
ГЛАВА 3

Понятийные основы квантовой теории

Природа — сфинкс. И тем она верней
Своим искусом губит человека,
Что, может статься, никакой от века
Загадки нет и не было у ней.

Ф.И. Тютчев

Нетерпеливый читатель может пропустить и эту главу, как и предыдущие, но *эта глава в книге самая главная*. Здесь всё ещё нет последовательного формального изложения квантовой механики, а даны ключевые *идеи*, следствиями которых можно пользоваться по-обезьяньи без понимания. Однако, если квантовая теория и в самом деле нужна читателю, то лучше запоминать не столько формулы, сколько *идеи*. Если же вы хотите не просто считать, а ещё и понимать, то лучше с этими идеями не только ознакомиться, но и обдумать их ещё раз, уже познакомившись с аппаратом квантовой теории.

3.1. Вероятности и амплитуды вероятности

Квантовая механика принципиально отличается от классической. Это различие состоит вовсе не в наличии в квантовой механике вероятностей, поскольку и классическая механика может быть переформулирована так, что вероятности там появятся. Мы можем описывать поведение классической системы как эволюцию облака вероятностей в фазовом пространстве (в пространстве координат и импульсов), причём для неустойчивых систем на больших временах на более подробное описание мы рассчитывать не можем.

На взгляд автора, главным отличием квантовой теории является то, что помимо вероятностей p в ней появляются *амплитуды вероятности* A —

комплексные числа, квадрат модуля которых задаёт вероятность (или плотность вероятности)

$$p = |A|^2 = (\operatorname{Re}A)^2 + (\operatorname{Im}A)^2 = A^*A. \quad (3.1)$$

Таким образом, вероятность взаимнооднозначно определяется *модулем амплитуды вероятности*, тогда как *фаза амплитуды вероятности* оказывается тем существенным элементом квантовой теории, который полностью теряется в классике.

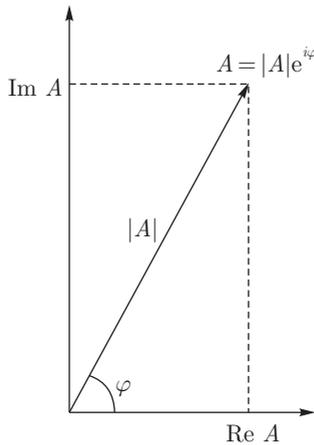


Рис. 3.1. $|A|^2$ — то, что было в классике, φ — квантовые эффекты.

Волновая функция даёт максимально полное описание квантовой системы, но она задаёт только лишь амплитуды вероятностей для всевозможных результатов измерений. Мы можем считать, что аргументами волновой функции являются всевозможные результаты измерений некоторого набора величин (*полного набора независимых наблюдаемых*), а значения функции задают соответствующие амплитуды. Причём нет необходимости помещать в аргументы функции все возможные величины, надо ограничиться лишь теми, которые *одновременно измеримы*, т. е. такими, что измерение одной величины из набора не влияет на все остальные, но набор таких величин должен быть *полным*, т. е. таким, чтобы любая физическая величина, измеримая одновременно с аргументами волновой функции, выражалась через них¹. Таким образом, понятие волновой функции сводится к понятию амплитуды вероятности.

¹Мы ещё вернёмся далее к обсуждению волновой функции.

Вероятности в классической механике обусловлены нашим незнанием точного состояния системы. В квантовой механике невозможно знать о системе больше, чем её волновая функция. Тем не менее, многое в поведении амплитуд вероятности можно понять по аналогии с поведением вероятностей.

В ряде случаев, когда в классике мы складывали или умножали вероятности, в квантовой механике надо аналогично складывать или умножать амплитуды вероятности.

Волновая функция аналогична распределению вероятностей, и подобно ему задаёт вероятность всех возможных исходов измерения некоторого набора величин, полностью задающего состояние системы. То есть если все эти величины *определены*, то состояние системы определяется однозначно. В классической механике других состояний систем и не бывает. В квантовой механике такие состояния образуют лишь базис в линейном пространстве состояний.

3.1.1. Сложение вероятностей и амплитуд

Если какое-то событие может произойти двумя различными способами, и мы знаем вероятность каждого из этих способов, то классическая вероятность события вычисляется как сумма вероятностей этих способов.

Если из начального состояния 1 классическая система попадает в конечное состояние 3 через промежуточное состояние 2 или 2', то мы можем записать:

$$P_{(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \text{ или } 1 \rightarrow 2' \rightarrow 3)} = P_{(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)} + P_{(1 \rightarrow 2' \rightarrow 3)}. \quad (3.2)$$

Если конечный результат чуть-чуть различается и классическая система в одном случае в итоге попадает в состояние 3, а в другом в чуть-чуть отличное состояние 3', то вероятности по-прежнему складываются:

$$P_{(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \text{ или } 1 \rightarrow 2' \rightarrow 3')} = P_{(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)} + P_{(1 \rightarrow 2' \rightarrow 3')}. \quad (3.3)$$

Таким образом, в классике мы можем не различать похожие результаты 3 и 3' и произвольным образом огрублять конечный результат, т. к. на вычислении вероятностей это не скажется.

В квантовой механике формулу (3.2), для случая *когда конечный результат в точности совпадает*, необходимо заменить аналогичной формулой для амплитуд

$$A_{(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \text{ или } 1 \rightarrow 2' \rightarrow 3)} = A_{(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)} + A_{(1 \rightarrow 2' \rightarrow 3)}, \quad (3.4)$$

а формулу (3.3), для случая *когда конечный результат хотя бы чуть-чуть отличается*, следует оставить без изменений.

