ПОПУЛЯРНО-НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА

А. ЭЙНШТЕЙН

О СПЕЦИАЛЬНОЙ И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(ОБЩЕДОСТУПНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ)

Перевод с 12-го издания

Под редакцией проф. С. Я. ЛИВШИЦА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
:: МОСКВА :: 1922

Петроград, 17-я типография, 7 рота 26.

Гиз. № 2501. Тираж 5.000 экз. Р. В. Ц. № 715.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Приложение.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая брошюра должна облегчить возможно более точное ознакомление с теорией относительности для тех, кто интересуется теорией с общенаучной, философской точки зрения, но не владеет математическим аппаратом [1]) теоретической физики. Чтение брошюры предполагает у читателя познания в объеме средней школы, и кроме того, несмотря на ее краткость, достаточно терпения и настойчивости. Автор приложил особое старание к тому, чтобы с возможно большей простотой и отчетливостью изложить руководящие идеи теории, придерживаясь в целом той их последовательности и связи, в какой они возникли в действительности. В интересах ясности я не останавливался пред частыми повторениями, нисколько не считаясь с изяществом изложения. Я добросовестно сле-

[1]) Изложение математических основ специальной теории относительности можно найти в оригинальных работах А. Лоренца, А. Эйнштейна и Г. Минковского, вышедших под заглавием «Принцип относительности» в издаваемом B. G. Teubner'ом собрании монографий «Успехи математических наук», а также в обстоятельной книге М. Лауэ «Принцип относительности» (изд. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig). Что касается общей теории относительности с необходимыми для нее вспомогательными математическими частями теории инвариантов, то ей посвящена брошюра автора «Основы общей теории относительности» (Joh. Ambr. Barth, 1916). Брошюра эта требует некоторого знакомства со специальной теорией относительности.

довал предписанию гениального теоретика Л. Больцмана, рекомендовавшего заботу об изяществе предоставить портным и башмачникам. В своем изложении я не обошел, думается мне, тех трудностей, которые лежат в самой природе вопроса, но зато я сознательно сурово отнесся к эмпирико-физическим основаниям теории, дабы уберечь читателя, мало осведомленного в физике, от участи того путника, который из-за деревьев не видел леса. Пусть же эта небольшая книжка доставит не одному человеку несколько радостных часов умственного возбуждения.

А. Эйнштейн.

Декабрь 1916 г.

Дополнению к третьему изданию.

В этом году (1918) издательством Шпрингера выпущен подробный, превосходно составленный Вейлем учебник общей теории относительности под заглавием «Пространство. Время. Материя», который может быть горячо рекомендован математикам и физикам.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ.

О специальной теории относительности.

1. Физическое содержание геометрических теорем.

Конечно, и тебе, милый читатель или читательница, пришлось в школьные годы познакомиться с гордым зданием Эвклидовой геометрии, и, быть может, ты и сейчас вспоминаешь больше с уважением, чем с любовью, это гордое строение, по высоким лестницам которого в бесчисленные часы гоняли тебя твои добросовестные преподаватели. И, конечно, эти воспоминания побудят тебя покарать своим презрением каждого, кто объявил бы неверной хотя бы ничтожнейшую из теоремок этой науки. Но, быть может, чувство гордой уверенности покинет тебя тотчас, как кто-либо предложит тебе вопрос: «А что собственно хочешь ты сказать своим утверждением, что эти теоремы истинны?». На этом вопросе мы несколько остановимся.

Геометрия исходит из определенных основных понятий, как плоскость, точка, прямая, с которыми мы в состоянии связать более или менее отчетливые представления, и некоторых простых предложений (аксиом), которые мы, на основе этих представлений, склонны принять, как «истинные». Затем, все остальные предложения путем логического метода, законность которого мы чувствуем себя вынужденными признать, приводятся к этим аксиомам, т.-е. доказываются. Предложение тогда является правильным, или «истинным», когда оно выведено из аксиом по определенному, признанному методу. Вопрос об «истинности» отдельных геометрических предложений приводит таким образом к вопросу об «истинности» аксиом. Однако, давно уже известно, что на последний вопрос не только не может быть дан ответ методами геометрии, но что и вообще он сам по себе лишен смысла. Нельзя спросить, верно ли, что через две точки можно провести только одну прямую. Можно только сказать, что Эвклидова геометрия трактует о таких образованиях, которые она называет «прямой» и которым она придает свойство быть однозначно определенными двумя своими точками. Понятие «истинный» неприложимо к высказываниям чистой геометрии, потому что словом «истинный» мы в конечном счете постоянно характеризуем согласование с «реальным» предметом; но геометрия не занимается отношением своих понятий к предметам опыта, она имеет дело только с логической связью этих понятий между собой.

Наша склонность характеризовать тем не менее геометрические предложения, как истинные, легко объяснима. Геометрическим понятиям соответствуют с большей или меньшей точностью вещи в натуре, каковые, без сомнения, и были единственной причиной для образования этих понятий. Пусть геометрия отказывается от этого соответствия для того, чтобы придать своему зданию возможно бо́льшую логическую законченность; все же привычка считать, например, два отмеченных на отрезке пункта лежащими на практически твердом теле—глубоко заложена в навыках нашего мышления. Мы привыкли далее принимать, что три места находятся на одной прямой, если при наблюдении их одним глазом из соответственным образом выбранного пункта нам кажется, что они совпадают.

Если мы теперь, следуя навыкам нашего мышления, добавим к положениям Эвклидовой геометрии еще одно только положение, что двум точкам практически твердого тела постоянно соответствует то же самое расстояние (один и тот же отрезок), как бы мы ни изменяли положение тела, то из положений Эвклидовой геометрии получатся положения о возможном относительном расположении практически твердых тел [1]). Дополненная таким образом геометрия должна быть рассматриваема, как отрасль физики. Теперь по праву может быть поставлен вопрос об «истинности» таким образом истолкованных геометрических положений, так как можно спросить, оправдаются ли они на тех реальных вещах, которые мы сочетаем с геометрическими понятиями. Несколько неточно это можно выразить таким образом: под «истинностью» геометрического положения в указанном смысле мы разумеем подтверждение его при построениях с помощью циркуля и линейки.

Убеждение в истинности геометрических положений в указанном смысле покоится, естественно, исключительно на весьма несовершенных опытах. Сначала мы будем исходить из предположения об истинности геометрических положений, но затем в последней

[1]) С тем вместе и понятие прямой линии получает соответствующий объект в мире вещей. Три точки твердого тела A, B и C тогда лежат на одной прямой, когда при определенном месте точек A и C точка B расположена таким образом, что сумма расстояний AB и BC будет возможно наименьшая. Это отрывочное указание все же достаточно для нашего рассуждения

части наших рассуждений (при рассмотрении общей теории относительности) мы увидим, что эта истинность имеет свои пределы, и рассмотрим, в чем последние заключаются.

II. Система координат.

На основе указанного физического истолкования расстояния мы получаем возможность установить расстояние двух точек твердого тела путем измерений. Для этого мы употребляем раз навсегда принятый отрезок (мерку S) в качестве единичного масштаба. Если даны две точки твердого тела A и B, то соединяющую их прямую можно построить по законам геометрии; затем на этой прямой от точки A откладывают отрезок S столько раз, чтобы он достигнул точки B. Число откладываний и дает числовое измерение расстояния AB. На этом основано всякое измерение длины [1].

Всякое пространственное обозначение какого-либо события или предмета основано на том, что указывается точка определенного твердого тела (исходного тела), с которой это событие совпадает. Это имеет место не только в научных обозначениях, но и в повседневной жизни. Если я проанализирую определение места: «в Берлине, на Потсдамской площади», то это означает следующее. Поверхность земли есть твердое тело, к которому относится указанное место; «Потсдамская площадь в Берлине», это—отмеченная на нем, снабженная именем точка, с которой пространственно совпадает событие [2].

Этот примитивный способ указания места пригоден только для поверхности твердых тел и связан с наличием различаемых точек на этой поверхности. Посмотрим ближе, как человеческий ум освобождается от обоих этих ограничений, не изменяя существа обозначения места. Предположим, например, что над Потсдамской площадью парит облако; тогда место его в отношении земной поверхности может быть установлено тем, что на площади отвесно воздвигается шест, достигающий облака. Длина шеста, измеренная

---

[1] Здесь, разумеется, подразумевается, что измерение совершается без остатка т.-е. дает целое число. Затруднение легко устранить применением разделенного масштаба, что не содержит в себе никакого принципиально нового метода.

[2] В более подробном исследовании того, что здесь означает «пространственное совпадение», пока нет необходимости, так как это понятие постольку ясно поскольку в отдельном реальном случае едва ли могли бы иметь место разногласия относительно наличности такого совпадения.

принятой за единицу меркой, вместе с указанием места основания шеста, даст полное определение места облака. На этом примере мы видим, каким путем усовершенствован способ определения места.

а) Твердое тело, к которому относятся обозначения места, мы расширяем таким образом, чтобы оно достигло предмета, место коего подлежит определению.

б) Место определяется числом, вместо названия отмеченных точек (в нашем примере—числом, выражающим длину шеста в принятой за единицу мере).

в) О высоте облака говорят и тогда, когда достигающий его шест вовсе и не воздвигнут. Путем оптического восприятия облака с различных мест земли можно определить, на основании свойств распространения света, как велика должна была бы быть длина шеста, чтобы он мог достигнуть облака.

Из этих рассуждений видно, что для определения места лучший способ, это—не зависеть от наличия на твердом теле, принимаемом за исходное, отмеченных и снабженных именем точек, а применять числа. Измерительная физика достигает этого путем применения Декартовой системы координат.

Последняя состоит из трех взаимно перпендикулярных твердых, плоских стен, связанных с твердым телом. Описание места какого-либо события заключается (в существенных чертах) в указании длины трех перпендикуляров или координат x, y, z (см. рис. 2), которые могут быть из него опущены на три плоских стенки системы. Длины этих трех перпендикуляров могут быть получены путем ряда манипуляций с твердыми мерками, совершаемых согласно предписаниям законов и методов Эвклидовой геометрии.

На практике большей частью реально не применяются эти твердые стенки, образующие систему координат. Равным образом и координаты отыскиваются не путем действительных построений с помощью твердых реек, а косвенно. Тем не менее физический смысл обозначений места всегда должен быть понимаем в согласии с только что изложенными разъяснениями, так как иначе данные физики и астрономии расплылись бы в полной неопределенности [1].

Итак, отсюда следует: всякое пространственное описание событий исходит от твердого тела, к которому события должны быть пространственно относимы. Эти пространственные отношения предполагают, что для «отрезков» имеют силу законы Эвклидовой геометрии, при чем такой «отрезок» физически представлен двумя отмеченными точками на твердом теле.

---

[1]) Только разбираемая во второй части книжки общая теория относительности сделает необходимым иное, более совершенное понимание этого вопроса.

III. Пространство и время в классической механике.

Если я, без особого раздумья и не вдаваясь в подробные разъяснения, формулирую задачу механики таким образом: «механика имеет своей задачей описать, как с течением времени тела меняют свое место в пространстве», то я рискую взять на свою душу несколько смертных грехов против святого духа ясности. Прежде всего надо вскрыть, в чем эти грехи заключаются.

Не ясно, что̀ здесь должно разуметь под «местом» и «пространством». Я стою у окна равномерно движущегося вагона железной дороги и роняю на полотно дороги камень, не давая ему никакого толчка. Тогда я вижу (не принимая в расчет влияния, оказываемого сопротивлением воздуха), что камень падает прямолинейно. Пешеход, который наблюдает мое действие со своей тропинки, замечает, что камень падает на землю, описывая дугу параболы. Теперь я спрашиваю: где «в действительности» лежат «места», которые пробегает камень на прямой или на параболе? Далее: что означает здесь движение «в пространстве»? Ответ с точки зрения выводов § 2 ясен сам собой. Прежде всего оставим совершенно в стороне темное слово «пространство», в которое, если честно признаться, мы не можем вложить ни малейшего осмысленного содержания; движение в «пространстве» мы заменим «движением в отношении к какому-либо практически твердому исходному телу». Определение места в отношении к исходному телу (вагон или поверхность земли) уже подробно установлено в предыдущем параграфе. Заменяя «исходное тело» полезным для математических описаний понятием «системы координат», мы можем сказать: в отношении к системе координат, твердо соединенной с вагоном, камень описывает прямую; в отношении же к системе координат, твердо соединенной с поверхностью земли, камень описывает параболу. На этом примере ясно можно видеть, что кривой пробега [1]) самой по себе не существует, но есть лишь кривая пробега в отношении к определенному исходному телу.

Но для полного описания движения требуется еще, чтобы было указано, как тело меняет свое место в течение времени. Это значит, что для каждой точки кривой пробега должно быть обозначено, в какое время тело там находится. Эти данные должны быть дополнены еще таким определением времени, в силу которого обозначаемые промежутки времени могли быть рассматриваемы, как принципиально доступные наблюдению величины (результаты измерений). Стоя на почве классической механики,

[1]) Т.-е. кривой, по которой движется тело.

мы в нашем примере удовлетворим этому требованию следующим образом. Мы представим себе двое совершенно одинаково сделанных часов; одни из них держит человек, стоящий у окна вагона, а другие—человек на тропинке. Каждый из них замечает, в каком именно месте соответствующего исходного тела находится камень в момент тиканья часов, которые он держит в руке. Здесь мы не входим в рассмотрение той неточности, которая происходит от того, что распространение света имеет определенную конечную скорость. Об этом, а также и о другой возникающей здесь трудности, подробно речь будет позже.

IV. Галилеева система координат.

Основной закон Галилее-Ньютоновой механики, известный под именем закона инерции, гласит, как известно, следующее: «тело, достаточно удаленное от других тел, пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения». Это положение не только говорит нечто о движении тел, но и дает некоторые указания относительно допустимых в механике исходных тѐл или систем координат, которые могут быть применяемы при механических описаниях.

Тела, относительно которых закон инерции применим со значительным приближением, это — видимые неподвижные звезды. Если же мы применим систему координат, неподвижно связанную с землей, то окажется, что в отношении к ней каждая неподвижная звезда описывает в течение одного (астрономического) дня круг огромного радиуса, что противоречит буквальному смыслу закона инерции. Следовательно, если твердо его придерживаться, то движения надо относить лишь к таким системам координат, в отношении к которым неподвижные звезды не совершают никаких круговых движений. Систему координат, состояние движения которой таково, что в применении к ней имеет силу закон инерции, мы называем «Галилеевой системой координат». Только в отношении к Галилеевой системе координат применимы законы Галилее-Ньютоновой механики.

V. Принцип относительности (в более узком смысле).

Ради большей наглядности обратимся снова к примеру с равномерно движущимся вагоном железной дороги. Его движение мы называем равномерно-поступательным: «равномерным» потому, что оно сохраняет постоянную скорость и направление; «поступательным» потому, что хотя вагон и меняет свое место в отношении к полотну железной дороги, но он не совершает при этом никаких вращений. По воздуху летит ворон прямолинейно и равномерно, если судить о его движении с полотна дороги; тогда полет ворона, рассматриваемый из движущегося вагона, представит движение, хотя другой скорости и в другом направлении, но точно также прямолинейное и равномерное. Выразим это абстрактно: если масса m движется прямолинейно и равномерно в отношении к системе координат K, то ее движение будет также прямолинейным и равномерным и в отношении ко второй системе координат K, если последняя в отношении к системе K находится в равномерно-поступательном движении. Отсюда в связи с разъяснениями предыдущего параграфа следует такой вывод.

Если K есть Галилеева система координат, то Галилеевой же будет и всякая другая система координат K', находящаяся по отношению к системе K в состоянии равномерного поступательного движения. В отношении K' законы Галилее-Ньютоновой механики имеют совершенно такую же силу, как в отношении K.

Мы сделаем еще один шаг дальше по пути обобщения, высказав следующее положение: если K' представляет собой в отношении K равномерно и без вращения движущуюся систему координат, то все события природы протекают в отношении к K' по точно тем же всеобщим законам, как и в отношении к K. Это утверждение мы называем «принципом относительности» (в более узком смысле).

Покуда было в силе убеждение, что все события природы могут быть представлены на основе классической механики, до тех пор не приходилось сомневаться в действительности этого принципа относительности. Но по мере новейшего развития электродинамики и оптики, все более становилось очевидно, что классическая механика не может уже служить основой для описания всех явлений физической природы. С тем вместе вопрос о допустимости принципа относительности стал вполне спорным, и, казалось, не исключена была возможность, что ответ на него будет отрицательным.

Все же существуют два факта общего значения, которые заранее сильно говорят в защиту приемлемости принципа относительности, а именно: если классическая механика и не дает достаточно широкого базиса для теоретического изображения всех физических явлений, то все же она должна заключать в себе значительную долю истины, ибо она позволяет установить с удивительной точностью движения небесных тел. А тогда и принцип относительности должен во всяком случае обладать большой точностью в области механики. Однако, является a priori мало вероятным, чтобы принцип столь большого общего значения, будучи применяем с такой точностью в одной области явлений, оказался недействительным в другой.

Второй аргумент, к которому позже мы еще снова вернемся, заключается в следующем. Если принцип относительности недействителен, то, значит, Галилеевы системы координат K, K', K'' и т. д., находящиеся по отношению друг к другу в состоянии равномерного движения, будут неравноценны для описаний явлений природы. А тогда почти необходимо пришлось бы допустить, что законы природы могут быть особенно просто и естественно формулированы лишь при условии выделения из всех Галилеевых систем координат в качестве исходного тела именно какой-то одной (K_0), обладающей определенным состоянием движения. Тогда мы ее охарактеризовали бы по праву (вследствие ее преимуществ для описания природы), как находящуюся в «абсолютном покое», а все остальные Галилеевы системы K, как находящиеся «в движении». Если бы, например, наше железнодорожное полотно было системой K_0, то наш вагон был бы системой K, в отношении которой действовали бы законы менее простые, нежели в отношении K_0. Эту меньшую простоту законов пришлось бы отнести на счет того обстоятельства, что вагон K был бы в движении по отношению к K_0 (т.-е. в «действительном» движении). В формулированных в отношении к K общих законах природы играли бы известную роль величина и направление скорости движения вагона. Так, например, следовало бы ожидать, что тон органной трубы был бы иной при параллельном положении ее оси к направлению движения, нежели при перпендикулярном. Но наша земля, в силу ее движения вокруг солнца, может быть уподоблена вагону, движущемуся со скоростью около 30 километров в секунду. Следовательно, в случае, если принцип относительности недействителен, надо было бы допустить, что направление движения земли в данный момент отражается на законах природы. А в силу этого физические системы в своих процессах зависели бы от их пространственного расположения по отношению к земле, так как последняя, меняя в течение своего годового пробега направление скорости движения, не может оставаться весь год в состоянии покоя по отношению к гипотетической системе K_0. Однако, при всей тщательности наблюдений никогда не была отмечена такая анизотропия земного физического пространства, т.-е. подобная физическая неравноценность различных направлений,—и в этом весьма веский аргумент в пользу принципа относительности.

