

Лекция 3

Связь амплитуды и периода нелинейных колебаний

1. Анализ зависимости периода от амплитуды в колебательных решениях уравнения Дюффинга. Рассмотрим уравнение Дюффинга класса А:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \beta x^3 = 0. \quad (3.1)$$

Это уравнение допускает интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \Pi(x) = h, \quad (3.2)$$

где

$$\Pi(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4}.$$

Амплитуда колебаний A и значений постоянной в интеграле энергии связаны соотношением

$$\beta A^4 + 2A^2 - 4h = 0.$$

Период колебаний с амплитудой A вычисляется по формуле, выведенной на Лекции 1:

$$T = 4 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{2[h - \Pi(x)]}} = 4 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{2 \left(h - \frac{x^2}{2} - \beta \frac{x^4}{4} \right)}}. \quad (3.3)$$

Совершим замену переменных в (3.2):

$$x = A \sin \theta.$$

Выражение под знаком радикала приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} & h - \frac{A^2 \sin^2 \theta}{2} - \frac{\beta A^4 \sin^4 \theta}{4} = \\ & = \underline{h} - \frac{A^2}{2} + \frac{A^2 \cos^2 \theta}{2} - \frac{\beta A^4}{4} + \frac{\beta A^4 \cos^2 \theta}{2} - \frac{\beta A^4 \cos^4 \theta}{4} = \\ & = \frac{A^2 \cos^2 \theta}{2} \left[1 + \frac{\beta A^2}{2} (1 + \sin^2 \theta) \right] \end{aligned}$$

Таким образом:

$$T = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{\beta A^2}{2} (1 + \sin^2 \theta)}} =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{\beta A^2}{4} (1 + \sin^2 \theta) + O(A^4) \right] d\theta = 2\pi \left(1 - \frac{3\beta A^2}{8} + O(A^4) \right)$$

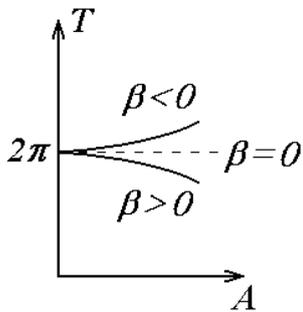


Рис. 3.1

Вывод: если $\beta > 0$, то с увеличением амплитуды период колебаний уменьшается; в случае $\beta < 0$ увеличение амплитуды колебаний приводит к увеличению периода (рис. 3.1).

В таблице 3.1 для сравнения приведены значения периода колебательных решений уравнения (3.1) в случае $\beta = -1$, рассчитанные по приближенной формуле

$$T(A) = 2\pi \left(1 - \frac{3\beta A^2}{8} \right) \quad (3.4)$$

и по точной формуле (Лекция 2)

$$T = \frac{4K(k)}{\sigma}, \quad (3.5)$$

где

$$k^2 = -\frac{\beta A^2}{2 + \beta A^2}, \quad \sigma^2 = 1 + \frac{\beta A^2}{2}.$$

В последнем столбце таблицы указана относительная погрешность результата, полученного на основе приближенной формулы (3.6).

Таблица 3.1. Значения периодов колебательных решений уравнения Дюффинга (класс А, $\beta = -1$) при разных значениях амплитуды А

Амплитуда колебаний	Период колебаний $T(A)$	Приближенное значение $T(A)$	Относительная погрешность
0.02000	6.28413	6.28413	0.00000
0.04000	6.28696	6.28696	0.00000
0.06000	6.29169	6.29167	0.00000
0.08000	6.29832	6.29826	0.00001
0.10000	6.30689	6.30675	0.00002
0.20000	6.37974	6.37743	0.00036
0.30000	6.50733	6.49524	0.00186
0.40000	6.70050	6.66018	0.00602
0.50000	6.97833	6.87223	0.01520
0.60000	7.37505	7.13142	0.03303
0.70000	7.95714	7.43772	0.06528
0.80000	8.87645	7.79115	0.12227

2. Обобщения. Жесткие и мягкие системы. Рассмотрим консервативную систему, описываемую уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0. \quad (3.6)$$

«Жесткость» системы определяется значением производной $\frac{df}{dx}(x)$.

О.: Система называется жесткой, если ее жесткость увеличивается при увеличении смещения от положения равновесия. Если увеличение смещения приводит к уменьшению жесткости, система называется мягкой (рис. 3.2).

