ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2010. Т. 41. ВЫП. 5

МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАРУШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА БЕЛЛА

*Д. А. Славнов**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

*E-mail: slavnov@goa.bog.msu.ru

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2010. Т. 41. ВЫП. 5

МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАРУШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА БЕЛЛА

Д. А. Славнов[*]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Описана макроскопическая квантовая модель двухуровневой системы (аналога частицы со спином 1/2), в которой моделируется не только исследуемая система, но и процедура измерения. Описаны модели одночастичного и двухчастичного состояния квантовой системы. В рамках модели обсуждены парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена и неравенство Белла.

A macroscopic quantum model of two-level system (analogue of a particle spin-half) is constructed. It models not only researched system, but also procedure of measurement. Single-particle and two-particle states of quantum system are constructed. The Einstein–Podolsky–Rosen paradox and the Bell inequality are discussed in the framework the model.

PACS: 03.65.Ud

ВВЕДЕНИЕ

А. Петерсен, сотрудник Бора, в статье [1] приводит высказывание, которое он слышал из уст Бора при обсуждении проблем квантовой механики: «Нет никакого квантового мира. Имеется только абстрактное квантово-физическое описание».

Хотя этот тезис не представляется бесспорным, мы возьмем его на вооружение при описании физической модели, которая, с одной стороны, обладает типичными квантовыми свойствами, а с другой стороны, состоит из макроскопических составляющих.

Такая модель может оказаться весьма полезной при изучении проблем, которые до сих пор вызывают существенные разногласия в физическом сообществе. К таким проблемам относятся, например, проблема локальности в квантовых измерениях, проблемы причинности и существования физической реальности, обуславливающей результаты измерения, и т. п.

По широко распространенному мнению, главной особенностью квантовых систем является специфическая квантовая динамика. В этой динамике существенную роль играют процессы, в которых составляющие физической

[*]E-mail: slavnov@goa.bog.msu.ru

системы обмениваются порциями действия, сравнимыми с размерами кванта элементарного действия $\hbar$.

В противоположность этому мнению, в предлагаемой работе мы попытаемся показать, что для возникновения типичных квантовых особенностей во многих случаях квантовая динамика, определяющая взаимодействие между собой различных частей исследуемой системы, не существенна. Существенен характер взаимодействия изучаемой квантовой системы с внешней системой, служащей либо для формирования состояния изучаемой системы, либо для соответствующего измерения.

Поскольку результат такого взаимодействия зависит не только от характеристик изучаемой системы, но и от свойств внешней системы, то существует вероятность того, что с помощью подходящих характеристик внешней системы удастся получить результаты, типичные для квантовых явлений, даже в том случае, когда изучаемая система имеет макроскопические размеры. Мы попытаемся реализовать эту программу для двухуровневой физической системы, являющейся аналогом квантовой частицы со спином 1/2.

Дальнейшее рассмотрение мы проведем в рамках специального варианта алгебраического подхода к квантовой теории. Этот подход описан в статьях [2, 3]. В этих статьях приведено феноменологическое обоснование постулатов подхода и описано, как исходя из этих постулатов можно получить стандартный математический аппарат квантовой механики.

Этот подход обладает целым рядом особенностей, которые окажутся весьма полезными в нашем дальнейшем рассмотрении. Во-первых, в нем квантовые и классические системы рассматриваются с единых позиций. Более того, в нем квантовую систему можно рассматривать как совокупность открытых *классических* подсистем. Во-вторых, в нем не фиксируется динамика. Поэтому он одинаково применим как для классических, так и для квантовых систем. В-третьих, математический аппарат подхода строится как математическое описание физического процесса измерения. Напомним, что в традиционном подходе обычно пытаются (не очень успешно) построить теорию квантовых измерений, согласующуюся с априорным математическим аппаратом квантовой механики.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИСПОЛЬЗУЕМОГО ПОДХОДА

В этом разделе будут перечислены и кратко прокомментированы основные аксиомы подхода. Значительно более подробные комментарии и обоснования можно найти в статьях [2, 3].

В рамках алгебраического подхода первичными элементами квантовой теории являются наблюдаемые (см., например, [4–6]). Наблюдаемые — это такие характеристики физической системы, для которых можно получить численные значения, используя определенные измерительные процедуры. Выбрав некоторую систему единиц, можно считать все наблюдаемые безразмерными. Основным свойством наблюдаемых является то, что их можно умножать на действительные числа, складывать и перемножать. Поэтому в алгебраическом подходе принимается такой постулат.

Постулат 1. Наблюдаемые $\hat{A}$ физической системы являются эрмитовыми элементами некоторой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ ($\hat{A} \in \mathfrak{A}_+ \subset \mathfrak{A}$, $\hat{A}^* = \hat{A}$).

Здесь $\mathfrak{A}_+$ — множество наблюдаемых.

Напомним, что алгеброй называется множество, являющееся линейным пространством, в котором определена операция перемножения элементов. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется C^*-алгеброй (см., например, [7]), если в ней определена операция сопряжение (инволюция) $\hat{U} \to \hat{U}^*$ ($\hat{U} \in \mathfrak{A}$, $\hat{U}^* \in \mathfrak{A}$) и норма любого элемента $\hat{U}$ удовлетворяет условию $\|\hat{U}\hat{U}^*\| = \|\hat{U}\|^2$.

Коренное отличие квантовых систем от классических заключается в том, что для классических систем любую пару наблюдаемых можно измерить совместимым образом. Это значит, что при многократном измерении двух таких наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ мы будем получать для каждой из наблюдаемых повторяющиеся результаты, вне зависимости от того, в какой последовательности мы проводим измерения. Для квантовых систем совместимым образом можно измерить только отдельные группы наблюдаемых. Наблюдаемые, принадлежащие одной и той же группе, называются совместимыми. Снабдим каждую такую группу индексом ξ, который пробегает множество Ξ и отличает одну такую группу от другой. Одна и та же наблюдаемая $\hat{A}$ может принадлежать многим группам $\mathfrak{Q}_\xi$. Каждую отдельную группу $\mathfrak{Q}_\xi$ можно трактовать как совокупность наблюдаемых некоторой классической подсистемы рассматриваемой квантовой системы. В связи с этим принимаются следующие два постулата.

Постулат 2. Множество совместимых (одновременно измеримых) наблюдаемых является максимальной действительной ассоциативной коммутативной подалгеброй $\mathfrak{Q}_\xi$ алгебры $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{Q}_\xi \subset \mathfrak{A}_+$).

Постулат 3. Состояние классической подсистемы, наблюдаемые которой являются элементами подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$, описывается характером $\varphi_\xi(\cdot)$ этой подалгебры.

Последнее означает, что $\hat{A} \xrightarrow{\varphi_\xi} \varphi_\xi(\hat{A})$ ($\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$) — гомоморфное отображение алгебры $\mathfrak{Q}_\xi$ в множество действительных чисел.

Будем теперь рассматривать квантовую систему как совокупность открытых классических подсистем, наблюдаемые каждой из которых являются элементами соответствующей подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$. Имея в виду, что каждая наблюдаемая, принадлежащая алгебре $\mathfrak{A}$, принадлежит какой-нибудь подалгебре $\mathfrak{Q}_\xi$, примем следующий постулат.

Постулат 4. Результат каждого индивидуального измерения наблюдаемой физической системы определяется элементарным состоянием $\varphi = [\varphi_\xi]$ этой системы.

Здесь $\varphi = [\varphi_\xi]$ — совокупность характеров всех подалгебр $\mathfrak{Q}_\xi$. Каждая из подалгебр $\mathfrak{Q}_\xi$ представлена в $\varphi = [\varphi_\xi]$ одним характером $\varphi_\xi(\cdot)$.

Показания измерительного прибора являются результатом взаимодействия измерительного прибора с исследуемой физической системой. Этот результат может зависеть как от характеристик исследуемой системы, так и от характеристик измерительного прибора. Последнее для изучения исследуемой системы крайне не желательно. Для унификации показаний различных приборов служит процедура калибровки.

Схематически эта процедура выглядит следующим образом. В качестве шаблона берется измерительный прибор, который осуществляет воспроизводимое измерение некоторой наблюдаемой $\hat{A}$. С помощью этого прибора проводится измерение наблюдаемой $\hat{A}$ у какой-нибудь тестовой физической системы. Получается некоторое значение A. Здесь и далее результат измерения наблюдаемой обозначается тем же символом, что и сама наблюдаемая, но без «крышки». Если первое измерение осуществлялось воспроизводимым образом, то повторное измерение той же наблюдаемой прибором, подлежащим калибровке, должно дать то же значение. Так осуществляется унификация показаний прибора, подлежащего калибровке, и шаблонного прибора.

