечному пределу. Другими словами, нужно доказать, во-первых, что произведение

$$|1 + u_1| |1 + u_2| \dots |1 + u_n| \dots \quad (9)$$

сходится и, во-вторых, что ряд

$$\arg(1 + u_1) + \arg(1 + u_2) + \dots \quad (10)$$

сходится, так как имеем:

$$|p_n| = |1 + u_1| |1 + u_2| \dots |1 + u_n|$$

и

$$\arg p_n = \arg(1 + u_1) + \arg(1 + u_2) + \dots + \arg(1 + u_n).$$

Бесконечные произведения с общими множителями $|1 + u_n|$ и $|1 + u_n|^2$ одновременно сходятся или расходятся, а потому для сходимости произведения (9) достаточно обнаружить сходимость произведения

$$|1 + u_1|^2 |1 + u_2|^2 \dots |1 + u_n|^2 \dots \quad (9')$$

Это же последнее сходится в силу уже доказанной первой части нашей теоремы, так как мы имеем:

$$|1 + u_n|^2 = |1 + \alpha_n + \beta_n i|^2 = (1 + \alpha_n)^2 + \beta_n^2 = 1 + (\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n),$$

и ряд с общим членом $|\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n|$ по условию сходится вследствие неравенства

$$|\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n| \leq |u_n|^2 + 2|u_n|.$$

Наконец, ряд (10) с общим членом

$$\arg(1 + u_n) = \arcsin \frac{\beta_n}{\sqrt{(1 + \alpha_n)^2 + \beta_n^2}}$$

сходится вследствие сходимости ряда с общим членом $|\beta_n|$ ($|\beta_n| \leq |u_n|$) и неравенства

$$\left| \arcsin \frac{\beta_n}{\sqrt{(1 + \alpha_n)^2 + \beta_n^2}} \right| < \frac{\pi}{2} \frac{|\beta_n|}{\sqrt{(1 + \alpha_n)^2 + \beta_n^2}} < \pi |\beta_n|,$$

которое имеет место, начиная с достаточно большого n (так как $\frac{x}{\sin x}$ в первой четверти остается меньше $\frac{\pi}{2}$).

Предполагая в бесконечном произведении

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots$$

все u_n действительными числами одного знака, легко показать, что сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ будет условием не только достаточным, но и необходимым для сходимости произведения. В самом деле, если числа u_n положительны и наше произведение сходится, то последовательность чисел $p_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n)$, возрастая, должна оставаться меньше некоторого постоянного положительного числа M . Раскрывая скобки в выражении p_n , мы видим, что сумма $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ и подавно будет меньше M , каково бы ни было n , а это значит, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Если числа $u_n = -c_n$ отрицательны, то, предполагая расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, докажем расходимость произведения $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - c_n)$. Действительно,

$$\ln p_n = \ln(1 - c_1) + \ln(1 - c_2) + \dots + \ln(1 - c_n)$$

стремится к отрицательной бесконечности, когда n неограниченно возрастает, так как ряд с общим членом $\ln(1 - c_n) = -\frac{c_n}{1 - \theta c_n}$ расходится (мы считаем, что $c_n < 1$, начиная с некоторого n ; в противном случае расходимость произведения очевидна, так как среди чисел p_n будет бесконечное множество как положительных чисел, так и отрицательных). Отсюда следует, что p_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n и, следовательно, наше произведение расходится.

Условимся называть произведение

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots \quad (2)$$

абсолютно сходящимся, если сходится произведение

$$(1 + |u_1|)(1 + |u_2|) \dots (1 + |u_n|) \dots \quad (2')$$

Вследствие доказанного сходимость бесконечного произведения (2') эквивалентна сходимости ряда

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (4')$$

Следовательно, в нашем определении абсолютно сходящегося произведения (2) можно заменить требование сходимости произведения (2') требованием сходимости ряда (4').

Доказанная выше теорема убеждает нас в том, что всякое абсолютно сходящееся произведение есть произведение сходящееся. Было бы ошибочным обратное заключение; иначе говоря, существуют произведения сходящиеся, но не абсолютно. Такие произведения назовем условно сходящимися. Примером условно сходящегося произведения может служить произведение

$$(1 + 1) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots$$

Действительно, это произведение сходится, потому что для него имеем: $p_n = \frac{n+1}{n}$, если n — нечетное, и $p_n = 1$, если n — четное, и, значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$. С другой стороны, ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ расходится.

3. Изображение голоморфной функции в виде бесконечного произведения. Пусть мы имеем бесконечное произведение

$$[1 + u_1(z)] [1 + u_2(z)] \dots [1 + u_n(z)] \dots, \quad (11)$$

причем все $u_n(z)$ суть функции ¹⁾, голоморфные в некоторой области G . Предположим, что при любом n имеет место неравенство

$$|u_n(z)| < a_n, \quad (12)$$

какова бы ни была точка z области G , и пусть числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (13)$$

сходится. В этом случае произведение (11) в силу предыдущего пункта сходится во всякой точке z области G и изображает, следовательно, некоторую функцию $f(z)$ комплексного переменного z , не равную нулю ни в какой точке области G . Мы докажем, что $f(z)$ есть функция, голоморфная в области G .

¹⁾ Все множители произведения (11) отличны от нуля для любой точки z области G .

Действительно,

$$f_n(z) = [1 + u_1(z)] [1 + u_2(z)] \dots [1 + u_n(z)];$$

нам достаточно доказать на основании первой теоремы Вейерштрасса (гл. V, § 1, п. 1), что последовательность функций $f_n(z)$, голоморфных в области G , сходится равномерно в этой области к функции $f(z)$. Введя обозначения

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) = p_n, \quad (1 + a_1)(1 + a_2) \dots = p$$

(последнее произведение сходится по условию в силу п. 2), оценим модуль разности $f(z) - f_n(z)$:

$$|f(z) - f_n(z)| = |f_n(z)| \left| \frac{f(z)}{f_n(z)} - 1 \right| < p_n \left| \frac{f(z)}{f_n(z)} - 1 \right|, \quad (14)$$

так как

$$|f_n(z)| < (1 + |u_1(z)|)(1 + |u_2(z)|) \dots (1 + |u_n(z)|) < (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) = p_n.$$

С другой стороны, справедливо неравенство

$$\left| \frac{f(z)}{f_n(z)} - 1 \right| < \frac{p}{p_n} - 1 \quad (15)$$

при любом n , какова бы ни была точка z области G . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+k}(z)}{f_n(z)} - 1 &= [1 + u_{n+1}(z)] [1 + u_{n+2}(z)] \dots [1 + u_{n+k}(z)] - 1 = \\ &= u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots + u_{n+k}(z) + u_{n+1}(z)u_{n+2}(z) + \\ &\quad + \dots + u_{n+1}(z)u_{n+2}(z) \dots u_{n+k}(z), \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{n+k}(z)}{f_n(z)} - 1 \right| &< a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + a_{n+1}a_{n+2} + \dots + \\ &\quad + a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k} = \frac{p_{n+k}}{p_n} - 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо при любом k ; переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство (15).

Вследствие неравенства (15) неравенство (14) примет вид

$$|f(z) - f_n(z)| < p_n(p/p_n - 1) = p - p_n < \varepsilon \quad \text{при } n \geq N(\varepsilon), \quad (16)$$

какова бы ни была точка z области G . Последнее неравенство доказывает равномерную сходимость в области G последовательности голоморфных функций $f_n(z)$ к функции $f(z)$, что и нужно.

§ 2. Приложения бесконечных произведений к теории целых функций

1. Формула Вейерштрасса. Одной из фундаментальных задач алгебры является вопрос о разложении целой рациональной функции на произведение линейных множителей. Рассматривая про-

извольную целую функцию, естественно поставить задачу об изображении этой функции в виде произведения множителей, благодаря которому становятся очевидными все нули этой функции. Частично этот вопрос рассматривал Коши, но только Вейерштрассу удалось распространить основную теорему алгебры на любые целые функции.

Пусть имеется бесконечная последовательность комплексных чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \quad (17)$$

расположенных в порядке возрастания их модулей и таких, что имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = 0. \quad (18)$$

Если некоторые из чисел (17) имеют одинаковый модуль, то мы эти числа располагаем в произвольном порядке. В силу самого определения понятия предела и условия (18) ясно, что при любом сколь угодно большом R имеется конечное число величин a_n , модули которых меньше чем R . Заметив это, мы докажем, что можно образовать целую функцию $G(z)$, имеющую своими нулями числа a_n и только эти числа.

Если некоторые из чисел a_n равны между собой, то нуль будет иметь кратность, равную числу этих равных между собой a_n . При доказательстве вышеуказанной теоремы мы будем сначала предполагать, что среди чисел a_n не имеется равных нулю.

Рассмотрим выражение

$$u_v = \left(1 - \frac{z}{a_v}\right) e^{\frac{z}{a_v} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_v}\right)^2 + \dots + \frac{1}{v-1} \left(\frac{z}{a_v}\right)^{v-1}}. \quad (19)$$

Предполагая, что $|z| < |a_v|$, мы можем положить:

$$\ln u_v = \ln \left(1 - \frac{z}{a_v}\right) + \frac{z}{a_v} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_v}\right)^2 + \dots + \frac{1}{v-1} \left(\frac{z}{a_v}\right)^{v-1},$$

считая $\ln \left(1 - \frac{z}{a_v}\right)$ однозначной голоморфной функцией внутри круга с центром в нулевой точке радиуса $|a_v|$ и равной нулю при $z = 0$. Следовательно, будем иметь:

$$\ln u_v = -\frac{1}{v} \left(\frac{z}{a_v}\right)^v - \frac{1}{v+1} \left(\frac{z}{a_v}\right)^{v+1} - \dots, \quad (20)$$

откуда находим:

$$u_v = e^{-\frac{1}{v} \left(\frac{z}{a_v}\right)^v - \frac{1}{v+1} \left(\frac{z}{a_v}\right)^{v+1} - \dots}. \quad (19')$$

Мы теперь покажем, что бесконечное произведение

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_v \cdot \dots \quad (21)$$

сходится во всякой точке z ($z \neq a_v$) плоскости комплексного переменного и изображает целую функцию $G(z)$ с нулями $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. С этой целью докажем, что произведение (21) изображает функцию, голоморфную внутри круга C , с центром в нулевой точке радиуса $|a_v|$, каково бы ни было v . Достаточно, очевидно, считать

$$|a_{v-1}| < |a_v|.$$

Оставляя вне рассмотрения конечное число множителей

$$u_1, u_2, \dots, u_{v-1},$$

имеющих нули внутри круга C_v , мы имеем:

$$u_v \cdot u_{v+1} \cdots = e^{-\sum_{n=v}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^n + \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{n+1} + \dots \right]}, \quad |z| < |a_v|. \quad (22)$$

Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что ряд

$$\sum_{n=v}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^n + \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{n+1} + \dots \right] \quad (23)$$

сходится при $|z| < |a_v|$ к голоморфной функции.

Каждый член ряда (23) есть функция, голоморфная внутри круга C_v . Его сумма по первой теореме Вейерштрасса (гл. V, § 1, п. 1) будет также голоморфной функцией внутри круга C_v , если ряд (23) сходится равномерно во всяком круге $|z| \leq (1 - \epsilon) |a_v|$, где ϵ ($\epsilon > 0$) — сколь угодно малое число.

Действительно, при $|z| \leq (1 - \epsilon) |a_v|$ имеем:

$$\left| \frac{1}{n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^n + \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{n+1} + \dots \right| \leq \frac{1}{n} \left| \frac{z}{a_n} \right|^n + \frac{1}{n+1} \left| \frac{z}{a_n+1} \right|^{n+1} + \dots < \frac{1}{n} (1 - \epsilon)^n + \frac{1}{n+1} (1 - \epsilon)^{n+1} + \dots < \frac{(1 - \epsilon)^n}{n\epsilon}.$$

Так как числовой ряд с общим членом $\frac{(1 - \epsilon)^n}{n\epsilon}$ сходится, то ряд (23) сходится равномерно при $|z| \leq (1 - \epsilon) |a_v|$.

Таким образом, мы убедились, что ряд (23) изображает функцию, голоморфную внутри круга C_v . Следовательно, произведение (21) изображает функцию, также голоморфную внутри этого круга; эта функция обращается в нуль при $z = a_1, a_2, \dots, a_{v-1}$ и не имеет других нулей внутри этого круга. Вспомнив, наконец, что целое число v можно взять сколь угодно большим, мы видим, что произведение (21) изображает функцию целую, имеющую нулями данные числа a_n и не имеющую других нулей.

Множители u_v называются *первоначальными факторами*; первоначальный фактор u_v содержит, кроме линейного множителя $\left(1 - \frac{z}{a_v}\right)$, показательный фактор. Благодаря присутствию этих

дополнительных показательных множителей произведение (21) оказывается сходящимся.

До сих пор мы предполагали, что среди данных чисел (17) нет равных нулю. В случае, когда $z = 0$ должно быть нулем порядка λ искомой целой функции, мы поставим перед построенным произведением (21) множитель z^λ . Получаемая формула

$$G(z) = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}} \quad (1)$$

носит название *формулы Вейерштрасса*.

При выводе этой формулы мы предполагали лишь, что заданная последовательность чисел (17) стремится к бесконечности при неограниченном возрастании номера n . В некоторых частных случаях оказывается возможным употреблять первоначальные факторы более простого вида.

Так, предположим, что ряд с общим членом $\left|\frac{1}{a_n}\right|^p$, где p — некоторое постоянное натуральное число, сходится. В этом случае можно взять за a_v выражение

$$a_v = \left(1 - \frac{z}{a_v}\right) e^{\frac{z}{a_v} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_v}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p-1} \left(\frac{z}{a_v}\right)^{p-1}}. \quad (19'')$$

В самом деле, согласно предыдущему анализу вопрос сводится к тому, чтобы доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=v}^{\infty} \left[\frac{1}{p} \left(\frac{z}{a_n}\right)^p + \frac{1}{p+1} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{p+1} + \dots \right] \quad (23')$$

при $|z| \leq (1 - \varepsilon) |a_v|$. Заметив неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{p} \left(\frac{z}{a_n}\right)^p + \frac{1}{p+1} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{p+1} + \dots \right| &< \\ &< \frac{1}{p} \frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^p}{1 - \left|\frac{z}{a_n}\right|} < \frac{1}{p} \frac{(1 - \varepsilon)^p |a_v|^p}{\varepsilon} \cdot \left|\frac{1}{a_n}\right|^p, \end{aligned}$$

мы убеждаемся в справедливости сказанного, ибо числовой ряд

$$\frac{1}{p\varepsilon} (1 - \varepsilon)^p |a_v|^p \sum_{n=v}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^p$$

по условию сходится.

2. Изображение целой функции в виде бесконечного произведения. В предыдущем пункте мы задавали а priori последовательность чисел (17), удовлетворяющую условию (18), и показали, что существует целая функция $G(z)$, изображаемая формулой (1)

Вейерштрасса, для которой данные числа служат нулями. Обратно, если мы имеем целую функцию $G_1(z)$ с бесконечным множеством нулей, то эти нули, как известно (гл. V, § 2, п. 6), не могут иметь никакой предельной точки, т. е. могут быть расположены в порядке возрастания их модулей в виде последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, стремящейся к бесконечности при неограниченном возрастании n . Построив по формуле Вейерштрасса (1) целую функцию $G(z)$, имеющую те же нули с той же степенью кратности, мы видим, что отношение

$$\varphi(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)} \quad (24)$$

будет изображать целую функцию $\varphi(z)$ [принимая $\varphi(a_n) = \lim_{z \rightarrow a_n} \varphi(z)$, не обращающуюся в нуль. В этих условиях выражение $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ будет также целой функцией. Следовательно, мы имеем: $\varphi(z) = e^{H(z)}$, где $H(z)$ означает некоторую целую функцию.

Наконец, из равенства (24) находим:

$$G_1(z) = e^{H(z)} \cdot G(z), \quad (24')$$

или

$$G_1(z) = e^{H(z)} \cdot z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}}. \quad (1')$$

Практически могут представляться значительные трудности при определении функции $H(z)$ по данной функции $G_1(z)$. Так, например, пусть $G_1(z) = \sin z$. Нули $\sin z$ будут: $z = n\pi$, где n — любое целое число. Следовательно, согласно формуле (1') мы можем написать:

$$\sin z = e^{H(z)} \cdot z \prod \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}},$$

где произведение распространяется на целые значения n , положительные и отрицательные. Здесь мы можем взять первоначальный фактор в упрощенном виде, потому что ряд

$$\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^p = \sum \left| \frac{1}{n\pi} \right|^p$$

сходится при $p = 2$.

Последнюю формулу для $\sin z$ мы можем, далее, упростить, группируя по два первоначальных фактора, соответствующих значениям n , равным и противоположным по знаку. Такая группировка вполне возможна, потому что нули $n\pi$, будучи расположены в порядке возрастания их модулей, следуют в такой последовательности:

$$\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots, n\pi, -n\pi, \dots$$

Таким, образом, получаем:

$$\sin z = e^{H(z)} \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Что касается определения целой функции $H(z)$, то оно может быть сделано следующим образом. Составим логарифмические производные от обеих частей последней формулы

$$(\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z = H'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

и сравним полученное соотношение с формулой (30') гл. VII, дающей представление функции $\operatorname{ctg} z$ в виде бесконечного ряда простейших дробей. Тогда мы получим $H'(z) \equiv 0$, откуда $H(z) \equiv \text{const.}$ После этого формула для $\sin z$ примет вид

$$\sin z = Cz \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Чтобы определить, наконец, постоянную C , образуем отношение

$$\frac{\sin z}{z} = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

и перейдем к пределу при $z \rightarrow 0$. Тогда найдем: $1 = C$. Следовательно, окончательная формула, представляющая $\sin z$ в виде бесконечного произведения, имеет вид

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

3. Изображение мероморфной функции в виде отношения двух целых функций. Одним из замечательных приложений формулы Вейерштрасса (1) является изображение мероморфной функции $f(z)$ с помощью целых функций.

Пусть $f(z)$ есть однозначная функция во всей плоскости, не имеющая на конечном расстоянии других особенностей, кроме полюсов. Мы можем образовать целую функцию $G(z)$, имеющую своими нулями полюсы мероморфной функции $f(z)$ с теми же степенями кратности.

Произведение $G_1(z) = f(z) \cdot G(z)$ будет изображать целую функцию $G_1(z)$, если для всякого полюса a функции $f(z)$ положим

$$G_1(a) = \lim_{z \rightarrow a} G_1(z).$$

Полученный ряд рациональных функций изображает мероморфную функцию $f(z)$ с простыми полюсами в точках a_n и соответствующими вычетами, равными $+1$.

§ 3. Обобщение теоремы единственности аналитических функций

1. Возможные обобщения теоремы единственности аналитических функций. При доказательстве теоремы единственности (гл. V, § 2, п. 4) мы предполагали, что множество E точек области G , в которых две функции $f(z)$ и $\varphi(z)$, голоморфные в G , имеют равные значения, допускает по крайней мере одну предельную точку, лежащую в u и t р и G . Естественно возникает вопрос: не будет ли верна эта основная теорема, если бесконечное множество E не имеет предельных точек внутри G ? Легко видеть, что в такой форме это предложение, вообще говоря, неверно. В самом деле, функция $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$ есть голоморфная внутри круга с центром в нулевой точке радиуса единица и равная нулю на бесконечном множестве точек $z_k = 1 - \frac{1}{k\pi}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), лежащих внутри этого круга. Однако $\sin \frac{1}{1-z}$ не есть тождественный нуль. Таким образом, если мы хотим распространить теорему единственности на тот случай, когда множество точек E не имеет предельной точки внутри области G , то мы должны ограничиться рассмотрением того или иного семейства голоморфных функций. Наиболее важные семейства функций, голоморфных в области G , суть:

- 1) семейство функций равномерно ограниченных по модулю в области G ;
- 2) более общее семейство функций, не принимающих нигде в области G значений, образующих линии;
- 3) семейство функций, из которых каждая дает взаимно однозначное отображение области G .

Однако всегда можно построить две функции, принадлежащие к семейству 1), имеющие равные значения на бесконечном множестве точек E области G . Следовательно, желая распространить теорему единственности, мы должны, ограничиваясь рассмотрением одного из вышеуказанных семейств функций, наложить в то же время ограничение на распределение точек множества E в области G . Так, в случае, когда G есть круг, таким ограничением может служить требование, чтобы расстояние точек множества E до окружности этого круга образовали p а с х о д я щ и й с я ряд.

Было доказано ¹⁾, что если две функции, голоморфные внутри круга $|z| < 1$ и принадлежащие одному из вышеупомянутых семейств, имеют равные значения на множестве точек $E(z_k)$, таких, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)$ их расстояний до окружности $|z| = 1$ расходится, то такие две функции тождественно равны между собой.

В п. 3 этого параграфа мы докажем справедливость этой теоремы для функций семейства 1). В вышеприведенном примере $\sin \frac{1}{1-z}$ выражение $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)$ обращается в $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k}$ и представляет расходящийся ряд, однако для этой функции

¹⁾ Blaschke W. — Leipz. Berichte, 1915, стр. 194; Priwalow I. — Math. Ann., 1924, стр. 149.

теорема единственности неверна, так как $\sin \frac{1}{1-z}$ не будет ограниченной функцией внутри круга $|z| < 1$ и вообще не принадлежит ни к одному из трех указанных семейств.

2. **Формула Якоби и Иенсена.** Для доказательства теоремы единственности, сформулированной в предыдущем пункте, нам придется воспользоваться одной замечательной формулой, принадлежащей Якоби и Иенсену. Вывод этой формулы будет основан на известном (гл. V, § 2, п. 5) свойстве голоморфных функций: значение голоморфной функции в центре круга равно среднему арифметическому ее граничных значений, т. е.

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) d\theta, \quad (25)$$

где $f(z)$ есть функция, голоморфная в круге $|z| \leq \rho$.
Полагая в формуле (25)

$$f(\rho e^{i\theta}) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta),$$

получим:

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) d\theta, \quad (25')$$

т. е. указанное свойство остается в силе для гармонических функций.

Пусть $F(z)$ есть функция, голоморфная в круге $|z| \leq \rho$, не равная нулю на окружности $|z| = \rho$. Обозначим нули этой функции ¹⁾, лежащие внутри круга $|z| < \rho$, через z_1, z_2, \dots, z_n и предположим, что $F(0) \neq 0$. При этих условиях имеет место формула Якоби—Иенсена

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(\rho e^{i\theta})| d\theta = \ln \left(|F(0)| \cdot \prod_{k=1}^n \left| \frac{\rho}{z_k} \right| \right). \quad (11)$$

Доказательство. Очевидно, функция

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)} \quad (26)$$

[причем $\Phi(z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \Phi(z)$] есть голоморфная в круге $|z| \leq \rho$ и нигде не равная нулю. Следовательно, функция $f(z) = \ln \Phi(z)$ будет голоморфной всюду в круге $|z| \leq \rho$. Применяя формулу (25') к действительной части функции $f(z)$, получим:

$$\ln |\Phi(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\Phi(\rho e^{i\theta})| d\theta. \quad (27)$$

Подставляя в формулу (27) вместо $\Phi(z)$ ее значение (26), будем иметь:

$$\ln \frac{|F(0)|}{|z_1| |z_2| \dots |z_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(\rho e^{i\theta})| d\theta - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\zeta - z_k| d\theta, \quad (27')$$

¹⁾ Кратный нуль выписывается столько раз, какова его кратность.

где положено $\bar{\zeta} = \rho e^{\theta i}$. Остается вычислить каждый из интегралов:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\zeta - z_k| d\theta \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

С этой целью обозначим через $z'_k = \rho^2/\bar{z}_k$ точку, симметричную с точкой z_k относительно окружности $|\zeta| = \rho$ (гл. I, § 2, п. 5). Когда точка ζ движется по окружности $|\zeta| = \rho$, отношение ее расстояний до точек z_k, z'_k сохраняет постоянную величину. В самом деле, имеем:

$$\frac{|\zeta - z_k|}{|\zeta - z'_k|} = \frac{|\zeta - z_k|}{\left| \zeta - \frac{\rho^2}{\bar{z}_k} \right|} = |z_k| \cdot \frac{|\zeta - z_k|}{|\zeta \bar{z}_k - \rho^2|} = |z_k| \cdot \frac{|\zeta - z_k|}{|\zeta \bar{z}_k - \zeta \bar{\zeta}|},$$

так как $\zeta \bar{\zeta} = \rho^2$. Отсюда выводим:

$$\frac{|\zeta - z_k|}{|\zeta - z'_k|} = \frac{|z_k|}{\zeta} \frac{|\zeta - z_k|}{|z_k - \zeta|} = \frac{|z_k|}{\rho}, \quad (28)$$

что и доказывает наше утверждение.

Прологарифмировав равенство (28), получим:

$$\ln |\zeta - z_k| = \ln |\zeta - z'_k| + \ln \frac{|z_k|}{\rho}. \quad (28')$$

Вследствие соотношения (28') можем написать:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\zeta - z_k| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\zeta - z'_k| d\theta + \ln \frac{|z_k|}{\rho}. \quad (29)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (29), немедленно вычисляется, если заметим, что функция $\ln (\zeta - z'_k)$ есть голоморфная в круге $|\zeta| < \rho$, так как точка z'_k лежит вне этого круга. Применяя формулу (25'), находим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\zeta - z'_k| d\theta = \ln |\theta - z'_k| = \ln \frac{\rho^2}{|z_k|}$$

и из равенства (29) получим значение искомого интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\zeta - z_k| d\theta = \ln \frac{\rho^2}{|z_k|} + \ln \frac{|z_k|}{\rho} = \ln \rho.$$

Возвращаясь к соотношению (27'), перепишем его таким образом:

$$\ln \frac{|F(0)|}{|z_1| |z_2| \dots |z_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(\rho e^{\theta i})| d\theta - n \ln \rho,$$

откуда окончательно получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(\rho e^{\theta i})| d\theta = \ln \left(|F(0)| \prod_{k=1}^n \frac{\rho}{|z_k|} \right).$$

3. **Доказательство теоремы единственности.** Пусть две функции $f(z)$ и $\varphi(z)$, голоморфные внутри круга $|z| < 1$, будут равномерно ограниченными в этом круге: $|f(z)| < M$, $|\varphi(z)| < M$, если $|z| < 1$.

Рассмотрим множество точек $E \{z_k\}$, $|z_k| < 1$, таких, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) \quad (30)$$

их расстояний до окружности $|z| = 1$ расходится. Предположим, что во всех точках множества E функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют равные значения. Тогда мы докажем, что функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ равны тождественно друг другу.

Полагая $F(z) = f(z) - \varphi(z)$, мы получаем функцию $F(z)$, голоморфную внутри круга $|z| < 1$, равномерно ограниченную в этом круге: $|F(z)| < 2M$, если $|z| < 1$, равную нулю на множестве точек E . Наша теорема будет доказана, если мы обнаружим, что функция $F(z)$ есть тождественный нуль.

Допуская противное, мы предположим, что функция $F(z)$ не есть тождественный нуль. Как известно (гл. V, § 2, п. 6), множество ее нулей, лежащих внутри круга $|z| < 1$, можно перенумеровать с помощью натуральных чисел, расположив их в порядке возрастания модулей. Мы можем считать, что последовательность точек $E \{z_k\}$ представляет совокупность всех нулей функции $F(z)$, так как от прибавления ко множеству E новых элементов ряд (30) остается расходящимся.

Итак, $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$ суть всевозможные нули функции $F(z)$, расположенные в порядке возрастания их модулей, причем каждый кратный нуль записывается в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Не уменьшая общности теоремы, можно предполагать $F(0) \neq 0$, так как в противном случае достаточно рассматривать $\Phi(z) = \frac{F(z)}{z^\lambda}$, где λ — кратность корня 0. [Для $|z| < 1$ имеем: $|\Phi(z)| \leq 2M$, $\Phi(z) = 0$ при $z = z_1, z_2, \dots$ и $\Phi(0) \neq 0$].

Рассмотрим окружность $|z| = \rho$ произвольного радиуса $\rho < 1$, не проходящую ни через одну из точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, и обозначим через n число точек z_k , лежащих внутри этой окружности. По формуле Якоби—Иенсена (п. 2) имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(\rho e^{i\theta})| d\theta = \ln \left(|F(0)| \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\rho}{|z_k|} \right) \quad (0 < \rho < 1). \quad (II)$$

Так как по условию $|F(z)| < 2M$ при $|z| < 1$, то из формулы (II) вытекает неравенство

$$|F(0)| \prod_{k=1}^n \frac{\rho}{|z_k|} < 2M,$$

или, что то же,

$$|F(0)| \frac{\rho^n}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|} < 2M. \quad (31)$$

Неравенство (31) справедливо при любом $\rho < 1$ и соответствующем n . Покажем, что это неравенство останется в силе, если n будем считать постоянным, а ρ — сколь угодно близким к единице, т. е. обнаружим справедливость неравенства

$$|F(0)| \cdot \frac{\rho'^n}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|} < 2M, \quad (31')$$

где $1 > \rho' \geq \rho$.

Действительно, обозначая через n' число нулей z_k , лежащих внутри окружности $|z| = \rho'$, перепишем (31) так:

$$|F(0)| \cdot \frac{\rho'^n}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_{n'}|} < 2M. \quad (32)$$

Из неравенства 32) вытекает искомое неравенство (31'):

$$\begin{aligned} |F(0)| \frac{\rho'^n}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|} &= \\ &= |F(0)| \frac{\rho'^{n'}}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_{n'}|} \cdot \frac{|z_{n+1}| \cdot |z_{n+2}| \cdot \dots \cdot |z_{n'}|}{\rho'^{n-n}} < 2M, \end{aligned}$$

так как имеем:

$$\frac{|z_{n+1}| \cdot |z_{n+2}| \cdot \dots \cdot |z_{n'}|}{\rho'^{n-n}} = \prod_{k=1}^{n'-n} \left| \frac{z_{n+k}}{\rho'} \right| < 1.$$

Считая n постоянным, перейдем в неравенстве (31') к пределу при ρ , стремящемся к единице. Получим в результате:

$$\frac{|F(0)|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|} \leq 2M,$$

или

$$|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| \geq \frac{|F(0)|}{2M}. \quad (32')$$

Последнее неравенство справедливо при всяком n . Следовательно, будем иметь:

$$\prod_{k=1}^{\infty} |z_k| \geq \frac{|F(0)|}{2M} > 0,$$

т. е. мы доказали, что бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} |z_k|$ сходится (так как положительные числа $p_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$ убывают, оставаясь больше положительного постоянного) (§ 1, п. 1).

Заметив, что $|z_k| = 1 - (1 - |z_k|)$, мы в силу § 1, п. 2 заключаем о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)$. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости теоремы.

4. Невозможность дальнейшего обобщения теоремы единственности для ограниченных функций. В предыдущем пункте мы доказали теорему единственности для ограниченных функций, налагая на множество точек $E \{z_k\}$ условие:

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)$ расходится. Возникает вопрос: не будет ли верна эта теорема

для ограниченных функций в тех или иных случаях сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)$? На этот вопрос мы ответим отрицательно, показав, что какова бы ни была последовательность точек z_1, z_2, \dots ($0 < |z_k| < 1$), для которой ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)$ сходится, существует функция $f(z)$, не тождественно равная нулю, голоморфная и равномерно ограниченная внутри круга $|z| < 1$, равная нулю в каждой точке данной последовательности.

Такая функция может быть определена с помощью формулы

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z_k - z}{1 - z\bar{z}_k} \bar{z}_k \right). \quad (33)$$

Действительно, предполагая числа z_1, z_2, \dots расположенными в порядке возрастания их модулей, мы покажем сначала, что функция $f(z)$ есть голоморфная при $|z| < |z_k|$, равная нулю внутри круга $|z| < |z_k|$ лишь в точках z_1, z_2, \dots, z_{k-1} при любом k (мы вправо, очевидно, предположить $|z_{k-1}| < |z_k|$).

С этой целью рассмотрим произведение

$$\prod_{n=k}^{\infty} \left(\frac{z_n - z}{1 - z\bar{z}_n} \bar{z}_n \right), \quad (34)$$

все множители которого отличны от нуля всюду внутри круга $|z| < |z_k|$. Отметим неравенство

$$\left| 1 - \frac{z_n - z}{1 - z\bar{z}_n} \bar{z}_n \right| = \frac{1 - |z_n|^2}{|1 - z\bar{z}_n|} < \frac{2(1 - |z_n|)}{1 - |z_k|},$$

мы в силу сходимости числового ряда $\frac{2}{1 - |z_k|} \sum_{n=k}^{\infty} (1 - |z_n|)$ заключаем на ос-

новании § 1, п. 3, что произведение (34) сходится к функции, голоморфной и отличной от нуля при $|z| < |z_k|$. Следовательно, произведение (33) будет изображать функцию $f(z)$, голоморфную и равную нулю в точках z_1, z_2, \dots, z_{k-1} внутри круга $|z| < |z_k|$. Так как $|z_k| \rightarrow 1$ при неограниченном возрастании k , то $f(z)$ будет функцией, голоморфной внутри круга $|z| < 1$ и равной нулю лишь в точках z_1, z_2, \dots

Остается доказать, что $f(z)$ есть функция, ограниченная при $|z| < 1$. Для этого оценим модуль произвольного множителя произведения (33) при $|z| = 1$:

$$\left| \frac{z_k - z}{1 - z\bar{z}_k} \bar{z}_k \right| = \left| \frac{z_k - z}{z\bar{z} - z\bar{z}_k} \bar{z}_k \right| = \left| \frac{z - z_k}{\bar{z} - \bar{z}_k} \right| \cdot \frac{|\bar{z}_k|}{|z|} = |z_k| < 1.$$

Это неравенство остается в силе и при $|z| < 1$ (гл. V, § 2, п. 5), так как функция $\frac{z_k - z}{1 - z\bar{z}_k} \bar{z}_k$ есть голоморфная при $|z| \leq 1$. Следовательно, имеем: $|f(z)| < 1$, если $|z| < 1$.

Упражнения к главе IX

1. Доказать сходимость и определить значения произведений:

$$а) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right), \quad б) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

Отв. а) 2. б) $1/3$.

2. Разложить в бесконечные произведения функции

$$e^z - 1, \quad \cos z, \quad \sin z - \sin z_0.$$

Отв. $e^{z/2} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \right); \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4z^2}{\pi^2 (2n-1)^2} \right];$

$$(z - z_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{(z + z_0)^2}{\pi^2 (2n-1)^2} \right] \cdot \left[1 - \frac{(z - z_0)^2}{\pi^2 (2n)^2} \right].$$

У к а з а н и е. Воспользоваться известным разложением для $\sin z$:

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

3. Доказать, что имеет место формула

$$\frac{\sin iz}{e^{2z} - 1} = e^{h(z)},$$

где $h(z)$ — целая функция. Как нужно выбрать $h(z)$?

Отв. $h(z) = -z - \ln 2 + \frac{\pi}{2} i.$

4. Определить область абсолютной сходимости следующих произведений:

а) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)$, б) $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2n})$, в) $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + c_n z)$, если $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ сходится.

Отв. а) и б) $|z| < 1$; в) вся плоскость.

5. Функции $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) — аналитические в круге $|z| < r$, и ряд $\sum |f_n(z)|$ равномерно сходится в каждом круге $|z| \leq \rho < r$. Доказать, что

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)] \text{ есть голоморфная функция при } |z| < r.$$

6. Показать, что $\frac{1}{1-z} = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8) \dots$ при $|z| < 1$.

7. Пользуясь задачей 6, показать, что

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^9) \dots} = (1+z)(1+z^2)(1+z^3) \dots \text{ при } |z| < 1.$$

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

§ 1. Принцип аналитического продолжения

1. Понятие аналитического продолжения. Одним из основных свойств аналитических функций является свойство их единственности, рассмотренное в гл. V. Если две аналитические функции совпадают между собой в сколь угодно малой окрестности точки или даже на сколь угодно малом куске линии, то они вполне тождественны друг другу (гл. V, § 2, п. 4). Другими словами, функция, аналитическая в области, вполне определяется в этой области посредством ее значений на сколь угодно малом куске линии (или даже на бесконечном множестве точек области, имеющем по крайней мере одну предельную точку внутри области). Постараемся теперь более подробно проанализировать это основное свойство аналитических функций вместе с вытекающими из него следствиями.

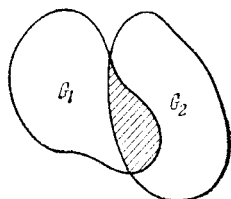


Рис. 95.

Пусть нам даны две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, из которых первая голоморфна в области G_1 , а вторая — в области G_2 (рис. 95).

Допустим, кроме того, что области G_1 и G_2 имеют в качестве общей части некоторую область g , и пусть в области g функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают. Очевидно, в этом случае функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ взаимно определяют вполне однозначным способом. В самом деле, вследствие теоремы единственности не существует никакой другой функции, кроме $f_2(z)$, которая была бы голоморфной в области G_2 и имела бы те же значения в области g . Таким образом, функция $f_2(z)$ вполне определяется через свои значения в области g , или, что то же, через функцию $f_1(z)$; также и функция $f_1(z)$ вполне определяется посредством $f_2(z)$.

Следовательно, мы можем сказать: если две области G_1 и G_2 имеют вышеуказанное положение и функция $f_1(z)$ есть голоморфная в G_1 , то либо не существует никакой функции, голоморфной в G_2 и совпадающей с $f_1(z)$ в области g , либо существует только одна такая функция.

В этом последнем случае мы скажем, что заданная в области G_1 функция аналитически продолжается в область G_2 . Функция $f_2(z)$ называется *аналитическим продолжением* функции $f_1(z)$ в область G_2 . Очевидно, также $f_1(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_2(z)$ в область G_1 . Вообще говоря, нет никаких оснований рассматривать функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ как различные функции. Вследствие полной однозначной определенности одной через другую естественно рассматривать обе функции как элементы одной и той же функции $F(z)$, которая будет голоморфной во всей области G , составленной из областей G_1 и G_2 : $G = G_1 + G_2$.

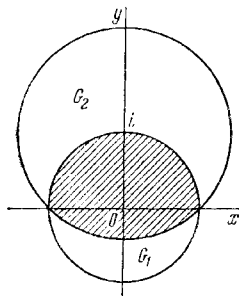


Рис. 96.

Поясним сказанное на примере. Примем за G_1 круг с центром в нулевой точке радиуса единица: $|z| < 1$, а за G_2 — круг с центром в точке i радиуса $\sqrt{2}$: $|z - i| < \sqrt{2}$ (рис. 96). Пусть в области G_1 дана функция

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad (1)$$

Нужно построить функцию $f_2(z)$, голоморфную в области G , которая совпадала бы с $f_1(z)$ во всех точках области g . Мы знаем, что если такая функция существует, то она единственная. Этой функцией будет:

$$f_2(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n, \quad (2)$$

так как последний ряд сходится при $\left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1$, или, что то же, при $|z-i| < \sqrt{2}$, и его сумма равна $\frac{1}{1-z}$.

Следовательно, имеем: $f_2(z) = f_1(z)$ во всех точках области g . Таким образом, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ суть аналитические продолжения друг друга, обе они суть элементы одной и той же функции $F(z) = \frac{1}{1-z}$, голоморфной в полной области $G = G_1 + G_2$.

2. Понятие полной аналитической функции в смысле Вейерштрасса. Пусть дана функция $f_1(z)$, голоморфная в области G_1 . Обозначая через z_1 произвольную точку области G_1 , разложим данную функцию $f_1(z)$ в окрестности этой точки в степенной ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} (z - z_1)^n. \quad (3)$$

В частности, может случиться, что радиус сходимости R_1 этого ряда равен бесконечности, т. е. ряд (3) сходится в каждой

точке z плоскости комплексного переменного. В этом случае сумма ряда (3) представляет функцию, голоморфную во всей плоскости, служащую аналитическим продолжением данной функции $f_1(z)$ за область G_1 . Вследствие единственности продолжения невозможно получить никакой другой функции посредством продолжения $f_1(z)$.

Поясним сказанное примером. Пусть

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} - \frac{2}{3!} z^3 - \dots - \frac{n-1}{n!} z^n - \dots$$

Этот ряд сходится во всей плоскости. Положим, далее:

$$h(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

Этот ряд имеет радиус сходимости $R = 1$. Определим функцию $f_1(z)$ в круге G_1 с центром в нулевой точке радиуса единица: $|z| < 1$, положив:

$$f_1(z) = g(z) \cdot h(z). \quad (4)$$

Посредством формулы (4) функция $f_1(z)$ определена лишь при $|z| < 1$. Если же мы разложим функцию $f_1(z)$ в окрестности нулевой точки ($z_1 = 0$) в степенной ряд, то получим посредством перемножения рядов $g(z)$ и $h(z)$:

$$f_1(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (5)$$

так как, очевидно, имеем:

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Таким образом, мы получили для данной функции разложение (5), справедливое во всей плоскости комплексного переменного.

Если радиус сходимости разложения (3) не равен бесконечности, то он есть конечное положительное число. Выберем точку z_2 внутри круга сходимости ряда (3), отличную от центра, и составим разложение для окрестности точки z_2 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} (z - z_2)^n, \quad (6)$$

где положено:

$$C_{(n)}^{(2)} = \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(z_2).$$

Радиус сходимости R_2 этого разложения по крайней мере равен расстоянию точки z_2 до окружности первоначального круга, т. е. $R_2 \geq R_1 - |z_2 - z_1|$. Если $R_2 = R_1 - |z_2 - z_1|$, то ряд (6) дает значения функции только в тех точках, в которых она уже определена посредством ряда (3) (рис. 97). В этом случае точка касания окружностей кругов сходимости рядов (3) и (6) будет осо-

бой точкой функции, определенной через $f_1(z)$. Если же $R_2 > > R_1 - |z_2 - z_1|$, то новый круг сходимости выходит за первоначальный, и мы имеем тогда функцию $f_1(z)$ продолженной за старый круг сходимости в направлении радиуса (z_1, z_2) (рис. 98). Итак, если вообще возможно продолжение в определенном направлении, то оно будет осуществлено с помощью этого степенного ряда.

Вообразим себе теперь, что мы продолжили первый элемент (3) функции по всем возможным направлениям; также пусть новые

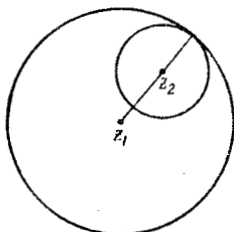


Рис. 97.

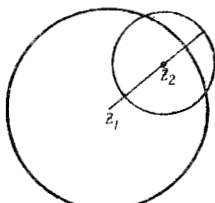


Рис. 98.

элементы в свою очередь продолжены по всем возможным направлениям и т. д. Таким путем мы получаем, отправляясь от первого элемента (3), функцию, голоморфную, вообще говоря, во все более и более увеличивающейся области. Однако может случиться, что продолжение первого степенного ряда (3) невозможно ни по какому направлению. В этом случае, следовательно, не существует никакой функции, которая была бы голоморфной в области, большей, чем первый круг сходимости. Мы скажем тогда, что функция непродолжаема и окружность круга сходимости есть ее естественная граница.

Пример.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z + z^2 + z^6 + \dots + z^{n!} + \dots \quad (7)$$

Радиус сходимости R ряда (7) равен единице. Если бы функция $f(z)$ была продолжаема за круг сходимости данного ряда (7), то некоторая дуга его окружности состояла бы сплошь из правильных точек функции $f(z)$. На такой дуге имеются в бесконечном множестве точки вида $z_0 = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$, где p и q — целые положительные числа. Если мы покажем, что точка вида z_0 не может быть правильной точкой функции $f(z)$, то тем самым будет доказана невозможность продолжения функции $f(z)$.

Положим: $z = \rho z_0$, где $0 < \rho < 1$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!}, \quad (7')$$

так как при $n \geq q$ имеем: $z^{n!} = (\rho z_0)^{n!} = \rho^{n!}$.

Таким образом, полагая $M = 2q + N$, где N — произвольно большое целое положительное число, имеем:

$$|f(z)| > \sum_{n=q}^M \rho^{n1} - \sum_{n=1}^{q-1} |z|^{n1} > (M - q + 1) \rho^{M1} - (q - 1). \quad (8)$$

Когда ρ стремится к единице, то правая часть неравенства (8) стремится к значению $M - 2q + 2 = N + 2$. Следовательно, при надлежащем подборе ρ_0 для всех значений ρ ($\rho_0 < \rho < 1$) необходимо должно иметь: $|f(z)| > N$. Вспомнив, что N обозначает произвольное большое число, заключаем: при радиальном приближении к точке z_0 модуль функции $f(z)$ стремится к бесконечности. Отсюда следует, что точка z_0 не может быть правильной точкой функции $f(z)$.

Другой крайний случай, когда степенной ряд продолжаем по всем направлениям за круг сходимости, не может иметь места. Действительно, мы знаем, что на окружности круга сходимости имеется по крайней мере одна особая точка (гл. V, § 2, п. 2), которая никогда не может попасть внутрь нового круга сходимости, что, однако, должно было бы случиться,

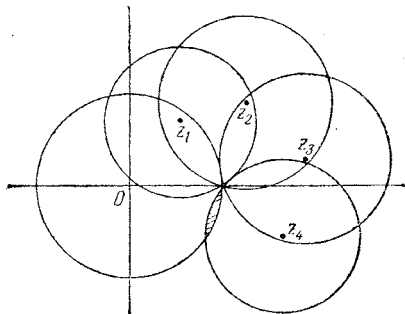


Рис. 99.

если бы степенной ряд допускал продолжение по всем направлениям.

Используя указанный метод продолжения, выделим множество M точек плоскости, из которых каждая может быть заключена внутрь некоторого круга сходимости; в достаточно малой окрестности каждой такой точки функция, следовательно, будет голоморфной.

Может случиться, что при продолжении мы попадем снова в первый круг с помощью нового круга. Так, например, на рис. 99 первоначальный круг сходимости есть круг с центром в нулевой точке радиуса единица, причем на его окружности имеется единственная особая точка $z = +1$. При последовательном продолжении этого начального элемента пятый круг имеет с первоначальным общую часть; значения нового степенного ряда в точках первоначального круга сходимости, принадлежащих указанной общей части, могут совпадать со значениями первоначального степенного ряда, а могут и не совпадать. В первом случае функция будет однозначной в области, через которую она была продолжена, во втором — многозначной.

Предполагая для простоты функцию все время однозначной, мы можем сказать, что множество W всех правильных точек такой функции обладает двумя свойствами:

1) какова бы ни была точка множества W , все точки достаточно малого круга с центром в этой точке принадлежат тому же мно-

жеству, т. е. говоря кратко, каждая точка множества W есть *внутренняя* точка;

2) любые две точки множества W можно соединить непрерывной линией, все точки которой принадлежат тому же множеству, т. е., короче, W есть *связное* множество.

Это множество W всех правильных точек функции называют ее *областью существования*. Очевидно, каждой правильной точке соответствует определенное значение функции.

По определению мы понимаем под *полной аналитической функцией* в смысле Вейерштрасса совокупность значений функции, которые соответствуют указанным образом всем правильным точкам.

3. **Распространение функции действительного переменного на комплексную область по принципу аналитического продолжения.** Изложенный в п. 1 принцип аналитического продолжения был основан на том факте, что аналитическая функция единственным образом определяется через ее значения в сколь угодно малой частичной области. Однако известно, что для полного однозначного определения аналитической функции достаточно знать ее значения на сколь угодно малом куске линии. Пусть имеется в плоскости комплексного переменного z кусок линии L и каждой его точке z соответствуют значения функции $\varphi(z)$. Рассматривая произвольную область G , содержащую L , мы в состоянии встретиться лишь с двумя возможностями: либо не существует никакой функции $f(z)$, голоморфной в области G , которая совпадала бы с $\varphi(z)$ на L , либо существует только одна такая функция. В последнем случае эта функция однозначно определяется через свои значения на L . Мы можем сказать тогда, что функция $\varphi(z)$, заданная вдоль L , аналитически продолжается в область G . В частности, принимая за L кусок действительной оси $x_0 \leq x \leq x_1$ и обозначая через $\varphi(x)$ соответствующие его точкам значения функции (которые могут быть действительными или мнимыми), мы можем говорить об аналитическом продолжении функции действительного переменного x . Если такое продолжение удастся, то говорят, что функция $\varphi(x)$ продолжена в комплексную область. Из предыдущего следует, что если функция действительного переменного x вообще продолжаема в комплексную область, то это возможно только единственным образом.

§ 2. Примеры

1. **Примеры однозначных функций.** Показательная функция e^x и тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ при действительном x разлагаются в ряды

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Заменяя в этих рядах формально x через комплексное переменное z , мы получим степенные ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

сходящиеся во всей плоскости (гл. II, § 3, п. 5). Эти ряды изображают функции, голоморфные во всякой точке z -плоскости. Так как функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ и $f_3(z)$ при $z = x$ совпадают соответственно с e^x , $\sin x$ и $\cos x$, то они являются аналитическими продолжениями последних функций в комплексную область. Поэтому $f_1(z)$ называется показательной функцией и обозначается через e^z , $f_2(z)$ и $f_3(z)$ обозначаются через $\sin z$, $\cos z$. Таким образом, чисто формальное определение функций e^z , $\sin z$, $\cos z$ становится совершенно естественным: оно будет единственно возможным, если мы потребуем дифференцируемость их в плоскости комплексного переменного.

2. Примеры многозначных функций. Изложенный в § 1, п. 2 метод аналитического продолжения Вейерштрасса, основанный на пользовании степенными рядами, является общим, и в этом его громадное теоретическое значение. Однако в большинстве конкретных случаев к той же цели мы можем прийти гораздо проще с помощью других аналитических аппаратов.

Так, в гл. IV, § 2, п. 6 мы определили $\ln z$ с помощью интеграла, положив: $\ln z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$, и видели, что эта функция является голоморфной во всякой ограниченной односвязной области, не содержащей нулевой точки. Так как при положительном x натуральный логарифм может быть определен формулой $\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$, то мы видим, что $\ln z$ есть аналитическое продолжение $\ln x$ в комплексную область. Как мы знаем, функция $\ln z$ бесконечнозначная, причем все ее значения получаются из одного путем прибавления к нему числа, кратного $2\pi i$. Каждое из этих значений образует однозначную голоморфную функцию во всякой ограниченной односвязной области, не содержащей нулевой точки, называемую ветвью многозначной функции. Так, например, в окрестности точки $z = +1$ одна из этих ветвей разлагается в степенной ряд

$$\ln z = (z - 1) - \frac{1}{2}(z - 1)^2 + \frac{1}{3}(z - 1)^3 - \dots$$

с радиусом сходимости, равным единице. Можно было бы, отправляясь от этого степенного ряда как элемента, определяющего функцию, получить все свойства логарифмической функции,

применяя общий метод § 1, п. 2; однако такой путь практически был бы более сложным.

