**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 157, № 1
октябрь, 2008**

© **2008 г.** **А. Ю. Хренников***

ЭКСПЕРИМЕНТ ЭПР–БОМА И НЕРАВЕНСТВО БЕЛЛА: КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основная цель настоящей статьи – информировать физическое сообщество (в особенности специалистов в области квантовой информации) об исследованиях задачи о вероятностной совместности семейства случайных переменных, т.е. о возможности реализовать такое семейство на основе единой вероятностной меры (построить единое колмогоровское вероятностное пространство). Эти исследования были начаты сто лет назад Булем. Полное решение задачи было получено советским математиком Воробьевым в 60-х годах. Оказывается, специалисты по теории вероятностей и статистике получили неравенства для вероятностей и корреляций, среди которых можно найти знаменитое неравенство Белла и его обобщения.

Ключевые слова: неравенство Белла, нелокальность, “смерть реальности”, вероятностная несовместность случайных величин, булево необходимое условие, теорема Воробьева, контекстуальное описание эксперимента ЭПР–Бома.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель данной статьи состоит в том, чтобы представить физическому сообществу (в особенности специалистам, изучающим квантовую информацию) результаты исследований задачи о *вероятностной совместности семейства случайных величин*, т.е. о возможности реализовать такое семейство на основе единой вероятностной меры (построить единое колмогоровское вероятностное пространство). Эти исследования велись в течение последних ста лет, они непосредственно связаны с неравенством Белла. Априори исследования вероятностной совместности не имеют прямого отношения к хорошо известным фундаментальным проблемам, которые, как правило, обсуждаются физиками, а именно *реализму и локальности* [1]–[15] (по поводу недавних дискуссий см., например, [16]–[21]).

Заметим, что из наших рассмотрений не следует, что традиционную интерпретацию неравенств Белла [1]–[15] следует отвергнуть. В принципе условия Белла (нелокальность, “смерть реальности”) также можно принять во внимание. Наша

*International Center for Mathematical Modeling in Physics, Engineering and Cognitive Science, Växjö University, Växjö, Sweden. E-mail: Andrei.Khrennikov@vxu.se

цель состоит в том, чтобы показать, что условия Белла являются только *достаточными, но не необходимыми* для нарушения неравенств Белла. Поэтому возможны и другие интерпретации нарушения этих неравенств. Альтернативу Белла – или локальный реализм, или квантовая механика – можно продолжить: или существование единой вероятностной меры[1)] для несовместных экспериментальных контекстов, или квантовая механика. Заметим, что в классической (колмогоровской) теории вероятностей существование такой единой вероятностной меры никогда не предполагалось, но Белл использовал ее для вывода своего неравенства (в выводе Белла использовалось обозначение ρ). Поэтому, если использовать неравенство Белла, следует найти разумные доводы в пользу точки зрения Белла. Возникает вопрос: почему мы используем такое допущение в квантовой физике, хотя никогда не использовали его в классической теории вероятностей?

Данная работа основана на результатах исследования следующих математиков, интересующихся вероятностной структурой неравенства Белла: Аккарди [24]–[26], Файна [27], Питовского [28], [29], Растала [30], Хесса и Филиппа [31]–[33] и автора [34]–[38]. С одной стороны, удивительно, что столь многие люди практически независимо пришли к одному и тому же заключению. С другой стороны, удивительно и то, что это заключение не слишком хорошо известно физикам (даже математически ориентированным исследователям, работающим в области квантовой теории информации). Определенно имеется проблема в коммуникации между физическим и математическим сообществами. Автор надеется, что данная статья проинформирует физиков о некоторых общих взглядах математиков на неравенство Белла.

Насколько нам известно, только один физик (и, более того, прекрасный экспериментатор!) – Клышко [39]–[42] – получил аналогичное заключение, причем независимо от математиков (он ничего не знал об упомянутых исследованиях по вероятностному анализу аргументов Белла). Укажем также на серию статей [43]–[47], где использовалась квантово-томографическая [48]–[52] интерпретация неравенства Белла. Хотя эти авторы никогда не подчеркивали "неколмогоровость" своего подхода, ясно, что квантово-томографическая схема для неравенства Белла основана на семействе вероятностных мер, связанных с экспериментальными контекстами. Невозможно построить единое вероятностное пространство, пригодное для описания полного набора статистических данных.

Наконец, заметим, что Волович [53], [54] указал на роль пространственных переменных в исследованиях ЭПР–Бома (что удивительным образом отсутствовало в современных рассмотрениях). Он (совместно с автором этой работы) также подчеркнул радикальное различие между исходным экспериментом ЭПР[2)] для корреляций координат и импульсов и его бомовской версией для поляризации фотона или спина электрона (см. раздел 9).

[1)] Используя терминологию современной теории вероятностей, следует говорить о существовании единого колмогоровского вероятностного пространства [22], [23].

[2)] Эксперимент Эйнштейна–Подольского–Розена.

Отметим, что анализ вероятностных допущений в аргументах Белла исключительно важен для современной квантовой физики, особенно для квантовой информации, криптографии и компьютерных вычислений. Следствия для оснований квантовой механики (и нанотехнологии), вытекающие из современной интерпретации нарушения неравенства Белла, поистине огромны. Поэтому условия вывода этого неравенства необходимо тщательно проверить. В данной статье мы сосредоточимся на анализе возможности использования единого вероятностного распределения, лежащего в основе двумерных маргинальных распределений, теоретически предсказанных квантовой механикой (ср. [55], где представлен общий анализ всех допущений в теоремах Белла и фон Неймана о несуществовании скрытых параметров).

2. ВЕРОЯТНОСТНАЯ СОВМЕСТНОСТЬ

Рассмотрим систему трех случайных величин a_i, $i = 1, 2, 3$. Предположим для простоты, что они принимают дискретные значения и, более того, являются дихотомическими: $a_i = \pm 1$. Предположим, что можно измерить как эти переменные, так и их пары, а потому корректно определена совместная вероятность для пар: $P_{a_i,a_j}(\alpha_i, \alpha_j) \geqslant 0$, $\sum_{\alpha_i,\alpha_j=\pm 1} P_{a_i,a_j}(\alpha_i, \alpha_j) = 1$.

Вопрос. *Можно ли построить совместное вероятностное распределение* $P_{a_1,a_2,a_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *для любой тройки случайных величин*?