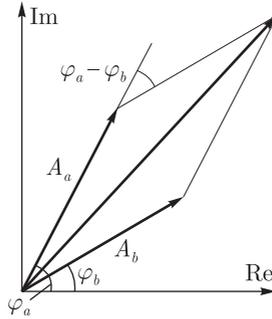


Рис. 3.2. Сложение амплитуд вероятности.

Возводя формулу (3.4) в квадрат, получаем (для упрощения записи здесь $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$ обозначается как a , а $(1 \rightarrow 2' \rightarrow 3)$ — как b)

$$\begin{aligned}
 p_{(a \text{ или } b)} &= |A_{(a \text{ или } b)}|^2 = \\
 &= |A_a|^2 + |A_b|^2 + (A_a^* A_b + A_a A_b^*) = \\
 &= |A_a|^2 + |A_b|^2 + 2|A_a||A_b| \cos(\varphi_a - \varphi_b) = \quad (3.5) \\
 &= p_a + p_b + 2\sqrt{p_a p_b} \cos(\varphi_a - \varphi_b).
 \end{aligned}$$

Здесь $\varphi_a = \arg A_a$, $\varphi_b = \arg A_b$ — фазы амплитуд вероятности. В третьей строчке формулы мы воспользовались теоремой косинусов.

Формула (3.5) отличается от (3.2) лишним членом, который называется *интерференционным членом*:

$$(A_a^* A_b + A_a A_b^*) = 2|A_a||A_b| \cos(\varphi_a - \varphi_b) = 2\sqrt{p_a p_b} \cos(\varphi_a - \varphi_b). \quad (3.6)$$

Интерференционный член, как правило, не является малой поправкой, он сравним по величине с классическими слагаемыми. В зависимости от *разности фаз* между амплитудами интерференционный член может быть положительным, отрицательным или нулём. Так, если $|A_a| = |A_b|$, то квантовая вероятность $p_{(a \text{ или } b)} = 2|A_a|^2(1 + \cos(\varphi_a - \varphi_b))$ может меняться от нуля до удвоенной классической вероятности $4|A_a|^2$.

Почему мы не видим интерференционного члена в классических опытах? Это может происходить по одной из двух причин.

1. В *классических опытах* мы не можем зафиксировать фазы амплитуд вероятности, которые случайно меняются от опыта к опыту. В результате происходит усреднение по фазе, и интерференционный член исчезает.

Если мы плохо различаем похожие, но не совпадающие состояния системы (как в классике), то мы вместо реальной интерференционной картины наблюдаем усреднённую (сглаженную), а поскольку интерференционный член оказывается быстро осциллирующим, при усреднении по нескольким похожим результатам он может исчезнуть.

2. Другая причина исчезновения интерференционного члена — наблюдение (неконтролируемое взаимодействие системы с окружением, возможно произвольное), которое в принципе позволяет определить как именно система прошла из начального состояния в конечное. Таким образом, попадание системы в одну точку разными путями будет различимым, поскольку информация о пути либо известна, либо «записана» в окружении. А для различимых событий мы должны складывать не амплитуды, а вероятности, т. е. интерференционный член исчезает.

3.1.2. Умножение вероятностей и амплитуд

Если событие происходит «в два приёма», т. е. если нас интересует вероятность того, что система из состояния 1 перейдёт сначала в состояние 2, а потом в состояние 3, то в классической теории вероятности нам надо умножить вероятность перехода $1 \rightarrow 2$ на вероятность перехода $2 \rightarrow 3$:

$$P_{(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)} = P_{(1 \rightarrow 2)} P_{(2 \rightarrow 3)}. \quad (3.7)$$

В квантовой теории данная формула переносится на амплитуды вероятности

$$A_{(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)} = A_{(1 \rightarrow 2)} A_{(2 \rightarrow 3)}. \quad (3.8)$$

Подобно тому, как вероятность $p_{(1 \rightarrow 2)}$ того, что после 1 произойдёт 2, называют *условной вероятностью*, амплитуду $A_{(1 \rightarrow 2)}$ естественно назвать *условной амплитудой вероятности*.

Взяв абсолютные величины от левой и правой частей формулы (3.8) и возведя их в квадрат, мы получим в точности формулу (3.7). Поэтому может возникнуть вопрос о том, получили ли мы что-нибудь новое при замене формулы для вероятности на формулу для амплитуд. Однако вероятности не содержат информации о фазах, поэтому разница между умножением вероятностей и амплитуд станет важной, если амплитуду, полученную как произведение, нам придётся складывать с какой-то другой амплитудой.

3.1.3. Объединение независимых подсистем

Ещё один случай умножения вероятностей — объединение независимых подсистем. Пусть одна подсистема описывается распределением $\rho_1(x)$,

а вторая — $\varrho_2(y)$, тогда совместное распределение задаётся их произведением. Такое произведение называется *тензорным произведением*:

$$\varrho(x, y) = \varrho_1(x) \cdot \varrho_2(y) \quad \Leftrightarrow \quad \varrho = \varrho_1 \otimes \varrho_2.$$

Аналогично если одна подсистема описывается волновой функцией $\psi_1(x)$, а вторая — $\psi_2(y)$, то совместная волновая функция задаётся их тензорным произведением:

$$\psi(x, y) = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \psi_1 \otimes \psi_2.$$

Ниже мы ещё вернёмся к обсуждению описания состояния сложной системы и её подсистем.

3.1.4. Распределения вероятностей и волновые функции при измерении

Сейчас мы приведём правила изменения распределения вероятностей при классическом измерении и волновой функции при квантовом.