VI. Теория сложения скоростей согласно классической механике.

Пусть наш уже неоднократно упомянутый вагон движется по рельсам с постоянной скоростью v. Внутри вагона, вдоль его и при том в направлении его движения, размеренно шагает человек со скоростью w. Как быстро, т.-е. с какой скоростью W, будет он в это время подвигаться вперед по отношению к полотну железной дороги? Единственно возможным представляется ответ на основе следующих рассуждений.

Если бы человек в течение секунды оставался стоять спокойно, то он подвинулся бы вперед по отношению к полотну на расстояние v, равное скорости движения вагона. В действительности же он не стоит, а идет, а потому отмерит в эту секунду в отношении к вагону, а, следовательно, и в отношении к полотну еще расстояние w, равное скорости его шагания. Таким образом в рассматриваемую секунду он по отношению к полотну всего подвинется на расстояние

$$W = v + w.$$

Позже мы увидим, что это рассуждение, выражающее теорему сложения скоростей согласно классической механике, не может быть оставлено в силе, так что только что изложенный закон не отвечает истине. Пока же мы будем исходить из его правильности.

VII. Кажущаяся несовместимость закона распространения света с принципом относительности.

Едва ли найдется в физике более простой закон, нежели закон распространения света в пустом пространстве. Каждый школьник знает или думает, будто знает, что распространение света совершается прямолинейно со скоростью $c = 300.000$ километров в секунду. Во всяком случае мы знаем с большой достоверностью, что эта скорость одинакова для всех цветов. Если бы это было неверно, то при закрытии неподвижной звезды ее темным спутником момент minimum'а излучения света не был бы одновременно наблюдаем для различных цветов.

Путем подобного же заключения, связанного с наблюдением двойных звезд, голландский астроном Де-Ситтер имел возможность установить, что скорость распространения света не может зависеть от скорости движения тела, служащего источником света. Допущение, что эта скорость распространения зависит от его направления «в пространстве», само по себе невероятно.

Итак, примем же, что школьник по праву верит в простой закон скорости света c (в вакууме). Но кто бы мог думать, что этот простой закон для пытливых взоров добросовестного физика представляет величайшие трудности.

Трудности эти заключаются в следующем.

Процессы распространения света мы должны, естественно, отнести, подобно всем другим, к какому-либо твердому исходному телу (системе координат). Пусть будет таковым все то же полотно нашей железной дороги. Воздух над ним пусть будет выкачен. Вдоль полотна посылается луч света, который, согласно сказанному, движется со скоростью c в отношении к железной дороге. По рельсам снова катится наш вагон со скоростью v, притом в том же самом направлении, что и луч света, но, естественно, гораздо медленнее последнего. Какова будет скорость движения светового луча по отношению к вагону? Легко видеть, что здесь могут быть применены выводы предыдущего параграфа: луч света играет роль бегущего по вагону человека; скорость последнего W по отношению к железнодорожному полотну заменена здесь скоростью света по отношению к нему же; и, наконец, w будет искомой скоростью света по отношению к вагону. Для нее мы, следовательно, имеем

$$w = c - v.$$

Таким образом скорость распространения светового луча относительно вагона будет меньше, чем c.

Но этот вывод идет в разрез с изложенным в § 5-м принципом относительности. В самом деле, закон распространения света, подобно всякому другому общему закону природы, должен был бы согласно принципу относительности, одинаково гласить как для вагона, в качестве исходного тела, так и для полотна, в качестве таковово же. В нашем же случае это представляется невозможным. Ведь если всякий световой луч распространяется по отношению к полотну дороги со скоростью c, то именно поэтому и кажется необходимым, что по отношению к вагону закон скорости света должен быть иным, в противоречие с принципом относительности.

Дилемма стоит так, что представляется неизбежным или отвергнуть принцип относительности, или отказаться от простого закона распространения света в вакууме. Читатель, внимательно следивший за всеми предшествовавшими выводами, ждет, конечно, что принцип относительности, который по своей естественности и простоте представляется уму почти неотразимым, будет оставлен в силе, но, напротив, закон распространения света в вакууме должен быть заменен другим, более сложным законом, совместимым с принципом относительности. Однако, развитие теоретической физики обнаружило, что такой выход неприемлем. А именно, проложившие новые пути теоретические исследования Г. А. Лоренца об электродинамических и оптических процессах в движущихся телах показали, что опыты в этих областях приводят с принудительной необходимостью к такой теории электромагнитных процессов, неопровержимым последствием которой является закон постоянства скорости света в вакууме. В силу этого авторитетные теоретики были скорее склонны отказаться от принципа относительности, хотя и нельзя было установить ни одного противоречащего ему опытного факта.

Тут-то и явилась теория относительности. Путем анализа физических понятий времени и пространства обнаружилось, что в действительности нет налицо несовместимости принципа относительности с законом распространения света; что, напротив, именно, систематически твердо придерживаясь обоих законов, можно достигнуть логически безупречной теории. Мы и приступим к изложению основных идей этой теории, которую, в отличие от подлежащего позже рассмотрению ее дальнейшего развития, мы обозначим, как «специальную теорию относительности».

VIII. О понятии времени в физике.

В двух далеко друг от друга удаленных местах нашей железной дороги A и B в рельсы ударила молния. К этому я присоединяю утверждение, что оба удара последовали одновременно. Если я спрошу тебя, любезный читатель, имеет ли какой-либо смысл это утверждение, то, конечно, ты ответишь мне убежденным «да». Но если я буду настаивать на более точном разъяснении смысла этого утверждения, то после некоторого раздумья ты заметишь, что ответ на этот вопрос не так прост, как кажется на первый взгляд.

Через некоторое время тебе, быть может, придет на мысль такой ответ: «Значение утверждения ясно само по себе и не нуждается ни в каких дальнейших пояснениях, но, разумеется, потребовалось бы известное размышление, если бы мне надо было путем наблюдений установить, действительно ли в данном конкретном случае оба явления произошли одновременно или же нет». Но я не могу удовлетвориться этим ответом по следующему основанию. Предположим, какой-нибудь искусный метеоролог путем остроумных соображений нашел, что в местах A и B молния всегда должна ударять одновременно: тогда возникает задача проверить, отвечает ли действительности этот теоретический вывод или нет. То же самое будет иметь место и при всех положениях физики, в которых играет роль понятие «одновременности». Для физика всякое понятие существует только в том случае, когда дана возможность в конкретном случае установить, правильно оно или неправильно. Итак, требуется такое определение одновременности, чтобы оно дало нам в руки метод, следуя которому мы могли бы из опыта заключить, последовали ли в нашем случае оба удара молнии одновременно или нет. Пока это требование не удовлетворено, до тех пор я, как физик (а, разумеется, и не как физик), только буду тешить себя иллюзией, думая, будто вкладываю какой-либо смысл в выражение одновременности. (Прежде, чем ты этого не уяснишь себе, любезный читатель, не читай дальше.)

После некоторого размышления ты предложишь мне следующим образом констатировать одновременность. Соединяющий оба места отрезок *AB* будет измерен по рельсам, и в середине его поставлен наблюдатель. Последний снабжен приспособлением (например, двумя поставленными друг к другу под углом в 90^0 зеркалами), позволяющим ему одновременно видеть оба места *A* и *B*. Если теперь наблюдатель одновременно воспримет оба удара молнии, то значит они одновременны.

Я весьма доволен этим предложением, но все же не могу еще признать дело вполне выясненным, так как напрашивается следующее возражение: «Это определение было бы безусловно правильным, если бы мы знали что свет, при посредстве которого наблюдатель воспринимает оба удара молнии, той же скоростью распространяется по участку *AM*, как и по участку *BM*. Поверка этого предположения была бы возможна только тогда, когда бы мы уже располагали средством для измерения времени. Таким образом мы, видимо, попадаем здесь в логический круг».

Подумав еще немного, ты с полным правом окинешь меня презрительным взглядом и пояснишь мне: «И все же я настаиваю на своем прежнем определении, так как в действительности оно вовсе ничего не предполагает относительно света. К определению одновременности может быть предъявлено только о д н о требование, чтобы оно дало нам в руки возможность путем опыта в каждом реальном случае решать, применимо оно или нет к определяемому понятию. Что мое определение удовлетворяет этому требованию, об этом не может быть спора. То, что свет пробегает в одно и то же время как путь *AM*, так и *BM* в действительности вовсе не является каким-либо п р е д п о л о ж е н и е м или г и п о т е з о й о физической природе света, но это есть т р е б о в а н и е, которое я могу поставить по собственному усмотрению для того, чтобы получить определение одновременности».

Ясно, что это определение придает точный смысл утверждению об одновременности не только *двух* событий, но и какого угодно числа их, как бы места этих событий ни были расположены по отношению к исходному телу (в нашем случае к железнодорожному полотну) [1]. Тем самым мы приходим также к определению «времени» в физике. Представим себе, что в пунктах A, B и C нашей железной дороги (системы координат) поставлены часы, совершенно одинаковые и притом так устроенные, что стрелки их занимают одновременно (в указанном ранее смысле) одно и то же положение. Тогда под «временем» какого-либо события разумеют указание времени (положение стрелки) тех из наших часов, которые находятся в непосредственной близости (пространственной) к событию. Этим способом каждому событию придается определенная временная величина, которая принципиально доступна наблюдению.

В установленном определении времени содержится еще одна физическая гипотеза, в верности которой вряд ли приходится сомневаться, пока для этого нет эмпирических данных. А именно, нами было допущено, что все эти часы идут «одинаково скоро», если они устроены одинаковым образом. Формулируем точнее: если двое в различных местах исходного тела покойно расположенных часов так установлены, что одно какое-либо положение стрелок одних часов совпадает *одновременно* (в ранее указанном смысле) с *таким же* положением стрелок других, то и вообще все одинаковые положения стрелок одновременны (в смысле ранее данного определения).

IX. Относительность одновременности.

До сих пор мы приурочивали наше рассмотрение к определенному исходному телу, «железнодорожному полотну». Пусть по рельсам идет очень длинный поезд с постоянной скоростью v в указанном на рис. 1 направлении. Пассажиры его с удобством примут свой поезд за то твердое исходное тело (систему координат), к которому они будут приурочивать все события. Всякое событие, совершающееся вдоль полотна железной дороги, происходит также у определенного пункта поезда. Точно также и опреде-

[1] Мы принимаем дальше, что если три события A, B, C произошли в различных местах таким образом, что A одновременно с B, а B одновременно с C (одновременно в смысле данного выше определения), то вместе с тем соблюден критерий и одновременности событий A и C. Это допущение есть физическая гипотеза о законе распространения света. Она является непременным условием, вне которого не может быть установлен закон о постоянстве скорости света в вакууме.

ление одновременности может быть дано для поезда совершенно тем же способом, как и для железнодорожного полотна. Но теперь, естественно, возникает следующий вопрос.

Два события (напр., два удара молнии, A и B), одновременные по отношению к железнодорожному полотну, будут ли также одновременны по отношению к поезду? Мы сейчас убедимся, что ответ должен быть отрицательный.

Когда мы говорим, что удары молнии A и B одновременны по отношению к насыпи, то это означает следующее: лучи света, выходящие из мест удара молний A и B, встречаются в середине M участка насыпи AB. Но событиям A и B соответствуют также места A и B в поезде. M' есть середина участка AB движущегося поезда. Пункт M в момент удара[1]) молний совпадает с пунктом M, но он движется, как показано на рисунке, направо со скоростью поезда v. Если бы наблюдатель, сидящий в поезде в пункте M', не подвигался с той же скоростью, а все время оставался в пункте M, то оба световых луча от молний

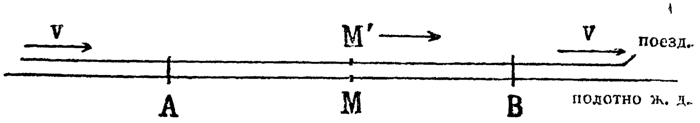

Рис. 1.

A и B достигли бы его одновременно, т.-е. встретились бы как раз у него. Но в действительности наблюдатель движется (если судить с полотна дороги) навстречу лучу света, идущему из B, и удаляется от луча, нагоняющего его из A. Поэтому он раньше увидит луч, вышедший из B, чем луч A. Следовательно, пассажиры, для которых вагон служит исходным телом, должны будут притти к заключению, что удар молнии в B произошел раньше, чем в A. Мы приходим таким образом к следующему важному выводу.

События, которые одновременны в отношении к железнодорожному полотну, не одновременны в отношении к поезду, и наоборот (относительность одновременности). Каждое исходное тело (система координат) имеет свое особое время. Указание времени только тогда получает смысл, когда показано исходное тело, к которому оно относится.

До теории относительности физика всегда молчаливо принимала, что указания времени обладают абсолютным, т.-е. независящим от состояния движения исходного тела, значением. Мы

---

[1]) Если судить с полотна дороги!

убедились только что в том, что это допущение несовместимо с нашим определением одновременности. Отказываясь теперь от этого допущения, мы устраняем выясненное в § 7 противоречие между законом распространения света в вакууме и принципом относительности.

В самом деле, это противоречие вытекало из соображений § 6, которые теперь не могут уже быть оставлены в силе. Там мы заключили, что человек в вагоне, пробегая в нем расстояние W в о д н у с е к у н д у, подвигается также и по отношению к полотну на это расстояние тоже в о д н у с е к у н д у. Но, как показано в настоящем параграфе, время, затраченное на какой-либо процесс в отношении к вагону, не может быть приравнено к продолжительности того же самого процесса, определяемой в отношении к железнодорожному полотну, как исходному телу. Следовательно, нельзя утверждать, что человек в вагоне во время своего бега в отношении к рельсам пройдет расстояние W в тот промежуток времени, который, если судить с полотна дороги, равен одной секунде.

Впрочем, выводы § 6 покоились еще и на другом предположении, которое, при более строгом размышлении, представляется произвольным, хотя оно всегда (молчаливо) подразумевалось до возникновения теории относительности.

X. Об относительности понятия пространственного расстояния.

Берем два определенных места [1] в поезде, мчащемся со скоростью v вдоль полотна железной дороги, и хотим определить их расстояние. Мы уже знаем, что для измерения расстояния требуется исходное тело, в отношении к которому оно измеряется. Проще всего, чтобы сам поезд и был таковым телом (системой координат). Едущий в поезде наблюдатель измеряет расстояние, откладывая свой масштаб по прямой линии вдоль пола вагона столько раз, пока он от одной отмеченной точки не достигнет другой. Число, показывающее, сколько раз он отложил свою мерку, и выразит искомое расстояние.

Иначе обстоит дело, если судить о расстоянии с полотна железной дороги. Тут представляется следующий метод. Обозначим и B два пункта в поезде, расстояние между которыми им требуется определить. Оба они движутся со скоростью v вдоль железной дороги. Сперва надо установить пункты A и B на полотне, с которыми при пробеге совпадают оба пункта A' и B' в

[1] Примерно, середину первого и сотого вагона.

один и тот же момент времени, определяя таковой с полотна. Эти пункты A и B полотна устанавливаются посредством данного в § 8 определения времени. Затем расстояние точек A и B измеряется путем откладывания масштаба вдоль полотна железной дороги.

Отнюдь не ясно a priori, что это последнее измерение дает тот же самый результат, что и первое. Следовательно, длина поезда, измеренная с полотна железной дороги, может оказаться иной, нежели его длина, в нем самом измеренная. Отсюда и вытекает второе возражение против столь очевидных на первый взгляд выводов § 6-го, а именно: если человек в вагоне проходит в единицу времени,—при измерении его в поезде,—расстояние W, то оно может и не быть равно W, при измерении с железнодорожного полотна.

XI. Лоренцево преобразование.

На основании сказанного в последних трех параграфах мы должны были убедиться, что предположение § 7-го о кажущейся несовместимости закона распространения света с принципом относительности исходило из двух, заимствованных из классической механики, ничем не оправдываемых гипотез. Эти гипотезы гласят:

1. Промежуток времени между двумя событиями не зависит от состояния движения исходного тела.
2. Пространственное расстояние двух точек твердого тела не зависит от состояния движения исходного тела.

Раз падают эти гипотезы, то не имеет места и дилемма § 7-го, так как теряет свою силу выведенная в § 6-м теорема сложения скоростей. Снова представляется возможным, чтобы закон распространения света в вакууме был совместим с принципом относительности. Мы приходим к вопросу: как должны быть видоизменены построения § 6-го, чтобы было устранено кажущееся противоречие между этими двумя основными результатами опыта? Этот вопрос приводит к общему вопросу. В § 6-м обозначения места и времени рассматриваются в отношении к поезду и в отношении к железнодорожному полотну. Как определить место и время какого-либо события в отношении к поезду, если известны его место и время в отношении к полотну? Мыслим ли такой ответ на этот вопрос, при котором закон распространения света в вакууме не противоречил бы принципу относительности? Или иначе: мыслимо ли такого рода соответствие между временем и местом отдельного события в отношении к обоим исходным телам, чтобы каждый луч света обладал при этом скоростью распространения C как для железнодорожной насыпи, так и для поезда? Мы приходим к утвердительному, совершенно определенному ответу на этот вопрос, ответу, дающему нам совершенно определенный закон превращения пространственно-временных величин события при переходе от одного исходного тела к другому.

Прежде, чем обратиться к этому закону, сделаем одно предварительное указание. До сих пор мы всегда рассматривали события, происходящие вдоль полотна железной дороги, которое математически выполняло у нас функцию прямой линии. Но мы можем, согласно указаниям § 2-го, представить себе наше исходное тело продолженным в стороны и вверх посредством сооружения из шестов таким образом, чтобы место всякого события, где бы таковое ни произошло, могло быть определено в отношении к нашему сооружению. Точно также можно представить себе продолженным чрез все пространство и наш поезд, идущий со скоростью v, так что и здесь всякое, даже самое отдаленное событие может быть отнесено ко второму сооружению. То обстоятельство, что на практике два таких сооружения должны все время разрушать друг друга вследствие непроницаемости твердых тел, мы можем совершенно игнорировать, не впадая при этом в принципиальную ошибку.

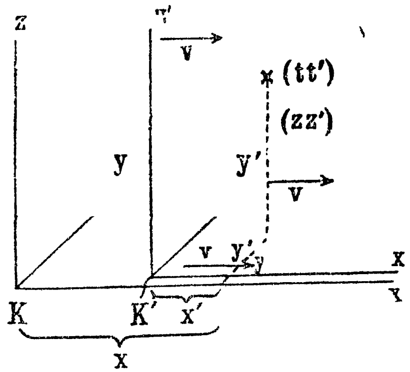

Рис. 2.