Удивительно, что этот вопрос сто лет назад поставил и ответил на него Буль (изобретатель булевых алгебр). Этот факт обнаружил Питовски [56], [57] (см. также предисловие в [18]). Заметим, что легко показать, что ответ отрицателен (см. приведенный ниже пример). Основная задача состоит в нахождении условий существования вероятностного распределения с заданными маргинальными вероятностями. Для исследования этой задачи Буль вывел неравенство, которое совпадает с хорошо известным в физике неравенством Белла. Из нарушения этого неравенства Буля–Белла следует, что для такой системы трех случайных величин совместное вероятностное распределение $P_{a_1,a_2,a_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ не существует.

Пример [58]. Предположим, что

$$P(a_1 = +1, a_2 = +1) = P(a_1 = -1, a_2 = -1) = \frac{1}{2},$$
$$P(a_1 = +1, a_3 = +1) = P(a_1 = -1, a_3 = -1) = \frac{1}{2},$$
$$P(a_2 = +1, a_3 = -1) = P(a_2 = -1, a_3 = +1) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$P(a_1 = +1, a_2 = -1) = P(a_1 = -1, a_2 = +1) = 0,$$
$$P(a_1 = +1, a_3 = -1) = P(a_1 = -1, a_3 = +1) = 0,$$
$$P(a_2 = +1, a_3 = +1) = P(a_2 = -1, a_3 = -1) = 0.$$

Тогда невозможно построить вероятностную меру, которая давала бы эти маргинальные распределения. Это можно показать непосредственно [58]. Предположим, что найдется такое семейство вещественных постоянных $P(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3), \epsilon_j = \pm 1$, что

$$P(\epsilon_1, \epsilon_2, +1) + P(\epsilon_1, \epsilon_2, -1) = P(a_1 = \epsilon_1, a_2 = \epsilon_2), \qquad \dots,$$
$$P(+1, \epsilon_2, \epsilon_3) + P(-1, \epsilon_2, \epsilon_3) = P(a_2 = \epsilon_2, a_3 = \epsilon_3).$$

Тогда немедленно получаем, что некоторые из этих чисел должны быть отрицательными. С другой стороны, можно применить неравенство Белла для корреляций: $|\langle a_1, a_2\rangle - \langle a_2, a_3\rangle| \leqslant 1 - \langle a_1, a_3\rangle$. Имеем

$$\langle a_1, a_2\rangle = 1, \qquad \langle a_1, a_3\rangle = 1, \qquad \langle a_2, a_3\rangle = -1.$$

Из неравенства Белла должно следовать, что $1 - (-1) = 2 \leqslant 1 - 1 = 0$. Заметим, что, следуя Булю, мы рассматриваем неравенство Белла просто как необходимое условие для вероятностной совместности.

Таким образом, неравенство Белла было известно в теории вероятностей. Оно было выведено как связь, нарушение которой влечет несуществование совместного вероятностного распределения.

Различные обобщения этой задачи исследовались в теории вероятностей. Окончательное решение (для системы n случайных переменных) получил Воробьев [58] (как это обнаружили Хесс и Филипп [33]). Его результат применялся в чисто макроскопических ситуациях – в теории игр и теории оптимизации.

Подчеркнем, что для математиков рассмотрение неравенств типа неравенства Белла не повлекло за собой революционного пересмотра законов природы. Совместное распределение вероятностей не существует ровно постольку, поскольку эти наблюдаемые нельзя измерить одновременно.

3. ЭКСПЕРИМЕНТ ЭПР–БОМА И ВЕРОЯТНОСТНАЯ НЕСОВМЕСТНОСТЬ

Рассмотрим теперь одно специальное применение теоремы Буля – эксперимент ЭПР–Бома по измерению проекции спина для пары запутанных фотонов (см. [35])[3]. Обозначим соответствующие случайные величины как a_θ^1 и a_θ^2, где верхний индекс $k = 1, 2$ обозначает наблюдаемые для соответствующей частицы в паре запутанных фотонов, θ – угловой параметр, задающий установки делителя поляризованных лучей. Для наших целей достаточно рассмотреть три различных угла: θ_1, θ_2, θ_3 (в действительности для реальных экспериментальных проверок следует рассматривать четыре угла, но это ничего не меняет в наших рассмотрениях).

[3] Хотя и теорема Буля, и теорема Белла основаны на одном и том же неравенстве, их заключения совершенно различны: они состоят соответственно в утверждении о “несуществовании совместного вероятностного распределения” и в альтернативе “или локальный реализм, или квантовая механика”. Мы хотим проанализировать эксперимент ЭПР–Бома с позиций Буля (Воробьева, Аккарди, Файна, Питовского, Растала, Хесса, Филиппа и автора).

Используя условие точной корреляции для синглетного состояния, можно отождествить наблюдаемые: $a_\theta(\lambda) \equiv a_\theta^1(\lambda) = a_\theta^2(\lambda)$. Корректно определены дискретные вероятностные распределения $P_{a_\theta}(\alpha)$ и $P_{a_{\theta_i}, a_{\theta_j}}(\alpha, \beta)$, где $\alpha, \beta = \pm 1$. Заметим, что в стандартных выводах неравенств типа неравенства Белла для вероятностей [1] (а не корреляций), как правило, используются следующие символические выражения для вероятностей: $P(a_\theta(\lambda) = \alpha)$ и $P(a_{\theta_i}(\lambda) = \alpha, a_{\theta_j}(\lambda) = \beta)$. Однако тем фактом, что мы начинаем с единой вероятности P (определенной на едином пространстве "скрытых переменных" Λ), мы повторяем схему Белла (которую мы не хотели бы повторять в данной статье).

Таким образом, мы оказываемся в точности в ситуации, которая рассматривалась в теории вероятностей. Буль и Воробьев спросили бы: имеют ли проекции поляризаций совместное вероятностное распределение для любой тройки углов? Можно ли использовать единую вероятностную меру P? Ответ отрицателен, потому что неравенство Буля–Белла нарушено (или потому что нарушены необходимые условия теоремы Воробьева). Таким образом, невозможно ввести совместное вероятностное распределение для произвольной тройки углов.

С другой стороны, Белл начал свое рассмотрение с допущения, что такая единая вероятностная мера существует [1]. Он представил все корреляции как интегралы по одной и той же вероятностной мере P:

$$\langle a_{\theta_i}, a_{\theta_j} \rangle = \int_\Lambda a_{\theta_i}(\lambda) a_{\theta_j}(\lambda)\, dP(\lambda).$$

(Мы будем использовать символ P вместо предложенного Беллом для обозначения вероятности ρ.)

В противоположность Беллу Буль вряд ли вдохновился бы свидетельствами о том, что неравенство Белла нарушается в эксперименте ЭПР–Бома. Ситуация, когда попарные вероятностные распределения существуют, но единую вероятностную меру P построить нельзя, встречается достаточно часто. Что могло бы быть причиной существования единой вероятностной меры P в случае, когда одновременное измерение трех проекций поляризации невозможно?