В обоих случаях в результате измерения из плотности вероятности (как функции измеряемых величин) или волновой функции (амплитуды вероятности, как функции измеряемых величин) вырезается кусок, который соответствует результату измерения.

Описания обеих процедур ведётся почти одинаковыми словами. Различия в описаниях выделяются жирным шрифтом.

Классический случай

Пусть **классическая** система находится **в одном из** состояний, нумеруемых параметром x , и нам задано **распределение** вероятностей, т. е. если x дискретно, то мы знаем вероятность p_x каждого значения x , а если x непрерывно, то мы знаем плотность вероятности $\varrho(x)$, как функцию от x . При этом суммарная вероятность, получаемая суммированием (интегрированием) вероятности (плотности вероятности) по всем значениям x , равняется 1:²

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x) dx = 1.$$

²В этом разделе мы будем считать, что переменная x непрерывна, т. е. для любого конкретного значения x его вероятность равна нулю, хотя плотность вероятности может от нуля отличаться. Если есть некоторый дискретный набор W значений x , для которых вероятности конечны, то к соответствующим интегралам придётся добавлять суммы. Теперь суммарная

И пусть мы провели над этой **классической** системой измерение, которое установило, что x принадлежит определённому отрезку $x \in [a, b]$. Вероятность, что измерение даст такой результат, составляет

$$p_{[a,b]} = \int_a^b \varrho(x) dx.$$

Сразу после такого измерения **вероятность (плотность вероятности)** любого значения x вне заданного отрезка обратилась в нуль. Для точек внутри отрезка **отношения вероятностей** не изменились. Таким обра-

вероятность будет задаваться так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x) dx + \sum_{x \in W} p_x = 1.$$

Мы можем упростить формулы для *классических* вероятностей, избавившись от сумм, если воспользуемся δ -функцией Дирака. $\delta(x)$ — бесконечно узкий и бесконечно высокий пик, сидящий в нуле, такой, что интеграл от него равен 1. δ -функция — не настоящая функция, а *обобщённая*. Значение какой-либо обобщённой функции $f(x)$ в точке x_0 может быть не определено, но зато для всякой «достаточно хорошей» функции $\varphi(x)$ определён интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Определением δ -функции является соотношение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Мы можем модифицировать распределение вероятностей так, чтобы оно также описывало вероятности дискретных событий:

$$\varrho_M(x) = \varrho(x) + \sum_{x_0 \in W} p_{x_0} \cdot \delta(x - x_0).$$

Теперь мы можем написать суммарную вероятность так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_M(x) dx = 1.$$

Следует заметить, что **данный** способ избавления от сумм не сработает для амплитуд вероятностей, т. к. для этого пришлось бы извлекать из δ -функций квадратный корень, а извлечение корня из обобщённых функций не определено.

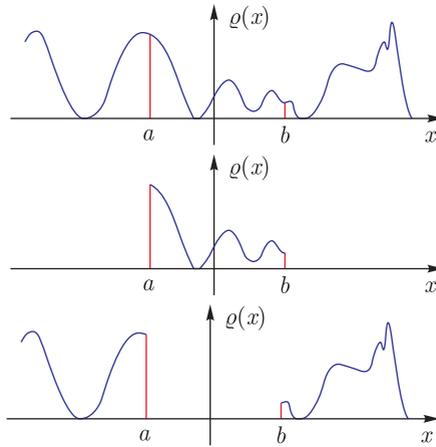


Рис. 3.3. Изменение распределения вероятностей при положительном и отрицательном результатах измерения.

зом, из первоначального **распределения вероятностей** «вырезается» отрезок $[a, b]$, все **вероятности** вне его обнуляются, а все **вероятности** на этом отрезке делятся на $p_{[a,b]}$, чтобы суммарная вероятность нового распределения снова оказалась единицей. Это соответствует переходу к **условным вероятностям**, описывающим состояние системы, *при условии, что реализовался данный исход измерения*.

Квантовый случай

Пусть **квантовая** система находится в **суперпозиции** состояний, нумерованных параметром x , и нам заданы **амплитуды** вероятностей, т. е. если x дискретно, то **возведение амплитуды по модулю в квадрат** даёт вероятность каждого значения x , а если x непрерывно, то **возведение амплитуды по модулю в квадрат** даёт плотность вероятности как функцию от x . При этом суммарная вероятность, получаемая суммированием (интегрированием) вероятности (плотности вероятности) по всем значениям x , равняется 1.

И пусть мы провели над этой **квантовой** системой измерение, которое установило, что x принадлежит определённому отрезку $x \in [a, b]$. Вероятность, что измерение даст такой результат, составляет

$$p_{[a,b]} = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx.$$

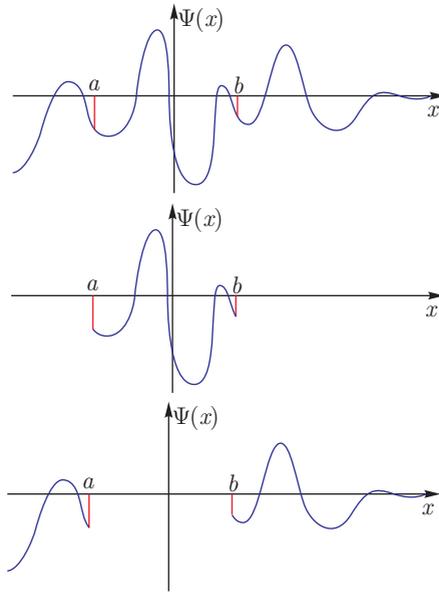


Рис. 3.4. Изменение волновой функции при положительном и отрицательном результатах измерения.

