АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ

В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

И. Е. ТАММА,

Я. А. СМОРОДИНСКОГО,

Б. Г. КУЗНЕЦОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1965

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ

I

РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ 1905–1920

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1965

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

2—3—2

Подписное издание

A. Einstein

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ

ОТ РЕДАКЦИИ

Настоящее издание представляет собой первое в мировой литературе фундаментальное собрание научных трудов Эйнштейна. В научном наследстве знаменитого ученого более 200 статей по различным вопросам физики [1]. Подавляющее большинство их после опубликования в журналах не было собрано и издано. Между тем полная картина творчества Эйнштейна имела бы большое научное и культурное значение. Настоящим изданием Академия наук СССР выполняет значительную часть этой почетной задачи.

В первом и втором томах собраны практически все работы Эйнштейна по специальной теории относительности, общей теории относительности и единой теории поля. Большинство их, как это уже сказано в отношении всех работ Эйнштейна, не вошло в какие-либо отдельные издания и не выходило в свет после первоначальной публикации. Лишь некоторые немногочисленные принадлежащие Эйнштейну статьи и доклады по теории относительности вышли отдельными изданиями [2]. Многократно издавались лекции по теории относительности, прочитанные Эйнштейном в 1921 г. в Принстоне, с позднейшими дополнениями [3]. Издано несколько статей Эйнштейна по теории относительности вместе со статьями Лоренца, Минковского и (в русском издании) Пуанкаре [4]. Все эти книги охватывают лишь

---

[1] Библиография работ Эйнштейна имеется в сборнике: «A. E i n s t e i n. Philosopher-scientists». Ed. by P. Schilpp, Tudor Publ. Comp. N. Y., 1951 (449 названий), а также в книге: B o n i. A bibliographical checklist and index to the published writings of Albert Einstein. Pageant books. Paterson, 1960 (607 названий). Эти книги служили основным пособием при составлении настоящего Собрания.

[2] Из них на русском языке: «Эфир и принцип относительности» (Научное книгоиздательство. Пг., 1922); О специальной и общей теории относительности (Научное книгоиздательство. Пг., 1923); Геометрия и опыт (Научное книгоиздательство. Пг., 1923).

[3] Четвертое издание этой книги (The Meaning of Relativity) переведено на русский язык в 1955 г. (А. Э й н ш т е й н. Сущность теории относительности. ИЛ, 1955).

[4] Принцип относительности. Г. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский. Сборник работ классиков релятивизма. Л., ОНТИ, 1935.

небольшую часть основных работ Эйнштейна по специальной и общей теории относительности и, помимо дополнений к «The Meaning of relativity», не включают статей, написанных в 20—50-е годы и развивавших далее общую теорию относительности. Некоторые популярные очерки теории относительности вошли в сборники статей Эйнштейна на различные темы, выходившие в свет в 30—50-е годы [5].

В первом и втором томах статьи Эйнштейна расположены в хронологическом порядке. Первую группу образуют статьи, излагающие специальную теорию; вторую группу — работы, посвященные общей теории относительности и ее выводам, в частности, релятивистской космологии. Третья группа — дальнейшее обобщение теории, поиски единой теории поля.

Третий том будет включать остальные научные работы Эйнштейна по физике (в частности, по теории броуновского движения, термодинамике, теории квантов света, квантовой статистике). В четвертый том войдут работы по истории, логике и психологии научного творчества (включая «Эволюцию физики»), очерки о жизни и творчестве отдельных мыслителей, воспоминания, автобиографические наброски и некоторые письма.

Несколько слов о переводе. Мы сочли возможным сделать перевод статей более современным и не стремились к сохранению стиля, характерного для времени их первой публикации. Оправданием этого служит уверенность в том, что работы Эйнштейна ни в какой мере не стали достоянием архивов и их чтение современным читателем должно быть по возможности облегчено. Это тем более оправдано, что немецкий язык Эйнштейна труден и не может быть достаточно точно передан в переводе.