Априори несуществование единой вероятностной меры не имеет отношения к нелокальности или "смерти реальности". Основная проблема отнюдь не в допущении, что проекции поляризации представляются в "локальном виде" $a_{\theta_i}^1(\lambda)$, $a_{\theta_j}^2(\lambda)$, а не в "нелокальном виде" $a_{\theta_i}^1(\lambda \mid a_{\theta_j}^2 = \beta)$, $a_{\theta_j}^2(\lambda \mid a_{\theta_i}^1 = \alpha)$, $\alpha, \beta = \pm 1$. Проблема также и не в соотнесении каждому λ определенного значения случайной величины ("реализм"). Проблема в невозможности реализовать три случайные величины $a_{\theta_1}(\lambda)$, $a_{\theta_2}(\lambda)$, $a_{\theta_3}(\lambda)$ на одном и том же пространстве параметров Λ с одной и той же вероятностной мерой P. Используя современную терминологию, будем говорить, что невозможно построить колмогоровское вероятностное пространство для трех таких случайных переменных.

В такой ситуации было бы разумно найти источники несуществования колмогоровского вероятностного пространства. Заметим, что до сих пор мы действовали в чисто классических рамках – ни ψ-функция, ни некоммутативные операторы не рассматривались. Как мы видели [7], [14], [15], экспериментальные статистические данные нарушают необходимые условия существования единой вероятности P. Поэтому при вероятностном анализе эксперимента ЭПР–Бома целесообразно действовать чисто классически. Это мы и делаем в следующем разделе.

4. КОНТЕКСТУАЛЬНАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ

Как уже подчеркивалось в книге автора [35], ключом решения этой проблемы является то, что в эксперименте ЭПР–Бома комбинируются статистические данные, собранные на основе трех различных комплексов физических условий (контекстов). Контекст C_1 задается углами θ_1, θ_2, контекст C_2 – углами θ_1, θ_3, и, наконец, контекст C_3 – углами θ_2, θ_3. Напомним, что уже в книге Колмогорова [22] (где представлена современная аксиоматическая теория вероятностей) указывалось, что каждый экспериментальный контекст определяет свое собственное вероятностное пространство. Согласно Колмогорову три контекста C_j, $j = 1, 2, 3$, должны, вообще говоря, порождать три колмогоровских пространства: с множествами параметров Ω_j и вероятностями P_j.

Наиболее естественный способ найти источник появления таких пространств – это обратить внимание на то, что (как подчеркивал Бор) результат измерения определяется не только начальным состоянием системы (до измерения), но и полным комплексом экспериментальных условий. Таким образом, состояния измерительных приборов играют важную роль при определении экспериментальных контекстов. Следует ввести не только пространство Λ состояний системы (пары фотонов), но и пространство состояний делителей поляризованных лучей Λ_θ[4]. Таким образом, для контекста C_1 пространство параметров ("скрытых переменных") имеет вид [35]

$$\Lambda_1 = \Lambda \times \Lambda_{\theta_1} \times \Lambda_{\theta_2},$$

для контекста C_2 –

$$\Lambda_2 = \Lambda \times \Lambda_{\theta_1} \times \Lambda_{\theta_3}$$

и для контекста C_3 –

$$\Lambda_3 = \Lambda \times \Lambda_{\theta_2} \times \Lambda_{\theta_3}.$$

Очевидно, надо рассмотреть следующие три вероятностные меры: $dP_1(\lambda, \lambda_{\theta_1}, \lambda_{\theta_2})$, $dP_2(\lambda, \lambda_{\theta_1}, \lambda_{\theta_3})$ и $dP_3(\lambda, \lambda_{\theta_2}, \lambda_{\theta_3})$. Случайные переменные являются функциями на соответствующих пространствах $a_{\theta_1}(\lambda, \lambda_{\theta_1})$, $a_{\theta_2}(\lambda, \lambda_{\theta_2})$, $a_{\theta_3}(\lambda, \lambda_{\theta_3})$. И, конечно, выполнено "условие локальности" Белла (в противном случае мы бы имели, например, $a_{\theta_1}(\lambda, \lambda_{\theta_1}, \lambda_{\theta_2})$, $a_{\theta_2}(\lambda, \lambda_{\theta_2}, \lambda_{\theta_1})$ для контекста C_1).

В этой ситуации нужны серьезные аргументы, чтобы предполагать, что эти три вероятностные распределения можно получить из единой вероятностной меры $dP_1(\lambda, \lambda_{\theta_1}, \lambda_{\theta_2}, \lambda_{\theta_3})$ на пространстве $\Lambda = \Lambda \times \Lambda_{\theta_1} \times \times \Lambda_{\theta_2} \times \Lambda_{\theta_3}$.

[4] Мы исходим из допущения, что состояние делителя поляризованных лучей зависит только от ориентации θ. В принципе мы должны рассмотреть два пространства для каждого θ для первого и второго делителей. В реальности они не тождественны.

5. КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

Из приведенного в разделе 4 анализа эксперимента ЭПР–Бома следует, что наиболее естественным объяснением несуществования единого вероятностного пространства является предположение о том, что *волновая функция не определяет вероятность в квантовой механике* (в отличие от допущения Белла). Напомним, что правило Борна содержит не только ψ-функцию, но и спектральные семейства коммутирующих операторов, измеряемых одновременно. Поэтому вероятностное распределение определяется ψ-функцией вместе со спектральными семействами, т.е. наблюдаемыми.

Такая интерпретация математических символов квантового формализма не влечет за собой ни нелокальности, ни “смерти реальности”[5)].

6. НЕРАВЕНСТВО БЕЛЛА И ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ И p-АДИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Отыскивая в физической литературе следы заключения Буля и Воробьева о несуществовании вероятности, можно заметить, что эта проблема широко обсуждалась, но в довольно необычном виде (по крайней мере, с математической точки зрения). В ходе наших дискуссий о вероятностной структуре неравенств Белла А. Аспект постоянно указывал на некоторую возможность избежать альтернативы Белла (или локальный реализм, или квантовая механика). Эта упомянутая Аспектом возможность состоит в рассмотрении отрицательных значений вероятностей. Полный обзор разрешения “парадокса Белла” с помощью отрицательных вероятностей приведен в работе [59]. Хотя с математической точки зрения отрицательные вероятности бессмысленны (см., однако, [60]–[67] по поводу попытки определить их на математическом уровне строгости, используя p-адический анализ), имеется некоторый смысл в рассмотрении отрицательных вероятностей в физике. В свете наших предыдущих исследований эту деятельность можно интерпретировать как знак понимания того, что “нормальное вероятностное распределение” не существует. Неожиданным образом подход к неравенству Белла, основанный на отрицательных вероятностях, можно рассматривать в связи с точкой зрения Буля и Воробьева на нарушение неравенства Белла.