Сразу после такого измерения **амплитуда вероятности** любого значения x вне заданного отрезка обратилась в нуль. Для точек внутри отрезка отношения **амплитуд вероятностей** не изменились. Таким образом, из первоначальной **волновой функции** «вырезается» отрезок $[a, b]$, все **амплитуды** вне его обнуляются, а все **амплитуды** на этом отрезке делятся на $\sqrt{P_{[a,b]}}$, чтобы суммарная вероятность нового распределения снова оказалась единицей. Это соответствует переходу к **условным амплитудам**, описывающим состояние системы, *при условии, что реализовался данный исход измерения.*

Измерение и проектор

Операцию вырезания отрезка $[a, b]$ из волновой функции мы можем описать с помощью линейного оператора $\hat{P}_{[a,b]}$:

$$\hat{P}_{[a,b]}\psi(x) = I_{[a,b]}(x)\psi(x), \quad (3.9)$$

где I_W — характеристическая функция множества W

$$I_W(x) = \begin{cases} 1, & x \in W, \\ 0, & x \notin W. \end{cases} \quad (3.10)$$

Оператор $\hat{P}_{[a,b]}$ является *проектором* (т. е. он проецирует все волновые функции на некоторое линейное подпространство волновых функций), что означает, что двукратное действие этого оператора даёт тот же результат, что и однократное

$$\hat{P}_{[a,b]}\hat{P}_{[a,b]}\psi(x) = I_{[a,b]}^2(x)\psi(x) = I_{[a,b]}(x)\psi(x) = \hat{P}_{[a,b]}\psi(x). \quad (3.11)$$

Определяя произведение операторов как оператор, действие которого на произвольную волновую функцию даёт тот же результат, что и последовательное действие (справа налево) всех сомножителей, мы можем записать определение проектора следующим образом:

$$\hat{P}^2 = \hat{P}. \quad (3.12)$$

В дальнейшем мы будем иметь дело и с другими линейными операторами, действующими на волновые функции, при этом очень многие физически осмысленные операторы окажутся связаны с проекторами.

3.1.5. Амплитуда при измерении и скалярное произведение

Пусть волновая функция $\Psi(n)$ задаёт амплитуду вероятности обнаружить систему во взаимоисключающих состояниях ϕ_n , нумеруемых дискретным параметром n . Состояния ϕ_n образуют *максимальный набор взаимоисключающих состояний*, т. е. если система находится в состоянии ϕ_n , то она не может быть найдена в состоянии ϕ_k ($k \neq n$), причём набор не может быть расширен.

Поскольку суммарная вероятность единица, следует положить условие нормировки на единицу:

$$\|\Psi\|^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_n |\Psi(n)|^2 = 1.$$

Таким образом, у нас есть естественная операция взятия скалярного квадрата волновой функции. Имея операцию взятия скалярного квадрата, мы можем ввести операцию взятия скалярного произведения:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_n \Phi^*(n) \Psi(n).$$

Компонента волновой функции $\Psi(n)$ может быть записана как скалярное произведение функции Ψ на базисную функцию ϕ_n ($\phi_n(k) = \delta_{nk}$), которая также нормирована на единицу:

$$\Psi(n) = \langle \phi_n | \Psi \rangle = \langle \Psi | \phi_n \rangle^*, \quad \langle \phi_n | \phi_k \rangle = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Мы уже знаем физический смысл компоненты $\Psi(n)$ волновой функции, как амплитуды вероятности того, что система, находящаяся в состоянии Ψ , будет обнаружена в состоянии ϕ_n , и это позволяет нам установить физический смысл скалярного произведения двух нормированных на единицу волновых функций. Аргументы скалярного произведения равноправны (с точностью до комплексного сопряжения), так что $\Psi^*(n) = \langle \Psi | \phi_n \rangle$ — амплитуда вероятности обратного процесса, т. е. амплитуда того, что система, находившаяся в состоянии ϕ_n , будет найдена в состоянии Ψ .

Мы можем физически интерпретировать формулу для скалярного умножения волновых функций в терминах умножения и сложения амплитуд вероятности.

Пусть Ψ определяет начальное состояние системы, а Φ — конечное ($\|\Psi\|^2 = \|\Phi\|^2 = 1$). Мы рассматриваем измерение, которое должно ответить на вопрос «Находится ли система в состоянии Φ ?» Прыжок в состояние Φ мы будем рассматривать как «благоприятный» результат измерения.

Можно считать, что переход из состояния Ψ в состояние Φ осуществляется через любое промежуточное состояние ϕ_n , причём определить через какое именно из состояний ϕ_n прошла система в принципе невозможно.

Амплитуда перехода из Ψ в Φ через ϕ_n задаётся как произведение амплитуд перехода из Ψ в ϕ_n и из ϕ_n в Φ :

$$A_{\Phi \leftarrow \phi_n \leftarrow \Psi} = \underbrace{\Phi^*(n)}_{\Phi \leftarrow \phi_n} \underbrace{\Psi(n)}_{\phi_n \leftarrow \Psi}.$$

Суммарная амплитуда перехода задаётся суммой (интегралом, в случае непрерывного спектра по n) по всем промежуточным состояниям ϕ_n :

$$A_{\Phi \leftarrow \Psi} = \sum_n \underbrace{\Phi^*(n) \Psi(n)}_{\Phi \leftarrow \phi_n \leftarrow \Psi}. \quad (3.13)$$

Вычисление амплитуды перехода может быть представлено рис. 3.5, который по существу является другой записью формулы (3.13).