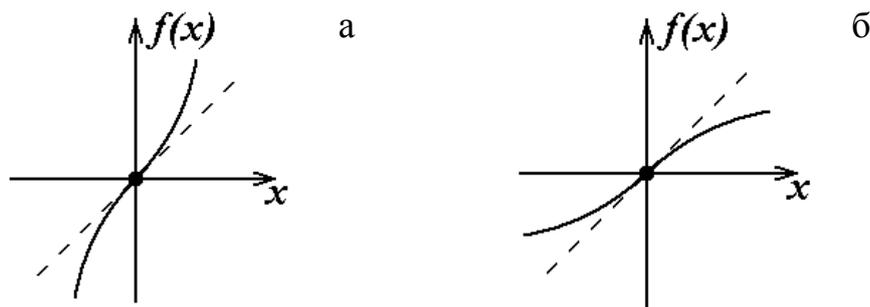


Рис. 3.2. Восстанавливающая сила в «жесткой» (а) и в «мягкой» системах

В жестких системах с увеличением амплитуды период колебаний уменьшается, а в мягких – увеличивается.

Пример. Математический маятник:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0. \quad (3.7)$$

Разложим выражение для восстанавливающей силы $f(x) = \sin x$ в ряд Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad (3.8)$$

Из рассмотрения первых членов этого разложения следует, что маятник является мягкой системой и с увеличением амплитуды период его колебаний увеличивается.

Несложно получить приближенную формулу для периода колебаний маятника. Уравнение Дюффинга класса A с коэффициентом $\beta = -\frac{1}{6}$ является аппроксимацией уравнения (3.7) с точностью до членов порядка x^5 . Принимая во внимание (3.4), найдем:

$$T(A) = 2\pi \left(1 + \frac{A^2}{16} \right). \quad (3.9)$$

Значения периодов колебаний, подсчитанные по выведенной на предыдущей лекции точной формуле и по приближенной формуле (3.9), приведены в Табл. 3.2.

Таблица 3.2. Значения периодов колебаний маятника при разных значениях амплитуды A

Амплитуда колебаний (в градусах)	Период колебаний $T(A)$	Приближенное значение $T(A)$	Относительная погрешность
2.00000	6.28366	6.28366	0.00000
4.00000	6.28510	6.28510	0.00000
6.00000	6.28749	6.28749	0.00000
8.00000	6.29085	6.29084	0.00000
10.00000	6.29517	6.29515	0.00000
20.00000	6.33137	6.33103	0.00005
30.00000	6.39257	6.39085	0.00027
40.00000	6.48010	6.47458	0.00085
50.00000	6.59598	6.58224	0.00208
60.00000	6.74300	6.71383	0.00433
70.00000	6.92498	6.86934	0.00804
80.00000	7.14708	7.04877	0.01375
90.00000	7.41630	7.25213	0.02214
100.00000	7.74232	7.47942	0.03396
110.00000	8.13886	7.73062	0.05016
120.00000	8.62606	8.00576	0.07191
130.00000	9.23515	8.30481	0.10074

3. Асимптотические формулы для периода решений с фазовыми траекториями, лежащими в окрестности сепаратрисы: случай уравнения Дюффинга и уравнения математического маятника. Рассмотрим для начала уравнение Дюффинга (3.1) в предположении $\beta < 0$ - в этом случае на фазовом портрете имеется сепаратрисный контур (Рис. 3.3).

Пусть $h_* = -\frac{1}{4\beta} > 0$ - значение интеграла энергии (3.2) на сепаратрисе. нас будут интересовать колебательные решения, в которых значения интеграла энергии

$$h = h_* - \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3.8)$$

Найдем амплитуду таких колебаний. Запишем приближенное выражение для потенциальной энергии в окрестности неустойчивого положения равновесия $x_* = \frac{1}{|\beta|^{1/2}}$:

$$\Pi(x) = \Pi(x_*) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\Pi}{dx^2} \right|_{x=x_*} (x-x_*)^2 + \dots \quad (3.9)$$

Теперь, принимая во внимание соотношения

$$\Pi(x_*) = h_*, \quad \left. \frac{d^2\Pi}{dx^2} \right|_{x=x_*} = (1 + 3\beta x_*^2) \Big|_{x=x_*} = -2,$$

получим:

$$h_* - (A - x_*)^2 = h \Rightarrow A \approx x_* - \varepsilon^{1/2}. \quad (3.10)$$

Главной задачей данного раздела будет построение приближенной формулы для периода колебаний $T(\varepsilon)$. Выделим на фазовой плоскости (x, \dot{x}) две узкие вертикальные полосы таким образом, что левая граница левой полосы и правая граница правой полосы проходят через неустойчивые равновесия (рис. 3.3). Далее предполагается, что ширина полос δ удовлетворяет условию

$$\varepsilon^{1/2} \ll \delta \ll 1.$$

Справедливо равенство

$$T(\varepsilon) = 2(T_1 + T_2), \quad (3.11)$$

где T_1 - длительность пребывания фазовой точки в δ -полосе при движения по фазовой траектории, T_2 - время, затрачиваемое на перемещение между δ -полосами.