Однако в квантовом случае такая процедура осуществима только внутри каждой группы совместимых наблюдаемых. Будем говорить, что приборы, которые позволяют произвести такие измерения внутри группы $\mathfrak{Q}_\xi$, относятся к ξ-типу. Для приборов, относящихся к разным типам, унификация показаний в общем случае не осуществима. Для квантовой системы даже в идеальном случае нельзя исключить зависимость результата измерения от типа измерительного прибора.

Если наблюдаемая $\hat{A}$ одновременно принадлежит двум разным подалгебрам ($\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\eta \cap \mathfrak{Q}_{\eta'}$, $\eta, \eta' \in \Xi$), то для ее измерения могут быть использованы приборы разных типов (типа η или η') и равенство

$$\varphi_\eta(\hat{A}) = \varphi_{\eta'}(\hat{A}) \text{ при } \varphi_\eta, \varphi_{\eta'} \in \varphi = [\varphi_\xi], \quad \eta \neq \eta', \tag{1}$$

может нарушаться (см. [2]).

Если для некоторого $\varphi = [\varphi_\xi]$ равенство (1) справедливо для всех $\mathfrak{Q}_\xi$, содержащих наблюдаемую $\hat{A}$, то будем говорить, что элементарное состояние $\varphi = [\varphi_\xi]$ стабильно на наблюдаемой $\hat{A}$.

Если бы нам было известно элементарное состояние $\varphi = [\varphi_\xi]$ исследуемой системы, то мы могли бы однозначно предсказать результат измерения любой наблюдаемой. Однако это невозможно. Дело в том, что одновременно мы можем измерить только совместимые наблюдаемые, например, принадлежащие подалгебре $\mathfrak{Q}_\eta$. Поэтому из всех характеров φ_ξ, входящих в элементарное состояние φ, мы можем экспериментально определить только функционал $\varphi_\eta(\cdot)$. В связи с этим удобно ввести понятие φ_η-эквивалентности.

Два элементарных состояния φ и φ' назовем φ_η-эквивалентными, если для всех $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\eta$ справедливо равенство

$$\varphi_\eta(\hat{A}) = \varphi'_\eta(\hat{A}), \text{ где } \varphi_\eta \in \varphi,\ \varphi'_\eta \in \varphi'.$$

Соответственно, самое большее, что мы можем экспериментально узнать об элементарном состоянии, это то, что оно принадлежит определенному классу эквивалентности $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$. Если наблюдаемая $\hat{A}$ принадлежит подалгебре $\mathfrak{Q}_\eta$, а элементарное $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ стабильно на наблюдаемой $\hat{A}$, то в результате измерения мы с определенностью получим $A = \varphi_\eta(\hat{A})$. Если $\hat{A} \neq \mathfrak{Q}_\eta$, то определенного предсказания о результате измерения сделать нельзя, так как для разных элементарных состояний $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ эти результаты могут быть разными.

Иными словами, класс эквивалентности обладает теми физическими свойствами, которые приписываются квантовому состоянию в традиционном подходе. Поэтому множество $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ эквивалентных элементарных состояний, стабильных на всех наблюдаемых $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\eta$, отождествим с квантовым состоянием

$$\Psi_{\varphi_\eta} \equiv \{\varphi\}_{\varphi_\eta}.$$

Элементарное состояние удовлетворяет требованиям, которые в колмогоровской теории вероятностей [8] (см. также [9]) предъявляются к элементарным событиям. Именно, в каждом испытании реализуется одно и только одно элементарное событие, различные элементарные события являются взаимоисключающими. Поэтому нет необходимости создавать какую-то искусственную квантовую теорию вероятностей, а можно воспользоваться хорошо разработанной классической теорией вероятностей. Так как вероятностные свойства квантовой системы характеризуются ее квантовыми состояниями, то естественно принять следующий постулат.

Постулат 5. Класс эквивалентности $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ можно оснастить структурой $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ вероятностного пространства.

Здесь Ω — пространство элементарных событий. Для элементарных событий в колмогоровской теории вероятностей, в общем случае, вероятностную меру $P(F)$ определить нельзя. Чтобы определить вероятностную меру, необходимо сделать пространство Ω измеримым. Для этой цели, помимо элементарных событий, необходимо еще ввести так называемые (вероятностные) события F. Это подмножества множества Ω, для которых может быть определена вероятностная мера $P(F)$. Считается, что произошло событие F, если реализовалось одно из элементарных событий, принадлежащих подмножеству F. Подмножества F должны быть элементами так называемой булевой σ-алгебры $\mathcal{F}$. Это значит, что множество $\mathcal{F}$ оснащается тремя алгебраическими операциями: объединение подмножеств F, пересечение этих подмножеств, а также дополнение каждого подмножества до общего множества Ω. При этом $\mathcal{F}$ должно обязательно включать в себя само множество Ω и пустое множество $\emptyset$. Кроме того, множество $\mathcal{F}$ должно быть замкнуто относительно операции дополнения и счетного числа объединений и пересечений. Замкнутость означает, что в результате соответствующей операции получается элемент того же множества. Пространство Ω, оснащенное описанной σ-алгеброй $\mathcal{F}$, называется измеримым пространством. Выбор определенной булевой алгебры $\mathcal{F}$ физически соответствует выбору определенного типа измерительной аппаратуры. Вероятностные меры $P(F)$ определяются только для событий $F \in \mathcal{F}$.

Отличительной особенностью квантовых измерений является то, что одновременно можно использовать приборы, позволяющие измерить только совместимые наблюдаемые, т. е. приборы, принадлежащие какому-то одному ξ-типу. Каждому такому типу приборов соответствует своя булева алгебра $\mathcal{F}_\xi$. Существенно, что в квантовом случае нет булевой алгебры $\mathcal{F}_0$, обладающей следующими свойствами. Для всех $F \in \mathcal{F}_0$ существуют вероятностные меры $P(F)$, алгебры $\mathcal{F}_\xi$ являются подалгебрами алгебры $\mathcal{F}_0$.

Постулат 5 позволяет определить среднее значение наблюдаемой $\hat{A}$ в квантовом состоянии Ψ_η с помощью вероятностного среднего по пространству $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ элементарных (состояний) событий:

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{A}) = \int\limits_{\varphi\in\{\varphi\}_{\varphi_\eta}} P_{\hat{A}}(d\varphi)\,\varphi_\xi(\hat{A}). \tag{2}$$

Здесь $P_{\hat{A}}(d\varphi) = P(\varphi : \varphi_\xi(\hat{A}) \leqslant A + dA) - P(\varphi : \varphi_\xi(\hat{A}) \leqslant A)$, $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$, $\varphi_\xi \in \varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$.

Чтобы формула (2) действительно определяла квантовое среднее, вероятностная мера $P_{\hat{A}}(\varphi)$ должна быть такой, что справедливы следующие постулаты.

Постулат 6. Функционал $\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{A})$ линеен на алгебре $\mathfrak{A}$.

Постулат 7. Функционал $\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{A})$ не зависит от конкретного выбора ξ.

Последнее утверждение следует понимать в следующем смысле. Наблюдаемая $\hat{A}$ может одновременно принадлежать нескольким подалгебрам $\mathfrak{Q}_{\xi_1}, \mathfrak{Q}_{\xi_2}, \dots$ Для всех этих $\xi_1, \xi_2, \dots$ формула (2) должна определять один и тот же функционал. Так как $\varphi_\xi(\cdot)$ — характер подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$, то функционал Ψ_{φ_η} автоматически будет положительным и нормированным на единицу, т. е. $\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{I}) = 1$. Здесь $\hat{I}$ — единичный элемент алгебры $\mathfrak{A}$.

Имея C^*-алгебру $\mathfrak{A}$ и линейный положительный нормированный функционал $\Psi_{\varphi_\eta}(\cdot)$ на этой алгебре, мы можем с помощью канонической конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала (см., например, [4, 10]) построить представление алгебры $\mathfrak{A}$. Другими словами, построить гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, в котором каждому элементу $\hat{A} \in \mathfrak{A}$ будет соответствовать оператор $\Pi(\hat{A})$, действующий в пространстве $\mathfrak{H}$, а квантовому среднему $\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{A})$ — математическое ожидание $\langle \Phi|\Pi(\hat{A})|\Phi\rangle$, где $|\Phi\rangle \in \mathfrak{H}$ — соответствующий вектор гильбертова пространства. Так воспроизводится стандартный математический аппарат квантовой механики.

С точки зрения квантовых вычислений математический аппарат, основанный на гильбертовом пространстве, обычно оказывается значительно более удобным. Однако он не имеет наглядной физической интерпретации и поэтому плохо приспособлен для макроскопического моделирования квантовых процессов. В противоположность этому формализм, основанный на элементарном состоянии, справедлив как для квантовых систем, так и для классических. Поэтому он удобен для такого моделирования.

2. ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА

В этом разделе мы обсудим приложение общих положений, сформулированных в предыдущем разделе, к конкретной квантовой модели. В качестве таковой рассмотрим двухуровневую систему, аналогом которой является частица со спином 1/2. Далее для рассматриваемой модели будем использовать спиновую терминологию. Одновременно подчеркнем, что это вовсе не предполагает, что динамика исследуемой системы совпадает с динамикой частицы со спином 1/2.

Наблюдаемым двухуровневой квантовой системы можно сопоставить эрмитовы матрицы 2×2. В этом случае в качестве алгебры $\mathfrak{A}$ можно рассматривать множество всех матриц вида

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

в котором алгебраические операции совпадают с соответствующими матричными операциями.

Для такой системы не составляет большого труда построить все элементарные состояния. Пусть $\hat{A}$ — эрмитова матрица, тогда $a^* = a$, $d^* = d$, $c = b^*$. Любая такая матрица может быть представлена в виде

$$\hat{A} = g_0 \hat{I} + g\, \hat{\tau}(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — единичный трехмерный вектор; τ_i — матрицы Паули, $\hat{\tau}(\mathbf{r}) = (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{r})$. Чтобы формула (3) была справедливой, следует положить

$$\begin{gathered} g = \left(\frac{(a-d)^2}{4} + b\,b^*\right)^{1/2}, \quad g_0 = \frac{a+d}{2}, \\ r_1 = \frac{b+b^*}{2g}, \quad r_2 = \frac{b-b^*}{2ig}, \quad r_3 = \frac{a-d}{2g}. \end{gathered} \tag{4}$$

Очевидно, что $\hat{\tau}(-\mathbf{r}) = -\hat{\tau}(\mathbf{r})$. При $\mathbf{r}' \neq \pm\mathbf{r}$ коммутатор матриц $\hat{\tau}(\mathbf{r})$ и $\hat{\tau}(\mathbf{r}')$ отличен от нуля. Поэтому каждая (с точностью до знака) матрица $\hat{\tau}(\mathbf{r})$ является образующей для действительной максимальной коммутативной подалгебры $\mathfrak{Q}_{\mathbf{r}}$. Так как $\hat{\tau}(\mathbf{r})\hat{\tau}(\mathbf{r}) = \hat{I}$, то спектр элемента $\hat{\tau}(\mathbf{r})$ состоит из двух точек: ± 1.

Пусть $\varphi^\alpha = [\varphi^\alpha_{\mathbf{r}}]$ — элементарное состояние. Здесь $\varphi^\alpha_{\mathbf{r}}$ — характер подалгебры $\mathfrak{Q}_{\mathbf{r}}$, индекс α отличает одно элементарное состояние от другого. Рассмотрим функцию $f^\alpha(\mathbf{r})$ такую, что $f^\alpha(-\mathbf{r}) = -f^\alpha(\mathbf{r})$ и для каждого $\mathbf{r}$ значение функции равно либо $+1$, либо -1, индекс α отличает одну функцию от другой. Тогда, очевидно, мы можем положить $\varphi^\alpha_{\mathbf{r}}(\hat{\tau}(\mathbf{r})) = f^\alpha(\mathbf{r})$. Учитывая, что $\hat{\tau}(\mathbf{r})$ является образующей подалгебры $\mathfrak{Q}_{\mathbf{r}}$, получаем

$$\varphi^\alpha_{\mathbf{r}}(\hat{A}) = g_0(\hat{A}) + g(\hat{A}) f^\alpha(\mathbf{r})$$

для $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_{\mathbf{r}}$.

Отметим, что для данной квантовой системы каждая наблюдаемая $\hat{A}$ (некратная $\hat{I}$) принадлежит одной и только одной максимальной подалгебре $\mathfrak{Q}_{\mathbf{r}}$. В общем случае это, конечно, не так. Воспользовавшись указанной особенностью рассматриваемой системы, мы можем представить элементарное состояние в виде единого функционала, определенного на всем множестве $\mathfrak{A}_+$:

$$\varphi^\alpha(\hat{A}) = g_0(\hat{A}) + g(\hat{A}) f^\alpha(\mathbf{r}(\hat{A})) \tag{5}$$

для любой наблюдаемой $\hat{A}$. Здесь не только g и g_0, но и $\mathbf{r}$ следует рассматривать как функции $\hat{A}$ (см. формулу (4)). Этот функционал очевидным образом расширяется на всю алгебру $\mathfrak{A}$. Данный пример является свидетельством того, что доказательство фон Неймана [11] несуществования скрытых параметров нельзя распространить на элементарные состояния. Обратим внимание, что функционал $\varphi^\alpha(\hat{A})$, определяемый формулой (5), не линеен. В общем случае элементарное состояние формально тоже можно представить в виде нелинейного функционала, определенного на всей алгебре $\mathfrak{A}$. Однако этот функционал, вообще говоря, будет неоднозначным, так как одна и та же наблюдаемая $\hat{A}$ может одновременно принадлежать нескольким максимальным коммутативным подалгебрам $\mathfrak{Q}_\xi$.

Из формулы (5) следует, что для задания функционала $\varphi^{\alpha}(\hat{A})$ достаточно задать функцию $f^{\alpha}(\mathbf{r})$. Это значит, что каждая функция $f^{\alpha}(\mathbf{r})$ находится во взаимно-однозначном соответствии с некоторым элементарным состоянием. Сопоставим значению функции $f^{\alpha}(\mathbf{r})$, равному $+1$, черную точку, а значению -1 — белую. Тогда наглядно каждое такое элементарное состояние можно изобразить в виде сферы единичного радиуса, поверхность которой покрыта черными и белыми точками. При этом на концах каждого диаметра расположены точки разного цвета. Такими сферами мы можем моделировать элементарные состояния частицы со спином $1/2$.

Пусть система находится в определенном элементарном состоянии, которому соответствует описанная сфера — СЭС (сфера элементарного состояния). Чтобы определить, каков будет результат при измерении проекции спина на некоторое направление, следует по этому направлению из центра СЭС провести единичный вектор $\mathbf{r}$. Если этот вектор уткнется в черную (белую) точку на сфере, то результат измерения будет $+1/2$ $(-1/2)$.

Итак, рассмотрим квазичастицу со спином 1/2, элементарные состояния которой можно описать с помощью поточечно раскрашенных СЭС. Очень близкие точки могут иметь разную окраску. Поэтому бесконечно малый поворот измерительного прибора может вызвать резкое изменение регистрируемого результата. Вместе с тем опыт показывает, что если мы работаем с некоторым квантовым состоянием, т. е. с некоторым множеством СЭС, то малый поворот прибора в среднем вызывает малое изменение результата. Это значит, что с точки зрения нахождения средних значений мы можем заменить в квантовом состоянии множество поточечно раскрашенных сфер множеством гладко раскрашенных. Но, конечно, нужно суметь подобрать как раскраску, так и ансамбль таких сфер.

Будем считать, что все сферы имеют одинаковую раскраску и отличаются друг от друга только своей ориентацией. Каждая из сфер окрашена следующим образом. «Северный магнитный полюс» — черный $(+1)$, «южный магнитный полюс» — белый (-1). Промежуточные области имеют серую окраску, насыщенность которой черным цветом меняется по закону

$$\rho = (\mathbf{r}\mathbf{R}). \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный в текущую серую точку, а $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный в северный магнитный полюс.

Переход к серо раскрашенным сферам может решить проблему плавного изменения регистрируемых средних значений при повороте измерительного прибора, но создает новую проблему. При каждом измерении прибор должен регистрировать для проекции спина либо значение $+1/2$, либо значение $-1/2$, а не какое-то промежуточное «серое» значение.

Чтобы обойти эту проблему, будем считать, что элементарное состояние частицы характеризуется многослойной серо раскрашенной сферой (МСС), в которой каждый слой имеет раскраску, описанную формулой (6), но различные слои имеют различную ориентацию. Ориентация k-го слоя задается вектором $\mathbf{R}^{(k)}$. Кроме того, будем считать, что элементарное состояние характеризуется значениями вспомогательной переменной $\hat{\varepsilon}$. Попытка (неудачная) использовать такую переменную была предпринята в работе [12]. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный в текущую точку на сфере. Тогда каждому значению $\mathbf{r}$ переменная $\hat{\varepsilon}$ ставит в соответствие значение $\varepsilon(\mathbf{r})$. Для разных слоев функции $\varepsilon(\mathbf{r})$ независимо друг от друга случайно принимают значения из интервала

$$-1/2 < \varepsilon^{(k)}(\mathbf{r}) < +1/2$$

и

$$\varepsilon^{(k)}(-\mathbf{r}) = -\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r}).$$

Из множества всех таких МСС выделим подмножество Υ, состоящее из тех МСС, у которых функции $\varepsilon(\mathbf{r})$, связанные с каждым слоем, удовлетворяют одному из условий:

$$|\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} + \varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})| > 1/2 \tag{7}$$

или

$$|\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} + \varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})| \leqslant 1/2. \tag{8}$$

Легко убедиться, что такие функции (в общем случае разрывные) существуют при любой ориентации слоя. Ясно также, что множество Υ инвариантно относительно сферических преобразований. Далее мы будем иметь дело только с МСС, принадлежащими множеству Υ.