В качестве второго примера рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt[n]{z}$. Эта функция является продолжением в комплексную область положительной действительной функции действительного переменного x ($x > 0$): $\sqrt[n]{x}$. В самом деле, $f(z) = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z}$ есть функция, голоморфная в каждой точке z , отличной от нулевой точки, многозначная в окрестности $z = 0$. Выбирая произвольную односвязную область G , не содержащую нулевой точки, например всю плоскость, за исключением действительной отрицательной оси ($x \leq 0$), мы знаем, что каждая ветвь $\operatorname{Ln} z$ будет в этой области однозначной функцией. В частности, взяв ту ветвь $\operatorname{Ln} z$, — обозначим ее через $\operatorname{Ln} z$, — которая при $z = +1$ имеет значение нуль, а следовательно, для всех x ($x > 0$) равна действительному значению $\operatorname{Ln} x$, мы получаем функцию, голоморфную в области G :

$$f_0(z) = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z},$$

которая является аналитическим продолжением функции $\sqrt[n]{x}$, так как имеем: $f_0(x) = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} x} = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Поэтому функцию $f(x)$ мы обозначим через $\sqrt[n]{z}$, причем $f_0(z)$ будет одной из ее ветвей. Согласно этому определению функция $\sqrt[n]{z}$ является n -значной. В самом деле, все значения $\operatorname{Ln} z$ содержатся в формуле

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

так что имеем:

$$f(z) = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} f_0(z). \quad (9)$$

Множитель, стоящий перед $f_0(z)$ в формуле (9), имеет только n различных значений, так как для двух значений k , отличающихся на кратное n , он имеет одно и то же значение. Поэтому n ветвей функции $\sqrt[n]{z}$ получаются из основной ветви $f_0(z)$ путем умножения на постоянные множители. Чтобы получить все n ветвей функции $f(z) = \sqrt[n]{z}$, достаточно дать k значения: $0, 1, 2, \dots, n-1$. Таким образом, из формулы (9) находим:

$$f_k(z) = e^{\frac{2k\pi i}{n}} f_0(z) = e^{\frac{2k\pi i}{n}} e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Итак, мы видим, что положительная действительная функция $\sqrt[n]{x}$ ($x > 0$) продолжается в комплексную область, причем получаемая функция $\sqrt[n]{z}$ является n -значной.

Во всякой ограниченной односвязной области, не содержащей нулевой точки, каждая ветвь $\sqrt[n]{z}$ является голоморфной функцией. Наконец, в силу определения $\sqrt[n]{z}$, очевидно, имеем:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z.$$

З а м е ч а н и е. Можно определить функцию z^m при любом постоянном m , полагая: $z^m = e^{m \operatorname{Ln} z}$. Читателю рекомендуется, поступая аналогично предыдущему, исследовать свойства этой функции.

Упражнения к главе X

1. Продолжить аналитически в комплексную область функции действительного переменного: $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcsin} x$.

2. Показать, что степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^{n+2}}}{(2^n + 2)(2^{n+1})}$$

не продолжаемы за круг сходимости.

3. Будет ли действительная функция $F(x) = \sqrt{x^2}$, определенная в области $-\infty < x < +\infty$, продолжаема в комплексную плоскость?

Отв. Нет.

4. Будет ли действительная функция $f(x)$, определенная при $-1 < x < 1$ посредством равенств

$$f(x) = e^{-1/x^2} \quad \text{для } x \neq 0$$

и

$$f(x) = 0 \quad \text{для } x = 0,$$

продолжаема в комплексную плоскость?

Отв. Нет.

5. Пусть функция $f(z)$ есть аналитическая в нулевой точке и удовлетворяет в окрестности этой точки уравнению

$$f(2z) = 2f(z) \cdot f'(z).$$

Показать, что $f(z)$ продолжаема на всю плоскость.

6. Какие из функций, определенных формулами а) $\sqrt{e^z}$; б) $\sqrt{\cos z}$; в) $\sqrt{1 - \sin^2 z}$; г) $\ln e^z$; д) $\ln \sin z$; е) $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, будут однозначными и какие многозначными?

Отв. а) Две однозначные функции $e^{z/2}$ и $-e^{z/2}$.

б) Двухзначная функция с точками разветвления $z = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$.

в) Две однозначные функции $+\cos z$ и $-\cos z$.

г) Бесконечное множество однозначных функций $z + 2k\pi i$.

д) Одна бесконечнозначная функция с точками разветвления $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

е) Однозначная функция.

7. Доказать, что если $f(z)$ непрерывна в области G и дифференцируема в каждой точке области G , кроме точек прямолинейного отрезка, принадлежащего G , то $f(z)$ — аналитическая во всей области G .

8. Две области G_1 и G_2 примыкают друг к другу вдоль прямолинейного отрезка. Функция $f_1(z)$ — аналитическая в области G_1 , $f_2(z)$ — в G_2 . Показать, что если f_1 и f_2 на отрезке принимают одни и те же граничные значения, то они являются аналитическими продолжениями друг друга.

ГЛАВА XI

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Общие свойства эллиптических функций

1. **Определение эллиптической функции.** Эллиптической функцией называется мероморфная функция, допускающая периоды, которые все могут быть образованы посредством сложения и вычитания из двух первоначальных периодов 2ω и $2\omega'$, имеющих мнимое отношение

$$\tau = \omega' : \omega.$$

Короче говоря, мероморфная функция называется эллиптической, если она двоякопериодическая с периодами 2ω и $2\omega'$, отношение которых τ есть мнимое число. Такая функция $f(z)$ удовлетворяет соотношениям

$$f(z + 2\omega) = f(z), \quad f(z + 2\omega') = f(z), \quad (1)$$

откуда вытекает, что

$$f(z + 2m\omega + 2n\omega') = f(z), \quad (2)$$

где m и n обозначают любые целые числа, положительные, отрицательные или нули.

Одна из наших задач будет заключаться в том, чтобы построить посредством того или иного аналитического аппарата элементы, с помощью которых можно выразить в конечном виде все эллиптические функции. Иными словами, мы ставим проблему дать аналитическое представление любой эллиптической функции, отправляясь от вышеформулированного ее дескриптивного определения. Для рациональных функций мы имеем два аналитических представления. В основе первого из них лежит задание полюсов рациональной функции и соответствующих им главных частей, что приводит нас к разложению рациональной функции на простейшие дроби. В основе второго аналитического представления рациональной функции лежит задание ее нулей и полюсов, что дает нам возможность представить ее в виде отношения произведений линейных множителей.

Аналогично при решении вышеупомянутой задачи для эллиптической функции мы установим две формулы, из которых одна

будет давать ее разложение на сумму простейших элементов с явным выделением ее полюсов и их главных частей, а другая будет представлять эллиптическую функцию посредством отношения произведений элементарных множителей с явным выделением ее нулей и полюсов. Прежде чем приступить к осуществлению этой задачи, мы установим ряд общих свойств эллиптической функции.

З а м е ч а н и е. При определении эллиптической функции мы предполагаем отношение $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ ее первоначальных периодов мнимым числом.

Можно было бы доказать, что если это отношение есть число действительное, то функция является просто периодической или приводится к постоянному. Кроме того, во всем дальнейшем мы будем считать коэффициент при мнимой части отношения $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ положительным, так как этого мы всегда можем достигнуть путем изменения знака у одного из первоначальных периодов.

2. Параллелограммы периодов. Чтобы дать геометрическое истолкование двойкой периодичности, рассмотрим в плоскости комплексного переменного четыре точки:

$$z_0, z_0 + 2\omega, z_0 + 2\omega + 2\omega', z_0 + 2\omega',$$

считая z_0 произвольным комплексным числом.

Так как отношение $\tau = \omega'/\omega$ есть мнимое число, то эти четыре точки изображают вершины некоторого параллелограмма P .

Полагая

$$z'_0 = z_0 + 2m\omega + 2n\omega'$$

(m и n — целые числа), мы видим, что четыре точки

$$z'_0, z'_0 + 2\omega, z'_0 + 2\omega + 2\omega', z'_0 + 2\omega'$$

суть вершины параллелограмма P_{mn} , который может быть получен из *основного* параллелограмма $P = P_{00}$ посредством некоторого сдвига.

Придавая m и n всевозможные целые значения, мы получим сеть параллелограммов P_{mn} , конгруэнтных между собой и покрывающих всю плоскость (рис. 100).

Чтобы любые два параллелограмма нашей сети не имели общих точек, условимся причислять к каждому параллелограмму P_{mn} лишь часть его границы, а именно стороны

$$\overline{z'_0, z'_0 + 2\omega}, \quad \overline{z'_0, z'_0 + 2\omega'},$$

за исключением концов

$$z'_0 + 2\omega \text{ и } z'_0 + 2\omega'.$$

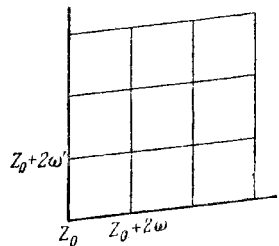


Рис. 100.

Что же касается двух сторон параллелограмма P_{mn} , мы их будем рассматривать принадлежащими к смежным параллелограммам с P_{mn} . Тогда любая точка плоскости принадлежит одному и только одному из этих параллелограммов, например $P_{m'n'}$.

Точки вида

$$z + 2\mu\omega + 2\nu\omega',$$

где μ и ν — любые целые числа, называются конгруэнтными или эквивалентными с точкой z ; в параллелограммах $P_{m'+\mu, n'+\nu}$ они занимают то же положение, что и точка z в $P_{m'n'}$.

Среди этих эквивалентных точек имеется одна точка, которая принадлежит основному параллелограмму P (эта точка $z - 2m'\omega - 2n'\omega'$).

Итак, мы можем сказать, что всякая точка плоскости эквивалентна некоторой и притом единственной точке основного параллелограмма P . Будем называть параллелограммы P_{mn} параллелограммами периодов; выбор среди них основного параллелограмма P , очевидно, произволен. Теперь мы можем геометрически истолковать соотношение (2). Они выражают, что функция $f(z)$ принимает одно и то же значение во всех эквивалентных точках. Следовательно, достаточно изучить эллиптическую функцию в одном из параллелограммов, чтобы знать ее поведение во всей плоскости.

3. Основные теоремы. *Т е о р е м а 1. Производная эллиптической функции есть также функция эллиптическая.* В самом деле, дифференцируя соотношения (1), имеющие место при любом z , мы получаем:

$$f'(z + 2\omega) = f'(z), \quad f'(z + 2\omega') = f'(z).$$

Таким образом, производная $f'(z)$ имеет те же периоды 2ω и $2\omega'$, что и первоначальная функция. С другой стороны, будучи однозначной, как и $f(z)$, $f'(z)$ не может иметь на конечном расстоянии других особых точек, кроме полюсов, так как если $f(z)$ голоморфна в некоторой точке, то производная $f'(z)$ тоже голоморфна в этой точке, а если $f(z)$ имеет полюс в некоторой точке, то и $f'(z)$ будет иметь полюс в этой точке. Следовательно, $f'(z)$ есть мероморфная функция, допускающая два периода 2ω и $2\omega'$, и согласно определению она будет эллиптической функцией с теми же периодами, что и первоначальная функция.

Т е о р е м а 2. Эллиптическая функция, отличная от постоянного, имеет по крайней мере один полюс в параллелограмме периодов.

Действительно, допуская противное, мы имели бы целую функцию, отличную от постоянного. Ее параллелограмм периодов есть ограниченная часть плоскости и в этой области, включая ее границу, наша функция голоморфна, а значит, и по давню непрерывна, а потому и ограничена. Следовательно, существует

такое положительное число M , что во всем основном параллелограмме периодов имеем:

$$|f(z)| < M.$$

Так как во всех остальных параллелограммах сети значения функции $f(z)$ повторяются, то неравенство $|f(z)| < M$ будет справедливо для всех точек z плоскости. Итак, мы имеем целую функцию $f(z)$, ограниченную во всей плоскости. Согласно теореме Лиувилля отсюда заключаем, что $f(z)$ приводится к постоянному. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости теоремы.

С л е д с т в и е 1. Если две эллиптические функции с одинаковыми периодами имеют в параллелограмме периодов одни и те же полюсы с одинаковыми главными частями, то они отличаются лишь постоянным слагаемым.

В самом деле, положим, что $f_1(z)$ и $f_2(z)$ суть две эллиптические функции с одинаковыми периодами 2ω и $2\omega'$, имеющие в параллелограмме периодов периоды одни и те же полюсы с одинаковыми главными частями. Тогда их разность $f_1(z) - f_2(z)$ будет двоякопериодической функцией с периодами 2ω и $2\omega'$, без полюсов, а значит, по доказанной теореме эта разность равняется тождественно постоянному.

С л е д с т в и е 2. Если две эллиптические функции с одинаковыми периодами имеют в параллелограмме периодов одинаковые нули и полюсы одной и той же кратности, то они отличаются лишь постоянным множителем.

Действительно, положим, что $f_1(z)$ и $f_2(z)$ суть две эллиптические функции с одинаковыми периодами 2ω и $2\omega'$, имеющие в параллелограмме периодов одинаковые нули и полюсы одной и той же кратности.

Тогда их отношение $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ представляет двоякопериодическую функцию с периодами 2ω и $2\omega'$, причем это отношение не имеет полюсов. Следовательно, по доказанной теореме это отношение равно тождественно постоянному.

Т е о р е м а 3. *Сумма вычетов эллиптической функции относительно всех полюсов, расположенных в параллелограмме периодов, равна нулю.*

Прежде всего заметим, что если на границе параллелограмма периодов имеются полюсы эллиптической функции, то мы можем немного сдвинуть этот параллелограмм так, чтобы все полюсы, расположенные на первоначальном параллелограмме периодов, оказались бы внутри сдвинутого параллелограмма. Обозначим вершины этого параллелограмма через

$$z_0, z_0 + 2\omega, z_0 + 2\omega + 2\omega', z_0 + 2\omega';$$

на его сторонах нет полюсов функции $f(z)$. Согласно общей теореме о вычетах мы получим сумму вычетов S относительно всех

полюсов, лежащих внутри параллелограмма, если вычислим интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int f(z) dz$, распространив его на периметр этого параллелограмма, проходимый в положительном направлении. Таким образом, имеем:

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0}^{z_0+2\omega} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0+2\omega}^{z_0+2\omega+2\omega'} f(z) dz + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0+2\omega'}^{z_0} f(z) dz, \quad (3)$$

где все интегрирования совершаются по прямолинейным отрезкам, соединяющим указанные точки. Объединяя первый и третий интегралы, делаем в этом последнем подстановку

$$z = z' + 2\omega'$$

и, пользуясь периодичностью, находим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0+2\omega}^{z_0} f(z' + 2\omega') dz' = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0+2\omega}^{z_0} f(z') dz'.$$

Таким образом, сумма первого и третьего интегралов выражения (3), равная

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{z_0}^{z_0+2\omega} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0+2\omega}^{z_0} f(z') dz',$$

есть нуль потому, что интегрирования совершаются по одному и тому же отрезку в противоположных направлениях.

То же самое можно утверждать относительно суммы второго и четвертого интегралов, если в первом интеграле совершить подстановку $z = z' + 2\omega$. Возвращаясь к формуле (3), мы убеждаемся, что $S = 0$.

Теорема 4. *Эллиптическая функция принимает в параллелограмме периодов всякое значение (конечное или бесконечность) одинаковое число раз.* Пусть α — произвольное комплексное число. Покажем, что число корней уравнения $f(z) = \alpha$, лежащих в параллелограмме периодов, совпадает с числом полюсов функции $f(z)$, расположенных в этом параллелограмме. Само собой разумеется, что при счете числа нулей функции $f(z) - \alpha$ или ее полюсов мы каждый нуль или полюс считаем столько раз, какова его кратность. Для доказательства нашего утверждения прежде всего заметим, что если на границе параллелограмма периодов имеются нули или полюсы функции $f(z) - \alpha$, то мы можем немного сдвинуть этот параллелограмм так, чтобы все нули и полюсы, распо-

женные на первоначальном параллелограмме периодов, оказались бы внутри сдвинутого параллелограмма.

Обозначим вершины этого параллелограмма через

$$z_0, z_0 + 2\omega, z_0 + 2\omega + 2\omega', z_0 + 2\omega';$$

на его сторонах нет нулей и полюсов функции $f(z) - \alpha$.

Образует вспомогательную функцию

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha},$$

которая будет эллиптической с периодами 2ω и $2\omega'$, причем на сторонах рассматриваемого параллелограмма периодов она не будет иметь полюсов. Применяя к этой функции предыдущую теорему 3, мы имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} dz = 0, \quad (4)$$

где интегрирование распространено в положительном направлении по контуру упомянутого параллелограмма. С другой стороны, как известно, интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f''(z)}{f'(z) - \alpha} dz$$

изображает разность между числом нулей и полюсов функции $f(z) - \alpha$, лежащих внутри контура интегрирования (гл. VII, § 2, п. 5).

Так как согласно формуле (4) этот интеграл равен нулю, то, следовательно, число корней уравнения $f(z) = \alpha$, лежащих внутри параллелограмма периодов, совпадает с числом полюсов функции $f(z)$, расположенных внутри того же параллелограмма. Таким образом, теорема доказана.

Если $f(z)$ принимает в параллелограмме периодов всякое значение s раз, то она называется эллиптической функцией порядка s .

В силу теоремы 3 не может существовать эллиптической функции, имеющей в параллелограмме периодов один простой полюс. Таким образом, всегда $s \geq 2$, т. е. не существует эллиптических функций первого порядка. В дальнейшем мы фактически построим эллиптические функции второго порядка. Существуют, конечно, и эллиптические функции более высокого порядка.

Т е о р е м а 5. *Разность между суммой всех нулей и суммой всех полюсов эллиптической функции, расположенных в параллелограмме периодов, равна некоторому ее периоду, т. е.*

$$\sum_{k=1}^s \alpha_k - \sum_{k=1}^s \beta_k = 2\mu\omega + 2\nu\omega',$$

где α_k — нули, а β_k — полюсы, расположенные в параллелограмме периодов. Само собой понятно, что при образовании суммы нулей или суммы полюсов каждый нуль или полюс нужно повто-

речь слагаемым столько раз, какова его кратность. Для доказательства прежде всего заметим, что если на границе параллелограмма периодов имеются нули или полюсы эллиптической функции, то путем небольшого сдвига этого параллелограмма мы можем достигнуть того, чтобы все нули и полюсы, расположенные на первоначальном параллелограмме периодов, попали бы внутрь сдвинутого параллелограмма. Обозначим через

$$z_0, z_0 + 2\omega, z_0 + 2\omega + 2\omega', z_0 + 2\omega'$$

вершины этого параллелограмма; на его сторонах нет нулей и полюсов функции $f(z)$. Тогда, как известно (гл. VII, § 1, п. 5), искомая разность между суммами всех нулей и полюсов, расположенных внутри упомянутого параллелограмма, изображается в виде интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int z \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

где интегрирование совершается по периметру параллелограмма в положительном направлении. Таким образом, имеем:

$$\sum_{k=1}^s \alpha_k - \sum_{k=1}^s \beta_k = \frac{1}{2\pi i} \int z \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (5)$$

При интегрировании вдоль периметра параллелограмма сумма

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{z_0}^{z_0+2\omega} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right]$$

приводится посредством перемены во втором интеграле z на $z + 2\omega'$ и использования периодичности к следующему выражению:

$$-\frac{2\omega'}{2\pi i} \int_{z_0}^{z_0+2\omega} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = -\frac{2\omega'}{2\pi i} [\operatorname{Ln} f(z_0 + 2\omega) - \operatorname{Ln} f(z_0)];$$

так как $f(z_0 + 2\omega) = f(z_0)$, то число в скобке есть нуль или вида $-2\nu i$, где ν — целое; таким образом, сумма двух рассматриваемых интегралов вообще равна $2\nu\omega'$. Аналогично сумма двух остальных интегралов

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{z_0+2\omega}^{z_0+2\omega+2\omega'} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{z_0+2\omega'}^{z_0} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right]$$

приводится посредством того же рассуждения к $2\mu\omega$, где μ — целое. Возвращаясь к формуле (5), перепишем ее в виде

$$\sum_{k=1}^s \alpha_k - \sum_{k=1}^s \beta_k = 2\mu\omega + 2\nu\omega',$$

что и требуется доказать.

З а м е ч а н и е. Применяя доказанную теорему к функции $f(z) - \alpha$, где α — произвольное комплексное число, мы видим, что сумма корней уравнения $f(z) = \alpha$, расположенных в параллелограмме периодов, контругнетна с суммой полюсов функции $f(z)$, лежащих в этом параллелограмме, относительно ее первоначальных периодов 2ω и $2\omega'$.

4. Эллиптические функции второго порядка. Сделаем предварительно два замечания:

а) Если эллиптическая функция $f(z)$ с периодами 2ω и $2\omega'$ удовлетворяет соотношению

$$f(z) = -f(K - z), \quad (6)$$

где K — некоторое постоянное, то числа

$$\frac{1}{2}K, \quad \frac{1}{2}K + \omega, \quad \frac{1}{2}K + \omega' \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}K + \omega + \omega'$$

будут нули или полюсы функции $f(z)$. В самом деле, полагая в соотношении (6) $z = \frac{1}{2}K$, получим:

$$f\left(\frac{1}{2}K\right) = -f\left(\frac{1}{2}K\right),$$

откуда следует, что $\frac{1}{2}K$ есть нуль или полюс функции $f(z)$.

Полагая $z = \frac{1}{2}K + \omega$, найдем:

$$f\left(\frac{1}{2}K + \omega\right) = -f\left(\frac{1}{2}K - \omega\right) = -f\left(\frac{1}{2}K + \omega\right),$$

откуда вытекает, что $\frac{1}{2}K + \omega$, а значит, $\frac{1}{2}K + \omega'$ и $\frac{1}{2}K + \omega + \omega'$ суть нули или полюсы функции $f(z)$. Числа ω , ω' , $\omega + \omega'$ и им конгруэнтные называются полупериодами.

Предполагая $K = 0$, т. е. что $f(z)$ удовлетворяет соотношению $f(z) = -f(-z)$, мы будем иметь нечетную эллиптическую функцию.

В силу доказанного для такой функции точки $z = 0$, а следовательно, все периоды, равно, как все полупериоды, будут нулями или полюсами.

б) Если эллиптическая функция $f(z)$ с периодами 2ω и $2\omega'$ удовлетворяет соотношению

$$f(z) = f(K - z), \quad (7)$$

где K — некоторое постоянное, то числа

$$\frac{1}{2}K, \quad \frac{1}{2}K + \omega, \quad \frac{1}{2}K + \omega' \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}K + \omega + \omega'$$

будут нули или полюсы производной $f'(z)$. Действительно, дифференцируя соотношение (7), мы видим, что производная $f'(z)$ удовлетворяет соотношению вида (6), откуда и следует наше утверждение вследствие замечания а).

В частности, если $K = 0$, т. е. если $f(z)$ — четная функция [$f(z) = f(-z)$], то ее производная будет нечетной и будет иметь нули или полюсы в точках, изображающих периоды и полупериоды. Приложим теперь эти замечания к эллиптическим функциям второго порядка.

Обозначим через β_1 и β_2 полюсы такой функции, расположенные в параллелограмме периодов. Пусть сначала $\beta_1 \neq \beta_2$, т. е. оба полюса простые. В силу теоремы 5, если $f(z) = f(z_1)$, то $z + z_1 \equiv \beta_1 + \beta_2$, откуда вытекает соотношение вида (7):

$$f(z) = f(\beta_1 + \beta_2 - z);$$

следовательно, по замечанию б) точки

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{i\beta_1 + \beta_2}{2}, & b_2 &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + \omega, \\ b_3 &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + \omega', & b_4 &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + \omega + \omega' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

будут нулями или полюсами производной $f'(z)$. С другой стороны, мы знаем полюсы производной $f'(z)$; она имеет в точках β_1 и β_2 полюсы второго порядка. Так как, очевидно, точки β_1 и β_2 не будут конгруэнтными с точками (8), то производная $f'(z)$ должна обращаться в нуль во всех четырех точках (8). Образует теперь функцию

$F(z) = [f(z) - f(b_1)] [f(z) - f(b_2)] [f(z) - f(b_3)] [f(z) - f(b_4)]$, которая будет эллиптической с теми же периодами, что и $f(z)$, восьмого порядка; эта функция имеет два полюса четвертого порядка в точках β_1 и β_2 и нули второго порядка в четырех точках (8).

Последнее заключение сделано потому, что в точках (8) функция $F(z)$ обращается в нуль вместе со своей производной. Заметив, что $f'^2(z)$ есть эллиптическая функция с теми же периодами, что и $F(z)$, того же порядка и с теми же нулями и полюсами, мы на основании теоремы 2 (следствие 2) заключаем:

$$f'^2(z) = CF(z),$$

откуда

$$f'(z) = \sqrt{CF(z)}. \quad (9)$$

Полагая

$$f(z) = \omega, \quad CF(z) = R(\omega),$$

найдем:

$$z = \int \frac{d\omega}{\sqrt{R(\omega)}}, \quad (10)$$

где $R(\omega)$ — полином 4-й степени относительно ω . Таким образом, эллиптическая функция второго порядка $\omega = f(z)$ может быть рассматриваема как обращение эллиптического интеграла первого рода (10).

морфной функции, имеющей в точках $k\lambda$ двойные полюсы, в виде бесконечного ряда простейших дробей с явным выделением всех ее полюсов и их главных частей.

Наша ближайшая задача заключается в том, чтобы, поступая аналогично только что сказанному, ввести в рассмотрение три функции, принимая в качестве исходного элемента простейшую целую функцию, имеющую нули первого порядка в точках вида

$$\omega = 2m\omega + 2n\omega' \quad (m, n - \text{целые}),$$

причем

$$I\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) > 0.$$

Для построения этой функции мы воспользуемся формулой Вейерштрасса бесконечных произведений (гл. IX, § 2, п. 1).

1. Лемма. *Ряд*

$$\sum' \frac{1}{\omega^\alpha} \quad (13)$$

абсолютно сходится для каждого положительного числа α , большего 2.

Символы Σ' и Π' обозначают соответственно ряд и произведение, распространенные на все ω , за исключением $\omega = 0$ ($m = 0, n = 0$).

Для доказательства леммы рассмотрим параллелограммы $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ с общим центром в точке $z = 0$, сторонами, параллельными векторам ω и ω' и имеющими одну из вершин соответственно в точках

$$2\omega + 2\omega', 4\omega + 4\omega', \dots, 2n(\omega + \omega'), \dots$$

На периметре параллелограмма P_1 лежит восемь точек ω , на периметре P_2 находится шестнадцать таких точек и вообще на периметре P_n лежит $8n$ точек ω . Обозначая через δ минимальное расстояние от начала координат до периметра параллелограмма P_1 , мы видим, что расстояние от $z = 0$ до периметра P_n будет $n\delta$. Заметив это, имеем:

$$\sum' \frac{1}{|\omega|^\alpha} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{n^\alpha \delta^\alpha} = \frac{8}{\delta^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}},$$

откуда при $\alpha > 2$ вытекает сходимость ряда, стоящего в левой части неравенства, а значит, абсолютная сходимость ряда (13).

2. Функции σ , ξ и \wp . Теперь мы в состоянии построить целую функцию, имеющую нули первого порядка в точках ω . Так как вследствие рассмотренной леммы ряд $\sum' \frac{1}{|\omega|^\alpha}$ сходится, то по формуле Вейерштрасса (гл. IX, § 2, п. 1) бесконечное произведение

$$z \Pi' \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}}$$

изображает целую функцию с простыми нулями в точках $w = 2m\omega + 2n\omega'$. Обозначим ее, следуя Вейерштрассу, через $\sigma(z)$.

Таким образом, имеем:

$$\sigma(z) = z \prod' \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}}. \quad (14)$$

Если мы хотим явно выразить зависимость $\sigma(z)$ от постоянных 2ω и $2\omega'$, то ее следует записывать в виде $\sigma(z; 2\omega, 2\omega')$.

Соединяя в произведении (14) два множителя, относящихся к w и $-\omega$, перепишем (14) в виде

$$\sigma(z) = z \prod' \left(1 - \frac{z^2}{w^2}\right) e^{\frac{z^2}{w^2}}, \quad (14')$$

где произведение распространено на значения $w = 2m\omega + 2n\omega'$, соответствующие целым m и n :

$$m > 0; n \text{ — любое}; m = 0, n > 0.$$

Из формулы (14') усматриваем, что $\sigma(z)$ есть нечетная функция, т. е.

$$\sigma(-z) = -\sigma(z),$$

и что $\sigma(z)$ есть однородная функция степени единица относительно z, ω, ω' , т. е.

$$\sigma(kz; 2k\omega, 2k\omega') = k\sigma(z; 2\omega, 2\omega').$$

Из формулы (14') мы легко получаем разложение функции $\sigma(z)$ в степенной ряд, сходящийся во всей плоскости

$$\tau(z) = z - c_5 z^5 - c_7 z^7 - \dots, \quad (15)$$

откуда мы усматриваем, что

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 1, \quad \sigma''(0) = \sigma'''(0) = \sigma^{IV}(0) = 0.$$

Так как ряд, полученный логарифмированием формулы (14), равномерно сходится во всякой конечной части плоскости, если пренебречь конечным числом его первых членов, соответствующих точкам w , лежащим в этой части плоскости, то по теореме Вейерштрасса мы можем образовать разложение логарифмической производной функции $\sigma(z)$, обозначаемой через $\zeta(z)$.

Таким образом, получаем:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum' \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right). \quad (16)$$

Функция $\zeta(z)$ — мероморфная, все полюсы которой первого порядка и находятся в точках w ; в каждом из этих полюсов вычет равен единице. Из формулы (16) мы усматриваем, что при умножении z, ω, ω' на k функция ζ умножается на $\frac{1}{k}$, т. е.

$\zeta(kz; 2k\omega, 2k\omega') = \frac{1}{k} \zeta(z; 2\omega, 2\omega')$. Таким образом, $\zeta(z; 2\omega, 2\omega')$ — однородная функция относительно z , ω , ω' порядка -1 .

Выражение (16) позволяет легко получить разложение функции $\zeta(z) = \frac{1}{z}$ в степенной ряд, радиус сходимости которого равен расстоянию от начала координат до ближайшей из точек ω . Если принять во внимание, что ряд $\sum' \frac{1}{\omega^\alpha}$ при α целом и нечетном равен нулю, то, положив $\sum' \frac{1}{\omega^{-n}} = \frac{a_n}{2n-1}$, получим:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{a_2 z^3}{3} - \frac{a_4 z^5}{5} - \dots - \frac{a_n z^{2n-1}}{2n-1} - \dots, \quad (17)$$

откуда, в частности, следует, что функция $\zeta(z)$ есть нечетная.

Разложение (16) равномерно сходится во всякой конечной части плоскости, если пренебречь конечным числом первых членов, соответствующих точкам ω , лежащим в этой части плоскости, а потому оно может быть продифференцировано почленно. Обозначая через $\wp(z)$ производную от функции $\zeta(z)$ с обратным знаком, получим:

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right). \quad (18)$$

Функция $\wp(z)$ есть мероморфная с полюсами второго порядка в точках ω ; в каждой из этих точек вычет равен нулю. Очевидно из (18), что эта функция есть четная, т. е.

$$\wp(-z) = \wp(z).$$

Дифференцированием ряда (17) мы получим:

$$\wp(z) = 1/z^2 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots + a_n z^{2n-2} + \dots, \quad (19)$$

причем степенной ряд (19), изображающий $\wp(z) = 1/z^2$, будет иметь тот же круг сходимости, что и ряд (17), представляющий $\zeta(z) = 1/z$.

Дифференцируя формулу (18), мы сначала образуем:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum' \frac{1}{(z-\omega)^3},$$

что может быть переписано в виде

$$\wp'(z) = -2 \sum \frac{1}{(z-\omega)^3},$$

где суммирование распространено на все значения ω без исключения.

Отсюда легко заключаем, что

$$\wp'(z+2\omega) = \wp'(z), \quad \wp'(z+2\omega') = \wp'(z).$$

Интегрируя, имеем:

$$\wp(z + 2\omega) = \wp(z) + C_1, \quad \wp(z + 2\omega') = \wp(z) + C_2;$$

наконец, полагая соответственно $z = -\omega$, $z = -\omega'$ и воспользовавшись четностью функции $\wp(z)$, найдем:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

и, значит,

$$\wp(z + 2\omega) = \wp(z), \quad \wp(z + 2\omega') = \wp(z). \quad (20)$$

Следовательно, функция $\wp(z)$ есть эллиптическая второго порядка с основными периодами 2ω и $2\omega'$, имеющая полюсы второго порядка в точке $z = 0$ и во всех эквивалентных с ней точках ω .

Если мы хотим явно выразить зависимость функции $\wp(z)$ от периодов, то следует ее обозначить через $\wp(z; 2\omega, 2\omega')$.

Из формулы (18) следует:

$$\wp(kz; 2k\omega, 2k\omega') = \frac{1}{k^2} \wp(z; 2\omega, 2\omega').$$

Это соотношение показывает, что $\wp(z; 2\omega, 2\omega')$ — функция однородная порядка -2 относительно z , ω , ω' .

Производная $\wp'(z)$ функции $\wp(z)$ есть эллиптическая функция третьего порядка с теми же периодами 2ω и $2\omega'$, имеющая тройные полюсы в точках, конгруэнтных с $z = 0$; в силу п. 4 § 1 она имеет три простых нуля в параллелограмме периодов, а именно, таковыми будут точки, конгруэнтные с ω , ω' и $\omega + \omega'$, т. е. все полупериоды. Как известно из того же п. 4, эллиптическая функция $\wp(z)$ второго порядка с двойным полюсом должна быть связана со своей производной соотношением

$$\wp'^2(z) = C [\wp(z) - \wp(\omega)] [\wp(z) - \wp(\omega + \omega')] [\wp(z) - \wp(\omega')]. \quad (21)$$

С другой стороны, мы можем установить зависимость между $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ непосредственно, отправляясь от ряда (19). В самом деле,

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2a_2z + 4a_3z^3 + \dots,$$

откуда

$$\wp'^2(z) = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_3 + P_1,$$

где P_1 есть сумма одних положительных степеней z . Аналогично находим:

$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_3 + P_2,$$

где P_2 — также сумма одних положительных степеней z .

Следовательно, можем написать:

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + 20a_2\wp(z) = -28a_3 + P_3,$$

где P_3 — сумма одних положительных степеней z .

Левая часть последнего соотношения представляет собой эллиптическую функцию с периодами 2ω и $2\omega'$, и, как показывает правая часть этого соотношения, эта эллиптическая функция не имеет полюсов. Следовательно, она должна быть постоянной, что возможно лишь при $P_3 \equiv 0$.

Итак, имеем:

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - 20a_2\wp(z) - 28a_3$$

или в других обозначениях

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3, \quad (22)$$

где положено:

$$g_2 = 20a_2 = 60 \sum' \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 28a_3 = 140 \sum' \frac{1}{\omega^6}. \quad (23)$$

Формула (22) представляет в развернутом виде формулу (21).

Полагая $\wp(z) = u$, из формулы (22) заключаем: $u = \wp(z)$ есть обращение эллиптического интеграла первого рода в форме Вейерштрасса:

$$z = \int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}. \quad (24)$$

Очевидно, полином, стоящий под радикалом, не имеет кратных корней, так как в противном случае интеграл (24) выражался бы в элементарных функциях. Можно показать и наоборот, что при любом выборе g_2 и g_3 таких, что полином, стоящий под радикалом, не имеет кратных корней, обращение интеграла (24) приводит к функции $\wp(z)$. Корни полинома $4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, стоящего в правой части (22), обозначим через e_1, e_2, e_3 ; тогда формула (22) примет вид

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3). \quad (25)$$

Сравнивая последнюю формулу с (21), находим:

$$e_1 = \wp(\omega), \quad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \quad e_3 = \wp(\omega'). \quad (26)$$

Как было выше отмечено, числа e_1, e_2, e_3 различны между собой. Путем сравнения между собой двух частей формулы (25) получаем соотношения

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -g_2/4, \quad e_1e_2e_3 = g_3/4 \quad (26')$$

Функции $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ не могут иметь периодов 2ω и $2\omega'$, так как первая имеет в параллелограмме периодов лишь один простой полюс, а вторая совсем не имеет полюсов. Однако из периодичности функции $\wp(z) = -\zeta'(z)$ следует для ζ свойство, аналогичное периодичности, а именно:

$$\begin{aligned}\zeta(z + 2\omega) &= \zeta(z) + 2\eta, \\ \zeta(z + 2\omega') &= \zeta(z) + 2\eta',\end{aligned}\quad (27)$$

где η и η' — некоторые постоянные или вообще

$$\zeta(z + 2m\omega + 2n\omega') = \zeta(z) + 2m\eta + 2n\eta', \quad (28)$$

считая m и n любыми целыми числами. Числа η и η' можно рассматривать как частные значения функции ζ . Для этого положим в формулах (27) $z = -\omega$ и $z = -\omega'$, соответственно получим:

$$\zeta(\omega) = \zeta(-\omega) + 2\eta, \quad \zeta(\omega') = \zeta(-\omega') + 2\eta',$$

и, пользуясь нечетностью функции ζ , найдем:

$$\eta = \zeta(\omega), \quad \eta' = \zeta(\omega'). \quad (29)$$

Последние формулы показывают, что η и η' однородны относительно ω , ω' измерения — 1, что следует из свойства однородности функции ζ . Эти числа η и η' связаны с полупериодами ω и ω' замечательным соотношением, которое выводится следующим образом.

Прежде всего сдвинем немного параллелограмм периодов так, чтобы полюс $z = 0$ оказался внутри сдвинутого параллелограмма.

Обозначим вершины этого параллелограмма через

$$z_0, z_0 + 2\omega, z_0 + 2\omega + 2\omega', z_0 + 2\omega';$$

на его сторонах нет полюсов функции $\zeta(z)$.

Так как вычет функции ζ относительно полюса $z = 0$ равен единице, то, интегрируя функцию $\zeta(z)$ вдоль периметра нашего параллелограмма, будем иметь:

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z_0+2\omega} \zeta(z) dz + \int_{z_0+2\omega}^{z_0+2\omega+2\omega'} \zeta(z) dz + \int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'} \zeta(z) dz + \\ + \int_{z_0+2\omega'}^{z_0} \zeta(z) dz = 2\pi i, \quad (30)\end{aligned}$$

где все интегрирования совершаются по прямолинейным отрезкам, соединяющим указанные точки. Объединяя первый и третий интегралы, делаем в этом последнем подстановку

$$z = u + 2\omega'$$

и, пользуясь (27), находим:

$$\int_{z_0}^{z_0+2\omega} \zeta(z) dz + \int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'} \zeta(z) dz = \int_{z_0}^{z_0+2\omega} \zeta(z) dz +$$

$$+ \int_{z_0+2\omega}^{z_0} \zeta(u+2\omega') du = - \int_{z_0}^{z_0+2\omega} [\zeta(u+2\omega') - \zeta(u)] du = -2\eta'2\omega.$$

Аналогично, объединяя второй и четвертый интегралы соотношения (30), найдем, что их сумма равна

$$2\eta \cdot 2\omega'.$$

Внося в соотношение (30), получим:

$$2\eta \cdot 2\omega' - 2\eta' \cdot 2\omega = 2\pi i$$

или

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}. \quad (31)$$

Это — так называемое соотношение Лежандра. Соотношения (27) можно переписать в виде

$$\frac{\sigma'(z+2\omega)}{\sigma(z+2\omega)} = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} + 2\eta,$$

$$\frac{\sigma'(z+2\omega')}{\sigma(z+2\omega')} = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} + 2\eta'.$$

Интегрируя, получим:

$$\ln \sigma(z+2\omega) = \ln \sigma(z) + 2\eta z + \ln C,$$

$$\ln \sigma(z+2\omega') = \ln \sigma(z) + 2\eta' z + \ln C',$$

или

$$\sigma(z+2\omega) = C e^{2\eta z} \sigma(z), \quad \sigma(z+2\omega') = C' e^{2\eta' z} \sigma(z).$$

Остается определить постоянные C и C' . Для этого полагаем в последних тождествах $z = -\omega$ и $z = -\omega'$ и находим:

$$\sigma(\omega) = C e^{-2\eta\omega} \sigma(-\omega), \quad \sigma(\omega') = C' e^{2\eta'\omega'} \sigma(-\omega'),$$

откуда, пользуясь нечетностью функции $\sigma(z)$, получим:

$$C = -e^{2\eta\omega}, \quad C' = -e^{2\eta'\omega'}.$$

Следовательно, окончательно находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(z+2\omega) &= -e^{2\eta(z+\omega)} \sigma(z), \\ \sigma(z+2\omega') &= -e^{2\eta'(z+\omega')} \sigma(z), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

откуда

$$\sigma(z+2\omega+2\omega') = -e^{(2\eta+2\eta')(z+\omega+\omega')} \sigma(z),$$

если принять во внимание (31). Согласно формулам (32) функция $\sigma(z)$ приобретает множителей показательного типа при прибавле-

нии к аргументу чисел 2ω и $2\omega'$. Функции $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ и $\wp(z)$ впервые были введены Вейерштрассом. Можно показать, что всякая эллиптическая функция с периодами 2ω и $2\omega'$ является рациональной относительно $\wp(z)$ и $\wp'(z)$. Таким образом, совокупность рациональных функций от $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ представляет собой всю совокупность эллиптических функций с периодами 2ω и $2\omega'$.

§ 3. Простейшие аналитические представления произвольной эллиптической функции

1. **Представление эллиптической функции в виде суммы простейших элементов.** Пусть $f(z)$ есть эллиптическая функция порядка s с простыми полюсами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, лежащими в параллелограмме периодов. Обозначая через B_k вычет функции относительно полюса β_k , мы имеем, что $\sum_{k=1}^s B_k = 0$ (§ 1, п. 3, теорема 3).

Образуем теперь выражение

$$F(z) = \sum_{k=1}^s B_k \zeta(z - \beta_k).$$

В силу свойства функции ζ , выражаемого соотношениями (27), мы находим:

$$F(z + 2\omega) = F(z) + 2\eta \sum_{k=1}^s B_k,$$

$$F(z + 2\omega') = F(z) + 2\eta' \sum_{k=1}^s B_k.$$

Так как $\sum_{k=1}^s B_k = 0$, то последние формулы примут вид

$$F(z + 2\omega) = F(z), \quad F(z + 2\omega') = F(z).$$

Таким образом, $F(z)$ есть эллиптическая функция с основными периодами 2ω и $2\omega'$. С другой стороны, легко видеть, что функция $F(z)$ имеет в точках β_k простые полюсы с вычетами B_k . Следовательно, данная эллиптическая функция $f(z)$ может отличаться от $F(z)$ лишь постоянным слагаемым (§ 1, п. 3), т. е.

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^s B_k \zeta(z - \beta_k), \quad (33)$$

где постоянное C определяется по значению функции $f(z)$ в точке, не совпадающей с ее полюсом.

Из вывода мы усматриваем, что, обратно, всякое выражение вида (33), в котором β_k — любые s различных точек в параллелограмме периодов, а B_k — любые s чисел, подчиненные условию

$\sum_{k=1}^s B_k = 0$, всегда изображает эллиптическую функцию порядка s с простыми полюсами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ и соответственными главными частями:

$$\frac{B_1}{z - \beta_1}, \quad \frac{B_2}{z - \beta_2}, \quad \dots, \quad \frac{B_s}{z - \beta_s}.$$

Обобщим теперь формулу (33) на случай кратных полюсов. Пусть $f(z)$ есть эллиптическая функция порядка s с полюсами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$, лежащими в параллелограмме периодов. Обозначим через

$$\frac{B_{h1}}{z - \beta_h} + \frac{B_{h2}}{(z - \beta_h)^2} + \dots + \frac{B_{hs_h}}{(z - \beta_h)^{s_h}} \quad (34)$$

главную часть нашей функции относительно полюса β_h , порядок которого есть s_h ($s_1 + s_2 + \dots + s_q = s$).

Образуем теперь выражение

$$F(z) = \sum_{k=1}^q \left[B_{k1} \zeta(z - \beta_k) + B_{k2} \wp'(z - \beta_k) - \frac{B_{k3}}{2!} \wp''(z - \beta_k) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{s_k} \frac{B_{ks_h}}{(s_h - 1)!} \wp^{(s_h - 2)}(z - \beta_k) \right].$$

Так как $\sum_{k=1}^q B_{k1} = 0$, то из предыдущего анализа, принимая во внимание периодичность функции \wp и ее производных, вытекает, что $F(z)$ есть эллиптическая функция с периодами 2ω и $2\omega'$. С другой стороны, из выражения функции $F(z)$ мы усматриваем, что в точках β_h она имеет полюсы порядков s_h с главными частями (34). Следовательно, данная эллиптическая функция $f(z)$ может отличаться от $F(z)$ лишь на постоянное слагаемое (§ 1, п. 3), т. е.

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^q \left[B_{k1} \zeta(z - \beta_k) + B_{k2} \wp'(z - \beta_k) - \frac{B_{k3}}{2!} \wp''(z - \beta_k) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{s_k} \frac{B_{ks_h}}{(s_h - 1)!} \wp^{(s_h - 2)}(z - \beta_k) \right], \quad (35)$$

где постоянное C определяется по значению функции $f(z)$ в точке, не совпадающей с ее полюсом.

Обратно, всякое выражение вида (35) всегда изображает эллиптическую функцию порядка s с полюсами в точках β_k и соответствующими главными частями (34), если постоянные B_{k1} подчинены условию $\sum_{k=1}^q B_{k1} = 0$, а β_k — любые q точек параллелограмма периодов.

2. Представление эллиптической функции в виде отношения произведений элементарных множителей. В предыдущем пункте мы получили формулу, изображающую эллиптическую функцию в виде суммы простейших элементов, которая может быть рассматриваема как аналог разложения рациональной функции на простейшие дроби. Мы выведем теперь другую формулу, при помощи которой можно представить всякую эллиптическую функцию; эта формула будет аналогична представлению рациональной функции в виде дроби, числитель и знаменатель которой разложены на линейные множители.

Пусть $f(z)$ есть эллиптическая функция, имеющая в параллелограмме периодов нули в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ и полюсы в точках $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, причем эти точки могут быть различными или частично совпадающими (в случае кратных нулей или полюсов).

В силу § 1, п. 3 имеем:

$$\sum_{k=1}^s \alpha_k = \sum_{k=1}^s \beta_k + 2\gamma\omega + 2\gamma'\omega'.$$

Примем вместо β_k число

$$\beta'_s = \beta_s + 2\gamma\omega + 2\gamma'\omega',$$

тогда, очевидно, будет:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{s-1} + \beta'_s. \quad (36)$$

Образуем теперь выражение

$$F(z) = \frac{\sigma(z - \alpha_1) \sigma(z - \alpha_2) \dots \sigma(z - \alpha_s)}{\sigma(z - \beta_1) \sigma(z - \beta_2) \dots \sigma(z - \beta'_s)},$$

которое будет представлять мероморфную функцию с нулями в точках α_k и им эквивалентных и с полюсами в точках β_k и им эквивалентных.

Покажем, что $F(z)$ есть эллиптическая функция с основными периодами 2ω и $2\omega'$. В самом деле, воспользовавшись свойствами функции σ , выражаемыми формулами (32), имеем:

$$F(z + 2\omega) = e^{2\eta A} F(z), \quad F(z + 2\omega') = e^{2\eta' A} F(z),$$

где

$$-A = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta'_s = 0$$

и, значит,

$$F(z + 2\omega) = F(z), \quad F(z + 2\omega') = F(z).$$

Итак, две эллиптические функции $f(z)$ и $F(z)$ с одними и теми же периодами имеют в параллелограмме периодов одни и те же нули и полюсы одинаковой кратности, а потому они могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем (§ 1, п. 3). Следовательно, имеем:

$$f(z) = C \frac{\sigma(z - \alpha_1) \sigma(z - \alpha_2) \dots \sigma(z - \alpha_s)}{\sigma(z - \beta_1) \sigma(z - \beta_2) \dots \sigma(z - \beta'_s)}. \quad (37)$$

Постоянное C определяется либо путем задания функции $f(z)$ в точке, не являющейся ее нулем или полюсом, либо посредством разложения в ряды левой и правой части и отождествления соответствующих членов.

Очевидно, из доказательства вытекает, что, обратно, всякое выражение вида (37) всегда изображает эллиптическую функцию порядка s с нулями в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ и полюсами в точках $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}$ — любые точки (частично совпадающие или все различные) параллелограмма периодов, а

$$\beta'_s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{s-1}.$$

В качестве приложения выведенной формулы (37) рассмотрим функцию $\wp(z) - \wp(u)$, имеющую полюс второго порядка в точке $z = 0$ и нули при $z = \pm u$. Следовательно, по формуле (37) имеем:

$$\wp(z) - \wp(u) = C \frac{\sigma(z+u)\sigma(z-u)}{\sigma^2(z)}.$$

Чтобы определить постоянную C , рассмотрим разложения обеих частей в ряды по степеням z , а затем сравним коэффициенты при $\frac{1}{z^2}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \sigma(z+u) &= \sigma(u) + z\sigma'(u) + \dots, \\ \sigma(z-u) &= \sigma(-u) + z\sigma'(-u) + \dots, \\ \sigma^2(z) &= z^2 + \dots, \\ \sigma(-u) &= -\sigma(u). \end{aligned}$$

Поэтому коэффициент при $\frac{1}{z^2}$ в правой части будет равен $-C\sigma^2(u)$, а в левой он равен единице. Отсюда следует, что

$$1 = -C\sigma^2(u), \text{ т. е. } C = -\frac{1}{\sigma^2(u)}$$

и, значит,

$$\wp(z) - \wp(u) = -\frac{\sigma(z+u)\sigma(z-u)}{\sigma^2(z)\sigma^2(u)}. \quad (38)$$

§ 4. Функции σ_k

В § 2, п. 2 мы вывели формулу (25), представляющую $\wp^2(z)$ в виде произведения трех множителей. Согласно этой формуле произведение, стоящее в правой части, является квадратом однозначной аналитической функции. Оказывается, то же самое можно утверждать относительно каждого из трех множителей $\wp(z) - e_k$ ($k = 1, 2, 3$). Чтобы в этом убедиться, положим сначала в формуле (38) $u = \omega$; тогда получим:

$$\wp(z) - e_1 = \wp(z) - \wp(\omega) = -\frac{\sigma(z+\omega)\sigma(z-\omega)}{\sigma^2(z)\sigma^2(\omega)}. \quad (39)$$

В силу формулы (32) мы можем написать:

$$\sigma(z + \omega) = \sigma(z - \omega + 2\omega) = -e^{2\eta(z - \omega + \omega)} \sigma(z - \omega),$$

т. е.

$$\sigma(z + \omega) = -e^{2\eta z} \sigma(z - \omega). \quad (40)$$

Заметив это, перепишем (39) в виде

$$\wp(z) - e_1 = e^{2\eta z} \frac{\sigma(z - \omega)}{\sigma^2(\omega) \sigma^2(z)} = \left[\frac{e^{\eta z} \sigma(z - \omega)}{\sigma(\omega) \sigma(z)} \right]^2.$$

Полагая в формуле (38) $u = \omega + \omega'$ и $u = \omega'$ и поступая аналогично, мы представим две другие разности также в виде квадрата частного двух целых функций. Таким образом, будем иметь:

$$\wp(z) - e_k = \left[\frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)} \right]^2 \quad (41)$$

или

$$\sqrt{\wp(z) - e_k} = \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}, \quad (41')$$

где положено:

$$\begin{aligned} \sigma_1(z) &= e^{\eta z} \frac{\sigma(\omega - z)}{\sigma(\omega)}, & \sigma_2(z) &= e^{(\eta + \eta') z} \frac{\sigma(\omega + \omega' - z)}{\sigma(\omega + \omega')}, \\ \sigma_3(z) &= e^{\eta' z} \frac{\sigma(\omega' - z)}{\sigma(\omega')}. \end{aligned} \quad (42)$$

Уравнения (41') определяют три квадратных радикала как однозначные функции z . Отметим некоторые свойства функций $\sigma_k(z)$.