Как уже было замечено, отрицательные вероятности не могут возникать в колмогоровской модели, где $P \in [0,1]$ по определению. Тем не менее многие выдающиеся физики, например Дирак и Фейнман, использовали их в ряде физических моделей. Они рассматривали отрицательные вероятности как “виртуальные вероятности”, которые могут появляться в промежуточных вычислениях, но в конце концов исчезают, приводя к ответу в виде стандартных вероятностей $P \in [0,1]$.

Другой взгляд на отрицательные вероятности был предложен автором [60]–[67]. Следуя фон Мизесу, можно определить вероятности непосредственно как пределы

[5)] Не следует упрекать автора за критику Белла. Белл сам поступил подобным же образом с теоремой фон Неймана о несуществовании скрытых параметров (см. [1]), указав на нефизичность некоторых допущений фон Неймана.

относительных частот:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{n}{N}.$$

Поскольку рациональные числа $n/N \in [0,1]$, их предел также принадлежит $[0,1]$. Теперь заметим, что на множестве рациональных чисел можно не только ввести обычную вещественную метрику $\rho(x,y)$, задаваемую абсолютным значением $|\cdot|$, но и для каждого простого числа $p>1$ можно определить так называемое p-адическое абсолютное значение $|\cdot|_p$ и соответствующее p-адическое расстояние $\rho_p(x,y) = |x-y|_p$. Поскольку частоты являются рациональными числами, можно рассматривать их предел не только по отношению к вещественной метрике ρ, но и по отношению к любой p-адической метрике. Таким способом получаются p-адические вероятности $P \in Q_p$, где Q_p – поле p-адических чисел (пополнение Q относительно ρ_p). Наконец, заметим, что, например, отрицательные натуральные числа можно получать как пределы рациональных чисел $n/N \in [0,1]$ по любой p-адической метрике.

7. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДЕТЕКТОРОВ (ПРЕДСТАВИТЕЛЬНАЯ ВЫБОРКА)

Другой след несуществования единой вероятности можно обнаружить в физической литературе об эффективности детекторов [68]–[70] или, в более общем случае, о непредставительной выборке [71], [72]. Хорошо известно, что реальные эксперименты индуцируют колоссальные потери фотонов. Нет априорных причин предполагать, что ансамбли запутанных фотонов, прошедших делители поляризованных лучей, имеют тождественные статистические свойства при различных выборах ориентации (гипотеза о представительной выборке). Такое тождество статистических свойств является следствием существования единой вероятности P, одновременно пригодной для всех экспериментальных установок. Таким образом, из непредставительности выборки следует, что такой вероятности не существует. Однако, вообще говоря, несуществование единой вероятности не эквивалентно непредставительной выборке. Контекстуальность (зависимость от экспериментального контекста) может проявляться через непредставительную выборку, но не обязательно.

8. ТЕОРЕМА ЭБЕРХАРДА–БЕЛЛА

В квантово-информационном сообществе достаточно распространена точка зрения, что из вывода неравенства Белла можно полностью исключить вероятностные распределения и действовать, оперируя с частотами. Обычно при этом ссылаются на результаты работ [10]–[12], которые мы будем называть теоремой Эберхарда–Белла (в действительности первый вывод неравенства Белла с использованием частот был дан Стаппом [9], так что, возможно, лучше говорить о теореме Белла–Стаппа–Эберхарда). Согласно этой теореме неравенство Белла можно получить только при допущении реализма (отображения $\lambda \to a_\theta(\lambda)$ корректно определены) и локальности (случайная величина $a_\theta(\lambda)$ не зависит от других переменных, измеряемых одновременно с ней). Таким образом, в противоположность исходному выводу Белла, существование вероятностной меры P, пригодной для всех проекций поляризации (или спина), не предполагается.

На первый взгляд кажется, что наше предыдущее рассмотрение не связано с теоремой Эберхарда–Белла. Можно было бы сказать, что Белл действовал неправильно, но всё же его аргументы верны, поскольку они подтверждены Эберхардом в частотном подходе.

Как было показано в работе [35], использование частот вместо вероятностей не улучшает рассмотрения Белла (см. также [33]). Контекстуальная структура эксперимента ЭПР–Бома снова играет ключевую роль. Если изучить подробности доказательства Эберхарда, то станет очевидно, что он работал со статистическими данными, полученными на основе трех различных экспериментальных контекстов C_1, C_2, C_3 таким образом, как если бы они были получены на основе единого контекста. Он взял результаты, относящиеся к одним экспериментальным контекстам, и добавил их или вычел из результатов, относящихся к другим экспериментальным контекстам. С точки зрения статистики такие манипуляции недопустимы. Данные, полученные для совершенно различных выборок, никогда не подвергаются алгебраическому смешиванию. Таким образом, чтобы действовать в рамках подхода Эберхарда, следует найти некие весомые причины, по которым ситуация в эксперименте ЭПР–Бома радикально отличается от общей ситуации в статистических экспериментах. Автор не видит таких причин. Структура эксперимента ЭПР–Бома весьма типична с общей статистической точки зрения.

Более того, подход Эберхарда указал на дополнительный источник несуществования единого вероятностного распределения (см. [73], а также [74]–[76]). Даже если игнорировать вклад измерительных приборов, ψ-функция не обязательно определяет единое вероятностное распределение. В подходе Эберхарда следует работать с результатами, полученными в различных прогонах эксперимента. Возникает вопрос: можно ли гарантировать, что различные прогоны эксперимента дадут одно и то же вероятностное распределение скрытых параметров? Представляется, что нет причин для такого допущения. Мы не можем контролировать источник на уровне скрытых переменных. Может оказаться, что ψ-функция есть просто символическое представление источника, но она представляет гигантский ансамбль вероятностных распределений скрытых переменных. Если, например, скрытые переменные даются классическими полями (см., например, [77]–[79]), то конечное число прогонов реализаций (испусканий запутанных фотонов) может быть, а может и не быть представительным для ансамбля скрытых переменных, производимых источником.

9. СРАВНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ЭПР И ЭПР–БОМА

Как правило, между исходным экспериментом ЭПР [80] по корреляциям координат и импульсов и экспериментом ЭПР–Бома по проекциям спина (или поляризации) не проводится четкого различия. Существует мнение, что это одно и то же, просто организация эксперимента подверглась модификации с целью перейти от “мысленного эксперимента” к реальному физическому эксперименту. Однако это не так! Следует четко различать эти два эксперимента.