Самый верхний слой, для которого выполняется условие (7), назовем активным. Сопоставим каждой МСС, оснащенной функциями $\varepsilon(\mathbf{r})$, сферу элементарного состояния (СЭС) по следующему правилу. Если у рассматриваемой МСС активный слой имеет номер k, то в соответствующей СЭС радиус-вектор $\mathbf{r}$ упирается в черную точку $(j = +1)$ при условии $\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} > 0$ и в белую точку $(j = -1)$ при условии $\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} < 0$. Напомним, что цвет точки на СЭС описывает результат измерения проекции спина на соответствующее направление, когда частица находится в рассматриваемом элементарном состоянии. Соответственно, будем считать, что прибор, измеряющий проекцию спина на направление $\mathbf{r}$, действует следующим образом. Вначале он проверяет, активен ли самый верхний слой у МСС, соответствующей рассматриваемому элементарному событию. Если слой активен, то прибор регистрирует результат по сформулированному выше правилу. Если слой пассивен, то прибор никакого результата не регистрирует, а исследует следующий слой по той же схеме. Так процесс продолжается, пока не будет зарегистрирован определенный результат. Далее мы увидим, что вероятность того, что активный слой имеет номер, бо́льший k, быстро убывает с ростом k. Таким образом, практически для каждого элементарного события будет зарегистрирован определенный результат.

Имея в виду соответствие между МСС и СЭС, мы будем строить интересующие нас квантовые состояния не с помощью множеств СЭС, а с помощью множеств МСС.

Квантовому состоянию с удвоенной проекцией спина, равной $+1$, на направление $\mathbf{n}$ соответствует множество СЭС, у каждой из которых на конце радиуса, направленного по $\mathbf{n}$, расположена черная точка. Этому квантовому состоянию сопоставим множество МСС ($\Upsilon_{\mathbf{n}}$), которое удовлетворяет следующим условиям. В каждом слое k' радиус-вектор $\mathbf{R}^{(k')}$, направленный в северный магнитный полюс, принадлежит верхней полусфере $\mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^{+}$ с центральным направлением $\mathbf{n}$. Направления векторов $\mathbf{R}^{(k')}$ для разных слоев случайно и независимо друг от друга распределены по $\mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^{+}$. Каждая МСС, входящая в $\Upsilon_{\mathbf{n}}$, оснащена функциями $\varepsilon^{(k')}(\mathbf{r})$. Функции $\varepsilon^{(k')}(\mathbf{r})$ также случайны, но удовлетворяют либо условию (7), либо условию (8).

Индивидуальная МСС с заданными функциями $\varepsilon^{(k')}(\mathbf{r})$ определяет некоторое элементарное состояние. В теории вероятностей этому элементарному состоянию соответствует элементарное событие. Согласно теории вероятностей [8] совсем не обязательно, что элементарному событию соответствует какая-либо вероятностная мера. Вероятностные меры должны соответствовать (вероятностным) событиям, которые являются некоторыми подмножествами множества элементарных событий.

Поэтому понятие вероятности мы свяжем только с определенными подмножествами множества элементарных состояний. Для каждого значения $\mathbf{r}$ мы построим свою систему таких подмножеств, свою σ-алгебру $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}$. Это согласуется с квантовой ситуацией, в которой каждой группе совместимых наблюдаемых соответствует своя σ-алгебра (см. [2]). В рассматриваемом случае такая группа состоит из наблюдаемых, являющихся линейной комбинацией проекции спина на направление $\mathbf{r}$ и единицы.

Образующие σ-алгебры $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}$ определим следующими условиями.

1. Вектор $\mathbf{r}$ фиксирует σ-алгебру $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}$. Остальные условия фиксируют элементы σ-алгебры.

2. Фиксирован интервал $(\varepsilon, \varepsilon+d\varepsilon)$, где параметр ε удовлетворяет неравенствам $-1/2 < \varepsilon < +1/2$. Далее сам интервал и его длину будем обозначать единым символом $d\varepsilon$.

3. Либо $\varepsilon^{(k')}(\mathbf{r}) \in d\varepsilon$, либо $-\varepsilon^{(k')}(\mathbf{r}) \in d\varepsilon$. Оба варианта соответствуют одному подмножеству (одному элементу σ-алгебры).

4. Фиксирован номер k активного слоя.

5. Каждое подмножество состоит из всех МСС, для слоев которых выполняется одно из условий:

$$|\mathbf{R}^{(k')}\mathbf{r} + \varepsilon^{(k')}(\mathbf{r})| > 1/2, \quad k' = k, \tag{9}$$

$$|\mathbf{R}^{(k')}\mathbf{r} + \varepsilon^{(k')}(\mathbf{r})| \leqslant 1/2, \quad k' \leqslant k \quad (k' \text{ фиксировано}). \tag{10}$$

Случаи (9) и (10) соответствуют разным подмножествам.

6. В случае (9) подмножества различаются еще по одному признаку: либо $\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} > 0$, либо $\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} < 0$.

Нетрудно проверить, что, вне зависимости от $\mathbf{r}$, любое элементарное событие из $\Upsilon_{\mathbf{n}}$ принадлежит какому-нибудь из перечисленных подмножеств при некоторых ε и k.

Построим теперь вероятностные меры для каждого из таких подмножеств, считая, что случайные значения $\mathbf{R}^{(k')}$ равномерно распределены по полусфере $\mathfrak{R}^{+}_{\mathbf{n}}$.

Пусть $\mathbf{r}$ и $d\varepsilon$ фиксированы, а $k' = 1$. Вероятность реализации неравенства (9) с дополнительным условием $\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} > 0$ $(j = +1)$ или с дополнительным условием $\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} < 0$ $(j = -1)$ описывается выражением

$$\begin{aligned} P^{(1)}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\varepsilon,j)\,d\varepsilon &= \\ &= d\varepsilon\frac{N}{2}\int d\mathbf{R}\,\Theta(\mathbf{Rn})\left[\Theta\left[j(\mathbf{Rr}+\varepsilon)-\frac{1}{2}\right]+\Theta\left[j(\mathbf{Rr}-\varepsilon)-\frac{1}{2}\right]\right] = \\ &= d\varepsilon\frac{N}{2}\int d\mathbf{R}\,\Theta(j\mathbf{Rn})\left[\Theta\left[\mathbf{Rr}+\varepsilon-\frac{1}{2}\right]+\Theta\left[\mathbf{Rr}-\varepsilon-\frac{1}{2}\right]\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь N — нормировочный множитель; $d\mathbf{R} = d\phi\, d\vartheta \sin\vartheta$; $\Theta(x)$ — пороговая функция Хевисайда ($\Theta(x) = 0$ при $x < 0$, $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$). Из (11) следует

$$P^{(1)}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\varepsilon) \equiv \sum_{j=\pm 1} P^{(1)}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\varepsilon,j) = N\pi. \tag{12}$$

Вероятность реализации неравенства (10) описывается выражением

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(1)}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\varepsilon)\,d\varepsilon = d\varepsilon\frac{N}{2}\int d\mathbf{R}\,\Theta(\mathbf{Rn})\left[\Theta\left[\frac{1}{2}+\mathbf{Rr}+\varepsilon\right]\Theta\left[\frac{1}{2}-\mathbf{Rr}-\varepsilon\right]+\right. \\ \left.+\Theta\left[\frac{1}{2}+\mathbf{Rr}-\varepsilon\right]\Theta\left[\frac{1}{2}-\mathbf{Rr}+\varepsilon\right]\right] = \\ = d\varepsilon\frac{N}{2}\int d\mathbf{R}\,\left[\Theta\left[\frac{1}{2}+\mathbf{Rr}+\varepsilon\right]\Theta\left[\frac{1}{2}-\mathbf{Rr}-\varepsilon\right]\right] = N\pi\,d\varepsilon. \end{aligned} \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) получаем $N = (2\pi)^{-1}$ и

$$\tilde{P}_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим случай $k' = 2$. Второй слой обладает теми же свойствами, что и первый, одновременно с этим ориентация второго слоя и соответствующая функция $\varepsilon^{(k')}(\mathbf{r})$ не зависят от первого слоя. Поэтому для второго слоя мы можем повторить предыдущие рассуждения. Нужно только учесть, что благодаря формуле (14) прибор будет иметь дело со вторым слоем с вероятностью 1/2. Это значит, что при заданном ε вероятность получить в качестве результата номер активного слоя, равный 2, и фиксированное значение j описывается формулой

$$P_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{r}, \varepsilon, j) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^2}\int d\mathbf{R}\,\Theta(j\mathbf{R}\mathbf{n})\left[\Theta\left[\mathbf{R}\mathbf{r} + \varepsilon - \frac{1}{2}\right] + \Theta\left[\mathbf{R}\mathbf{r} - \varepsilon - \frac{1}{2}\right]\right],$$