Таким образом, оказывается, что для волновых функций имеется физически осмысленное скалярное произведение, дающее для нормированных на единицу волновых функций амплитуду вероятности перехода из

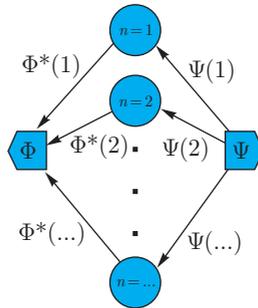


Рис. 3.5. Переход от Ψ к Φ совершается через все возможные взаимоисключающие состояния n по стрелкам с соответствующими амплитудами согласно (3.13).

одного состояния в другое при измерении. Сама структура формулы скалярного произведения имеет физический смысл, показывая, что переход осуществляется через все возможные взаимоисключающие промежуточные состояния.

Наборы амплитуд $\Psi(n)$ и $\Phi(n)$ можно рассматривать как компоненты комплексных векторов. Тогда замена базиса будет соответствовать замене набора взаимоисключающих состояний ϕ_k (базиса) новым набором состояний (базисом) ϕ'_k , который состоит из суперпозиций (линейных комбинаций) состояний старого базиса. Разложение по новому базису будет ничуть не хуже, чем разложение по старому, если новый базис также будет ортонормированным, т. е. если скалярное произведение (3.13) будет в нём задаваться прежней формулой.

Оказывается естественным смотреть на волновые функции как на комплексные векторы (возможно, бесконечномерные). Аргументы волновых функций при этом нумеруют компоненты вектора в конкретном базисе, а значение волновой функции в точке выступает как компонента вектора.

3.1.6. Марковский процесс и квантовая эволюция*

Марковский процесс — это случайный процесс, поведение которого зависит только от текущего состояния системы. Пусть $p(n, t)$ — вероятность состояния номер n (из некоторого дискретного набора³) в момент

³В случае, если состояния нумеруются непрерывной переменной x , надо перейти к плотности вероятности $\rho(x, t)$ и от суммы к интегралу, причём функция $M(x, x')$ будет обобщённой, но идейно это нам ничего не даст, поэтому мы пока не будем усложнять рассмотрение.

времени t . Марковский процесс с дискретным временем с шагом δt можно описать с помощью матрицы $\delta t \cdot M(n, n')$, недиагональные компоненты которой задают условные вероятности переходов из n' в n , а диагональные — условные вероятности ухода из данного состояния со знаком минус:

$$p(n, t + \delta t) = p(n, t) + \delta t \cdot \sum_{n'} M(n, n') p(n', t). \quad (3.14)$$

Если устремить шаг по времени к нулю $\delta t \rightarrow 0$, то получается *линейное* уравнение для марковского процесса с непрерывным временем:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n, t) = \sum_{n'} M(n, n') p(n', t). \quad (3.15)$$

Просуммировав уравнение по n с учётом сохранения вероятности $\sum_n p(n, t) = 1$ и произвольности $p(n, t)$ получаем условие сохранения вероятности

$$\sum_n M(n, n') = 0. \quad (3.16)$$

Помимо этого имеются условия на положительность вероятностей и условных вероятностей:

$$M(n, n') \geq 0, \quad n \neq n' \quad (3.17)$$

$$M(n, n) \leq 0, \quad (3.18)$$

$$p(n, t) \geq 0. \quad (3.19)$$

Квантовый аналог марковского процесса, *когда над системой не совершается наблюдений*, можно получить заменив вероятности $p(n, t)$ на амплитуды $\psi(n, t)$, а условные вероятности в единицу времени $M(n, n')$ на условные амплитуды в единицу времени $A(n, n')$. Для дискретных состояний получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(n, t) = \sum_{n'} A(n, n') \psi(n', t). \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) — это *временное уравнение Шрёдингера*.

Как и уравнение марковского процесса, уравнение Шрёдингера всегда *линейно*.

Согласно традициям квантовой механики матрица условных вероятностей $A(n, n')$ записывается через матрицу оператора Гамильтона $H(n, n')$

$$A(n, n') = -\frac{i}{\hbar} H(n, n').$$

Уравнение Шрёдингера (3.20) переписывается с следующим виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(n, t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_{n'} H(n, n') \psi(n', t). \quad (3.21)$$

Условие сохранения вероятности в данном случае оказывается сложнее

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(n, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \psi^*(n, t) \psi(n, t)}{\partial t} = \psi^*(n, t) \frac{\partial \psi(n, t)}{\partial t} + \psi(n, t) \frac{\partial \psi^*(n, t)}{\partial t} = \\ &= \psi^*(n, t) \sum_{n'} A(n, n') \psi(n', t) + \psi(n, t) \sum_{n'} A^*(n, n') \psi^*(n', t). \end{aligned}$$

$$\sum_n \frac{\partial p(n, t)}{\partial t} = 0 = \sum_{n, n'} \psi^*(n, t) (A(n, n') + A^*(n', n)) \psi(n', t).$$

В силу произвольности $\psi(n, t)$ получаем условие сохранения вероятности

$$A(n, n') + A^*(n', n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H(n, n') = H^*(n', n). \quad (3.22)$$

Однако, условия положительности, аналогичные (3.17), (3.18), (3.19) в квантовом случае отсутствуют! Это связано с тем, что вероятности $p(n, t) = |\psi(n, t)|^2$ положительны по определению, а промежуточные переходы не наблюдаются, а потому описываются не вероятностями, а амплитудами.