Все три функции $\sigma_k(z)$, очевидно, целые, и, полагая $z = 0$ в формулах (42), найдем:

$$\sigma_k(0) = 1 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Заменяя в формуле (40) z на $-z$ и пользуясь нечетностью функции $\sigma(z)$, перепишем (40) в виде

$$\sigma(\omega - z) = e^{-2\eta z} \sigma(\omega + z),$$

а значит,

$$\sigma_1(z) = e^{-\eta z} \frac{\sigma(\omega + z)}{\sigma(\omega)} = \sigma_1(-z)$$

и то же самое для функций $\sigma_2(z)$ и $\sigma_3(z)$, т. е. функции $\sigma_k(z)$ суть четные. Изменяя z, ω, ω' на $kz, k\omega, k\omega'$ и пользуясь свойствами однородности $\sigma(z; 2\omega, 2\omega')$ и $\eta(2\omega, 2\omega')$, мы заключаем: функции $\sigma_k(z; 2\omega, 2\omega')$ однородны относительно z, ω, ω' измерения нуль.

Подставляя выражение (41) в формулу (25) и извлекая квадратный корень, будем иметь:

$$\wp'(z) = \pm 2 \frac{\sigma_1(z) \sigma_2(z) \sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}.$$

Остается лишь определить знак в последней формуле. Для этого, помножив обе части этой формулы на z^3 , заставим затем z стремиться к нулю. Так как

$$z^3 \wp'(z) \rightarrow -2, \quad \sigma_k(0) = 1, \quad \sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 1,$$

то отсюда мы заключаем, что в предыдущей формуле следует брать знак $-$, т. е.

$$\wp'(z) = -2 \frac{\sigma_1(z) \sigma_2(z) \sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}. \quad (43)$$

Наконец, посмотрим, как изменяются функции $\sigma_k(z)$ при прибавлении к аргументу периода. Чтобы придать выводимым формулам однообразный вид, введем следующие обозначения:

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega + \omega', \quad \omega_3 = \omega$$

и соответственно:

$$\eta_1 = \eta, \quad \eta_2 = \eta + \eta', \quad \eta_3 = \eta'.$$

Тогда формулы (42) в этих обозначениях будут:

$$\sigma_k(z) = -e^{\eta_k z} \frac{\sigma(z - \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (44)$$

Формулы же (32) примут вид

$$\sigma(z + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k(z + \omega_k)} \sigma(z). \quad (32')$$

Отправляясь от формулы (44), используя (32') и тождество Лежандра (31), легко найдем:

$$\sigma_k(z + 2\omega_h) = -e^{2\eta_h(z + \omega_h)} \sigma_k(z) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (45)$$

и

$$\sigma_k(z + 2\omega_h) = e^{2\eta_h(z + \omega_h)} \sigma_h(z) \begin{pmatrix} k \neq h \\ k = 1, 2, 3 \\ h = 1, 2, 3 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Как следствие формул (32'), (45) и (46) мы получаем:

$$\frac{\sigma_h(z + 2\omega_k)}{\sigma(z + 2\omega_k)} = \frac{\sigma_h(z)}{\sigma(z)}, \quad \frac{\sigma_h(z + 2\omega_h)}{\sigma(z + 2\omega_h)} = -\frac{\sigma_h(z)}{\sigma(z)} \quad (k \neq h) \quad (47)$$

и

$$\frac{\sigma_h(z + 2\omega_l)}{\sigma_h(z + 2\omega_l)} = \frac{\sigma_h(z)}{\sigma_h(z)}, \quad \frac{\sigma_h(z + 2\omega_h)}{\sigma_h(z + 2\omega_h)} = -\frac{\sigma_h(z)}{\sigma_h(z)}, \quad (48)$$

где k , h и l могут принимать значения 1, 2, 3, различные между собой.

§ 5. Эллиптические функции Якоби

Будем называть *эллиптическими функциями Якоби* три функции, определяемые формулами

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)}, \quad (49)$$

где $u = z \sqrt{e_1 - e_3}$.

Пользуясь формулами (47) и (48), мы усматриваем, что это будут эллиптические функции: $\operatorname{sn} u$ имеет основные периоды $4\omega \sqrt{e_1 - e_3}$, $2\omega' \sqrt{e_1 - e_3}$, а $\operatorname{cn} u$ имеет основные периоды $4\omega \sqrt{e_1 - e_3}$, $(2\omega + 2\omega') \sqrt{e_1 - e_3}$ и $\operatorname{dn} u$ имеет периоды $2\omega \sqrt{e_1 - e_3}$, $4\omega' \sqrt{e_1 - e_3}$.

Зная нули функций $\sigma(z)$ и $\sigma_h(z)$, мы можем написать нули и полюсы эллиптических функций Якоби в виде таблицы

	Нули	Полюсы
$\operatorname{sn} u$	$(2m\omega + 2n\omega') \sqrt{e_1 - e_3}$	$[2m\omega + (2n + 1)\omega'] \sqrt{e_1 - e_3}$
$\operatorname{cn} u$	$\{(2m + 1)\omega + 2n\omega'\} \sqrt{e_1 - e_3}$	$[2m\omega + (2n + 1)\omega'] \sqrt{e_1 - e_3}$
$\operatorname{dn} u$	$\{(2m + 1)\omega + (2n + 1)\omega'\} \sqrt{e_1 - e_3}$	$[2m\omega + (2n + 1)\omega'] \sqrt{e_1 - e_3}$

Очевидно, в основном параллелограмме периодов лежат два простых нуля и два простых полюса каждой функции Якоби. Таким образом, это будут эллиптические функции второго порядка. Так как σ — функция нечетная, а σ_h — четные, то $\operatorname{sn} u$ — нечетная функция, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ — функции четные. Далее, $\operatorname{sn} 0 = 0$, $\operatorname{cn} 0 = 1$, $\operatorname{dn} 0 = 1$.

Не изменяя величины u , умножим $\omega = \omega'$ на произвольное число k ; тогда z умножится на k , так как $\sqrt{e_1 - e_3}$ разделится на k (e_1 и e_3 однородны относительно ω , ω' порядка — 2).

Отсюда, принимая во внимание свойства однородности функций $\sigma(z)$ и $\sigma_h(z)$ относительно z , ω , ω' , мы выводим заключение: функции Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ не изменяются, если умножить ω на ω' на произвольное число. Другими словами, эти функции нулевого измерения относительно ω , ω' , т. е. зависят от u и отношения $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$.

¹⁾ Под $\sqrt{e_1 - e_3}$ мы можем понимать любое из двух возможных его значений, так как формулы (49) не изменяются при перемене знака [у радикала $\sqrt{e_1 - e_3}$ вследствие нечетности функции σ и четности функции σ_h].

Поэтому, если мы хотим явно выразить зависимость функций Якоби от периодов, то их следует обозначать через

$$\operatorname{sn}(u; \tau), \operatorname{cn}(u; \tau), \operatorname{dn}(u; \tau).$$

Из известных формул $\wp(z) - e_k = \left(\frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}\right)^2$ путем исключения функции $\wp(z)$ получим два соотношения, связывающих три функции Якоби:

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

или, полагая

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

(k называется модулем наших функций), получим:

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u, \quad \operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u. \quad (50)$$

Пользуясь функциями Якоби (49), перепишем известное соотношение (43)

$$\wp'(z) = -2 \frac{\sigma_1(z) \sigma_2(z) \sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}$$

в виде

$$\wp'(z) = -2(e_1 - e_3)^{\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^3 u}. \quad (51)$$

С другой стороны, дифференцируя относительно u соотношение

$$\wp(z) - e_3 = \left(\frac{\sigma_3(z)}{\sigma(z)}\right)^2 = \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 u},$$

найдем:

$$\wp'(z) = -2(e_1 - e_3)^{\frac{3}{2}} \frac{(\operatorname{sn} u)'}{\operatorname{sn}^3 u}. \quad (52)$$

Сравнивая (52) и (51), получим:

$$(\operatorname{sn} u)' = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u. \quad (53)$$

Дифференцируя теперь тождества (50) и пользуясь (53), получим формулы производных для двух других функций Якоби:

$$(\operatorname{cn} u)' = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad (\operatorname{dn} u)' = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \quad (54)$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение для функции $\operatorname{sn} u$, возведем в квадрат соотношение (53) и воспользуемся формулами (50); тогда получим:

$$\left(\frac{d \operatorname{sn} u}{du}\right)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)$$

или, полагая $x = \operatorname{sn} u$, будем иметь:

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

причем при $u = 0$ следует считать $x = 0$ и радикал, стоящий справа, равным единице, так как $\operatorname{sn}'(0) = 1$ в силу (53).

Разделяя переменные и интегрируя, найдем:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \quad (55)$$

Отсюда мы видим, что функция $\operatorname{sn} u$ получается в результате обращения эллиптического интеграла первого рода в форме Лейбнера.

Можно показать и наоборот, что, задавая произвольное комплексное число k^2 , отличное только от нуля и единицы, получим в результате обращения интеграла (55) функцию Якоби $\operatorname{sn} u$. Это означает, что элементом построения для функций Якоби вместо τ может служить число k . В дальнейшем мы подробно исследуем интеграл (55) с точки зрения конформного отображения для того частного случая, когда число k действительное и заключается между нулем и единицей.

Мы увидим, что в этом случае один период будет действительным, а другой — чисто мнимым. Заметив, что при $z = \omega$, т. е. при $u = \omega \sqrt{e_1 - e_3}$, функция $\operatorname{sn} u$ обращается в нуль, а значит, $\operatorname{sn} u$ равна единице, поэтому

$$\omega \sqrt{e_1 - e_3} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \quad (56)$$

Интеграл, стоящий в правой части (56), выражает, следовательно, четвертую часть периода функции $\operatorname{sn} u$.

§ 6. Функции тэта

1. Разложение целой периодической функции. Эллиптические функции Якоби мы представили в виде отношений целых функций σ и σ_h . Эти последние не имеют периода: однако, как мы увидим, путем присоединения к ним некоторых показательных факторов можно из них получить целые функции, обладающие периодом.

Благодаря такому изменению функций σ и σ_h , эллиптические функции Якоби представляются в виде отношений новых целых периодических функций.

Преимущество такого нового представления функций Якоби сравнительно с прежним будет заключаться в том, что вводимые вместо σ и σ_h периодические целые функции могут быть разложены в ряды Фурье, быстро сходящиеся.

Предварительно в этом пункте мы рассмотрим общий случай целой функции с периодом и выведем разложение Фурье для такой функции. Пусть целая функция $\varphi(z)$ имеет основной период 2ω , т. е.

$$\varphi(z + 2\omega) = \varphi(z). \quad (57)$$

Построив из начала координат вектор 2ω и две прямые AB и CD , перпендикулярные к этому вектору и проходящие через его начало и конец, мы получим полосу периодичности функции $\varphi(z)$ (рис. 101). Сторона CD получается из AB путем преобразования $z' = z + 2\omega$.

Выполняя над плоскостью z преобразование $t = \frac{\pi iz}{\omega}$, мы вместо нашей полосы получим на плоскости t полосу шириной 2π , ограниченную действительной осью и прямой, ей параллельной.

Положим теперь $Z = e^t$. Как известно (гл. III, § 3, п. 2), нашей полосе в плоскости Z будет соответствовать вся плоскость с разрезом вдоль положительной действительной оси, причем два берега разреза являются образами двух сторон полосы. Таким образом, полоса плоскости z , ограниченная прямыми AB и CD , отображается на плоскости Z в разрезанную вдоль положительной действительной оси плоскость, причем точки этого разреза с одним и тем же аффиксом являются образами точек плоскости z , связанных соотношением $z' = z + 2\omega$. В силу периодичности наша функция $\varphi(z)$, рассматриваемая как функция от Z , будет иметь одинаковые значения на обоих берегах разреза, т. е. она будет однозначной аналитической функцией во всей плоскости Z , кроме точек $Z = 0$ и $Z = \infty$. Поэтому мы можем для нее написать разложение Лорана, сходящееся во всякой конечной точке $Z \neq 0$ плоскости Z , а именно:

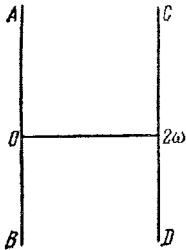


Рис. 101.

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n Z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{\pi iz}{\omega} n}.$$

Так как значение $Z = 0$ выпускается функцией $Z = e^{\frac{\pi iz}{\omega}}$, то последний ряд будет абсолютно сходящимся при любом z , причем сходимостью будет равномерной во всякой ограниченной части плоскости z .

Таким образом, мы доказали теорему: *всякая целая функция $\varphi(z)$ с периодом 2ω может быть представлена на всей плоскости комплексного переменного z рядом вида*

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{\frac{\pi iz}{\omega} n}. \quad (58)$$

Последнее разложение можно записать в другой форме, если сгруппировать в нем члены, соответствующие значениям n , одинаковым по величине и противоположным по знаку, воспользовавшись формулами Эйлера.

Таким образом, мы получим:

$$\varphi(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi z}{\omega} + b_n \sin \frac{n\pi z}{\omega} \right), \quad (59)$$

где

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

2. **Функция θ .** Поставим задачу ввести в рассмотрение вместо функции $\sigma(z)$ другую целую функцию $\theta\left(\frac{z}{2\omega}\right)$, имеющую период 2ω . С этой целью добавим к функции $\sigma(z)$ показательный множитель

$$\varphi(z) = e^{az^2 + bz} \sigma(z)$$

и, пользуясь соотношениями (32), выберем числа a и b так, чтобы новая функция $\varphi(z)$ имела период 2ω .

Вследствие (32) мы имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(z + 2\omega) &= -e^{a(z+2\omega)^2 + b(z+2\omega) + 2\eta(z+\omega)} \sigma(z) = \\ &= -e^{4a\omega z + 4c\omega^2 + 2l\omega + 2\eta(z+\omega)} e^{az^2 + bz} \sigma(z), \\ \frac{\varphi(z + 2\omega)}{\varphi(z)} &= -e^{2(2a\omega + \eta)(z+\omega) + 2b\omega} \end{aligned} \quad (60)$$

и аналогично получаем:

$$\frac{\varphi(z + 2\omega')}{\varphi(z)} = -e^{2(2a\omega' + \eta')(z+\omega') + 2b\omega'}. \quad (61)$$

Чтобы обратить правую часть формулы (60) в единицу, положим:

$$a = -\frac{\eta}{2\omega}, \quad b = \frac{\pi i}{2\omega}.$$

Тогда, пользуясь соотношением Лежандра (31), формуле (61) придадим вид

$$\frac{\varphi(z + 2\omega')}{\varphi(z)} = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(z+\omega') + \pi i \frac{\omega'}{\omega}} = -e^{-\frac{\pi i z}{\omega}} = -x^{-2},$$

где положено:

$$\frac{z}{2\omega} = v, \quad e^{i\pi v} = e^{\frac{i\pi z}{2\omega}} = x. \quad (62)$$

Итак, для функции

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\eta z^2}{2\omega} + \frac{i\pi z}{2\omega}} \sigma(z) = e^{-\frac{\eta z^2}{2\omega}} x\sigma(z) \quad (63)$$

имеют место равенства

$$\varphi(z + 2\omega) = \varphi(z), \quad \varphi(z + 2\omega') = -x^{-2}\varphi(z). \quad (64)$$

Так как $\varphi(z)$ есть целая функция с периодом 2ω , то для нее в силу предыдущего пункта имеет место разложение вида

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{\pi i z}{\omega} n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n x^{2n}.$$

С другой стороны, добавление к z числа $2\omega'$ равносильно добавлению к v числа $\tau = \omega'/\omega$ или умножению x на

$$q = e^{i\pi\tau}, \quad (65)$$

$$\varphi(z + 2\omega') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n q^{2n} x^{2n},$$

и вторая из формул (64) дает нам:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n q^{2n} x^{2n} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n x^{2n-2} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n+1} x^{2n}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим:

$$c_{n+1} = -q^{2n} c_n = -q \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 c_n$$

или

$$(-1)^{n+1} q^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} c_{n+1} = (-1)^n q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} c_n.$$

Отсюда мы видим, что выражение

$$(-1)^n q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} c_n$$

должно сохранять одно и то же значение при всех целых значениях n . Полагая

$$(-1)^n q^{-(n-1/2)^2} c_n = Ci,$$

где C — некоторая постоянная, будем иметь:

$$c_n = (-1)^n q^{(n-1/2)^2} Ci$$

и, следовательно,

$$\varphi(z) = Ci \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} x^{2n}. \quad (66)$$

Функция же $\sigma(z)$ согласно формуле (63) примет вид

$$\sigma(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} x^{-1} \varphi(z).$$

Сопоставляя две последние формулы, мы, естественно приходим к введению новой функции

$$\theta(v) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} x^{2n-1}, \quad (67)$$

которая связана с $\sigma(z)$ следующим соотношением:

$$\sigma(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} C \theta(v). \quad (68)$$

Остается определить постоянную C . Для этого заметим, что $z = 2\omega v$ в силу последней формулы $\theta(0) = 0$ и, значит, $\frac{\theta(v)}{v}$ стремится к $\theta'(0)$, когда $v \rightarrow 0$.Деля обе части формулы (68) на z и устремляя затем z к нулю, получим:

$$1 = \frac{1}{2\omega} C \theta'(0),$$

отсюда $C = \frac{2\omega}{\theta'(0)}$ и, значит,

$$\sigma(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \frac{2\omega}{\theta'(0)} \theta(v). \quad (69)$$

Преобразуем теперь степенной ряд (67) для функции $\theta(v)$ в тригонометрический ряд. С этой целью, обозначая через положительное нечетное число, сначала положим:

$$v = 2n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

откуда $n = (v + 1)/2$, а затем

$$v = -2n + 1 \quad (n = 0, -1, -2, \dots),$$

откуда $n = (-v + 1)/2$, после чего формула (67) переписывается в виде

$$\theta(v) = i \left[\sum_{\nu}^{1, 3, 5, \dots} (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} q^{\frac{\nu^2}{4}} x^{\nu} + \sum_{\nu}^{1, 3, 5, \dots} (-1)^{\frac{-\nu+1}{2}} q^{\frac{\nu^2}{4}} x^{-\nu} \right],$$

где суммирование в каждой из сумм производится по нечетным положительным значениям ν . Заметив, что

$$(-1)^{\frac{\nu+1}{2}} = (-1)^{\nu} (-1)^{\frac{-\nu+1}{2}} = -(-1)^{\frac{-\nu+1}{2}} = -(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}$$

и

$$x^{\nu} - x^{-\nu} = e^{i\pi\nu v} - e^{-i\pi\nu v} = 2i \sin \pi\nu v,$$

мы придадим предыдущей формуле для $\theta(v)$ следующий вид:

$$\theta(v) = i \sum_{\nu}^{1, 3, 5, \dots} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{\nu^2}{4}} (x^{-\nu} - x^{\nu})$$

или

$$\begin{aligned} \theta(v) &= 2 \sum_{\nu}^{1, 3, 5, \dots} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{\nu^2}{4}} \sin \pi\nu v = \\ &= 2 [q^{1/4} \sin \pi v - q^{9/4} \sin 3\pi v + q^{25/4} \sin 5\pi v \dots]. \quad (70) \end{aligned}$$

Эта функция $\theta(v)$ есть нечетная целая функция, которая для своего построения требует знания числа $\tau = \omega'/\omega$, лежащего в верхней полуплоскости, причем $q = e^{i\pi\tau}$. Поэтому ее иногда обозначают $\theta(v; \tau)$. Очевидно, ряд (70) быстро сходящийся, так как $|q| < 1$.

3. **Функции θ_h .** В представлениях эллиптических функций Якоби входят наряду с функцией σ еще три функции θ_h . Желая выразить эллиптические функции Якоби в виде отношений целых функций, изображаемых быстро сходящимися рядами, мы должны наряду с функцией θ ввести в рассмотрение еще три функции θ_h . Эти целые функции θ_h будут соответствовать трем целым функциям σ_h , подобно тому как рассмотренная в предыдущем пункте функция θ отвечала функции σ . Как известно,

$$\sigma_1(z) = e^{\eta z} \frac{\sigma(\omega - z)}{\sigma(\omega)}$$

и, значит, согласно формуле (68)

$$\sigma_1(z) = \frac{C}{\sigma(\omega)} e^{\eta z + \frac{\eta}{2\omega}(\omega - z)^2} \theta\left(\frac{\omega - z}{2\omega}\right)$$

или

$$\sigma_1(z) = C_1 e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \theta(1/2 - v), \quad (71)$$

где C_1 — новая постоянная.

Выведем теперь разложение в тригонометрический ряд для функции $\theta\left(\frac{1}{2} - v\right)$. В силу нечетности функции $\theta(v)$ мы имеем:

$$\theta(1/2 - v) = -\theta(v - 1/2).$$

Заметив, что вычитание из v числа $1/2$ равносильно умножению $x = e^{i\pi v}$ на $-i$, мы получим вследствие (67):

$$\theta\left(\frac{1}{2} - v\right) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} (-ix)^{2n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-1/2)^2} x^{2n-1}.$$

В связи с этим положим:

$$\theta_1(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-1/2)^2} x^{2n-1}, \quad (72)$$

после чего формула (71) примет вид

$$\sigma_1(z) = C_1 e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \theta_1(v). \quad (73)$$

Для определения постоянной C_1 положим $v = 0$. Тогда $z = 0$ и $\sigma_1(0) = 1$ и, следовательно,

$$1 = C_1 \theta_1(0) \quad \text{или} \quad C_1 = \frac{1}{\theta_1(0)}.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\sigma_1(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \frac{\theta_1(0)}{\theta_1(v)}. \quad (74)$$

Остается степенной ряд (72) для функции $\theta_1(v)$ преобразовать в тригонометрический ряд, что делается так же, как и для $\theta(v)$.

Выполнив это преобразование, найдем:

$$\theta_1(v) = 2 [q^{1/4} \cos \pi v + q^{9/4} \cos 3\pi v + q^{25/4} \cos 5\pi v + \dots]. \quad (75)$$

В дальнейшем для сокращения письма мы не будем писать аргумента $v = 0$, так что

$$\theta_1 = 2 [q^{1/4} + q^{9/4} + q^{25/4} + \dots], \quad \theta' = 2\pi [q^{1/4} - 3q^{9/4} + 5q^{25/4} - \dots]. \quad (76)$$

Эти ряды быстро сходятся, так как $|q| < 1$, и суммы этих рядов суть функции, голоморфные относительно τ , определенные в верхней полуплоскости. Заметив, что

$$\sigma_2(z) = e^{\eta_2 z} \frac{\sigma(\omega_2 - z)}{\sigma(\omega_2)},$$

где $\eta_2 = \eta + \eta'$, $\omega_2 = \omega + \omega'$, согласно формуле (68) мы получим:

$$\sigma_2(z) = \frac{C}{\sigma(\omega_2)} e^{\eta_2 z + \eta \frac{(\omega_2 - z)^2}{2\omega}} \theta\left(\frac{\omega_2 - z}{2\omega}\right)$$

или

$$\sigma_2(z) = C_2 e^{\frac{\eta_2 z^2}{2\omega}} e^{\left(\eta' - \eta \frac{\omega'}{\omega}\right) z} \theta(1/2 + \tau/2 - v),$$

и в силу соотношения Лежандра:

$$\sigma_2(z) = C_2 e^{\frac{\eta_2 z^2}{2\omega}} x^{-1/2} \theta(1/2 + \tau/2 - v). \quad (77)$$

Поступая аналогично, мы найдем:

$$\sigma_3(z) = C_3 e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} x^{-1} \theta(\tau/2 - v). \quad (78)$$

Выведем теперь разложения для функций $\theta(1/2 + \tau/2 - v)$ и $\theta(\tau/2 - v)$ в тригонометрические ряды. В силу нечетности функций $\theta(v)$ имеем:

$$\theta(1/2 + \tau/2 - v) = -\theta(v - 1/2 - \tau/2).$$

Заметив, что вычитание из v числа $1/2 + \tau/2$ равносильно умножению $x = e^{\pi i v}$ на $-iq^{-1/2}$, мы получим вследствие (67):

$$\begin{aligned} \theta(1/2 + \tau/2 - v) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} (-iq^{-1/2}x)^{2n-1} = \\ &= q^{-1/4}x \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-1)^2} x^{2n-2} \end{aligned}$$

или, заменяя переменную суммирования n на $n+1$:

$$\theta\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right) = q^{-1/4}x \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} x^{2n}, \quad (79)$$

и точно так же

$$\theta\left(\frac{\tau}{2} - v\right) = q^{-1/4}ix \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} x^{2n}. \quad (80)$$

Сопоставляя последние две формулы с выражениями (77) и (78), введем новые функции $\theta_2(v)$ и $\theta_3(v)$

$$\theta_2(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} x^{2n}, \quad (81)$$

$$\theta_3(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} x^{2n} \quad (82)$$

и перепишем формулы для $\sigma_2(z)$ и $\sigma_3(z)$ в виде

$$\sigma_2(z) = \bar{C}_2 e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \theta_2(v), \quad (83)$$

$$\sigma_3(z) = \bar{C}_3 e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \theta_3(v), \quad (84)$$

где \bar{C}_2 и \bar{C}_3 — некоторые новые постоянные. Для их определения положим $z = 0$, а значит, и $v = 0$; тогда найдем:

$$1 = \bar{C}_2 \theta_2(0), \quad 1 = \bar{C}_3 \theta_3(0),$$

т. е.

$$\bar{C}_2 = 1/\theta_2, \quad \bar{C}_3 = 1/\theta_3.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\sigma_2(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \frac{\theta_2(v)}{\theta_2(0)}, \quad \sigma_3(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \frac{\theta_3(v)}{\theta_3(0)}. \quad (85)$$

Степенные ряды (81) и (82) для функций $\theta_2(v)$ и $\theta_3(v)$ могут быть легко преобразованы в тригонометрические ряды, как мы это уже делали для функций $\theta(v)$ и $\theta_1(v)$.

В результате мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \theta_2(v) &= 1 + 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + 2q^9 \cos 6\pi v + \dots \\ \theta_3(v) &= 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \dots \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

В частности, при $v = 0$ будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \theta_2 &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots \\ \theta_3 &= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Эти ряды очень быстро сходятся, так как по условию $|q| < 1$, и суммы этих рядов будут функции, голоморфные относительно τ , определенные в верхней полуплоскости.

4. Свойства функций тэта. Введенные в предыдущих пунктах четыре функции тэта суть целые функции независимого переменного v , причем каждая из них зависит от параметра τ , являющегося комплексным числом из верхней полуплоскости. Поэтому, когда хотя явно выразить зависимость этих функций от τ , их обозначают таким образом:

$$\theta(v; \tau), \theta_k(v; \tau) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Как показывают тригонометрические разложения функций тэта, первая из них $\theta(v)$ есть нечетная, а остальные $\theta_k(v)$ — четные. Исходя из тригонометрических разложений функций тэта, мы непосредственно можем узнать, как эти функции изменяются при прибавлении к аргументу v числа $1/2$:

$$\begin{aligned} \theta(v + 1/2) &= \theta_1(v), & \theta_1(v + 1/2) &= -\theta(v); \\ \theta_2(v + 1/2) &= \theta_3(v), & \theta_3(v + 1/2) &= \theta_2(v). \end{aligned}$$

Чтобы узнать изменения функций тэта при прибавлении к аргументу v числа $\tau/2$, будем отправляться от представления их в виде степенных рядов, замечая, что прибавление к аргументу v числа $\tau/2$ равносильно умножению x на $q^{1/2}$. Таким образом, в силу (67)

$$\begin{aligned} \theta(v + \tau/2) &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} q^{\frac{2n-1}{2}} x^{2n-1} = \\ &= iq^{-1/4} x^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} x^{2n}, \end{aligned}$$

т. е. вследствие (82)

$$\theta(v + \tau/2) = i\theta_3(v),$$

где

$$i = q^{-1/4} x^{-1} = q^{-1/4} e^{-i\pi v}. \quad (88)$$

Поступая аналогично, покажем, что

$$\theta_1(v + \tau/2) = i\theta_2(v), \quad \theta_2(v + \tau/2) = i\theta_1(v), \quad \theta_3(v + \tau/2) = i\theta(v)$$

Отсюда можно получить и другие формулы преобразования. Так, например,

$$\begin{aligned} \theta_1(v + \tau) &= \theta_1(v + \tau/2 + \tau/2) = q^{-1/4} e^{-i\pi} (v + \tau/2) \theta_2(v + \tau/2) = \\ &= q^{-1/4} e^{-i\pi} (v + \tau/2) q^{-1/4} e^{-i\pi v} \theta_1(v) = q^{-1} x^{-2} \theta_1(v), \end{aligned}$$

т. е.

$$\theta_1(v + \tau) = \rho \theta_1(v),$$

где

$$\rho = q^{-1} x^{-2}. \quad (89)$$

Заменяя здесь функции сигма через функции зэта, согласно формулам (69), (74) и (85) будем иметь:

$$\sqrt{\wp(z) - e_k} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta'}{\theta_h} \frac{\theta_h(v)}{\theta(v)} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (92)$$

Полагая в этих формулах $z = \omega$, т. е. $v = 1/2$, а затем $z = \omega + \omega'$, т. е. $v = 1/2 + \tau/2$, мы получим:

$$\sqrt{e_1 - e_k} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta'}{\theta_h} \frac{\theta_h(1/2)}{\theta(1/2)}, \quad \sqrt{e_2 - e_k} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta'}{\theta_h} \frac{\theta_h(1/2 + \tau/2)}{\theta(1/2 + \tau/2)}.$$

Пользуясь же таблицей (90), содержащей формулы приведения для функций зэта, получим:

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta'\theta_3}{\theta_1\theta_2}, \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta'\theta_2}{\theta_1\theta_3}, \quad \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta'\theta_1}{\theta_2\theta_3}.$$

Последние формулы можно записать в более простой форме, если воспользоваться следующим тождеством:

$$\theta' = \pi\theta_1\theta_2\theta_3, \quad (93)$$

к доказательству которого мы сейчас перейдем.

Согласно этому тождеству предыдущие формулы примут вид

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega} \theta_3^2, \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega} \theta_2^2, \quad \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega} \theta_1^2. \quad (94)$$

Обращаясь к доказательству тождества (93), предварительно выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет каждая функция зэта, если ее рассматривать как функцию двух аргументов v и τ .

Каждая функция зэта является целой функцией относительно v при всяком заданном числе τ из верхней полуплоскости; при всяком же заданном комплексном числе v она есть голоморфная функция от τ в верхней полуплоскости, что непосредственно вытекает из равномерной сходимости рядов (70), (75) и (86) при условии $|q| < \rho < 1$.

Покажем теперь, что все четыре функции зэта как функции двух аргументов v и τ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \theta(v, \tau)}{\partial \tau^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta(v, \tau)}{\partial \tau}. \quad (95)$$

Проверим это уравнение, например, для функции $\theta_3(v)$. Общий член ряда (86), определяющего функцию $\theta_3(v)$, имеет вид

$$2(-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi v = 2(-1)^n e^{i\pi n^2 \tau} \cos 2n\pi v.$$

Дифференцируя его дважды по v , получим:

$$-8(-1)^n \pi^2 e^{i\pi n^2 \tau} \cos 2n\pi v,$$

что совпадает с результатом, получающимся путем дифференцирования общего члена один раз по τ и умножения на $4\pi i$:

$$4\pi i [2(-1)^n i \pi n^2 e^{i\pi n^2 \tau} \cos 2n\pi v] = -8(-1)^n \pi^2 e^{i\pi n^2 \tau} \cos 2n\pi v.$$

Почленное же дифференцирование ряда (86) законно вследствие его равномерной сходимости на основании теоремы Вейерштрасса. Аналогично можно

проверить справедливость уравнения и для остальных функций тэта. Возвращаясь теперь к доказательству тождества (93), будем отправляться от соотношения (92):

$$\wp(2\omega v) - e_k = \left[\frac{1}{2\omega} \frac{\theta'}{\theta_k} \frac{\theta_k(v)}{\theta(v)} \right]^2,$$

из которого мы получим, разлагая функции тэта в ряд Маклорена и используя нечетность $\theta(v)$ и четность $\theta_k(v)$:

$$\wp(2\omega v) - e_k = \left[\frac{1}{2\omega} \frac{1 + \frac{\theta_k''}{\theta_k} \frac{v^2}{2} + \dots}{v + \frac{\theta_k'''}{\theta_k'} \frac{v^3}{6} + \dots} \right]^2$$

или

$$\wp(2\omega v) - e_k = \frac{1}{4\omega^2 v^2} \left[1 + \left(\frac{\theta_k''}{\theta_k} - \frac{1}{3} \frac{\theta_k'''}{\theta_k'} \right) \frac{v^2}{2} + \dots \right]^2.$$

Так как разложение $\wp(z)$ в окрестности $z = 0$ не содержит свободного члена, то отсюда находим:

$$e_k = \frac{1}{4\omega^2} \left(\frac{1}{3} \frac{\theta_k'''}{\theta_k'} - \frac{\theta_k''}{\theta_k} \right),$$

откуда

$$\frac{\theta_k''}{\theta_k'} = \frac{\theta_1'}{\theta_1} + \frac{\theta_2''}{\theta_2} + \frac{\theta_3''}{\theta_3}, \quad (96)$$

потому что

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

С другой стороны, уравнение (95) при $v = 0$ дает:

$$\theta_k'' = 4\pi i \frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} \quad (k = 1, 2, 3);$$

дифференцируя же уравнение (95) по v , а затем полагая $v = 0$, получим:

$$\theta'' = 4\pi i \frac{\partial \theta'}{\partial \tau}.$$

Пользуясь двумя последними соотношениями, перепишем формулу (96) в виде

$$\frac{1}{\theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = \frac{1}{\theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + \frac{1}{\theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + \frac{1}{\theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \tau},$$

откуда в результате интегрирования по τ найдем:

$$\theta' = C \theta_1 \theta_2 \theta_3,$$

где C — постоянная, не зависящая от τ , т. е. от q . Для ее определения подставим в обе части последнего тождества разложения (76) и (87):

$$2\pi (q^{1/4} - \dots) = C (2q^{1/4} + \dots) (1 + \dots) (1 - \dots).$$

Сравнивая коэффициенты при младших членах, содержащих $q^{1/4}$, мы получим $C = \pi$, что доказывает искомое тождество (93).

§ 7. Представление эллиптических функций Якоби посредством функций тэта

В § 5 мы определили три эллиптические функции Якоби посредством формул

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)},$$

где

$$u = z \sqrt{e_1 - e_3}.$$

Заменяя в этих формулах функции сигма через функции тэта согласно формулам (69), (74) и (85) и выражая $\sqrt{e_1 - e_3}$ из соотношения (94), мы получим:

$$\operatorname{sn} u = \pi \theta_2^2 \frac{\theta_3}{\theta'} \frac{\theta(v)}{\theta_3(v)}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\theta_3}{\theta_1} \frac{\theta_1(v)}{\theta_3(v)},$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\theta_3}{\theta_2} \frac{\theta_2(v)}{\theta_3(v)}, \quad (97)$$

где

$$u = \pi \theta_2^2 v. \quad (98)$$

В § 5 мы назвали модулем эллиптических функций Якоби число k , определив его условием $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$. В силу формул (94) последнее равенство примет вид

$$k^2 = \theta_1^4 / \theta_2^4. \quad (99)$$

Введем еще так называемый дополнительный модуль, определив его формулой

$$k'^2 = \theta_3^4 / \theta_2^4. \quad (100)$$

Путем сложения первого и третьего соотношений (94) и использования второго из них находим:

$$\theta_1^4 + \theta_3^4 = \theta_2^4$$

и, значит,

$$k^2 + k'^2 = 1. \quad (101)$$

Формулы (99) и (100) определяют k^2 и k'^2 в виде квадратов некоторых однозначных функций от τ , и мы можем принять:

$$k = \theta_1^2 / \theta_2^2, \quad k' = \theta_3^2 / \theta_2^2. \quad (102)$$

Замечая, далее, что θ_1 и θ_3^2 суть однозначные функции от τ , мы должны \sqrt{k} и $\sqrt{k'}$ рассматривать таковыми же и можем принять:

$$\sqrt{k} = \frac{\theta_1}{\theta_2}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\theta_3}{\theta_2}, \quad \sqrt{\frac{k'}{k}} = \frac{\theta_3}{\theta_1},$$

откуда

$$\pi \theta_2^2 \frac{\theta_3}{\theta'} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

так как

$$\theta' = \pi\theta_1\theta_2\theta_3.$$

Таким образом, формулы (97) примут вид

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta(v)}{\theta_3(v)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_1(v)}{\theta_3(v)}, \quad \delta \operatorname{sn} u = \sqrt{k'} \frac{\theta_2(v)}{\theta_3(v)}. \quad (103)$$

В § 5 были указаны периоды, нули и полюсы эллиптических функций Якоби. Используя таблицу (90), дающую формулы приведения функций тэта, мы можем составить аналогичную таблицу для эллиптических функций Якоби. С этой целью заметим, что прибавление к v слагаемого $1/2$ или $\tau/2$ равносильно прибавлению к u слагаемого

$$\omega \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2} \theta_2^2 \quad \text{или} \quad \omega' \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2} \tau \theta_2^2.$$

Отсюда, пользуясь основными соотношениями (103), получим из таблицы (90) для функций тэта таблицу (104), дающую формулы приведения эллиптических функций Якоби.

	$u + \omega \sqrt{e_1 - e_3}$	$u + \omega' \sqrt{e_1 - e_3}$	$u + (\omega + \omega') \sqrt{e_1 - e_3}$	$u + 2\omega \sqrt{e_1 - e_3}$	$u + 2\omega' \sqrt{e_1 - e_3}$	$u + (2\omega + 2\omega') \sqrt{e_1 - e_3}$
sn	$\frac{\operatorname{cn} u}{\delta \operatorname{sn} u}$	$\frac{1}{k} \frac{1}{\operatorname{sn} u}$	$\frac{1}{k} \frac{\delta \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$	$-\operatorname{sn} u$	$\operatorname{sn} u$	$-\operatorname{sn} u$
cn	$-k' \frac{\operatorname{sn} u}{\delta \operatorname{sn} u}$	$-\frac{i}{k} \frac{\delta \operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} u}$	$-i \frac{k'}{k} \frac{1}{\operatorname{cn} u}$	$-\operatorname{cn} u$	$-\operatorname{cn} u$	$\operatorname{cn} u$
$\delta \operatorname{sn}$	$k' \frac{1}{\delta \operatorname{sn} u}$	$-i \frac{\operatorname{cn} u}{\delta \operatorname{sn} u}$	$ik' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$	$\delta \operatorname{sn} u$	$-\delta \operatorname{sn} u$	$-\delta \operatorname{sn} u$

(104)

§ 8. Формулы сложения для эллиптических функций Якоби

Считая v произвольным параметром, рассмотрим три функции переменного u :

$$f_1(u) = \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u + v), \quad f_2(u) = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u + v), \quad f_3(u) = \delta \operatorname{sn} u \delta \operatorname{sn}(u + v).$$

Из таблицы (104) мы усматриваем, что все эти функции имеют периоды $2\omega \sqrt{e_1 - e_3}$ и $2\omega' \sqrt{e_1 - e_3}$. Эллиптическая функция $f_1(u)$ имеет простые полюсы в тех точках, где $\operatorname{sn} u$ или $\operatorname{sn}(u + v)$ имеют таковые.

Из таблицы § 5, дающей полюсы $\operatorname{sn} u$, мы видим, что это будут точки, аффиксы которых отличаются от $\omega' \sqrt{e_1 - e_3}$ или $-v + \omega' \sqrt{e_1 - e_3}$ на периоды, т. е. на числа вида

$$(2m\omega + 2n\omega') \sqrt{e_1 - e_3}.$$

где m, n — любые целые числа. Следовательно, в основном параллелограмме периодов, построенном на векторах $2\omega \sqrt{e_1 - e_3}$ и $2\omega' \sqrt{e_1 - e_3}$, таких точек будет только две. То же заключение справедливо и в отношении функций $f_2(u)$ и $f_3(u)$. Таким образом, наши три функции $f_k(u)$ суть эллиптические функции второго порядка с одинаковыми периодами и с двумя одинаковыми простыми полюсами в параллелограмме периодов.

Очевидно, возможно подобрать постоянные A и B так, чтобы две функции

$$F_1(u) = f_2(u) + A f_1(u) \quad \text{и} \quad F_2(u) = f_3(u) + B f_1(u)$$

не имели полюса $u = \omega' \sqrt{e_1 - e_3}$. При таком выборе постоянных A и B две функции $F_1(u)$ и $F_2(u)$ будут эллиптическими первого порядка, т. е. константами. Итак, при определенном выборе постоянных A и B имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cn} u \operatorname{cn} (u + v) + A \operatorname{sn} u \operatorname{sn} (u + v) &= C, \\ \operatorname{dn} u \operatorname{dn} (u + v) + B \operatorname{sn} u \operatorname{sn} (u + v) &= D, \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

где A, B, C, D , будучи постоянными относительно u , зависят от v . Чтобы определить эти постоянные, положим в формулах (105) $u = 0$, тогда найдем:

$$C = \operatorname{cn} v, \quad D = \operatorname{dn} v.$$

Дифференцируя соотношения (105) по u и полагая затем $u = 0$, будем иметь в силу (53) и (54):

$$\operatorname{cn}' v + A \operatorname{sn} v = 0, \quad \operatorname{dn}' v + B \operatorname{sn} v = 0,$$

откуда вследствие (54)

$$A = \operatorname{dn} v, \quad B = k^2 \operatorname{cn} v.$$

Подставляя найденные величины постоянных в соотношения (105), перепишем их в виде

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cn} u \operatorname{cn} (u + v) + \operatorname{dn} v \operatorname{sn} u \operatorname{sn} (u + v) &= \operatorname{cn} v, \\ \operatorname{dn} u \operatorname{dn} (u + v) + k^2 \operatorname{cn} v \operatorname{sn} u \operatorname{sn} (u + v) &= \operatorname{dn} v. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Эти соотношения представляют собой тождества относительно u и v . Заменяя u на $-u$ и v на $u + v$, получим из них:

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{dn} (u + v) \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v &= \operatorname{cn} (u + v), \\ \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{cn} (u + v) \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v &= \operatorname{dn} (u + v). \end{aligned}$$

Из последних двух тождеств найдем $\operatorname{cn} (u + v)$ и $\operatorname{dn} (u + v)$, что и даст нам формулы сложения функций Якоби cn и dn . Внося значение $\operatorname{cn} (u + v)$ в первое из равенств (106), найдем $\operatorname{sn} (u + v)$, т. е. формулу сложения sn .

Итак, в результате указанных элементарных вычислений будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} (u + v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \\ \operatorname{cn} (u + v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \\ \operatorname{dn} (u + v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Известно, что $\operatorname{sn} u$ можно рассматривать как обращение эллиптического интеграла первого рода, откуда мы усматриваем, что при $k = 0$ функция $\operatorname{sn} u$ вырождается в $\operatorname{sin} u$. С другой стороны, из формул (50) мы видим, что при $k = 0$ функции $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ обращаются соответственно в $\cos u$ и 1. Таким образом, если в формулах (107) принять $k = 0$, то первые два из этих равенств будут выражать известные теоремы сложения для sin и \cos , а последнее обратится в тождество $1 = 1$, что объясняется отсутствием для $\operatorname{dn} u$ аналога среди тригонометрических функций.

Упражнения к главе XI¹⁾

1. Считая $\omega' \rightarrow \infty$ конечным и отличным от нуля, доказать следующие формулы:

$$\wp(z) = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{z\pi}{2\omega}\right)} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{\frac{9g_3}{2g_2}}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{9g_2^2}{2g_2^2} z}\right)} - \frac{3g_3}{2g_2};$$

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{9g_3}{2g_2}, \quad e_1 = \frac{3g_3}{g_2}, \quad e_2 = e_3 = \frac{3g_3}{2g_2}, \quad g_2^3 - 27g_3^2 = 0;$$

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{ctg} \frac{z\pi}{2\omega} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 z, \quad 2\eta\omega = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\sigma(z) = e^{-\frac{1}{6}\left(\frac{z\pi}{2\omega}\right)^2} \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{z\pi}{2\omega}, \quad \sigma_1(z) = e^{-\frac{1}{6}\left(\frac{z\pi}{2\omega}\right)^2} \cos \frac{z\pi}{2\omega},$$

$$\sigma_2(z) = \sigma_3(z) = e^{-\frac{1}{6}\left(\frac{z\pi}{2\omega}\right)^2}.$$

2. Доказать, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp(w) \end{vmatrix},$$

где u, v, w — три независимые переменные, имеет значение

$$\frac{2\sigma(v-w)\sigma(w-u)\sigma(u-v)\sigma(u+v+w)}{[\sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)]^3}.$$

Указание. Определитель Δ , рассматриваемый как функция u , есть эллиптическая функция третьего порядка, имеющая тройные полюсы в точке $u=0$ и ей эквивалентных точках. Нули этой функции будут в точках $v, w, -(v+w)$ и им эквивалентных.

Таким образом, получим: $\Delta = C \frac{\sigma(u-v)\sigma(u-w)\sigma(u+v+w)}{\sigma^3(u)}$, где C не зависит от u . Далее определяем C путем умножения обеих частей на u^3 и перехода к пределу при $u \rightarrow 0$.

Из установленной формулы следует, что при $u+v+w=0$ определитель Δ есть тождественный нуль. Это дает нам теорему сложения функции $\wp(u)$.

3. Уравнения

$$\sqrt{\wp(z) - e_1} = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma(z)}, \quad \sqrt{\wp(z) - e_2} = \frac{\sigma_2(z)}{\sigma(z)}, \quad \sqrt{\wp(z) - e_3} = \frac{\sigma_3(z)}{\sigma(z)}$$

определяют три квадратных радикала как однозначные функции от z .

¹⁾ Приводимые ниже упражнения взяты из книги: Appel et Lacour, Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications.

Давая последовательно переменному z значения ω , $\omega + \omega'$ и ω' , получим равенства

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2(\omega)}{\sigma(\omega)} = \frac{e^{(\eta+\eta')\omega} \sigma(\omega')}{\sigma(\omega) \sigma(\omega + \omega')}, \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega)}{\sigma(\omega)} = \frac{e^{\eta'\omega} \sigma(\omega + \omega')}{\sigma(\omega) \sigma(\omega')};$$

$$\sqrt{e_2 - e_1} = \frac{\sigma_1(\omega + \omega')}{\sigma(\omega + \omega')} = -\frac{e^{\eta(\omega + \omega')} \sigma(\omega')}{\sigma(\omega) \sigma(\omega + \omega')};$$

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega + \omega')}{\sigma(\omega + \omega')} = -\frac{e^{\eta'(\omega + \omega')} \sigma(\omega)}{\sigma(\omega') \sigma(\omega + \omega')};$$

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_1(\omega')}{\sigma(\omega')} = \frac{e^{-\eta\omega'} \sigma(\omega + \omega')}{\sigma(\omega) \sigma(\omega')},$$

$$\sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\sigma_2(\omega')}{\sigma(\omega')} = \frac{e^{(\eta+\eta')\omega'} \sigma(\omega)}{\sigma(\omega') \sigma(\omega + \omega')},$$

посредством которых однозначно определены значения шести квадратных радикалов. Между этими радикалами имеют место соотношения

$$\sqrt{e_3 - e_2} = -i \sqrt{e_2 - e_3}, \quad \sqrt{e_3 - e_1} = -i \sqrt{e_1 - e_3},$$

$$\sqrt{e_2 - e_1} = -i \sqrt{e_1 - e_2}.$$

4. Посредством исключения $\wp(z)$ из соотношений

$$\wp(z) - e_\lambda = \frac{\sigma_\lambda^2(z)}{\sigma^2(z)} \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

установить формулы

$$\sigma_2^2(z) - \sigma_3^2(z) + (e_2 - e_3) \sigma^2(z) = 0,$$

$$\sigma_3^2(z) - \sigma_1^2(z) + (e_3 - e_1) \sigma^2(z) = 0,$$

$$\sigma_1^2(z) - \sigma_2^2(z) + (e_1 - e_2) \sigma^2(z) = 0,$$

$$(e_2 - e_3) \sigma_1^2(z) + (e_3 - e_1) \sigma_2^2(z) + (e_1 - e_2) \sigma_3^2(z) = 0.$$

5. Получить из формулы

$$\wp(z) = -2 \frac{\sigma_\lambda(z) \sigma_\mu(z) \sigma_\nu(z)}{\sigma(z) \sigma(z) \sigma(z)}$$

для функций

$$\frac{\sigma(z)}{\sigma_\lambda(z)}, \quad \frac{\sigma_\mu(z)}{\sigma_\nu(z)}, \quad \frac{\sigma_\lambda(z)}{\sigma(z)}$$

следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dz} \frac{\sigma(z)}{\sigma_\lambda(z)} = \frac{\sigma_\mu(z)}{\sigma_\lambda(z)} \frac{\sigma_\nu(z)}{\sigma_\lambda(z)}, \quad \frac{d}{dz} \frac{\sigma_\mu(z)}{\sigma_\nu(z)} = -(e_\mu - e_\nu) \frac{\sigma_\lambda(z)}{\sigma_\nu(z)} \frac{\sigma(z)}{\sigma_\nu(z)};$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\sigma_\lambda(z)}{\sigma(z)} = -\frac{\sigma_\mu(z)}{\sigma(z)} \frac{\sigma_\nu(z)}{\sigma(z)}.$$

6. Установить формулы

$$\frac{1}{2} \frac{\wp'(z)}{\wp(z) - e_\lambda} = \frac{\sigma'_\lambda(z)}{\sigma_\lambda(z)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{d}{dz} \ln \frac{\sigma_\lambda(z)}{\sigma(z)},$$

$$\frac{1}{2} \frac{(e_\mu - e_\nu) \wp'(z)}{(\wp(z) - e_\mu)(\wp(z) - e_\nu)} = \frac{\sigma'_\mu(z)}{\sigma_\mu(z)} - \frac{\sigma'_\nu(z)}{\sigma_\nu(z)} = \frac{d}{dz} \ln \frac{\sigma_\mu(z)}{\sigma_\nu(z)},$$

$$- \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp(z) - e_\lambda} - e_\lambda = \frac{d}{dz} \frac{\sigma'_\lambda(z)}{\sigma_\lambda(z)} = \frac{d^2}{dz^2} \ln \sigma_\lambda(z).$$

7. Доказать, что существует линейное и однородное соотношение между функциями

$$\sigma(z+a)\sigma(z-a), \quad \sigma(z+b)\sigma(z-b), \quad \sigma(z+c)\sigma(z-c).$$

У к а з а н и е. Функция

$$\frac{A\sigma(z+b)\sigma(z-b) + B\sigma(z+c)\sigma(z-c)}{\sigma(z+a)\sigma(z-a)}$$

есть эллиптическая с двумя простыми полюсами в параллелограмме периодов. Если определить отношение постоянных A и B так, чтобы числитель обращался в нуль при $z = a$, наша функция будет тождественно равна постоянному.