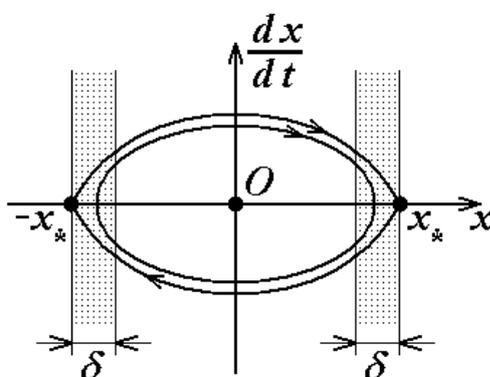


Рис. 3.3. Замкнутая фазовая траектория в окрестности сепаратрисного контура

Для того, чтобы установить длительность пребывания фазовой точки в δ -полосе, рассмотрим уравнение Дюффинга, линеаризованное в окрестности неустойчивого положения равновесия $x_* = |\beta|^{-1/2}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Pi''(x_*)(x - x_*) = 0. \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.12) с начальными данными $x(0) = A, \frac{dx}{dt}(0) = 0$ имеет вид

$$x(t) = x_* + (A - x_*) \operatorname{ch} \sqrt{2}t \quad (3.13)$$

В момент времени $t = T_1/2$ фазовая точка $(x(t), \dot{x}(t))$ достигает границы δ -полосы

$$x\left(\frac{T_1}{2}\right) = x_* - \delta. \quad (3.14)$$

Опираясь на соотношения (3.10), (3.13) и (3.14), несложно получить уравнение для отыскания T_1 :

$$\delta = \varepsilon^{1/2} \operatorname{ch} \frac{T_1}{\sqrt{2}}.$$

Принимая теперь во внимание то, что $\delta \gg \varepsilon^{1/2}$, найдем:

$$\frac{\delta}{\varepsilon^{1/2}} = \operatorname{ch} \frac{T_1}{\sqrt{2}} \approx \frac{e^{T_1/\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow T_1 \approx \sqrt{2} \ln \frac{2\delta}{\varepsilon^{1/2}}. \quad (3.15)$$

Для отыскания T_2 воспользуемся следующим соображением: при сделанных предположениях T_2 несущественно отличается от времени T_2^* , требуемого для перемещения фазовой точки между δ -полосами вдоль фазовых траекторий асимптотических решений уравнения (3.1)

$$x_{\pm}(t) = \pm x_* \operatorname{th} \frac{t}{\sqrt{2}}. \quad (3.16)$$

Запись асимптотического решения в форме (3.16) подразумевает, что в момент времени $t=0$ фазовая точка $(x_{\pm}(t), \dot{x}_{\pm}(t))$ располагается на фазовой плоскости на прямой $x=0$ и, таким образом, равноудалена от неустойчивых положений равновесия; знак «+» в (3.16) соответствует решению с фазовой траекторией, лежащей в нижней полуплоскости, знак «-» дает решение с фазовой траекторией в верхней полуплоскости. Стартуя с прямой $x=0$, фазовая точка $(x_{\pm}(t), \dot{x}_{\pm}(t))$ достигнет правой δ -полосы в момент времени $t = \frac{T_2^*}{2}$:

$$x_{\pm} \left(\frac{T_2^*}{2} \right) = x_* - \delta. \quad (3.17)$$

Из соотношения (3.17) с помощью несложных выкладок найдем:

$$T_2 \approx T_2^* \approx \sqrt{2} \ln \frac{2x_*}{\delta}.$$

Располагая выражениями для T_1 и T_2 , совершим последний шаг, необходимый для построения приближенной формулы для периода колебаний:

$$T(\varepsilon) = 2(T_1 + T_2) \approx 2\sqrt{2} \left(\ln \frac{2\delta}{\varepsilon^{1/2}} + \ln \frac{2x_*}{\delta} \right) = 2\sqrt{2} \ln \frac{4x_*}{\varepsilon^{1/2}}. \quad (3.18)$$

Так как $\varepsilon^{1/2} = x_* - A$, то полученную формулу можно записать в несколько ином виде:

$$T(A) \approx 2\sqrt{2} \ln \frac{4x_*}{x_* - A}. \quad (3.19)$$

Как и прежде, интересно сравнить значения периода колебательных решений уравнения Дюффинга, вычисленные по точной формуле (3.5) и по приближенной формуле (3.19). Для случая $\beta = -1$ эти значения приведены в Табл. 3.3. (отметим, что при $\beta = -1$ амплитуды колебательных решений уравнения (3.1) всегда будут меньше $|\beta|^{-1/2} = 1$).