Ключевое различие между исходным экспериментом ЭПР и новым экспериментом, предложенным Бомом, состоит в том, что эти эксперименты касаются квантовых состояний, имеющих существенно различные свойства. Исходное состояние ЭПР

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p\right\} dp$$

и синглетное состояние

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\big),$$

которое используется в эксперименте ЭПР–Бома, имеют только одно общее: они описывают коррелированные (или, используя современную терминологию, запутанные) системы. В отличие от состояния ЭПР–Бома, можно в действительности (как утверждали Эйнштейн, Подольский и Розен) связать с исходным состоянием ЭПР единую вероятностную меру, описывающую несовместные квантовые наблюдаемые (координату и импульс). Строгое доказательство в терминах теории вероятностей было предложено в работах [81], [82]. С другой стороны, как мы видели, для синглетного состояния нельзя построить вероятностную модель, описывающую элементы реальности, соответствующей несовместным наблюдаемым.

Таким образом, исходное состояние ЭПР и в самом деле является исключительным с общей точки зрения статистического анализа. Однако состояние ЭПР–Бома ведет себя стандартно. В действительности нет ясного физического объяснения, почему статистические данные для несовместных контекстов в одном случае могут быть основаны на едином колмогоровском пространстве, в другом – не могут. Одно возможное объяснение состоит в том, что “хорошие” вероятностные свойства исходного эксперимента ЭПР возникают только из-за того, что это “мысленный эксперимент.”

Приведем теперь локальную реалистичную модель для исходного состояния ЭПР (см. [81], [82]). Эта модель была опубликована только в трудах конференций, поэтому целесообразно представить ее здесь подробно.

Гильбертово пространство двух одномерных частиц имеет вид $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$, а канонические координаты и импульсы q_1, q_2, p_1, p_2 подчиняются коммутационным соотношениям

$$[q_m, p_n] = i\delta_{mn}, \qquad [q_m, q_n] = 0, \qquad [p_m, p_n] = 0, \qquad m, n = 1, 2. \tag{1}$$

Парадокс ЭПР можно описать следующим образом. Имеется такое состояние двух частиц, что, измеряя p_1 или q_1 первой частицы, можно с определенностью и без взаимодействия со второй частицей предсказать или значение p_2, или значение q_2 для второй частицы. В первом случае величина p_2 является элементом физической реальности, а во втором им является q_2. Тогда эти реальности должны существовать для второй частицы до всякого измерения над первой частицей, поскольку предполагается, что частицы разделены пространственноподобным интервалом. Однако реальности нельзя описывать с помощью квантовой механики, потому что они несовместны – координаты и импульсы не коммутируют. Тем самым Эйнштейн, Подольский и Розен заключают, что квантовая механика не полна. Заметим, что состояние ЭПР в действительности не является нормированным, поскольку оно представляется дельта-функцией: $\psi = \delta(x_1 - x_2 - a)$.

Важным моментом в рассмотрении Эйнштейна, Подольского и Розена является возможность выбора измеряемой величины: p_1 или q_1.

Для математической формулировки свободного выбора введем канонические преобразования наших переменных:

$$q_n(\alpha) = q_n \cos\alpha - p_n \sin\alpha, \qquad p_n(\alpha) = q_n \sin\alpha + p_n \cos\alpha, \qquad n = 1, 2. \tag{2}$$

Тогда получаем

$$[q_m(\alpha), p_n(\alpha)] = i\delta_{mn}, \qquad n = 1, 2. \tag{3}$$

В частности, имеем $q_n(0) = q_n$, $q_n(3\pi/2) = p_n$, $n = 1, 2$.

Теперь рассмотрим корреляционную функцию

$$D(\alpha_1, \alpha_2) = \langle \psi \mid q_1(\alpha_1) \otimes q_2(\alpha_2) \mid \psi \rangle. \tag{4}$$

Нас интересует вопрос, можно ли представить квантово-механическую корреляционную функцию (4) в виде

$$\langle \psi \mid q_1(\alpha_1) \otimes q_2(\alpha_2) \mid \psi \rangle = E\xi_1(\alpha_1)\xi_2(\alpha_2). \tag{5}$$

Здесь $\xi_n(\alpha_n) = \xi_n(\alpha_n, \lambda)$, $n = 1, 2$, – два вещественных случайных процесса, возможно неограниченных. Параметры λ интерпретируются как скрытые переменные в реалистической теории.

Теорема. *Для произвольного состояния* $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$, *на котором определены произведения операторов* q_1, q_2, p_1, p_2, *существуют такие случайные процессы* $\xi_n(\alpha_n, \lambda)$, *что выполнено соотношение* (5).

Доказательство. Перепишем корреляционную функцию $D(\alpha_1, \alpha_2)$ (4) в виде

$$\begin{aligned}\langle \psi \mid q_1(\alpha_1) \otimes q_2(\alpha_2) \mid \psi \rangle = \langle q_1 q_2 \rangle \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \langle p_1 q_2 \rangle \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 - \\ - \langle q_1 p_2 \rangle \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 + \langle p_1 p_2 \rangle \sin\alpha_1 \sin\alpha_2,\end{aligned} \tag{6}$$

где использовано обозначение $\langle q_1 q_2 \rangle = \langle \psi \mid q_1 q_2 \mid \psi \rangle$. Теперь положим

$$\xi_1(\alpha_1, \lambda) = f_1(\lambda) \cos\alpha_1 - g_1(\lambda) \sin\alpha_1,$$
$$\xi_2(\alpha_2, \lambda) = f_2(\lambda) \cos\alpha_2 - g_2(\lambda) \sin\alpha_2.$$

Здесь вещественные функции $f_n(\lambda)$, $g_n(\lambda)$, $n = 1, 2$, таковы, что

$$Ef_1 f_2 = \langle q_1 q_2 \rangle, \qquad Eg_1 f_2 = \langle p_1 q_2 \rangle, \qquad Ef_1 g_2 = \langle q_1 p_2 \rangle, \qquad Eg_1 g_2 = \langle p_1 p_2 \rangle, \tag{7}$$

где используется обозначение для средних

$$Ef_1f_2 = \int f_1(\lambda)f_2(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Чтобы решить систему уравнений (7), положим

$$f_n(\lambda) = \sum_{\mu=1}^{2} F_{n\mu}\eta_\mu(\lambda), \qquad g_n(\lambda) = \sum_{\mu=1}^{2} G_{n\mu}\eta_\mu(\lambda), \tag{8}$$

где $F_{n\mu}$, $G_{n\mu}$ – константы и $E\eta_\mu\eta_\nu = \delta_{\mu\nu}$. Обозначим

$$\langle q_1q_2\rangle = A, \qquad \langle p_1q_2\rangle = B, \qquad \langle q_1p_2\rangle = C, \qquad \langle p_1p_2\rangle = D.$$

Решение уравнений (7) может, например, иметь вид

$$f_1 = A\eta_1, \qquad f_2 = \eta_1,$$
$$g_1 = B\eta_1 + \left(D - \frac{BC}{A}\right)\eta_2, \qquad g_2 = \frac{C}{A}\eta_1 + \eta_2.$$

Таким образом, доказано представление квантовой корреляционной функции в терминах разделенных классических случайных процессов (5).