ГЛАВА XII

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Условия, определяющие конформное отображение

1. **Отображение единичного круга самого на себя.** В гл. III, § 1, п. 4 мы показали, что всякое линейное преобразование обладает свойством отображать окружность в окружность. Теперь мы покажем, что это свойство характеризует линейные преобразования. Действительно, предположим, что $w = f(z)$ есть взаимно однозначное конформное отображение, переводящее один круг в другой, и покажем, что оно будет линейным.

Прежде всего пусть L есть линейное преобразование, переводящее данный круг плоскости z в единичный круг плоскости τ , а L_1 — линейное преобразование, переводящее данный круг плоскости w в тот же единичный круг плоскости τ . Тогда преобразование $S = L_1 f L^{-1}$ будет отображать единичный круг плоскости τ на самого себя; доказав его линейность, мы заключим отсюда, что и преобразование

$$f = L_1^{-1} S L$$

будет также линейным.

Итак, вопрос сводится к изучению характера взаимно однозначного и конформного преобразования единичного круга самого на себя.

Линейное преобразование единичного круга самого на себя, как известно из гл. III, § 1, п. 9, будет вида

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad (1)$$

где $|\alpha| < 1$ и θ — любое действительное число. Оно содержит три произвольных действительных параметра и, следовательно, однозначно определяется по трем условиям.

Условимся называть *элементом* совокупность точки и выходящего из нее направления. Если нам задан элемент, состоящий из точки α и направления — θ , выходящего из этой точки, то линейное преобразование, переводящее этот элемент в элемент, образованный из начала координат и направления положительной

действительной оси, однозначно определяется формулой (1). Аналитически начальные данные могут быть записаны так:

$$\omega(\alpha) = 0, \quad \arg \omega'(\alpha) = \theta. \quad (2)$$

Чтобы доказать, что преобразование (1) есть единственное взаимно однозначное и конформное преобразование единичного круга самого на себя, удовлетворяющее начальным условиям (2), достаточно показать, что взаимно однозначное и конформное отображение $\omega = f(z)$ единичного круга самого на себя при начальных условиях

$$f(0) = 0, \quad f'(0) > 0 \quad (3)$$

есть тождественное преобразование.

В самом деле, пусть $\omega = F(z)$ есть взаимно однозначное и конформное отображение единичного круга самого на себя, удовлетворяющее условиям (2). Обозначая через L линейное преобразование (1), рассмотрим вспомогательное преобразование вида FL^{-1} , которое, очевидно, удовлетворяет условиям (3) и переводит единичный круг сам в себя. Доказав тождественность этого преобразования, мы отсюда усматриваем, что $F(z) = L(z)$, что и нужно.

Итак, нам остается показать, что взаимно однозначное и конформное отображение $\omega = f(z)$ единичного круга самого на себя при условиях (3) есть тождественное.

Мы докажем справедливость следующего, более общего предложения: *если функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям $f(\alpha) = \alpha$, $f'(\alpha) > 0$, отображает взаимно однозначно и конформно область G , лежащую в конечной части плоскости и содержащую точку α , на самое себя, то $f(z) \equiv z$.*

При доказательстве этого предложения мы можем считать, что $\alpha = 0$ (к этому можно прийти путем преобразований $\zeta = z - \alpha$, $\varphi(\zeta) = f(\zeta + \alpha) - \alpha$, которые мы будем предполагать выполненными); кроме того, можно считать, что $f'(0) = \alpha \geq 1$, так как в случае $f'(0) < 1$ мы могли бы вместо $f(z)$ рассматривать ее обратную функцию. Далее, заметим, что вместе с функцией $f(z) = f_1(z)$ также все ее итерации $f_2(z) = f[f_1(z)]$, $f_3(z) = f[f_2(z)]$, ... выполняют отображение области G на самое себя, причем все время $f_n(0) = 0$, $f'_n(0) \geq 1$.

В окрестности нулевой точки функция $f(z)$ имеет разложение

$$f(z) = az + bz^v + \dots,$$

где $v \geq 2$ и $a \geq 1$. Очевидно, в окрестности точки $z = 0$ разложение в степенной ряд функции $f_n(z)$ будет вида

$$f_n(z) = a^n z + \dots$$

Предположим сначала, что $a > 1$. Это значит, что производная $f'_n(0) = a^n$ при достаточно большом n может быть сделана больше любого наперед заданного числа A . Обозначим через M радиус круга с центром в начале координат, который содержит целиком

область G ; тогда в области G будет $|f_n(z)| < M$; далее, пусть ρ есть радиус круга с центром в нулевой точке, который целиком вместе со своей границей лежит в области G ; тогда имеем (на основании гл. V, § 2, п. 8):

$$a^n = f'_n(0) \leq M/\rho.$$

Так как это неравенство должно иметь место для каждого значения n и $a > 1$, то оно невозможно. Следовательно, остается допустить, что $a = 1$.

Тогда из разложения

$$f(z) = z + bz^v + \dots$$

следует

$$f_2(z) = z + 2bz^v + \dots$$

и вообще

$$f_n(z) = z + nbz^v + \dots$$

Заметив, что $n|b| \leq M/\rho^v$ (гл. V, § 2, п. 8) и что в правой части этого неравенства стоит число, не зависящее от n , мы видим, что $b = 0$. Таким образом, $f(z)$ не может быть отличным от z , что и нужно было доказать.

2. Условия, определяющие единственность конформного отображения. Пусть дана некоторая односвязная область G плоскости комплексного переменного z . Спрашивается, существует ли такая функция $w = f(z)$, голоморфная в области G , которая отображала бы взаимно однозначным образом область G на круг, данный в плоскости w ?

Эта основная проблема теории конформных отображений была поставлена Риманом и в дальнейшем получила полное разрешение в утвердительном смысле (для областей, граница которых содержит более одной точки).

Допуская существование одной функции $w = f(z)$, мы легко замечаем, что таких функций будет бесконечное множество. Действительно, как известно, мы можем преобразовывать круг сам на себя бесконечным множеством линейных функций. Так, например, если $w = f(z)$ есть функция, которая отображает область G на круг $|w| < 1$, то тогда функция $w_1 = we^{i\theta}$ будет также отображать G на круг $|w| < 1$ при любом θ .

Если нам заданы два соответствующих элемента: один в области G и другой внутри круга $|w| < 1$, то существует только одна функция $w = f(z)$, дающая взаимно однозначное конформное отображение области G на круг $|w| < 1$, при котором заданные элементы переходят друг в друга (рис. 102).

Пусть функции $w = f(z)$ и $w = F(z)$ конформно отображают область G на круг так, что некоторый элемент этой области при обоих отображениях переходит в один и тот же элемент круга. Тогда функция $\varphi(w) = fF^{-1}(w)$ отображает круг сам на себя, при-

чем некоторый элемент круга переходит сам в себя. Обозначая через α аффикс точки, входящей в этот элемент, имеем:

$$\varphi(\alpha) = \alpha \text{ и } \varphi'(\alpha) > 0;$$

поэтому по теореме п. 1 $\varphi(w) = fF^{-1}(w) \equiv w$. Подставляя сюда $w = F(z)$, получаем окончательно:

$$f(z) \equiv F(z),$$

что и требовалось доказать.

Все то, что было здесь сказано относительно отображения односвязной области G на круг, можно повторить и для отображения

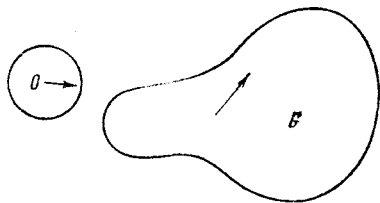


Рис. 102.



Рис. 103.

области G на некоторую другую односвязную область Δ (рис. 103). В самом деле, мы можем взять промежуточным звеном между этими отображениями круг; отображаем сначала область G на круг, а затем уже круг на Δ .

§ 2. Основные принципы теории конформного отображения

1. **Принцип сохранения области.** В гл. II, § 4, п. 8 мы видели, что аналитическая функция $w = f(z)$, однолистная в некоторой области G плоскости z , всегда отображает эту область также на некоторую область E плоскости w , причем между точками обеих областей устанавливается взаимно однозначное соответствие. Чтобы распространить это предложение на произвольные аналитические функции, нужно обобщить понятие области. К необходимости такого обобщения мы пришли еще в гл. II, § 4, когда рассматривали функции z^n , e^z и $\sin z$. Именно в качестве образа плоскости z в преобразовании, осуществляемом посредством этих функций, мы построили многолистные римановы поверхности, образовав их путем склеивания полуплоскостей вдоль соответствующих частей действительной оси. Этот метод образования области изменения аналитической функции из полуплоскостей не годится в общем случае и его видоизменяют, составляя область из кружков однолистных и многолистных. Ограничиваясь для простоты однозначными функциями, рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в некоторой области G , и пусть a — какая-либо конечная точка области. Если $f'(a) \neq 0$, то можно выбрать

настолько малую окрестность точки a , что в ней функция $f(z)$ будет однолистной. В самом деле, полагая $f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$ ($a_1 \neq 0$), выберем ρ настолько малым, чтобы было: $|a_1| - 2|a_2|\rho - 2|a_3|\rho^2 - \dots > 0$. Тогда для любых двух точек z_1 и z_2 ($z_1 \neq z_2$), лежащих внутри круга $|z-a| < \rho$, имеем, полагая $z_1 - a = \zeta_1$ и $z_2 - a = \zeta_2$:

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= |z_1 - z_2| |a_1 + a_2(\zeta_1 + \zeta_2) + \\ &\quad + a_3(\zeta_1^2 + \zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^2) + \dots| > \\ &> |z_1 - z_2| (|a_1| - 2|a_2|\rho - 3|a_3|\rho^2 - \dots) > 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, функция $\omega = f(z)$ отображает круг $|z-a| < \rho$ взаимно однозначно на некоторую область плоскости ω , содержащую внутри точку a_0 . Если мы теперь опишем круг с центром a_0 , лежащий внутри этой области, то ему в плоскости z будет соответствовать некоторая область, лежащая внутри круга $|z-a| < \rho$ и содержащая точку a . Итак, для всякой точки a , в которой $f'(a) \neq 0$, можно найти такую заключающую ее область g_a , что функция $\omega = f(z)$ отобразит эту область взаимно однозначно на некоторый круг c_a плоскости ω с центром в точке $f(a) = a_0$. Предположим теперь, что $f'(a) = 0$. Тогда в некоторой окрестности этой точки $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = a_0 + a_k(z-a)^k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots \quad (a_k \neq 0, k \geq 2).$$

Полагая $\varphi(z) = 1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}(z-a) + \frac{a_{k+2}}{a_k}(z-a)^2 + \dots$, выберем настолько малую окрестность $|z-a| < \rho$ точки a , чтобы в ней было: $|\varphi(z) - 1| < 1/2$. В этой окрестности $|\varphi(z)| > 1/2$, $-\pi/6 \leq \arg \varphi(z) < \pi/6$ и, следовательно, $\psi(z) = (z-a) \sqrt[k]{\varphi(z)} = (z-a) \sqrt[k]{|\varphi(z)|} e^{i \frac{\arg \varphi(z)}{k}}$ будет однозначной аналитической функцией, производная которой $\psi'(z) = \sqrt[k]{\varphi(z)} + (z-a) \frac{\varphi'(z)}{k \sqrt[k]{\varphi(z)}^{k-1}}$.

Так как $\psi(a) = 0$ и $\psi'(a) = 1$, то $\psi(z) = (z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \dots$ По доказанному выше найдется область g_a , содержащая точку a , которая функцией $\zeta = \psi(z)$ будет взаимно однозначно отображаться на некоторый круг c'_a с центром в точке $\zeta = 0$ и радиусом r' . Когда точка ζ описывает этот круг, точка ζ^k описывает круг с тем же центром и радиусом r'^k . При этом каждой точке нового круга (отличной от центра круга) будет соответствовать k различных точек круга c'_a , размещенных в вершинах правильного k -угольника, с центром в начале координат. Когда точка ζ описывает какой-либо сектор раствора $2\pi/k$ круга c'_a , точка ζ^k описывает полный круг, так что всему кругу c'_a соответствует k -кратный круг. Мы будем мыслить его как k наложенных

друг на друга одинаковых кругов, надрезанных вдоль радиусов, направленных по положительной оси и скрепленных вдоль надрезов так, что нижний край надреза нижележащего круга соединяется с верхним краем надреза круга, непосредственно над ним лежащего, а нижний край надреза самого верхнего круга — с верхним краем надреза самого нижнего круга.

Замечая, что $\omega = f(z) = a_0 + a_h [\psi(z)]^k = a_0 + a_h \zeta^k$, мы можем утверждать теперь, что для точки a , в которой $f'(a) = 0$, существует область g_a , заключающая точку a и такая, что преобразование $\omega = f(z)$ переводит эту область в k -кратный (или k -листный) круг c_a с центром в точке $a_0 = f(a)$. Соответствие между точками области g_a и точками c_a будет взаимно однозначным. [Для любой точки из g_a , отличной от a , можно указать еще $k - 1$ точек из той же области, в которых $\omega = f(z)$ принимает одно и то же значение. Однако соответствующие точки будут располагаться на разных листах k -листного круга c_a (друг над другом) и потому должны рассматриваться как различные.]

Покажем теперь, как следует соединять между собой различные простые и кратные кружки c_a , чтобы получить из них *многолистную область (риманову поверхность)* изменения функции $\omega = f(z)$. Чтобы установить известный порядок в соединении кружков, вообразим себе неограниченную последовательность областей G_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), содержащихся в области G ($G_n \subset G$), вложенных одна в другую ($G_{n+1} \subset G_n$) и аппроксимирующих область G в том смысле, что каждая ее точка a , начиная с некоторого n , будет лежать внутри всех G_n . Такую последовательность можно получить, например, подразделяя плоскость z последовательно на квадратики с неограниченно убывающими длинами сторон и объединяя в одну область G_n те квадратики n -го подразделения, которые вместе с непосредственно к ним примыкающими квадратами того же подразделения лежат внутри G .

Так как каждая точка a замкнутой области \bar{G}_1 принадлежит области G , то для нее можно найти область g_a , целиком лежащую внутри G , содержащую внутри точку a и такую, что функция $\omega = f(z)$ преобразует g_a в простой или многолистный круг c_a с центром в точке $f(a) = a_0$. По лемме Гейне—Бореля можно указать конечное множество областей g_a , целиком покрывающих \bar{G}_1 . Если они не покрывают области G_2 , то, применяя те же рассуждения к замкнутой области $\bar{G}_1 - G_2$, присоединим к уже выбранным областям конечное число новых, так что расширенное таким образом множество областей g_a , оставаясь конечным, будет покрывать всю область \bar{G}_2 . Продолжая этот процесс дальше, мы получим счетное множество областей g_a таких, что любую область G_n покрывает конечное множество областей g_a . При этом мы допустим для упрощения дальнейших рассуждений, что любые

две области g_a , соответствующие многолистным кругам, не имеют общих точек. Этого всегда можно достичь, так как, во-первых, внутри каждой области G_n содержится лишь конечное множество точек a , в которых $f'(a) = 0$ (в силу свойства единственности аналитических функций), а во-вторых, области g_a могут быть взяты сколь угодно малыми. Перенумеруем теперь области g_a так, чтобы две области с последовательными номерами имели общую часть, и снабдим такими же номерами соответствующие им простые или кратные кружки c_a . Если мы будем последовательно брать области g_a , склеивая между собой те из них, которые имеют общую часть, вдоль этой части (независимо от того, будут ли номера соседними или нет), то мы будем получать области, лежащие внутри G и заключающие при достаточно большом числе областей g_a любую область G_n . Иными словами, области, полученные путем такого склеивания, будут аппроксимировать область G . Всю область G можно рассматривать как образованную путем склеивания бесконечного (счетного) множества областей g_a . Аналогичным образом можно построить над плоскостью w область изменения функции $w = f(z)$. Именно, беря кружки c_a в порядке номеров, мы будем встречать среди них такие, для которых соответствующие области g_a будут иметь общую часть (это, наверное, будет для кружков с соседними номерами, но и не только для них). В силу однозначности функции $w = f(z)$ этой общей части будут соответствовать одинаковые (конгруэнтные) области на каждом из двух таких кружков. Налагая последние один на другой так, чтобы эти области совпали, склеим кружки вдоль этих областей. Два кружка, для которых области g_a не имеют общей части, не должны склеиваться между собой непосредственно. Однако любые две области $g^{(m)}$ и $g^{(n)}$ ($n > m$) соединяются между собой цепью областей $g^{(m)}$, $g^{(m+1)}$, ..., $g^{(n)}$, из которых каждые две соседние имеют общую часть; поэтому и любые два кружка $c^{(m)}$ и $c^{(n)}$ соединяются между собой цепью кружков $c^{(m)}$, $c^{(m+1)}$, ..., $c^{(n)}$, из которых каждые два соседних склеены между собой. Увеличивая число кружков, мы будем получать новые и новые обобщенные — многолистные — области, которые все будут содержаться в обобщенной области изменения функции $w = f(z)$ и будут ее аппроксимировать в том смысле, что при достаточно большом числе кружков мы получим любую наперед указанную точку области. Что получаемые нами путем склеивания множества точек действительно можно называть областями (в обобщенном смысле), следует из того, что они обладают двумя характерными свойствами обычных однолистных областей. Во-первых, каждая точка принадлежит множеству вместе с некоторой ее окрестностью, причем под окрестностью следует понимать либо простой круг (соответствующая точка называется тогда обыкновенной), либо k -лиственный круг (соответствующая точка называется тогда точкой разветвления порядка

$k - 1$). Во-вторых, любые две точки множества могут быть соединены непрерывной линией, все точки которой принадлежат множеству. Последнее непосредственно следует из существования конечной цепи кружков, соединяющей любые два кружка. Все, что мы до сих пор говорили, может быть распространено без изменения и по отношению к бесконечно удаленным точкам. Именно в случае, когда $a = \infty$, предшествующие разложения следует писать в виде $f(z) = a_0 + a_k z^{-k} + a_{k+1} z^{-k-1} + \dots$, если $f(\infty) = a_0$ конечное, и в виде $f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k-1} + \dots$ ($k \geq 1$), если $f(\infty) = \infty$. Окончательно мы можем высказать следующий

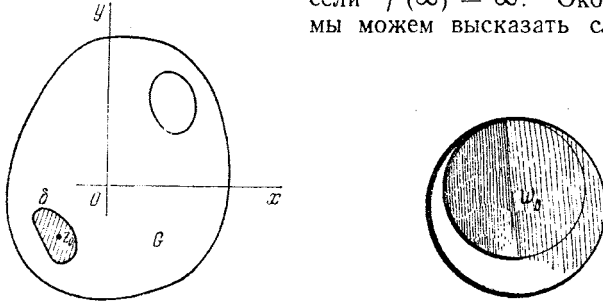


Рис. 104.

принцип сохранения области: однозначная аналитическая функция отображает область своего определения снова на область (однолиственную или многолиственную).

Как непосредственное приложение принципа сохранения области рассмотрим теорему о максимальном модуле (гл. V, § 2, п. 5).

Пусть $w = f(z)$ — функция, голоморфная в области G и не равная тождественно постоянному. Когда z описывает достаточно малую область δ , окружающую точку z_0 области G , $w = f(z)$ описывает элемент поверхности Римана Δ (однолиственный или многолиственный круг) с центром $w_0 = f(z_0)$, со взаимно однозначным соответствием обеих областей (рис. 104). Следовательно, функция $|f(z)|$ не может достигать своего максимума в точке z_0 , так как в Δ имеются точки, более удаленные от начала координат, нежели $f(z_0)$. Итак, максимум модуля функции $f(z)$, голоморфной в области G , не может достигаться во внутренней точке области.

З а м е ч а н и е. Доказательство не предполагает, что точка z_0 находится на конечном расстоянии; z_0 может быть бесконечно удаленной точкой при непрерывном условии, что она — внутренняя точка области.

Мы предполагали, что $f(z)$ не есть постоянное. Следовательно, если модуль функции $f(z)$, голоморфной в области G , достигает максимума во внутренней точке, то функция есть постоянное.

Наконец, отметим, что доказательство остается в силе, если функция $f(z)$ подчинена в области G более общим условиям:

- 1) $f(z)$ голоморфна в окрестности каждой точки области G ,
- 2) $|f(z)|$ — однозначная функция в области G .

2. Принцип взаимно однозначного соответствия. Пусть замкнутый контур Γ есть гладкая или по крайней мере кусочно-гладкая линия; предположим, что функция $\omega = f(z)$ будет голоморфной всюду внутри Γ , включая точки самого контура Γ . Допустим, далее, что контур Γ с помощью этой функции $\omega = f(z)$ отображается взаимно однозначным образом на некоторый замкнутый контур Γ' . Иначе говоря, различным точкам контура Γ соответствуют различные же точки контура Γ' . При этих условиях мы докажем, что область, ограниченная контуром Γ , отображится взаимно однозначно на область, ограниченную контуром Γ' .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через G область, ограниченную контуром Γ . По условию контуру Γ соответствует контур Γ' , который будет делить плоскость ω на две части: в н у т р е н ю ю и в н е ш н ю ю.

Мы покажем, что ни одна из точек, лежащих вне Γ' , не может представлять значений, принимаемых $f(z)$ внутри Γ , с другой стороны, каждая точка, лежащая внутри Γ' , представляет одно из значений, принимаемых $f(z)$ внутри Γ и притом только для одного значения z . Таким образом, задача сводится к тому, чтобы показать, что уравнение $f(z) - \omega_0 = 0$ для ω_0 , лежащего вне Γ' , не имеет ни одного корня внутри Γ , а для ω_0 , лежащего внутри Γ' , имеет один и только один корень z внутри Γ . По теореме о логарифмическом вычете (гл. VII, § 1, п. 5) искомое число корней уравнения $f(z) - \omega_0 = 0$ равно интегралу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - \omega_0} dz, \quad (4)$$

где интеграл берется по контуру Γ в положительном направлении. Полагая здесь $f(z) = \omega$, преобразуем этот интеграл к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0}. \quad (4')$$

Последний равен нулю, если ω_0 лежит вне Γ' , и ± 1 (в зависимости от направления интегрирования по Γ'), если ω_0 лежит внутри Γ' . Но значение -1 исключается по самому смыслу интеграла (4), равного (4'). (Напомним, что $f(z)$ голоморфна внутри Γ .) Итак, интеграл (4) равен нулю, если ω_0 лежит вне Γ , и равен $+1$, если ω_0 лежит внутри Γ' .

Теорема доказана. Из доказательства следует, в частности, что когда точка z обходит контур Γ в положительном направлении, то точка $\omega = f(z)$ обходит контур Γ' также в положительном направлении [иначе интеграл (4') имел бы значение -1]. Иными сло-

вами, при соответствии, устанавливаемом между контурами Γ и Γ' посредством функции голоморфной внутри Γ , необходимо сохраняется направление обхода.

Доказанная теорема остается верной и для неограниченных областей, так как с помощью элементарных взаимно однозначных преобразований можно неограниченную область заменить ограниченной областью.

3. Принцип симметрии Римана—Шварца. Пусть даны две области G_1 и G_2 , прилегающие друг к другу вдоль общего куска γ их границ, причем область G_2 целиком лежит вне области G_1 (рис. 105). Предположим, что $f(z)$ есть функция голоморфная в области G_1 .

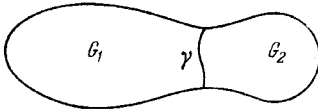


Рис. 105.

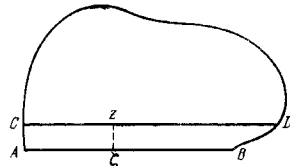


Рис. 106.

Если существует функция $F(z)$, голоморфная в области $G = G_1 + G_2 + \gamma$, составленной из областей G_1 , G_2 и точек открытой дуги γ , совпадающая с данной функцией $f(z)$ во всех точках области G_1 , то говорят, что функция $F(z)$ является *аналитическим продолжением* функции $f(z)$ через дугу γ . Известно (гл. X, § 1, п 1), что если такое продолжение функции $f(z)$ возможно, то оно единственное. Основной вопрос, который здесь возникает, состоит в том, чтобы по данной функции $f(z)$ узнать, можно ли ее продолжать через некоторый кусок границы области G_1 , и если да, то как осуществить это продолжение. Если рассматриваемый кусок γ границы области G_1 представляет дугу некоторой окружности и если значения функции $f(z)$ в точках этой дуги суть действительные числа, то наша функция может быть аналитически продолжена через дугу γ . [Под значениями функции $f(z)$ на дуге γ мы понимаем непрерывную последовательность предельных ее значений изнутри области G_1]. Доказывая это предложение, мы вместе с тем дадим очень простой процесс построения для продолжения данной функции.

Допустим сначала, что дуга γ , через которую мы хотим продолжить функцию $f(z)$, есть часть AB прямой, параллельной действительной оси (рис. 106).

Функция $f(z)$ определена с одной стороны от AB и в точках внутри отрезка AB , где она принимает действительные значения.

Возьмем дугу $A_1M_1B_1$, лежащую в области G_1 , где $f(z)$ определена, и ей симметричную относительно AB дугу $A_1M_2B_1$, лежащую вне G_1 (рис. 107). Определим функцию $\varphi(z)$ в области, ограничен-

ной замкнутым контуром $A_1M_2B_1A_1$, следующим образом: во всякой точке z_2 этой области, симметричной относительно AB с точкой z_1 , положим:

$$\varphi(z_2) = \overline{f(z_1)}. \quad (5)$$

Эта функция $\varphi(z)$ будет голоморфной в области, ограниченной контуром $A_1M_2B_1A_1$. В самом деле, обозначая через δ одновременные приращения и замечая, что δz_2 и δz_1 сопряжены между собой (так как AB параллельна действительной оси), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi(z_2)}{\delta z_2} &= \frac{\delta\{\overline{f(z_1)}\}}{\delta z_2} = \\ &= \frac{\overline{\delta f(z_1)}}{\delta z_1} = \overline{\left(\frac{\delta f(z_1)}{\delta z_1}\right)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Переходя в равенстве (6) к пределу при δz_1 (а значит, и δz_2), стремящемуся к нулю, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta z_2 \rightarrow 0} \frac{\delta\varphi(z_2)}{\delta z_2} &= \\ &= \overline{f'(z_1)} \quad \text{или} \quad \varphi'(z_2) = \overline{f'(z_1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\varphi(z)$ имеет конечную производную в каждой точке области, ограниченной контуром $A_1M_2B_1A_1$, и, следовательно, есть функция, голоморфная в этой области.

Пусть теперь C_1D_1 и C_2D_2 — две хорды, параллельные и симметричные относительно AB , расстояние между которыми сколь угодно мало. Обозначая через z' любую точку области, ограниченной замкнутым контуром $C_1D_1M_1C_1$, имеем по формуле Коши:

$$\left. \begin{aligned} 2\pi i f(z') &= \int_{C_1D_1} \frac{f(z) dz}{z-z'} + \int_{D_1M_1C_1} \frac{f(z) dz}{z-z'}, \\ 0 &= \int_{D_2C_2} \frac{\varphi(z) dz}{z-z'} + \int_{C_2M_2D_2} \frac{\varphi(z) dz}{z-z'}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Заставим каждую из хорд C_1D_1 и C_2D_2 стремиться к A_1B_1 . Первый интеграл первого равенства (7) стремится к значению $\int_{A_1B_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta-z'}$.

В самом деле, обозначая через ζ проекцию на AB точки z , лежащей на C_1D_1 , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z-z'} - \frac{f(\zeta)}{\zeta-z'} &= \frac{1}{z-z'} [f(z) - f(\zeta)] + f(\zeta) \left(\frac{1}{z-z'} - \frac{1}{\zeta-z'} \right) = \\ &= \frac{f(z) - f(\zeta)}{z-z'} + \frac{f(\zeta)(\zeta-z)}{(z-z')(\zeta-z)}. \end{aligned} \quad (8)$$

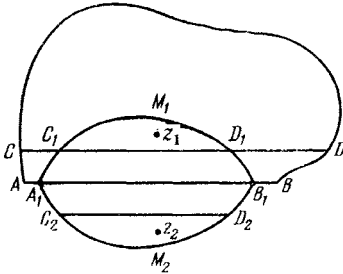


Рис. 107.

Считая z' постоянной точкой, мы видим, что $|z - z'|$ и $|\xi - z'|$ остаются больше некоторого положительного постоянного числа; с другой стороны, функция $f(z)$ есть ограниченная. Следовательно, модуль выражения (8) может быть сделан как угодно малым; то же самое будет и для его интеграла вдоль C_1D_1 . Таким образом, имеем:

$$\lim \int_{C_1D_1} \frac{f(z) dz}{z - z'} = \int_{A_1B_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z'}. \quad (9)$$

Так же покажем, что будет:

$$\lim \int_{D_2C_2} \frac{\varphi(z) dz}{z - z'} = \int_{B_1A_1} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z'}. \quad (9')$$

Вспомнив же, что $f(\xi)$ имеет действительные значения на AB , заключаем: $f(\xi) = \varphi(\xi)$ на A_1B_1 . Итак, равенства (7) в пределе примут вид

$$\left. \begin{aligned} 2\pi i f(z') &= \int_{A_1B_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z'} + \int_{B_1M_1A_1} \frac{f(z) dz}{z - z'}, \\ 0 &= \int_{B_1A_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z'} + \int_{A_1M_2B_1} \frac{\varphi(z) dz}{z - z'}. \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

Складывая последние равенства, получим:

$$2\pi i f(z') = \int_{B_1M_1A_1} \frac{f(z) dz}{z - z'} + \int_{A_1M_2B_1} \frac{\varphi(z) dz}{z - z'}. \quad (10)$$

Обозначая через $F(z)$ функцию, определенную на всем контуре $\Gamma = B_1M_1A_1 + A_1M_2B_1$, равную $f(z)$ на дуге $A_1M_1B_1$ и равную $\varphi(z)$ на $A_1M_2B_1$, перепишем (10) в виде

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z) dz}{z - z'}. \quad (10')$$

Очевидно, принимая за z' точку области, ограниченной контуром $A_1M_2B_1A_1$, мы получили бы:

$$\varphi(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z) dz}{z - z'}. \quad (10'')$$

Так как функция, изображаемая интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z) dz}{z - z'},$$

есть голоморфная всюду внутри Γ , то из равенства (10') заключаем, что эта функция является аналитическим продолжением через A_1B_1

данной функции $f(z)$. С другой стороны, равенство (10'') показывает, что это аналитическое продолжение получается, принимая его значения в точках, симметричных относительно AB , сопряженными между собой.

Заметив, наконец, что A_1B_1 есть любой отрезок, внутренний к AB , мы убеждаемся в справедливости принципа.

То же положение может быть обосновано иначе, если воспользоваться вместо интеграла Коши теоремой Морера (гл. IV, § 3, п. 5).

Действительно, обозначив через $F(z)$ функцию, равную $f(z)$ внутри контура $A_1B_1M_1A_1$, равную $\varphi(z)$ внутри контура $A_1M_2B_1A_1$ и, наконец, равную их общему предельному значению в любой точке отрезка A_1B_1 , мы получим, очевидно, функцию, непрерывную внутри контура $A_1M_2B_1M_1A_1$. Согласно теореме Морера для доказательства голоморфности функции $F(z)$ достаточно обнаружить, что интеграл от нее, взятый по контуру любого треугольника, лежащего внутри области, где эта функция непрерывна, равен нулю.

Если треугольник $\alpha\beta\gamma$ не пересекается A_1B_1 , то он лежит целиком внутри области, где функция $F(z)$ голоморфна, и следовательно, по теореме Коши интеграл $\int_{\alpha\beta\gamma} F(z) dz$

равен нулю.

Если же $\alpha\beta\gamma$ пересекается A_1B_1 , то, проведя по обе стороны A_1B_1 прямые C_1D_1 и C_2D_2 , параллельные A_1B_1 (рис. 108), получим:

$$\int_{\alpha\beta\gamma} F(z) dz = \int_{c_1d_1\gamma c_1} F(z) dz + \int_{c_2d_2d_1c_1c_2} F(z) dz + \int_{\alpha\beta d_2c_2\alpha} F(z) dz. \quad (11)$$

Первый и последний из этих интегралов равны нулю в силу теоремы Коши; поэтому

$$\int_{\alpha\beta\gamma} F(z) dz = \int_{c_2d_2d_1c_1c_2} F(z) dz. \quad (12)$$

Замечая, что внутри и на контуре $\alpha\beta\gamma$ модуль $|F(z)|$ остается меньшим некоторого числа M , и выбирая, далее, прямые C_1D_1 и C_2D_2 столь близкими к A_1B_1 , чтобы для любой пары точек ζ и ζ_1 , расположенных соответственно по C_1D_1 и C_2D_2 и притом так, что отрезок $\zeta\zeta_1$ параллелен $\alpha\gamma$, выполнялось бы неравенство $|F(\zeta) - F(\zeta_1)| < \varepsilon$, будем иметь:

$$\left| \int_{c_2d_2d_1c_1c_2} F(z) dz \right| = \left| \left(\int_{c_2d_2} F(z) dz - \int_{c_1d_1} F(z) dz \right) + \int_{c_1c_2} F(z) dz + \int_{\delta d_2} F(z) dz + \int_{d_2d_1} F(z) dz \right| < \varepsilon \cdot ab + M(c_1c_2 + \delta d_2 + d_2 d_1).$$

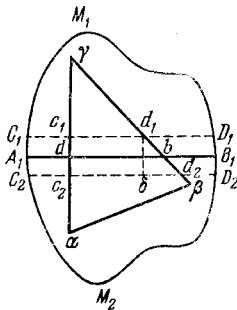


Рис. 108.

Правая часть неравенства сколь угодно мала, так как ε произвольно мало и, кроме того, сумма длин отрезков c_1c_2 , δd_2 и d_2d_1 может быть сделана сколь угодно малой при C_1D_1 и C_2D_2 , достаточно близких к A_1B_1 . Так как, далее, в силу (12) величина

$$\left| \int_{c_2d_2d_1c_1c_2} F(z) dz \right| = \left| \int_{\alpha\beta\gamma} F(z) dz \right|$$

не зависит от положения прямых C_1D_1 и C_2D_2 , то она равна нулю, чем и заканчивается доказательство.

Если воспользоваться обобщением теоремы Коши, данным в гл. IV, § 2, п. 8, то последний анализ становится излишним. В самом деле,

$$\int_{\alpha\beta\gamma} F(z) dz = \int_{ab\gamma a} F(z) dz + \int_{\alpha\beta\gamma a\alpha} F(z) dz.$$

Так как функция $F(z)$, голоморфная внутри каждого контура $ab\gamma a$ и $\alpha\beta\gamma a\alpha$, остается непрерывной на них, то в силу обобщенной теоремы Коши оба интеграла правой части последнего равенства будут нулями, откуда следует:

$$\int_{\alpha\beta\gamma} F(z) dz = 0.$$

При доказательстве мы существенно предполагали, что прямолинейный отрезок AB расположен параллельно действительной оси. Остается теперь освободиться от этого ограничения. Пусть дуга γ , через которую мы хотим продолжить функцию $f(z)$, есть какой-нибудь прямолинейный отрезок AB . Этот случай немедленно приводится к предыдущему, если выполним вращение $z' = ze^{bi}$, посредством которого отрезок AB становится параллельным действительной оси. Ясно, что значения аналитического продолжения функции $f(z)$ будут сопряженными в точках, симметричных относительно отрезка AB .

Наконец, если γ есть дуга некоторой окружности, то этот случай сводится к только что рассмотренному, если выполним линейное преобразование $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, посредством которого дуга γ преобразуется в прямолинейный отрезок AB . Известно (гл. III, § 1, п. 7), что при таком преобразовании пара точек z , симметричных относительно дуги окружности γ , будет соответствовать пара точек, симметричных относительно прямолинейного отрезка AB . Следовательно, значения аналитического продолжения функции $f(z)$ в точках, симметричных относительно γ , будут сопряженными между собой.

Итак, мы можем формулировать принцип симметрии в таком виде: *функция $f(z)$, голоморфная в области G , граница которой содержит дугу окружности γ (или прямолинейный отрезок γ), принимающая во всех точках внутри γ непрерывные (изнутри G_1)*

действительные значения, аналитически продолжается через γ . Значения этого аналитического продолжения функции $f(z)$ вне области G_1 будут сопряженными с $f(z)$ в точках, симметричных относительно γ .

Этот принцип имеет многочисленные приложения в теории конформных отображений. Действительно, пусть дана область G_1 , граница которой содержит дугу окружности γ (в частности, прямолинейный отрезок γ), такая, что область G_2 , симметричная с G_1 относительно γ , целиком лежит вне G_1 . Если функция $w = f(z)$ дает конформное отображение области G_1 на верхнюю полуплоскость, то мы получаем согласно принципу симметрии аналитическое продолжение через γ функции $f(z)$, приписывая ему взаимно сопряженные значения в двух точках, являющихся взаимно симметричными относительно γ . Следовательно, функция $w = f(z)$, будучи продолжена через γ , дает конформное отображение области $G = G_1 + G_2 + \gamma$, составленной из областей G_1 , G_2 и точек открытой дуги γ , на плоскость w , из которой выкинуты точки действительной оси, за исключением тех точек, которые лежат внутри отрезка, являющегося отображением дуги γ . Легко видеть, как обобщается формулировка принципа Римана—Шварца, если функция $w = f(z)$ дает конформное отображение на круг.

В приведенной выше формулировке принципа симметрии значения, принимаемые $f(z)$ на дуге окружности γ , располагались на отрезке действительной оси. Легко обобщить этот принцип на случай, когда значения, принимаемые $f(z)$, сами располагаются на дуге некоторой окружности C . В самом деле, выполняя над $w = f(z)$ линейное преобразование, переводящее C в действительную ось, мы сведем этот случай к разобранным выше. Так как при этом линейном преобразовании точкам, симметричным относительно действительной оси, будут отвечать точки, симметричные относительно окружности C , то можно утверждать, что точкам z , симметричным относительно γ , отвечают значения $f(z)$, симметричные относительно C .

4. Обобщение принципа симметрии. Будем называть дугу кривой *аналитической*, если ее текущие координаты x , y являются функциями параметра t в интервале $a < t < b$, разложимыми в степенные ряды в окрестности всякой точки t . Назовем аналитическую дугу *правильной*, если она не имеет кратных точек, причем x' и y' не обращаются в нуль одновременно.

Предположим, что $f(z)$ есть функция, голоморфная в области G , граница которой содержит правильную аналитическую дугу γ . Под значениями функции $f(z)$ на дуге γ мы понимаем непрерывную последовательность предельных ее значений изнутри области G , каковые по условию существуют. В п. 3 мы видели, что если кусок γ границы области G представляет дугу некоторой окружности и если значения функции $f(z)$ в точках этой дуги изображаются точками, лежащими на прямой или окружности, то наша функция может быть аналитически продолжена через дугу γ , причем был дан весьма простой закон этого продолжения.

Задача настоящего пункта — дать обобщение этого предложения, показав, что если кусок γ границы области представляет любую правильную аналитическую дугу и если значения функции $f(z)$ в точках этой дуги изображаются точ-

ками, лежащими на прямой или окружности, то наша функция может быть аналитически продолжена через дугу γ .

Действительно, отправляясь от параметрических уравнений дуги γ , определим $z = x + iy$ как голоморфную функцию переменного t вдоль интервала действительной оси (a, b) и в столь узкой его окрестности, чтобы обратная функция t была голоморфной от z в окрестности соответствующей дуги [это легко вытекает из того факта, что $\frac{dz}{dt}$ не обращается в нуль на (a, b) и дуга не имеет кратных точек (см. п. 2)].

Функция $\varphi(t) = f[z(t)]$ голоморфна с одной стороны интервала (a, b) и принимает в точках этого интервала те же значения, что и $f(z)$ в соответствующих точках дуги γ ; следовательно, значения функции $\varphi(t)$ на интервале (a, b) действительной оси изображаются точками прямой или окружности Γ . Вследствие принципа симметрии Римана—Шварца (п. 3) эта функция $\varphi(t)$ может быть аналитически продолжена через интервал (a, b) , причем значения ее аналитического продолжения в точках, близких к действительной оси и симметричных относительно (a, b) , будут симметричными относительно Γ .

В вышеопределенной окрестности дуги γ две точки z назовем симметричными относительно этой дуги, если они соответствуют двум точкам t , симметричным относительно действительной оси. Это определение становится вполне естественным, если заметить, что свойство симметрии двух точек относительно правильной аналитической дуги γ инвариантно при всяком голоморфном преобразовании параметра $\theta = \lambda(t)$, $\lambda'(t) \neq 0$, сохраняющем действительную ось и приводящем к другому параметрическому изображению правильной аналитической дуги γ .

Заметим это, рассмотрим два пути, симметричных относительно дуги γ , выходящих из одной ее точки, и им соответствующие пути в плоскости t . Из возможности аналитического продолжения функции $\varphi(t)$ через интервал (a, b) и отмеченного выше его свойства следует, во-первых, возможность аналитического продолжения функции $f(z)$ через дугу γ и, во-вторых, следующее свойство этого продолжения: в двух точках, симметричных относительно дуги γ , аналитически продолженная функция $f(z)$ принимает значения, являющиеся адфюксами двух точек, симметричных относительно Γ .

Итак, при аналитическом продолжении функции $f(z)$ через дугу γ получаем для двух точек z , симметричных относительно дуги, две соответствующие точки $f(z)$, симметричные относительно Γ .

5. Принцип Шварца аналитического продолжения. Как и в предыдущем пункте, предположим, что $f(z)$ есть функция, голоморфная в области G , граница которой содержит правильную аналитическую дугу (открытую) γ :

$$z = z(t) \quad (a < t < b).$$

Под значениями функции $f(z)$ на дуге γ мы понимаем последовательность предельных ее значений $F(t)$ внутри области G , которые по условию существуют.

Задача настоящего пункта — доказать, что если граничные значения $F(t)$ функции $f(z)$ в точках дуги γ представляют аналитическую функцию параметра t , то наша функция может быть аналитически продолжена через дугу γ . В этом заключается принцип Шварца аналитического продолжения функций комплексного переменного в его общей форме.

Докажем сначала это предложение в частном случае, когда дугой γ служит интервал $\alpha < x < \beta$ действительной оси. Так как граничные значения $F(x)$ нашей функции представляют функцию, аналитическую в окрестности каждой точки x_0 интервала $\alpha < x < \beta$, то вблизи точки x_0 имеет место разложение

$$F(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Полагая $z = x + iy$ и заменяя в этом разложении действительное переменное x через комплексное z , мы получим функцию $\Phi(z)$, голоморфную в окрестности точки x_0 :

$$\Phi(z) = c_0 + c_1(z - x_0) + c_2(z - x_0)^2 + \dots$$

Разность $\Phi(z) - f(z)$ будет голоморфной в части окрестности x_0 , принадлежащей области G ; на диаметре этой окрестности, расположенном по действительной оси, она имеет предельные значения, равные нулю. Следовательно, вследствие принципа симметрии Римана—Шварца (п. 3) эта разность $\Phi(z) - f(z)$ аналитически продолжается на всю упомянутую окрестность точки x_0 и, будучи функцией, голоморфной в этой окрестности, равной нулю на интервале, внутреннем к ней, должна быть тождественно нулем по всей окрестности (гл. V, § 2, п. 4). Итак, в окрестности точки x_0 мы имеем: $f(z) \equiv \Phi(z)$, что доказывает возможность аналитического продолжения функции $f(z)$ через интервал $\alpha < x < \beta$ вблизи точки x_0 . Заметив же, что x_0 есть любая точка интервала $\alpha < x < \beta$, мы заключаем о возможности аналитического продолжения функции $f(z)$ через интервал $\alpha < x < \beta$.

Обращаясь теперь к общим условиям теоремы Шварца, представим граничные значения $F(t)$ функции $f(z)$ в виде

$$F(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + \dots,$$

где t_0 — любая точка интервала (a, b) и $t_0 - \rho < t < t_0 + \rho$, ρ достаточно мало. Так как $z'(t_0) \neq 0$, то можно выбрать ρ столь малым, чтобы круг $|t - t_0| < \rho$ при помощи функции $z(t)$ отображался взаимно однозначно на некоторую область g с внутренней точкой $z_0 = z(t_0)$: обозначим через γ_1 часть дуги γ , принадлежащую g . Функция $\varphi(t) = f[z(t)]$ голоморфна с одной стороны интервала $(t_0 - \rho, t_0 + \rho)$ и принимает в точках этого интервала те же значения, что и $f(z)$ в соответствующих точках дуги γ_1 ; следовательно, значения функции $\varphi(t)$ на интервале $(t_0 - \rho, t_0 + \rho)$ действительной оси представляют аналитическую функцию $F(t)$. По доказанному в начале этого пункта функция $\varphi(t)$ может быть аналитически продолжена в круг $|t - t_0| < \rho$ посредством функции $F(t)$. Заметив, что $\varphi(t) = f(z)$ в соответствующих точках, мы отсюда заключаем, что и функция $f(z)$ аналитически продолжается в область g , т. е. через дугу γ_1 . Так как t_0 есть любая точка интервала $a < t < b$, а значит, $z_0 = z(t_0)$ — любая точка дуги γ , мы видим, что $f(z)$ может быть аналитически продолжена через дугу γ .

6. Принцип симметрии для гармонической функции. Как известно, функция $V(x, y)$ называется гармонической в области, если она однозначна в этой области, обладает непрерывными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Мы знаем также (гл. II, § 4, п. 4), что если известна функция V , гармоническая в односвязной области, то возможно определить с точностью до аддитивного постоянного функцию $U + iV$ комплексного переменного $z = x + iy$, аналитическую в этой области; функция U будет также гармонической.

Условимся называть аналитическим продолжением гармонической функции, определенной в области G , гармоническую функцию, определенную в области G_1 , содержащей G , если эта функция совпадает с данной функцией на области G ¹⁾.

Рассмотрим теперь функцию $V(x, y)$, гармоническую в окрестности правильной аналитической дуги γ (открытой) и равную нулю на этой дуге. Возможно

¹⁾ Очевидно, если возможно аналитически продолжить гармоническую функцию, то это можно сделать только единственным образом. В самом деле, пусть две функции V и V_1 , гармонические в некоторой области, совпадают на частичной области. Разность $v = V - V_1$ будет гармонической в данной области и равной нулю в некоторой ее части. Образовав функцию комплексного переменного $z = x + iy$ вида $u + iv$, аналитическую в окрестности каждой точки данной области, мы заключаем, что она равна действительной постоянной в части данной области; отсюда следует, что $v \equiv 0$ и $V \equiv V_1$.

построить в этой области функцию $U + iV$, голоморфную относительно $z = x + iy$. Когда точка z описывает дугу γ , эта функция $U + iV$ все время имеет действительные значения, т. е. точка $U + iV$ остается на действительной оси. Вследствие п. 4 мы заключаем, что в точках, симметричных относительно дуги, значения функции $U + iV$ будут симметричными относительно действительной оси, а значит, значения функции V противоположны по знаку.

Теперь естественно формулировать такой принцип аналитического продолжения гармонической функции:

Если V есть функция, гармоническая в области G , граница которой содержит правильную аналитическую дугу γ (открытую), кроме того, непрерывна на множестве $G + \gamma$ и равна нулю на γ , то она может быть продолжена аналитически через γ , если придавать ей значения, противоположные по знаку в точках, симметричных относительно γ .

Результаты, установленные в предыдущих пунктах, недостаточны, чтобы доказать это предложение, и необходимо специальное доказательство. Возможно привести доказательство сформулированного принципа к частному случаю, когда дугой γ является интервал действительной оси. Для этого поступим следующим образом. Пусть $z = z(t)$ ($a < t < b$) есть уравнение дуги γ . Считая t за комплексное переменное, мы видим, что существует функция $z(t)$, голоморфная в окрестности интервала (a, b) действительной оси и дающая взаимно однозначное соответствие между этой окрестностью и окрестностью дуги γ ; когда t описывает интервал (a, b) , точка z описывает дугу γ . Образовав функцию $U + iV$, голоморфную относительно z в части окрестности дуги γ , принадлежащей G , мы видим, что она будет как функция t голоморфна с некоторой стороны интервала (a, b) действительной оси. Следовательно, V есть функция, гармоническая от координат точки t с одной стороны интервала (a, b) действительной оси и принимающая значение нуль на этом интервале. Если мы предположим теорему верной в этом частном случае, то V аналитически продолжается через (a, b) , когда мы ей придаем значения, противоположные по знаку в точках, симметричных относительно интервала (a, b) . Таким образом, V становится гармонической функцией во всей окрестности интервала (a, b) и, значит, $U + iV$, голоморфной относительно t в этой окрестности. Возвращаясь к переменному z , мы заключаем, что $U + iV$ будет голоморфной относительно z в окрестности дуги γ и, следовательно, V , гармонической от координат точки z в этой окрестности.