В каждом из этих сооружений представим себе выделенными по три взаимно перпендикулярных стены, знаменующих собой «координатные плоскости» («системы координат»). Железнодорожному полотну соответствует система координат K, а поезду—система координат K'. Имеющее где-либо место событие пространственно фиксируется в отношении K тремя перпендикулярами x, y, z, опущенными на координатные плоскости, а временно фиксируется некоторой временной величиной t. То же самое событие в отношении K' фиксируется соответствующими величинами x', y', z', t', которые, естественно, не совпадают с x, y, z, t. О том, как эти величины должно понимать, в качестве результатов физических измерений, уже было подробно изложено раньше.

Теперь можно дать наглядную и точную формулировку нашей проблемы, а именно: как велики величины x', y', z', t' какого-либо события в отношении к K', если даны величины x, y, z, t

того же самого события в отношении к K. Они должны находиться в такой зависимости, чтобы был соблюден закон распространения света в пустоте для одного и того же светового луча (и притом для всякого) как в отношении K, так и в отношении K'. Для показанного на чертеже (рис. 2) пространственного расположения систем координат проблема эта разрешается следующими уравнениями:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Эта система уравнений известна под именем «Лоренцева преобразования»[1].

Если вместо закона распространения света мы будем исходить из молчаливых предположений старой механики об абсолютном характере времен и длин, то, взамен этой формулы преобразования, мы получим следующие уравнения:

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Эту систему часто называют «Галилеевым преобразованием». Галилеева формула может быть получена из Лоренцевой, если в последней скорость света c принять равной бесконечно большой величине.

На следующем примере легко видеть, что при Лоренцевом преобразовании закон распространения света в вакууме будет выпол-

---

[1]) Простой вывод формулы Лоренца дан в приложении.

няться как для исходного тела K, так и для K'. Вдоль положительной оси x посылается световой сигнал. Свет распространяется согласно уравнению:

$$x = ct,$$

следовательно, со скоростью c. Это простое отношение между x и t определяет по Лоренцеву преобразованию также и отношение между x и t. В самом деле, если мы в первое и четвертое из уравнений Лоренцева преобразования подставим вместо x значение ct, мы получим:

$$x' = \frac{(c - v)\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right) t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда, разделив одно на другое, непосредственно имеем:

$$x = ct'$$

Последнее равенство показывает распространение света в отношении к системе K'. Отсюда видно, что скорость света и в отношении к исходному телу K' также равна c. Аналогичный результат получится и для световых лучей, распространяющихся в любом ином направлении. Этому, разумеется, не приходится удивляться, так как уравнения Лоренцева преобразования и выведены, исходя из этой точки зрения.

XII. Свойства находящихся в движении мер и часов.

Я откладываю свой метр по оси x' системы K' таким образом, что его начало ложится в точке $x = 0$, а конец в точке $x = 1$. Какова длина метра по отношению к системе K? Чтобы ответить на этот вопрос, надо установить, где лежат начальный и конечный пункты метра относительно K в определенное время t системы K. Для обеих точек из первого уравнения Лоренцева преобразования при времени $t = 0$ мы находим:

$$X \text{ (начало метра)} = 0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$X \text{ (конец метра)} = 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Расстояние между обеими точками равно $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Но в отношении к K метр движется со скоростью v. Следовательно, длина твердой линейки в один метр, движущейся со скоростью v в направлении своей длины, будет равна $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ метра. Т.-е. движущаяся твердая линейка короче, чем та же самая линейка в состоянии покоя, и притом тем короче, чем скорее она движется. При скорости $v = c$ мы имели бы $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0$; при еще большей скорости корень был бы мнимой величиной. Отсюда мы заключаем, что в теории относительности скорость c играет роль предельной скорости, которая не может быть достигнута или превзойдена никаким действительным телом.

Эта роль скорости c, как предельной скорости, видна была уже, впрочем, непосредственно из уравнений Лоренцева преобразования, так как последние лишены были бы смысла, если принять v больше, чем c.

Если бы, наоборот, мы взяли метр, находящийся в покое по отношению к K на оси x, то мы нашли бы, что его длина, рассматриваемая из K', была бы равна $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Это вполне отвечает смыслу принципа относительности, положенному в основу наших рассуждений.

То, что в системе уравнений Лоренцева преобразования должны содержаться данные относительно физического состояния масштабов и часов, очевидно a priori, ибо величины x, y, z, t суть не что иное, как результаты измерений, произведенных с помощью масштабов и часов. Если бы мы положили в основу Галилеево преобразование, то мы не имели бы укорочения мер в результате движения.

Рассмотрим теперь секундные часы, которые помещаются в начальном пункте ($x' = 0$) системы K'. Пусть $t' = 0$ и $t' = 1$ будут два последовательных удара этих часов. Тогда для обоих этих ударов из первого и четвертого уравнения Лоренцевого преобразования получим:

$$t = 0$$

и
$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Для системы K часы находятся в движении со скоростью v: при рассмотрении из этого исходного тела получается, что между двумя ударами часов проходит не одна секунда, а $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ секунд, т.-е. несколько больший промежуток времени. Часы вследствие движения идут медленнее, чем в состоянии покоя. И здесь скорость c также играет роль недостижимой предельной скорости.

XIII. Теорема сложения скоростей. Опыт Физо.

Так как на практике мы можем сообщать мерам и часам лишь незначительную скорость движения по сравнению со скоростью света c, то едва ли выводы предыдущего параграфа могли бы быть непосредственно сравниваемы с действительностью. Но в виду того, что, с другой стороны, выводы эти должны представляться читателю совершенно необычайными, я хочу извлечь из теории другое ее следствие, которое легко может быть выведено из предшествующего изложения и которое блестяще подтверждено опытом.

В § 6 мы вывели теорему сложения скоростей, имеющих одинаковое направление, в том виде, как она вытекала из гипотез классической механики. Тот же самый результат может быть легко получен из Галилеева преобразования (§ 11).

Вместо идущего по вагону человека возьмем точку, которая движется относительно системы координат K' согласно уравнению

$$x' = wt'$$

Из первого и четвертого уравнения Галилеева преобразования можно x' и t' выразить через x и t, и тогда получим:

$$x = (v + w)t$$

то равенство выражает не что иное, как закон движения точки в отношении к системе K (человека в отношении полотна)

Скорость этого движения мы обозначаем w, и таким образом, как и в § 6, имеем:

$$W = v + w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Но это же рассуждение совершенно так же мы можем построить на основе теории относительности. В равенстве

$$x' = wt'$$

выразим x' и t' через x и t, применив первое и четвертое уравнения Лоренцева преобразования, тогда взамен равенства (A) получим равенство:

$$W = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

каковое и дает теорему сложения одинаково направленных скоростей согласно теории относительности. Теперь вопрос заключается в том, какая из этих двух теорем выдержит испытание на опыте. Ответ на него дает нам огромной важности эксперимент, проделанный более полустолетия назад гениальным физиком **Ф и з о** и с тех пор неоднократно повторенный несколькими лучшими представителями экспериментальной физики, так что результат его не подлежит сомнению. Эксперимент исследует следующий вопрос. В некоторой жидкости, находящейся в состоянии покоя, свет распространяется с определенной скоростью w. С какой скоростью будет он распространяться в трубке R, показанной на рисунке (рис. 3), по направлению стрелки, если трубка заполнена протекающей по ней со скоростью v только что упомянутой жидкостью?

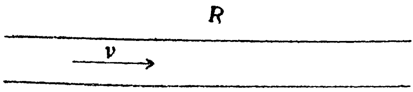

Рис. 3.

С точки зрения принципа относительности мы во всяком случае должны предположить, что распространение света **в о т н о ш е н и и к ж и д к о с т и** всегда совершается с одной и той же скоростью w независимо от того, движется ли жидкость по отношению к другим телам или нет. Итак, скорость света по отношению к жидкости и скорость последней по отношению к трубе известны, требуется найти скорость света по отношению к трубе.

Ясно, что здесь пред нами снова задача § 6-го. Трубка играет роль полотна железной дороги, или системы координат K; жидкость—роль вагона, или системы координат K; наконец, свет играет роль бегущего по вагону человека, или заменившей его в этом параграфе движущейся точки. Если обозначим теперь через W скорость света по отношению к трубе, то величина ее дана равенством (A) или (B), смотря по тому, какое из преобразований, Галилеево или Лоренцево, отвечает действительности.

Эксперимент решает в пользу выведенного из теории относительности равенства (B) и при том весьма точно [1]). Позднейшими, превосходными измерениями Земана (Zeemann) установлено, что формула (B) определяет влияние скорости течения на распространение света с точностью более, чем до одной сотой.

Здесь необходимо, конечно, указать, что еще задолго до возникновения теории относительности Г. А. Лоренц предложил объяснение этого явления чисто электро-динамическим путем, пользуясь определенными гипотезами об электро-магнитной структуре материи. Это обстоятельство, однако, нисколько не уменьшает доказательной силы опыта, как experimentum crucis, в пользу теории относительности, ибо Максвэлле-Лоренц'ва электродинамика, на которой покоилось прежнее объяснение, отнюдь не находится в противоречии с теорией относительности. Напротив, скорее последняя выросла из электродинамики, как поражающе простое сочетание и обобщение прежде друг от друга независимых гипотез, на которых построена электродинамика.

XIV. Эвристическая ценность теории относительности.

Предшествующий ход мыслей может быть коротко резюмирован следующим образом. Опыт привел к убеждению, что, с одной стороны, действителен принцип относительности (в более узком смысле), а с другой—скорость распространения света в вакууме должна

---

[1]) Физо нашел $W = w + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, где $n = \frac{c}{w}$ — показатель преломления жидкости. С другой стороны, формула (B), вследствие малости $\frac{vw}{c^2}$ по отношению к 1, может быть преобразована в $W = (w + v)\left(1 - \frac{vw}{c^2}\right)$ или, с одинаковым приближением, в $W = w + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, что совпадает с результатами Физо.

быть принята равной постоянной величине c. Результатом соединения обоих этих постулатов явился закон преобразования для прямоугольных координат x, y, z и для времени t событий, образующих процессы природы, при чем выражением этого закона служит не Галилеево преобразование, но (в уклонение от классической механики) Лоренцево.

В этом ходе мыслей играл важную роль закон распространения света, принятие которого оправдывается действительными нашими знаниями. Но, обладая Лоренцевой формулой преобразования, мы можем соединить ее с принципом относительности, и тогда теория может быть изложена следующим образом.

Содержание каждого всеобщего закона природы должно быть таково, чтобы он мог сохранить совершенно ту же фурмулировку, если на место пространственно-временных переменных величин x, y, z, t первоначальной системы координат K вводятся новые пространственно-временные переменные величины x', y', z', t' системы координат K', при чем математическая зависимость между первыми и вторыми величинами дана Лоренцевым преобразованием. Коротко формулируя: всеобщие законы природы ковариантны относительно Лоренцева преобразования.

Таково определенное математическое условие, предписываемое теорией относительности для того, чтобы мог быть формулирован закон природы. Тем самым теория приобретает высокую эвристическую ценность, как вспомогательное средство при отыскании общих законов природы. Если бы был открыт какой-либо общий закон природы, не удовлетворяющий сказанному условию, то этим была бы опровергнута по крайней мере одна из двух основных предпосылок теории. Посмотрим же на те общие результаты, которые уже успела дать до сих пор теория относительности.

XV. Общие результаты теории.

Из предшествующего изложения уже видно, что теория относительности (специальная) выросла из электродинамики и оптики. В теоретических положениях этих наук она не произвела больших изменений, но она значительно упростила все их теоретическое построение, т.-е. выведение законов, и,—что гораздо важнее,—она чрезвычайно сократила число независимых друг от друга гипотез, на которых покоились эти науки. Максвэлле-Лоренцевой теории она придала такую степень очевидности, что она завоевала бы свое всеобщее признание у физиков даже и тогда, если бы опыт менее убедительно говорил в ее пользу.

В классической механике потребовалось, однако, некоторое видоизменение для того, чтобы она могла быть согласована с теорией относительности. Но это видоизменение в существенном касается только законов тех движений, при которых скорость v материи является совершенно ничтожной по сравнению со скоростью света. Движение со столь большими скоростями опыт дает нам только для электронов и ионов, при других же движениях уклонения от законов классической механики слишком малы для того, чтобы практически могли быть заметны. О движении звезд речь будет лишь при рассмотрении общей теории относительности. Согласно теории относительности, кинетическая энергия массы m выражается уже не известной формулой

$$\frac{mv^2}{2}$$

но формулой

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Это выражение дает бесконечно большую величину, если скорость v приближается к скорости света c. Следовательно, эта скорость всегда должна оставаться меньшей, нежели c, как бы ни была велика энергия, затрачиваемая на ускорение. Если разложить выражение для кинетической теории в ряд, то получим:

$$mc^2 + m\frac{v^2}{2} + \frac{3}{8}\ m\frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Третий из этих членов по сравнению со вторым, который один только принимается в соображение в классической механике, будет всегда мал, если $\frac{v^2}{c^2}$ остается малым по отношению к единице. Первый же член mc^2 не содержит скорости v и, следовательно, не берется в расчет, поскольку вопрос ставится только о зависимости энергии точки массы от скорости. О его принципиальном значении будет сказано позже.

Важнейший результат общего характера, к которому приводит специальная теория относительности, касается понятия массы. До теории относительности физика выдвигала два имеющих основное значение положения: закон сохранения энергии и закон сохранения материи. Оба этих кардинальных положения казались совершенно независимыми друг от друга. Теория относительности слила их в одно. Как это слияние произошло и как оно должно быть понимаемо, это надлежит здесь вкратце изложить.

Принцип относительности требует, чтобы положение о сохранении энергии имело силу не только в отношении одной системы координат K, но и в отношении всякой другой системы координат K', находящейся по отношению к K в равномерном поступательном движении (короче говоря, в отношении всякой «Галилеевой» системы координат). Переход от одной из этих систем к другой определяется,—в противоречии с классической механикой,—согласно Лоренцевой формуле преобразования.

Из этих посылок в связи с основными уравнениями Максвэллевой электродинамики можно вывести с принудительной необходимостью, путем сравнительно простого рассуждения, следующее заключение: тело, движущееся со скоростью v и воспринимающее в форме лучей энергию E_0 [1]), не меняя при этом своей скорости, получает увеличение своей энергии на величину:

$$\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Тогда искомая энергия тела, принимая во внимание данную ранее формулу кинетической энергии, будет равна

$$\frac{\left(m+\frac{E_0}{c^2}\right)c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Мы имеем таким образом, что энергия указанного тела будет та же, что и энергия тела, движущегося со скоростью v и обладающего массой $m+\frac{E_0}{c^2}$. Итак, можно сказать: если тело воспринимает энергию E_0, то его инертная масса возрастает на $\frac{E_0}{c^2}$; инертная масса тела не есть постоянная величина, но изменяется по мере изменения энергии. Инертную массу материальной системы можно свободно рассматривать, как меру ее энергии. Положение о сохранении массы системы совпадает с положением о сохранении энергии и имеет значение лишь постольку, поскольку система не

[1]) E_0 означает воспринимаемую энергию, оцениваемую в отношении к движущейся вместе с телом системе координат.

получает и не отда т никакой энергии. Если выражение для энергии написать в таком виде:

$$\frac{mc^2 + E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

то видно, что выражение mc^2, которое мы уже имели выше, представляет не что иное, как энергию [1]), которой тело уже обладало, прежде чем оно восприняло энергию E_0.

Прямое сравнение выведенного положения с опытом временно встречает препятствие в том, что те изменения энергии E_0, которые мы можем сообщить какой-либо системе, не достаточно велики для того, чтобы быть заметными, как изменения инертной массы системы. $\frac{E_0}{c^2}$ слишком мало по сравнению с массой m, которая существовала до изменения энергии. Это обстоятельство и было причиной того, что положение о сохранении массы с успехом могло быть выставлено, как имеющее самостоятельное значение.

Еще одно замечание принципиального характера. Успех Фарадее-Максвэллева толкования электро-магнитного дальнедействия путем посредствующих процессов, имеющих конечную скорость, повлек за собой распространение среди физиков убеждения, что не существует непосредственных, моментальных дальнедействий по типу **Н ь ю т о н о в а** закона тяготения. По теории относительности, вместо моментального действия на расстоянии, т.-е. дальнедействия с бесконечно большой скоростью распространения, мы всегда имеем дальнедействие со скоростью света. Это находится в связи с той принципиальной ролью, которую играет в этой теории скорость c. Во второй части будет показано, в каком направлении этот результат видоизменяется в общей теории относительности.

XVI. Специальная теория относительности и опыт.

Ответ на вопрос, в какой мере специальная теория относительности подтверждается опытом, не так прост по той причине, о которой уже было упомянуто, когда речь шла о фундаментальном опыте **Ф и з о**. Специальная теория относительности выкристаллизовывалась из **М а к с в э л л е - Л о р е н ц е в о й** теории электромагнитных явлений. Таким образом все факты опыта, подтвер-

---

[1]) Оцениваемую в отношении к движущейся вместе с телом системе координат.

ждающие последнюю, с тем вместе подтверждают и теорию относительности. Как особо существенное, я отмечу здесь то обстоятельство, что теория относительности позволяет необычайно просто объяснить, в согласии с опытом, те влияния, которые испытывает посылаемый к нам неподвижными звездами свет вследствие движения земли относительно этих звезд. Я говорю о годичном перемещении кажущегося места неподвижных звезд вследствие движения земли вокруг солнца (аберрация) и о влиянии радиальных слагающих движения неподвижных звезд относительно земли на цвета достигающего до нас света. Последнее сказывается в небольшом перемещении спектральных линий достигающего до нас света неподвижной звезды по сравнению со спектральным положением такой же, но произведенный земным источником света спектральной линии (принцип Доплера). Что касается опытных доказательств в пользу Максвэлле-Лоренцевой теории, которые в то же время являются и доказательствами в пользу теории относительности, то они слишком многочисленны для того, чтобы их здесь излагать. Фактически они настолько суживают фактические возможности, что ни одна другая теория, кроме Максвэлле-Лоренцевой, не может быть противопоставлена опыту.

Но существуют две категории установленных опытом фактов, которые Максвэлле-Лоренцевой теорией могут быть объяснены лишь путем привлечения вспомогательной гипотезы, которая, сама по себе, без применения теории относительности, представляется непонятной.

Известно, что катодные лучи и так называемые β-лучи, посылаемые радиоактивными веществами, состоят из отрицательных электрических телец (электронов) с очень незначительной инерцией и большей скоростью. Исследуя отклонение этих лучей под влиянием электрического и магнитного поля, можно изучить с большой точностью закон движения этих телец.