Таблица 3.3. Значения периодов колебательных решений уравнения Дюффинга (класс А, $\beta = -1$) с фазовыми траекториями, лежащими в окрестности сепаратрисного контура

Амплитуда колебаний	Период колебаний $T(A)$	Приближенное значение $T(A)$	Относительная погрешность
0.70000	7.95714	7.32638	0.07927
0.80000	8.87645	8.47321	0.04543
0.90000	10.61923	10.43373	0.01747
0.92000	11.20928	11.06487	0.01288
0.94000	11.98326	11.87856	0.00874
0.96000	13.09221	13.02539	0.00510
0.98000	15.01736	14.98590	0.00209
0.99000	16.96151	16.94642	0.00089
0.99200	17.58952	17.57757	0.00068
0.99400	18.40012	18.39125	0.00048
0.99600	19.54392	19.53808	0.00030
0.99800	21.50148	21.49860	0.00013
0.99900	23.46054	23.45911	0.00006

Повторяя с надлежащими изменениями предыдущие рассуждения, можно получить приближенную формулу для периода колебательных решений уравнения математического маятника (3.7):

$$T(\varepsilon) \approx 4 \ln \frac{8}{(2\varepsilon)^{1/2}}. \quad (3.20)$$

Если дана амплитуда колебаний A , то разность значений интеграла энергии в этом колебательном решении и в решениях, лежащих на сепаратрисном контуре

$$\varepsilon = \frac{(\pi - A)^{1/2}}{2} \quad (3.21)$$

Соотношение (3.21) позволяет переписать приближенную формулу для периода колебаний в другой форме:

$$T(A) \approx 4 \ln \frac{8}{\pi - A}. \quad (3.22)$$

Значения периодов колебаний математического маятника с большой амплитудой, вычисленные по точной формуле и по приближенной формуле (3.22), приведены в Табл. 3.4.

4. Асимптотические формулы для периода решений с фазовыми траекториями, лежащими в окрестности сепаратрисы: общий случай. Предположим, что уровень интеграла энергии

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \Pi(x) = h_*$$

является критическим для изучаемой консервативной системы: этому уровню принадлежит неустойчивое стационарное решение $x \equiv x_*$ (рис. 3.4). В общем случае данное стационарное решение удовлетворяет условию невырожденности

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2}(x_*) \neq 0. \quad (3.23)$$

При выполнении условия (3.23) периодическое решение, лежащее на уровне интеграла энергии $h = h_* - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$), имеет период

$$T \sim \ln \varepsilon. \quad (3.24)$$

Логарифмическое возрастание периода при устремлении интеграла энергии периодического решения к некоторому критическому значению является важным свойством нелинейных систем. Установить такую асимптотику несложно - нужно только разумным образом обобщить соображения, позволившие получить приближенную формулы для периода уравнения Дюффинга (3.18).

Достаточно часто встречаются ситуации, когда периодические решения лежат не только на уровнях $h < h_*$, но и на уровнях $h > h_*$ (рис. 3.5). Формула (3.24) справедлива и в том случае, когда оценивается период периодического решения на уровне $h = h_* + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$).

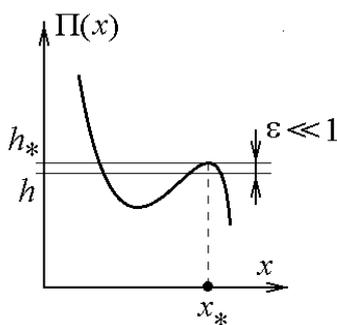


Рис. 3.4. Критический и близкий по значению некритический уровни интеграла энергии. На некритическом уровне лежат периодические решения, на критическом их нет.

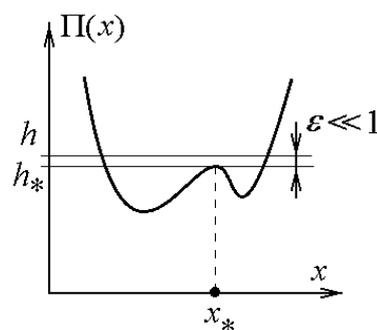


Рис. 3.5. Пример ситуации, когда периодические решения лежат на уровнях как выше, так и ниже критического: потенциал с двумя ямами

Таблица 3.4. Значения периодов колебательных решений уравнения математического при больших значениях амплитуды A

Амплитуда колебаний	Период колебаний $T(A)$	Приближенное значение $T(A)$	Относительная погрешность
90.00000	7.41630	6.51144	0.12201
100.00000	7.74232	6.98257	0.09813
110.00000	8.13886	7.51669	0.07644
120.00000	8.62606	8.13330	0.05713
130.00000	9.23515	8.86258	0.04034
140.00000	10.01820	9.75516	0.02626
150.00000	11.07225	10.90588	0.01503
160.00000	12.61354	12.52774	0.00680
170.00000	15.32697	15.30033	0.00174
172.00000	16.21103	16.19291	0.00112
174.00000	17.35462	17.34364	0.00063
176.00000	18.97087	18.96550	0.00028
178.00000	21.73964	21.73809	0.00007
179.00000	24.51112	24.51067	0.00002