Итак, нам достаточно установить следующее предложение: *если V есть функция, гармоническая внутри полукруга с диаметром ab на действительной оси, непрерывная на этом полукруге, включая его границу, и равная нулю на диаметре ab , то она совпадает с функцией, гармонической внутри всего круга (рис. 109).*

Определим функцию $u(x, y)$ в круге C , включая его границу, посредством условий:

1) $u(x, y) = V(x, y)$ в первом полукруге (например, верхнем),

2) $u(x, y) = -V(x, y)$ во втором полукруге, и покажем, что $u(x, y)$ есть функция, гармоническая внутри круга C радиуса R .

В самом деле, во-первых, очевидно, что $u(x, y)$ есть функция, непрерывная внутри круга C , потому что ее значения на диаметре, равные нулю, совпадают с предельными как из верхней, так и из нижней половины круга, в остальных же точках круга C она совпадает либо с $V(x, y)$, либо с $-V(x, y)$. Во-вторых, легко обнаружить, что значение ее в каждой точке, внутренней к кругу C , равно среднему арифметическому ее значений на окружности любого достаточно малого радиуса с центром в этой точке. Действительно, это будет для точек, лежащих над диаметром, потому что в этой области $u(x, y) = V(x, y)$ и V есть функция гармоническая (гл. IV, § 3, п. 8); то же самое очевидно для точек, лежащих под

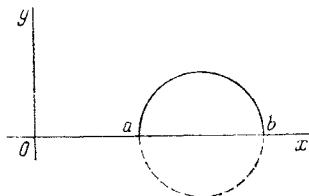


Рис. 109.

диаметром, так как здесь $u(x, y) = -V(x, y)$, и, значит, u есть функция гармоническая; наконец, в точке (x_0, y_0) , лежащей на диаметре, u равно нулю, и легко показать, что

$$0 = u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) d\varphi,$$

так как подынтегральная функция в пределах $(\pi, 2\pi)$ имеет значения, противоположные по знаку с ее значениями в пределах $(0, \pi)$.

Итак, функция $u(x, y)$ будет непрерывной внутри круга C и в каждой его точке удовлетворяет условию

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) d\varphi.$$

Этого же достаточно для заключения о том, что $u(x, y)$ есть гармоническая функция внутри C^1 .

Возможно, наконец, обобщить доказанное свойство об аналитическом продолжении через правильную аналитическую дугу гармонической функции V , заменяя условие обращения в нуль на дуге тем условием, что функция, определенная с одной стороны от дуги, принимает на дуге, сохраняя непрерывность, значения, образующие аналитическую функцию параметра t , входящего в уравнение дуги.

Действительно, определим достаточно малые окрестности дуги γ и интервала (a, b) , которые взаимно однозначно отображаются при помощи функции $z = z(t)$. Пусть $\varphi(t)$ — данная аналитическая последовательность значений; очевидно, ее мы можем рассматривать как голоморфную функцию от t в указанной окрестности интервала (a, b) , беря эту окрестность достаточно узкой. Полагая $g(z) \equiv \varphi[t(z)]$, мы получаем функцию $g(z)$, голоморфную в окрестности дуги γ и принимающую на этой дуге γ действительные значения $\varphi(t)$, данные по условию.

Если $g(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, то P и Q будут гармоническими в окрестности дуги γ , причем на дуге γ функция P принимает значения $\varphi(t)$. Следовательно, разность $V(x, y) - P(x, y)$ есть функция, гармоническая с одной стороны от дуги γ , обращающаяся, сохраняя непрерывность, в нуль на этой дуге; по доказанному она может быть продолжена через дугу γ и следовательно то же заключение можно сделать относительно $V(x, y)$.

Доказанный в п. 5 принцип Шварца аналитического продолжения функции комплексного переменного является частным случаем только что установленного предложения о продолжении гармонической функции. Более того, мы можем теперь сказать, что для аналитического продолжения функции комплексного переменного достаточно, чтобы ее действительная или мнимая часть принимала на дуге аналитическую последовательность значений. В этом случае действительная или мнимая часть функции будет функцией гармонической, продолжаемой через дугу, и отсюда заключаем, что и сама функция комплексного переменного обладает тем же свойством.

7. Приложение принципа симметрии. При установлении в § 1 условий, определяющих единственное конформное отображение, мы видели, что основным для этой цели является следующее предложение: *всякое взаимно однозначное конформное преобразование круга $|z| < 1$ самого в себя есть линейное*. Эта фундаментальная теорема была нами доказана в § 1, п. 1 посредством метода итераций и даже в более общей форме.

Теперь мы дадим другое доказательство этого предложения, воспользовавшись принципом симметрии. Сначала заметим относительно функции $f(z)$ теорему, что ее модуль $|f(z)|$ принимает значение единица на окружности, т. е.

¹⁾ При в а л о в И. И. Sur les fonctions harmoniques, Математический сборник, т. XXXII.

когда расстояние $1 - |z|$ точки z до окружности стремится к нулю, то $|f(z)|$ стремится к единице.

Действительно, предполагая противное и замечая, что $|f(z)|$ всюду в круге $|z| < 1$ меньше единицы, мы можем найти последовательность точек z_n ($|z_n| \rightarrow 1$) такую, что $|f(z_n)|$ не стремится к единице, оставаясь меньше единицы. В таком случае существовала бы для точек $f(z_n)$ предельная точка λ внутри круга. Тогда можно было бы выбрать из последовательности z_n последовательность z'_n такую, чтобы $f(z'_n)$ стремилось к λ . Заметим теперь, что точка λ соответствует некоторой точке ξ , внутренней к кругу вследствие взаимно однозначного преобразования $f(z)$, т. е. $f(\xi) = \lambda$. В силу непрерывности, когда $f(z'_n)$ стремится к λ , то z'_n должна стремиться к ξ ($|\xi| < 1$). Полученное противоречие с предельным равенством $|z'_n| \rightarrow 1$ убеждает нас в справедливости высказанного положения.

Рассмотрим любую дугу окружности. Вблизи этой дуги функция $\ln f(z)$ есть голоморфная, причем ее действительная часть $\ln |f(z)|$ принимает значение нуль на этой дуге. Поэтому вследствие п. 6е можно аналитически продолжить через дугу. Иначе говоря, $\ln f(z)$, а значит, и $f(z)$, есть голоморфная функция на дуге. Отсюда усматриваем вследствие произвола дуги, что $f(z)$ есть функция, голоморфная в круге $|z| < 1$; с другой стороны, когда z описывает окружность $|z| = 1$, точка $f(z)$ остается на той же окружности. Применяя принцип симметрии (п. 4), мы видим, что продолженная за круг функция $f(z)$ в точках, симметричных относительно единичной окружности, принимает значения, симметричные относительно той же окружности. Отсюда непосредственно вытекает, что продолженная функция в расширенной плоскости комплексного переменного имеет только одну особую точку — простой полюс — и один простой нуль. Следовательно, $f(z)$ есть функция рациональная (гл. VI, § 4, п. 2), имеющая один простой полюс и один простой нуль, т. е. линейная функция.

§ 3. Общие преобразования единичного круга во внутреннюю область

1. Аналитическое выражение голоморфной функции, преобразующей круг $|z| < 1$ во внутреннюю область. Изучим аналитическое представление функции $w = f(z)$, определенной и голоморфной внутри единичного круга и по модулю меньшей единицы. Мы можем предполагать, что начало координат не есть нуль функции, потому что в противном случае мы разделили бы функцию на соответствующую степень z . Расположим все нули функции в порядке убывающих модулей, причем записываем нуль k раз, если он имеет кратность k . Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — полученная таким образом последовательность нулей, которую мы предполагаем пока конечной. Образует функцию

$$g(z) = \prod_{i=1}^n \frac{a_i - z}{1 - \bar{z}a_i}.$$

Так как линейные функции $\frac{a_i - z}{1 - \bar{z}a_i}$ преобразуют единичный круг сам в себя,

то они удовлетворяют условию: каково бы ни было малое положительное число ε , можно построить окружность C_ε радиуса, достаточно близкого к единице, так, чтобы на этой окружности было:

$$\left| \frac{a_i - z}{1 - \bar{z}a_i} \right| > 1 - \frac{\varepsilon}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, на окружности C_ε будет выполняться неравенство

$$|g(z)| > \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^n > 1 - \varepsilon.$$

С другой стороны, имеем $|f(z)| < 1$, и, следовательно, неравенство

$$\left| \frac{f}{g} \right| < \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

удовлетворяется на окружности C_ε , а значит, и внутри, потому что функция f/g — голоморфная внутри единичного круга, и максимум ее модуля в круге с окружностью C_ε достигается на границе. Заставляя ε стремиться к нулю, из последнего неравенства получаем для всякой точки z ($|z| < 1$):

$$|f/g| \leq 1. \quad (13)$$

Равенство в формуле (13) возможно только в том случае, когда f/g есть тождественное постоянное, которое, имея модуль, равный единице, будет вида $e^{i\theta}$; это заключение имеет место потому, что модуль голоморфной функции не может достигнуть своего максимума во внутренней точке области, если функция не есть постоянно.

Итак, отношение f/g есть функция, голоморфная внутри единичного круга, не имеющая нулей и по модулю не превосходящая единицы. Следовательно, мы можем написать:

$$f(z)/g(z) = e^{\gamma(z)}, \quad (14)$$

где $\gamma(z)$ будет функцией, голоморфной в единичном круге и удовлетворяющей условию $R[\gamma(z)] \leq 0$.

Внося в формулу (14) вместо $g(z)$ ее выражение в виде произведения, получим:

$$f(z) = e^{\gamma(z)} \prod_{i=1}^n \frac{a_i - z}{1 - z\bar{a}_i}. \quad (14')$$

Наконец, если начало координат есть нуль функции $f(z)$ кратности λ , то вместо (14) будем иметь более общую формулу

$$f(z) = z^\lambda e^{\gamma(z)} \prod_{i=1}^n \frac{a_i - z}{1 - z\bar{a}_i}. \quad (14'')$$

Разберем теперь случай, когда функция $f(z)$ имеет бесконечное множество нулей $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, которые мы расположили в порядке неубывающих модулей, повторяя каждый нуль столько раз, какова его кратность. Из гл. IX, § 3,

п. 3 мы знаем, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - |a_n|]$ расходится, то функция, имеющая нулями точки a_n и ограниченная внутри круга, есть тождественный нуль. Поэтому необходимо предположить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - |a_n|]$ сходится.

Предполагая это, мы показали в гл. IX, § 3, п. 4, что функция

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - z\bar{a}_k} \hat{a}_k \quad (15)$$

есть голоморфная внутри единичного круга, не равная тождественно нулю.

Заметив, что $\hat{a}_k = |a_k|^2/a_k$ и $\prod_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится, перепишем (15) в виде

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - z\bar{a}_k} \frac{|a_k|}{a_k} \prod_{k=1}^{\infty} |a_k|. \quad (15')$$

Откидывая постоянный множитель $\prod_{k=1}^{\infty} |a_k|$ формулы (15'), рассмотрим функцию

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - z\bar{a}_k} \frac{|a_k|}{a_k}, \quad (16)$$

которая будет голоморфной внутри единичного круга, не равной тождественно нулю; нули этой функции $g(z)$ совпадают с нулями данной функции $f(z)$. Чтобы сравнить $f(z)$ и $g(z)$, образуем отношение f/g , которое будет представлять голоморфную функцию внутри единичного круга, не имеющую нулей, и покажем, что это отношение по модулю не превосходит единицы.

Действительно, полагая $g_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{a_k - z}{1 - z\bar{a}_k} \frac{|a_k|}{a_k}$, мы покажем, как в начале настоящего пункта, что для всякой точки z ($|z| < 1$) имеет место неравенство

$$|f/g_n| \leq 1. \quad (17)$$

Из последнего неравенства (17) в пределе при $n \rightarrow \infty$ получим:

$$|f/g| \leq 1, \quad (17')$$

причем знак равенства для точки z ($|z| < 1$) возможен только в том случае, когда f/g есть тождественно постоянное вида $e^{i\theta}$.

Итак, отношение f/g есть функция, голоморфная внутри единичного круга, не имеющая нулей и по модулю не превосходящая единицы. Следовательно, мы можем написать:

$$(z)/g(z) = e^{\Gamma(z)}, \quad (18)$$

где $\Gamma(z)$ будет функцией, голоморфной внутри единичного круга и удовлетворяющей условию $R(\Gamma(z)) \leq 0$. Внося в формулу (18) вместо $g(z)$ ее выражение (16) в виде бесконечного произведения, получим:

$$f(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - z\bar{a}_k} \frac{|a_k|}{a_k}. \quad (19)$$

Наконец, если начало координат есть нуль функции $f(z)$ кратности λ , то вместо (19) будем иметь более общую формулу

$$f(z) = z^{\lambda} e^{\Gamma(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - z\bar{a}_k} \frac{|a_k|}{a_k}, \quad (20)$$

где $\Gamma(z)$ — функция, голоморфная при $|z| < 1$, имеющая действительную часть, все время отрицательную или все время равную нулю.

Это аналитическое представление функции, голоморфной внутри единичного круга и по модулю меньшей единицы, указывает явно на все нули этой функции. Кроме того, обратно, если a_n есть любая последовательность точек $|a_n| < 1$ такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - |a_n|]$ или $\prod_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то выражение (20) изображает функцию, голоморфную внутри единичного круга и по модулю меньшую единицы.

Таким образом, мы получили вместе с тем условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точки a_n были нулями функции, голоморфной, не равной

тождественному нулю и ограниченной в круге $|z| < 1$, заключающееся в следующем: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)$ сходится, или, что то же, если отбросить нулевую точку,

$\prod_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Впрочем, этот последний результат был установлен ранее (гл. IX, § 3, пп. 3, 4).

2. **Лемма Шварца.** Если функция $\omega = f(z)$, голоморфная в круге $|z| < 1$, удовлетворяет условиям $f(0) = 0$ и $|f(z)| < 1$, при $|z| < 1$, то мы имеем $|f(z)| \leq |z|$ всюду в круге $|z| < 1$. Кроме того, если равенство имеет место хотя бы в одной внутренней точке, то оно имеет место повсюду, и тогда $f(z) = e^{\alpha i} z$. Иначе говоря, лемма Шварца утверждает, что при отображении с помощью функции $\omega = f(z)$ всякая точка либо приближается к началу координат, либо наше отображение представляет вращение около начала координат.

Переходя к доказательству, заметим, что всюду внутри рассматриваемого круга $|z| < 1$ имеем:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad (21)$$

так как согласно условию $f(0) = 0$. Отношение $\frac{f(z)}{z}$ представляет функцию, голоморфную внутри указанного круга, если принять

$$\left[\frac{f(z)}{z} \right]_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z},$$

причем имеет место разложение

$$\frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots \quad (22)$$

Возьмем внутри нашего круга радиуса единица концентрический круг радиуса ρ ($\rho < 1$). Мы знаем, что максимум модуля функции, голоморфной в замкнутой области, достигается на границе этой области (гл. V, § 2, п. 5). Поэтому для всех точек z , лежащих в круге $|z| \leq \rho$, будет иметь место неравенство

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{\rho}.$$

Заставляя ρ стремиться к единице, считая z постоянным, мы видим, что во всякой точке z , лежащей внутри круга $|z| < 1$, будем иметь:

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1,$$

или

$$|f(z)| \leq |z|.$$

Итак, первая часть леммы Шварца доказана.

Допустим теперь, что хотя бы при одном a ($|a| < 1$) справедливо равенство $|f(a)| = |a|$. Рассмотрим функцию $\frac{f(z)}{z}$, голоморфную в окрестности точки a .

В самой точке a , по предположению, имеем: $\left| \frac{f(a)}{a} \right| = 1$. Поэтому, если $\frac{f(z)}{z}$ не есть тождественное постоянное, то должны найтись точки z ($|z| < 1$), в которых $\left| \frac{f(z)}{z} \right| > 1$, что невозможно согласно доказанной первой части. Следова-

тельно, имеем: $\frac{f(z)}{z} = \text{const}$ всюду внутри круга $|z| < 1$. Так как при $z = a$

Из формулы (26) возможно получить оценку менее тонкую, но более удобную, если отбросить множитель $H(r)$, который не превосходит единицы, и ограничиться n первыми членами бесконечного произведения:

$$M(r) \leq r^\lambda \prod_{k=1}^n \frac{r + r_k}{1 + r r_k}. \quad (27)$$

Заметим, что если отбросить все n множителей произведения, то формула (27) перейдет в формулу (23).

3. Приложение леммы Шварца к оценке производной функции, удовлетворяющей условиям леммы. Рассмотрим максимум модуля функции $\frac{f(z)}{z}$ на окружности $|z| = r$, предполагая, что $\frac{f(z)}{z}$ не есть постоянное. Обозначим этот максимум через $q(r)$, тогда $\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq q(r) < 1$, потому что согласно лемме Шварца $\left| \frac{f(z)}{z} \right| < 1$. Функция $q(r)$ возрастает вместе с r , потому что, будучи неубывающей функцией, она могла бы сохранять постоянное значение в силу принципа максимального модуля только в том случае, когда $\frac{f(z)}{z}$ есть постоянное, что исключается.

Заставляя r стремиться к нулю, из равенства $\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq q(r) < 1$ получаем:

$$|f'(0)| < 1,$$

потому что $q(r)$ ($q(r) < 1$) убывает с убыванием r . Если наконец, $\frac{f(z)}{z}$ есть постоянное a , то по лемме Шварца $|a| \leq 1$, и, очевидно, имеем в этом случае:

$$|f'(0)| = |a| \leq 1,$$

т. е. $|f'(0)| \leq 1$, причем знак равенства имеет место только в том случае, если $a = e^{\alpha i}$, т. е. $f(z) = e^{\alpha i} z$. Итак, при условиях леммы Шварца всегда имеет место неравенство

$$|f'(0)| \leq 1, \quad (28)$$

причем знак равенства будет лишь в том случае, когда $f(z) = e^{\alpha i} z$.

Если начало координат есть нуль функции $f(z)$ кратности λ , то, применяя предыдущие рассуждения к функции $\frac{f(z)}{z}$, получим:

$$\left| \frac{f^\lambda(0)}{\lambda!} \right| \leq 1, \quad (29)$$

причем знак равенства будет лишь в том случае, когда $f(z) = e^{\alpha i} z^\lambda$.

Резюмируя, мы можем сказать, что для функции, удовлетворяющей условиям леммы Шварца, первый ненулевой коэффициент ее разложения в степенной ряд по модулю не превосходит единицы, причем он по модулю равен единице лишь в том случае, когда это разложение приводится к своему первому члену.

Чтобы найти оценку для $|f'(z)|$ в любой точке z_0 ($|z_0| < 1$), выполним два линейных преобразования плоскостей z и $\omega = f(z)$, сохраняющих единичный круг и переводящих точки z_0 и $\omega_0 = f(z_0)$ соответственно в начало координат:

$$\zeta = \frac{z - z_0}{z \bar{z}_0 - 1}, \quad \omega = \frac{\omega - f(z_0)}{\omega \bar{f}(z_0) - 1}.$$

Прилагая лемму Шварца к функции $\omega = \varphi(\zeta)$, находим:

$$|\varphi(\zeta)| \leq |\zeta|,$$

или

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z)\overline{f(z_0)} - 1} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{z\overline{z_0} - 1} \right|,$$

откуда следует:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \left| \frac{f(z)\overline{f(z_0)} - 1}{z\overline{z_0} - 1} \right|. \quad (30)$$

Заметив, что $|f(z)\overline{f(z_0)}| < 1$ и, значит, $|f(z)\overline{f(z_0)} - 1| < 2$, находим из неравенства (30):

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{2}{|1 - z\overline{z_0}|},$$

или, полагая $|z| = r$, $|z_0| = r_0$, получаем:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{2}{1 - rr_0}. \quad (31)$$

Заставляя z стремиться к z_0 , находим из (31):

$$|f'(z_0)| \leq \frac{2}{1 - r_0^2}.$$

Однако можно получить лучшую оценку для $|f'(z_0)|$, если отправляться от неравенства (30). Действительно, замечая, что вторая часть неравенства (30) при $z \rightarrow z_0$ стремится к значению

$$\frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2} \leq \frac{1}{1 - |z_0|^2},$$

мы найдем:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{1 - |z_0|^2}. \quad (32)$$

Неравенства (31) и (32) были с успехом использованы Каратеодори (Caratheodory) в проблеме конформного отображения.

4. Общая форма леммы Шварца. Лемма Шварца в своей первоначальной форме предполагает, что функция обращается в нуль в начале координат. Чтобы понять истинный смысл этого предложения, нужно освободиться от этого условия.

Пусть $\varphi(u)$ — функция, голоморфная внутри круга S (или на полуплоскости), и ее значения изображаются точками, лежащими внутри круга Γ (или полуплоскости). Для двух пар соответствующих точек $[u_1, \varphi(u_1)]$ и $[u_2, \varphi(u_2)]$ неевклидово расстояние между u_1, u_2 относительно S не меньше неевклидова расстояния между $\varphi(u_1), \varphi(u_2)$ относительно Γ . Равенство имеет место лишь в случае линейного преобразования S в Γ :

$$D_\Gamma[\varphi(u_1), \varphi(u_2)] \leq D_S[u_1, u_2]. \quad (33)$$

В этом заключается общая формулировка леммы Шварца.

Для доказательства выполним линейные преобразования S и Γ в единичный круг s , переводящие u_1 и $\varphi(u_1)$ в начало координат. Пусть эти преобразования будут $u = l(z)$, $w = l_1(\zeta)$; тогда функция $w = \varphi(u)$ преобразуется в функцию $\xi = f(z) = l_1^{-1}\varphi(l(z))$, удовлетворяющую условиям классической леммы Шварца. Для установления общей формы леммы Шварца достаточно доказать, что

$$D_s[0, f(z_2)] \leq D_s[0, z_2],$$

причем равенство имеет место только в случае, когда $f(z)$ есть вращение, потому что ангармоническое отношение является инвариантом линейного преобразования и, значит, $D_c[0, f(z_2)] = L_{\Gamma}[\varphi(u_1), \varphi(u_2)]$ и $D_c[0, z_2] = D_c[u_1, u_2]$. Последнее же вытекает из леммы Шварца в ее первоначальной форме $|f(z)| \leq |z|$ и из того факта, что неевклидово расстояние точки до начала координат $k \ln \frac{1+r}{1-r}$ есть возрастающая функция ее евклидова расстояния r . Поэтому из неравенства

$$|f(z)| \leq |z| \quad (34)$$

следует:

$$k \ln \frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \leq k \ln \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

или

$$D_c[0, f(z)] \leq D_c[0, z], \quad (35)$$

причем знак равенства в (34) и (35) имеет место одновременно, т. е. только в случае, когда $f(z)$ есть вращение.

Если принять S и Γ за единичные круги, то доказанную общую форму леммы Шварца можно сформулировать геометрически следующим образом:

Если $w = f(z)$ остается внутри круга $|w| < 1$ при $|z| < 1$ и одновременно z находится внутри неевклидова круга γ с центром z_0 и неевклидовым радиусом ρ , то w остается внутри неевклидова круга γ' с центром $w_0 = f(z_0)$, того же неевклидова радиуса ρ ; если z стремится к точке z_1 на окружности γ , то w стремится к точке $w_1 = f(z_1)$, причем w_1 лежит на окружности γ' только в том случае, когда $f(z)$ линейно зависит от z ; преобразование (z, w) есть тогда неевклидово перемещение внутренности единичного круга.

Заметим, что, пользуясь леммой Шварца, можно немедленно получить теорему § 2, п. 7. Действительно, если (z, w) есть взаимно однозначное конформное отображение внутренности круга (или полуплоскости) самого на себя, то вследствие доказанного предложения для двух пар точек мы должны иметь:

$$D(w_1, w_2) \leq D(z_1, z_2)$$

и, если рассматривать обратно z как функцию w :

$$D(z_1, z_2) \leq D(w_1, w_2),$$

откуда вытекает, что $D(w_1, w_2) = D(z_1, z_2)$, а это будет только в том случае, когда наше преобразование (z, w) есть линейное.

5. Существование двойной точки преобразования. Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную внутри круга $|z| < 1$ и преобразующую его внутренность D на множество точек Δ , вполне внутреннее к D , т. е. такое, что точки множества Δ вместе с его предельными принадлежат D . Докажем, что *существует двойная точка z_0 и притом единственная в D , и в этой точке имеем: $|f'(z_0)| < 1$* . Другими словами, мы должны доказать, что существует в области D единственный простой нуль функции $f(z) - z$ и что эта двойная точка преобразования $(z, f(z))$ есть *притягивающая* (гл. III, § 1, п. 12).

Предварительно заметим следующее: гипотеза, поставленная a priori, о том, что множество Δ не только содержится в D , но, в полне внутреннее к D , является существенно необходимой. В самом деле, например, $w = rz$, где $0 < r < 1$, преобразует подобно круг, окружность которого проходит через начало координат, в круг, внутренность которого принадлежит первоначальному кругу, а граница в начале координат соприкасается с окружностью первоначального круга. Двойными точками этого преобразования являются только начало координат и бесконечно удаленная точка; обе не лежат внутри круга. Таким образом, если граница множества Δ не лежит внутри D , то может и не существовать в D двойных точек.

Приступая к доказательству нашего предложения, проведем окружность γ с центром в начале координат радиуса, меньшего единицы, внутренность которой

содержит Δ (рис. 111). Такую окружность γ всегда можно построить, потому что расстояние граничной точки Δ до окружности Γ имеет положительный минимум. Если существуют нули функции $f(z) - z$, то они принадлежат Δ , а значит, лежат внутри γ .

Функции $f(z)$ и $-z$ голоморфны внутри и на окружности γ , причем $-z$ не обращается в нуль на γ .

Так как на этой окружности $|f(z)| < |-z|$, то в силу предложения Руше (гл. VII, § 2, п. 2) сумма этих функций $f(z) - z$ имеет внутри γ одинаковое число нулей с функцией $-z$. Заметив, что $-z$ имеет один простой нуль, мы видим, что $f(z) - z$ также имеет единственный простой нуль внутри γ . Этим доказана первая часть теоремы о существовании единственной двойной точки преобразования $(z, f(z))$ внутри области D .

Доказав существование единственной двойной точки z_0 в области D преобразования $(z, f(z))$, выясним теперь природу этой двойной точки.

Выполним линейное преобразование $\zeta = l(z)$, переводящее точку z_0 в начало координат и сохраняющее единичный круг; при этом преобразовании область Δ перейдет в область Δ_1 , целиком вместе со своей границей принадлежащую D . Пусть $z = L(\zeta)$ — преобразование, обратное относительно $\zeta = l(z)$. Тогда функция $l\{f[L(t)]\} = \varphi(\zeta)$ преобразует область D в множество Δ_1 , причем двойной точкой этого преобразования является начало координат. Заметим, что $\varphi'(\zeta) = l'(w) f'(z) L'(\zeta)$, откуда, полагая $\zeta = 0$ и вспомнив, что при этом $z = z_0$, $w = f(z_0) = z_0$, находим:

$$\varphi'(0) = l'(z_0) f'(z_0) L'(0) = f'(z_0),$$

потому что $l'(z_0) L'(0) = 1$ как произведение производных обратных функций в соответствующих точках. Таким образом, вместо оценки $f'(z_0)$ нам достаточно оценить $\varphi'(0)$.

Обозначая через γ' окружность с центром в начале координат, заключенную между γ и Γ , радиуса r и применяя формулу Коши, получим:

$$f'(z_0) = \varphi'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^2}.$$

Когда ζ описывает окружность γ' , то $\varphi(\zeta)$ остается на множестве Δ_1 и, значит, $|\varphi(\zeta)| < r$ (Δ_1 лежит внутри круга радиуса r); с другой стороны, $|\zeta| = r$. Заметив это, из последней формулы находим:

$$|f'(z_0)| = |\varphi'(0)| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r}{r^2} 2\pi r = \frac{r}{r} < 1,$$

что и нужно.

§ 4. Единственность аналитических функций

1. Однозначное определение аналитической функции по ее граничным значениям. Одним из основных свойств аналитических функций, как мы знаем (гл. V, § 2, п. 4), является свойство их единственности, в силу которого аналитическая функция однозначно определяется по ее значениям в точках сколь угодно малой дуги, лежащей внутри области ее голоморфизма. Пусть теперь нам дана

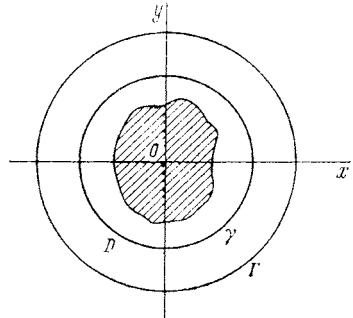


Рис. 111.

функция $f(z)$, голоморфная в области G , принимающая на некоторой дуге γ границы области G определенные непрерывные значения (изнутри G). Естественно возникает вопрос: будет ли такая функция единственной или же существует другая функция $\varphi(z)$, голоморфная в области G , принимающая на γ те же непрерывные значения?

Полагая $F(z) = f(z) - \varphi(z)$, мы будем иметь функцию, голоморфную в области G и принимающую равномерно изнутри G значение нуль на γ , т. е. эта функция $F(z)$, равная нулю на γ , будет непрерывной (изнутри G) во всех точках γ . Поставленный вопрос решается в положительном смысле, если мы покажем, что $F(z)$ есть тождественный нуль. Эта задача немедленно решается на основании принципа симметрии (§ 2, п. 3), если γ есть дуга окружности. В самом деле, в этом случае по принципу симметрии функция $F(z)$ аналитически продолжается через дугу γ и, следовательно, будучи голоморфной во всех точках, внутренних к γ , равна в них нулю. Такая же функция есть тождественный нуль вследствие основной теоремы единственности (гл. V, § 2, п. 4). Указанный вопрос решается положительно и в общем случае, когда γ есть дуга произвольной непрерывной линии, как это видно из нижеследующих рассуждений.

Возьмем две пока произвольные точки z_0 и z_1 внутри дуги γ . Полагая $z' - z_0 = (z - z_0) e^{\alpha i}$, мы видим, что линии γ и области G соответствуют линия γ' и область G' , которые получаются, если повернем γ и G на угол α вокруг точки z_0 . Для области G' определим функцию

$$F_1(z) = F[z_0 + (z - z_0) e^{-\alpha i}].$$

Аналогично положим:

$$z'' - z_1 = (z - z_1) e^{\beta i};$$

тогда линия γ и области G соответствуют γ'' и G'' . В области G'' определим функцию

$$F_2(z) = F[z_1 + (z - z_1) e^{-\beta i}].$$

Считая точки z_0 и z_1 достаточно близкими, можно выбрать углы α и β так, чтобы области G, G', G'' имели общую часть I , ограниченную частями линий $\gamma, \gamma', \gamma''$ (рис. 112)¹⁾.

Рассмотрим теперь произведение

$$\Phi(z) = F(z) F_1(z) F_2(z). \quad (36)$$

Функция $\Phi(z)$ есть голоморфная в области I , так как $F(z)$ будет голоморфной в G , $F_1(z)$ — в G' и $F_2(z)$ — в G'' . Кроме того, это произведение $\Phi(z)$, будучи непрерывной функцией

в замкнутой области I , обращается в нуль на замкнутом контуре i области I . Так как $|\Phi(z)|$ достигает своего максимума на границе i (гл. V, § 2, п. 5), то $\Phi(z)$ равно тождественно нулю в области I . Отсюда следует, что по крайней мере один из трех множителей произведения (36) равен нулю в области I , а следовательно, все три множителя этого произведения равны нулю в области I . Таким образом, функция $F(z)$, равная нулю в области I , есть тождественный нуль в области G .

2. **Обобщение теоремы единственности.** Теорема единственности была установлена (п. 1) в предположении, что граничные значения функции $f(z)$ существуют во всех точках некоторой дуги γ , причем эти значения образуют непрерывную

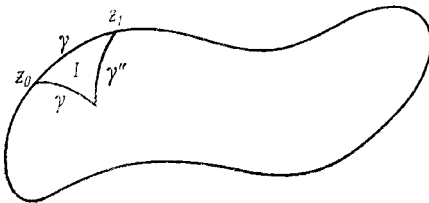


Рис. 112.

¹⁾ α — положительный, а β — отрицательный тупые углы.

функцию внутри области G . Естественно возникает вопрос: останется ли теорема единственности в силе, если отказаться от непрерывности граничных значений функции, причем рассматривать эти значения в точках некоторого а priori заданного множества? Более точно общая постановка проблемы единственности аналитических функций может быть сформулирована так. Дана гладкая линия C и функция $F(z)$, голоморфная с одной стороны от линии C ¹⁾. Под значением функции $F(z)$ в точке z_0 линии C условимся понимать предел, если таковой существует, к которому стремится $F(z)$, когда точка z приближается к точке z_0 , следуя по любому пути, не касательному к линии C . Предположим теперь, что функция $F(z)$ равна нулю во всех точках z_0 некоторого множества E , лежащего на C . Каким условием должно удовлетворять множество E , чтобы всякая такая функция $F(z)$ была тождественным нулем?

Мы не будем давать решение этих вопросов, так как оно достигается методами, выходящими за пределы элементарного руководства, и укажем лишь некоторые главнейшие результаты, здесь полученные²⁾. Можно построить пример функции $f(z)$, голоморфной и ограниченной внутри круга $|z| < 1$, не равной тождественно нулю, граничные значения которой равны нулю на множестве точек E мощности континуума и всюду плотной на окружности $|z| = 1$, причем это множество E может быть как первой, так и второй категории. Во всех такого рода примерах мера множества точек E непременно нуль. Если же E есть произвольное множество точек линии C положительной меры, то функция $F(z)$ есть тождественный нуль. Другими словами, теорема единственности остается в силе в случае любого множества точек E положительной меры. Можно, с другой стороны, построить пример функции $f(z)$, голоморфной внутри круга $|z| < 1$, не тождественно равной нулю, стремящейся к нулю для всякой точки z_0 некоторого множества E , мес $E = 2\pi$, окружности, когда точка z приближается к точке z_0 по радиусу $(0, z_0)$. Таким образом, если под значением функции в точке z_0 окружности мы будем понимать ее предельное значение по радиусу, то теорема единственности, вообще говоря, не верна даже в случае, если мера множества точек E равна длине окружности. Однако во всех такого рода примерах множество E «радиальных нулей» есть первой категории. Предполагая же множество E «радиальных нулей» функции $F(z)$ второй категории на некоторой дуге σ окружности и положительной меры на всякой части этой дуги, можно доказать, что $F(z)$ равна тождественно нулю. Следовательно, для множества точек E указанной структуры теорема единственности остается в силе и в том случае, когда под значением функции в точке z_0 множества E мы понимаем ее предел по радиусу.

В частности, функция $F(z)$, голоморфная внутри круга $|z| < 1$, стремящаяся к нулю, когда z приближается по радиусу к любой точке z_0 сколь угодно малой дуги σ окружности $|z| = 1$, равна тождественно нулю внутри круга.

§ 5. Конформные отображения на верхнюю полуплоскость областей, ограниченных линиями второго порядка

1. **Равносторонняя гиперболa.** Пользуясь принципом симметрии, мы рассмотрим отображение областей, ограниченных линиями второго порядка, на верхнюю полуплоскость. Естественно ожидать, что для этого нам придется рассматривать многочлен второй степени.

Рассмотрим сначала функцию

$$\omega = z^2, \quad (37)$$

¹⁾ Под линией C можно понимать любую линию Жордана, имеющую конечную длину. Такие линии называются спрямляемыми.

²⁾ Привалов И. И. Интеграл Cauchy. — Изв. Сар. ун-та, 1918; Lusin N. et Privaloff I., Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. — Annales de l'École Normale. 1925, стр. 143. Привалов И. И. Граничные свойства однозначных функций. — изд. 2-е. — М.: Гостехиздат, 1950.

причем совершенно очевидно, что z как функция w есть функция двухзначная и что ее точками разветвления будут 0 и ∞ (гл. III, § 3, п. 1). Введем действительные переменные, положив

$$z = x + yi, \quad w = u + vi,$$

и, следовательно,

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (37')$$

Из соотношений (37') сейчас же вытекает, что если возьмем прямую $u = c$ (рис. 113а), то на плоскости z

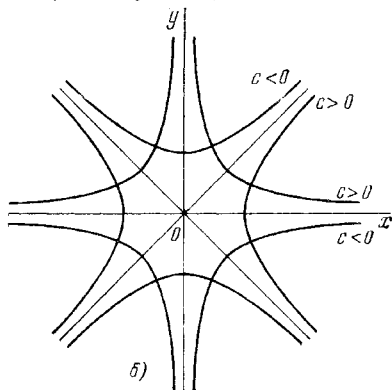
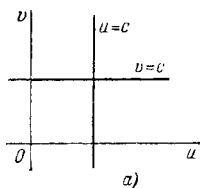


Рис. 113.

(рис. 113б) этой прямой будет соответствовать равносторонняя гипербола, уравнение которой есть:

$$x^2 - y^2 = c.$$

Прямые $v = c$ будут соответствовать также гиперболам, имеющие асимптотами оси координат и пересекающиеся с предыдущими гиперболами под прямыми углами (ибо при конформном отображении углы сохраняются) (рис. 113б).

Две прямые $u = c$, которые лежат в двух разных листах, преобразуются в две ветви гиперболы, имеющие общей точкой ∞ . То же самое можно сказать и относительно прямых $v = c$. Отсюда уже нетрудно видеть, что мы можем отобразить взаимно однозначно и конформно с помощью функции $w = z^2$ внутренность одной ветви равносторонней гиперболы на верхнюю полуплоскость. В самом деле, возьмем внутренность правой ветви равносторонней гиперболы, имеющей осью действительную ось Ox (рис. 114). Как мы уже видели, этой ветви гиперболы соответствует прямая $u = c$. Спрашивается, какая полуплоскость, имеющая границей $u = c$, будет соответствовать рассматриваемой внутренности гиперболы? Очевидно, та, которая не содержит начала координат, потому что его не содержит рассматриваемая внутренность гиперболы. Кроме того, рассматриваемые области

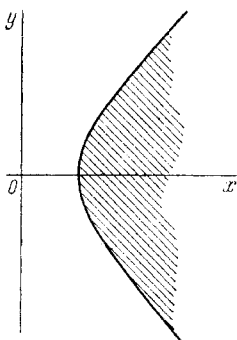


Рис. 114.

не содержат критических точек, поэтому отображение будет взаимно однозначным и конформным. Если взять внутренность левой ветви гиперболы, то она с помощью функции $w = z^2$ отобразится взаимно однозначно и конформно на ту же полуплоскость, что и внутренность правой ветви. Нашу полуплоскость с помощью линейной функции можно преобразовать в верхнюю полуплоскость. Итак, можно отобразить внутренность какой-либо ветви равносторонней гиперболы на верхнюю полуплоскость.

Что касается отображения внешней области гиперболы на верхнюю полуплоскость, то заметим пока, что функция $w = z^2$ не дает возможности его выпол-

нить взаимно однозначным и конформным образом, ибо в точке O консерватизм углов нарушается.

2. **Парабола.** В предыдущем пункте мы исследовали, что будет соответствовать в плоскости z координатным линиям плоскости w , т. е. прямым $u = c$ и $v = c$. Зададимся теперь обратным вопросом, именно посмотрим, что будет соответствовать в плоскости w прямым $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$.

Когда точка z движется по прямой $x = c$ (рис. 115), тогда u и v будут функциями одного только параметра y . Из второго уравнения (37') для этого случая имеем: $y = \frac{v}{2c}$. Подставляя в первое уравнение (37') это выражение y , мы получим:

$$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2},$$

или окончательно:

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u).$$

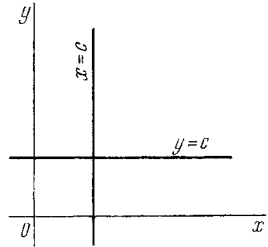


Рис. 115.

Последнее уравнение представляет собой уравнение параболы, причем ось Ou служит осью симметрии параболы. Вершина этой параболы находится в точке $(c^2, 0)$; фокус же (который отстоит от вершины на расстоянии $p/2$, если $y^2 = 2px$) находится в начале координат (рис. 116). Если мы возьмем прямую $y = c$, то ее отображение в плоскости w будет тоже параболой. Действительно, исключая из уравнений (37') x , получаем:

$$x = \frac{v}{2c}, \quad u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2,$$

или

$$v^2 = 4c^2(u + c^2).$$

Эта парабола имеет фокусом начало координат, а вершиной $(-c^2, 0)$ (рис. 116).

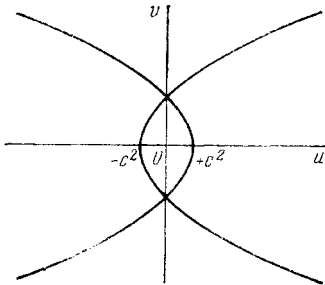


Рис. 116.

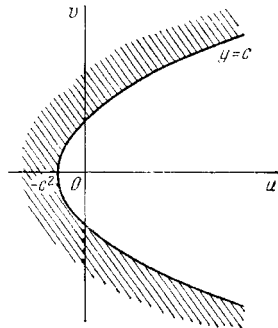


Рис. 117.

Следует заметить, что каждая из этих двух парабол *двойная*; одна — на одном листе римановой поверхности, другая — на другом. Возьмем внешнюю часть параболы (рис. 117), даваемой уравнением

$$v^2 = 4c^2(u + c^2).$$

Так как внешняя часть параболы не содержит критической точки, т. е. нуля, то, следовательно, наша функция $z = \sqrt{w}$ будет отображать взаимно однозначно и

конформно внешнюю часть этой параболы на верхнюю полуплоскость, ограниченную прямой $y = c$.

Зададимся задачей отобразить внутреннюю часть параболы на верхнюю полуплоскость. Очевидно, что нам здесь будет мешать критическая точка — начало координат. Рассмотрим сначала область, ограниченную верхней половиной параболы и действительной осью (рис. 118а).

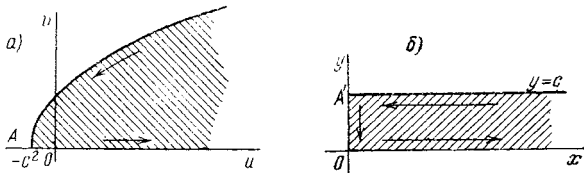


Рис. 118.

Как мы видели, вся рассматриваемая параболa соответствует прямой $y = c$.

Для верхней дуги параболы мы имеем $v \geq 0$, следовательно, $x = \frac{v}{2c} \geq 0$ ($c > 0$); поэтому верхней дуге параболы соответствует полупрямая $y = c$ от мнимой оси до бесконечности (рис. 118б).

Посмотрим теперь, что будет соответствовать прямолинейной границе рассматриваемой области (рис. 118а). Сначала найдем, что будет соответствовать действительной положительной полуоси Ou (здесь $v = 0$, а $u \geq 0$). Из уравнений (37') легко заключить, что в таком случае $y = 0$, а $u = x^2$. Отсюда ясно, что действительной положительной полуоси плоскости w будет соответствовать действительная

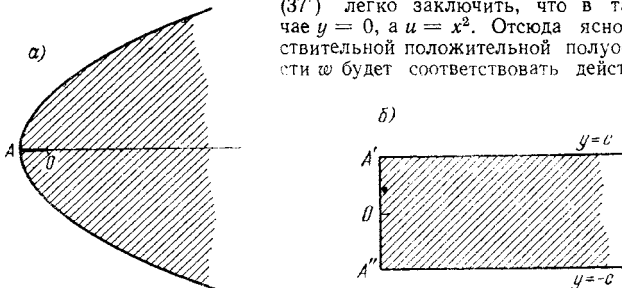


Рис. 119.

и положительная полуось плоскости z . Теперь посмотрим, что будет соответствовать прямолинейному отрезку от вершины параболы до фокуса, т. е. когда $v = 0$, а u меняется от 0 до $-c^2$. Из формулы (37') мы видим, что в таком случае $x = 0$, а y меняется от 0 до c . Итак, рассматриваемая область с помощью формулы $z = \sqrt{w}$ взаимно однозначно и конформно отображается на полуполосу ширины c (рис. 118б).

Разрежем теперь рассматриваемую область от вершины параболы A (рис. 119а) до ее фокуса — начала координат — и применим принцип симметрии. Из него следует, что разрезанной указанным способом внутренности параболы будет соответствовать полуполоса ширины $2c$ (рис. 119б). Если же разрезать данную область вдоль действительной положительной оси Ou (рис. 120а) и применить принцип симметрии, продолжая функцию за мнимую ось, то найдем, что так разрезанная внутренность параболы с помощью функции $z = \sqrt{w}$ отобразится на полосу, ограниченную действительной осью Ox и прямой $y = c$ (рис. 120б). Следует заметить, что в двух последних случаях отображение будет

взаимно однозначным и конформным, так как критическая точка O находится на границе области (именно на разрезах).

Как отобразить взаимно однозначно и конформно внутренность параболы (неразрезанную) на верхнюю полуплоскость? Какова будет функция, выполняющая это отображение? С этой целью возьмем снова область, ограниченную верхней половиной параболы и ее осью симметрии (рис. 118а). Она, как мы уже

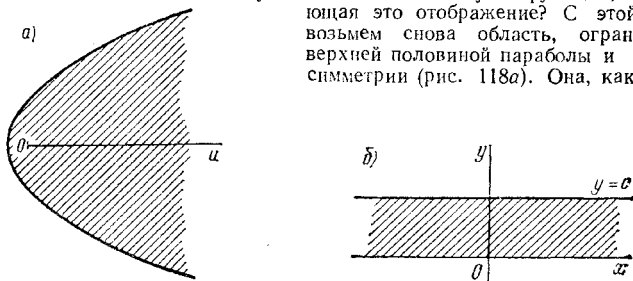


Рис. 120.

видели, с помощью функции $z = \sqrt{w}$ отображается взаимно однозначно и конформно на полуполосу (рис. 118б). Отобразим эту полуполосу на полукруг с помощью подстановки:

$$z' = e^{-\frac{\pi z}{c}} \quad (\text{гл. III, § 3, п. 2}). \quad (38)$$

Проверим это. Действительно, когда точка z движется по прямой $y = c$, то подстановка (38) принимает вид

$$z' = -e^{-\frac{\pi}{c}(x+iy)} = -e^{-\frac{\pi}{c}(x+ci)} = -e^{-\frac{\pi x}{c}} \cdot e^{-\pi i} = e^{-\frac{\pi x}{c}}. \quad (38')$$

Отсюда видно, что когда x изменяется от ∞ до нуля, то z' изменяется от нуля до единицы. На отрезке OA' (рис. 118б) имеем $x = 0$, y меняется от нуля до c ; следовательно, $\frac{y}{c}$ будет меняться от нуля до еди-

ницы. Подстановка (38) дает: $z' = -e^{-\frac{\pi i}{c} y}$. Отсюда видно, что когда точка z движется по $A'O$, то z' описывает полуокружность радиуса единица (ибо $|z'| = 1$) от точки 1 до -1 , причем из сохранения направления отсчета углов следует, что полуокружность будет в верхней полуплоскости переменного z' . Наконец, когда точка z движется по действительной оси от нуля до ∞ , то $y = 0$, а x изменяется от нуля до ∞ ; $z' =$

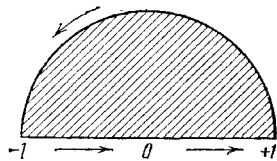


Рис. 121.

$= -e^{-\frac{\pi}{c} x}$ будет меняться в таком случае от -1 до нуля (рис. 121).

Итак, мы можем отобразить область, границей которой служит верхняя половина параболы и ось симметрии, на полукруг. Отобразим полученный полукруг на верхнюю полуплоскость. Для этого мы возьмем такую функцию

$$-\frac{z'+1}{z'-1}. \quad (39)$$

Эта линейная функция, очевидно, переведет отрезок от -1 до $+1$ в действитель-

ную положительную полуось, а полуокружность — в мнимую положительную полуось (гл. III, § 3, п. 1). Таким образом, рассматриваемая линейная функция (39) переводит полукруг на координатный угол (рис. 122). Совершенно ясно, что подстановка

$$\xi = \left(\frac{z' + 1}{z' - 1} \right)^2$$

(гл. III, § 3, п. 1) отобразит наш полукруг на верхнюю полуплоскость (рис. 123).

Следя за всеми предыдущими преобразованиями, мы замечаем, что верхняя дуга параболы отобразится в плоскости ξ в виде полупрямой, лежащей на действительной положительной оси плоскости ξ и простирающейся от единицы до ∞ (рис. 123). Воспользуемся теперь принципом симметрии. По

этому принципу внутренность всей параболы (без разреза) отобразится на плоскость ξ , разрезанную по действительной оси от единицы до ∞ , причем верхний берег разреза соответствует верхней дуге параболы, нижний — нижней дуге. Остается рассеченную плоскость (рис. 124) перевести в верхнюю полуплоскость. Для этого, очевидно, можно воспользоваться формулой $\sqrt{\xi - 1}$ или же такой формулой:

$$W = -\frac{1}{\sqrt{\xi - 1}}. \quad (40)$$

Замечая теперь, что вся парабола отобразится взаимно однозначно на действительную ось плоскости W , мы заключаем на основании § 2, п. 2, что внутренность параболы с помощью функции W отобразится взаимно однозначно и конформно на верхнюю полуплоскость.

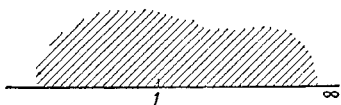


Рис. 123.

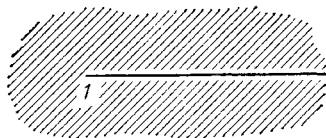


Рис. 124.

Итак, задача решена; остается написать функцию W в раскрытом виде

$$z = \sqrt{w}, \quad z' = e^{-\frac{\pi \sqrt{w}}{c}},$$

$$\xi = \left(\frac{1 - e^{-\frac{\pi \sqrt{w}}{c}}}{1 + e^{-\frac{\pi \sqrt{w}}{c}}} \right)^2 = \left(\frac{e^{\frac{\pi \sqrt{w}}{2c}} - e^{-\frac{\pi \sqrt{w}}{2c}}}{e^{\frac{\pi \sqrt{w}}{2c}} + e^{-\frac{\pi \sqrt{w}}{2c}}} \right)^2.$$

Так как $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x$, то имеем:

$$\xi = \text{th}^2 \frac{\pi \sqrt{w}}{2c}.$$

Наконец, получаем:

$$W = -\frac{1}{\sqrt{\xi-1}} = \frac{1}{-i\sqrt{1-\xi}} = \frac{i}{\sqrt{1-\xi}} = i \operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{w}}{2c}. \quad (41)$$

Такова функция, которая отображает взаимно однозначно и конформно внутреннюю часть параболы на верхнюю полуплоскость.