И вот, при теоретическом изучении электронов приходилось преодолеть ту трудность, что из одной электродинамики совершенно нельзя было уяснить их природу. В самом деле, так как электрические массы одного знака взаимно отталкиваются, то отрицательные электрические массы, образующие электрон, должны были бы, под влиянием взаимного отталкивания, рассеяться, если бы среди них не действовали еще силы другого порядка, природа которых для нас до сих пор темна [1]. Теперь, если бы мы приняли, что относительные расстояния образующих электрон электрических масс остаются неизменными при его движениях

---

[1] Общая теория относительности выдвигает объяснение, согласно которого электрические массы электрона удерживаются вместе силами тяготения.

(твердая связь в смысле классической механики), то мы пришли бы к такому закону движения электронов, который не согласуется с опытом: Г. А. Лоренц, руководясь чисто формальной точкой зрения, первый ввел гипотезу что тело электрона вследствие движения сокращается в направлении своего движения пропорционально выражению $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Эта гипотеза, ничем не оправдываемая с точки зрения электродинамики, давала тот закон движения, который в последние годы был подтвержден опытом с большой точностью.

Теория относительности дает тот же самый закон движения, не нуждаясь для этого в какой-либо специальной гипотезе о строении и состоянии электрона. Аналогично обстоит дело, как мы уже это видели в § 13, с опытом Физо, результаты которого теория относительности вывела, не создавая гипотез о физической природе жидкости.

Вторая группа фактов, на которые здесь следует указать, касается вопроса, можно ли заметить при опытах, производимых на земле, движение ее в мировом пространстве. В § 5 уже было замечено, что все старания обнаружить что-либо подобное дали отрицательный результат. До теории относительности науке нелегко было справиться с этим отрицательным фактом. Положение вещей было таково. Унаследованные предрассудки относительно времени и пространства не допускали никакого сомнения в том, что Галилеева формула преобразования является определяющей при переходе от одного исходного тела к другому. И вот оказывалось, что если Максвэлле-Лоренцевы уравнения действительны для какого-либо исходного тела K, то они должны быть недействительны для другого исходного тела K', равномерно движущегося по отношению к K, раз переход координат от K к K строился по Галилееву преобразованию. Отсюда следовало, что из всех Галилеевых систем координат должна быть, с точки зрения физики, выделена одна (K), обладающая определенным состоянием движения. Физически это истолковывалось в том смысле, что систему K рассматривали, как находящуюся в состоянии покоя относительно какого-то гипотетического светового эфира. Напротив, все остальные системы координат K', находящиеся в движении в отношении к K, должны были двигаться и в отношении эфира. Этому движению систем K' по отношению к эфиру («эфирному ветру» относительно K) приписывали те более сложные законы, которые должны были действовать для K'. Последовательность требовала, чтобы такой эфирный ветер был принят и по отношению к земле, и стремление физиков долго было направлено к тому, чтобы доказать его существование.

Майкельсон нашел, казалось, безошибочный путь. Представим два таким образом поставленных на твердом теле зеркала, чтобы они были обращены друг к другу своими отражающими поверхностями. Требуется совершенно определенное время T для того, чтобы луч света прошел от одного зеркала до другого и вернулся обратно в том случае, когда вся эта система находится в покое относительно светового эфира. Но для того же процесса устанавливается (путем вычисления) совершенно другое время T', если тело вместе с зеркалами движется по отношению к эфиру. Более того. Вычисление показало, что при данной скорости по отношению к эфиру указанное время T' будет не одинаково в зависимости от того, движется ли тело перпендикулярно к плоскостям зеркал или параллельно. Как ни ничтожно мала была вычисленная таким образом разница между обоими промежутками времени, Майкельсон и Морлей произвели основанный на интерференции света эксперимент, при котором она все же должна была явственно проявиться. Но, к великому смущению физиков, опыт дал отрицательный результат. Лоренц и Фиц-Джеральд вывели теорию из этого затруднительного положения, предположив, что движение тела по отношению к эфиру приводит к сокращению тела в направлении его движения, и что это сокращение как раз и скрадывает искомую разницу во времени. Сравнение с выводами § 12 показывает, что этот выход был правилен и с точки зрения теории относительности. Но только то понимание всего положения вещей, которое дает теория относительности, несравненно удовлетворительнее. Согласно ей, нет никакой особо предпочитаемой системы координат, которая давала бы повод к принятию идеи эфира, а вместе с тем нет никакого эфирного ветра, нет и экспериментов, долженствующих его обнаружить. Сокращение движущихся тел вытекает здесь из обоих основных начал теории без всяких особых гипотез. При этом для сокращения тел определяющим является не какое-то движение в себе, во что мы не могли бы вложить никакого смысла, а движение по отношению к определенному, для данного случая избираемому, исходному телу. Так, следовательно, и зеркальное тело Майкельсона и Морлея не будет укорачиваться относительно исходной системы, движущейся вместе с землей, но, конечно, будет сокращаться относительно исходной системы, находящейся в покое по отношению к солнцу.

XVII. Пространство четырех измерений Минковского.

Мистический ужас охватывает не математика, когда он слышит о «четвертом измерении», словно ему показали театральное привидение. И тем не менее нет более банального утверждения, как то, что наш привычный мир являет собой пространственно-временную непрерывность (континуум) четырех измерений.

Пространство есть непрерывность трех измерений. Этим хотят сказать, что положение точки (находящейся в покое) может быть определено тремя числами (координатами) x, y, z, и что для каждой точки может быть дана в какой угодно близости «смежная» точка, координатные величины которой (координаты) x_1, y_1, z_1 могут быть сколь угодно близки к координатам x, y, z первой. В виду последнего свойства мы говорим о «непрерывности» («континууме»), в виду же числа трех координат—о «трех измерениях».

Аналогично этому мир физических явлений, который Минковский для краткости называл просто «миром», естественно имеет четыре измерения в пространственно-временном смысле. Ибо он слагается из отдельных явлений, из которых каждое описывается четырьмя числами, а именно: тремя пространственными координатами x, y, z и одной временной координатой, временной величиной t. «Мир» в этом смысле также являет непрерывность, ибо для каждого события могут быть даны сколь угодно «близкие» события (осуществившиеся или же мыслимые), координаты которых x_1, y_1, z_1, t_1 могут быть сколь угодно приближены к координатам x, y, z, t—первоначального события. Наша непривычка рассматривать мир, как непрерывность четырех измерений, в этом смысле зависит от того, что в физике до теории относительности отводилась времени отличная от пространственных координат, более самостоятельная роль. Мы были приучены трактовать время, как самостоятельную непрерывность. В самом деле, для классической физики время абсолютно, т.-е. независимо от положения и состояния движения исходной системы. Это выражено в последнем уравнении Галилеевой формулы преобразования ($t' = t$).

Напротив, теория относительности устанавливает рассмотрение «мира» в четырех измерениях, так как она лишает время его самостоятельности, как это видно из четвертого уравнения Лоренцева преобразования:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Согласно этому уравнению, разница во времени $\Delta t'$ двух событий в отношении к K' в общем и тогда не исчезает, когда исчезает разница во времени Δt тех же событий в отношении к K. Чисто пространственное расстояние двух событий в отношении к K имеет своим последствием временное расстояние в отношении к K'. Но не в этом заключается значение открытия Минковского, важное для формального развития теории относительности. Оно скорее заключается в познании того чрезвычайно тесного родства, которое сближает в основных формальных свойствах пространственно-временный континуум четырех измерений теории относительности с пространственным континуумом трех измерений Эвклидовой геометрии [1]). Для того, чтобы эта близость совершенно ясно выступила, нужно только вместо обычной временной координаты t подставить пропорциональную ей мнимую величину

$$\sqrt{-1}\, ct.$$

Тогда законы природы, удовлетворяют с требованиям теори относительности (специальной), получат математическое выражение, при котором временная координата играет совершенно ту же роль, что и три пространственные. Эти четыре координаты формально точно соответствуют трем пространственным координатам Эвклидовой геометрии. Даже и не математику должно быть ясно, что, благодаря этому чисто-формальному знанию, теория должна была чрезвычайно выиграть в своей наглядности.

Эти скудные указания могут дать читателю лишь неясное представление о важной идее Минковского, без которой развиваемая дальше в своих основных идеях общая теория относительности, быть может, не вышла бы из пеленок. Но так как более точное ознакомление с этим предметом представило бы, без сомнения, большие трудности для мало искушенного в математике читателя, и так как оно не является необходимым для понимания основных идей специальной и общей теории относительности, я на этом пока остановлюсь с тем, чтобы уже в последних разъяснениях настоящей книжки снова вернуться к этому вопросу.

---

[1]) Ср. несколько более подробное развитие в приложении.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Об общей теории относительности.

XVIII. Специальный и общий принцип относительности.

Основной темой, развитию которой было посвящено предшествующее изложение, был **специальный** принцип относительности, т.-е. принцип о физической относительности всякого **равномерного** движения. Проанализируем еще раз его точное содержание.

То обстоятельство, что всякое движение, по самому понятию своему, должно быть мыслимо, как **относительное** движение было ясно во все времена. Так, например, в нашем многократно использованном примере железнодорожного полотна и вагона движение, имеющее здесь место, может быть с полным правом понимаемо в двоякой форме:

a) вагон движется в отношении к полотну,
b) полотно движется в отношении к вагону.

В первом утверждении за исходное тело принято полотно, во втором—вагон. При простом констатировании или описании движения, принципиально безразлично, к какому исходному телу отнесено движение.

Эта мысль как сказано, понятна сама собою, и она не должна быть смешиваема с гораздо далее идущим утверждением, которое мы назвали «принципом относительности» и которое лежит в основе наших исследований.

Наш принцип не только утверждает, что для описания всякого события можно в равной мере избрать за исходное тело как вагон, так и полотно (ибо это тоже само собой понятно), но и более того, он содержит в себе еще дальнейшее утверждение: при формулировании общих законов природы в том виде, как они выводятся из опыта, все равно, берут ли

a) полотно, как исходное тело, или
b) вагон, как исходное тело,—

в том и другом случае эти общие законы природы (например, законы механики или закон распространения света в вакууме) гласят совершенно одинаково. Это можно выразить еще таким образом: для **физического** описания процессов природы ни одно из исходных тел, K, K', не имеет преимуществ перед другим. Правильность последнего утверждения не является столь же априорно необходимой, как первого; оно не содержится в самих понятиях «движения» и «исходного тела», из которых оно могло бы быть выведено, и вопрос о правильности или неправильности его может решить один только **опыт**.

До сих пор мы отнюдь не утверждали равноценности **всех** исходных тел K для формулирования законов природы. Мы шли скорее следующим путем. Прежде всего мы принимали, что существует исходное тело K, обладающее таким состоянием движения, что по отношению к нему действует основной закон **Галилея**; всякая предоставленная самой себе и достаточно удаленная от всех остальных материальная точка движется равномерно и прямолинейно. В отношении к K (**Галилееву** исходному телу) все законы природы должны быть наиболее простыми. Но кроме K должны обладать преимуществом в указанном смысле быть совершенно равноценными с K для формулирования законов природы и все те исходные тела K', которые по отношению к K находятся в **прямолинейном, равномерном, свободном от вращения движении**. Все эти исходные тела могут рассматриваться, как **Галилеевы** исходные тела. Только для них признавалась действительность принципа относительности, для других же (иначе движущихся)—нет. В этом смысле мы говорим о **специальном** принципе относительности, и соответственно о специальной теории относительности.

Напротив, под «общим принципом относительности» мы понимаем следующее утверждение: все исходные тела K, K' и т. д. равноценны для описания природы (формулирования общих законов природы), каково бы ни было состояние их движения. Тут же надо, однако, оговорить, что эту формулировку позже мы заменим другой, более абстрактной, по основаниям, которые выяснятся впоследствии.

После признания правомерности специального принципа относительности, каждому стремящемуся к обобщению уму должна была представляться увлекательной мысль решиться на следующий шаг и принять общий принцип относительности. Но простое, представлявшееся совершенно бесспорным, рассуждение заставляло сначала считать такую попытку безнадежной. Пусть читатель мысленно переместится все в тот же наш равномерно движущийся вагон. Пока движение остается равномерным, оно ничем не дает о себе знать пассажиру. Последний может поэтому без всякого внутреннего сопротивления воспринять положение вещей таким образом, что вагон находится в покое, а насыпь движется; это толкование, впрочем, согласно специальной теории относительности, совершенно оправдывается и со стороны своего физического содержания.

Но представим себе теперь, что движение вагона превращается в неравномерное хотя бы тем, что вагон сильно затормозили. Тогда пассажир получит соответственно сильный толчок вперед. Ускоренное же движение вагона обнаружится в механическом отставании тела по отношению к вагону. Это механическое отставание тела противоположно его состоянию в предшествующем случае. Уже вследствие этого кажется исключенной возможность, чтобы одинаковые механические законы были действительны как относительно неравномерно движущегося, так и относительно находящегося в покое или равномерно движущегося вагона. Во всяком случае ясно, что по отношению к неравномерно движущемуся вагону основной закон Галилея недействителен. Мы поэтому на первых порах чувствуем себя вынужденными приписать неравномерному движению, вопреки общему принципу относительности, своего рода абсолютную физическую реальность. В дальнейшем мы скоро увидим, что такое заключение неосновательно.

XIX. Поле тяготения.

На вопрос: «Почему падает на землю камень, который мы подымаем вверх и затем выпускаем?» обычно отвечают «Потому, что он притягивается землей». Современная физика формулирует ответ несколько иначе на следующем основании. Более точное изучение электромагнитных явлений привело к воззрению, что непосредственного действия на расстоянии не существует. Если, например, магнит притягивает кусок железа, то нельзя удовлетвориться объяснением, будто магнит непосредственно чрез находящееся между ним и железом пустое пространство действует на последнее; в согласии с Фарадеем представляют себе, что магнит постоянно вызывает в окружающем его пространстве нечто, имеющее реальное физическое содержание, что и называют «магнитным полем». Это магнитное поле со своей стороны действует на кусок железа таким образом, что он стремится двигаться к магниту. Мы не будем здесь входить в правомерность такого, самого по себе произвольного, посредствующего понятия. Заметим только, что оно дает возможность теоретически гораздо более удовлетворительного представления электромагнитных явлений, в особенности—распространения электромагнитных волн, чем это можно было бы сделать без его помощи. Аналогично этому представляют себе и действие тяготения.

Земля воздействует на камень не непосредственно. Она производит вокруг себя поле тяготения. Последнее действует на камень и вызывает его падение. Согласно опыту, сила воздействия на тело уменьшается, по мере все большего и большего удаления от земли, по совершенно определенному закону. При нашем способе объяснения это означает, что закон, которому подчинены пространственные свойства поля тяготения, должен с совершенной определенностью дать правильное изображение уменьшения действия тяготения по мере удаления от воздействующего тела. Представим себе, что тело (например, земля) прямо производит поле тяготения в своей непосредственной близости,—тогда сила и направление поля на большем отдалении определяются законом, который управляет пространственными свойствами полей тяготения.

Поле тяготения, в противоположность электрическому или магнитному полю, обнаруживает в высшей степени примечательное свойство, имеющее основное значение для последующего изложения. Тела, двигающиеся исключительно под воздействием поля тяготения, получают ускорение, которое ни в малейшей мере не зависит ни от вещества, ни от физического состояния тела. Так, например, кусок свинца и кусок дерева падают в поле тяготения (в безвоздушном пространстве) совершенно одинаково, если при падении им не сообщить никакой или сообщить одинаковую начальную скорость. На основе следующих рассуждений возможна еще иная формулировка этого с чрезвычайной точностью действующего закона.

Согласно закону движения Ньютона.

$$(\text{сила}) = (\text{инертная масса}) \times (\text{ускорение}),$$

при чем «инертная масса» есть характеристичная постоянная тела, испытывающего ускорение. С другой стороны, если ускоряющей силой является тяжесть, то

$$(\text{сила}) = (\text{тяжелая масса}) \times (\text{интенсивность поля тяготения}),$$

при чем «тяжелая масса» равным образом является характеристичной постоянной тела. Из обоих отношений следует:

$$(\text{ускорение}) = \frac{(\text{тяжелая масса})}{(\text{инертная масса})} \times (\text{интенсивность поля тяготения}).$$

Если же, как следует из опыта, при данном поле тяготения ускорение остается всегда одно и то же, независимо от природы и состояния тела, то равным образом должно быть неизменно отношение тяжелой массы к инертной массе. Следовательно, при соответственном выборе единиц измерения, это отношение может быть сделано равным единице, и тогда закон может быть выраже в такой форме: тяжелая и инертная массы тела друг другу равны.

Прежняя механика, правда, отметила это важное положение, но она его не истолковала. Удовлетворительное толкование может быть дано лишь при представлении, что одно и то же качество тела проявляется, смотря по обстоятельствам, то как «инерция», то как «тяжесть». Насколько это имеет место в действительности, и в какой связи этот вопрос находится с общей теорией относительности, мы и рассмотрим в ближайших параграфах.

XX. Равенство инертной тяжелой массы, как доказательство в пользу общего постулата относительности.

Представим себе обширную часть пустого мирового пространства настолько в стороне от звезд и значительных масс, что с большой точностью можем принять наличность случая, предусмотренного Галилеевым основным законом. Мы можем тогда избрать для этой части мира Галилеево исходное тело, по отношению к которому покоящиеся точки останутся в покое, а движущиеся будут длительно пребывать в прямолинейном равномерном движении. Представим себе в качестве исходного тела просторный ящик на манер комнаты. Внутри находится наблюдатель, снабженный надлежащими аппаратами. Для него, естественно, не существует никакой тяжести. Он должен привязать себя шнурами к полу, если не хочет, при малейшем толчке о пол, медленно возноситься к потолку комнаты.

В середине крыши ящика с наружной стороны вделан крюк с привязанным к нему канатом. И вот некоторое существо, безразлично какое, начинает тащить за тот канат с постоянной силой. Тогда ящик вместе с наблюдателем начинает лететь «вверх» в равномерно ускоренном полете. С течением времени его скорость возрастает до фантастических размеров, если судить обо всем этом с другого исходного тела, которого никто не тащит за веревку.

Как представляется все событие человеку в ящике? Ускорение ящика переносится на него путем давления от пола ящика. Поэтому он должен принять это давление, упираясь ногами в пол, чтобы не растянуться иначе на полу во всю свою длину. В своем ящике он тогда стоит совершенно так же, как любой из нас в комнате какого-либо дома на земле. Если он выпускает из рук какой-нибудь предмет, то на последний уже не передастся ускорение ящика, и он поэтому будет приближаться к полу ящика в равномерно ускоренном относительном движении. Дальше наблюдатель убедится, что ускорение тел к полу всегда будет сохранять одну и ту же величину, с какими бы телами он ни проделывал свой опыт.