а вероятность того, что активный слой имеет номер, бóльший 2, задается величиной

$$\tilde{P}_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = (1/2)^2.$$

Продолжая этот процесс, получим, что при фиксированных $\mathbf{r}$, $d\varepsilon$ и j вероятность активному слою иметь номер k равна

$$P_{\mathbf{n}}^{(k)}(\mathbf{r}, \varepsilon, j) = \\ = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^k}\int d\mathbf{R}\,\Theta(j\mathbf{R}\mathbf{n})\left[\Theta\left[\mathbf{R}\mathbf{r} + \varepsilon - \frac{1}{2}\right] + \Theta\left[\mathbf{R}\mathbf{r} - \varepsilon - \frac{1}{2}\right]\right], \tag{15}$$

а вероятность обнаружить у активного слоя номер, бóльший k, равна

$$\tilde{P}_{\mathbf{n}}^{(k)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = \left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{16}$$

Примечательно, что последняя вероятность не зависит ни от $\mathbf{r}$, ни от ε и быстро убывает с ростом k. Формулы (15) и (16) описывают систему вероятностных мер, соответствующих выбранной нами σ-алгебре.

Так как $\varepsilon^{(k')}$ от $\mathbf{r}$ зависят, то при разных $\mathbf{r}$ подмножества элементарных состояний, соответствующие одному и тому же интервалу $d\varepsilon$, будут разными. Это значит, что разным измерительным приборам соответствуют разные σ-алгебры. Иными словами, разные приборы различным образом разбивают множество элементарных событий на подмножества. Говорить о вероятности попадания конкретного элементарного события в одно из таких подмножеств можно только внутри одного такого разбиения. Сравнивать вероятности попадания элементарного события в подмножества, принадлежащие различным разбиениям, бессмысленно, так как такие подмножества являются элементами разных σ-алгебр. В свою очередь, эти σ-алгебры не являются подалгебрами некоторой единой σ-алгебры, которой соответствует какая-либо система вероятностных мер. Этот факт является отличительной особенностью квантовых измерений (см. [2]).

Из формулы (15) следует, что вероятность при фиксированном значении $\mathbf{r}$ получить фиксированное значение j при любом значении ε и любом номере активного слоя задается формулой

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},j)=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-1/2}^{1/2}d\varepsilon P_{\mathbf{n}}^{(k)}(\mathbf{r},\varepsilon,j)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1/2}^{1/2}d\varepsilon\int d\mathbf{R}\,\Theta(j\mathbf{Rn})\left[\Theta\left[\mathbf{Rr}+\varepsilon-\frac{1}{2}\right]+\Theta\left[\mathbf{Rr}-\varepsilon-\frac{1}{2}\right]\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int d\mathbf{R}\,\Theta[j\mathbf{Rn}](\mathbf{Rr})\,\Theta[\mathbf{Rr}].$$

Отсюда имеем

$$\sum_j P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},j)=\frac{1}{\pi}\int d\mathbf{R}\,(\mathbf{Rr})\,\Theta[\mathbf{Rr}]=1 \tag{17}$$

и

$$\sum_j jP_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},j)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\sum_j\int d\mathbf{R}\,\Theta[j\mathbf{Rn}]\,j(\mathbf{Rr})\,\Theta[\mathbf{Rr}]=\int d\mathbf{R}\,\Theta[\mathbf{Rn}](\mathbf{Rr})=(\mathbf{rn}). \tag{18}$$

Из формул (17) и (18) получаем

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},j)=\frac{1}{2}\big(1+j(\mathbf{rn})\big). \tag{19}$$

Это распределение совпадает с квантовым.

3. ПАРАДОКС ЭПР, НЕРАВЕНСТВО БЕЛЛА

В знаменитой работе Эйнштейна, Подольского, Розена [13] были сформулированы принципы, которым, по мнению авторов, должна удовлетворять полная физическая теория: а) «каждый элемент физической реальности должен иметь копию в полной физической теории»; б) «если без какого-либо возмущения системы мы можем с уверенностью (т. е. с вероятностью единица) предсказать значение физической величины, то, значит, существует элемент реальности, соответствующий этой величине».

Стандартный математический аппарат квантовой механики не удовлетворяет этому требованию. Индивидуальный эксперимент не имеет адекватной копии в этом аппарате. Это приводит к тому, что, рассуждая в рамках стандартного формализма квантовой механики, легко прийти к парадоксальным выводам. Одним из наиболее известных таких выводов является парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена (парадокс ЭПР). В оригинальной работе [13] этот парадокс был сформулирован на примере измерения координаты и импульса. Более простую физическую модель предложил Бом [14]. В ней та же проблема обсуждается на примере измерений проекций спина на разные направления. Здесь мы остановимся на варианте, предложенном Бомом.

Модель выглядит следующим образом. Частица со спином 0 распадается на две частицы A и B со спинами 1/2, которые разлетаются на большое расстояние. Спиновое состояние этой системы согласно формулам стандартной квантовой механики описывается вектором состояния

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|A_z^{(+)}\rangle|B_z^{(-)}\rangle - |A_z^{(-)}\rangle|B_z^{(+)}\rangle\right], \tag{20}$$

где $|A_z^{(\pm)}\rangle$, $|B_z^{(\pm)}\rangle$ — собственные векторы операторов проекций спина на ось z с собственными значениями $+1/2$ и $-1/2$. Это так называемое запутанное состояние. В этом состоянии ни частица A, ни B не имеют определенного значения проекции спина на ось z.

Когда частицы A и B разлетятся на большое расстояние, у частицы B измеряется проекция спина на ось z. Пусть результат будет $+1/2$. Тогда, согласно постулату о коллапсе квантового состояния (проекционному принципу), состояние $|\Psi\rangle$ мгновенно заменится состоянием $|\tilde{\Psi}\rangle = -|A_z^{(-)}\rangle|B_z^{(+)}\rangle$. Это значит, что при последующем измерении у частицы A проекции спина на ось z мы с вероятностью единица получим значение $-1/2$. Это совершенно верно описывает экспериментальную ситуацию. Однако с физической точки зрения этот результат выглядит парадоксальным.

Действительно, наиболее естественными кажутся следующие рассуждения. В момент распада частицы A и B приобрели определенные проекции спина на ось z (противоположного знака), но до измерения проекции у частицы B мы не знаем, какие именно это проекции. Измерив проекцию у частицы B, мы автоматически узнали проекцию у частицы A. Но такое объяснение не согласуется с общей концепцией стандартной квантовой механики.

Дело в том, что то же квантовое состояние $|\Psi\rangle$ можно представить в виде

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|A_x^{(+)}\rangle|B_x^{(-)}\rangle - |A_x^{(-)}\rangle|B_x^{(+)}\rangle\right],$$

где обозначения те же, что в формуле (20), только вместо проекций на ось z фигурируют проекции на ось x. Теперь мы можем повторить все рассуждения, приведенные после формулы (20), заменяя в них ось z на ось x. В результате мы получим, что в момент распада частицы должны приобрести определенные значения проекций спина на ось x. Но наблюдаемые, соответствующие проекциям спина на оси z и x, взаимно несовместимы и согласно стандартной квантовой механике не могут одновременно иметь определенные значения.

Другой вариант рассуждений может выглядеть следующим образом. После распада частицы A и B не приобрели определенных значений проекций спина ни на какую ось. В результате измерения проекции на определенную ось они такие значения проекций на эту ось приобрели. В то, что для частицы B, которая взаимодействовала с измерительным прибором, такой механизм возможен, поверить нетрудно. Но как такое измерение могло повлиять на частицу A, находящуюся в пространственноподобной области относительно измерительного прибора, представить нельзя, не нарушая принципов теории относительности. Таким образом, оба варианта объяснения физического механизма оказываются несостоятельными. В этом и состоит парадокс.

Критикуя выводы работы [13], Бор в своей статье [15] писал, что авторы работы [13] неправильно толкуют понятие «физическая реальность». По мнению Бора, при обсуждении системы, в которой существуют корреляции, нельзя ее рассматривать, как состоящую из двух отдельных физических реальностей. Сами корреляции являются физическими реальностями. Поэтому всякое измерение над одной частью системы следует рассматривать как измерение над всей системой. Однако сколько-нибудь наглядной физической интерпретации своим рассуждениям Бор дать не смог. Конечно, можно утешать себя тем, что квантовая механика вообще не имеет наглядной интерпретации, но чувство неудовлетворенности все же остается.