Это приводит к важному физическому различию. Классический марковский процесс либо тривиален ($M(n, n') \equiv 0$), либо необратим, т. к. при изменении знака времени матрица $M(n, n')$ должна менять знак, что запрещено условиями положительности (3.17), (3.18). Уравнение Шрёдингера (квантовый аналог марковского процесса) наоборот, всегда обратимо, т. к. условие (3.22) сохраняется при изменении знака времени.

3.2. Возможно всё, что может произойти (ф*)

Рассмотрим квантовую эволюцию, описанную выше в разделе 3.1.6 «Марковский процесс и квантовая эволюция*» с другой точки зрения.

Представим себе следующий эксперимент, в котором частицы вылетают из источника и попадают на фотопластинку, на которой возникает интерференционная картина. Пусть вначале между источником и фотопластинкой нет никаких препятствий (рис. 3.6). Теперь поместим между фотопластинкой и источником экран с двумя щелями (рис. 3.7). Чтобы получить

амплитуду вероятности попадания частицы в некоторую точку пластинки, мы должны сложить амплитуды попадания частицы в заданную точку двумя различными способами: через первую щель и через вторую. Каждая из этих амплитуд вычисляется как произведение амплитуды попадания в соответствующую щель и условной амплитуды попадания из этой щели в заданную точку пластинки

$$A_f = A_1 A_{1 \rightarrow f} + A_2 A_{2 \rightarrow f}. \quad (3.23)$$

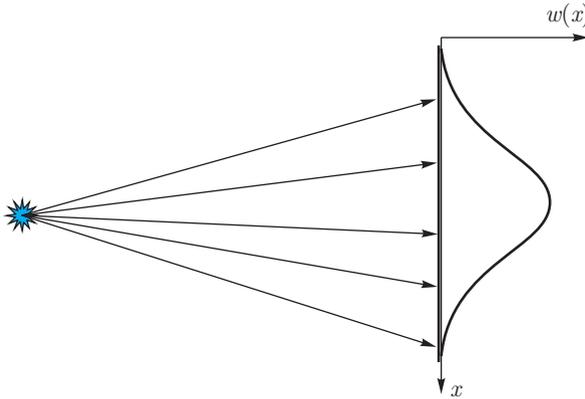


Рис. 3.6. Частицы беспрепятственно падают на экран.

Поставим после экрана с двумя щелями ещё один экран с двумя щелями (рис. 3.8). Теперь амплитуда попадания частицы в щели 1' и 2' определяется по аналогичным формулам:

$$A_{1'} = A_1 A_{1 \rightarrow 1'} + A_2 A_{2 \rightarrow 1'}, \quad A_{2'} = A_1 A_{1 \rightarrow 2'} + A_2 A_{2 \rightarrow 2'}. \quad (3.24)$$

Если подставить эти формулы в (3.23), то получится сумма по всем комбинациям щелей, через которые может пройти частица по пути к фотопластинке:

$$A_f = A_1 A_{1 \rightarrow 1'} A_{1' \rightarrow f} + A_2 A_{2 \rightarrow 1'} A_{1' \rightarrow f} + A_1 A_{1 \rightarrow 2'} A_{2' \rightarrow f} + A_2 A_{2 \rightarrow 2'} A_{2' \rightarrow f}. \quad (3.25)$$

Будем и далее добавлять между источником и фотопластинкой всё новые и новые экраны, а в экранах будем делать всё новые и новые ще-

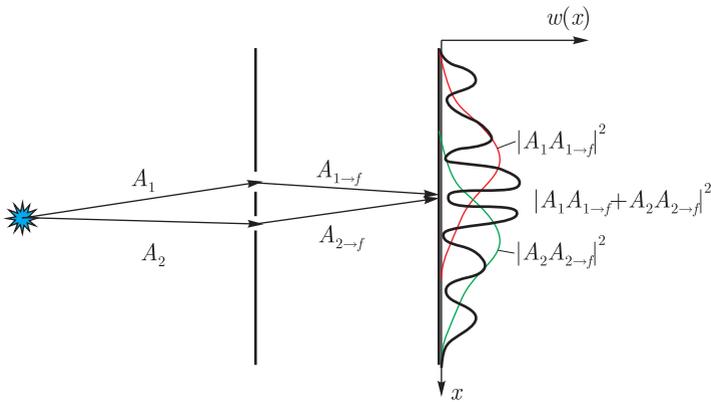


Рис. 3.7. Интерференция на 2 щелях.

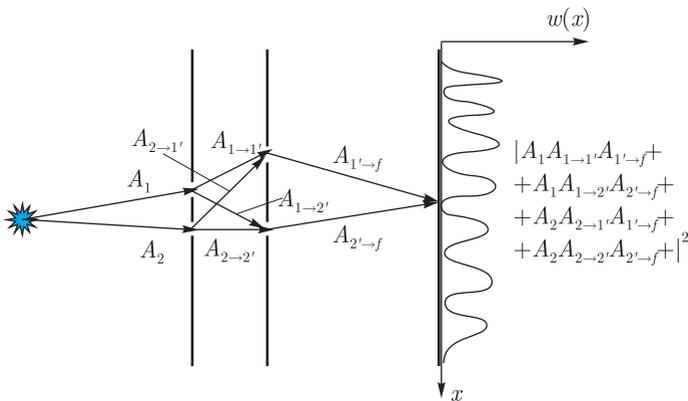


Рис. 3.8. Интерференция на 2 ширмах с 2 щелями каждая.

ли. Амплитуда вероятности попадания частицы в заданную точку фотопластинки даётся всё более и более громоздкими суммами по всем возможным комбинациям щелей, через которые может пройти частица, а каждый член суммы задаётся длинным произведением условных амплитуд вероятности попадания частицы из одной точки в другую.