Тогда, опираясь на свои познания о поле тяготения в том виде, как это изложено в последнем параграфе, он придет к выводу, что он вместе со своим ящиком находится в некотором неизменном во времени поле тяготения. На минуту его удивит, конечно, что ящик не падает в этом поле тяготения, но, открывши крюк в середине крыши с привязанным к нему натянутым канатом, он последовательно заключит, что ящик подвешен в поле тяготения и потому находится в состоянии покоя.

Можем ли мы посмеяться над нашим наблюдателем и счесть ошибочным все его понимание положения вещей? Думаю, что нет, раз мы хотим остаться последовательными; напротив, мы должны будем признать, что его толкование не грешит ни против разума, ни против известных нам законов механики. Хотя ящик и находится в состоянии ускоренного движения по отношению к первоначально принятому нами «Галилееву пространству», все же мы можем рассматривать его, как находящийся в покое.

С достаточным поэтому основанием мы можем распространить принцип относительности и на исходные тела, имеющие ускорение по отношению друг к другу, и таким образом приобретаем солидный аргумент в пользу обобщения постулата относительности.

Надо обратить особенно внимание на то, что возможность такого истолкования покоится на фундаментальном свойстве поля тяготения сообщать всем телам одинаковое ускорение, или, что то же самое, на положении о равенстве инертной и тяжелой масс. Если бы не было этого закона природы, то и находящийся в ящике наблюдатель не мог бы объяснить состояния окружающих его предметов на основе предположенного поля тяготения, и он был бы не в праве, опираясь на показания опыта, считать свое исходное тело «находящимся в покое».

На внутренней стороне крышки ящика наш наблюдатель укрепляет веревку и к свободному ее концу подвязывает какой-либо предмет. Подвязанный предмет заставит веревку повиснуть «вертикально» в натянутом состоянии. Где причина этого натянутого состояния веревки? Человек в ящике скажет: «На подвешенное тело действует в поле тяготения сила, влекущая его вниз и уравновешиваемая напряжением веревки. Величину напряжения веревки определяет тяжелая масса подвешенного тела». Напротив, наблюдатель, свободно парящий в пространстве, рассудит так: «Ускоренное движение ящика увлекает за собой веревку, а последняя тянет за собой в этом движении подвешенный к ней предмет. Напряжение веревки должно быть как раз настолько велико, чтобы могло вызвать ускоренное движение предмета. Величину напряжения веревки определяет инертная масса тела». На этом примере мы видим, что при нашем расширении принципа относительности из него с необходимостью вытекает положение о равенстве инертной и тяжелой масс. Этим достигается физическое истолкование названного закона.

Из рассмотренного случая с находящимся в ускоренном движении ящиком мы видим, что общая теория относительности должна дать важные результаты для выяснения законов тяготения. И действительно, последовательное проведение общей идеи относительности открывает нам законы, управляющие полем тяготения. Но я уже здесь считаю необходимым предостеречь читателя от одного недоразумения, которое легко может возникнуть в связи с нашими рассуждениями. Для человека в ящике существует поле тяготения, хотя такового нет для первоначально избранной системы координат. Отсюда легко можно было бы заключить, что и вообще существование поля тяготения всегда только кажущееся. Можно было бы думать, что какое бы ни имелось поле тяготения, всегда можно избрать такое другое исходное тело, что в отношении к нему не было бы никакого поля тяготения. Но это ни в коем случае не будет верно относительно всех полей тяготения, а справедливо лишь для совершенно определенных полей, имеющих специальное строение. Так, например, было бы невозможно найти такое исходное тело, чтобы для него совершенно не существовало поле тяготения земли (взятое на всем его протяжении).

Теперь мы видим, почему не доказательно возражение, выдвинутое в конце § 18 против общего принципа относительности. Верно, конечно, что находящийся в заторможенном вагоне наблюдатель почувствует вследствие торможения толчок вперед и на этом заметит неравномерность (изменение скорости) движения вагона. Но ничто не обязывает его объяснить толчок «действительным» изменением скорости вагона. Свое переживание он может и так истолковать: «Мое исходное тело (вагон) длительно остается в покое. Но в отношении к нему существует (в период торможения) направленное вперед и изменяющееся во времени поле тяготения. Под влиянием этого же тяготения насыпь вместе с землей движутся неравномерно, и их первоначальная, направленная назад скорость все более уменьшается». Это же поле тяготения и вызывает толчок у наблюдателя.

XXI. В какой мере недостаточны основы классической механики и специальной теории относительности?

Как уже неоднократно было упомянуто, классическая механика исходит из следующего положения: материальная точка, надлежаще удаленная от других материальных точек, движется прямолинейно и равномерно или пребывает в состоянии покоя. Также неоднократно мы указывали, что этот основной закон действителен лишь для исходных тел K, имеющих свое особое определенное движение, а именно, находящихся в отношении друг к другу в состоянии равномерного поступательного движения. По отношению к другим исходным телам K этот закон недействителен. Соответственно этому в классической механике и специальной теории относительности проводилось различие между исходными телами, по отношению к которым действительны законы природы, и исходными телами, по отношению к которым не могли быть законы природы недействительны.

Но с таким положением вещей не мог примириться ни один последовательный ум. Для него возникал вопрос: «Каким образом возможно, чтобы одни исходные тела (или их состояния движения) были отличны от других исходных тел (или их состояния движения)? В чем основание этого предпочтения? Чтобы пояснить свою мысль, прибегну к такому сравнению.

Предо мной газовая плита. На ней поставлены друг против друга два совершенно одинаковых кухонных горшка. Оба наполовину наполнены водой. Но я вижу, что из одного из них непрерывно идет пар, из другого же нет. Меня это удивит, даже если бы я никогда до сих пор не видел ни газовой плиты, ни кухонных горшков. Когда же я замечаю под первым горшком какой-то голубоватый светящийся язычок и не вижу такого под вторым, тогда я перестаю удивляться, хотя бы ни разу еще не имел дела с газовым пламенем. Я могу теперь сказать, что этот голубоватый язычок служит причиной испарения, или по крайней мере может быть таковой. Если же ни под одним из горшков нет голубоватого язычка, и все же я вижу, что из одного непрерывно идет пар, а из другого нет, то мое недоумение не может рассеяться, и я не могу успокоиться до тех пор, пока не установлю какого-либо обстоятельства, которому я мог бы приписать различное состояние обоих горшков.

Совершенно также тщетно ищу я и в классической механике (равно и в специальной теории относительности) то реальное нечто на счет чего я мог бы отнести различное поведение тел по отношению к исходным системам K и K'[1]. Это возражение видел уже и Ньютон, и он тщетно пытался свести его на-нет. Но с наибольшей ясностью отметил его Э. Мах и со своей стороны потребовал, чтобы механика была построена на новых основаниях. Это возражение может быть устранено только с помощью физики, отвечающей общему принципу относительности. Ибо уравнения такой теории имеют силу для всякого исходного тела, в каком бы состоянии движения оно ни находилось.

XXII. Некоторые выводы из общего принципа относительности.

Рассуждения § 20 показали, что общий принцип относительности позволяет нам вывести чисто - теоретическим путем свойства поля тяготения. Пусть будет известно пространственно-временное течение какого-либо явления природы так, как оно отражается в Галилеевой области в отношении к Галилееву исходному телу K; тогда путем чисто теоретических операций, т.-е. простых вычислений, мы найдем, в каком виде представится этот же известный нам процесс природы, если его рассматривать из исходного тела K', находящегося в ускоренном движении относительно K. Но так как в отношении к этому новому исходному телу K' существует поле тяготения, то мы тем самым установим характер влияния последнего на изучаемый процесс.

Так, например, мы узнаем, что тело, находящееся по отношению K в прямолинейном и равномерном движении (согласно Галилееву закону), совершает по отношению к ускоренному исходному телу K' (к ящику) ускоренное, в общем, криволинейное движение. Это ускорение (или искривление) соответствует влиянию на движущееся тело со стороны господствующего по отношению к K' поля тяготения. Подобное влияние поля тяготения на движение тел известно, так что это рассуждение не устанавливает никаких новых принципов.

Новые выводы, имеющие существенную важность, дает нам применение теории к световому лучу. По отношению к Галилееву исходному телу K луч света распространяется по прямой линии со скоростью C. Но в отношении к находящемуся в состоянии ускоренного движения ящику (исходное тело K') путь

---

[1] Это возражение приобретает особенный вес в том случае, когда состояние движения исходного тела таково, что для его сохранения не требуется никакого внешнего воздействия, как, например, в случае равномерного вращательного движения исходного тела.

того же самого луча, как это легко вывести, уже не будет прямолинеен. Отсюда следует заключить, что **лучи света в пределах полей тяготения по общему правилу распространяются по кривой линии.** Этот вывод чрезвычайно важен в двух отношениях.

Прежде всего он может быть проверен на фактах. Хотя детальный анализ и обнаруживает, что устанавливаемое на основе общей теории относительности скривление светового луча должно быть до крайности незначительным для доступных нашему опыту полей тяготения, все же для световых лучей, проходящих вблизи солнца, оно должно равняться 1,7 угловой секунды. Это должно было бы обнаружиться в сдвиге от солнца на эту величину неподвижных звезд, оказывающихся в его близости во время полного солнечного затмения и доступных нашему наблюдению, по сравнению с тем положением, которое они занимают для нас на небе, когда солнце находится в другом месте небесного свода. Испытание правильности или неправильности этого вывода представляет задачу величайшей важности, на скорое разрешение которой астрономами мы можем надеяться [1]).

Во-вторых, из положения о криволинейном распространении света следует, что уже много раз приводившийся нами закон постоянной скорости света в вакууме, являющийся одной из двух основных предпосылок специальной теории относительности, не может, согласно общей теории относительности, претендовать на неограниченное значение. В самом деле, скривление светового луча может только в том случае иметь место, если скорость распространения света варьирует от места к месту. Отсюда можно было бы предположить, что благодаря этому следствию должна пасть специальная теория относительности, а с ней и теория относительности вообще. В действительности, однако, это не так. Правильно только заключение, что специальная теория относительности не может требовать неограниченной области своего применения: ее выводы действительны постольку, поскольку можно отвлечься от влияний полей тяготения на исследуемые явления (например, световые).

Но так как противники теории относительности слишком часто утверждают, что специальная теория относительности опрокидывается общей теорией относительности, я хочу пояснить действительное положение вещей путем сравнения. До электродинамики законы электростатики рассматривались, как законы электричества вообще. Но теперь мы знаем, что электростатика уста-

---

1) Требуемое теорией отклонение света было фотографически установлено во время солнечного затмения 30 мая 1919 г. двумя экспедициями, снаряженными Королевским обществом под руководством астрономов Эддингтона и Кроммелина.

навливает свойства электрических полей лишь для того, никогда полностью не реализируемого случая, когда электрические массы находились бы в полном покое в отношении друг к другу и к системе координат. Значит ли это, что электростатика опрокинута Максвэллевыми уравнениями электродинамических полей? Отнюдь нет. Электростатика содержится в электродинамике, как предельный случай: законы последней приводят непосредственно к законам первой для случаев временной неизменности полей. Лучшая заслуга какой-либо физической теории, если она прокладывает путь другой, более общей теории, в которой она продолжает жить в качестве ее предельного случая.

Рассматривая закон распространения света, мы видели, что общий принцип относительности дает нам возможность теоретическим путем вывести влияние поля тяготения на протекание процессов, законы которых при отсутствии поля тяготения нам уже известны. Но более того: общий принцип относительности дает ключ также к разрешению задачи, полной возбуждающего интереса: установить законы самого поля тяготения. Положение вещей здесь таково.

Мы знаем пространственно-временные области, находящиеся, при соответственном выборе исходного тела, в «Галилеевом» состоянии (приблизительно), иначе говоря, области, в которых отсутствуют поля тяготения. Но если мы за исходное тело для такой области возьмем находящуюся в состоянии какого угодно движения систему K', то в отношении к K' мы уже будем иметь пространственно и временно изменяющееся поле тяготения [1]). Свойства последнего, естественно, зависят от избранного нами состояния движения K'. Общий закон поля тяготения должен, согласно общей теории относительности, иметь силу для всех таким путем получаемых полей тяготения особого рода. Если и представляется совершенно невозможным получить здесь тяготения всех родов, то все же возникает надежда, что из полей тяготения специального характера можно будет вывести общий закон тяготения. И надежда эта осуществлена в самой полной мере. Но прежде, чем от ясной постановки этой задачи можно было притти к ее действительному разрешению, требовалось преодолеть серьезное затруднение, от рассмотрения которого я не могу избавить читателя, так как оно глубоко лежит в самом существе нашего предмета.

Дело идет о дальнейшем углублении понятий пространственно-временного континуума.

[1]) Это следует из обобщения рассуждений § 20

XXIII. Состояние часов и мер на вращающемся исходном теле.

Я умышленно не касался до сих пор физического истолкования пространственных и временных данных при общей теории относительности. Этим я допустил определенную погрешность, которая, как мы уже знаем из специальной теории относительности, никоим образом не может быть признана маловажной и простительной. Теперь уже давно пора восполнить этот пробел. Я должен, однако, заранее предупредить читателя, что здесь от него потребуется далеко не малое терпение и напряжение отвлеченной мысли.

Мы снова будем исходить от уже часто бравшихся нами совершенно специальных случаев. Пусть дана пространственно-временная область, в которой нет поля тяготения в отношении к исходному телу K, находящемуся в соответственно избранном состоянии движения. Тогда для этой области система K будет Галилеевым исходным телом, и для K имеют силу выводы специальной теории относительности. Представим себе ту же самую область в отношении ко второму исходному телу K', находящемуся относительно K в состоянии равномерного вращения. Для того, чтобы зафиксировать это представление, вообразим K' в виде плоского диска, равномерно вращающегося в своей плоскости вокруг своего центра. Наблюдатель, эксцентрически сидящий на диске K', почувствует силу, влекущую его по радиусу в противоположном от центра направлении. Наблюдатель, находящийся в покое относительно первоначального исходного тела K, объяснит эту силу, как действие инерции (центробежную силу). Но, сидящий на диске наблюдатель может рассматривать свой диск, как «покоящееся» исходное тело. Право на это даст ему общий принцип относительности. Силу, действующую на него и вообще на тела, находящиеся в покое относительно диска, он воспримет, как действие поля тяготения. Разумеется, пространственное распределение этого поля тяготения будет таким, каким оно не могло бы быть по Ньютоновой теории тяготения [1]).

Но это не смущает нашего наблюдателя, так как он верит в общий принцип относительности. Он по праву надеется, что можно будет установить общий закон тяготения, при помощи которого будет дано правильное объяснение как для движения звезд, так и для поля действия ощущаемой им силы.

---

[1]) Поле исчезает в центре диска и возрастает пропорционально удалению от центра.

На своем диске наш наблюдатель экспериментирует с часами и мерами с целью найти на основе своих наблюдений точное определение смысла пространственных и временных обозначений в отношении к диску K'. Каковы будут его опыты?

Прежде всего он установит двое одинаково устроенных часов— одни в середине диска, а другие на периферии—так, чтобы относительно диска они были в состоянии покоя. Рассмотрим сначала, будут ли те и другие часы итти одинаково скоро с точки зрения невращающегося Галилеева исходного тела K. Если судить с последнего, то часы, помещенные в центре диска, неподвижны, а часы на периферии находятся в движении вследствие вращения диска. Поэтому, как было установлено в § 12 последние часы будут для K все время итти медленнее, нежели часы в центре диска. То же самое должен будет, очевидно, констатировать наблюдатель на диске, сидящий, примерно в середине диска подле находящихся там часов. Таким образом часы, находящиеся на нашем диске или, общее, в каком бы то ни было поле тяготения, будут итти быстрее или медленнее в зависимости от места, где они установлены (в состоянии покоя). Следовательно, оказывается невозможным разумное определение времени с помощью часов, находящихся в покое относительно исходного тела. С таким же затруднением мы встретимся, если попытаемся применить здесь наше прежнее определение одновременности, на чем, однако, не будем более подробно останавливаться.

Такие же на первый взгляд непреодолимые трудности представляются и при определении пространственных координат. В самом деле, если наблюдатель свою, принятую за единицу, меру (маленькую относительно радиуса диска линейку) положит по периферии диска, касательно к последней, то эта мера, оцениваемая с Галилеевой системы, будет короче единицы, потому что движущиеся тела, как выяснено в § 12, сокращаются в направлении своего движения. Если же, напротив, линейка будет положена по радиусу диска, то она, с точки зрения системы K, не испытает никакого сокращения. Отсюда следует, что если наблюдатель измерит своей мерой сначала окружность диска, а потом его диаметр и разделит результаты обоих измерений один на другой, то частное представит не известное число $\pi = 3{,}14\ldots\ldots$, а несколько большее число [1]), тогда как при измерениях на находящемся в покое относительно K диске та же самая операция должна дать именно число π. Таким образом положения Эвкли-

[1]) Здесь все время в качестве системы координат имеется в виду Галилеева (не вращающаяся) система K, так как только по отношению к K могут быть применены выводы специальной теории относительности (в отношении к K' действует поле тяготения).

довой геометрии не могут быть в точности выполняться на вращающемся диске и вообще в пределах поля. тяготения, по крайней мере постольку, поскольку одной и той же мере придают всюду и во всех направлениях значение единицы длины С тем вместе и понятие прямой линии теряет свое значение. Мы поэтому не в состоянии дать точное определение координатам x, y, z в отношении к диску по установленному в специальной теории относительности методу. Но поскольку не могут быть определены координаты и времена событий, постольку и управляющие событиями законы природы не могут быть точно формулированы.

Но тогда и все, к чему мы до сих пор пришли в наших рассуждениях об общей теории относительности, как будто поставлено под вопрос. И действительно, лишь путем очень тонкого обследования существа предмета можно достигнуть точного применения постулата общей относительности. Следующий ход мыслей подготовит к этому читателя.

XXIV. Эвклидов и не-Эвклидов континуум.

Предо мной поверхности мраморного стола. От каждой его точки я могу достигнуть любой другой точки путем некоторого (большого) ряда переходов от одной точки к другой—«смежной», или, иначе выражаясь, переходя от одной к другой без «скачков». Что здесь должно разумѣть под понятиями «смежный» и «скачки», каждый читатель, конечно, представит себе с достаточной ясностью (если он не будет слишком уж требователен). Мы выражаем это, говоря, что поверхность представляет собой континуум (непрерывность).

Представим себе большое число маленьких, по сравнению с измерениями доски стола, палочек, имеющих одинаковую длину. Под этим мы разумеем, что любую из них можно так наложить на другую, чтобы концы их совпали. Мы берем четыре из них и так прикладываем их концами друг к другу на доске стола, чтобы они образовали четырехугольник, диагонали которого были бы равны (квадрат). Для того, чтобы установить равенство диагоналей, мы пользуемся пробной палочкой. К этому квадрату мы прикладываем равные квадраты, имеющие каждый одну общую с первым палочку; с этими последними мы поступаем таким же образом и т. д. Наконец, вся доска стола уложена квадратами таким образом, что каждая сторона квадрата принадлежит двум квадратам, а каждая вершина угла—четырем.