3. Гипербола и эллипс. В настоящем пункте мы решим задачу об отображении на верхнюю полуплоскость областей, ограниченных гиперболой и эллипсом. Для этого нам придется изучить функцию

$$\omega = z + \frac{1}{z}, \quad (42)$$

и обратно

$$z = \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4}}{2}. \quad (42')$$

Таким образом, соотношение (42) дает отображение плоскости z на двулистую риманову поверхность. Критические точки легко получить, взяв производную от функции (42) и приравняв ее нулю:

$$1 - \frac{1}{z^2} = 0, \quad \text{откуда } z = \pm 1.$$

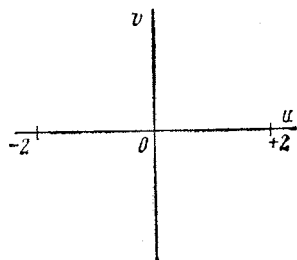


Рис. 125.

Итак, критическими точками будут $\omega = 2$ и $\omega = -2$. Разрезав листы переменного ω по действительной оси от -2 до 2 (рис. 125), мы для получения римановой поверхности связываем нижний берег 1-го листа с верхним 2-го, а нижний 2-го с верхним 1-го.

Для того чтобы более детально исследовать это отображение, мы введем действительные переменные следующим образом:

$$\omega = u + vi, \quad z = \rho e^{i\theta}.$$

Принимая во внимание соотношение (42), имеем:

$$u + vi = \rho e^{i\theta} + \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \theta + i \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin \theta,$$

откуда следует, что наше соотношение (42) эквивалентно двум таким:

$$u = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \theta, \quad v = \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin \theta. \quad (43)$$

Будем брать семейства координатных линий плоскости z . Возьмем одно семейство (окружности): $\rho = c$.

Посмотрим, что будет соответствовать этим окружностям. Для этого заменим ρ в уравнениях (43) через постоянное c . Тогда уравнения (43) представят собой параметрические уравнения эллипса.

Исключая из них θ , найдем:

$$\frac{u^2}{(c + 1/c)^2} + \frac{v^2}{(c - 1/c)^2} = 1. \quad (44)$$

Центр этого эллипса будет находиться в начале координат. Большая полуось его по длине равна $c + 1/c$, а малая $c - 1/c$ (предполагая $c > 1$). Фокусы будут иметь координатами $(-2, 0)$ и $(2, 0)$ (рис. 126). Так как координаты фокусов не зависят от c , то ясно, что, меняя c , мы будем получать софокусные эллипсы. Далее, легко видеть, что двум разным окружностям (в плоскости z) радиусов $\rho = c$ и $\rho = 1/c$ (рис. 127а) (предполагая $c \neq 1$) будет соответствовать один и тот же эллипс (рис. 127б). Этот эллипс — двойной: один лежит на одном листе

римановой поверхности, другой — на другом. Поэтому эллипсу, лежащему на одной плоскости или листе, будет соответствовать окружность, скажем, радиуса c , а лежащему на другом листе — окружность радиуса $1/c$. Но будет и исключительный случай, именно, когда $c = 1$, т. е. когда радиус ρ окружности (в плоскости z) равен единице. Тогда, как показывают уравнения (43), наша окружность будет переходить в двойной отрезок от -2 до $+2$ действительной оси.

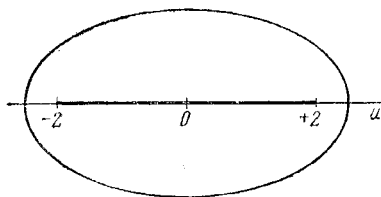


Рис. 126.

Итак, внешняя к эллипсу область отобразится на внешность окружности радиуса c ($c > 1$), если наш эллипс соответствует этой окружности, и на внутренность окружности радиуса $1/c$, если эллипс соответствует окружности $\rho = 1/c$ (рис. 127а).

Посмотрим теперь, что будет соответствовать другому семейству координатных линий плоскости z , т. е. полупрямым $\theta = a$.

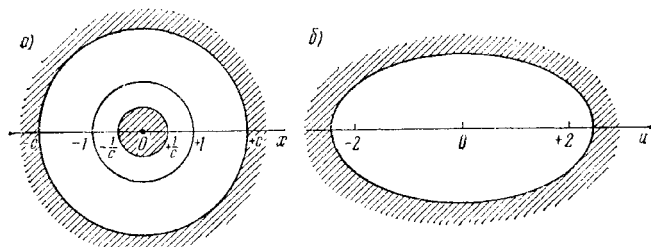


Рис. 127.

Исключая ρ из уравнений (43), найдем:

$$\frac{u^2}{4 \cos^2 a} - \frac{v^2}{4 \sin^2 a} = 1. \quad (45)$$

Это есть уравнение гиперболы с полуосями $2|\cos a|$ и $2|\sin a|$, фокусы которой имеют координаты $(-2, 0)$ и $(2, 0)$. Таким образом, мы видим, что прямой, наклоненной к действительной оси Ox под углом a , соответствует гипербола; точно так же прямой, образующей с осью Ox угол $-a$, соответствует та же гипербола. Далее, приняв во внимание уравнения (43), легко заключить, что полупрямой $\theta = a$ будет соответствовать правая ветвь гиперболы

$$\left(u > 0, \text{ если } a < \frac{\pi}{2} \right),$$

а полупрямой $\theta = \pi - a$ — левая ветвь гиперболы, лежащая в том же листе, так как, вращая полупрямую от $\theta = a$ до $\theta = \pi - a$, мы не перейдем через критическую точку. Аналогично, полупрямые $\theta = \pi + a$ и $\theta = 2\pi - a$ (или, что то же, $\theta = -a$) соответственно отобразятся на левую и правую ветви гиперболы, лежащей на другом листе.

Из этих рассуждений сейчас же вытекает, что при помощи функции $z = \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4}}{2}$ внешняя область гиперболы (рис. 128а) отображается взаимно однозначно и конформно на некоторый угол (рис. 128б). Переводя полученный

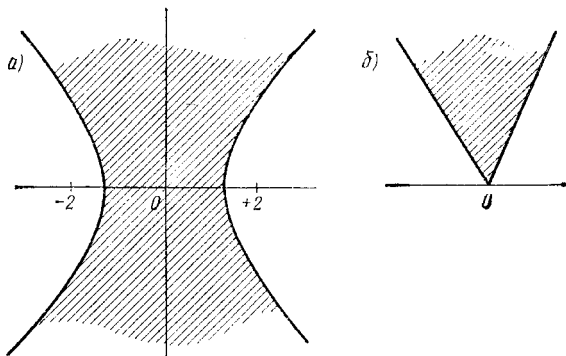


Рис. 128.

угол с помощью линейной функции и функции вида z^r , где r — действительное число, на верхнюю полуплоскость, мы решаем задачу: перевести внешнюю область гиперболы на верхнюю полуплоскость.

Допустим теперь, что мы хотим отобразить взаимно однозначно и конформным образом внутреннюю область правой ветви гиперболы на верхнюю полуплоскость (рис. 129).

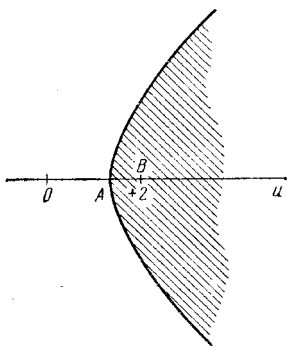


Рис. 129.

Чтобы исключить точку разветвления, мы рассмотрим сначала отображение области, ограниченной верхней частью гиперболы и осью симметрии. Всей нашей ветви гиперболы будет соответствовать, как мы знаем, полупрямая выходящая из начала координат плоскости z и наклоненная к действительной оси под углом α .

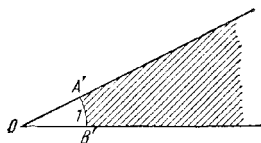


Рис. 130.

Из уравнений (43) нетрудно видеть, что верхней дуге нашей ветви гиперболы будет соответствовать та же полупрямая, но начинающаяся от точки A' , находящейся от O на расстоянии, равно единице (рис. 130). Далее, из тех же уравнений (43) видно, что когда точка ω будет двигаться по действительной оси (следовательно, $v = 0$), начиная от точки A до точки B (рис. 129), то соответствующая точка z будет описывать дугу окружности радиуса единица, выходя из точки A' и приходя в точку B' (рис. 130). И, наконец, когда точка ω движется по действительной оси от точки B до ∞ , то точка z движется по действительной оси от единицы до ∞ . Таким образом, области, ограниченной верхней частью гиперболы

и осью симметрии, будет соответствовать внешняя часть кругового сектора с углом, равным a (рис. 130).

Разрежем внутренность нашей гиперболы по AB . Применяя к этой разрезанной внутренности гиперболы принцип симметрии, мы легко найдем, что разрезанная по AB внутренность гиперболы отобразится на внешнюю область кругового сектора радиуса единица и с углом, равным $2a$ (рис. 131). Если же разрезать область, внутреннюю к гиперболе, от B до ∞ и применить принцип симметрии, то придем к заключению, что разрезанная таким образом внутренность гиперболы отобразится на внутреннюю часть угла величины a (рис. 132). Но нашей задачей является отобразить взаимно однозначно и конформно всю внутреннюю область гиперболы на простейшую область — верхнюю полуплоскость (или круг). Для

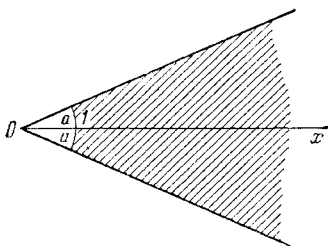


Рис. 131.

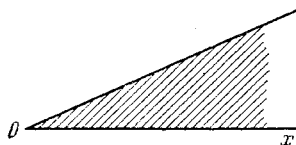


Рис. 132.

этого снова возьмем область, границей которой служат верхняя половина гиперболы и ось симметрии. С помощью изучаемой функции она отображается взаимно, однозначно и конформно на внешнюю часть кругового сектора с углом a (рис. 130). Сделаем подстановку

$$z' = z^{\pi/a},$$

мы отобразим нашу область на область, строение которой ясно из рис. 133. Преобразуем эту область далее, полагая $z'' = z' + 1/z'$. Мы видели ранее, что с помощью этой функции окружность радиуса единица переходит в отрезок действительной оси от -2 до $+2$. Следовательно, граница рассматриваемой области перейдет в действительную ось плоскости z'' . Кроме того, ясно, что в нашей области функция $z' + 1/z'$ голоморфна.

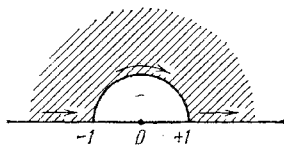


Рис. 133.

Таким образом, в силу теоремы § 2, п. 2 область (рис. 133) отобразится взаимно однозначно и конформно на верхнюю полуплоскость, и, следовательно, первоначальная область, ограниченная верхней половиной гиперболы и осью симметрии, будет отображена на верхнюю полуплоскость. С другой стороны, следя за всеми

сделанными нами преобразованиями, мы замечаем, что образ верхней дуги гиперболы на плоскости z'' есть полупрямая, лежащая на действительной оси и простирающаяся от -2 до $-\infty$.

Применим теперь принцип симметрии. Из него следует, что наша функция z'' отобразит взаимно однозначно и конформно всю внутреннюю область гиперболы на плоскость z'' , разрезанную по действительной оси от -2 до $-\infty$, причем верхний берег разреза будет соответствовать верхней дуге гиперболы, нижний — нижней дуге.

Вводя преобразование $z''' = z'' + 2$, мы преобразуем разрезанную плоскость z'' в плоскость z''' , разрезанную по действительной оси от нуля до $-\infty$. Далее, применив подстановку $\sqrt{z''}$, мы разрезанную плоскость z''' переводим в правую полуплоскость. Остается эту полуплоскость перевести в верхнюю, повернув ее

с помощью множителя $e^{i\pi/2} = i$ на прямой угол. Итак, функция

$$W = i\sqrt{z''}$$

будет переводить взаимно однозначно и конформно внутреннюю область гиперболы на верхнюю полуплоскость.

Напишем теперь функцию W в раскрытом виде:

$$\begin{aligned} W &= i\sqrt{z''} = i\sqrt{z' + 2} = i\sqrt{z' + \frac{1}{z'} + 2} = i\sqrt{z^{\pi/a} + \frac{i}{z^{\pi/a}} + 2} = \\ &= i\sqrt{\left(\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4}}{2}\right)^{\pi/a} + \left(\frac{2}{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4}}\right)^{\pi/a} + 2}, \end{aligned}$$

или окончательно:

$$W = i\left[\left(\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4}}{2}\right)^{\pi/2a} + \left(\frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4}}{2}\right)^{\pi/2a}\right]. \quad (46)$$

Такова функция, выполняющая взаимно однозначное и конформное отображение внутренней области правой ветви гиперболы на верхнюю полуплоскость.

4. Отображение внутренней эллипса на полуплоскость. Пользуясь тем же самым методом, мы можем отобразить внутренность эллипса на верхнюю полуплоскость.

Возьмем эллипс, определяемый уравнением

$$\frac{u^2}{(c + 1/c)^2} + \frac{v^2}{(c - 1/c)^2} = 1.$$

Как мы уже видели в предыдущем пункте, этому эллипсу будет соответствовать окружность радиуса c .

Берем область, ограниченную верхней половиной эллипса и его осью симметрии (рис. 134). Верхней дуге эллипса соответствует верхняя полуокружность на плоскости z (рис. 135). Действительно, когда $z = \rho e^{i\theta}$ меняется по этой полуокружности, то из уравнений (43) видно, что v будет больше нуля ($c > 1$); когда

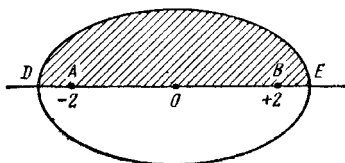


Рис. 134.

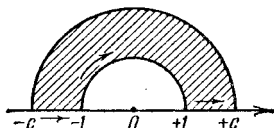


Рис. 135.

точка w движется по DA (рис. 134), то точка z движется по действительной оси от $-c$ до -1 (рис. 135). Когда точка w движется по отрезку от -2 до $+2$, то z движется по полуокружности радиуса единица от -1 до $+1$. И, наконец, когда w описывает BE , то z движется по действительной оси от $+1$ до c . Короче говоря, рассматриваемая область отображается на криволинейный четырехугольник, границей которого служат две окружности радиусов 1 и c и два отрезка действительной оси (рис. 135). Разрезая внутренность рассматриваемого эллипса по действительной оси от -2 до $+2$ (рис. 136а)), мы заключаем по принципу Шварца, что при помощи нашей функции $z = z(w)$ так разрезанная внутренность эллипса отобразится взаимно однозначно и конформно на область, ограниченную двумя концентрическими окружностями радиусов единица и c (рис. 136б)).

Если же разрезать эллипс по DA и BE (рис. 137а)), то он отобразится на криволинейный четырехугольник, ограниченный окружностями радиусов c и $1/c$ и двумя отрезками действительной оси (рис. 137б)). Но нас интересует отображение всей внутреннейности эллипса.

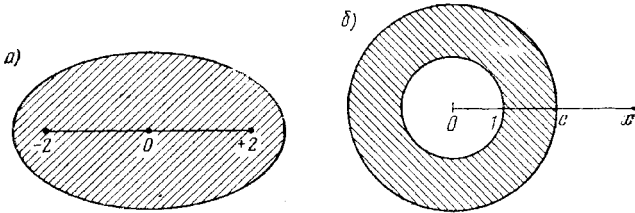


Рис. 136.

Мы уже видели, что верхняя половина этой внутреннейности эллипса отображается на криволинейный четырехугольник (рис. 135). Такой криволинейный

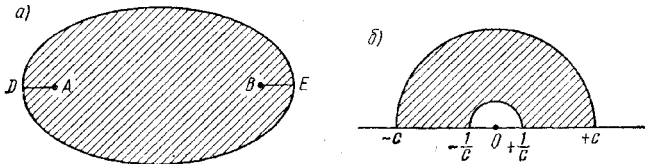


Рис. 137.

четырёхугольник мы в гл. III, § 3, п. 2 преобразовали в прямолинейный прямоугольник (рис. 138), полагая $z' = \ln z = \ln \rho + \theta i$.

Итак, нам удалось отобразить верхнюю часть внутреннейности эллипса на прямоугольник. Остается этот прямоугольник перевести на верхнюю полуплоскость. Эту задачу мы решим в одном из следующих параграфов. Мы найдем функцию f , которая будет отображать взаимно однозначно и конформно прямоугольник на верхнюю полуплоскость. Функция же

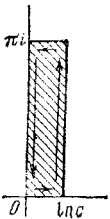


Рис. 138.

$$f \left(\ln \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4}}{2} \right)$$

будет, очевидно, переводить взаимно однозначно и конформно верхнюю часть внутреннейности эллипса на верхнюю полуплоскость. Применяя принцип симметрии, мы увидим, что эта же функция будет отображать взаимно однозначно и конформно внутренность всего эллипса на плоскость, разрезанную вдоль некоторого отрезка действительной оси. Остается затем лишь преобразовать

эту разрезанную плоскость в верхнюю полуплоскость, чтобы иметь взаимно однозначное и конформное отображение внутреннейности всего эллипса на верхнюю полуплоскость.

§ 6. Конформное отображение односвязных областей

Мы знаем, что отображение области G плоскости z на плоскость w , выполняемое с помощью функции $\omega = f(z)$, аналитической в G , будет конформным во всех точках z , где производная $f'(z)$ не равна

нулю. Это отображение области G будет взаимно однозначным, если различным точкам z_1 и z_2 области G всегда соответствуют две разные точки w_1 и w_2 на плоскости w . В этом последнем случае каждой точке z односвязной области G соответствует определенная точка w некоторой односвязной области T плоскости w , и, обратно, каждой точке области T отвечает единственная точка в области G . Другими словами, при взаимно однозначном отображении области G на область T функция, обратная однозначной аналитической функции $w = f(z)$, будет в свою очередь однозначной функцией в области T . Естественно возникает вопрос: может ли в случае взаимно однозначного соответствия производная $f'(z)$ обращаться в нуль и, таким образом, нарушаться конформность отображения? На этот вопрос мы уже ответили отрицательно, показав, что при взаимно однозначном отображении области G производная $f'(z)$ нигде в области G не равна нулю (гл. VII, § 2, п. 3).

Следовательно, в случае взаимно однозначного отображения области G на область T производная $f'(z)$ не может обращаться в нуль нигде в области G , а потому отображение будет конформным всюду.

Основная задача теории конформных отображений состоит в следующем: *даны две односвязные области G и T соответственно в плоскостях z и w ; найти функцию $w = f(z)$, аналитическую в области G , которая осуществляла бы взаимно однозначное (а следовательно, и конформное) отображение этих областей друг на друга.*

При решении этой задачи, не уменьшая ее общности, мы можем принимать, что одна из данных областей, например T , есть круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице, так как, чтобы осуществить взаимно однозначное и конформное отображение двух произвольных односвязных областей друг на друга, достаточно получить взаимно однозначные и конформные отображения каждой из данных областей на такой круг.

Тогда имеет место следующая теорема, известная под названием предложения Римана, принадлежащая к важнейшим результатам теории функций: *каждая односвязная область G , отличная от полной плоскости или от плоскости с выключенной точкой, может быть с помощью аналитической функции отображена взаимно однозначно и конформно на внутренность единичного круга и притом так, что произвольно заданным в G точке и направлению в этой точке будут соответствовать нулевая точка и направление положительной действительной оси.*

Дополнительно к этому предложению мы заметим, что при поставленных начальных условиях функция, выполняющая искомое отображение, будет единственная, как это следует из § 1, п. 2 этой главы. Таким образом, в предложении Римана мы имеем общий геометрический принцип для образования аналитических функций.

1. Упрощение постановки теоремы Римана. Пусть T — единичный круг плоскости w ; известно, что путем линейного преобразования можно единичный круг отобразить сам на себя так, чтобы при этом два заданных линейных элемента (т. е. две точки и направления через каждую из них) переходили друг в друга. Поэтому, если мы вообще отобразим область G на единичный круг, то всегда возможно это отображение нормировать так, чтобы заданный линейный элемент в области G переходил в нулевую точку единичного круга и направление положительной действительной оси. Если мы теперь — а это не представляет никакого ограничения общности — область G расположим в плоскости z так, что заданный линейный элемент совпадает с нулевой точкой и направлением положительной действительной оси плоскости z , то это для отображающей функции $w = f(z)$ равносильно требованию

$$f(0) = 0, f'(0) > 0.$$

Чтобы подчеркнуть общность теоремы Римана, покажем, что область G не может быть конформно отображена на внутренность единичного круга в двух случаях, а именно, когда G есть полная плоскость или плоскость с выключенной точкой. Рассмотрим функцию $w = f(z)$, относительно которой мы допустим, что она дает взаимно однозначное и конформное отображение на внутренность единичного круга целой плоскости z или плоскости с выключенной точкой. Эту последнюю точку мы можем считать за бесконечно удаленную точку плоскости z , так как этого всегда возможно достигнуть путем линейного преобразования. Очевидно, функция $f(z)$ должна быть целой функцией; но, с другой стороны, эта функция ограничена, так как выполняет отображение на единичный круг плоскости w . Таким образом, согласно предложению Лиувилля (гл. V, § 2, п. 9) $f(z)$ есть постоянное, что невозможно.

Следовательно, исключая эти два случая, мы должны будем предположить, что отображаемая область G имеет на границе по крайней мере две различные точки (соответствующие числовым значениям $z = a$ и $z = b$), а следовательно, благодаря односвязности она обладает связным граничным множеством, соединяющим обе эти точки.

При помощи преобразования

$$z^* = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$$

мы можем область G конформно отобразить на область G^* плоскости z^* , причем кусок плоскости z^* будет вне области G^* . В самом деле, мы можем рассматривать область G как часть, расположенную в одном листе двулистной римановой поверхности с двумя точками разветвления $z = a$ и $z = b$; эта риманова поверхность, включая ее точки разветвления, переходит с помощью вышеописанного преобразования в полную плоскость.

Пусть c есть точка плоскости z^* , которая лежит вместе со своей достаточно малой окрестностью $|z^* - c| < \rho$ вне области G^* . Тогда мы получим посредством линейного преобразования $\zeta = \frac{\rho}{z^* - c}$ из области G^* новую область, которая будет целиком лежать внутри конечного круга. Ясно, что путем параллельного переноса и подобного преобразования этого круга мы нашу область, наконец, переведем в область, лежащую внутри единичного круга и содержащую начало координат внутри себя.

Поэтому при доказательстве предложения Римана мы, не уменьшая его общности, будем предполагать, что отображаемая область G лежит внутри единичного круга и содержит нулевую точку.

2. Вспомогательная функция и ее основные свойства. При доказательстве теоремы Римана мы воспользуемся простой вспомогательной функцией, которая конформно отображает дважды покрытый единичный круг с точкой разветвления вне его центра на простой единичный круг.

Чтобы определить эту вспомогательную функцию, вообразим себе единичный круг плоскости t с разрезом, идущим от точки P , расстояние которой от нулевой точки равно μ ($\mu < 1$), к границе этого круга; пусть два друга на друге лежащих экземпляра такого круга обычным способом соединены друг с другом вдоль разреза (рис. 139). Допустим, что функция

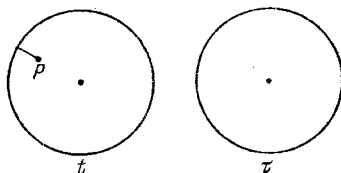


Рис. 139.

$$\tau = \varphi(t) = \varphi_{\mu}(t)$$

конформно отображает этот дважды покрытый круг плоскости t на единичный круг плоскости τ так, что при этом для одного листа выполняются условия

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) > 0.$$

Нет необходимости давать для этой функции явное аналитическое выражение. Заметим только, что мы можем ее построить, если сначала с помощью линейного преобразования единичный круг переведем сам в себя так, чтобы точка разветвления P перешла в начало координат, затем образуем квадратный корень из полученной линейной функции и, наконец, посредством нового линейного преобразования достигнем заданного соответствия линейных элементов в нулевых точках. Обратная функция для функции $\tau = \varphi(t)$ — обозначим ее через $t = \psi(\tau)$ — будет однозначной и голоморфной в единичном круге.

Так как $\psi(0) = 0$, то очевидно, $\frac{\psi(\tau)}{\tau}$ в круге $|\tau| \leq 1$ есть также голоморфная функция. Заметив, что $\left| \frac{\psi(\tau)}{\tau} \right|$ во всех точках

окружности $|\tau| = 1$ имеет значение, равное единице, мы убеждаемся по принципу максимума модуля аналитической функции (гл. V, § 2, п. 5) в справедливости неравенства для внутренних точек τ , $|\tau| < 1$:

$$\left| \frac{\Psi(\tau)}{\tau} \right| < 1,$$

где точно имеет место знак $<$, потому что функция $\frac{\Psi(\tau)}{\tau}$ не есть постоянное. [То же заключение мы получили бы, воспользовавшись леммой Шварца (§ 3, п. 2) для функции $\Psi(\tau)$.]

Итак, мы доказали: между переменными t и τ всегда существует неравенство $|\tau| > |t|$, если $|t| < 1$, или точнее говоря, для всех значений t , для которых $|t| \leq \mu$, имеет место неравенство $|\tau| \geq q(\mu) |t|$, где $q(\mu)$ обозначает число, большее единицы, зависящее только от μ . Легко видеть, что $q(\mu)$ является непрерывной функцией от μ ($\mu < 1$), сохраняющей значения, большие, чем единица.

В силу доказанного свойства функции $\tau = \Psi(t)$ вытекает: если в единичном круге плоскости t лежит область G , которая содержит внутренность круга радиуса ρ ($\rho \leq \mu < 1$), то эта область посредством ветви функции $\tau = \Psi_\mu(t)$ отображается на область G^* , принадлежащую единичному кругу плоскости τ , причем G^* содержит внутренность круга радиуса $\rho^* = q(\mu)\rho > \rho$. При этом нулевая точка и направление положительной действительной оси остаются неизменными.

3. Основная лемма. Для доказательства теоремы Римана нам придется воспользоваться следующим вспомогательным предложением: *если последовательность функций*

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$$

аналитических и однолистных в области G , сходится равномерно в каждой замкнутой области, принадлежащей G , к предельной функции $f(z)$, отличной от постоянного, то предельная функция $f(z)$ также однолистка.

Для доказательства допустим противное, что существуют две различные точки z_1 и z_2 области G , в которых аналитическая функция $f(z)$ равна одному и тому же числу ω_0 . Проведем в области G замкнутый контур Γ , содержащий внутри себя точки z_1 и z_2 , так, что на этом контуре $f(z)$ не равна ω_0 ; это возможно сделать, ибо согласно условию $f(z)$ не есть постоянное. Тогда (гл. VII, § 1, п. 5)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - \omega_0} = \nu,$$

для области H_n , мы получим функцию $f_n(z) = \varphi_{\rho_{n-1}} [f_{n-1}(z)]$, которая будет взаимно однозначно и конформно отображать первоначальную область G на область H_n радиуса ρ_n , причем $\rho_n > \rho_{n-1}q$ (ρ_{n-1}) $> \rho_{n-1}$. Остается показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 1$.

Допустим, наоборот, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \mu < 1$. Выполнив переход к пределу в неравенстве $\rho_n > \rho_{n-1}q$ (ρ_{n-1}), получим: $\mu \geq \mu q$ (μ). Последнее невозможно, так как $q(\mu) > 1$ при $\mu < 1$. Очевидно, построенные функции $f_n(z)$ удовлетворяют условиям $f_n(0) = 0$, $f'_n(0) > 0$, так как функции φ_{ρ_n} этим условиям удовлетворяют.

Теперь покажем, что последовательность функций $f_n(z)$ при неограниченном возрастании n сходится к искомой функции отображения $f(z)$. С этой целью рассмотрим отношение $\frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)}$. Эта функция есть аналитическая и отличная от нуля в области G . Таким образом, ее модуль в любой точке z области G заключен между минимумом и максимумом ее модуля на границе, откуда имеем неравенство

$$\rho_{n+p} < \left| \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} \right| < \frac{1}{\rho_n}, \quad (49)$$

которое выполняется для точек z области G . Следовательно, равномерно в области G будет:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} \right| = 1, \quad (50)$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 1$.

Заметив, что отношение $\frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)}$ при $z = 0$ имеет действительное положительное значение, рассмотрим функцию

$$F_n(z) = \ln \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} = \ln \left| \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} \right| + i\psi.$$

Вследствие (50) действительные части функций $F_n(z)$ сходятся равномерно во всей области G к нулю, в то время как в нулевой точке будет:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{f_{n+p}(0)}{f_n(0)} \right| = 0.$$

Применяя к последовательности функций $F_n(z)$ предложение из гл. IV, § 3, п. 9, мы заключаем, что эта последовательность сходится к нулю равномерно в каждой замкнутой области, принадлежащей G , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} = 1$, откуда вытекает: $\lim_{n \rightarrow \infty} [f_{n+p}(z) - f_n(z)] = 0$. Таким образом, последовательность функций $f_n(z)$ сходится равномерно в каждой замкнутой области, принадлежащей G , к предельной функции $f(z)$, которая будет согласно теореме

Вейерштрасса (гл. V, § 1, п. 1) аналитической в области G . Так как $f_n(0) = 0$, $f'_n(0) > 0$, то, очевидно, предельная функция $f(z)$ удовлетворяет условиям

$$f(0) = 0, f'(0) \geq 0.$$

Заставляя в неравенстве (49) ρ неограниченно возрастать при n постоянном, получим в пределе:

$$1 \leq \left| \frac{f(z)}{f_n(z)} \right| \frac{1}{\rho_n}.$$

Так как $|f(z)|$ при достаточно большом n и в достаточной близости от границы области G произвольно мало отличается от единицы, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 1$, то из последнего неравенства вытекает: в достаточной близости от границы области G модуль функции $f(z)$ произвольно мало отличается от единицы. Следовательно, функция $f(z)$ не есть постоянное, так как $f(0) = 0$. Таким образом, по основной лемме п. 3 эта функция $f(z)$ отображает область G взаимно однозначно на некоторую область T , откуда, в частности, вытекает, что $f'(0)$ строго больше нуля. Эта область T лежит целиком в единичном круге, так как из неравенств $|f_n(z)| < 1$ следует $|f(z)| \leq 1$. Вспомнив, наконец, что в достаточной близости от границы области G модуль функции $f(z)$ сколь угодно близок к единице, мы заключаем о совпадении области T с единичным кругом. Таким образом предложение Римана доказано.

§ 7. Соответствие границ при конформном отображении

При доказательстве теоремы Римана о конформном отображении односвязной области G на внутренность единичного круга мы оставляли вне рассмотрения граничные точки области G и точки единичной окружности. Пусть $w = f(z)$ есть функция, выполняющая взаимно однозначное и конформное отображение области G на внутренность единичного круга $|w| < 1$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$, лежащих внутри единичного круга, сходящуюся к точке w_0 , лежащей на окружности $|w| = 1$. Относительно последовательности соответствующих точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ области G в общем случае можно утверждать лишь, что все ее предельные точки принадлежат границе области G . В самом деле, такая предельная точка не может быть внешней, так как в любой ее окрестности лежат точки z_n , принадлежащие области. Однако она не может быть и внутренней, иначе некоторая ее окрестность отображалась бы посредством функции $w = f(z)$ в некоторую область, целиком лежащую внутри единичного круга. Но окрестность предельной точки содержит бесконечное множество точек z_n ; следовательно, и соответствующая ей область внутри круга содержит бесчисленное множество точек w_n , что противоречит предположенной сходимости последо-

вательности точек $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ к точке на единичной окружности. Итак, предельные точки множества $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ все принадлежат к границе области G . В частном случае последнее множество может иметь лишь одну предельную точку z_0 , т. е. последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ будет сходиться к z_0 . Если, однако, вместо последовательности $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ в единичном круге взять другую последовательность $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n, \dots$, сходящуюся к той же точке ω_0 , то может оказаться, что соответствующая ей внутри области G последовательность $z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \dots$ уже не будет сходящейся или будет сходиться к точке z'_0 , отличной от z_0 . Мы будем говорить, что *точке ω_0 , окружности $|w| = 1$ соответствует в силу конформного отображения $w = f(z)$ точка z_0 границы области G , если для любой последовательности точек $\{\omega_n\}$, сходящейся к ω_0 , последовательность $\{z_n\}$ соответствующих им точек области G сходится к z_0 .*

Предположим, что такое соответствие имеет место для каждой точки окружности $|w| = 1$. Тогда функцию $z = \varphi(w)$, обратную функции $w = f(z)$, можно определить в каждой точке окружности, полагая $\varphi(\omega_0) = z_0$. Легко видеть, что доопределенная таким образом функция будет непрерывной в замкнутом круге. Достаточно доказать ее непрерывность в точках ω_0 окружности $|w| = 1$, т. е. доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon, \omega_0) > 0$ такое, что будет $|\varphi(w) - \varphi(\omega_0)| < \varepsilon$, если $|w - \omega_0| < \delta$ и $|w| \leq 1$. Допустив противное, предположим, что существует последовательность точек $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$, сходящаяся к ω_0 и, однако, такая, что $|\varphi(\omega_n) - \varphi(\omega_0)| \geq \alpha$, где α — некоторое положительное число. Очевидно, что точки ω_n можно считать лежащими на окружности $|w| = 1$, так как для всякой последовательности внутренних точек должно быть: $\varphi(\omega_n) \rightarrow \varphi(\omega_0)$. Но для

каждой точки ω_n можно выбрать точку ω'_n , лежащую внутри единичного круга и такую, что, во-первых, $|\omega'_n - \omega_n| < 1/n$, а, во-вторых, $|\varphi(\omega_n) - \varphi(\omega'_n)| < \alpha/2$. Тогда будем иметь: $|\varphi(\omega'_n) - \varphi(\omega_0)| \geq \alpha/2 > 0$, что невозможно, так как последовательность $\omega'_1, \dots, \omega'_n, \dots$ состоит из точек, лежащих *внутри* единичного круга, и сходится к ω_0 . Итак, функция $\varphi(w)$ действительно непрерывна в замкнутой области.

Когда w описывает окружность $|w| = 1$, точка $z = \varphi(w)$ описывает непрерывную кривую S , состоящую из граничных точек области G . Покажем, что эта кривая исчерпывает всю границу G . Допустив противное, обозначим через z' граничную точку G , не принадлежащую к S , и пусть $z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \dots$ — последовательность внутренних точек G , сходящаяся к точке z' . Ей в единичном круге соответствует последовательность $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n, \dots$, все предельные точки которой принадлежат к окружности. Если мы, фиксируя одну из этих предельных точек ω_0 , извлечем из последовательности $\{\omega'_n\}$ последовательность $\{\omega_n\}$, сходящуюся

к точке ω_0 , то соответствующая в области G последовательность $\{z_n\}$ должна сходиться к точке $z_0 = \varphi(\omega_0)$ кривой S , в то время как она, по предположению, сходится к другой точке z' ($z' \neq z_0$). Таким образом, в случае, когда каждой точке окружности в силу конформного отображения $z = \varphi(\omega)$ соответствует одна граничная точка области G , граница области G представляет непрерывную кривую S . Кривая S может иметь кратные точки, т. е. разным точкам ω окружности $|\omega| = 1$ может отвечать одна и та же точка z кривой S . Для того чтобы устанавливаемое посредством конформного отображения соответствие между окружностью и границей области было взаимно однозначным, необходимо, следовательно, чтобы граница области G была непрерывной кривой без кратных точек, т. е. кривой Жордана. Мы покажем сейчас, что последнее условие является также достаточным, т. е. справедлива такая общая теорема: пусть G есть область плоскости z , ограниченная линией Жордана S ; допустим, что функция $\omega = f(z)$ отображает взаимно однозначно и конформно эту область на внутренность единичного круга плоскости ω с окружностью Σ . Тогда посредством той же функции $\omega = f(z)$ границы S и Σ преобразовываются друг на друга взаимно однозначно и непрерывно. В настоящем параграфе мы дадим доказательство этого общего предложения.

1. Постановка задачи. Прежде всего заметим, что из факта взаимно однозначного соответствия границ S и Σ вытекает уже равномерная непрерывность функции $f(z)$ в области G и ее обратной функции в круге $|\omega| < 1$, а следовательно, и взаимная непрерывность соответствия этих границ.

В самом деле, мы уже видели, что функция $z = \varphi(\omega)$ непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна в круге $|\omega| \leq 1$. Допустив, что функция $f(z)$ не является равномерно непрерывной в области G , мы установим, что некоторой граничной точке P области G будут отвечать по крайней мере две различные точки Q_1 и Q_2 на окружности $|\omega| = 1$. Применяя этот результат к обратной функции, мы убедимся в справедливости высказанного положения. Итак, допустим, что $f(z)$ не является равномерно непрерывной функцией в области G . В этом случае в области G существует последовательность пар точек z'_n, z''_n ($n = 1, 2, \dots$) таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |z'_n - z''_n| = 0$, в то время как расстояние

$$|\omega'_n - \omega''_n| = |f(z'_n) - f(z''_n)|$$

между соответствующими отображенными точками остается все время больше постоянного положительного α . Вследствие предложения Больцано—Вейерштрасса о предельной точке (гл. I, § 3, п. 4) мы можем (опуская надлежащие пары точек) принять, что эти пары точек z'_n, z''_n имеют единственную предельную точку P , в то время как их образы ω'_n, ω''_n имеют две предельные точки Q' и Q'' , расстояние которых должно быть не меньше, чем α . Эти пре-

дельные точки P и Q' , Q'' должны лежать соответственно на границах S и Σ , так как функция $f(z)$ в достаточно малой окрестности всякой внутренней точки области G есть равномерно непрерывная.

Итак, мы знаем, что из взаимной однозначности соответствия границ S и Σ следует и взаимная непрерывность этого соответствия, так как функция $f(z)$ и ей обратная будут равномерно непрерывными в соответствующих областях. Обратно, если $f(z)$ вместе со своей обратной функцией равномерно непрерывны соответственно в областях G и $|\omega| < 1$, то, очевидно, отображение границ S и Σ будет взаимно однозначным и взаимно непрерывным. Таким образом, геометрическая постановка задачи о взаимно однозначном и непрерывном соответствии границ S и Σ , сделанная в начале этого параграфа, эквивалентна следующей аналитической постановке: доказать, что функция $\omega = f(z)$ равномерно непрерывна в области G , а ее обратная — в области $|\omega| < 1$.

2. Доказательство предложения о соответствии границ.

Прежде чем приступить к доказательству, мы должны будем отметить одно свойство областей, ограниченных замкнутыми кривыми Жордана, — свойство, которым эти области вполне характеризуются. А именно, любую граничную точку такой области можно соединить с любой внутренней или внешней точкой посредством некоторой жордановой дуги, которая не имеет с границей области других общих точек, кроме рассматриваемой. Мы не будем здесь приводить доказательство этой теоремы, относящейся к теоретико-множественной топологии. Укажем только простейший

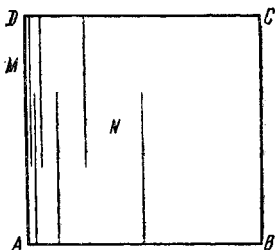


Рис. 140.

пример области, не обладающей этим свойством (граница такой области необходимо будет нежордановой кривой). Такую область (рис. 140) можно получить, выбрасывая из квадрата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ точки бесконечного множества отрезков:

$$x = 1/2, \quad 0 < y < 2/3; \quad x = 1/2^2, \quad 1/3 < y < 1; \quad \dots;$$

$$x = 1/2^{2k-1}, \quad 0 < y < 2/3; \quad x = 1/2^{2k}; \quad 1/3 < y < 1; \quad \dots$$

Оставшееся множество представляет собой область, граница которой состоит из периметра $ABCD$ квадрата и всех указанных отрезков. Очевидно, что никакая граничная точка M , принадлежащая отрезку AD , не может быть соединена кривой Жордана с какой-либо внутренней точкой N области. Действительно, допустив противное, мы должны считать ординату точки кривой, соединяющей точки N и M , непрерывной функцией некоторого параметра t , принимающей при $t = t_0$ значение y_0 , равное ординате точки N , а при $t = t_1$ — значение y_1 , равное ординате точки M

Таким образом, когда t стремится к t_1 , ордината точки кривой должна стремиться к пределу y_1 , что невозможно, так как она бесконечное множество раз должна принимать значения, большие $2/3$, и значения, меньшие $1/3$.

Точки границы области, которые можно соединить дугой Жордана с внутренней точкой области (эта дуга не должна иметь с границей области других общих точек, кроме данной граничной точки), называются *достижимыми* (изнутри) точками; точки, не обладающие этим свойством, — *недостижимыми*. В нашем примере точки отрезка AD — недостижимые, а все остальные граничные точки — достижимые. Упомянутое нами свойство областей, ограниченных жордановыми кривыми, можно сформулировать следующим образом: *каждая граничная точка такой области достижима (изнутри и извне)*.

Чтобы доказать теорему, сформулированную в начале этого параграфа, мы согласно п. 1 должны убедиться в равномерной непрерывности функции $f(z)$ в области G и ее обратной внутри единичного круга. С этой целью, допустив, что $f(z)$ не есть равномерно непрерывная функция в области G , мы должны будем прийти к противоречию. Как следует из п. 1, при таком допущении на границе области G , линии Жордана S , существует точка P , которой соответствуют на окружности $|\omega| = 1$ две различные точки Q' и Q'' , отстоящие друг от друга на расстоянии, не меньшем 2α . Отметим на рис. 141 эти точки, а также точки z'_n, z''_n , стремящиеся к точке P , и им соответствующие точки ω'_n и ω''_n , имеющие пределами Q' и Q'' . Расстояние между точками ω'_n и ω''_n мы можем считать все время большим α .

Принимая точку P за полюс, введем полярные координаты r и θ и с их помощью следующим образом определим принадлежащую точке P последовательность друг в друга вложенных односвязных областей K_r , лежащих в G : произвольно выбранную постоянную точку P_0 области G (например, точку $z = 0$) соединим непрерывной кривой L , лежащей в G , с точкой P . (В силу сказанного выше это возможно, так как область G ограничена кривой Жордана.) Очевидно, эта кривая L , идущая от P_0 к P , будет пересекать окружность радиуса r с центром в точке P , если только $r < P_0P$. Идя по кривой L в направлении от P_0 к P , мы встретим эту окружность, вообще говоря, несколько раз (быть может, бесконечное число раз). Отметим последнюю точку встречи кривой L с окружностью радиуса r и, отправляясь от этой точки, отметим по обе стороны от нее дугу c_r окружности до первой точки встречи этой дуги с границей S области G . Обозначим через K_r часть области G , ограниченную этой дугой радиуса r и той частью границы S , на которой лежит точка P (рис. 141).

Заметим, что, каково бы ни было ε ($\varepsilon < P_0P$), точки z'_n и z''_n должны быть, начиная с достаточно большого n , внутренними точками области K_ε (рис. 141). Действительно, допустив противное,

мы придем к заключению, что бесконечное множество точек из последовательностей $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$ лежит внутри области G_ε , получаемой из области G путем удаления всех точек K_ε и внутренних точек дуги c_ε . Так как P есть граничная точка G , предельная для $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$, то отсюда будет следовать, что P есть граничная точка для C_ε . Поэтому точка P одновременно принадлежит двум дугам,

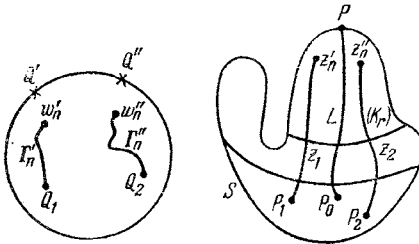


Рис. 141.

на которые концы c_ε разбивают S . Так как P отлична от концов этих дуг, то P должна быть кратной точкой для S , что противоречит определению жордановой кривой S .

Пусть Q_1 и Q_2 — произвольно выбранные постоянные точки внутри единичного круга T , а P_1 и P_2 — им соответствующие точки

в области G . Соединим точку Q_1 с w'_n , Q_2 с w''_n посредством линий Γ'_n и Γ''_n так, чтобы обе эти кривые находились на расстоянии друг от друга, не меньшем, чем α . Пусть R — такое число, что точки P_1 и P_2 лежат вне области K_R ; тогда образы линий Γ'_n и Γ''_n пересекают дугу окружности, входящую в границу области K_r , при каждом $r < R$, если n достаточно велико, так как они соединяют точки P_1 и P_2 соответственно с z'_n и z''_n .

$$\alpha \ll |f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz \right| \ll \int |f'(z)| r d\theta, \quad (51)$$

где интеграл распространен на соответствующую часть $z_1 z_2$ дуги c_r .

В анализе важное значение имеет так называемое неравенство Буняковского, которым мы должны сейчас воспользоваться. Это неравенство состоит в следующем: пусть g и h — две действительные функции, определенные в одномерной или многомерной области D , и $d\omega$ — элемент интеграции D ; тогда имеем:

$$\left(\int gh d\omega \right)^2 \ll \int g^2 d\omega \cdot \int h^2 d\omega.$$

Это неравенство немедленно вытекает из замечания, что квадратный трехчлен относительно действительного параметра λ , а именно,

$$\int (\lambda g + h)^2 d\omega = \lambda^2 \int g^2 d\omega + 2\lambda \int gh d\omega + \int h^2 d\omega$$

не может иметь отрицательных значений.

Применяя неравенство Буняковского к интегралу правой части (51), положив при этом $g = |f'(z)|r$, $h = 1$, получим:

$$\alpha^2 \leq \left(\int |f'(z)| r d\theta \right)^2 \leq 2\pi \int |f'(z)|^2 r^2 d\theta,$$

или

$$\frac{\alpha^2}{r} \leq 2\pi \int |f'(z)|^2 r d\theta.$$

Интегрируя последнее неравенство относительно r в пределах от $r = \varepsilon$ до $r = R$, найдем:

$$\alpha^2 \ln \frac{R}{\varepsilon} \leq 2\pi \iint |f'(z)|^2 r dr d\theta < 2\pi \iint_{K_R} |f'(z)|^2 r dr d\theta,$$

где последний интеграл распространен на всю область K_R и представляет площадь той области, которая является отображением K_R . Таким образом, заведомо имеем:

$$\iint |f'(z)|^2 r dr d\theta < \pi,$$

потому что π есть площадь всего единичного круга, и окончательно получаем:

$$\alpha^2 \ln \frac{R}{\varepsilon} < 2\pi^2.$$

Это неравенство привело нас к противоречию, так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ левая его часть неограниченно возрастает. Полученное противоречие и доказывает равномерную непрерывность функции $f(z)$ в области G . Так как аналогичное рассмотрение может быть проведено для обратной функции, то и обратная функция будет равномерно непрерывной в области T .

Другими словами, согласно п. I мы показали, что при взаимно однозначном и конформном отображении области G , ограниченной линией Жордана, на внутренность единичного круга T границы S и Σ областей G и T отображаются взаимно однозначно и непрерывно.

§ 8. Отображение прямоугольника и произвольного многоугольника на верхнюю полуплоскость

1. Прямоугольник. Чтобы отобразить прямоугольник на верхнюю полуплоскость, нам надо рассмотреть эллиптический интеграл вида

$$\xi = \int_0^z \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)}, \quad (52)$$

где k — действительное число, удовлетворяющее условию $0 < k < 1$. Будем предполагать, что верхний предел z эллиптиче-

ского интеграла есть комплексное число, лежащее в верхней полуплоскости.

Другими словами, мы будем интегрировать по некоторому пути, лежащему в верхней полуплоскости комплексного переменного z , выходящему из начала координат. Тогда наш интеграл представит собой функцию комплексного переменного z , которую мы обозначим через $\zeta(z)$.

Легко видеть, далее, что подынтегральная функция имеет следующие четыре особые точки, которые все лежат на действительной оси:

$$t = +1, t = -1, t = 1/k, t = -1/k.$$

Так как z мы рассматриваем в верхней полуплоскости, то при всяком пути интегриации мы не встретим ни одной особой точки. Отсюда следует, что результат интегрирования не будет зависеть от пути.

Итак, $\zeta(z)$ есть голоморфная функция z , когда z лежит в верхней полуплоскости. Кроме того, то же самое будет и для действительных значений z , кроме указанных особых точек. Эти особые точки, очевидно, являются критическими точками подынтегральной функции.

Мы сейчас увидим, что когда z меняется в верхней полуплоскости, то ζ будет меняться внутри некоторого прямоугольника.



Рис. 142.

Для того чтобы обнаружить это обстоятельство, естественно заставить точку z описать действительную ось и смотреть при этом, какой путь будет

описывать ζ . При этом пробеге точка z четыре раза перейдет через особые точки. Мы их можем исключить, описывая около них полуокружности радиуса ρ и заставляя z двигаться по пути, строение которого ясно из рис. 142. Сейчас же мы можем заметить, что радиус ρ построенных полуокружностей можно уменьшить до нуля ($\rho \rightarrow 0$), так как подынтегральная функция при этом становится бесконечно большой величиной порядка $1/2$.

Итак, допустим, что точка z отправляется от нуля и движется вправо по действительной оси. Когда z находится в промежутке $0 \leq x < 1$, то подынтегральная функция все время остается положительным действительным числом. Поэтому, когда z , оставаясь в указанном промежутке, возрастает от нуля и стремится к единице, то ζ увеличивается от нуля и стремится к значению

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Как мы уже заметили, этот интеграл имеет определенное конечное значение. Обозначим его через $\omega_1/2$. Итак,

$$\frac{\omega_1}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{53}$$

Далее, точка z пройдет по полуокружности, описанной около единицы. Посмотрим, что произойдет с ζ . В подынтегральной функции под знаком радикала имеются такие множители:

$$1 - t, 1 + t, 1 - kt, 1 + kt.$$

Посмотрим, что произойдет с аргументами этих факторов, когда точка z опишет полуокружность около единицы. Ясно, что аргументы трех последних множителей в результате такой операции не

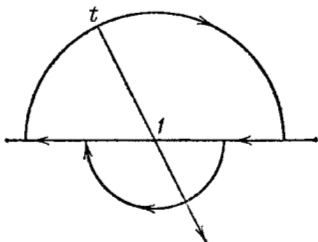


Рис. 143.

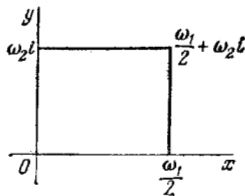


Рис. 144.

изменяться. Но аргумент первого множителя уменьшается при этом на π , что ясно из рис. 143, так как $\arg(1 - t)$ изменяется от нуля до $-\pi$. Отсюда следует, что аргумент радикала уменьшится на $\pi/2$, а аргумент всей подынтегральной функции увеличится на $\pi/2$. (рис. 144). Поэтому функцию ζ после обхода полуокружности можно записать так:

$$\zeta = \omega_1/2 + i \int_1^z \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2t^2)}}, \tag{54}$$

где z находится в промежутке

$$1 \leq z < 1/k.$$

Когда z увеличивается в только что указанном промежутке, то интеграл формулы (54) тоже увеличивается и при $z \rightarrow \frac{1}{k}$ стремится к определенному пределу, который мы обозначим через ω_2 , т. е. положим:

$$\omega_2 = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2t^2)}}. \tag{55}$$

Отсюда следует, что, когда $z \rightarrow 1/k$, то $\zeta \rightarrow \omega_1/2 + i\omega_2$.