Чтобы обойти эту трудность, Фок [16] предложил считать, что в квантовом случае понятию «состояние» не следует приписывать объективного смысла. Скорее, его следует понимать как «сведение о состоянии». Но возникает вопрос: существует ли нечто объективное, о чем мы получаем эти сведения? В описанном в разд. 1 настоящей статьи подходе предлагается как такое «нечто объективное» рассматривать элементарное состояние.

В этом случае физическому явлению, приводящему к парадоксу ЭПР, можно дать вполне наглядную интерпретацию. После распада исходной частицы физическая система характеризуется стабильными (нулевыми) значениями наблюдаемых $\hat{S}_{\mathbf{n}}$ (проекции полного спина на направление $\mathbf{n}$). Поэтому значения наблюдаемых $\hat{A}_{\mathbf{n}}$ и $\hat{B}_{\mathbf{n}}$ (проекции спинов на направление $\mathbf{n}$ для частиц A и B соответственно) удовлетворяют соотношению

$$A_{\mathbf{n}} + B_{\mathbf{n}} = S_{\mathbf{n}} = 0. \tag{21}$$

В отличие от квантового состояния в элементарном состоянии несовместимые наблюдаемые могут одновременно иметь определенные значения. Только эти значения не могут быть одновременно измерены с помощью классического прибора. В конкретном эксперименте мы можем измерить наблюдаемую $\hat{B}_{\mathbf{n}}$ для любого, но только для одного, направления $\mathbf{n}$, так как для разных направлений $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ наблюдаемые $\hat{B}_{\mathbf{n}}$, $\hat{B}_{\mathbf{n}'}$ несовместимы. Благодаря равенству (21) при таком измерении мы автоматически измеряем значение наблюдаемой $\hat{A}_{\mathbf{n}}$. Это так называемое косвенное измерение. Таким образом, в таком подходе парадокс ЭПР разрешается тривиально.

Одним из наиболее часто приводимых доводов в пользу того, что локальная физическая реальность, как это понимается в работе Эйнштейна, Подольского, Розена, не существует, является нарушение неравенства Белла [17, 18]. Белл вывел свое неравенство, рассуждая в рамках тезиса ЭПР. После Белла было предложено много вариантов аналогичных неравенств. Мы будем ориентироваться на вариант, предложенный в работе [19].

В этой работе рассматривается та же физическая система, которая используется в настоящей статье при рассмотрении парадокса ЭПР. Рассматривается частица со спином 0, которая распадается на две частицы A и B со спинами 1/2. Эти частицы разлетаются на большое расстояние и регистрируются приборами D_a и D_b соответственно. У частицы A прибор D_a измеряет проекцию спина на направление a, а у частицы B прибор D_b измеряет проекцию спина на направление b. Соответствующие наблюдаемые обозначим $\hat{A}$ и $\hat{B}$, а результаты измерений A_a и B_b.

Предположим, что состояние исходной частицы характеризуется некоторой физической реальностью, которая может быть отмечена параметром λ. Этот же параметр будем использовать для описания физических реальностей, характеризующих продукты распада. Соответственно, результаты измерения наблюдаемых $\hat{A}$, $\hat{B}$ можно рассматривать как функции $A_a(\lambda)$, $B_b(\lambda)$ параметра λ.

Пусть распределение событий по параметру λ характеризуется вероятностной мерой $P(\lambda)$:

$$\int P(d\lambda) = 1, \quad 0 \leqslant P(\lambda) \leqslant 1.$$

Введем корреляционную функцию $E(a,b)$:

$$E(a,b) = \int P(d\lambda)\, A_a(\lambda)\, B_b(\lambda) \tag{22}$$

и рассмотрим комбинацию

$$M = |E(a,b) - E(a,b')| + |E(a',b) + E(a',b')| = \\ = \left| \int P(d\lambda)\, A_a(\lambda)\, [B_b(\lambda) - B_{b'}(\lambda)] \right| + \\ + \left| \int P(d\lambda)\, A_{a'}(\lambda)\, [B_b(\lambda) + B_{b'}(\lambda)] \right|. \quad (23)$$

Для любых направлений a и b

$$A_a(\lambda) = \pm 1/2, \quad B_b(\lambda) = \pm 1/2. \quad (24)$$

Поэтому

$$M \leqslant \int P(d\lambda)\, [|A_a(\lambda)|\, |B_b(\lambda) - B_{b'}(\lambda)| + |A_{a'}(\lambda)|\, |B_b(\lambda) + B_{b'}(\lambda)|] = \\ = 1/2 \int P(d\lambda)\, [|B_b(\lambda) - B_{b'}(\lambda)| + |B_b(\lambda) + B_{b'}(\lambda)|]. \quad (25)$$

Благодаря равенствам (24) при любом λ одно из выражений

$$|B_b(\lambda) - B_{b'}(\lambda)|, \quad |B_b(\lambda) + B_{b'}(\lambda)| \quad (26)$$

равно нулю, а другое единице. Обратим внимание на то, что в обоих выражениях фигурирует одно и то же значение λ.

Учитывая свойство выражений (26), из неравенства (25) получается неравенство Белла

$$M \leqslant 1/2 \int P(d\lambda) = 1/2. \quad (27)$$

В стандартной квантовой механике корреляционная функция легко вычисляется, результат таков:

$$E(a,b) = -1/4 \cos\theta_{ab},$$

где θ_{ab} — угол между направлениями a и b. Для направлений $a = 0$, $b = \pi/8$, $a' = \pi/4$, $b' = 3\pi/8$ получаем

$$M = 1/\sqrt{2},$$

что противоречит неравенству (27).

Результаты экспериментов [20] согласуются с квантово-механическими расчетами и не подтверждают неравенство Белла. Обычно эти результаты рассматриваются как свидетельство того, что для квантово-механической системы нет никакой физической реальности, которая предопределяла бы результаты измерения.

Сейчас мы убедимся, что в действительности особенности применения теории вероятностей к квантовым системам не позволяют провести подобный вывод неравенства Белла.

Так как в квантовом случае σ-алгебра и, соответственно, вероятностная мера зависят от используемой измерительной аппаратуры, то в определении (22) следует сделать замену $P(d\lambda) \to P_{\hat{A}\hat{B}}(d\varphi)$. Если мы будем интересоваться корреляционной функцией $E(a', b')$, то в формуле (22) следует сделать замену $P(d\lambda) \to P_{\hat{A}'\hat{B}'}(d\varphi)$. Хотя в обоих случаях для обозначения элементарного объема в пространстве элементарных состояний использован один и тот же символ $d\varphi$, надо иметь в виду, что множества элементарных состояний, соответствующих $d\varphi$, будут разными. Дело в том, что эти множества должны быть элементами σ-алгебр. Если наблюдаемые $\hat{A}$, $\hat{B}$ несовместимы с наблюдаемыми $\hat{A}'$, $\hat{B}'$, то σ-алгебры будут разными. Более того, не существует физически допустимой σ-алгебры, подалгебрами которой могли бы быть эти алгебры.

Кроме того, при экспериментальном нахождении значения корреляционной функции $E(a, b)$ мы имеем дело не с полным вероятностным пространством $\Omega(\varphi_\xi)$, а со случайной счетной выборкой $\{\varphi\}_{\varphi_\xi}^{AB}$ из него. Окончательно формула (22) должна быть заменена на

$$E(a,b) = \int\limits_{\{\varphi\}_{\varphi_\xi}^{AB}} P_{\hat{A}\hat{B}}(d\varphi)\varphi(\hat{A}\hat{B}).$$

Соответственно, формула (23) теперь будет выглядеть так:

$$M = \left| \int\limits_{\{\varphi\}_{\varphi_\xi}^{AB}} P_{\hat{A}\hat{B}}(d\varphi)\,\varphi(\hat{A}\hat{B}) - \int\limits_{\{\varphi\}_{\varphi_\xi}^{AB'}} P_{\hat{A}\hat{B}'}(d\varphi)\,\varphi(\hat{A}\hat{B}') \right| + \\ + \left| \int\limits_{\{\varphi\}_{\varphi_\xi}^{A'B}} P_{\hat{A}'\hat{B}}(d\varphi)\,\varphi(\hat{A}'\hat{B}) + \int\limits_{\{\varphi\}_{\varphi_\xi}^{A'B'}} P_{\hat{A}'\hat{B}'}(d\varphi)\,\varphi(\hat{A}'\hat{B}') \right|.$$

Если направления a и a' (b и b') не параллельны друг другу, то наблюдаемые $\hat{A}\hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}'$, $\hat{A}'\hat{B}$, $\hat{A}'\hat{B}'$ являются взаимно несовместимыми. Поэтому не существует единой физически допустимой σ-алгебры, которая соответствовала бы измерению всех этих наблюдаемых. Кроме того, так как множества $\{\varphi\}_{\varphi_\xi}^{AB}$, $\{\varphi\}_{\varphi_\xi}^{AB'}$, $\{\varphi\}_{\varphi_\xi}^{A'B}$, $\{\varphi\}_{\varphi_\xi}^{A'B'}$ являются разными случайными счетными выборками из континуального пространства $\Omega(\varphi_\xi)$, то вероятность их попарного пересечения равна нулю. Поэтому равна нулю вероятность возникновения комбинаций типа (26). В результате для элементарных состояний рассуждения, которые привели к неравенству (27), оказываются несправедливыми.