То, что это предприятие удалось выполнить, не столкнувшись с величайшими трудностями, поистине есть чудо! Достаточно по-думать хотя бы о следующем. Если мы соединим у вершины одного угла три квадрата, то тем самым будут уже положены и две стороны четвертого. А тогда этим вполне определено и положение двух других его сторон. Но теперь уже нельзя так передвигать стороны четырехугольника, чтобы сравнять его диагонали. Если же они сами по себе оказываются равными, то это особая милость доски стола и палочек, которой я могу только благодарно удивляться! Подобных чудес нам нужно не мало пережить, раз наше построение должно удасться.

Когда все у нас действительно прошло гладко, я говорю, что точки доски стола представляют Эвклидов континуум в отношении к принятой за единицу расстояния палочке. Если я какую-либо из вершин углов квадратов приму за «начальную точку», то всякую другую вершину я могу определить по отношению к начальной точке двумя числами. Для этого я должен только указать, сколько палочек нужно отложить от начальной точки «вправо» и затем сколько «вверх», чтобы достигнуть до намеченной точки. Эти два числа явятся «Декартовыми координатами» намеченной точки в отношении к «Декартовой системе», представленной положенными палочками.

Что должны быть случаи, когда наше построение не удастся, в том мы можем убедиться на таком изменении нашего воображаемого эксперимента. Палочки должны «расширяться» в зависимости от температуры. Пусть середина доски стола будет нагрета, а края ее нет, при чем две наши палочки попрежнему в любом месте стола при наложении совпадают. Все наше построение квадратов придет при этом в беспорядок, так как палочки внутренней части стола расширятся, а внешней останутся неизменными.

Теперь доска стола не будет более представлять собой Эвклидову непрерывность для наших палочек, принятых за единицу расстояния, и мы не могли бы непосредственно с их помощью определить Декартовы координаты, так как уже не может быть выполнена вся вышеприведенная конструкция. Но так как имеются другие материалы, не подверженные влиянию температуры в такой мере, как наши палочки (или и вовсе ему не подверженные), то это даст нам возможность естественным путем сохранить представление о доске стола, как об «Эвклидовом континууме»; этого удастся удовлетворительно достигнуть путем более тонкого установления природы измерения (или сравнения) отрезков.

Но предположим, что палочки всякого рода, т.-е. из всякого материала, р а в н о чувствительны к неодинаковой температуре в разных местах доски, и что мы ни на чем другом не обнаруживаем действия температуры, кроме как на геометрическом состоянии наших палочек во время опытов, как это описано выше.

Тогда было бы целесообразно считать расстояние между двумя точками стола равным единице всякий раз, как концы одной из наших палочек совпадают с ними при наложении: ибо как иначе можно было бы избегнуть грубейшего произвола при определении расстояния? Но тогда приходится отказаться от Декартова метода построения координат и заменить его другим, который бы не исходил из признания действительности Эвклидовой геометрии для твердых тел [1]). Читатель заметит, что обрисованная здесь ситуация соответствует той, которая вытекала из общего постулата относительности (§ 23).

XXV. Гаусовы координаты.

Такой аналитически - геометрический способ трактования нашей проблемы может быть применен, по Гаусу, следующим образом. Представим себе нарисованной на доске стола систему любых кривых (ср. рис. 4), которые мы назовем — кривыми u и которым дадим числовые значения. На рисунке изображены кривые $u=1$, $u=2$ и $u=3$. Но мы можем мысленно представить себе еще бесконечно много нарисованных кривых между кривыми $u=1$ и $u=2$, которые бы соответствовали всем реальным числам, лежащим между 1 и 2. Тогда у нас будет система кривых u, бесконечно плотно покрывающих всю доску стола. Ни одна из кривых u не пересекает другой, но через каждую точку доски стола проходит только одна кривая. Таким образом каждой точке поверхности стола соответствует только одно совершенно определенное значение u.

Таким же образом на поверхности стола нарисована система кривых v, удовлетворяющих тем же самым условиям, имеющих

---

[1]) В математике наша проблема представляется в следующей форме. На поверхности, данной в Эвклидовом трехмерном пространстве, напр., на поверхности эллипсоида, также должна быть возможна геометрия двух измерений, как и на плоскости. Гаус поставил себе проблему исследовать принципы этой геометрии двух измерений, не пользуясь тем, что поверхность принадлежит к континууму трех измерений. Для построений на этой поверхности при помощи твердых палочек (подобно только что описанным нами на поверхности стола) должны действовать другие законы, нежели законы Эвклидовой геометрии для плоскостей. Поверхность не будет в отношении к палочкам Эвклидовым континуумом, и она не допускает определения Декартовых координат. Гаус указал принципы, на основе которых должны быть трактуемы геометрические отношения на поверхности, и этим проложил путь для Риманова исследования не-Эвклидова континуума многих измерений. Благодаря этому оказалось, что математика уже давно разрешила те формальные проблемы, к которым приводит общий постулат относительности.

соответственные числовые обозначения и тоже могущих быть представленными в каком угодно виде. Тогда каждой точке на доске стола принадлежит одно значение u и одно значение v. Оба эти числа мы назовем координатами доски стола (Гаусовыми координатами). Так, например, точка P на рисунке имеет Гаусовы координаты $u = 3$, $v = 1$. Двум смежным точкам P и P' на поверхности соответствуют координаты

$$P: u, \; v$$

$$P': u + du, \quad v + dv$$

при чем du и dv означают очень малые числа. Измеренное линейкой расстояние между P и P' также дает очень малое число ds. Тогда по Гаусу:

$$ds^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du\, dv + g_{22} dv^2,$$

где g_{11}, g_{12}, g_{22} суть величины, вполне определенным образом зависящие от u и v. Величины g_{11}, g_{12} и g_{22} определяют отношение линеек к кривым u и кривым v, а, следовательно, и к поверхности стола. В случае, когда точки рассматриваемой поверхности представляют по отношению к нашим меркам Эвклидов континуум,

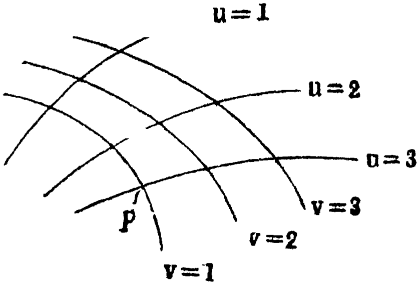

Рис. 4.

но и только в этом случае, кривые u и кривые v могут быть так нарисованы и снабжены такими числовыми значениями, что просто

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

Тогда кривые u и кривые v будут прямыми линиями в смысле Эвклидовой геометрии, перпендикулярными между собой. Тогда и Гаусовы координаты тем самым обратятся в Декартовы. Можно видеть, что Гаусовы координаты означают не что иное, как сочетание с каждой из точек рассматриваемой поверхности двух чисел, при чем двум пространственно смежным точкам придаются очень мало различные числовые значения.

Наши рассуждения прежде всего имеют силу для континуума двух измерений. Но Гаусов метод может быть применен также и к континууму трех, четырех и более измерений. Если, например. пред нами континуум четырех измерений, то дело представится в следующем виде. Каждой точке континуума произвольно придаются четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4, которые называются «координатами». Смежным точкам соответствуют смежные координатные величины. Если теперь смежным точкам P и P' приписывается расстояние ds, допускающее измерение и физически вполне определенное, то имеет силу формула:

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 \ldots + g_{44}\,dx_4^2,$$

где величины g_{11} и т. д. имеют значения, изменяющиеся в зависимости от места в континууме. Только в том случае, когда континуум будет Эвклидовым, можно так сочетать координаты $x_1 \ldots x_y$ с точками континуума, чтобы просто

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

Тогда в четырехмерном континууме будут действительны отношения, аналогичные тем, которые имеют силу для наших трехмерных измерений.

Впрочем, приведенное Гаусово выражение величины ds^2 не всегда возможно, а тогда только, когда достаточно малые области рассматриваемого континуума могут быть рассматриваемы, как Эвклидовы непрерывности. Это, например, явно имеет место в нашем случае с доской стола, обладающей неодинаковой температурой в различных местах, так как для малой части доски температура практически неизменна, и, следовательно, геометрические отношения линеек почти таковы, какими они должны быть по правилам Эвклидовой геометрии. Расстройство нашего построения квадратов, описанное в предыдущем параграфе, таким образом только тогда выступит наружу, когда это построение будет применено к значительной части нашей доски.

Итак, суммируя, мы можем сказать: Гаус нашел метод математической трактовки каких угодно континуумов, с определенными мерами («расстояниями» смежных точек). С каждой точкой континуума сочетается столько чисел (Гаусовых координат), сколько измерений имеет континуум. Такое сочетание всякий раз должно иметь только одно значение, при чем придаваемые смежным точкам числа (Гаусовы координаты) должны быть бесконечно мало различны между собой. Гаусова система координат есть логическое обобщение Декартовой системы координат. Она применима также и к не-Эвклидову континууму, но только тогда, разумеется, когда малые части рассматриваемого континуума в своих отношениях к определенным мерам («расстояниям») тем более приближаются к Эвклидовым отношениям, чем меньше рассматриваемая часть континуума.

XXVI. Пространственно-временный континуум специальной теории относительности, как Эвклидов континуум.

Теперь мы можем несколько точнее формулировать мысли Минковского, лишь слегка намеченные нами в § 17 Согласно специальной теории относительности, для описания пространственно-временного четырехмерного континуума имеют преимущество определенные системы координат, которые мы называем «Галилеевыми» системами координат. Для них физическое содержание четырех координат x, y, z, t, обозначающих какое-либо событие, или, иначе выражаясь, какую-либо точку четырехмерного континуума, определяется тем простым способом, о котором мы подробно говорили в первой части этой книжки. Для перехода от одной Галилеевой системы к другой, находящейся по отношению к первой в состоянии равномерного движения, должны быть применены уравнения Лоренцева преобразования, на которых основаны выводы специальной теории относительности, и которые со своей стороны не выражают ничего другого, как универсальное значение закона распространения света для всех Галилеевых исходных систем.

Минковский нашел, что Лоренцево преобразование удовлетворяет следующим простым условиям. Пусть рассматриваются два смежных события, взаимное положение которых в четырехмерном континууме дано разностями пространственных координат dx, dy, dz и временной разностью dt относительно Галилеева исходного тела K. В отношении к другой Галилеевой системе аналогичные разности этих двух событий пусть будут dx', dy', dz', dt'. Тогда между ними всегда действительно отношение[1]):

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = dx'^2 = dy'^2 + dz'^2 - c^2dt'^2 .$$

Из этого условия вытекает действительность Лоренцева преобразования. Мы можем это выразить таким образом: принадлежащая двум смежным точкам четырехмерного континуума величина

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \quad z^2 - c^2dt^2$$

---

[1]) Ср. приложение. Выведенные там для координат отношения (11 а) и (12) имеют силу и для разностей координат, а, следовательно, и для координатных дифференциалов (бесконечно-малых разностей).

имеет для всех предпочтенных (Галилеевых) исходных тел одно и то же значение. Если заменим x, y, z, $\sqrt{-1}\,ct$ чрез x_1, x_2, x_3, x_4, то получим в результате, что

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

не зависит от выбора исходного тела. Величину ds мы называем «расстоянием» двух событий или точек четырехмерного континуума.

Итак, если взять мнимую переменную $\sqrt{-1}\,ct$ вместо реального t, как переменно-временную величину, то пространственно-временный континуум можно трактовать, согласно специальной теории относительности, как «Эвклидов» четырехмерный континуум, как это явствует из сказанного в последних параграфах.

XXVII. Пространственно-временный континуум общей теории относительности не есть Эвклидов континуум.

В первой части этого сочинения мы могли пользоваться пространственно-временными координатами, которые допускали простое, непосредственное физическое истолкование, и которые могли быть обозначены, согласно § 26, как Декартовы координаты четырех измерений. Это было для нас возможно на основании закона о постоянной скорости света,—закона, которого уже не может придерживаться, как мы видели в § 21, общая теория относительности. Напротив, согласно последней теории, мы должны были притти к выводу, что скорость света всегда зависит от координат, раз только на лицо имеется поле тяготения. Мы нашли далее на специальном примере в § 23, что наличие поля тяготения делает невозможным то определение координат и времени, которое достигало цели в специальной теории относительности.

В виду этих соображений мы приходим к убеждению, что, соответственно общему принципу относительности, пространственно-временный континуум не может быть более принимаем, как Эвклидов, и что, напротив, здесь пред нами в общем виде тот случай, с которым мы ознакомились, рассматривая континуум двух измерений на доске стола с неодинаковой в различных местах температурой. Как там было невозможно из одинаковых палочек построить Декартову систему координат, так и здесь невозможно создать из твердых тел и часов систему (исходное тело) такого рода, чтобы строго соответствующие друг другу меры, а равно и часы непосредственно указывали место и время. В этом и заключалось существо той трудности, с которой мы встретились в § 23.

Объяснения § 25 и § 26 указывают путь, на котором это затруднение может быть преодолено. Мы произвольным образом выражаем отношения пространственно-временного континуума четырех измерений в Гаусовых координатах. Каждую точку континуума (событие) мы обозначаем четырьмя числами x_1, x_2, x_3, x_4 (координатами), которые не имеют ровно никакого непосредственного физического содержания и служат только для того, чтобы определенным, хотя и произвольным образом перенумеровать точки континуума. Для этого обозначения не требуется даже, чтобы x_1, x_2, x_3 понимались, как «пространственные» координаты, а x_4, как «временная».

Читатель, пожалуй, найдет, что подобное описание мира недопустимо. Какой смысл может иметь обозначение события определенными координатами x_1, x_2, x_3, x_4, когда сами координаты ничего не означают. Но при более строгом размышлении такое опасение оказывается неосновательным. Рассмотрим, например, движение любой материальной точки! Если бы ее существование было мгновенно, безо всякой длительности, то ее пространственно-временное описание было бы дано одной только системой величин x_1, x_2, x_3, x_4. Следовательно, ее длящееся существование характеризуется бесконечно большим числом систем величин, координатные значения которых образуют непрерывный ряд. Таким образом материальной точке соответствует одна (имеющая одно измерение) линия в континууме четырех измерений. При многих движущихся точках им всем соответствуют подобные же линии в нашем континууме. Единственные, могущие претендовать на физическую реальность, соображения относительно этих точек, это— соображения об их встречах. В нашем математическом изложении такая встреча обнаружится в том, что две линии, представляющие движение двух соответственных точек, будут иметь общей некоторую систему координатных значений x_1, x_2, x_3, x_4.

После некоторого детального размышления читатель, без сомнения, согласится, что в действительности единственным реальным содержанием, которое мы в наших физических соображениях вкладываем в констатирование фактов пространственно-временного характера, является констатирование подобных встреч.

Когда мы раньше описывали движение материальной точки в отношении к исходному телу, то наше описание не заключало в себе ничего иного, кроме указания на встречи этой точки с точками исходного тела. Также и наши указания времени могут быть сведены к констатированию встреч тела с часами в связи с констатированием встречи часовых стрелок с определенными пунктами циферблата. Не иначе обстоит дело и с пространственными изме рениями посредством мер, как в этом можно убедиться после некоторого размышления.

Резюмируем, как общее правило: всякое физическое описание разлагается на некоторое число утверждений, из которых каждое указывает на пространственно-временное совпадение двух событий A и B. Каждое такое утверждение выражается в Гаусовых координатах совпадением четырех координат x_1, x_2, x_3, x_4. Таким образом, описание пространственно-временного континуума посредством Гаусовых координат фактически полностью заменяет описание при помощи исходного тела, не страдая при этом недостатками последнего метода; оно не связано с Эвклидовым характером подлежащего описанию континуума.

XXVIII. Точное формулирование общего принципа относительности.

Теперь мы можем заменить данную нами в § 18 предварительную формулировку общего принципа относительности другой— точной. Прежняя, гласившая, что «все исходные тела K, K' и т. д. равноценны для описания природы (формулирования общих законов природы), каково бы ни было состояние их движения», не может более быть сохранена в силе, так как в общем оказывается невозможным при пространственно-временных описаниях применять твердые исходные тела в духе того метода, которому мы следовали в специальной теории относительности. Место исходного тела должна занять Гаусова система координат. Основная идея общего принципа относительности может быть выражена в утверждении:

«Все Гаусовы системы координат принципиально равноценны для формулирования общих законов природы».

Этот общий принцип относительности можно выразить еще в другой форме, которая отчетливее выявит ту же основную мысль, чем естественное расширение специального принципа относительности. По специальной теории относительности, уравнения, выражающие общие законы природы, переходят в уравнения той же формы, если на место пространственно-временных переменных x, y, z, t одного (Галилеева) исходного тела K подставить пространственно-временные переменные x', y', z', t' нового исходного тела K' по формуле Лоренцева преобразования. Напротив, по общей теории относительности уравнения, выражающие общие законы природы, должны при любой подстановке Гаусовых переменных x_1, x_2, x_3, x_4 перейти в уравнения той же самой формы, ибо всякое (не только Лоренцево) преобразование соответствует переходу одной Гаусовой системы координат в другую.

Если не хотят расстаться с обычными представлениями трех измерений, то можно рассмотренное нами развитие, которое проделала основная идея общей теории относительности, охарактеризовать следующим образом. Специальная теория относительности распространяется на Галилеевы области, т.-е. на такие, в которых не существует поля тяготения. Исходным телом при этом служит Галилеево исходное тело, т.-е. твердое тело, находящееся в таком состоянии движения, что по отношению к нему действует Галилеево положение о равномерно прямолинейном движении «изолированных» материальных точек.

В дальнейшем ходе наших рассуждений, мы рассматриваем отношения тех же Галилеевых областей к не-Галилеевым исходным телам. В отношении к последним уже будет иметь место поле тяготения специального рода (§ 20 и § 23).

Но в пределах полей тяготения нет неизменных тел с Эвклидовыми свойствами; поэтому фикция твердого исходного тела неприменима в общей теории относительности. Также и на ход часов влияние поля тяготения таково, что физическое определение времени непосредственно при помощи часов совершенно не имеет той степени очевидности, какую имело в специальной теории относительности.