Книга содержит небольшое число примечаний редактора, цель которых, во-первых, указать важнейшие библиографические данные и, во-вторых,— подчеркнуть основные этапы развития теории. Примечания по возможности краткие: даже современному физику нелегко добавить что-нибудь к логической цели рассуждений великого автора.

Первый и второй тома были переведены группой физиков-теоретиков в составе А. Базя, Л. Пузикова и А. Сазыкина. Некоторые статьи переведены В. Голубенковым, Л. Горьковым, В. Коганом, С. Лариным, Л. Максимовым, М. Певзнером и А. Чичериным. Ряд работ удалось получить только благодаря любезному содействию А. Пайса (США), Р. М. Рындина, Кобленца (Швейцария) и Жанны Леберик (Франция), которым мы выражаем глубокую признательность.

---

[5] В качестве наиболее полного из них можно назвать сборник: A. Einstein. Ideas and opinions. London, Crown Publ. Inc., 1956.

1905

1

К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ*

Известно, что электродинамика Максвелла в современном ее виде приводит в применении к движущимся телам к асимметрии, которая несвойственна, по-видимому, самим явлениям. Вспомним, например, электродинамическое взаимодействие между магнитом и проводником с током. Наблюдаемое явление зависит здесь только от относительного движения проводника и магнита, в то время как, согласно обычному представлению, два случая, в которых движется либо одно, либо другое из этих тел, должны быть строго разграничены. В самом деле, если движется магнит, а проводник покоится, то вокруг магнита возникает электрическое поле, обладающее некоторым количеством энергии, которое в тех местах, где находятся части проводника, порождает ток. Если же магнит находится в покое, а движется проводник, то вокруг магнита не возникает никакого электрического поля; зато в проводнике возникает электродвижущая сила, которой самой по себе не соответствует никакая энергия, но которая — при предполагаемой тождественности относительного движения в обоих интересующих нас случаях — вызывает электрические токи той же величины и того же направления, что и электрическое поле в первом случае.

Примеры подобного рода, как и неудавшиеся попытки обнаружить движение Земли относительно «светоносной среды», ведут к предположению, что не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя и даже, более того,— к предположению, что для всех координатных систем, для которых справедливы уравнения механики, справедливы те же самые электродинамические и оптические законы, как это уже доказано для величин первого порядка. Это предположение (содержание которого в дальнейшем будет называться «принципом относительности») мы намерены превратить в предпосылку и сделать, кроме того, добавочное допущение, находящееся с первым лишь в кажущемся противоречии, а именно, что свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью V, не зависящей от

* *Zur Elektrodynamik der bewegter Körper*. Ann. Phys., 1905, 17, 891—921.

состояния движения излучающего тела. Эти две предпосылки достаточны для того, чтобы, положив в основу теорию Максвелла для покоящихся тел, построить простую, свободную от противоречий электродинамику движущихся тел. Введение «светоносного эфира» окажется при этом излишним, поскольку в предлагаемой теории не вводится «абсолютно покоящееся пространство», наделенное особыми свойствами, а также ни одной точке пустого пространства, в котором протекают электромагнитные процессы, не приписывается какой-нибудь вектор скорости.

Развиваемая теория основывается, как и всякая другая электродинамика, на кинематике твердого тела, так как суждения всякой теории касаются соотношений между твердыми телами (координатными системами), часами и электромагнитными процессами. Недостаточное понимание этого обстоятельства является корнем тех трудностей, преодолевать которые приходится теперь электродинамике движущихся тел.

I. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 1. Определение одновременности

Пусть имеется координатная система, в которой справедливы уравнения механики Ньютона. Для отличия от вводимых позже координатных систем и для уточнения терминологии назовем эту координатную систему «покоящейся системой».

Если некоторая материальная точка находится в покое относительно этой координатной системы, то ее положение относительно последней может быть определено методами эвклидовой геометрии с помощью твердых масштабов и выражено в декартовых координатах.