В пределе мы можем поставить экраны всюду между источником и фотопластинкой, а в каждом экране сделать щели тоже всюду (рис. 3.9). Это соответствует тому, что никаких экранов между источником и пластинкой

больше нет, и мы вернулись к первоначальной ситуации. Зато теперь мы понимаем, что амплитуда попадания частицы из одной точки в другую может быть вычислена суммированием (интегрированием) амплитуд по всем возможным траекториям, по которым частица могла бы пройти. При формализации этих качественных рассуждений мы получим метод фейнмановских интегралов по траекториям, широко применяемый в современной квантовой теории.

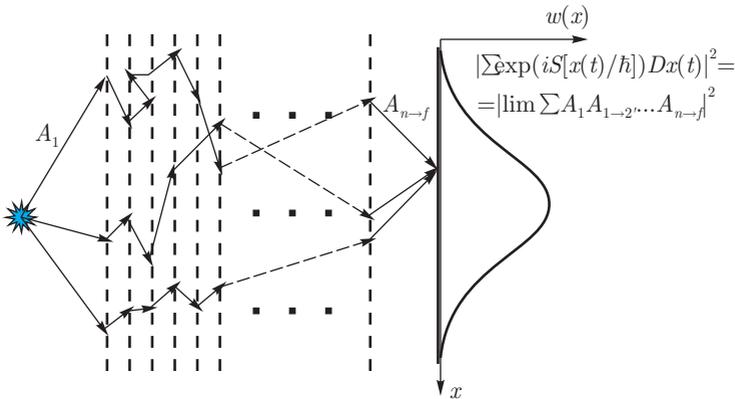


Рис. 3.9. Снова, как в оптике, мы можем считать, что частица распространяется по всем траекториям одновременно, а амплитуда вероятности задаётся как сумма (точнее интеграл) по всем возможным траекториям.

Амплитуда вероятности задаётся как экспонента от действия вдоль траектории

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt\right). \quad (3.26)$$

Амплитуда быстро колеблется при переходе от траектории к траектории, поэтому вклад большинства траекторий взаимно уничтожается. Основной вклад, как правило, дают те траектории, около которых эти колебания замедляются, для которых действие $S[x(t)]$ при малой вариации траектории $\delta x(t)$ меняется мало, т. е. если выполняется условие

$$\begin{aligned} \delta S[x(t)] &= S[x(t) + \delta x(t)] - S[x(t)] + o(\delta x) = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} S[x(t) + \varepsilon \cdot \delta x(t)] \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \forall \delta x(t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

В этом случае вклады соседних траекторий складываются с одинаковой фазой и усиливают друг друга. Условие (3.27) совпадает с принципом экстремального действия в теоретической механике, который, таким образом, в некотором смысле «выводится» из квантовой механики.

При суммировании амплитуд свой вклад вносят и траектории, невозможные с классической точки зрения, например в рассматриваемом выше примере мы учитывали траектории, на которых частица сама собой разворачивается в пустом пространстве, нарушая, тем самым, закон сохранения импульса. Следует учитывать и траектории, для прохождения которых у системы не хватает энергии. С этим связан *туннельный эффект*, позволяющий частице с некоторой вероятностью проходить через потенциальный барьер, для преодоления которого у неё недостаточно энергии.

Метод интегралов по путям естественно обобщается на процессы, в ходе которых частицы могут рождаться, уничтожаться и превращаться друг в друга. В этом случае надо дополнительно просуммировать по всем возможным процессам взаимопревращений частиц. Так, например, для описания рассеяния электрона на электроне надо суммировать амплитуды процессов на рис. 3.10.

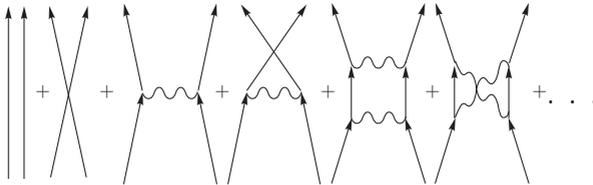


Рис. 3.10. Рассеяние электрона на электроне определяется как суперпозиция следующих процессов: электроны свободно движутся; электроны свободно движутся, но мы их перепутали (поскольку электроны принципиально неразличимы, надо суммировать амплитуды, а не вероятности), электроны обменялись одним виртуальным фотоном (для которого энергия и импульс связаны «неправильным образом»), электроны обменялись одним виртуальным фотоном и перепутались, электроны обменялись сперва одним фотоном, а потом вторым, электроны испустили по фотону, и каждый поглотил «чужой» фотон, и т. д.

(**) Диаграммы на рис. 3.10 являются на самом деле формулами. Каждая линия изображает распространение частицы между начальным и конечным состояниями всеми возможными способами. Интеграл по траекториям, соответствующий одной такой линии (*propagator*), мы можем вычислить один раз, а далее использовать готовое выражение. После этого вычисле-

ние амплитуды процесса будет сводиться к суммированию всех возможных диаграмм, в которых имеются два начальных электрона, два конечных, а все вершины имеют вид как на рис. 3.11⁴.



Рис. 3.11. Вершина для взаимодействия электрона с электромагнитным полем.



Рис. 3.12. Ричард Филлипс Фейнман (1918–1988).

Такие рисунки и соответствующие им амплитуды называются диаграммами Фейнмана. Здесь ровные линии со стрелками обозначают электроны и позитроны, а волнистые — фотоны. Всевозможных промежуточных процессов бесконечно много, но, как правило (в хороших теориях), хорошее приближение получается суммированием первых самых простых диаграмм Фейнмана. Подобный набор картинок, изображающих протекание процесса всеми возможными способами, задаёт для этого процесса ряд теории возмущений, причём степень малости вклада каждой диаграммы определяется числом вершин (каждая вершина — множитель).