Поэтому обращаются к нетвердым исходным телам, которые не только могут находиться в любом состоянии движения, но и претерпевать во время своего движения любые изменения формы. Для определения времени служат часы с любым ходом, как бы он ни был неправилен, которые мы можем представить себе в любом пункте видоизменяющегося исходного тела, при одном условии, что одновременно воспринимаемые указания времени расположенных в смежных местах часов бесконечно мало разнятся между собой. Такое нетвердое исходное тело, которое мы могли бы по праву охарактеризовать исходным моллюском, в существенном равноценно любой Гаусовой системе координат с четырьмя измерениями. По сравнению с Гаусовой системой координат такой «моллюск» приобретает некоторую наглядность, благодаря формальному (собственно, неправильному) сохранению за пространственными координатами особого от временной координаты существования. Каждую точку моллюска мы принимаем за точку пространства, и всякую, находящуюся по отношению к ней в состоянии покоя, материальную точку мы без дальнейшего считаем находящейся в покое. Общий принцип относительности требует, чтобы все эти моллюски могли быть с равным правом и равным успехом применены в качестве исходных тел при формулировании общих законов природы. Законы должны быть совершенно независимы от выбора того или иного моллюска.

Эти чрезвычайные ограничения, накладываемые на формулирование законов природы, сообщают общему принципу относительности присущую ему исследовательскую мощь.

XXIX. Решение проблемы тяготени на основе общего пр инципа относительности.

Если читатель внимательно следил за всеми предшествовавшими рассуждениями, то понимание методов, ведущих к решению проблемы тяготения, не представит для него никакой трудности.

Мы исходим из рассмотрения Галилеевой области, т.-е. такой, в которой, если взять ее в отношении к Галилееву исходному телу K, не существует поля тяготения. Состояние мер и часов в отношении к K дано в специальной теории относительности. Также и состояние материальной «изолированной» точки: последняя движется прямолинейно и равномерно.

Затем мы берем эту область в отношении к любой Гаусовой системе координат, или к какому-либо «моллюску», как исходному телу K'. В отношении к K' уже имеется поле тяготения G (особого рода). Состояние мер и часов так же, как и свободно движущейся материальной точки, в отношении к K' узнается простым преобразованием и интерпретируется, как состояние мер, часов и материальных точек под влиянием поля тяготения G. Затем принимается гипотеза, что воздействие поля тяготения на меры, часы и свободно движущиеся материальные точки совершается по тем же самым законам и тогда, когда нет возможности вывести господствующее поле тяготения простым преобразованием координат из специального Галилеевого случая.

Тогда исследуется пространственно-временное состояние поля тяготения G, выведенное путем простого преобразования из специального Галилеевого случая, и формулируется в виде закона, имеющего силу для всех случаев, независимо от того, какое исходное тело (моллюск) использовано для описания.

Но этот закон еще не будет общим законом поля тяготения, так как изучаемое поле тяготения есть поле особого рода. Для того, чтобы открыть общий закон поля тяготения, нужно еще дальнейшее обобщение уже полученного закона, которое, однако, должно быть достигнуто не произвольным путем, а при соблюдении следующих требований.

a) искомое обобщение должно удовлетворять также общему постулату относительности;

b) если в рассматриваемой области находится материя, то действие ее, возбуждающее поле тяготения, определяется только ее инертной массой, следовательно, согласно § 15, только ее энергией;

c) поле тяготения и материя вместе должны удовлетворять закону сохранения энергии (импульса).

Наконец, общий принцип относительности позволяет нам установить влияние поля тяготения на протекание всех тех процессов, законы которых для случая отсутствия поля тяготения уже известны, т.-е. уже установлены в пределах специальной теории относительности. В принципе тут поступают согласно тому же методу, уже изложенному только что для мер, часов и свободно движущихся материальных точек.

Теория тяготения, выведенная таким ооразом из общего постулата относительности, не только выделяется своей стройностью, не только устраняет выясненную в § 21 недостаточность классической механики, не только разъясняет экспериментальный закон равенства инертной и тяжелой масс, но она уже дала объяснение двум отмеченным в астрономии явлениям, пред которыми классическая механика оказывалась бессильна. О втором из этих явлений, именно о скривлении световых лучей в поле тяготения солнца, мы уже упоминали; второе относится к пути планеты Меркурия.

Дело в следующем. Если применять уравнения общей теории относительности только к случаям слабых полей тяготения и незначительных скоростей движения всех масс относительно системы координат по сравнению со скоростью света, тогда мы получим Ньютонову теорию, как первое приближение. Она таким образом устанавливается здесь без особых допущений, тогда как Ньютону пришлось вводить гипотезу об обратной пропорциональности силы притяжения квадрату расстояния взаимно воздействующих материальных точек. Но более точные вычисления выявляют уклонения от Ньютоновой теории, которые почти все, разумеется, ускользали от нашего наблюдения вследствие своей незначительности.

Вот на одном из этих уклонений мы и должны здесь специально остановиться. Согласно Ньютоновой теории, планеты движутся вокруг солнца по эллипсису, который вечно сохранял бы свое положение относительно неподвижных звезд, если бы можно было отвлечься от влияния других планет на рассматриваемую планету и от собственного движения неподвижных звезд. Поэтому, если внести поправку в наблюдаемое движение планет на оба эти влияния, то путь планеты должен представить в отношении к неподвижным звездам неменяющийся эллипсис, при условии, что теория

Ньютона совершенно верна. Вывод этот, который может быть проверен с огромной точностью, подтвердился в отношении всех планет, кроме ближайшей к солнцу планеты, Меркурия, со всей доступной для современного способа наблюдений точностью. Что же касается планеты Меркурий, то о ней мы знаем со времени Леверье, что эллипсис его пути, исправленный в только что указанном смысле, не остается неизменным по отношению к неподвижным звездам, но вращается, хотя и чрезвычайно медленно, в плоскости своей орбиты в направлении своего движения. Величина этого вращательного движения эллипсиса была определена в 43 угловых секунды в сто лет с точностью до нескольких секунд. Объяснение этого явления в классической механике могло быть достигнуто только на основе, исключительно на этот случай созданных, мало вероятных гипотез.

Согласно же общей теории относительности получается, что эллипсис пробега каждой планеты вокруг солнца необходимо должен вращаться указанным выше образом, но что это вращение у всех планет, кроме Меркурия, слишком мало для того, чтобы могло быть установлено при ныне доступной точности наблюдения, у Меркурия же оно должно равняться 43 угловым секундам в сто лет, именно так, как это показывает и наблюдение.

Кроме этого до сих пор могло быть извлечено из теории еще одно следствие, доступное проверке опытом, а именно: перемещение спектра света, посылаемого к нам большими звездами, по сравнению со светом, произведенным на земле соответствующим источником (т.-е. тем же родом молекул). Я не сомневаюсь, что и это следствие теории найдет скоро свое подтверждение.

XXX. Взгляд на мир, как целое.

1. Космологические затруднения Ньютоновой теории.

Кроме изложенной в § 21 трудности, классическая небесная механика знает еще вторую принципиальную трудность, которая, насколько мне известно, впервые была подвергнута подробному обсуждению астрономом Зелигером. Если задуматься над вопросом, как собственно должно мыслить мир в целом, то первый напрашивающийся ответ будет, конечно, такой. Мир в пространстве (и во времени) бесконечен. Всюду имеются звезды, так что плотность материи хотя очень различна в отдельности, но в большом разрезе везде одна и та же. Иными словами: как бы далеко ни странствовать по мировому пространству, всюду мы найдем разрозненные скопления неподвижных звезд приблизительно одинакового рода и одинаковой плотности.

Такой ответ несовместим с Ньютоновой теорией. Последняя скорее требует, чтобы мир имел некоторого рода середину, в которой плотность звезд была бы максимальной, и чтобы, начиная от этой середины, звездная плотность уменьшалась и, наконец, далеко во вне уступила бы место бесконечной пустоте. Звездный мир образует конечный остров в бесконечном океане пространства[1].

Но подобное представление мало удовлетворительно. Оно в особенности представляется неудовлетворительным в виду вытекающего из него вывода, что непрерывно посылаемый к нам звездами свет, а также и отдельные звезды звездной системы уходят в бесконечность с тем, чтобы никогда не вернуться и никогда более не встретиться с другими объектами природы. Конечный мир материи должен был бы таким образом постепенно и систематически оскудевать.

Чтобы избегнуть этого вывода, Зелигер видоизменил Ньютонов закон, принявши, что на больших расстояниях сила притяжения двух масс уменьшается в большей мере, чем по закону $\frac{1}{r^2}$. Это давало возможность принять среднюю плотность материи постоянной для всей бесконечности, не заключая при этом о неизбежном возникновении бесконечно больших полей тяготения, и избавляло от неприятной необходимости мыслить материальный мир, имеющим какое-то средоточие. Но такое преодоление указанных принципиальных трудностей достигалось ценой не оправдываемых ни опытом, ни теорией изменения и усложнения Ньютонова закона. Можно было бы придумать сколько угодно других законов, достигающих той же цели, равно произвольных и не имеющих друг перед другом никаких преимуществ. Ибо каждый из них столь же мало был бы основан на общих теоретических принципах, как и закон Ньютона.

2. Возможность конечного и все же неограниченного мира.

До сих пор идеи о строении мира вращались в совершенно другом направлении. Между тем развитие не-Эвклидовой геометрии

---

[1]) Обоснование. Согласно Ньютоновой теории, в массе m заканчивается некоторое число «силовых линий», которые приходят из бесконечности и число которых пропорционально массе m. Если в мире средняя плотность S_0 массы постоянна, то шар объема V в среднем заключает массу $S_0\,V$. Число силовых линий, проходящих через поверхность F внутрь шара, будет таким образом пропорционально $S_0\,V$. Следовательно, через единицу поверхности шара вступают силовые линии, число которых пропорционально $S_0\,V/F$ или $S_0\,R$. Но тогда сила поля на поверхности с возрастанием радиуса шара R также возрастала бы до бесконечности, что невозможно.

привело к воззрению, что можно сомневаться в бесконечности нашего пространства, не впадая при этом в коллизию ни с законами логики, ни с опытом (Риман, Гельмгольц). С несравненной ясностью вопросы эти уже подробно освещены у Гельмгольца и Пуанкарэ. Я могу их коснуться здесь только вкратце.

Представим себе бытие в двух измерениях. Плоские существа с плоскими орудиями, особенно с плоскими твердыми масштабами свободно движутся в некоторой плоскости.

Вне этой плоскости для них ничего не существует, но все события в их плоскости, которые они наблюдают на самих себе и на своих плоских вещах, являют для них замкнутый в своей причинной связи мир. Им доступны в их мире построения Эвклидовой планиметрии, и они могут, например, выполнить с помощью палочек приведенное в § 24 построение сети квадратов. В противоположность нашему миру, мир этих существ имеет в пространстве только два измерения, но он так же бесконечно протяжен, как и наш мир. Он вмещает в себе нескончаемое число равных квадратов из палочек, это значит, что его объем (поверхность) бесконечен. Существа этого мира могут говорить о нем, что он «плоский», это будет иметь тот смысл, что в нем выполнимы при помощи палочек построения Эвклидовой геометрии плоскостей, при чем отдельная палочка, независимо от своего положения, всегда представляет одно и то же расстояние.

Теперь представим себе другое бытие тоже в двух измерениях, но уже не в плоскости, а на поверхности шара. Такие же сплющенные существа, со своими мерками и другими предметами, лежат вплотную на этой поверхности и не могут от нее оторваться. Весь мир их восприятий замкнут исключительно в пределах поверхности шара. Могут ли они рассматривать геометрию своего мира, как геометрию плоскости, а свои линейки, как «отрезки»? Нет, не могут. Ибо при попытке получить прямую, они получат кривую, которую мы, существа мира с «тремя измерениями», определим, как окружность большого круга; следовательно, получат замкнутую линию определенной конечной длины, которая может быть измерена линейкой. Равным образом и поверхность этого мира конечна и может быть измерена посредством поверхности квадрата из палочек. Глубоко увлекательная идея, к которой приводят нас эти размышления, заключается в том, что мир этих существ конечен и все же не имеет границ.

Но обитающие на шаре существа, даже не совершая мирового путешествия, могут заметить, что они живут не в Эвклидовом мире. Они могут в этом убедиться в каждой части своего мира, если она не чрезмерно мала. Из какой-либо точки они проводят во всех направлениях «прямые отрезки» (с точки зрения трех измерений—дуги окружности). Линию, полученную от соединения свободных концов этих отрезков, они обозначат, как «окружность круга». Отношение измеренной какой-либо меркой окружности круга к диаметру, измеренному той же меркой, будет для плоскости равно, согласно Эвклидовой геометрии, постоянной величине π, независимо от величины диаметра. Наши же существа найдут на своей поверхности шара это отношение равным величине

$$\pi \frac{\sin\left(\frac{r}{R}\right)}{\left(\frac{r}{R}\right)}$$

т.-е. величине меньшей, чем π, и притом тем меньшей, чем больше радиус круга r по сравнению с радиусом R нашего «мира на шаре». Из этого отношения наши существа могут определить радиус R своего мира, если они располагают для своих измерений хотя бы относительно малой частью последнего. Но если эта часть слишком мала, то они уже не могут установить, что они находятся на поверхности шара, а не на Эвклидовой плоскости, так как небольшая часть поверхности шара мало отличается от равной ей части плоскости.

Итак, если наши шаровые существа живут на планете, солнечная система которой занимает ничтожно-малую часть их вселенной на шаре, то они лишены возможности решить, живут ли они в конечном или бесконечном мире, так как часть мира, доступная их опыту, в обоих случаях практически является плоской, или Эвклидовой. Непосредственно ясно, что для наших существ окружность круга сначала будет возрастать по мере увеличения радиуса, пока не совпадет с «окружностью мира», а затем при дальнейшем увеличении радиуса станет постепенно уменьшаться вплоть до нуля. При этом поверхность круга будет все увеличиваться, пока, наконец, не станет полной поверхностью всего мира на шаре.

Для читателя пожалуй, непонятно, почему мы поселили наши существа именно на поверхности шара, а не на какой-либо другой замкнутой поверхности. Это объясняется тем отличительным свойством шара, в противоположность всем другим замкнутым поверхностям, что на нем все точки равноценны. Отношение длины окружности круга и к ее радиусу r зависит, конечно, от r, но при данной величине r это отношение для всех точек мира на шаре будет одно и то же; мир шара представляет «поверхность постоянной кривизны».

Подобно этому миру с двумя измерениями на поверхности шара, существует аналогичное ему сферическое пространство трех измерений, открытое Риманом. Его точки также все равноценны. Го объем конечен и определен его «радиусом» R ($2\pi^2 R^3$).

5*

Можно ли представить себе сферическое пространство? Представить себе пространство это означает не что иное, как представить себе содержание «пространственных» опытов, т.-е. опытов, которые можно иметь при движении «твердых» тел. В этом смысле сферическое пространство может быть представлено.

Проведем из какой-либо точки прямые (натянутые шнуры) по всем направлениям и отмерим на каждой из них при помощи масштаба отрезок r. Все свободные конечные точки этих отрезков лежат на поверхности шара. Поверхность эту (F) мы можем измерить квадратной мерой. Если мир есть Эвклидов мир, то мы имеем $F=\pi r^2$; если же мир сферический, то F всегда меньше, чем πr^2. По мере увеличения r, растет и F до некоторого максимума, определенного «мировым радиусом», а затем при дальнейшем увеличении шарового радиуса r вновь постепенно уменьшается вплоть до нуля. Радиальные прямые, выходя из исходной точки, первоначально все более удаляются друг от друга, а потом вновь начинают сближаться и, наконец, смыкаются в точке «противоположной» к исходной точке, пробежав все сферическое пространство. Легко убедиться, что сферическое пространство трех измерений вполне аналогично пространству двух измерений поверхности шара. Оно—конечно (т.-е. имеет конечный объем), но не имеет границ.

Укажем здесь, что существует еще некоторый вид сферического пространства — «эллиптическое пространство». Оно может быть представляемо, как сферическое пространство, в котором «противоположные точки» идентичны (неразличимы). Следовательно, эллиптический мир можно известным образом рассматривать, как симметричный в отношении к центру, сферический мир.

Из сказанного следует, что мыслимы замкнутые пространства, не имеющие границ. Среди них наиболее простым является сферическое (или эллиптическое) пространство, так как все его точки равноценны. Таким образом для астрономов и физиков возникает в высшей степени интересный вопрос, является ли мир, в котором мы живем, бесконечным или наподобие сферического мира—конечным. Данные нашего опыта даже в отдаленнейшей степени не достаточны для ответа на этот вопрос. Но общая теория относительности позволяет на него ответить с достаточной уверенностью и с тем вместе разрешает изложенное в § 30 затруднение.

3. Строение пространства по общей теории относительности.

Согласно общей теории относительности, геометрические свойства пространства не самостоятельны, но обусловлены материей. Поэтому только тогда можно что-либо заключить о геометрической структуре мира, если в своем рассмотрении исходить из определенного состояния материи, как известного. Мы знаем из опыта, что, при соответственно избранной системе, координаты скорости звезд представляются малыми по сравнению со скоростью распространения света.

Поэтому мы можем, приняв материю за находящуюся в состоянии покоя, определить организацию мира в общих чертах и с очень грубым приближением.

Из предшествующих рассуждений мы уже знаем, что состояние мер и часов подчинено влиянию полей тяготения, т.-е. распределения материи. Уже отсюда следует, что не может быть речи о безусловной приемлемости Эвклидовой геометрии в отношении к нашему миру. Но само по себе вполне возможно предположение, что наш мир мало отличается от Эвклидова. Такое допущение тем более напрашивается, что, как показывает вычисление, даже столь большие массы, как наше солнце, оказывают лишь самое минимальное влияние на метрику окружающего пространства. Таким образом можно было бы представить себе, что в геометрическом отношении состояние нашего мира аналогично состоянию поверхности, хотя и неправильно искривленной в отдельных местах, но нигде не представляющей значительных уклонений от плоскости, например, поверхности покрытого легкой рябью озера. В этом случае мы по праву могли бы назвать наш мир quasi-Эвклидовым. Пространственно он был бы бесконечен. Однако, вычисление показывает, что в quasi-Эвклидовом мире средняя плотность материи должна быть равна нулю. Следовательно, такой мир не мог бы быть всюду заселен материей и являл бы собой ту неудовлетворительную картину, которую мы набросали в § 30.

Но если мир должен быть заполнен материей, как бы мало ни разнилась от нуля ее средняя плотность, то он уже не будет quasi-Эвклидовский. Напротив, из вычислений следует, что при равномерном распределении материи, мир необходимо должен быть сферическим (или эллиптическим). Так как в действительности материя не везде распределена равномерно, то подлинный мир в своих частностях представляет уклонения от сферического характера, он будет quasi-сферическим. Но он необходимо будет миром конечным. Теория даже дает простую формулу зависимости [1]) между пространственной протяженностью мира и средней плотностью в нем материи.

---

[1]) А именно, при «радиусе» R мира мы имеем уравнение

$$R^2 = \frac{2}{\varkappa S}$$

Применяя $C. - G. - S.$ систему, получаем $\frac{2}{\varkappa} = 1{,}08.10^{27}$; S есть средняя плотность матерii.