Желая описать *движение* какой-нибудь материальной точки, мы задаем значения ее координат как функций времени. При этом следует иметь в виду, что подобное математическое описание имеет физический смысл только тогда, когда предварительно выяснено, что подразумевается здесь под «временем». Мы должны обратить внимание на то, что все наши суждения, в которых время играет какую-либо роль, всегда являются суждениями об *одновременных событиях*. Если я, например, говорю: «Этот поезд прибывает сюда в 7 часов»,—то это означает примерно следующее: «Указание маленькой стрелки моих часов на 7 часов и прибытие поезда суть одновременные события» [1].

[1] Здесь не будет обсуждаться неточность, содержащаяся в понятии одновременности двух событий, происходящих (приблизительно) в одном и том же месте, которая должна быть преодолена также с помощью некоторой абстракции.

Может показаться, что все трудности, касающиеся определения «времени», могут быть преодолены тем, что вместо слова «время» я напишу «положение маленькой стрелки моих часов». Такое определение, действительно, достаточно в случае, когда речь идет о том, чтобы определить время лишь для того самого места, в котором как раз находятся часы; однако это определение уже недостаточно, как только речь будет идти о том, чтобы связать друг с другом во времени ряды событий, протекающих в различных местах, или, что сводится к тому же, установить время для тех событий, которые происходят в местах, удаленных от часов.

Желая определить время событий, мы могли бы, конечно, удовлетвориться тем, что заставили бы некоторого наблюдателя, находящегося с часами в начале координат, сопоставлять соответствующее положение стрелки часов с каждым световым сигналом, идущим к нему через пустоту и дающим знать о регистрируемом событии. Такое сопоставление связано, однако, с тем неудобством, известным нам из опыта, что оно не будет независимым от местонахождения наблюдателя, снабженного часами. Мы придем к гораздо более практическому определению путем следующих рассуждений.

Если в точке A пространства помещены часы, то наблюдатель, находящийся в A, может устанавливать время событий в непосредственной близости от A путем наблюдения одновременных с этими событиями положений стрелок часов. Если в другой точке B пространства также имеются часы (мы добавим: «точно такие же часы, как в точке A»), то в непосредственной близости от B тоже возможна временна́я оценка событий находящимся в B наблюдателем. Однако невозможно без дальнейших предположений сравнивать во времени какое-либо событие в A с событием в B; мы определили пока только «A-время» и «B-время», но не общее для A и B «время». Последнее можно установить, *вводя определение*, что «время», необходимое для прохождения света из A в B, равно «времени», требуемому для прохождения света из B в A. Пусть в момент t_A по «A-времени» луч света выходит из A в B, отражается в момент t_B по «B-времени» от B к A и возвращается назад в A в момент t'_A по «A-времени». Часы в A и B будут идти, согласно определению, синхронно, если

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Мы сделаем допущение, что это определение синхронности можно дать непротиворечивым образом и притом для сколь угодно многих точек и что, таким образом, справедливы следующие утверждения:

1) если часы в B идут синхронно с часами в A, то часы в A идут синхронно с часами в B;

2) если часы в A идут синхронно как с часами в B, так и с часами в C, то часы в B и C также идут синхронно относительно друг друга.

Таким образом, пользуясь некоторыми (мысленными) физическими экспериментами, мы установили, что́ нужно понимать под синхронно идущими, находящимися в различных местах покоящимися часами, и благодаря этому, очевидно, достигли определения понятий: «одновременность» и «время». «Время» события — это одновременное с событием показание покоящихся часов, которые находятся в месте события и которые идут синхронно с некоторыми определенными покоящимися часами, причем с одними и теми же часами при всех определениях времени.

Согласно опыту, мы положим также, что величина

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

есть универсальная константа (скорость света в пустоте).

Существенным является то, что мы определили время с помощью покоящихся часов в покоящейся системе; будем называть это время, принадлежащее к покоящейся системе, «временем покоящейся системы».