Таким образом, в квантовом случае гипотеза о существовании элементарного состояния не приводит к неравенству Белла. Поэтому многочисленные экспериментальные проверки неравенства Белла, которые проводились ранее и проводятся сейчас, в большой степени лишаются теоретической базы.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНГЛЕТНОГО СОСТОЯНИЯ

В предыдущем разделе было показано, что обычно приводимые доказательства неравенства Белла имеют существенный изъян. В них не учитывается очень важное требование теории вероятностей: пространство элементарных событий должно быть измеримым. В противном случае само понятие вероятности теряет строгий математический смысл. В этом разделе мы убедимся, что можно построить макроскопическую модель, в которой неравенство Белла будет нарушено.

С этой целью мы построим синглетное состояние двухчастичной системы. Характерным свойством синглетного состояния является то, что при измерении проекции спина на любое направление $\mathbf{n}$ всегда удовлетворяется равенство (21).

Это равенство предполагает жесткую корреляцию между результатами измерения для первой и второй частицы вне зависимости от того, как далеко друг от друга они расположены в момент измерения. В подходе, используемом в данной статье, это предполагает жесткую корреляцию между элементарными состояниями первой и второй частицы. На языке СЭС такая корреляция просматривается легко: СЭС для второй частицы должна быть негативной копией СЭС для первой частицы. Однако, каково должно быть в синглетном состоянии распределение в множестве СЭС для первой частицы, не ясно. Проще установить такое распределение, используя язык МСС. Имея в виду отмеченную ранее связь между СЭС и МСС, можно ожидать, что в синглетном состоянии МСС для второй частицы будет зеркальной копией МСС для первой частицы. Под этим мы будем подразумевать, что слои в МСС для второй частицы повторяют слои для первой частицы с точностью до смены ориентации на противоположную, т. е.

$$\mathbf{R}_1^{(k)} + \mathbf{R}_2^{(k)} = 0. \tag{28}$$

Здесь $\mathbf{R}_1^{(k)}$ и $\mathbf{R}_2^{(k)}$ — векторы ориентации k-го слоя для первой и второй частицы. Кроме того, функции $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ для этих частиц удовлетворяют условию $\varepsilon_1^{(k)}(\mathbf{r}) = \varepsilon_2^{(k)}(-\mathbf{r})$. Это условие совместно с равенством (28) и означает, что номера активных слоев в МСС для первой и второй частицы совпадают.

Отсюда сразу следует, что при любом $\mathbf{r}$ выполняется равенство $\mathbf{R}_1^{(k)}\mathbf{r} = -\mathbf{R}_2^{(k)}\mathbf{r}$. Это, в свою очередь, означает, что $j_1 = -j_2$. Иначе говоря, вне зависимости от расстояния между частицами в момент измерения регистрируемые проекции их спинов на любое направление $\mathbf{r}$ удовлетворяют соотношению (21). Таким образом реализуется ситуация парадокса ЭПР. При этом корреляция (21) не возникает в момент измерения, а является следствием структуры ансамбля МСС, соответствующего синглетному состоянию. Это значит, что корреляция возникает в момент приготовления ансамбля.

Отметим, что такая ситуация не противоречит высказыванию Эйнштейна о неполноте традиционной квантовой механики. В предложенной модели традиционный математический аппарат квантовой механики дополняется новым понятием — элементарным состоянием.

Благодаря жесткой корреляции между МСС для задания множества элементарных состояний, соответствующих синглетному квантовому состоянию, достаточно задать множество элементарных состояний для какой-нибудь одной из двух частиц, например для первой.

Будем считать, что элементарные состояния первой частицы описываются МСС, которые являются элементами множества Υ и удовлетворяют следующим условиям. В каждой МСС радиус-векторы $\mathbf{R}^{(k)}$, задающие ориентации слоев, случайно распределены по полной сфере $\mathfrak{R}$. Ориентации слоев в одной МСС распределены независимо друг от друга.

Так же, как в одночастичной системе, элементарному состоянию (элементарному событию) двухчастичной системы нельзя приписать никакой вероятностной меры. Вероятность можно приписать только событиям, являющимся элементами некоторой σ-алгебры. Эту σ-алгебру мы построим по аналогии с одночастичным случаем.

Потребуем, чтобы образующие σ-алгебры удовлетворяли следующим условиям.

1. Образующие являются подмножеством множества двухчастичных элементарных состояний.

2. Каждое двухчастичное элементарное состояние описывается двумя МСС.

3. В каждой такой паре МСС для слоев, имеющих одинаковый номер k', выполняются условия $\mathbf{R}_1^{(k')}\mathbf{r} = -\mathbf{R}_2^{(k')}\mathbf{r}$ и $\varepsilon_1^{(k')}(\mathbf{r}) = \varepsilon_2^{(k')}(-\mathbf{r})$.

4. $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ фиксированы, $\mathbf{r}_1$ — направление, по которому измеряется проекция спина первой частицы, $\mathbf{r}_2$ — то же самое для второй частицы. Векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ фиксируют σ-алгебру. Остальные условия фиксируют элементы σ-алгебры.

5. Для первой частицы фиксирован интервал $d\varepsilon$, $-1/2 < \varepsilon < +1/2$. Либо $\varepsilon^{(k')}(\mathbf{r}_1) \in d\varepsilon$, либо $-\varepsilon^{(k')}(\mathbf{r}_1) \in d\varepsilon$. Оба варианта соответствуют одному подмножеству (одному элементу σ-алгебры).

6. Фиксирован номер k активного слоя.

7. Каждое подмножество элементарных состояний для первой частицы состоит из всех МСС, принадлежащих Υ, для слоев которых выполняется одно из условий:

$$|\mathbf{R}_1^{(k')}\mathbf{r}_1 + \varepsilon^{(k')}(\mathbf{r}_1)| > 1/2, \quad k' = k, \tag{29}$$

$$|\mathbf{R}_1^{(k')}\mathbf{r}_1 + \varepsilon^{(k')}(\mathbf{r}_1)| \leqslant 1/2, \quad k' \leqslant k \quad (k' \text{ фиксировано}). \tag{30}$$

Случаи (29) и (30) соответствуют разным подмножествам.

8. В случае (29) подмножества различаются еще по двум параметрам j_1 и j_2: $j_1 = +1$, если $\mathbf{R}_1^{(k)}\mathbf{r}_1 > 0$; $j_1 = -1$, если $\mathbf{R}_1^{(k)}\mathbf{r}_1 < 0$; $j_2 = +1$, если $\mathbf{R}_2^{(k)}\mathbf{r}_2 > 0$; $j_2 = -1$, если $\mathbf{R}_2^{(k)}\mathbf{r}_2 < 0$.

Так же, как в одночастичном случае, легко проверяется, что любое из элементарных событий из множества синглетных элементарных состояний, вне зависимости от $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, принадлежит какому-нибудь из перечисленных подмножеств.

Для каждого из таких подмножеств построим вероятностную меру, считая, что случайные значения $\mathbf{R}_1$ равномерно распределены по сфере $\mathfrak{R}$, а случайные значения ε равномерно распределены по интервалу $(-1/2, +1/2)$.

Пусть фиксированы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $d\varepsilon$, j_1 и j_2. Пусть $k' = 1$. Тогда вероятность реализации неравенства (29) описывается выражением

$$\begin{aligned}
&P^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon, j_1, j_2)d\varepsilon = \\
&= d\varepsilon\frac{N}{2}\int d\mathbf{R}\,\Theta[-j_2\mathbf{R}\mathbf{r}_2]\left[\Theta\left[j_1(\mathbf{R}\mathbf{r}_1+\varepsilon)-\frac{1}{2}\right]+\Theta\left[j_1(\mathbf{R}\mathbf{r}_1-\varepsilon)-\frac{1}{2}\right]\right] = \\
&\qquad = d\varepsilon\frac{N}{2}\int d\mathbf{R}\,\Theta[-j_1j_2\mathbf{R}\mathbf{r}_2]\left[\Theta\left[\mathbf{R}\mathbf{r}_1+\varepsilon-\frac{1}{2}\right]+\Theta\left[\mathbf{R}\mathbf{r}_1-\varepsilon-\frac{1}{2}\right]\right].
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$P^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = \sum_{j_1, j_2} P^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon, j_1, j_2) = N2\pi. \tag{31}$$