I. Простой вывод формулы Лоренцева преобразования.

(Дополнение к § 11.)

При указанном оси на черт. 2 относительном расположении систем координат, X обеих систем совпадают. Мы можем расчленить проблему, рассмотрев сначала только события, локализированные на оси X. Всякое такое событие определяется в отношении к системе координат K абсциссой x и временем t, а в отношении к K' абсциссой x' и временем t. Требуется найти x' и t', если даны x и t.

Световой сигнал, посланный вдоль положительной оси X, распространяется согласно уравнению

$$x = ct$$

или

$$x - ct = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Так как тот же сигнал должен распространяться с той же скоростью C также и относительно K', то его распространение относительно K' дано в аналогичной формуле

$$x' - ct' = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Пространственно-временные точки (события), отвечающие уравнению (1), должны также отвечать и (2) Это явно будет иметь место, когда вообще выполнено отношение

$$(x' - ct') = \lambda\,(x - ct) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

где λ означает некоторую постоянную, ибо, согласно уравнению (3), равенство $x - ct$ нулю обсловливает и равенство

$x' - ct'$ нулю.

Совершенно аналогичное рассуждение, будучи применено к лучу света, распространяющимуся вдоль отрицательной оси X, дает нам условие:

$$x' + ct = \mu\,(x + ct) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Если мы сложим и вычтем уравнения (3) и (4), при чем для удобства введем вместо постоянных λ и μ постоянные

$$= \frac{\lambda + \mu}{2} \qquad b = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

то получим

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bx \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Этим наша задача была бы разрешена, если бы были известны постоянные a и b; они устанавливаются следующими соображениями.

Для начальной точки K' всегда будет $x' = 0$, следовательно, согласно первому из уравнений (5):

$$x = \frac{bc}{a}\, t$$

Если мы обозначим через v скорость, с которой начальный пункт K' движется в отношении к K, то тогда

$$v = \frac{bc}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Та же величина получается из уравнения (5) при определении скорости какой-либо другой точки K' в отношении к K или скорости (направленной вдоль отрицательной оси X) какой-либо точки системы K относительно K'. Таким образом мы просто можем обозначить v, как относительную скорость обеих систем.

Далее, согласно принципу относительности, ясно, что длина принятой за единицу меры, находящейся в покое относительно K, при наблюдении ее с K' должна оставаться такой же, как и мера, находящаяся в покое относительно K', при наблюдении с K. Для того, чтобы увидеть, как представятся для наблюдающей системы K точки оси X', нам нужно произвести на K «моментальный снимок» с K'. Это значит, что мы должны подставить для t (время системы K) какую-либо определенную величину, напр., $t = 0$. При этом значении мы получим из уравнения (5):

$$x' = ax$$

Две точки оси X', имеющие при измерении в K' расстояние в $x' = 1$, получат таким образом на нашей моментальной фотографии расстояние:

$$\Delta x = \frac{1}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Если же моментальный снимок производится с системы K' ($t' = 0$), тогда получим из уравнения (5), исключивши t и сделав подстановку из (6)

$$x' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) x$$

Отсюда заключаем, что две точки оси X, имеющие расстояние в 1 (относительно K), имеют на нашей моментальной фотографии расстояние:

$$\Delta x' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (7a)$$

Но, как сказано, обе моментальные фотографии должны запечатлеть одинаковый результат, следовательно Δx в (7) должно быть равно Δx в (7а), откуда имеем:

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7b)$$

Уравнения (6) и (7) определяют постоянные a и b. Подставляя их величины в уравнение (5), получим первое и четвертое из приведенных в § 11 уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8$$

Тем самым получено Лоренцево преобразование для событий, локализированных на оси X. Оно удовлетворяет условию

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8a)$$

Для того, чтобы эту формулу можно было распространить также на события, имеющие место вне оси X, надо к уравнениям (8) присоединить отношения:

$$\left.\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Тогда постулат о постоянстве скорости распространения света в вакууме будет соблюден для световых лучей в любом направлении как в отношении системы K, так и относительно системы K'. В этом легко убедиться следующим образом.

Во время $t = 0$ из начального пункта системы K послан световой сигнал. Он распространяется согласно уравнению:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$$

или, при возведении в квадрат, по уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Закон распространения света в связи с постулатом относительности требует, чтобы при наблюдении того же сигнала из системы K', его распространение совершалось по соответственной формуле

$$r' = ct'$$

или

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10a)$$

Для того, чтобы уравнение (10а) представило следствие уравнения (10), мы должны иметь:

$$x^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \sigma (x'^2 + y'^2 + z^2 - c^2 t^2) \quad (11)$$

Так как для точек на оси X должно иметь силу уравнение (8а), то, следовательно, $\sigma = 1$. Легко установить, что Лоренцево преобразование действительно удовлетворяет уравнению (11) при $\sigma = 1$. А именно: уравнение (11) есть следствие уравнений (8а) и (9), следовательно, и уравнений (8) и (9). Таким образом выведено Лоренцево преобразование.

Лоренцево преобразование, выраженное в уравнениях (8) и (9), требует еще следующего обобщения. То обстоятельство, что оси K' выбраны пространственно параллельные осям K, явно несущественно. Также несущественно и то, что поступательное движение K' по отношению к K имеет направление оси X. Лоренцево преобразование в общем смысле, как это явствует из простого соображения, можно составить из преобразований двоякого родз, а именно: из Лоренцева преобразования в специальном смысле и чисто пространственного преобразования, соответствующего замене системы прямоугольных координат новой системой с иначе направленными осями.

Обобщенное Лоренцево преобразование математически может быть характеризовано таким образом.

Оно выражает x', y', z', t' такими линейными гомогенными функциями от x, y, z, t, что отношение

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad . \; . \; (11a)$$

обращается в тожество. Это означает: если в левой части уравнения вместо x' и т. д. подставить их выражения через x, y, z, t, то левая часть уравнения (11а) совпадет с правой.

II. Мир четырех измерений Минковского.

(Дополнение к § 17.)

Обобщенное Лоренцево преобразование может быть еще проще характеризовано, если вместо t, как переменной временной величины, ввести мнимую величину $\sqrt{-1}\, ct$. Если соответственно этому возьмем

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \\ x_4 &= \sqrt{-1}\, ct \end{aligned}$$

и аналогично поступим для отмеченной штрихами системы K', то условие, которое при преобразовании обращается в тожество, имеет следующий вид:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad \ldots . \quad (12)$$

Именно в это уравнение переходит уравнение (11a) при указанном выборе «координат».

Из уравнения (12) видно, что мнимая временная координата x_4 совершенно так же входит в условие преобразования, как и пространственные координаты x_1, x_2, x_3. На этом основани, при формулировании законов природы, согласно с теорией относительности «время» x_4 выступает в той же самой форме, что и пространственные координаты x_1 x_2 x_3.

Континуум четырех измерений, описываемый «координатами» x_1, x_2, x_3, x_4, Минковский называет «миром», точку события—«мировой точкой».

То, что для физики было «совершаться» в пространстве трех измерений, то теперь некоторым образом превращается в «быть в четырехмерном «мире».

Этот четырехмерный «мир» представляет глубоко идущее сходство с трехмерным «пространством» (Эвклидовой) аналитической геометрии. А именно: если ввести в последней новую Декартову систему координат (x_1', x_2', x_3') с той же начальной точкой, то x_1', x_2', x'_3 будут линейными гомогенными функциями от x_1, x_2, x_3, при которых уравнение

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

обращается в тожество. Аналогия с уравнением (12) полная. Мир Минковского можно формально рассматривать, как Эвклидово пространство четырех измерений (с мнимой временной координатой). Тогда Лоренцево преобразование соответствует «вращению» системы координат в «мире» четырех измерений.

III. Подтверждение общей теории относительности опытом.

Процесс развития экспериментальной науки с точки зрения теоретической научно-познавательной схемы, мыслится, как продолжающийся индуктивный процесс. Теории являются объединением большого числа единичных опытных фактов в опытные законы, из которых путем сравнения выводятся общие законы. С этой точки зрения, развитие науки представляется как бы работой по составлению каталога, т.-е. работой чистой эмпирии.

Это представление, однако, вовсе не исчерпывает действительного процесса. Именно, оно обходит молчанием ту существенную роль, которую играют интуиция и дедуктивное мышление в развитии точного знания. Ибо, как только наука выходит из своей примитивнейшей стадии, дальнейшие теоретические успехи получаются не одним только путем систематизирующей деятельности,—скорее исследователь, под влиянием опытных фактов, создает систему идей, которая опирается логически на небольшое сравнительно число основных предположений, так называемых аксиом. Подобную систему идей мы называем теорией. Теория черпает оправдание своему существованию в том, что она объединяет большое числу единичных опытных фактов; в этом лежит ее «истинность».

Может, однако, случиться, что один и тот же комплекс опытных фактов отвечает различным теориям, которые сильно разнятся между собой. Согласие теорий с выводами, доступными опытной проверке, может итти так далеко, что становится весьма трудными подобрать доступные опытной проверке выводы, по отношению к которым обе теории не согласны между собой. С подобным случаем, имеющим общий интерес, мы встречаемся, например, в биологии, где приходится считаться с Дарвиновой теорией развития видов путем полового подбора в борьбе за существование, и той теорией, которая основывается на гипотезе передачи по наследству благоприобретенных качеств.

Подобный же случай, далеко идущего совпадения выводов мы имеем в Ньютоновой механике—с одной стороны, и в общем принципе относительности—с другой. Совпадение это идет так далеко, что до сих пор, несмотря на большую разницу основных предпосылок, было найдено только немного доступных опытной проверке выводов, к которым не приводила прежняя физика. Эти важные выводы мы хотим еще раз рассмотреть и вкратце еще раз обозреть собранные до сих пор на этот счет опытные факты.

1. Движение перигелия Меркурия.

Согласно Ньютоновой технике и Ньютонову закону притяжения, планета, в единственном числе вращающаяся вокруг солнца, описывает вокруг него (точнее, вокруг общего центра тяжести солнца и планеты) эллипс. Солнце (общий центр тяжести) лежит при этом в фокусе эллиптического пути, и, следовательно, расстояние солнце-планета в течение одного планетного года растет от minimum'а к maximum'у и затем снова падает до minimum'а. Если принять вместо Ньютонова другой закон притяжения, то найдем, что движение по этому закону должно все еще происходить таким образом, что расстояние солнце-планета будет периодически колебаться в ту и другую сторону; но угол описанный линией солнце-планета при таком периоде (от перигелия[1]) до перигелия) будет отличаться от 360°. Линия пути не будет теперь замкнутой, но будет заполнять в потоке времени кольцеобразную часть плоскости пути (между кругом наименьшего и кругом наибольшего расстояния планеты). Согласно общей теории относительности, которая дает некоторое отклонение от Ньютоновой, должно также иметь место маленькое уклонение от Кеплер-Ньютонова движения. Это уклонение заключается в том, что угол, образуемый радиусом солнца-планета от одного перигелия до другого будет отличаться от полного угла оборота (т.-е. от угла 2π, данного в обычных физике абсолютных угловых величинах) на величину .

$$\frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}$$

[1]) Наибольшая близость планеты к солнцу.

(здесь a — длина большой полуоси эллипса, e — его экцентриситет, c—скорость света, T—период вращения). Это можно еще выразить таким образом: согласно общему принципу относительности большая ось элипсиса вращается по направлению движения вокруг солнца. Это вращение, согласно теории, для планеты Меркурия должно иметь величину 43 угловых секунд в 100 лет, для других же планет нашей солнечной системы будет так мало, что ускользнет от констатирования.

Астрономы в самом деле нашли, что Ньютоновой теории не достаточно, чтобы объяснить наблюдаемое движение Меркурия с точностью, доступной теперешним наблюдениям. Если принять во внимание все возмущающие влияния, которые оказывают остальные планеты на Меркурия, все-таки остается необъясненным (Леверье—1859, Ньюкомб—1895) движение перигелия Меркурия, которое немногим отличается от упомянутых $+43$ секунд в столетие. Расхождение этого результата с данными общего принципа относительности не привосходит нескольких секунд.

2. Отклонение светового луча полем тяготения.

В § 22 показано, что, согласно общему принципу относительности, световой луч в поле тяготения должен испытывать скривление подобное тому, которое претерпевает путь тела, несущегося в поле тяготения. Световой луч, проходящий мимо небесного тела, по теории, изгибается к нему; этот угол отклонения α для луча, проходящего на расстоянии Δ солнечных радиусов, должен быть таким:

$$\alpha = \frac{1{,}7 \text{ секунды}}{\Delta}$$

Нужно прибавить, что это отклонение по теории наполовину обусловлено полем притяжения (Ньютоновым) солнца, на половину обусловлено вызванным солнцем геометрическим изменением («скривление») пространства.

Этот результат дозволяет экспериментальную проверку с помощью фотографической съемки звезд во время полного солнечного затмения. Последнего приходится дожидаться потому, что во всякое другое время освещенная солнцем атмосфера сильно светится и делает невидимыми близкие к солнцу звезды.

На практике опытная проверка происходит следующим образом: звезды вокруг солнца фотографируются во время солнечного затмения. Затем приготовляется вторая фотография той же самой звезды, когда солнце находится на другом месте неба (т.-е. несколькими месяцами позже или раньше). Картины звезд, снятые во время солнечного затмения, должны быть сдвинуты в этом случае, по отношению к сравниваемым снимкам, радиально во вне центра.

Астрономическому Королевскому о-ву обязаны мы проверкой этого важного вывода. Не останавливаясь перед войной и созданными ею трудностями психологического рода, оно послало многих своих выдающихся астрономов (Эдингтон, Кроммелин, Девидсон), и снарядило две экспедиции для производства фотографических съемок во время солнечного затмения 29 мая 1919 г. в Собрале (Бразилия) и на острове Принчипе (Западная Африка). Ожидаемые отклонения снимков во время затмения от снимков, являющихся объектами сравнения, имеют величину сотых делей миллиметра. Таким образом предъявляются немалые требования к точности съемок и их измерению.

Данные измерения вполне удовлетворительно подтвердили теорию. В следующей таблице даны прямоугольные компоненты наблюдаемых и вычисленных отклонений звезды (в угловых секундах).

Номер звезды.	1. Координата.		2. Координата.	
	Наблюдено.	Вычислено.	Наблюдено.	Вычислено.
11	— 0,19	— 0,22	+ 0,16	+ 0,02
5	— 0,29	— 0,31	— 0,46	— 0,43
4	— 0,11	— 0,10	+ 0,83	+ 0,74
3	— 0,20	— 0,12	+ 1,00	+ 0,87
6	— 0,10	— 0,04	+ 0,57	+ 0,40
10	— 0,08	+ 0,09	+ 0,35	+ 0,32
2	+ 0,95	+ 0,85	— 0,27	— 0,09

3. Сдвиг спектральных линий к красному концу

В § 23 показано, что в системе K', вращающейся по отношению к Галилеевой системе K, скорость хода нескольких покоящихся, одинаково сделанных часов зависит от места. Исследуем эту зависимость количественно. Часы, находящиеся на расстоянии r от центра дис а, имеют скорость по отношению к K

$$v = wr$$

где w—скорость вращения диска (K') по отношению к K. Если v_0 означает число ударов часов в единицу времени (скорость хода) по отношению к K в случае покоящихся часов, то скорость хода v часов, двигающихся со скоростью v по отношению K, покоющихся по отношению диска, согласно § 12, будет

$$v = v_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

или, с достаточной точностью,

$$v = v_0\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{\quad}{c^2}\right)$$

или, точно так же

$$v = v_0\left(1 - \frac{w^2 r^2}{2\,c^2}\right)$$

Обозначим посредством $+\,\Phi$ разницу потенциала центробежной силы между местоположением часов и центром диска, т.-е. отрицательную работу, которую нужно совершить против центробежной силы по отношению к единице массы, чтобы перенести ее с месторасположения часов к центру подвижного диска; тогда

$$\Phi = -\frac{w^2 r^2}{2}$$

откуда имеем

$$v = v_0\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)$$

отсюда, во-первых, видим, что двое одинаковых сделанных часов идут с различной скоростью в различных расстояниях от центра диска; вывод этот действителен, и с точки зрения наблюдателя, вращающегося с диском.

Так как теперь, судя с диска, существует поле тяготения, потенциал которого Φ, то полученный результат вообще имеет силу для полей тяготения.

Далее, так как мы должны смотреть на атом, посылающий спектральные линии, как на часы, то имеет силу положение:

Атом поглощает (или испускает) колебания с периодом, зависящим от потенциала поля тяготения, в котором атом находится.

Частота колебаний атома, находящегося на поверхности небесного тела, несколько меньше частоты колебаний этого же элемента, находящегося в свободном пространстве (или на поверхности меньшего небесного тела).

Так как $\Phi = -\frac{KM}{r}$, где K Ньютонова постоянная тяготения, M — масса, r — радиус небесного тела, то спектральные линии, возбужденные на поверхности звезды, должны сдвинуться к красному концу сравнительно с спектральными линиями на поверхности земли на величину

$$\frac{v - v_0}{v} = -\frac{KM}{c^2 r}$$

В случае солнца ожидаемый сдвиг к красному концу спектра имеет величину едва равную одной миллионной доли длины волны. Сделать расчеты для случая неподвижных звезд нельзя, так как вообще неизвестна ни их масса M, ни радиус r.

Существует ли в действительности подобный эффект это остается открытым вопросом, над ответом на который астрономы работают в настоящее время с большим рвением. В случае солнца, трудно судить о существовании эффекта вследствие его малости.

В то время как Гребе и Бахем (Бонн), на основании своих собственных измерений, а также на основании измерений Эвершида и Шварцшильда с полосами циана, считают существование эффекта твердо установленным, другие ученые, в особенности С. Джон, на основании своих измерений, держатся противоположного взгляда.

Вполне установлен, при статистическом исследовании неподвижных звезд, средний сдвиг линий к медленному спектральному концу. Но обработка материала не дает до сих пор возможности сделать уверенного заключения о том, что этот сдвиг следует действительно отнести на счет действия силы тяготения.

Сводку результатов наблюдений, а также дискуссию с точки зрения интересующего нас вопроса можно найти в сочинении Фрейндлиха (Проверка относительности («Die Naturwissenschaften, 1919, Heft 35, S. 520. Verlag Jul. Springer, Berlin).

Во всяком случае ближайшие годы принесут окончательное решение. Если бы не существовало сдвига спектральных линий к красному концу, обусловленного потенциалом тяготения, всеобщий принцип относительности был бы поколеблен.

С другой стороны, изучение сдвига линий, если бы было установлено его происхождение от потенциала тяготения, дало бы нам возможность сделать важные заключения о массе небесных тел.