Замечание 1. Условие вещественности функций $\xi_n(\alpha_n,\lambda)$ является важным. Оно означает, что область значений $\xi_n(\alpha_n,\lambda)$ является множеством собственных значений оператора $q_n(\alpha_n)$. Если ослабить это условие, то можно получить представление скрытых переменных, просто используя разложение единицы:

$$\langle\psi \mid q_1(\alpha_1)q_2(\alpha_2) \mid \psi\rangle = \sum_\lambda \langle\psi \mid q_1(\alpha_1) \mid \lambda\rangle\langle\lambda \mid q_2(\alpha_2) \mid \psi\rangle.$$

Аналогичным образом можно доказать представление

$$\langle\psi \mid q_1(t_1)\otimes q_2(t_2) \mid \psi\rangle = \int \xi_1(t_1,\lambda)\xi_2(t_2,\lambda)\,d\rho(\lambda), \tag{9}$$

где $q_n(t) = q_n + p_nt$, $n = 1, 2$, – свободная квантовая эволюция частиц. Достаточно взять

$$\xi_1(t_1,\lambda) = f_1(\lambda) + g_1(\lambda)t_1, \qquad \xi_2(t_2,\lambda) = f_2(\lambda) + g_2(\lambda)t_2.$$

Замечание 2. В действительности можно доказать более общую теорему. Если $f(s,t)$ – функция двух переменных, то ее можно представить как ожидаемое значение двух стохастических процессов: $f(s,t) = E\xi(s)\eta(t)$. Действительно, если $f(s,t) = \sum_n g_n(s)h_n(t)$, можно взять

$$\xi(s,\omega) = \sum_n g_n(s)x_n(\omega), \qquad \eta(t,\omega) = \sum_n h_n(s)x_n(\omega),$$

где $Ex_nx_m = \delta_{nm}$.

10. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ СИТУАЦИЯ

Распространенная точка зрения (особенно в сообществе физиков, занимающихся квантовой теорией) состоит в том, что заключения Белла в сильной степени подтверждаются экспериментальными исследованиями. Однако современная ситуация с экспериментом ЭПР–Бома существенно более сложная. Как хорошо известно, в работе [7] (см. также [14], [15]) показано, что неравенство Белла и в самом деле опровергается данными четырех экспериментов, соответствующих различным выборам поляризации. Однако недавно в работах [71], [72] было обнаружено, что это еще не конец этого великого экспериментального приключения. Анализ данных первого эксперимента, который закрыл лазейку локальности (см. [14]), показал, что данные содержат аномалии следующего типа. Выражение Белла для корреляций является линейной комбинацией двумерных вероятностных распределений для поляризации. Интересно, что эти экспериментальные двумерные вероятностные распределения существенно отличаются от тех, которые теоретически предсказываются квантовой механикой (см. [71], [72]). Таинственным образом в выражении Белла для корреляций эти аномальные отклонения сокращаются (компенсируя друг друга). Еще более интересным является то, что те же аномалии содержались в статистических данных из пионерского эксперимента [7], который радикально отличается по своей технической реализации от эксперимента, приведенного в работе [14]. Этот факт о статистических аномалиях не был сообщен в статье [7], однако его можно найти в диссертации Аспекта [83].

Обратим внимание на то, что “экспериментальные вероятности” (часто́ты) $P^{\rm exp}_{++}(\theta_1,\theta_2)$, $P^{\rm exp}_{+-}(\theta_1,\theta_2)$, $P^{\rm exp}_{-+}(\theta_1,\theta_2)$, $P^{\rm exp}_{--}(\theta_1,\theta_2)$ существенно отклоняются от предсказаний квантовой механики

$$P_{++}(\theta_1,\theta_2) = P_{--}(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\theta_2),$$
$$P_{+-}(\theta_1,\theta_2) = P_{-+}(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1-\theta_2).$$

Такие отклонения компенсируют друг друга, и окончательная экспериментальная корреляция

$$E^{\rm exp}(\theta_1,\theta_2) = P^{\rm exp}_{++}(\theta_1,\theta_2) - P^{\rm exp}_{+-}(\theta_1,\theta_2) - P^{\rm exp}_{-+}(\theta_1,\theta_2) + P^{\rm exp}_{--}(\theta_1,\theta_2)$$

находится в полном согласии с предсказаниями квантовой механики:

$$E(\theta_1,\theta_2) = P_{++}(\theta_1,\theta_2) - P_{+-}(\theta_1,\theta_2) - P_{-+}(\theta_1,\theta_2) + P_{--}(\theta_1,\theta_2) = \cos 2(\theta_1-\theta_2).$$

Поэтому такие аномалии не играют роли в формулировке неравенства Белла для специально выбранной линейной комбинации вероятностей совпадения. Однако другие линейные комбинации экспериментальных вероятностей не обладают таким свойством компенсации. Можно найти лишь значительные отклонения от предсказаний квантовой механики. Таким образом, ни классическая, ни квантовая модель не преодолевают успешно весь набор статистических тестов, задаваемых всеми возможными линейными комбинациями вероятностей ЭПР–Бома. Имеются два возможных объяснения аномалий: а) это некоторое неизвестное фундаментальное явление; б) эксперименты не были “достаточно чистыми”[6]. Но даже в последнем случае нельзя утверждать, что аргументы Белла полностью обоснованы в эксперименте. Требуются новые, более чистые эксперименты.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В теории вероятностей неравенства типа Белла изучались в течение последних ста лет как условия вероятностной совместности семейств случайных величин, т.е. возможности реализации на едином вероятностном пространстве. В противоположность квантовой физике, в этих исследованиях такие аргументы, как нелокальность и “смерть реальности”, не привлекались. В частности, из несуществования единого вероятностного пространства не следует, что невозможно построить реалистичное описание (отображение $\lambda \to a(\lambda)$). Неравенства типа Белла рассматривались как признаки (достаточные условия) невозможности одновременного выполнения измерений *всех случайных величин* из рассматриваемого семейства. Такую интерпретацию можно использовать для статистических данных, полученных в эксперименте ЭПР–Бома для запутанных фотонов.