§ 2. Об относительности длин и промежутков времени

Дальнейшие соображения опираются на принцип относительности и на принцип постоянства скорости света. Мы формулируем оба принципа следующим образом.

1. Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, эти изменения состояния относятся.

2. Каждый луч света движется в «покоящейся» системе координат с определенной скоростью V, независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом.

При этом

$$\text{Скорость} = \frac{\text{Путь луча света}}{\text{Промежуток времени}},$$

причем «промежуток времени» следует понимать в смысле определения в § 1.

Пусть нам дан покоящийся твердый стержень, и пусть длина его, измеренная также покоящимся масштабом, есть l. Теперь представим себе, что стержню, ось которого направлена по оси X покоящейся координатной системы, сообщается равномерное и параллельное оси X поступательное движение (со скоростью v) в сторону возрастающих значений x. Поставим

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;*
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium" zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität" genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

Первая страница статьи А. Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел»

теперь вопрос о длине *движущегося* стержня, которую мы полагаем определенной с помощью следующих двух операций:

а) наблюдатель движется вместе с указанным масштабом и с измеряемым стержнем и измеряет длину стержня непосредственно путем прикладывания масштаба так же, как если бы измеряемый стержень, наблюдатель и масштаб находились в покое;

б) наблюдатель устанавливает с помощью расставленных в покоящейся системе синхронных, в смысле § 1, покоящихся часов, в каких точках покоящейся системы находятся начало и конец измеряемого стержня в определенный момент времени t. Расстояние между этими двумя точками, измеренное использованным выше, но уже покоящимся масштабом, есть длина, которую можно обозначить как «длину стержня».

Согласно принципу относительности, длина, определяемая операцией «а», которую мы будем называть «длиной стержня в движущейся системе», должна равняться длине l покоящегося стержня.

Длину, устанавливаемую операцией «б», которую мы будем называть «длиной (движущегося) стержня в покоящейся системе», мы определим, основываясь на наших двух принципах, и найдем, что она отлична от l.

В обычно применяемой кинематике принимается без оговорок, что длины, определенные посредством двух упомянутых операций, равны друг другу, или, иными словами, что движущееся твердое тело в момент времени t в геометрическом отношении вполне может быть заменено *тем же* телом, когда оно *покоится* в определенном положении.

Представим себе, что к обоим концам стержня (A и B) прикреплены часы, которые синхронны с часами покоящейся системы, т. е. показания их соответствуют «времени покоящейся системы» в тех местах, в которых эти часы как раз находятся; следовательно, эти часы «синхронны в покоящейся системе».

Представим себе далее, что у каждых часов находится движущийся с ними наблюдатель и что эти наблюдатели применяют к обоим часам установленный в § 1 критерий синхронности хода двух часов. Пусть в момент времени [2] t_A из A выходит луч света, отражается в B в момент времени t_B и возвращается назад в A в момент времени t'_A. Принимая во внимание принцип постоянства скорости света, находим

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \text{ и } t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

где r_{AB} — длина движущегося стержня, измеренная в покоящейся системе. Итак, наблюдатели, движущиеся вместе со стержнем, найдут, что

[2] Здесь «время» означает «время покоящейся системы» и вместе с тем «положение стрелки движущихся часов, которые находятся в том месте, о котором идет речь».

часы в точках A и B не идут синхронно, в то время как наблюдатели, находящиеся в покоящейся системе, объявили бы эти часы синхронными.

Итак, мы видим, что не следует придавать *абсолютного* значения понятию одновременности. Два события, одновременные при наблюдении из одной координатной системы, уже не воспринимаются как одновременные при рассмотрении из системы, движущейся относительно данной системы.