Далее, когда точка z описывает полуокружность около точки $1/k$, то подобно предыдущему заключаем, что вектор $\zeta = (\omega_1/2 + i\omega_2)$ должен повернуться на угол $\pi/2$ (рис. 144). Следовательно, после обхода переменным z нашей полуокружности функция ξ запишется следующим образом:

$$\xi = \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2 = \int_{1/k}^z \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}. \quad (56)$$

Когда z изменяется от $1/k$ до ∞ , то последний интеграл все время увеличивается, а следовательно, действительная часть функции ξ все время убывает. В пределе, когда $z = \infty$, последний интеграл можно записать так:

$$\int_{1/k}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}.$$

Легко видеть, что этот интеграл равен $\omega_1/2$. Действительно, сделаем подстановку $t = 1/(k\tau)$, где τ — новое переменное. Тогда последний интеграл примет вид

$$\int_0^1 \frac{d\tau}{k\tau^2 \sqrt{\left(\frac{1}{k^2\tau^2} - 1\right)\left(\frac{1}{\tau^2} - 1\right)}}.$$

Подводя в подынтегральной функции последнего интеграла $k\tau^2$

под знак радикала, мы убеждаемся в справедливости доказываемого предложения.

Таким образом, когда $z \rightarrow \infty$, то $\zeta \rightarrow \omega_2 i$ (рис. 144), при изменении z от $-\infty$

до $-\frac{1}{k}$ (рис. 142) точка ζ ,

очевидно, придет из $i\omega_2$ в точку $-\omega_1/2 + i\omega_2$. Когда z будет двигаться от $-1/k$ до

-1 , точка ζ опишет прямолинейный отрезок от $-\omega_1/2 + i\omega_2$ до $-\omega_1/2$, и, наконец, когда z изменяется от -1 до нуля, то функция ξ изменяется по действительной оси от $-\omega_1/2$ до нуля (рис. 145).

Таким образом, мы видим, что при помощи эллиптического интеграла мы можем отобразить верхнюю полуплоскость на прямоугольник со сторонами, равными ω_1 и ω_2 . При этом это отображение будет взаимно однозначное и конформное (вследствие § 2, п. 2).

Если же мы рассмотрим обратную функцию $z = s(\zeta)$, то эта функция будет давать отображение внутренности прямоугольника на верхнюю полуплоскость.

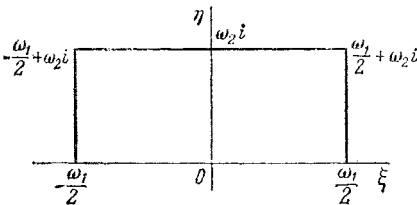


Рис. 145.

конформно на плоскость z , разрезанную по действительной оси от 1 до ∞ и от $-\infty$ до -1 . Но можно отображать прямоугольник относительно любой его стороны; мы опять получим отображение на всю плоскость z , но разрезанную иначе. Продолжая строить в плоскости ζ все новые и новые симметричные прямоугольники,

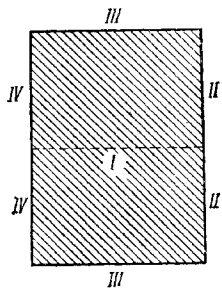


Рис. 147.

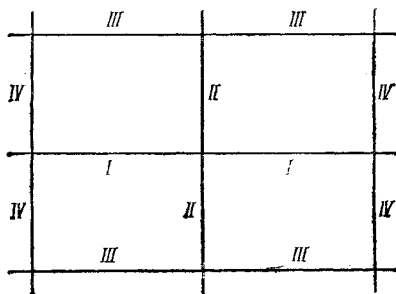


Рис. 148.

мы в конце концов покроем всю плоскость ζ сетью таких прямоугольников (рис. 148) и, следовательно, определим функцию $s(\zeta)$ во всей плоскости.

Для того чтобы установить взаимно однозначное соответствие всей плоскости ζ с переменным z , надо приготовить вместо плоскости z бесконечнолистную риманову поверхность. Эта риманова поверхность будет иметь точками разветвления $1, 1/k, -1/k, -1$;

листья этой поверхности будут связаны так же, как соответствующие им прямоугольники.

Из предыдущего легко подметить весьма важное свойство функции $s(\zeta)$, именно, свойство двоякопериодичности этой функции.

Возьмем один из прямоугольников плоскости ζ . Отобразим его сначала относительно стороны II, затем полученный таким образом новый прямоугольник отобразим в свою очередь относительно стороны IV (рис. 148). Далее, возьмем какую-нибудь точку ζ_1 внутри первоначального прямоугольника. Эта точка в результате двукратного отображения по первоначальному направлению перейдет в точку ζ_2 . Из рис. 149 ясно, что $\zeta_2 = \zeta_1 + 2\omega_1$, ибо сторона I по длине равна ω_1 .

Допустим, кроме того, что точке ζ_1 на плоскости z соответствует точка z_1 , т. е. $z_1 = s(\zeta_1)$. При рассмотренном первом отображении прямоугольника точка z_1 перейдет в симметричную относительно

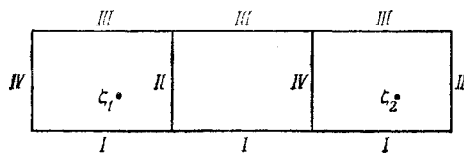


Рис. 149.

оси Ox точку z_1' . При втором отображении точка z_1' , переходя в симметричное положение, очевидно, попадает в точку z_1 .

Итак, мы установили, что $s(\zeta + 2\omega_1) = s(\zeta)$. Если же мы будем отображать наш прямоугольник по вертикальному направлению, то аналогичным образом найдем, что $s(\zeta + 2\omega_2 i) = s(\zeta)$. Вообще, как легко видеть, мы будем иметь:

$$s(\zeta + 2k\omega_1 + 2h\omega_2 i) = s(\zeta),$$

где h и k — любые целые числа. Количества $2\omega_1$ и $2\omega_2 i$ будут периодами функции $s(\zeta)$.

В прямоугольнике периодов функция $s(\zeta)$ имеет два простых полюса $\omega_2 i$ и $\omega_1 + \omega_2 i$ (точки A и B на рис. 150) и два простых нуля в точках O и ω_1 . Таким образом, функция $s(\zeta)$, однозначная во всей плоскости ζ , не имеет на конечном расстоянии других особых точек, кроме полюсов. Это есть мероморфная функция. Сравнивая построенную функцию $s(\zeta)$ с первой эллиптической функцией Якоби (гл. XI, § 5), образованной для тех же периодов $2\omega_1$ и $2\omega_2 i$, мы видим, что они совпадают, так как имеют одинаковые нули и полюсы и производные их в начале координат равны единице. Итак, функция $s(\zeta)$, отображающая внутренность прямоугольника на полуплоскость, есть эллиптическая функция Якоби: $s(\zeta) \equiv \operatorname{sn} \zeta$.

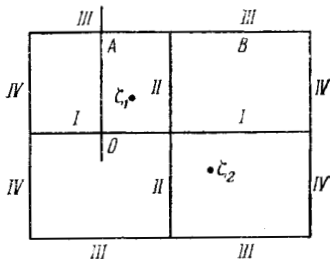


Рис. 150.

3. Многоугольник. Займемся задачей более общей: отобразить взаимно однозначно и конформно n -угольник на верхнюю полуплоскость.

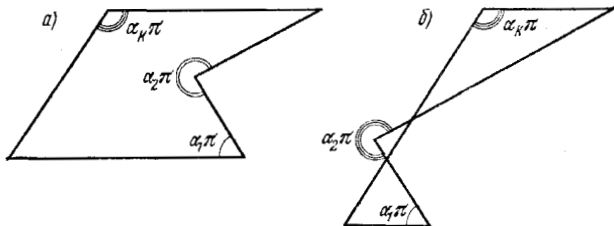


Рис. 151.

Пусть в плоскости переменного w имеется n -угольник (рис. 151, а), внутренние углы которого равны $\alpha_1 \pi$, $\alpha_2 \pi$, $\alpha_3 \pi$, ..., $\alpha_n \pi$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — действительные числа, причем каждое из них, очевидно, не превышает 2 и, кроме того, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n - 2$. Покажем, что функция $w = f(z)$, конформно отобра-

жающая верхнюю полуплоскость $I(z) > 0$ на внутренность многоугольника, имеет вид

$$w = C \int_0^z (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + C_1, \quad (57)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — точки действительной оси, соответствующие вершинам многоугольника, а C и C_1 — некоторые комплексные числа (в частности, C_1 должно, очевидно, представлять точку на контуре многоугольника, соответствующую $z = 0$). Формула (57) называется формулой Хриstoffеля—Шварца. Функция, отображающая полуплоскость на прямоугольник, изученная в п. 1, является частным случаем (57): именно, ее можно представить в виде

$$w = \frac{1}{k} \int_0^z \left(t + \frac{1}{k}\right)^{1/2-1} (t+1)^{1/2-1} (t-1)^{1/2-1} \left(t - \frac{1}{k}\right)^{1/2-1} dt.$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/2$, $a_1 = -1/k$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1/k$, $C = 1/k$ и $C_1 = 0$.

Чтобы освоиться с общей формулой (57), предположим сначала, что a_1, a_2, \dots, a_n — заданные а priori действительные числа, расположенные, например, в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — также а priori заданные действительные положительные числа, не большие 2, сумма которых равна $n - 2$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2. \quad (58)$$

Условимся под $(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$ понимать в верхней полуплоскости ту ветвь соответствующей многозначной функции, которая на действительной оси при $z = x > a_k$ принимает действительные положительные значения. Тогда формула

$$\zeta = \int_0^z (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt \quad (57')$$

определяет в замкнутой верхней полуплоскости однозначную непрерывную функцию, аналитическую при $I(z) > 0$. В этих утверждениях нуждается в проверке только непрерывность функции (57') в точке $z = \infty$. Но подынтегральная функция может быть записана в виде

$$\begin{aligned} t^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n - n} \left(1 - \frac{a_1}{t}\right)^{\alpha_1 - 1} \dots \left(1 - \frac{a_n}{t}\right)^{\alpha_n - 1} &= \\ &= \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{a_1}{t}\right)^{\alpha_1 - 1} \dots \left(1 - \frac{a_n}{t}\right)^{\alpha_n - 1}, \end{aligned}$$

откуда следует, что интеграл

$$\int_0^{\infty} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt$$

сходится. При этом его значение не зависит от пути интегрирования, целиком принадлежащего верхней полуплоскости и соединяющего точки 0 и ∞ . В этом убеждаемся путем предельного перехода, опираясь на интегральную теорему Коши. Отсюда и вытекает непрерывность функции (57') в точке $z = \infty$. Заставим теперь точку z описывать всю действительную ось в положительном направлении. Тогда соответствующая точка ζ опишет непрерывную замкнутую линию, которая вообще может самопересекаться и иметь кратные точки (рис. 151,6)). Покажем, что отдельные звенья этой линии, соответствующие отрезкам действительной оси $a_{k-1}a_k$, представляют прямолинейные отрезки, описываемые каждый в одном и том же направлении (без попятных движений точки ζ). Для этого достаточно установить, что аргумент производной

$$\frac{d\zeta}{dz} = (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}$$

не изменяется, когда z описывает отрезок $a_{k-1}a_k$, причем производная не обращается в нуль во внутренних точках отрезка. Но все это непосредственно очевидно.

Таким образом, кривая, описываемая точкой ζ , есть n -звенная ломаная с вершинами

$$A_k = \int_0^{a_k} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Убедимся, что угол в вершине A_k между звеньями A_kA_{k-1} и A_kA_{k+1} равен $\alpha_k\pi$. В самом деле, векторы $A_{k-1}A_k$ и A_kA_{k+1} выражаются комплексными числами

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt$$

и

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt,$$

аргументы которых совпадают соответственно с аргументами подынтегральных выражений (остающихся постоянными на отрезках интегрирования). Но в первом случае аргумент подынтегрального выражения характеризуется числом $(\alpha_k - 1)\pi + \dots + (\alpha_n - 1)\pi$, во втором случае — числом $(\alpha_{k+1} - 1)\pi + \dots + (\alpha_n - 1)\pi$. Поэтому угол между векторами $A_{k-1}A_k$ и A_kA_{k+1}

есть $-(\alpha_k - 1)\pi = \pi - \pi\alpha_k$, т. е. угол между $A_k A_{k-1}$ и $A_k A_{k+1}$ есть $\pi\alpha_k$.

Итак, посредством функции (57') действительная ось отображается на замкнутую n -звенную ломаную с углами $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$. Длины звеньев этой ломаной зависят от выбора точек a_1, \dots, a_n . При произвольном выборе этих точек ломаная, как мы уже указывали, может самопересекаться и поэтому не является границей области — многоугольника (рис. 151, б). Однако, если самопересечений нет, то функция (57'), аналитическая в верхней полуплоскости и устанавливающая взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками действительной оси и точками контура многоугольника, должна давать конформное отображение полуплоскости на внутренность многоугольника. Переход от формулы (57') к более общей формуле (57) равносильно линейному преобразованию

$$w = C\xi + C_1. \quad (59)$$

Пользуясь им, мы можем прийти к любому многоугольнику, подобному многоугольнику, полученному с помощью формулы (57') и притом произвольно расположенному в плоскости w . Таким образом, весь вопрос обоснования формулы Хриstoffеля—Шварца сводится к вопросу о том, можно ли при любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0 < \alpha_k < 2, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = n - 2$ так подобрать действительные числа a_1, \dots, a_n в формуле (57'), чтобы посредством этой формулы действительная ось переходила бы в многоугольный контур, подобный любому а priori заданному контуру (с внутренними углами $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$). Так как длина стороны $A_k A_{k+1}$ изображается числом

$$\lambda_k = \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt \right|,$$

то все сводится к вопросу о возможности решения системы $n - 1$ уравнений:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = l_1 : l_2 : \dots : l_n, \quad (60)$$

где l_1, \dots, l_n — стороны заданного многоугольника (неизвестными служат a_1, a_2, \dots, a_n). Оставляя в стороне фактическое решение такой системы, мы ограничимся лишь доказательством возможности решения, причем пойдем другим путем, опирающимся на теорему существования Римана. Именно, по этой теореме существует функция $w = f(z)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость на заданный многоугольник P . При этом по § 7 она устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками действительной оси и точками контура многоугольника. В частности, мы имеем право говорить о точках a_1, \dots, a_n действительной оси, соответствующих вершинам многоугольника (a_k

соответствует вершине с внутренним углом $\alpha_k \pi$). Остается показать, что C и C_1 в формуле (57) (при этих значениях a_1, \dots, a_n и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$) могут быть выбраны так, чтобы формула (57) представляла бы функцию $w = f(z)$.

Рассмотрим функцию

$$\zeta = \psi(z) = \int_0^z (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt,$$

которая переводит верхнюю z -полуплоскость на некоторый многоугольник P' плоскости ζ , причем точке a_i соответствует вершина угла $\alpha_i \pi$ этого многоугольника. Тем самым устанавливается отображение многоугольника P на многоугольник P' , считая за соответствующие точки многоугольников P и P' те, которые являются образами одной и той же точки z -полуплоскости. Аналитически это соответствие дается функцией $w = F(\zeta)$, которая получается путем исключения z из равенств $w = f(z)$ и $\zeta = \psi(z)$. Мы покажем, что $F(\zeta) = C\zeta + C_1$.

Для доказательства исследуем функцию $w = F(\zeta)$ вблизи вершин многоугольника P' . Обозначим через ζ_k и $w_k = F(\zeta_k)$ соответствующие вершины многоугольников P' и P и введем вместо ζ и w вспомогательные переменные t и s при помощи соотношений

$$\zeta - \zeta_k = t^{\alpha_k}, \quad w - w_k = s^{\alpha_k}. \tag{61}$$

Очевидно, при помощи этих операций окрестности вершин ζ_k и w_k , принадлежащие многоугольникам P' и P , отображаются на области Q' и Q плоскостей t и s , границы которых содержат прямые отрезки, проходящие через начало координат. Отображение $w = F(\zeta)$ и формулы (61) определяют преобразование области Q' в область Q :

$$s = (w - w_k)^{1/\alpha_k} = [F(\zeta) - F(\zeta_k)]^{1/\alpha_k} = [F(\zeta_k + t^{\alpha_k}) - F(\zeta_k)]^{1/\alpha_k}.$$

Правую часть последнего равенства обозначим через $g(t)$, т. е. положим $s = g(t)$:

$$g(t) = [F(\zeta_k + t^{\alpha_k}) - F(\zeta_k)]^{1/\alpha_k}.$$

В силу принципа симметрии отображение области Q' на область Q , устанавливаемое с помощью функции $s = g(t)$, может быть распространено на полные окрестности нулевых точек плоскостей t и s , а следовательно, $g(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \dots$, где $a_1 \neq 0$, так как соответствие между t и s взаимно однозначное.

С помощью функции $g(t)$ соответствие между ζ и w может быть записано так:

$$w = w_k + s^{\alpha_k} = w_k + [g(t)]^{\alpha_k},$$

где $t = (\zeta - \zeta_k)^{1/\alpha_k}$.

Теперь легко исследовать поведение производной $\frac{dw}{d\zeta}$ в окрестности вершины ζ_h . В самом деле:

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{d\zeta} = \alpha_h |g(t)|^{\alpha_h - 1} g'(t) \frac{1}{\alpha_h} (\zeta - \zeta_h)^{\frac{1}{\alpha_h} - 1},$$

или

$$\frac{dw}{d\zeta} = \left(\frac{g(t)}{t} \right)^{\alpha_h - 1} g'(t) = (a_1 + a_2 t + \dots)^{\alpha_h - 1} (a_1 + 2a_2 t + \dots).$$

Последнее равенство нам показывает, что $\frac{dw}{d\zeta}$, рассматриваемая как функция t , непрерывна в точке $t = 0$ и, следовательно, $\frac{dw}{d\zeta}$ остается непрерывной, когда точка ζ подходит к вершине ζ_h , оставаясь внутри многоугольника P' . Таким образом, функция $\frac{dw}{dt}$, аналитическая внутри многоугольника P' и на его сторонах (в силу принципа симметрии), будет непрерывной во всей замкнутой области \bar{P}' . Кроме того, $\frac{dw}{d\zeta}$ нигде не обращается в нуль.

Рассмотрим функцию $\varphi(\zeta) = \ln \frac{dw}{d\zeta} = \ln \left| \frac{dw}{d\zeta} \right| + i \arg \frac{dw}{d\zeta}$, аналитическую в области P' , непрерывную в \bar{P}' . Коэффициент при мнимой части этой функции сохраняет постоянное значение на контуре многоугольника P' , так как в точках сторон многоугольника P' $\arg \frac{dw}{d\zeta}$ означает угол поворота соответствующей стороны при отображении на P (эти углы для всех сторон одинаковы вследствие попарного равенства углов многоугольников P' и P).

Итак, гармоническая функция $\arg \frac{dw}{d\zeta}$, будучи постоянной на контуре, есть постоянное (ср. гл. V, § 2, п. 5). Сопряженная ей функция $\ln \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|$, как это следует из условий Коши—Римана, будет также постоянной, а потому $\varphi(\zeta) = \text{const}$, откуда вытекает, что

$$\frac{dw}{d\zeta} = C, \text{ или } w = C\zeta + C_1,$$

что и требовалось доказать.

4. Треугольник. Задача отображения решается непосредственно в наиболее простом случае, именно, когда мы имеем треугольник.

Итак, допустим, что нам дан треугольник с углами, равными $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$. Ясно, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Допустим, далее, что мы хотим этот треугольник отобразить на верхнюю полуплоскость. Возьмем формулу (57); в рассматриваемом случае она примет вид

$$\zeta = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} (t - a_3)^{\alpha_3 - 1} dt + C_2, \quad (62)$$

где a_1, a_2, a_3 — действительные числа. Займемся упрощением формулы (62); для этого дадим a_i такие значения: $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty$.

Для того чтобы a_3 перевести в бесконечность, надо, как легко видеть, в подынтегральную функцию ввести новое переменное τ следующим образом:

$$t = -1/\tau + a_3.$$

Формула (62) примет вид

$$\begin{aligned} \xi = C \int_{\tau_0}^z \left(-\frac{1}{\tau} + a_3 - a_1\right)^{\alpha_1-1} \times \\ \times \left(-\frac{1}{\tau} + a_3 - a_2\right)^{\alpha_2-1} \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_3-1} \frac{d\tau}{\tau^2} + C_2. \end{aligned} \quad (62')$$

Вынося под знаком интеграла $1/\tau$ за скобки и замечая, что

$$\alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \alpha_3 - 1 = -2,$$

будем иметь:

$$\xi = C' \int_{\tau_0}^z (\tau - b_1)^{\alpha_1-1} (\tau - b_2)^{\alpha_2-1} d\tau + C_2. \quad (62'')$$

Возьмем линейную подстановку: $\tau = a\tau' + b$, где a и b подбираем так, что когда $\tau = b_1$, то $\tau' = 0$, и когда $\tau = b_2$, то $\tau' = 1$. Интеграл формулы (62'') напишется так:

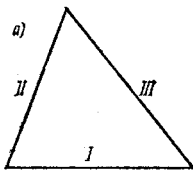
$$\xi = C_1 \int_{\tau_0}^z \tau^{\alpha_1-1} (1 - \tau)^{\alpha_2-1} d\tau + C_2. \quad (63)$$

Вот к какой канонической форме мы привели интеграл (62). Здесь без доказательства видно, что функция (63) будет давать отображение верхней полуплоскости z на любой заранее данный треугольник. В самом деле, функция (63), в которой мы положили $C_1 = 1, C_2 = 0$, при надлежащих значениях α_1 и α_2 дает отображение верхней полуплоскости на треугольник, подобный данному.

Поэтому, чтобы получить отображение верхней полуплоскости на наш треугольник, остается преобразовать треугольник, получаемый с помощью функции (63), в наш. Этого легко добиться перенесением вершины получаемого треугольника в одну из вершин данного треугольника вращением и, наконец, подобным изменением, что сводится к надлежащему выбору множителя C_1 и аддитивной постоянной C_2 в формуле (63).

Функция $\xi(z)$, определяемая формулой (63) (при $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$), дает взаимно однозначное и конформное отображение верхней полуплоскости z на внутренность треугольника, лежащего в плоскости ξ . Она определена, пока z лежит в верхней полуплоскости.

Прямолинейный отрезок I плоскости ζ (рис. 152, а) переходит в прямолинейный же отрезок I действительной оси плоскости z (рис. 152, б)). Следовательно, можно применить принцип симметрии. Применим его, отображая наш треугольник относительно, например, стороны II, получим некоторый четырехугольник (рис. 153, б)). Таким образом, разрезанная указанным на рис. 153, а) способом плоскость z отобразится на полученный выше четырех-



угольник, находящийся в плоскости ζ (рис. 153, б)).

Принцип симметрии Шварца мы можем применять дальше,

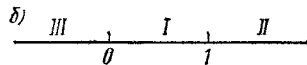


Рис. 152.

причем отображение каждого треугольника, очевидно, можно производить относительно любой из его сторон. В результате вся плоскость ζ покроеется сетью треугольников, вообще говоря, перекрывающихся. Для того чтобы получить взаимно однозначное соответствие плоскости ζ с переменным z , надо вместо плоскости z взять бесконечнолистную риманову поверхность; при этом, конечно, указанное взаимно однозначное соответствие будет возможно в том случае и только в том, если треугольники на плоскости ζ не перекрываются.

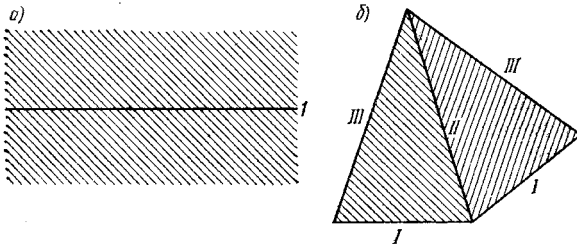


Рис. 153.

Каковы же будут необходимые и достаточные условия для того, чтобы треугольники не перекрывались?

На рис. 154 ясно, что для этого, например, необходимо, чтобы $\frac{2\pi}{2\alpha_1\pi}$ равнялась целому числу. Точно так же должно быть и для других углов.

Дальше ясно, что это и достаточно. Итак, искомые условия можно записать следующим образом:

$$1/\alpha_1 = r_1, \quad 1/\alpha_2 = r_2, \quad 1/\alpha_3 = r_3,$$

где r_1, r_2, r_3 — целые числа.

Итак, только в этом случае функция $\zeta = \zeta(z)$ обратима в однозначную функцию $z = z(\zeta)$, которая и будет давать взаимно однозначное отображение плоскости ζ на риманову поверхность. Но мы видели, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1. \quad (64)$$

Решив это уравнение, мы найдем все возможные значения для r_1, r_2, r_3 . Можно считать, что

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3.$$

Очевидно, что r_1 в таком случае не может быть больше 3. Далее, легко видеть, что все возможные случаи запишутся в следующей таблице:

r_1	3	2	2	2	1	(65)
r_2	3	4	2	3	∞	
r_3	3	4	∞	6	∞	

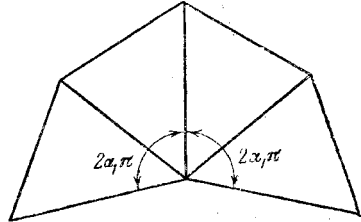


Рис. 154.

Какие же будут треугольники при таких значениях r ? Возьмем пятый столбец табл. (65). В этом случае треугольник имеет углы $\pi, 0, 0$. Это будет полоса. Формула (63) запишется так (для краткости полагаем $C_1 = 1, C_2 = 0$):

$$\zeta = \int_0^z \tau^{\alpha_1-1} (1-\tau)^{\alpha_2-1} d\tau = \int_0^z \frac{d\tau}{1-\tau} = \ln \frac{1}{1-z}.$$

Получилась уже знакомая нам функция.

Возьмем третий столбец табл. (65). В этом случае треугольник будет иметь углы $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ и 0, т. е. мы будем иметь полуполосу. Формула (63) для данного случая примет вид

$$\zeta = \int_0^z \tau^{-1/2} (1-\tau)^{-1/2} d\tau = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} = \arcsin(2z-1),$$

или $2z-1 = \sin \zeta$. Получим опять элементарную функцию, дающую отображение полуполосы на верхнюю полуплоскость.

Остается рассмотреть три остальных случая, даваемых табл. (65). Легко видеть, что это будут:

1-й случай — равнобедренный треугольник. Нетрудно видеть, что формула (63) в данном случае примет вид

$$\zeta = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt[3]{\tau^2(1-\tau)^2}}.$$

2-й случай — равнобедренный прямоугольный треугольник. Здесь формула (63) напишется так:

$$\xi = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2(1-\tau)^3}}.$$

3-й и последний случай — прямоугольный треугольник с углами в 30 и 60°. Формула (63) нам даст:

$$\xi = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3(1-\tau)^4}}.$$

Итак, мы исчерпали все возможные случаи. Как в трех последних случаях, так и в предыдущих двух элементарных функция $z = z(\xi)$ будет определена во всей плоскости переменного ξ и притом будет однозначной функцией.

Читателю рекомендуется, поступая аналогично п. 2, доказать двоякую периодичность функции $z(\xi)$ в каждом из трех последних случаев, а также обнаружить принадлежность их к классу мероморфных функций.

5. Отображение внешней области многоугольника на верхнюю полуплоскость. В п. 3 была разобрана задача о взаимно однозначном и конформном отображении внутренности произвольного многоугольника на верхнюю полуплоскость (рис. 155).

Теперь мы рассмотрим задачу о взаимно однозначном и конформном отображении внешней области (содержащей бесконечно удаленную точку).

Здесь для суммы углов $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ внешней области будем иметь, очевидно, $\alpha_1\pi + \dots + \alpha_n\pi = (n+2)\pi$, т. е.

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n + 2.$$

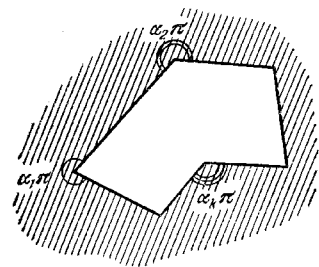


Рис. 155.

Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ по-прежнему положительны и не превосходят 2. Сохраняя обозначения п. 3 и обозначая, кроме того, через β ($I(\beta) > 0$) точку верхней полуплоскости, соответствующую бесконечно удаленной точке, имеем для функции $w = f(z)$, конформно отображающей верхнюю полуплоскость на нашу область, формулу

$$w = C \int_0^z \frac{(t-a_1)^{\alpha_1-1} \dots (t-a_n)^{\alpha_n-1}}{(t-\beta)^2 (t-\bar{\beta})^2} dt + C_1. \quad (66)$$

Исследование этой формулы можно провести по плану п. 3. Мы предоставляем это читателю.

Упражнения к главе XII

1. Исследовать отображение верхней полуплоскости на треугольник, выполняемое с помощью функции

$$w = \int_{z_0}^z (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} dz$$

в случае вырождения $\gamma = 1$.

Отв. Угол величины $\alpha\pi$.

2. То же, если $\gamma = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Отв. Полоса ширины $\frac{\pi}{b-a}$.

3. Пользуясь задачей 2, отобразить полосу ширины $\frac{\pi}{b-a}$, заключенную между двумя параллелями действительной оси, на единичный круг.

Отв. $w = \arctg t + \text{const}$.

4. Отобразить многоугольник на единичный круг.

У к а з а н и е. Воспользоваться формулой (57), положив $\tau = \frac{t-t}{t+i}$.

Отв. $\xi = C' \int_{\tau_0}^{\tau} (\tau - \theta_1)^{\alpha_1-1} (\tau - \theta_2)^{\alpha_2-1} \dots (\tau - \theta_n)^{\alpha_n-1} d\tau + C''$, где

$$|\theta_i| = 1, \quad \sum a_i = n - 2.$$

5. Отобразить внешнюю область многоугольника на единичный круг.

У к а з а н и е. Воспользоваться формулой (66), положив $\tau = \frac{t-\beta}{t-\beta}$.

Отв. $\xi = C_1 \int_{\tau_0}^{\tau} (\tau - \theta_1)^{\alpha_1-1} \dots (\tau - \theta_2)^{\alpha_n-1} \frac{d\tau}{\tau^2} + C_2$, где $|\theta_i| = 1$ и

$$\sum a_i = n - 2.$$

6. Отобразить на единичный круг выпуклый правильный многоугольник.

У к а з а н и е. В формуле задачи 4 нужно положить все α_i равными $1 - \frac{2}{n}$

и θ_i корнями n -й степени из единицы. Затем показать, что различным дугам окружности $\theta_i \theta_{i+1}$ соответствуют равные стороны многоугольника.

Отв. $\xi = C \int_0^z \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}$, если центру круга

соответствует центр многоугольника.

7. Отобразить на единичный круг звездобразный десятиугольник, изображенный на рис. 156.

Отв. $\xi = C \int_0^z \frac{(1+t^5)^{2/5}}{(1-t^5)^{4/5}} dt$, если центру

круга соответствует центр десятиугольника.

8. Отобразить на верхнюю полуплоскость эллипс с купюрами, идущими из каждого фокуса к ближайшей вершине.

У к а з а н и е. Отправляясь от $z = \sin u$, отобразить данную область на прямоугольник и затем воспользоваться § 8, п. 1.

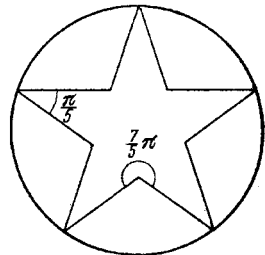


Рис. 156.

9. Отобразить на верхнюю полуплоскость внутренность эллипса, пользуясь задачей 8.

10. Отобразить на верхнюю полуплоскость и на единичный круг параболу $\rho = \frac{2}{1 + \cos \omega}$ в купурой, идущей из фокуса к вершине.

$$\text{Отв. } \zeta = \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{z}, \quad w = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \sqrt{z} - i}{\sin \frac{\pi}{2} \sqrt{z} + i}.$$

11. Отобразить на верхнюю полуплоскость внутренность параболы $\rho = \frac{2}{1 + \cos \omega}$, пользуясь задачей 10.

$$\text{Отв. } w = i \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{z}.$$

12. Отобразить на единичный круг область, внешнюю к квадрату.

У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 5, приняв θ_i равными корням четвертой степени из единицы.

$$\text{Отв. } \zeta = C \int_{z_0}^z \frac{\sqrt{1-z^4}}{z^2} dz + C_1.$$

ГЛАВА XIII

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $w = f(z)$ — функция, которая выполняет взаимно однозначное и конформное отображение круга $|z| < 1$ на односвязную область D плоскости w . В этой главе мы будем предполагать, что область D не содержит бесконечно удаленной точки, т. е. что бесконечно удаленная точка не является внутренней точкой области D . Иными словами, мы будем предполагать функцию $f(z)$ голоморфной в единичном круге $|z| < 1$.

Возможно, не уменьшая общности, считать $f(0) = 0$, потому что в противном случае мы рассматривали бы $f(z) - f(0)$, что геометрически сводится к сдвигу области D . Так как точка $z = 0$ будет внутренней для круга $|z| < 1$, то соответствующая точка $w = 0$ будет внутренней для области D . Нашу функцию $w = f(z)$ можно, очевидно, представить в виде ряда

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

и это разложение будет справедливо во всем круге $|z| < 1$, потому что в этом круге функция w голоморфна. Так как соответствие между z и w есть взаимно однозначное, то $\frac{dw}{dz}$ не равна нулю в круге $|z| < 1$. В частности, полагая $z = 0$, мы видим, что коэффициент $a_1 = f'(0)$ не равен нулю. Таким образом, при изучении можно ограничиться рассмотрением функции.

$$\frac{w}{a_1} = z + \frac{a_2}{a_1} z^2 + \dots$$

Результаты, которые мы при этом получим, могут быть обобщены, если рассматривать $a_1 f(z)$ вместо $f(z)$, т. е. если подвергнуть область D вращению и подобному изменению.

Итак, мы будем изучать функцию

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad (1)$$

голоморфную в круге $|z| < 1$, однолиственную в этом круге, равную нулю при $z = 0$ и имеющую в своем разложении коэффициент при z , равный единице.

Ради краткости функцию, удовлетворяющую условиям $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, будем называть *нормированной*. Замечательным является то обстоятельство, что возможно найти общие границы, между которыми заключен модуль любой нормированной функции. Возможно также найти границы для $|f'(z)|$ и $|\arg f'(z)|$. Мы получим эти результаты после того, как определим верхние границы для модулей коэффициентов.

§ 1. Проблема коэффициентов

Чтобы получить верхние границы моделей коэффициентов разложения функции, голоморфной в круге $|z| < 1$, однолистной в этом круге и нормированной, нам необходимо установить два вспомогательных предложения, известных под названием *внутренней и внешней теорем площадей*.

1. Внутренняя теорема площадей. Пусть

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (2)$$

— функция, голоморфная в круге $|z| < 1$. Рассмотрим круг $|z| \leq r$ ($r < 1$) и область \bar{D}_r , которая получается в результате отображения этого круга с помощью функции $w = f(z)$. Вообще говоря, если данная функция не является однолистной, область \bar{D}_r будет многолистной. Наша задача состоит в том, чтобы определить величину площади этой области \bar{D}_r . Эта последняя выражается интегралом

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(\zeta)|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi,$$

и, таким образом, вопрос сводится к вычислению этого интеграла.

Заметив, что $|f'(\zeta)|^2 = f'(\zeta) \overline{f'(\zeta)}$, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(\zeta)|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi &= \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} (1 + 2a_2 \zeta + 3a_3 \zeta^2 + \dots)(1 + 2\bar{a}_2 \bar{\zeta} + 3\bar{a}_3 \bar{\zeta}^2 + \dots) \rho \, d\rho \, d\varphi = \\ &= \int_0^r 2\pi \rho (1 + 4|a_2|^2 \rho^2 + 9|a_3|^2 \rho^4 + \dots + n^2 |a_n|^2 \rho^{2n-2} + \dots) \, d\rho. \end{aligned}$$

Выполняя оставшуюся квадратуру, получаем для площади области \bar{D}_r следующее значение:

$$\pi (r^2 + 2|a_2|^2 r^4 + 3|a_3|^2 r^6 + \dots + n|a_n|^2 r^{2n} + \dots). \quad (3)$$

По определению за площадь области D , получаемой в отображении круга $|z| < 1$ с помощью функции $w = f(z)$, мы примем предел, к которому стремится площадь области \bar{D}_r , когда r стремится к единице. Так как при возрастании r площадь области \bar{D}_r , выраженная формулой (3), возрастает, то возможны лишь два случая:

1) площадь области \bar{D}_r , т. е. выражение (3), при $r \rightarrow 1$ стремится к определенному конечному пределу, который и будет величиной площади области D ;

2) площадь области \bar{D}_r , т. е. выражение (3), при $r \rightarrow 1$ неограниченно возрастает; в этом случае площадь области D бесконечна.

Рассматривая сначала первый случай, покажем, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2$ схо-

дится. В самом деле, сумма ряда $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$ ограничена при $0 < r < 1$, потому что она согласно условию, возрастая, стремится к конечному пределу.

Предполагая, с другой стороны, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2$ расходящимся, мы придем к

противоречию с условием ограниченности ряда $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$.

Действительно, разность между суммами $n - 1$ первых членов в обоих рядах равна

$$\delta_n = 2 |a_2|^2 (1 - r^4) + \dots + n |a_n|^2 (1 - r^{2n}).$$

Полагая $1 - r = \frac{1}{2n^4}$, покажем, что δ_n ограничено, каково бы ни было n .

Для этого заметим, что

$$1 - r^p = (1 - r) (1 + r + r^2 + \dots + r^{p-1}) < p(1 - r),$$

откуда найдем:

$$\delta_n < (1 - r) [2 \cdot 4 |a_2|^2 + \dots + n \cdot 2n |a_n|^2]$$

и, внося $1 - r = \frac{1}{2n^4}$, получим:

$$\delta_n < \frac{|a_2|^2}{2^2} + \dots + \frac{|a_n|^2}{n^2} < \frac{|a_2|^2}{2^2} + \dots + \frac{|a_n|^2}{n^2} + \dots$$

Следовательно, δ_n заведомо меньше суммы последнего ряда, который сходится, потому что $|a_n|$ ограничены в своей совокупности вследствие ограниченности выражения (3) при $0 < r < 1$.

Итак, если бы $2 |a_2|^2 + \dots + n |a_n|^2$ неограниченно возрастало вместе с n , то же самое было бы и для выражения $2 |a_2|^2 r^4 + \dots + n |a_n|^2 r^{2n}$, где $r = 1 - \frac{1}{2n^4}$, а значит, и подавно сумма ряда

$$2 |a_2|^2 r^4 + \dots + n |a_n|^2 r^{2n} + \dots$$

неограниченно возрастала бы, когда $r = 1 - \frac{1}{2n^4}$ стремится к единице, что противоречит условию.

Итак, в рассматриваемом нами случае 1), когда область D имеет конечную площадь, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2$ сходится. Поэтому мы имеем (гл. II, § 3, п. 7)

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2. \quad (4)$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow 1$ в выражении (3), представляющем площадь области \bar{D}_r , мы, следовательно, для площади области D получим значение

$$\pi + \pi \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2. \quad (5)$$

Что касается случая 2), когда область D имеет бесконечную площадь, то и здесь формула (5) для площади области D остается в силе, так как в этом случае входящий в нее бесконечный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2$ расходится. Действительно, при

сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2$ выполнялось бы соотношение (4) и, значит, выражение (3) стремилось бы к конечному пределу, когда $r \rightarrow 1$; этот предел в силу определения равен величине площади области D , что находится в противоречии с гипотезой бесконечной площади области D .

Итак, мы полностью доказали следующее предложение, известное под именем внутренней теоремы площадей.

Если $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ есть нормированная функция, голоморфная в круге $|z| < 1$, то она выполняет конформное отображение круга $|z| < 1$ на область D (вообще говоря, многолистную) с площадью, определяемой формулой (5).

В частности, отсюда вытекает, что среди всего семейства функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям теоремы площадей, минимальное по площади отображение выполняет лишь функция $w = z$, т. е. минимум площади отображенной области D достигается, когда D совпадает с первоначальной областью — единичным кругом.

2. Внешняя теорема площадей. Предложение, носящее название *внешней теоремы площадей*, заключается в следующем: если

$$w = \zeta + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \dots = \varphi(\zeta)$$

есть функция, однолистная в области $|\zeta| > 1$ и голоморфная всюду в этой области, за исключением бесконечно удаленной точки, где она имеет простой полюс, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 < 1.$$

Это предложение называют теоремой площадей, потому что оно представляет аналитическое выражение для следующего геометрического факта.

Однолистное отображение внешней части единичного круга $|\zeta| > 1$, выполняемое с помощью функции $w = \varphi(\zeta)$, оставляет непокрытым множество точек плоскости w , площадь которого больше или равна нулю.

Из этого геометрического пояснения немедленно вытекает способ доказательства.

Проще всего провести доказательство так: окружность $|\zeta| = r$ ($r > 1$) отображается в замкнутую правильную аналитическую кривую, уравнение которой будет $w = w(\theta) = \varphi(re^{i\theta})$, если положить $\zeta = re^{i\theta}$.

Вычислим площадь A конечной области, ограниченной этой кривой, полагая $w = u + iv$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} uv' d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{w(\theta) + \bar{w}(\theta)}{2} \cdot \frac{w'(\theta) - \bar{w}'(\theta)}{2i} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{re^{i\theta} + re^{-i\theta}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n e^{-in\theta} + \bar{\alpha}_n e^{in\theta}}{2r^n} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{re^{i\theta} + re^{-i\theta}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha_n e^{-in\theta} + n\bar{\alpha}_n e^{in\theta}}{2r^n} \right\} d\theta. \end{aligned}$$

Производя вычисления и замечая, что в результате интегрирования пропадут все члены, которые содержат $e^{i\theta}$ в целой степени, отличной от нулевой, получим:

$$A = \pi r^2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |\alpha_n|^2}{r^{2n}}.$$

Очевидно из геометрических соображений, что $A > 0$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |\alpha_n|^2}{r^{2n}} < r^2. \quad (6)$$

Поступая, как в п. 1, мы убедимся, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2$ сходится, и переходом к пределу при $r \rightarrow 1$ из неравенства (6) найдем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 < 1.$$

3. Верхняя граница для модуля коэффициента при z^2 в разложении однолистной функции. Пусть $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ выполняет однолистное отображение круга $|z| < 1$. Тогда легко показать, что

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \dots$$

выполняет также однолистное отображение круга $|z| < 1$. Для этого докажем, что если $F(z_1) = F(z_2)$, то необходимо $z_1 = z_2$.

В самом деле, из равенства $F(z_1) = F(z_2)$ следует: $[F(z_1)]^2 = [F(z_2)]^2$ или $f(z_1^2) = f(z_2^2)$. Так как $f(z)$ — однолистная функция, то из последнего равенства вытекает: $z_1^2 = z_2^2$, т. е. либо $z_1 = z_2$, либо $z_1 = -z_2$. Последняя же гипотеза противоречит условию $F(z_1) = F(z_2)$, потому что вследствие нечетности функции $F(z)$ имели бы при этой гипотезе $F(z_1) = -F(z_2)$. Таким образом, $F(z)$ — действительно однолистная функция в круге $|z| < 1$.

Возможно то же самое обнаружить и другим путем. Посредством функции z^2 круг $|z| < 1$ переходит в двулистной единичный круг с точкой разветвления при $z = 0$, затем с помощью $f(z^2)$ этот последний отображается на область, таким же образом разветвленную вокруг $z = 0$. Наконец, при переходе к $\sqrt{f(z^2)}$ это разветвление устранивается.

Очевидно, что функция $\Phi(\zeta) = \frac{1}{F(1/\zeta)}$ однолистно отображает внешнюю область единичного круга $|\zeta| > 1$ и имеет следующее разложение, справедливое при $|\zeta| > 1$:

$$\Phi(\zeta) = \zeta - \frac{1}{2} a_2 \frac{1}{\zeta} + \dots$$

Согласно внешней теореме площадей (п. 2) имеем: $\frac{1}{2} |a_2| \leq 1$, откуда $|a_2| \leq 2$.

Итак, мы доказали предложение: если $w = z + a_2 z^2 + \dots$ есть функция голоморфная и однолистная в круге $|z| < 1$, то $|a_2| \leq 2$.

Замечательным фактом является то обстоятельство, что эта граница не может быть улучшена. Действительно, она достигается функцией

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z^2 + 2z^3 + 3z^4 + \dots,$$

так как последняя функция отображает однолистно круг $|z| < 1$ на область, полная граница которой образована из сегмента действительной оси между $-1/4$ и $-\infty$.

Чтобы это показать, достаточно вместо $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ рассмотреть функцию $\Psi(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)} = \frac{(1-1/\zeta)^2}{1/\zeta} = \zeta + 1/\zeta - 2$ и обнаружить, что она одно-

листно отображает $|\zeta| > 1$ на область, полная граница которой образована из сегмента действительной оси между -4 и 0 , что было уже показано в гл. XII, § 5, п. 3.

4. Константа Кебе. Рассмотрим снова в круге $|z| < 1$ голоморфную и однолиственную функцию

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

Предположим, что $f(z) \neq c$ в круге $|z| < 1$. Тогда при $c \neq 0$ функция $f_1(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right)z^2 + \dots$ в круге $|z| < 1$ однолистка и голоморфна. Вследствие п. 3, следовательно, имеем: $|a_2 + 1/c| \leq 2$, т. е. $|c| \geq 1/4$, так как $|a_2| \leq 2$. Отсюда следует: нет никакой граничной точки области, являющейся отображением единичного круга посредством $w = f(z)$, которая имела бы расстояние от начала координат меньше $1/4$. Другими словами, граница всякой области отображения единичного круга с помощью функции $w = f(z)$ имеет расстояние от начала координат, по крайней мере равное $1/4$.

Найденная граница $1/4$ не может быть улучшена, потому что существуют функции, для которых она достигается. Примером такой функции будет снова $\frac{z}{(1-z)^2}$, граница области отображения которой, как мы видели в конце п. 3, имеет расстояние от начала координат, в точности равное $1/4$. Найденная граница $1/4$ носит название константы Кебе.

5. Теорема искажения. Перейдем теперь к рассмотрению так называемой теоремы искажения. Пусть снова

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

в круге $|z| < 1$ голоморфна и однолистка. Образует выражение $f\left(\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right)$, которое, если его рассматривать как функцию ζ , будет представлять функцию, голоморфную и однолиственную в единичном круге $|\zeta| < 1$, потому что линейное преобразование $\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}$ переводит взаимно однозначно единичный круг сам в себя. Нормируя это выражение, рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right) - f(z)}{f'(z)(1-z\bar{z})},$$

голоморфную и однолиственную в круге $|\zeta| < 1$, обладающую разложением в степенной ряд

$$g(\zeta) = \zeta + \beta_2 \zeta^2 + \dots$$

По формуле Тейлора для коэффициента β_2 получим:

$$\beta_2 = \frac{1}{2} g''(0) = \frac{1}{2} \left[\frac{f''(z)(1-z\bar{z})}{f'(z)} - 2\bar{z} \right].$$

Так как в силу п. 3 имеем: $|\beta_2| \leq 2$, то $\left| \frac{f''(z)(1-z\bar{z})}{f'(z)} - 2\bar{z} \right| \leq 4$. Разделив на $1-z\bar{z}$ и умножив на $|z|$, получим:

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2},$$

откуда следует:

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \leq R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2},$$

или

$$\frac{2|z|^2 - 4|z|}{1 - |z|^2} \leq R \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \leq \frac{2|z|^2 + 4|z|}{1 - |z|^2}. \quad (7)$$

Заметив, что

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{d \ln f'(z)}{d \ln z} = \frac{\partial \ln f'(z)}{\partial \ln |z|} = |z| \frac{\partial \ln f'(z)}{\partial |z|},$$

из последнего неравенства (7) найдем:

$$\frac{2|z|^2 - 4|z|}{1 - |z|^2} \leq |z| \frac{\partial}{\partial |z|} R \ln f'(z) \leq \frac{2|z|^2 + 4|z|}{1 - |z|^2},$$

или по сокращении на $|z|$ и замены $R \ln f'(z) = \ln |f'(z)|$:

$$\frac{2|z| - 4}{1 - |z|^2} \leq \frac{\partial}{\partial |z|} \ln |f'(z)| \leq \frac{2|z| + 4}{1 - |z|^2}. \quad (8)$$

Наконец, интегрируя неравенство (8) в пределах от нуля до $|z|$, найдем:

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}. \quad (9)$$

Таковы нижняя и верхняя границы, между которыми заключен $|f'(z)|$. Эти границы наилучшие, так как они достигаются функцией $\frac{z}{(1-z)^2}$ производная которой равна $\frac{1+z}{(1-z)^3}$.

Неравенства (9) выражают собой так называемую *теорему искажения* (Verzerrungssatz). Она показывает, что, какова бы ни была голоморфная и однолистная в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$, нормированная в начале координат, изменение масштаба в точке z при отображении с помощью этой функции заключено между конечными числами, зависящими только от $|z|$.

Вместо неравенства (9) теорему искажения возможно представить в несколько иной форме.