Благодарности. Автор благодарит за обсуждения Л. Аккарди, С. Альбеверио, М. Эпплби, Л. Е. Баллентайна, В. Белавкина, Л. Харди, И. Бенгтсона, М. Бозейко, К. Фукса, С. Гаддера, К. Густафсона, И. Хелланда, А. Холево, Р. Хадсона, С. Козырева, Е. Лубенец, М. Манько, В. Манько, Д. Петца, Р. Шака, А. Катиха, Д. Эртса, С. Эртса, Б. Кокке, А. Гриба, П. Лахти, А. Аспекта, Д. Мермина, Г. Аденира, В. Де Бере, В. Де Мойнка, К. Хесса, В. Филиппа, Р. Гилла, Д. Гринбергера, Й.-А. Лашона, А. Переса, И. Питовского, М. Скалли, И. Воловича.

Список литературы

[1] J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
[2] B. d’Espagnat, *Veiled Reality. An Analysis of Present-Day Quantum Mechanical Concepts*, Front. Phys., **91**, Westview Press, Boulder, CO, 2003.
[3] A. Shimony, *Search for a Naturalistic World View*, V. 1, 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
[4] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.*, **23**:15 (1969), 880–884.
[5] J. F. Clauser, A. Shimony, *Rep. Progr. Phys.*, **41**:12 (1978), 1881–1927.
[6] E. P. Wigner, *Amer. J. Phys.*, **38**:8 (1970), 1005–1009.
[7] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.*, **49**:25 (1982), 1804–1807.
[8] D. Home, F. Selleri, *Riv. Nuovo Cimento* (3), **14**:9 (1991), 1–65.
[9] H. P. Stapp, *Phys. Rev. D*, **3**:6 (1971), 1303–1320.
[10] P. H. Eberhard, *Nuovo Cimento B*, **38**:1 (1977), 75–80.
[11] P. H. Eberhard, *Nuovo Cimento B*, **46**:2 (1978), 392–419.
[12] P. H. Eberhard, *Phys. Rev. Lett.*, **49**:20 (1982), 1474–1477.
[13] A. Peres, *Amer. J. Phys.*, **46**:7 (1978), 745–747.

[6] Заметим, что структура экспериментов в работах [7] и [14] существенно различалась.

[14] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:23 (1998), 5039–5043.

[15] G. Weihs, "A test of Bell's inequality with spacelike separation", *Foundations of Probability and Physics* – 4, Proc. Conf., AIP Conf. Proc., **889**, AIP, New York, 2007, 250–260.

[16] A. Yu. Khrennikov (ed.), *Foundations of Probability and Physics*, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2000), Quantum Probab. and White Noise Anal., **13**, World Scientific, River Edge, NJ, 2001.

[17] A. Yu. Khrennikov (ed.), *Quantum Theory*: *Reconsideration of Foundations*, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2001), Math. Model. Phys. Eng. Cogn. Sci., **2**, Växjö Univ. Press, Växjö, 2002.

[18] A. Yu. Khrennikov (ed.), *Foundations of Probability and Physics* – 2, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2002), Math. Model. Phys. Eng. Cogn. Sci., **5**, Växjö Univ. Press, Växjö, 2003.

[19] A. Yu. Khrennikov (ed.), *Foundations of Probability and Physics* – 3, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2004), AIP Conf. Proc., **750**, AIP, Melville, NY, 2005.

[20] G. Adenier, A. Yu. Khrennikov, Th. M. Nieuwenhuizen (eds.), *Quantum Theory*: *Reconsideration of Foundations* – 3, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2005), AIP Conf. Proc., **810**, AIP, Melville, NY, 2006.

[21] G. Adenier, C. Fuchs, A. Yu. Khrennikov (eds.), *Foundations of Probability and Physics* – 4, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2006), AIP Conf. Proc., **889**, AIP, Melville, NY, 2007.

[22] A. N. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin, 1933; *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea, New York, 1950.

[23] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, Мир, М., 1988.

[24] L. Accardi, "The probabilistic roots of the quantum mechanical paradoxes", *The Wave-Particle Dualism*, Proc. Intern. Symposium. A tribute to Louis de Broglie on his 90th birthday (Perugia, 1982), Fund. Theories Phys., eds. S. Diner, D. Fargue, G. Lochak et al., Reidel, Dordrecht, 1984, 297–330.

[25] L. Accardi, *Urne e Camaleoni*: *Dialogo sulla realta*, *le leggi del caso e la teoria quantistica*, II Saggiatore, Rome, 1997.

[26] L. Accardi, "Could one now convince Einstein?", *Quantum Theory*: *Reconsideration of Foundations* – 3, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2005), AIP Conf. Proc., **810**, eds. G. Adenier, A. Yu. Khrennikov, Th. M. Nieuwenhuizen, AIP, Melville, NY, 2006, 3–18.

[27] A. Fine, *Phys. Rev. Lett.*, **48**:5 (1982), 291–295.

[28] I. Pitowsky, *Phys. Rev. Lett.*, **48**:19 (1982), 1299–1302.

[29] I. Pitowsky, *Phys. Rev. D*, **27**:10 (1983), 2316–2326.

[30] P. Rastall, *Found. Phys.*, **13**:6 (1983), 555–570.

[31] K. Hess, W. Philipp, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **98**:25 (2001), 14224–14227.

[32] K. Hess, W. Philipp, *Europhys. Lett.*, **57**:6 (2002), 775–781.

[33] K. Hess, W. Philipp, "Bell's theorem: critique of proofs with and without inequalities", *Foundations of Probability and Physics* – 3, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2004), AIP Conf. Proc., **750**, ed. A. Khrennikov, AIP, Melville, NY, 2005, 150–157.

[34] A. Yu. Khrennikov, *Nuovo Cimento B*, **115**:2 (1999), 179–184.

[35] A. Yu. Khrennikov, *Interpretations of Probability*, VSP, Utrecht, 1999.

[36] А. Ю. Хренников, *Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика*, Физматлит, М., 2003.

[37] A. Yu. Khrennikov, *J. Math. Phys.*, **41**:4 (2000), 1768–1777.

[38] A. Yu. Khrennikov, *J. Math. Phys.*, **41**:9 (2000), 5934–5944.