Вероятность реализации неравенства (30) описывается выражением

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon)d\varepsilon = d\varepsilon\frac{N}{2}\int d\mathbf{R}\,&\left[\Theta\left[\frac{1}{2}+\mathbf{R}\mathbf{r}_1+\varepsilon\right]\Theta\left[\frac{1}{2}-\mathbf{R}\mathbf{r}_1-\varepsilon\right]+\right. \\
&\left.+\Theta\left[\frac{1}{2}+\mathbf{R}\mathbf{r}_1-\varepsilon\right]\Theta\left[\frac{1}{2}-\mathbf{R}\mathbf{r}_1+\varepsilon\right]\right] = N2\pi\,d\varepsilon.
\end{aligned} \tag{32}$$

Из (31) и (32) получаем

$$N = (4\pi)^{-1}, \qquad \tilde{P}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = 1/2.$$

Далее, повторяя выкладки для одночастичной системы, получим, что при фиксированных $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $d\varepsilon$, j_1, j_2 вероятность у активного слоя иметь номер k описывается формулой

$$P^{(k)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon, j_1, j_2) = \\ = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2^k}\int d\mathbf{R}\Theta[-j_1 j_2 \mathbf{R}\mathbf{r}_2]\left[\Theta\left[\mathbf{R}\mathbf{r}_1 + \varepsilon - \frac{1}{2}\right] + \Theta\left[\mathbf{R}\mathbf{r}_1 - \varepsilon - \frac{1}{2}\right]\right], \quad (33)$$

а вероятность обнаружить у активного слоя номер, бо́льший k, описывается формулой

$$\tilde{P}^{(k)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = 2^{-k}. \quad (34)$$

Формулы (33) и (34) задают вероятностные меры для образующих выбранной нами σ-алгебры. Продолжая процедуру вычисления по образцу формул (17) и (18), получим выражение

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, j_1, j_2) = \frac{1}{4}\big(1 - j_1 j_2 (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)\big), \quad (35)$$

описывающее вероятность обнаружить у первой частицы по направлению $\mathbf{r}_1$ проекцию спина, равную $j_1/2$, а у второй частицы по направлению $\mathbf{r}_2$ обнаружить проекцию спина, равную $j_2/2$.

Из формулы (35) для корреляционной функции получаем

$$E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4}\sum_{j_1, j_2} j_1 j_2 P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, j_1, j_2) = -\frac{1}{4}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2). \quad (36)$$

Распределение (35) и корреляционная функция (36) совпадают с получающимися в стандартной квантовой механике и нарушают неравенства Белла. При $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ и $j_1 = j_2$ правая часть (35) обращается в ноль. Это соответствует парадоксу ЭПР.

Скажем несколько слов о проблеме локальности в предложенной модели. Причина корреляций между результатами измерений для первой и второй частицы формируется не в момент измерения, а в момент приготовления синглетного состояния. Конкретно эта корреляция обусловлена тем, что у обеих частиц в каждом элементарном событии номера активных слоев в МСС совпадают. Конечно, предполагается, что каждый из двух измерительных приборов может самостоятельно обнаруживать этот активный слой у своей частицы.

В статье достаточно подробно описано, как с помощью функций $\varepsilon^{(k')}(\mathbf{r})$ активный слой может находить первый прибор. О второй частице только сказано, что у нее активный слой имеет тот же номер. Чтобы сделать процедуры измерения для первой и второй частицы полностью независимыми, можно поступить следующим образом. По рассматриваемой МСС (и функциям $\varepsilon^{(k')}(\mathbf{r})$) для первой частицы строим по сформулированному ранее рецепту соответствующую СЭС. Для второй частицы строим СЭС как негативную копию СЭС для первой. Эти действия относятся не к процедуре измерения, а к процедуре приготовления исследуемого состояния. По приготовленным таким образом сферам элементарных состояний отдельных частиц каждый из измерительных приборов может независимо определить проекцию спина на требуемое направление.

Для реализации на компьютере такая схема моделирования измерения неудобна. Более удобной оказывается схема, которая моделирует эксперимент с так называемым отложенным выбором. Эта схема выглядит следующим образом. В рассматриваемом элементарном событии у первой частицы, помимо результата измерения проекции спина на направление $\mathbf{r}_1$, фиксируется номер активного слоя. У второй частицы в том же элементарном событии проверяются неравенства $\mathbf{R}_2\mathbf{r}_2 > 0$ и $\mathbf{R}_2\mathbf{r}_2 < 0$ для достаточно большого количества слоев и фиксируются соответствующие значения j_2 с указанием номера слоя. От количества проверенных слоев зависит точность окончательного результата. Так как вклад в этот результат быстро убывает с ростом номера активного слоя, то точность быстро возрастает по мере увеличения проверенных слоев.

После того как наблюдательная часть эксперимента заканчивается, наступает этап обработки результатов измерения. Если целью эксперимента является установление каких-то корреляций между результатами измерений для первой и второй частицы, то эти результаты должны быть собраны в одном месте. В этом смысле этот этап с необходимостью будет нелокальным. Однако это не является особенностью квантового эксперимента, то же самое справедливо и для классического эксперимента.

В рассматриваемом нами случае при обработке результатов наблюдений из всех значений j_2, полученных для различных слоев, надо выбрать только те, которые соответствуют слою, номер которого совпадает с номером активного слоя, найденным в наблюдении с первой частицей. Эту процедуру можно рассматривать как моделирование процедуры совпадения, необходимой в такого типа экспериментах. Таким образом, вся нелокальность связывается исключительно с процессом обработки результатов измерений.

При реализации предложенной процедуры на компьютере выяснилось, что возможно и более тонкое разбиение множества элементарных событий на подмножества вероятностных событий. Именно, можно рассматривать события, соответствующие $\varepsilon(\mathbf{r}) \in d\varepsilon$ и $-\varepsilon(\mathbf{r}) \in d\varepsilon$, как принадлежащие разным элементам σ-алгебры. Для компьютерной реализации такая σ-алгебра более удобна, но для аналитических выкладок она менее удобна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанная процедура может рассматриваться как действующая модель квантового измерения, а не как его имитация. Соответственно, эта модель вполне пригодна для проведения экспериментов с целью проверки тех или иных утверждений относительно квантовых систем.

Как всякая частная модель, она не очень хорошо приспособлена для обоснования *положительных* утверждений, т. е. для обоснования того, что высказанное утверждение безусловно справедливо. Однако эта модель хорошо приспособлена для *отрицательных* утверждений, т. е. для опровержения того, что некоторое утверждение справедливо.

В частности, эта модель опровергает очень часто приводимое утверждение о том, что экспериментально наблюдаемое нарушение неравенства Белла доказывает отсутствие локальной физической реальности, которая является причиной квантовых явлений.

Предложенная модель может оказаться весьма полезной для проведения опытов по так называемой квантовой телепортации (см., например, [21]). Можно надеяться, что она поможет снять ореол таинственности с этого физического явления. По поводу этого смотрите статью [22].

С другой стороны, для целей квантовой криптографии предложенная модель пригодна лишь частично. Ее можно использовать для экспериментальной проверки тех или иных утверждений в данной области. Однако для практического использования в квантовой криптографии эта модель не пригодна. Дело в том, что квантовая криптография основывается на наличии в квантовых системах наблюдаемых, которые нельзя одновременно измерить ни при каких обстоятельствах. В предложенной модели имеются наблюдаемые, несовместимые только относительно частного способа измерения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petersen A.* // Bull. Atom. Scientists. 1963. V. 19. P. 8.
2. *Славнов Д. А.* // ЭЧАЯ. 2007. Т. 38, № 2. С. 295.
3. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2006. Т. 149, № 3. С. 457.
4. *Эмх Ж.* Алгебраический подход в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
5. *Хоружий С. С.* Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М.: Наука, 1986.

6. *Боголюбов Н. Н. и др.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
7. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
8. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
9. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
10. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
11. *фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
12. *Matzkin A.* Local Hidden Variables Can Account for EPR Quantum Correlations. quant-ph/0703271.
13. *Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н.* // УФН. 1936. Т. 16, №4. С. 440.
14. *Бом Д.* Квантовая теория. М.: Наука, 1965.
15. *Бор Н.* Дискуссия с Эйнштейном по проблемам теории познания в атомной физике // Избр. науч. тр.: В 2 т. М., 1971. Т. 2. С. 399.
16. *Фок В. А.* // УФН. 1936. Т. 16, вып. 4. С. 436.
17. *Bell J. S.* // Physics. 1965. V. 1. P. 195.
18. *Bell J. S.* // Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy. Cambridge, 1993. P. 139.
19. *Clauser J. F. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 23. P. 880.
20. *Aspect A., Dalibard J., Roger G.* // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1804.
21. *Боумейстер Д. и др.* Эксперименты по квантовой телепортации кубитов // Физика квантовой информации / Под общ. ред. Боумейстера Д., Экерта А., Цайлингера А. М. М., 2002. С. 95.
22. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2008. Т. 157, №1. С. 79.