Так как $f'(z)$ в круге $|z| < r < 1$ не имеет нулей, то минимум и максимум ее модуля для $|z| \leq r$ достигаются на окружности $|z| = r$. Следовательно, из неравенства (9) следует:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad \text{если } |z| \leq r. \quad (10)$$

Наконец, если z_1 и z_2 — две точки круга $|z| \leq r$, то имеем:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z_1)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad \frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z_2)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3},$$

откуда получим:

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^4 \leq \left| \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \right| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^4. \quad (11)$$

6. Границы для модуля однолистной функции. Заметив, что $|f(z)| = \left| \int_0^z f'(z) dz \right|$, где интегрирование совершается вдоль радиуса точки z , получим:

$$|f(z)| \leq \int_0^{|z|} |f'(z)| d|z|.$$

Пользуясь второй частью неравенства (9), найдем:

$$|f(z)| \leq \int_0^{|z|} \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} d|z| = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \quad (12)$$

Чтобы найти нижнюю границу, проведем через точку z окружность C с центром в точке 0 и пусть Γ — кривая, в которую функция $f(z)$ преобразует эту окружность. Соединяя точку $f(z)$ с точкой $f(0) = 0$ отрезком прямой, отметим ближайшую к началу координат точку пересечения отрезка с Γ . Если z_1 — соответствующая точка C , то аффикс найденной точки будет $f(z_1)$. Обозначая через $t = t(s)$ уравнение кривой, соединяющей точки 0 и z_1 , которую функция $f(z)$ преобразует в радиус-вектор точки $f(z_1)$, получим:

$$|f(z)| \geq |f(z_1)| = \int_0^{z_1} |f'(t)| |dt|,$$

где интегрирование производится вдоль кривой $t = t(s)$. В силу неравенства (9)

$|f'(t)| \geq \frac{1-|t|}{(1+|t|)^3}$ и, следовательно,

$$|f(z)| \geq \int_0^{z_1} \frac{1-|t|}{(1+|t|)^3} |dt| \geq \int_0^{|z_1|} \frac{1-|t|}{(1+|t|)^3} d|t| = \frac{|z_1|}{(1+|z_1|)^2}.$$

Заметив, что $|z_1| = |z|$, получим:

$$|f(z)| \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2}. \quad (13)$$

Объединяя оба неравенства (12) и (13), окончательный результат запишем так:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \quad (14)$$

Установленные границы для $|f(z)|$ наилучшие, потому что они достигаются функцией $\frac{z}{(1-z)^2}$.

Левая часть неравенства (14) содержит известный уже из п. 4 результат о положении граничных точек, так как при $|z| \rightarrow 1$ нижняя граница $|f(z)|$ стремится к $1/4$. Правая часть неравенства (14) ограничивает рост функции, голоморфной и однолистной в единичном круге.

При приближении к окружности модуль функции может становиться бесконечно большим только как вторая степень обратной величины расстояния от окружности. Отсюда возможно заключить о справедливости следующего общего предложения: *пусть D — произвольная однолистная область, содержащая точку $z = 0$, и $f(z)$ — голоморфная функция в области D , которая отображает однолистно область D . Пусть, далее, G — произвольное замкнутое множество точек, принадлежащее области D ; тогда существует число M , зависящее только от D и G , но не зависящее от $f(z)$, такое, что всюду на G будет:*

$$|f(z)| < |f(0)| + |f'(0)| M.$$

Для доказательства заметим, что

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)}$$

есть функция, голоморфная и однолистная в D .

Для достаточно малого круга с центром $z = 0$ возможно использовать неравенство (14), именно, если круг $|z| < R$ принадлежит области D , то в круге $|z| \leq \theta R$ ($0 < \theta < 1$) имеем:

$$|\psi(z)| \leq \frac{\theta}{(1-\theta)^2},$$

и, значит,

$$|f(z)| < |f(0)| + |f'(0)| \frac{\theta}{(1-\theta)^2}. \quad (15)$$

Теперь, поступая так же, как при аналитическом продолжении, покроем данное множество цепью из конечного числа кругов, отправляясь от круга с центром $z = 0$. Во втором круге цепи, центр которого z_0 принадлежит первому кругу, имеем:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(z_0)} \right| \leq \frac{\theta}{(1-\theta)^2},$$

и, значит,

$$|f(z)| < |f(z_0)| + |f'(z_0)| \frac{\theta}{(1-\theta)^2}.$$

Так как

$$|f(z_0)| < |f(0)| + |f'(0)| \frac{\theta}{(1-\theta)^2} \quad \text{и} \quad |f'(z_0)| < |f'(0)| \frac{1+\theta}{(1-\theta)^3},$$

то получаем:

$$|f(z)| < |f(0)| + |f'(0)| \frac{\theta}{(1-\theta)^2} \left[1 + \frac{1+\theta}{(1-\theta)^3} \right]. \quad (16)$$

Сравнивая неравенства (15) и (16), мы видим, что одновременно в обоих кругах цепи имеет место неравенство (16). Продолжая этот процесс далее, мы убеждаемся в справедливости неравенства

$$|f(z)| < |f(0)| + |f'(0)| M$$

на всей системе кругов цепи, т. е. и подавно на множестве точек G , причем число M не зависит от вида функции $f(z)$.

7. Теорема вращения. Из установленного в п. 5 неравенства

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2},$$

где $f(z)$ — нормированная голоморфная и однолиственная функция в единичном круге $|z| < 1$, получаем:

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \leq I \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

Заметив, как это было уже отмечено в п. 5, что

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = |z| \frac{\partial \ln f'(z)}{\partial |z|},$$

мы найдем:

$$I \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) = |z| \frac{\partial}{\partial |z|} \arg f'(z),$$

потому что

$$I \ln f'(z) = \arg f'(z).$$

Таким образом, мы имеем:

$$-\frac{4}{1-|z|^2} \leq \frac{\partial}{\partial |z|} \arg f'(z) \leq \frac{4}{1-|z|^2}.$$

Производя интегрирование относительно $|z|$, получим *теорему вращения*

$$|\arg f'(z)| \leq 2 \ln \frac{1+|z|^4}{1-|z|^4}. \quad (17)$$

Это предложение представляет собой естественное дополнение к теореме искажения, так как оно регулирует изменение направлений при однолистной отображении.

8. Общая граница для модулей коэффициентов в разложении однолистной функции. Возвратимся снова к функции $f(z)$, голоморфной и однолистной в единичном круге $|z| < 1$, предполагая ее нормированной посредством условий $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

При любом r ($r < 1$) имеем:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi,$$

и, значит,

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho^2 e^{i\varphi})| d\varphi,$$

где положено $r = \rho^2$. Далее имеем:

$$\begin{aligned} |a_n| r^n &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho^2 e^{i\varphi})| d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} |f(\rho^2 e^{i\varphi})| \frac{d\varphi}{2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho^2 e^{2i\psi})| d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sqrt{f(\rho^2 e^{2i\psi})}|^2 d\psi. \end{aligned} \quad (18)$$

Полагая $F(\zeta) = \sqrt{f(\zeta^2)}$, $\zeta = \rho e^{i\psi} = \sqrt{\rho^2 e^{2i\psi}}$, перепишем (18) в виде

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\zeta)|^2 d\psi. \quad (19)$$

Пусть теперь

$$F(\zeta) = \zeta + b_2 \zeta^2 + \dots \quad (b_1 = 1).$$

Тогда (19) можно представить так:

$$|a_n| r^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \rho^{2n} = 2 \int_0^{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \rho^{2n-1} d\rho.$$

⁴⁾ Эта оценка не является наилучшей из возможных. Наилучшая оценка была получена Г. М. Голузиным и И. Е. Базилевичем. См. Г о л у з и н Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Гостехиздат, 1952.

Подынтегральная функция в последнем интеграле, очевидно, равна площади области, получающейся в отображении круга $|\zeta| \leq \rho$ с помощью функции $F(\zeta)$, деленной на $\pi \rho$ (п. 1). Заметив же, что площадь этой области заведомо не превосходит площади круга радиуса, равного максимуму $|F(\zeta)|$ для круга $|\zeta| \leq \rho$, получаем:

$$|a_n| r^n \leq 2 \int_0^\rho \frac{1}{\pi \rho} \pi \max_{|\zeta|=\rho} |F(\zeta)|^2 d\rho. \quad (20)$$

Так как $F(\zeta) = \sqrt{f(\zeta^2)}$ и по теореме п. 6 $|f(\zeta^2)| \leq \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^2}$, то

$$|F(\zeta)| \leq \frac{\rho}{1-\rho^2}.$$

После этого неравенства (20) запишется так:

$$|a_n| r^n \leq 2 \int_0^\rho \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^2} d\rho = \frac{\rho^2}{1-\rho^2}.$$

или в силу равенства $\rho = \sqrt{r}$:

$$|a_n| r^n \leq \frac{r}{1-r}.$$

Так как r — любое число, меньшее единицы, то, полагая, в частности,

$$r = 1 - \frac{1}{n},$$

получим:

$$|a_n| < \frac{n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} = n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < en,$$

потому что при любом n ($n \geq 2$)

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e.$$

Полученное неравенство $|a_n| < en$ показывает, что модуль каждого коэффициента в разложении однолистной функции имеет постоянную верхнюю границу, не зависящую от вида функции, при условии ее нормирования в начале координат.

Еще не доказано, хотя имеются все основания предполагать, что $|a_n| \leq n$,

так что и здесь границы достигаются функцией $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$. В этом

направлении, кроме результата п. 3, установлено, что $|a_n| \leq n$, если все коэффициенты — действительные числа.

9. Общая граница для модулей действительных коэффициентов в разложении однолистной функции. Результат, упомянутый в конце п. 8, может быть установлен при помощи следующей леммы: *если $f(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots$ голоморфна в единичном круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условию $Rf(z) \geq 0$, то $|b_n| \leq 2$ при любом $n = 1, 2, \dots$* В самом деле, условие $Rf(z) \geq 0$ эквивалентно неравенству $|f(z) - 1| \leq |f(z) + 1|$, из которого следует, что функция

$$g(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} = \frac{b_1}{2} z + \dots$$

голоморфна в единичном круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условию $|g(z)| \leq 1$. Следовательно, имеем: $|b_1/2| = |g'(0)| \leq 1$, т. е. $|b_1| \leq 2$. Обозначая теперь через ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) все корни n -й степени из единицы, будем иметь:

$$R \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\omega_k z^{1/n}) \right) \geq 0, \text{ а значит, функция}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\omega_k z^{1/n}) = 1 + b_n z + \dots$$

удовлетворяет всем условиям леммы. В силу доказанного $|b_n| \leq 2$, причем это неравенство справедливо при любом $n = 1, 2, \dots$

Пусть теперь $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ голоморфна и однолистка в единичном круге $|z| < 1$ и все коэффициенты a_n — действительные числа.

Вследствие однолистности функции $f(z)$ выражение

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2} \neq 0$$

при любых точках z_1 и z_2 из единичного круга $|z| < 1$. Отсюда следует, в частности, при $z_1 = r e^{i\varphi}$, $z_2 = r e^{-i\varphi}$ ($r < 1$), что выражение $F(r, \varphi) = 1 +$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}, \text{ будучи действительным, отлично от нуля, т. е. сохраняет}$$

знак при $r < 1$ и любых значениях φ . Следовательно, выражение

$$2 \sin^2 \varphi F(r, \varphi) = 1 + a_2 r \cos \varphi + (a_3 r^2 - 1) \cos 2\varphi + (a_4 r^2 - a_2) r \cos 3\varphi + \\ + \dots + (a_n r^2 - a_{n-2}) r^{n-3} \cos(n-1)\varphi + \dots$$

также сохраняет знак, а так как при $r = 0$ оно равно единице, то знак его будет положительный. Заметив это, заключаем, что функция

$$F(z) = 1 + a_2 r z + (a_3 r^2 - 1) z^2 + (a_4 r^2 - a_2) r z^3 + \dots \\ \dots + (a_n r^2 - a_{n-2}) r^{n-3} z^{n-1} + \dots$$

голоморфна в единичном круге $|z| \leq 1$ и на окружности $|z| = 1$ удовлетворяет условию $RF(z) \geq 0$. По принципу минимума гармонических функций неравенство $RF(z) \geq 0$ должно иметь место также и внутри круга $|z| < 1$. Вследствие леммы заключаем о справедливости неравенств

$$|a_2| r \leq 2, \quad |a_3 r^2 - 1| \leq 2, \quad |a_4 r^2 - a_2| r \leq 2, \dots, |a_n r^2 - a_{n-2}| r^{n-3} \leq 2, \dots$$

или, переходя к пределу при $r \rightarrow 1$,

$$|a_2| \leq 2, \quad |a_3 - 1| \leq 2, \quad |a_4 - a_2| \leq 2, \dots, |a_n - a_{n-2}| \leq 2, \dots$$

Отсюда по индукции следует, что при любом n будет $|a_n| \leq n$.

§ 2. Границы выпуклости и звездообразности

1. **Граница выпуклости.** Обратимся к геометрическому истолкованию неравенства (7), установленного в § 1, п. 5 для однолистных, голоморфных в единичном круге нормированных функций:

$$R \left(\frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \frac{2|z|^2 - 4|z|}{1 - |z|^2}. \quad (7)$$

Мы достигнем этой геометрической интерпретации, если рассмотрим отображение окружности $|z| = r$. Угол положительного направления касательной к окружности $|z| = r$ в точке $z = re^{i\varphi}$ есть $\pi/2 + \varphi$. В отображенной точке $f(z)$ касательная к отображенной кривой имеет направление $\tau = \pi/2 + \varphi + \arg f'(z)$. Заметив, что кривизна линии есть $\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds}$, продифференцируем τ относительно φ :

$$\frac{dz}{d\varphi} = 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f'(z).$$

С другой стороны,

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{d \ln f'(z)}{d \ln z} = \frac{1}{i} \frac{\partial \ln f'(z)}{\partial \varphi}$$

и, значит,

$$R \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f'(z),$$

потому что $\ln f'(z) = \ln |f'(z)| + i \arg f'(z)$. Таким образом, имеем:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = 1 + R \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right).$$

Знак $\frac{d\tau}{d\varphi}$ совпадает со знаком кривизны линии отображения, потому что $\frac{d\tau}{d\varphi}$ отличается от кривизны лишь положительным множителем $\frac{ds}{d\varphi}$. Следовательно, выражение $1 + R \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)$ имеет знак, совпадающий со знаком кривизны линии отображения.

С другой стороны, вследствие неравенства (7) имеем:

$$1 + R \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq \frac{1 - 4|z| + |z|^2}{1 - |z|^2}.$$

Если теперь выражение, стоящее в левой части последнего неравенства, положительно для $|z| = r$, то это по предыдущему означает, что отображение окружности $|z| = r$ есть выпуклая кривая.

Простым вычислением мы убеждаемся, что для $|z| < 2 - \sqrt{3} = 0,26\dots$ выражение правой части нашего неравенства все время положительно, в то время как при $|z| > 2 - \sqrt{3}$ — отрицательно. Поэтому при каждом однолистом отображении $f(z)$ круга $|z| < 1$ круг $|z| < 2 - \sqrt{3}$ отображается на выпуклую область. Существует случай, когда именно круг $|z| < 2 - \sqrt{3}$ отображается выпукло и никакой больший с ним концентрический уже не отображается выпукло. Это будет в случае функции $\frac{z}{(1-z)^2}$, что легко можно проверить вычислением.

Найденное число $2 - \sqrt{3}$ представляет, таким образом, наилучшую границу выпуклости для всего семейства однолистных в единичном круге и нормированных функций.

2. Граница звездообразности. В связи с результатом предыдущего пункта представляется интересным ввести в рассмотрение вместо выпуклых областей так называемые *звездообразные области*. Это будут однолистные области, которые содержат точку $z = 0$ и пересекаются с каждой прямой, проходящей через точку $z = 0$, только по единственному отрезку.

В силу п. 1 ясно, что должен существовать круг с центром $z = 0$, который при каждом однолистом отображении переходит в звездообразную область. На-

водем границей звездообразности радиус r наибольшего из этих кругов. Можно доказать, что $r = \text{th } \frac{\pi}{4} = 0,65\dots^1$.

Если круг $|z| < r$ переходит в звездообразную область, то на каждом луче, выходящем из $w = 0$, должна лежать одна точка кривой отображения окружности $|z| = r$. Поэтому $\arg f(z)$ должен изменяться постоянно в одном и том же направлении, когда точка z описывает окружность $|z| = r$. Аналитически это выражается посредством условия

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f(z) = R \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \quad \text{при } |z| < r.$$

Итак, мы получаем такой критерий: *круг $|z| < r$ при помощи $f(z)$ имеет звездообразное отображение только в том случае, если*

$$R \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0,$$

или, что то же, если

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{\pi}{2} \quad \text{при } |z| < r.$$

Заметим теперь, что

$$\arg \frac{zf'(z)}{f(z)} = \arg f'(z) - \arg \frac{f(z)}{z}$$

есть угол, который образует с вектором f/z вектор $f'(z)$. Направление вектора $f'(z)$, т. е. $\arg f'(z)$, дает изменение направления линейного элемента в результате отображения; направление же вектора f/z , т. е. $\arg \frac{f(z)}{z}$, дает изменение азимута в результате отображения. Следовательно, формулированный выше критерий показывает, что различие между изменениями направления и азимута в круге $|z| < r$ остается меньше $\pi/2$, — факт, который ясен с геометрической точки зрения.

§ 3. Свойства функций, дающих однолистные конформные отображения единичного круга на области специального вида

1. Звездообразные и выпуклые функции. Все, что было установлено в § 1, пп. 4, 5, 6 относительно произвольных однолистных функций, и по-прежнему будет справедливо для частного случая, когда функция семейства (S)

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

дает однолистное конформное отображение круга $|z| < 1$ на звездообразную область. С другой стороны, установленные границы достигаются, как мы видели, функцией $\frac{z}{(1-z)^2}$, дающей отображение круга $|z| < 1$ на звездообразную область. Поэтому эти границы будут наилучшими и для рассматриваемого теперь класса функций.

¹ См. Голузин Г. М. Внутренние задачи теории однолистных функций. — Успехи математических наук, 1939, вып. VI, с. 26—89. См. также книгу переменного Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Гостехиздат, 1952.

Полагая теперь $f(z) = zF'(z)$ и замечая, что

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)},$$

мы заключаем:

$$R\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = 1 + R\left(\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right). \quad (21)$$

Так как положительный знак левой части характеризует звездообразность отображения с помощью функции $f(z)$, а положительный знак первой части — выпуклость отображения с помощью функции $F(z)$, то отсюда заключаем, что круг $|z| < 1$ посредством $f(z)$ отображается на звездообразную область только в том случае, если этот круг посредством $F(z)$ отображается на выпуклую область, причем $f(z)$ и $F(z)$ связаны соотношением

$$f(z) = zF'(z).$$

Отсюда найдем немедленно точные границы теоремы искажения для выпуклых функций (K) . Таким образом, в силу п. 6 получаем:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |zF'(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

или

$$\frac{1}{(1+|z|)^2} \leq |F'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}. \quad (22)$$

Границы для модуля выпуклой функции получим аналогично п. 6 посредством интегрирования неравенства (22):

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leq |F(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|}. \quad (23)$$

Найденные границы (22) и (23) являются наилучшими для выпуклых функций $F(z)$. Действительно, они достигаются функцией $w = \frac{z}{1-z}$, которая дает выпуклое отображение круга $|z| < 1$. Она отображает круг $|z| < 1$ на полуплоскость $Rw > -1/2$. Из левой части неравенства (23) при $|z| \rightarrow 1$ найдем, что граница выпуклого отображения круга $|z| < 1$ отстоит от начала координат на расстоянии, по крайней мере равном $1/2$. Последняя константа является точной, так как она достигается функцией $w = \frac{z}{1-z}$.

2. Верхние границы модулей коэффициентов в разложениях выпуклой и звездообразной функций. Рассмотрим семейство (K) функций

$$w = z + a_2 z^2 + \dots,$$

дающих однолистное конформное отображение круга $|z| < 1$ на выпуклые области, и докажем: какова бы ни была функция $w(z)$ указанного семейства (K) , имеем: $|a_n| \leq 1$ ($n = 2, 3, \dots$).

Предположим сначала, что $w(z)$ отображает круг $|z| < 1$ на выпуклую область, ограниченную многоугольником, т. е.

$$w(z) = \int_0^z \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{\alpha_1-1} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{\alpha_2-1} \dots \left(1 - \frac{z}{z_s}\right)^{\alpha_s-1} dz, \quad (24)$$

где $0 < \alpha_k < 1$, $\sum_{k=1}^s \alpha_k = s - 2$ (гл. VII, упр. 4), и покажем, что в этом случае $|a_n| \leq 1$ ($n = 2, 3, \dots$). Заметив, что

$$a_n = \frac{\omega^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{и} \quad \omega'(0) = 1,$$

предположим:

$$|\omega'(0)| < 2!, \quad |\omega''(0)| \leq 3!, \quad \dots, \quad |\omega^{(n-1)}(0)| < (n-1)!$$

и докажем, что

$$|\omega^{(n)}(0)| < n!$$

С этой целью, продифференцировав (24), имеем:

$$\omega'(z) = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{\alpha_1-1} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{\alpha_2-1} \dots \left(1 - \frac{z}{z_s}\right)^{\alpha_s-1}.$$

Взяв логарифмическую производную от последнего равенства, найдем:

$$\frac{\omega''(z)}{\omega'(z)} = \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k - 1}{z - z_k}$$

или, полагая для сокращения

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k - 1}{z - z_k},$$

будем иметь:

$$\omega''(z) = \omega(z) \omega'(z).$$

Продифференцировав обе части этого равенства $n - 2$ раз, пользуясь формулой Лейбница, получим:

$$\begin{aligned} \omega^{(n)}(z) &= \omega^{(n-2)}(z) \omega'(z) + (n-2) \omega^{(n-3)}(z) \omega''(z) + \\ &+ \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \omega^{(n-4)}(z) \omega'''(z) + \\ &+ \dots + (n-2) \omega'(z) \omega^{(n-2)}(z) + \omega(z) \omega^{(n-1)}(z). \end{aligned} \quad (25)$$

С другой стороны, очевидно, имеем:

$$\omega^{(p)}(z) = (-1)^{p+1} p! \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k - 1}{(z - z_k)^{p+1}}.$$

Полагая здесь $z = 0$, получим:

$$|\omega^{(p)}(0)| \leq p! \sum_{k=1}^s 1 - \alpha_k = 2(p!). \quad (26)$$

Из равенства (25) при $z = 0$, пользуясь неравенствами (26) и условиями

$$\omega'(0) = 1, \quad |\omega''(0)| < 2!, \quad \dots, \quad |\omega^{(n-1)}(0)| \leq (n-1)!,$$

окончательно находим:

$$\begin{aligned} |\omega^{(n)}(0)| &\leq 2(n-2)! + 2(n-2)!2! + 2 \frac{(n-2)!}{2!} 3! + \dots + 2(n-1)! = \\ &= 2(n-2)! [1 + 2 + \dots + (n-1)] = n!, \end{aligned}$$

что и нужно.

Заметим теперь, что любую выпуклую область можно аппроксимировать с помощью многоугольных областей и, следовательно, любую функцию $f(z)$ семейства (K) можно рассматривать как предел функций вида

$$C \int_0^z \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{\alpha_1-1} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{\alpha_2-1} \dots \left(1 - \frac{z}{z_s}\right)^{\alpha_s-1} dz; \quad (27)$$

мы заключаем: так как по доказанному модуль коэффициента при z^n в разложении функции (27) не больше C и C вследствие нормирования должно стремиться к единице, то модуль коэффициента при z^n в разложении выпуклой функции не больше единицы.

Переходя от семейства (K) выпуклых функций к семейству (S) звездобразных функций с помощью соотношения

$$f(z) = zF'(z),$$

мы получим соответствующие границы для коэффициентов в разложении звездобразной функции.

Действительно, если

$$j(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \\ F(z) = z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots,$$

то $a_n = nb_n$, и так как $|b_n| \leq 1$, то $|a_n| \leq n$.

Найденные верхние границы для модулей коэффициентов в разложениях выпуклой и звездобразной функций являются точными, потому что они достигаются соответственно функциями

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad \text{и} \quad \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

Метод, изложенный в этом пункте, может быть применен для получения точных границ модулей коэффициентов, а также теорем искажения в случае симметричных выпуклых функций. Предоставляя это сделать читателю, заметим, что мажорантой для этого класса будет функция $w = \operatorname{arctg} z$, которая дает отображение единичного круга на полосу ширины $\pi/2$, параллельную мнимой оси. Переходя затем от выпуклых симметричных функций к звездобразным симметричным функциям, установим точные границы и для этих последних. В этом случае мажорантой будет функция $w = \frac{z}{1+z^2}$, которая даст отображение единичного круга на область, полная граница которой состоит из двух сегментов действительной оси $(1/2, \infty)$ и $(-1/2, -\infty)$.

§ 4. Экстремальные свойства функции, отображающей область на круг

1. Лемма. Задача этого пункта — доказать следующее вспомогательное для дальнейшего предложение: если $\varphi(z)$ есть функция, голоморфная в круге $|z| < \rho$, то, полагая $z = re^{i\theta}$, имеем, каково бы ни было r ($0 < r < \rho$):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^p d\theta \geq |\varphi(0)|^p \quad (\rho > 0), \quad (28)$$

причем равенство достигается только в случае $\varphi(z) = \text{const}$.

Сначала рассмотрим случай $p = 2$. Из разложения Тейлора, имеющего место внутри круга $|z| < \rho$:

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n + \dots,$$

получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta = |\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 r^2 + \dots + |\alpha_n|^2 r^{2n} + \dots$$

Это выражение, очевидно, больше или равно $|\alpha_0|^2 = |\varphi(0)|^2$, причем равенство имеет место только, если $\varphi(z) = \alpha_0$.

Если p — любое число, то рассмотрим функцию $[\varphi(z)]^{p/2}$; если $\varphi(z)$ не имеет нулей внутри круга, то $\arg \varphi$ будет однозначен, и различные ветви функции $\varphi^{p/2}$ будут однозначны. Выбирая одну из них, будем иметь функцию $\varphi^{p/2}$, голоморфную в круге $|z| < \rho$. Достаточно тогда приложить лемму к этой функции и показателю 2, чтобы распространить ее на рассматриваемый случай относительно $\varphi(z)$. Таким образом, лемма установлена при любом p , если φ не имеет нулей внутри круга.

Переходим теперь к случаю, когда φ имеет нули внутри круга $|z| < \rho$. Мы можем предполагать, что $\varphi(0) \neq 0$, потому что в этом случае справедливость леммы очевидна. Рассмотрим круг радиуса r ($r < \rho$); если внутри него нет нулей функции $\varphi(z)$, то для этого радиуса r предложение будет установлено, если приложить рассмотренный случай к кругу $|z| < r$. Если имеются нули внутри круга $|z| < r$, то их — конечное число; обозначим их через a_1, a_2, \dots, a_n , отметив каждый столько раз, какова их кратность. Заметим, что если a_1, a_2, \dots, a_n — точки, симметричные с a_1, a_2, \dots, a_n относительно окружности $|z| = r$, то функция

$$\frac{(z - a'_1)(z - a'_2) \dots (z - a'_n)}{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)}$$

принимает на этой окружности значения, имеющие модуль, равный

$$\frac{r}{|a_1|} \frac{r}{|a_2|} \dots \frac{r}{|a_n|} = \frac{r^n}{|a_1 a_2 \dots a_n|}.$$

Следовательно, функция

$$\varphi_1(z) = \frac{|a_1 a_2 \dots a_n|}{r^n} \frac{(z - a'_1) \dots (z - a'_n)}{(z - a_1) \dots (z - a_n)} \varphi(z)$$

голоморфна и не равна нулю в круге $|z| < r$ и принимает на окружности $|z| = r$ значения того же модуля, что и $\varphi(z)$.

В силу леммы, установленной для $\varphi_1(z)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_1(re^{i\theta})|^p d\theta \geq |\varphi_1(0)|^p.$$

С другой стороны,

$$|\varphi_1(re^{i\theta})| = |\varphi(re^{i\theta})| \quad \text{и} \quad |\varphi_1(0)| = \frac{|a_1 a_2 \dots a_n|}{r^n} \left| \frac{a'_1 a'_2 \dots a'_n}{a_1 a_2 \dots a_n} \right| |\varphi(0)|,$$

т. е.

$$|\varphi_1(0)| = \frac{|a'_1 a'_2 \dots a'_n|}{r^n} |\varphi(0)| > |\varphi(0)|.$$

Таким образом, будет:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^p d\theta > |\varphi(0)|^p,$$

и предложение вполне установлено, потому что $\varphi(z)$ ($\varphi(0) \neq 0$), имеющая нули внутри круга $|z| < r$, не есть постоянное.

2. Первая экстремальная проблема. Рассмотрим все функции $\lambda(z)$, голоморфные в ограниченной односвязной области D , нормированные в точке z_0 , т. е. удовлетворяющие условиям

$$\lambda(z_0) = 0, \quad \lambda'(z_0) = 1. \quad (29)$$

Для этого класса ставится следующая задача: *показать, что интеграл*

$$I_p = \iint_D |\lambda(z)|^p dx dy \quad (p > 0)$$

имеет минимум для единственной функции λ , и определить эту функцию.

Пусть $w = f(z)$ выполняет при условиях (29) взаимно однозначное и конформное отображение области D на круг $\Delta: |z| < \rho$, а $z = \varphi(w)$ есть обратная функция. Так как

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = |\varphi'(w)|^2,$$

то

$$I_p = \iint_{\Delta} |\lambda[\varphi(w)]|^p |\varphi'(w)|^2 du dv.$$

Полагая $\Lambda(w) = \lambda[\varphi(w)]$ и $w = re^{i\theta}$, получим:

$$I_p = \int_0^{\rho} r dr \int_0^{2\pi} |\Lambda(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

причем φ' не обращается в нуль, и потому различные ветви $\varphi'^{2/p}$ однозначны. Выберем ветвь, равную единице при $w = 0$; $\lambda[\varphi(w)]$ — функция голоморфная и при $w = 0$ имеет простой нуль. Следовательно, $\Lambda(w) \varphi'^{2/p}(w)$ голоморфна и при $w = 0$ имеет простой нуль. Положим

$$\Phi(w) = \frac{\Lambda(w) \varphi'^{2/p}(w)}{w} \quad \Phi(0) \neq 0;$$

тогда будем иметь:

$$\int_0^{2\pi} |\Lambda(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 d\theta = r^p \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

откуда в силу леммы п. 1, каково бы ни было $r < \rho$, получим:

$$\int_0^{2\pi} |\Lambda(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 d\theta \geq 2\pi r^p |\Phi(0)|^p. \quad (30)$$

Далее, чтобы вычислить $\Phi(0)$, заметим, что

$$\left[\frac{d\Lambda(w)}{dw} \right]_{w=0} = \left(\frac{d\lambda}{dz} \right)_{z=z_0} = 1, \quad \varphi'(0) = \frac{1}{f'(z_0)} = 1,$$

откуда

$$\Lambda(w) = w + \dots, \quad \varphi^{2/p}(w) = 1 + \dots$$

и, значит, $\Phi(w) = 1 + \dots$, т. е. $\Phi(0) = 1$. Следовательно, из неравенства (30) найдем:

$$\int_0^{2\pi} |\Lambda(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 d\theta \geq 2\pi r^p$$

и, наконец,

$$I_p \geq 2\pi \int_0^{\rho} r^{p+1} dr = \frac{2\pi}{p+2} \rho^{p+2}.$$

Итак,

$$I_p \geq \frac{2\pi}{p+2} \rho^{p+2}.$$

Если в последней формуле имеет место знак равенства, то это может быть только в том случае, когда в формуле (30) имеется знак равенства при всяком r , что на основании леммы возможно лишь при

$$\Phi(w) = \text{const} = 1.$$

Это последнее условие означает, что I_p достигает своей нижней границы. Условие $\Phi(w) = 1$ запишется так:

$$\lambda[\varphi(w)] = w [\varphi'(w)]^{-2/p},$$

или

$$\lambda(z) = f(z) [f'(z)]^{2/p},$$

принимая за $[f'(z)]^{2/p}$ однозначную ветвь функции, равную единице при $z = z_0$. Таким образом, мы показали, что I_p достигает своей нижней границы $\frac{2\pi}{p+2} \rho^{p+2}$ только для функции

$$f_p(z) = f(z) [f'(z)]^{2/p}.$$

Кроме того, заметим, что среднее значение $[\lambda(z)]$ порядка p на области D есть:

$$m_p = \left(\frac{I_p}{d}\right)^{1/p} \quad (d - \text{площадь области } D),$$

откуда

$$m_p \geq \rho \left[\frac{2\pi\rho^2}{(p+2)d} \right]^{1/p},$$

причем $m_p = \rho \left[\frac{2\pi\rho^2}{(p+2)d} \right]^{1/p}$ только для функции $f_p(z)$. Когда p неограниченно возрастает, то m_p стремится к ρ , а $f_p(z)$ стремится к функции $f(z)$.

3. Вторая экстремальная проблема. Рассмотрим все функции $\lambda(z)$, голоморфные в ограниченной односвязной области D , нормированные в точке z_0 , т. е. удовлетворяющие условиям

$$\lambda(z_0) = 0, \quad \lambda'(z_0) = 1; \quad (29)$$

показать, что интеграл

$$J_p = \iint_D |\lambda'(z)|^p dx dy \quad (p > 0)$$

имеет минимум для единственной функции λ , и определить эту функцию.

Итак, среди всех функций, голоморфных в ограниченной области D и нормированных в точке z_0 , существует единственная функция, которая реализует минимум площади поверхности Римана, преобразованной из D ; эта функция выполняет взаимно однозначное конформное отображение области D на круг с центром в начале координат.

Вместо того, чтобы искать минимум площади при условиях нормирования функции, возможно по принципу взаимности наложить условие на преобразованную площадь и искать максимум $|\lambda'(z_0)|$. Итак, рассмотрим все функции $\mu(z)$, голоморфные в области D , удовлетворяющие условиям $\mu(z_0) = 0$, $\mu'(z_0) \neq 0$ и преобразующие область D в поверхность Римана данной площади A . Тогда функция $\frac{\mu(z)}{\mu'(z_0)}$ преобразует область D в поверхность Римана площади, равной $\frac{A}{|\mu'(z_0)|^2}$; так как она нормирована в точке z_0 , то будем иметь согласно предыдущему:

$$\frac{A}{|\mu'(z_0)|^2} \geq \pi \rho^2,$$

где ρ — радиус, соответствующий точке z_0 и области D . Следовательно,

$$|\mu'(z_0)|^2 \leq \frac{A}{\pi \rho^2}$$

и

$$|\mu'(z_0)| \leq \sqrt{\frac{A}{\pi \rho^2}}.$$

Максимум $|\mu'(z_0)|$ достигается только, если $\frac{\mu(z)}{\mu'(z_0)}$ реализует взаимно однозначное и конформное отображение области D на круг с центром в начале координат.

Если $f(z)$ означает функцию, нормированную в точке z_0 , которая выполняет это отображение, то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $\mu(z)$ давала максимум $|\mu'(z_0)|$, следовательно, запишется так:

$$\frac{\mu(z)}{\mu'(z_0)} = f(z),$$

откуда

$$\mu(z) = C f(z).$$

По условию преобразованная площадь равна A и поэтому $|C|^2 \pi \rho^2 = A$, откуда

$$|C| = \sqrt{\frac{A}{\pi \rho^2}}.$$

Итак, искомая функция $\mu(z)$ будет вида

$$e^{i\omega} \sqrt{\frac{A}{\pi \rho^2}} f(z).$$

Функции этой формы осуществляют взаимно однозначное и конформное отображение области D на круг с центром в начале координат и площади A . Отсюда вытекает: среди функций $\mu(z)$, голоморфных в области D , $\mu(z_0) = 0$, $\mu'(z_0) \neq 0$, и преобразующих D в поверхность Римана площади A , те функции, которые реализуют максимум $|\mu'(z_0)|$, выполняют взаимно однозначное конформное отображение области D на круг с центром в начале координат площади A .

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля теорема** вторая 67
 — — первая 58
Абсолютно сходящееся бесконечное произведение 270
 — сходящийся ряд 37
Адамара — Коши формула 63
Алгебраическая точка разветвления 90
Алгебры основная теорема 227, 244
Аналитическая дуга 350
 — — правильная 350
 — функция в области, в точке 70
 — — (возможные обобщения теоремы единственности) 278
 — — (единственность) 201—202, 278
 — — полная в смысле Вейерштрасса 286—290
Аналитическое продолжение 286
 — — гармонической функции 352
 — — (принцип Шварца) 351
Ангармоническое отношение 113
Аргумент комплексного числа 20
Арсинус 86
Аффикс точки 19
- Безразличная** двойная точка 124
Безусловно сходящийся ряд 37
Бесконечно удаленная точка 32
Бесконечнозначная функция 87
Бесконечность (поведение функции в бесконечности) 223
Бесконечные произведения 265
Блоха предложение 256—258
Больцано — Вейерштрасса теорема 27
Бореля — Гейне лемма 52—53
Буяковского неравенство 389
- Вейерштрасс** 286—290
Вейерштрасса теорема вторая 208
 — — первая 190
Вейерштрасса — Больцано теорема 27
Вейерштрасса формула 274
 — функция 303
Вектор 19
Векторное поле 227
Ветви многозначных функций 87
Взаимо однозначного соответствия принцип 344
Взаимных радиусов-векторов преобразование 23, 110
Внешняя теорема площадей 407, 410
 — точка области 47
Внутренняя теорема площадей 407—408
 — точка множества 46
Вращение, преобразование 108
Вращения теорема 416
Выпуклости граница 418
Выпуклые функции 420
Вычет функции 238
 — — логарифмический 243
 — — относительно бесконечно удаленной точки 241
Вычитание комплексных чисел 18
 — — — (геометрическое истолкование) 20
 — рядов 38
- Гармоническая функция** 76, 352
 — — (аналитическое продолжение) 352
 — — (значение в центре) 186
Гейне — Бореля лемма 52—53
Гельдера — Липшица условие 179
Геометрический смысл дифференциала 103
 — — производной 97, 99
Геометрическое изображение комплексных чисел 19
Гидродинамика (приложения функций комплексного переменного) 227
Гипербола (отображение) 371
 — равносторонняя (отображение) 365
Гиперболические функции (синус и косинус) 81
Гиперболическое преобразование 121
Гипериклы 130
Главная (линейная) часть отображения 103
 — часть ряда Лорана 214
Гладкая линия Жордана 143
Голоморфная функция в области, в точке 199, 200
Горнички 130
Границ соответствие (при конформном отображении) 383
Граница выпуклости 418
 — (естественная) функции 288
 — звездообразности 419—420
 — области 47
Граничная точка области 47
- Даламбера — Эйлера условия** 74
Двойная (неподвижная) точка 120, 123, 362
Двойное отношение 113
Двойные ряды 38
Двокопериодические функции 294
Двухсвязная область 49
Действительная ось 19
 — часть комплексного числа 17
Действительного переменного функция (распространение на комплексную область) 290
Деление комплексных чисел 18
 — — — (геометрическое истолкование) 24
Дифференциал 72
 — (геометрический смысл) 102—103
Дифференцирование степенных рядов 77
 — функций 69—70
Дифференцируемость функций 70
Достижимые точки 387
Дроби простейшие 227
Дуга аналитическая 350
 — — правильная 350
- Единичный круг** (отображение в себя) 336
 — — (преобразование во внутреннюю область) 355
Единственности теорема (аналитических функций) 201—202, 278
 — — (обобщение) 364
Единственность конформного отображения 338

- Единственность разложения Лорана 214
 Естественная граница функции 288
- Жидкости поток 227
 Жордана линия 47
 — — гладкая, кусочно-гладкая 143
- Замкнутая область 47, 53
 Звездообразная область 419
 Звездообразности граница 419—420
 Звездообразные функции 420
- Иенсена и Якоби формула 279
 Изолированная особая точка 215, 220
 Инвариант линейного преобразования 113
 Инверсия (преобразование взаимных радиусов-векторов) 23, 110
 Интеграл Коши 166
 — неопределенный (в комплексной области) 157
 — определенный (приложения теории вычетов) 246—248
 — по комплексному переменному 143
 — (интегральная формула) Пуассона 186
 — типа Коши 169, 180
 — — —, предельные значения 174—185
 Интегрирование равномерно сходящегося ряда 146
 Искажения теорема 413
- Кебе константа 412
 Комплексная числовая плоскость 19
 — — сфера 32
 Комплексного переменного плоскость 32
 — — — расширенная 32
 — — функция 45
 Комплексное переменное 45
 — число (модуль, аргумент) 20
 — — (определение) 16
 Комплексные числа 11, 16—44
 Консерватизм углов 99
 Константа Кебе 412
 Конформное отображение 100
 — — (единственность) 338
 — — (общие принципы) 339
 — — I и II рода 100—101
 Косинус 78
 — гиперболический 81
 Коши интеграл 166
 — критерий сходимости последовательности 29
 — неравенства 207—208
 — теорема 148—154, 158
 — — (обобщение) 164—166
 — формула 166, 168
 Коши — Адамара формула 63
 Коши — Римана условия 74
 Кратная точка, кратность 26
 Кратный нуль 207
 — полюс 216
 Критерий Коши (сходимости последовательности) 29
 — сходимости бесконечного произведения 267
 Критические точки 89
 — — потока 232
 Круг сходимости 61
- Ландау теорема 260
 Лапласа уравнение 76
 Лежандра соотношение (тождество) 310
 Лемма Гейне — Бореля 52—53
- Линейная часть отображения 103
 — — приращения 72
 — функция 108
 — — общая 110
 — — целая 108
 Линейное преобразование 108
 — — (различные типы) 120
 Линия Жордана, 47
 — замкнутая 48
 — непрерывная 47
 — — гладкая 143
 — — кусочно-гладкая 143
 — уровня 229
 Липшица — Гельдера условие 179
 Лиувилля теорема 208
 Лобачевского геометрия 127
 Логарифм 86
 Логарифмическая функция 169
 — — (конформное отображение) 138
 Логарифмический вычет 243
 Локусдромическое преобразование 121
 Лорана разложение (в окрестности бесконечно удаленной точки) 222
 — ряд 213
- Максимального модуля принцип 203—204
 Мероморфная функция 226
 — — (изображение в виде отношения двух целых функций) 276—277
 Миттаг-Леффлера задача 277
 Многозначные функции 45, 291
 — — (ветви) 87
 Многозначная область 48
 Многоугольник (отображение) 395
 Множество связанное 290
 Множитель двойной точки 124
 Модуль комплексного числа 20
 — сложения 17
 — умножения 17
 Морера теорема 173
 Муавра формула 22
- Наибольший предел последовательности 62
 Невихревой поток жидкости 228
 Недостижимые точки 387
 Неевклидов радиус 129
 — угол параллелизма 133
 — центр 129
 Неевклидова длина кривой 129
 — — окружности 132—133
 — — окружность 129
 — — площадь 130
 — — круга 134
 — — треугольника 134
 Неевклидово расстояние 127
 Неограниченная область 49
 — — последовательности 27
 Неопределенный интеграл в комплексной области 157
 Неподвижные (двойные) точки преобразования 120, 123
 Непрерывная линия 47
 — функция в области 50
 — — — точке 50
 Непрерывность равномерная 52
 — функции вдоль кривой 52
 — — в замкнутой области 52
 Неравенства Коши 207—208
 Неравенство Буняковского 389
 — Шоттки 261
 — — обобщенное 263
 Нормальная форма линейного преобразования 120
 Нормированная функция 407

- Нуль кратный 207
 — простой 207
 — функции 206
 Нуль-множество 179
 Нуля порядок 207
- Области сохранения принцип 343
 Область 47
 — двухсвязная, трехсвязная 49
 — замкнутая 49
 — звездобразная 419
 — изменения комплексного переменного 45
 — многосвязная 48
 — ограниченная, неограниченная 49
 — однолиственности 83
 — односвязная 48
 — — (конформное отображение) 376
 — существования функции 290
 — сходимости степенного ряда 58
 Обратная функция 46, 83
 Обтекание круглого цилиндра 230
 Ограниченная область 49, 53
 — последовательность 27
 Однозначная функция 45, 290
 Однозначного соответствия принцип 344
 Однолистная функция 82
 — — (общие свойства) 407
 Однолиственности область 83
 Односвязная область 48
 — — (конформное отображение) 376
 Окружность бесконечно удаленной точки 32
 — изолированной особой точки 221
 — точки 26
 Окружность фундаментальная 127
 Определенные интегралы (приложения теории вычетов) 246—248
 Основная теорема алгебры 227, 244
 — о вычетах 238
 Основной параллелограмм 295
 Особая точка 198, 215
 — — изолированная 215
 — — (существенно особая) 215, 218
 — — устранимая 215, 223
 Отношение ангармоническое 113
 Отталкивающая двойная точка 124
- Парабола 367
 Параболическое преобразование 122
 Парадокс Бернулли и Лейбница 13
 Параллелограммы периодов 295
 Параллельные линии в геометрии Лобачевского 127
 Параллельный перенос 105
 Первоначальные факторы 273
 Переменное комплексное 45
 Период 294
 Пикара теорема 256, 260, 263
 Плоскость комплексная 19
 — комплексного переменного 32
 — — расширенная 32
 — числовая 19
 Площадей внешняя и внутренняя теоремы 407—410
 Поверхность риманова 93
 Поворот и растяжение 21
 Подобия преобразования 109
 Показательная форма комплексного числа 80
 — функция 78, 290
 — — (конформное отображение) 138
 Поле векторное 227
 Полная аналитическая функция (по Вейерштрассу) 286—290
 Полюс 215, 216
 — (в бесконечно удаленной точке) 223
- Полюс кратный 216
 — простой 216
 Полюса порядок 216
 Пояселе точки 129
 Порядок нуля 207
 — точки разветвления 90
 Последовательность комплексных чисел 27
 — неограниченная 27
 — ограниченная 27
 — сходящаяся 28
 Потенциал скоростей 229
 Поток жидкости 227
 Потока функция 230
 — — характеристическая 230
 Правильная аналитическая дуга 350
 — точка 198
 — часть ряда Лорана 213
 Предел последовательности (наибольший) 62
 — функции 49
 Предельная точка 26
 Предельное число 26
 Преобразование (см. соответствующее название преобразования)
 Признак равномерной сходимости ряда 57
 Примитивная функция 157
 Принцип (см. соответствующее название принципа)
 Притягивающая точка 123
 Продолжение аналитическое 286
 — — гармонической функции 352
 — — (принцип Шварца) 351
 Произведение бесконечное 265
 — — комплексных чисел, геометрическое построение 24
 — — рядов 41
 Производная (геометрический смысл) 97, 99
 — функции комплексного переменного 70
 Производные высших порядков 172
 Простейшие дроби 227
 Простой нуль 207
 — полюс 216
 Прямоугольник (отображение) 389
 Прямоугольный треугольник (отображение) 404
 Пуассона интегральная формула 186
- Равнобедренный прямоугольный треугольник (отображение) 404
 Равномерная непрерывность 52
 — — — сходимость ряда 55
 — — — (признак) 57
 — — — степенного ряда 66
 Равномерно сходящийся ряд (интегрирование) 146
 Равносторонний треугольник (отображение) 403
 Равносторонняя гипербола (отображение) 365
 Радикал 86
 — (конформное отображение) 135
 Радиус сходимости 61, 63
 Разветвление точки 89
 — (порядок) 90
 Разложение аналитической функции в степенной ряд 196
 — рациональной функции на простейшие дроби 227
 Разность комплексных чисел 18
 — рядов 38
 Разрывные функции 54
 Растяжение и поворот 21
 Растяженный постоизство (при конформном отображении) 100

- Расходящиеся бесконечные произведения 265
 — ряды 35
 Расширенная плоскость комплексного переменного 32
 Рациональная функция (разложение на простейшие дроби) 227
 — целая функция 224
 Римана сфера 32
 — теорема 377
 Римана — Коши условия 74
 Римана — Шварца принцип симметрии 345—350
 — — — (обобщение) 350
 Риманова поверхность 93
 Руше теорема 245
 Ряд Лорана 213
 — Тейлора 195
 Ряды абсолютно сходящиеся 37
 — аналитических функций 190
 — двойные 38
 — (интегрирование равномерно сходящегося ряда) 146
 — колеблющиеся 35
 — комплексных чисел 35—42
 — расходящиеся 35
 — собственно расходящиеся 35
 — (сложение и вычитание) 38
 — сходящиеся 35
 — — равномерно 55
 — — (необходимый признак) 36
 — — условно 37
 — (умножение) 41
 — функций 54—58
- Связное множество 290
 Сигма функции 304
 Симметрии принцип (Римана — Шварца) 345—350
 — — (для гармонической функции) 352—354
 — — (обобщение) 350
 Симметричные точки (относительно окружности) 23, 110
 Синус 78
 — гиперболический 81
 Сложение комплексных чисел 16
 — — — (геометрическое истолкование) 20
 — рядов 38
 Соответствие границ при конформном отображении 383
 Сопряженные гармонические функции 77
 — комплексные числа 17
 Сохоцкого теорема о значениях функции вблизи существенно особой точки 218
 — формулы 178
 Сохранение областей, принцип 343
 Степенная функция (конформное отображение) 135
 Степенные ряды 58
 — — (дифференцирование) 77
 — — (равномерная сходимости) 66
 Стереографическая проекция 32
 Сумма рядов 38
 Существенно особая точка 215, 218
 — — — (в бесконечности) 223
 Сфера числовая комплексная (сфера Римана) 32
 Сходимости круг 61
 — область (степенного ряда) 58
 Сходимость бесконечного произведения (основной критерий) 267
 — ряда (равномерная) 55
 — — (признак) 57
 Сходящаяся последовательность комплексных чисел 28
- Сходящиеся бесконечные произведения 265
 Сходящиеся ряды 35
 — — (необходимый признак) 36
- Теорема (см. соответствующее название теоремы)
 Трансцендентная точка разветвления 90
 — целая функция 225
 Треугольник (отображение) 400
 Трехсвязная область 49
 Тригонометрическая форма комплексного числа 21
 Тригонометрические функции 78
 Тейлора ряд 195
 Тэта-функции 319
- Угол параллелизма (неевклидов) 133
 Умножение комплексных чисел 16
 — — — (геометрическое истолкование) 24
 — рядов 41
 Уравнение Лапласа 76
 Уровня линии 229
 Условно сходящийся ряд 37
- Формула (см. соответствующее название формулы)
 Фундаментальная окружность 127
 Функции (см. соответствующее название функции)
 Функциональные ряды 54—58
- Характеристическая функция потока 230
 Христоффеля — Шварца формула 396
- Целая линейная функция 108
 — рациональная функция 224
 — трансцендентная функция 225
 Циркуляция потока 228
- Числовая комплексная плоскость 19
 — сфера 32
 Чисто циркулярный поток 232
- Шварца лемма 358, 360—362
 — принцип аналитического продолжения 351
 Шварца — Римана принцип (обобщение) 350
 — — — симметрии 345—350
 Шварца — Христоффеля формула 396
 Шоттки неравенство 261
 — — — (обобщенное) 263
- Эйлера — Даламбера условия 74
 Эйлера тождество 13
 — формулы 79—80
 Экстремальная проблема вторая 426
 — — первая 425
 Экстремальные свойства функций 423
 Элемент 336
 Эллипсе (отображение) 371
 Эллиптические тэта-функции 319
 — функции 294
 — — (аналитические представления) 311
 — — Вейерштрасса 303
 — — второго порядка 301
 — — (основные теоремы) 296
 — — порядка s 299
 — — Якоби 317, 326, 393
 Эллиптическое преобразование 121
 — — (геометрическая интерпретация) 125
- Якоби и Иенсена формула 279
 — функции эллиптические 317, 326, 393