[39] D. N. Klyshko, *Phys. Lett. A*, **172**:6 (1993), 399–403; **247**:4–5 (1998), 261–266; A. V. Belinsky, D. N. Klyshko, **176**:6 (1993), 415–420; **218**:3–6 (1996), 119–127.

[40] D. N. Klyshko, *Laser Physics*, **6**:6 (1996), 1056–1076.
[41] D. N. Klyshko, "Quantum optics: quantum, classical, and metaphysical aspects", *Fundamental Problems in Quantum Theory* (Baltimore, MD, 1994), Ann. New York Acad. Sci., **755**, eds. D. M. Greenberger, A. Zeilinger, New York Acad. Sci., New York, 1995, 13–26.
[42] Д. Н. Клышко, *УФН*, **168**:9 (1998), 975–1015.
[43] В. А. Андреев, В. И. Манько, *Письма в ЖЭТФ*, **72**:2 (2000), 130–135.
[44] В. А. Андреев, В. И. Манько, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 284–296.
[45] V. A. Andreev, V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **281**:5–6 (2001), 278–288.
[46] В. А. Андреев, В. И. Манько, О. В. Манько, Е. В. Щукин, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 172–185.
[47] V. A. Andreev, *J. Russ. Laser Res.*, **27**:4 (2006), 327–331.
[48] V. I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **17**:6 (1996), 579–584.
[49] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **25**:5 (2004), 477–492.
[50] V. I. Man'ko, E. V. Shchukin, *J. Russ. Laser Res.*, **22**:6 (2001), 545–560.
[51] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, R. V. Mendes, *J. Russ. Laser Res.*, **27**:6 (2006), 507–532.
[52] Ю. М. Белоусов, В. И. Манько, *Матрица плотности. Представления и применения в статистической механике*, Ч. 1, 2. Учебное пособие, МФТИ, М., 2004.
[53] I. V. Volovich, "Quantum Cryptography in space and Bell's theorem", *Foundations of Probability and Physics*, Quantum Probab. and White Noise Anal., **13**, ed. A. Khrennikov, World Sci., River Edge, NJ, 2001, 364–372.
[54] I. V. Volovich, "Towards quantum information theory in space and time", *Quantum Theory*: *Reconsideration of Foundations*, ed. A. Khrennikov, Växjö University Press, Växjö, 2002, 423–440.
[55] A. Yu. Khrennikov, *J. Russ. Laser Res.*, **28**:3 (2007), 244–254.
[56] I. Pitowsky, "From George Boole to John Bell – the origins of Bell's inequalities", *Bell's Theorem*, *Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, Fund. Theories Phys., **37**, ed. M. Kafatos, Kluwer, Dordrecht, 1989, 37–49.
[57] I. Pitowsky, "Range theorems for quantum probability and entanglement", *Quantum Theory*: *Reconsideration of Foundations*, Växjö University Press, Växjö, 2002, 299–308.
[58] Н. Н. Воробьев, *ТВП*, **7** (1962), 153–169.
[59] W. Mückenheim, G. Ludwig, C. Dewdney et al., *Phys. Rep.*, **133**:6 (1986), 337–401.
[60] А. Ю. Хренников, *ДАН СССР*, **322** (1992), 1075–1079.
[61] A. Yu. Khrennikov, *J. Math. Phys.*, **32**:4 (1991), 932–937.
[62] A. Yu. Khrennikov, *Phys. Lett. A*, **200**:3–4 (1995), 219–223.
[63] A. Yu. Khrennikov, *Phys. A*, **215**:4 (1995), 577–587.
[64] A. Yu. Khrennikov, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **34**:12 (1995), 2423–2433.
[65] A. Yu. Khrennikov, *J. Math. Phys.*, **36**:12 (1995), 6625–6632.
[66] A. Yu. Khrennikov, *p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics*, Math. Appl., **309**, Kluwer, Dordrecht, 1994.
[67] A. Yu. Khrennikov, *Non-Archimedean Analysis*: *Quantum Paradoxes*, *Dynamical Systems and Biological Models*, Math. Appl., **427**, Kluwer, Dordrecht, 1997.
[68] P. Pearle, *Phys. Rev. D*, **2**:8 (1970), 1418–1428.
[69] N. Gisin, B. Gisin, *Phys. Lett. A*, **260**:5 (1999), 323–327.
[70] Jan-Åke Larsson, *Quantum paradoxes*, *probability theory*, *and change of ensemble*, Linköping Univ. Press, Linköping, Sweden, 2000.

[71] G. Adenier, A. Khrennikov, "Anomalies in EPR-Bell experiments", *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations* – 3, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2005), AIP Conf. Proc., **810**, AIP, Melville, NY, 2006, 283–293.

[72] G. Adenier, A. Khrennikov, *J. Phys. B*, **40**:1 (2007), 131–141.

[73] W. De Baere, *Lett. Nuovo Cimento* (2), **39**:11 (1984), 234–238.

[74] W. de Muynck, W. de Baere, *Ann. Israel Phys. Soc.*, **12** (1996), 1–22.

[75] W. M. de Muynck, W. De Baere, H. Martens, *Found. Phys.*, **24**:12 (1994), 1589–1664.

[76] W. M. de Muynck, J. T. van Stekelenborg, *Ann. Phys.* (8), **45**:3 (1988), 222–234.

[77] A. Yu. Khrennikov, *J. Phys. A*, **38**:41 (2005), 9051–9073.

[78] A. Yu. Khrennikov, *Found. Phys. Lett.*, **18**:7 (2005), 637–650.

[79] A. Yu. Khrennikov, *Phys. Lett. A*, **357**:3 (2006), 171–176.

[80] А. Эйнштейн, Б. Подольский, Н. Розен, *УФН*, **16**:4 (1936), 440–446.

[81] A. Yu. Khrennikov, I. V. Volovich, "Quantum nonlocality, EPR model and Bell's theorem", 3*rd International Sakharov Conference on Physics*, eds. A. Semikhatov, M. Vasiliev, V. Zaikinet, World Scientific, Singapore, 2003, 260–267.

[82] A. Yu. Khrennikov, I. Volovich, "Local realism, contextualism and loopholes in Bell's experiments", *Foundations of Probability and Physics* – 2, Math. Model. Phys. Eng. Cogn. Sci., **5**, ed. A. Khrennikov, Växjö Univ. Press, Växjö, 2003, 325–343.

[83] A. Aspect, *Trois tests exp'erimentaux des in'egalit'es de Bell par mesure de corr'elation de polarisation de photons*, PhD thesis № 2674, Univ. Paris-Sud, Centre D'Orsay, 1983.

Поступила в редакцию 7.09.2007,
после доработки 9.11.2007