3.2.1. Большое в малом (Ф*)

Конечно, это были совсем не пчёлы; по правде говоря, это были слоны, в чём Алиса очень скоро убедилась.

Льюис Кэрролл, «Алиса в Зазеркалье»

Мы можем придти к следующему общефилософскому заключению. В квантовой системе, как правило, может произойти всё, что не запрещено законами сохранения, хотя и с различными амплитудами вероятности. Так, если мы столкнём на ускорителе две частицы с энергией, достаточной

⁴Поскольку здесь важна *идея* вычисления амплитуды как суммы амплитуд всех возможных процессов, мы не останавливаемся на деталях диаграммной техники.

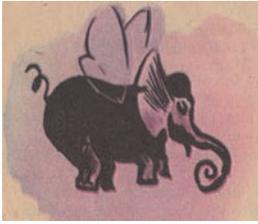


Рис. 3.13. Зазеркальный слон.



Рис. 3.14

- Взгляни-ка на то облачко, ... — Это выюся Бегемотишки. ...
 — А что они едят? — снова спросила Алиса.
 — Мелкую рыбёшку и лягушек! ...
 — А если рыбок не будет? ...
 — Тогда они, конечно, умрут, ...
 — И часто так бывает?
 — *Всегда*, ...

Льюис Кэрролл, «Алиса в Зазеркалье»
 Как и бегемоткам, виртуальным частицам не хватает энергии, чтобы существовать, и они *всегда* распадаются⁵

для рождения зелёного слоника, то с некоторой ненулевой вероятностью зелёный слоник возникнет (хотя эта вероятность будет заметно меньше, чем вероятность самопроизвольной сборки слоника из отдельных атомов в результате броуновского движения, а среднее время ожидания такого события на много порядков превысит возраст Вселенной). Но даже если энергия нашего ускорителя недостаточна для рождения зелёных слонов, то в процессе столкновения двух частиц зелёный слоник может возникнуть в промежуточном состоянии, чтобы потом распасться (аналогично прохождению частицы при туннельном эффекте через потенциальный барьер, высота которого превышает энергию частицы). Правда существовать такой виртуальный слоник сможет очень короткое время, определяемое соотношением неопределённости

$$\delta E \cdot \delta t \sim \hbar, \quad (3.28)$$

где δE — энергия, которой нам не хватает, чтобы создать слоника, δt — время его существования, а \hbar — постоянная Планка. Хотя вклад процессов с участием виртуальных слоников в рассеяние элементарных частиц исчезающе мал, но другие, не столь тяжёлые, объекты действительно начинают заметно (измеримо) влиять на жизнь элементарных частиц на энергиях много меньших, чем энергия, необходимая для их рождения.

⁵Рисунки слона и бегемотки художника И. И. Казаковой воспроизведены по изданию Льюис Кэрролл «Приключения Алисы в стране чудес; Алиса в Зазеркалье», Петрозаводск: Карелия, 1979.

Так, например, при β -распаде свободного нейтрона (см. рис. 3.15⁶) он испускает виртуальный калибровочный W^- бозон, который тяжелее нейтрона в 80 раз, и энергии на образование которого у нейтрона «почтеному» нет. В процессе испускания W^- нейтрон n превращается в протон p (который лишь чуть-чуть легче нейтрона), а W^- очень быстро распадается на электрон e^- и электронное антинейтрино $\bar{\nu}_e$. Поскольку для настоящего рождения W^- бозона не хватает очень большого количества энергии, время существования W^- крайне мало, а время жизни свободного нейтрона очень велико — почти 15 минут⁷.

Принцип «возможно всё, что разрешено законами сохранения» «объясняет» нестабильность всех частиц, которым есть куда распаться. Нейтрону энергетически выгодно распаться на протон, электрон и электронное антинейтрино, никакие законы сохранения ему этого не запрещают, вот он это и делает.

Протон, конечно, тоже может испустить виртуальный W^+ и превратиться в нейтрон, с дальнейшим распадом $W^+ \rightarrow \bar{e}\nu_e$, вот только для того, чтобы нейтрон, позитрон и нейтрино стали реальными частицами, им не хватает энергии, а потому им надо быстро-быстро (за время, отводимое соотношением неопределённости) собраться обратно в протон и сделать вид, что всё так и было. (Как показывает квантовая теория поля, подобные процессы действительно влияют на свойства элементарных частиц.)

Аналогично все фермионы второго и третьего поколений могут (через слабое взаимодействие) превратиться в фермионы первого поколения (которым дальше распаться некуда), и поэтому они так делают.

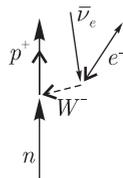


Рис. 3.15. Распад нейтрона. Изображена диаграмма, дающая главный вклад в амплитуду процесса. Виртуальный W^- выступает в роли бегемотки с рис. 3.14.

⁶Сплошная стрелка — фермион (длинная — барион, короткая — лептон), прозрачная стрелка — заряд. Для античастицы сплошная стрелка рисуется на заднем конце. Для заряженной частицы прозрачная стрелка рисуется на переднем конце для положительного заряда, и на заднем — для отрицательного. Непрерывность стрелок каждого типа позволяют проследить сохранение электрического заряда, барионного и лептонного квантовых чисел.

⁷Внутри стабильного атомного ядра условия иные, и нейтрон может жить неограниченно долго.