§ 3. Теория преобразования координат и времени от покоящейся системы к системе, равномерно и прямолинейно движущейся относительно первой

Пусть в «покоящемся» пространстве даны две координатные системы, каждая с тремя взаимно-перпендикулярными осями, выходящими из одной точки. Пусть оси X обеих систем совпадают, а оси Y и Z — соответственно параллельны. Пусть каждая система снабжена масштабом и некоторым числом часов, и пусть оба масштаба и все часы в обеих системах в точности одинаковы.

Пусть теперь началу координат одной из этих систем (k) сообщается (постоянная) скорость v в направлении возрастающих значений x другой, покоящейся системы (K); эта скорость передается также координатным осям, а также соответствующим масштабам и часам. Тогда каждому моменту времени t покоящейся системы (K) соответствует определенное положение осей движущейся системы, и мы из соображений симметрии вправе допустить, что движение системы k может быть таким, что оси движущейся системы в момент времени t (через t всегда будет обозначаться время покоящейся системы) будут параллельны осям покоящейся системы.

Представим себе теперь, что пространство размечено как в покоящейся системе K посредством покоящегося в ней масштаба, так и в движущейся системе k посредством движущегося с ней масштаба, и что, таким образом, получены координаты x, y, z и соответственно ξ, η, ζ. Пусть посредством покоящихся часов, находящихся в покоящейся системе, и с помощью световых сигналов указанным в § 1 способом определяется время t покоящейся системы для всех тех точек последней, в которых находятся часы. Пусть далее таким же образом определяется время τ движущейся системы для всех точек этой системы, в которых находятся покоящиеся относительно последней часы, указанным в § 1 способом световых сигналов между точками, в которых эти часы находятся.

Каждому набору значений x, y, z, t, которые полностью определяют место и время событий в покоящейся системе, соответствует набор значений ξ, η, ζ, τ, устанавливающий это событие в системе k, и теперь необходимо найти систему уравнений, связывающих эти величины.

Прежде всего ясно, что эти уравнения должны быть *линейными* в силу свойства однородности, которое мы приписываем пространству и времени.

Если мы положим $x' = x - vt$, то ясно, что точке, покоящейся в системе k, будет принадлежать определенный, независимый от времени набор значений x', y, z. Сначала мы определим τ как функцию от x', y, z, t. Для этой цели мы должны выразить с помощью некоторых соотношений, что τ по своему смыслу есть не что иное, как совокупность показаний покоящихся в системе k часов, которые в соответствии с изложенным в § 1 правилом идут синхронно.

Пусть из начала координат системы k в момент времени τ_0 посылается луч света вдоль оси X в точку x' и отражается оттуда в момент времени τ_1 назад, в начало координат, куда он приходит в момент времени τ_2; тогда должно существовать соотношение

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1,$$

или, выписывая аргументы функции τ и применяя принцип постоянства скорости света в покоящейся системе, имеем

$$\frac{1}{2}\left[\tau_0(0, 0, 0, t) + \tau_2\left(0, 0, 0, \left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right] =$$
$$= \tau_1\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

Если x' взять бесконечно малым, то отсюда следует:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

Необходимо заметить, что мы могли бы вместо начала координат выбрать всякую другую точку в качестве отправной точки луча света, и поэтому только что полученное уравнение справедливо для всех значений x', y, z.

Если принять во внимание, что свет вдоль осей Y и Z при наблюдении из покоящейся системы всегда распространяется со скоростью $\sqrt{V^2 - v^2}$, то аналогичное рассуждение, примененное к этим осям, дает

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

Так как τ — *линейная* функция, то из этих уравнений следует

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}\, x'\right),$$

где a — неизвестная пока функция $\varphi(v)$ и ради краткости принято, что в начале координат системы k при $\tau = 0$ также и $t = 0$.

Пользуясь этим результатом, легко найти величины ξ, η, ζ. С этой целью (как этого требует принцип постоянства скорости света в сочетании с принципом относительности) нужно с помощью уравнений выразить то обстоятельство, что свет при измерении в движущейся системе также распространяется со скоростью V. Для луча света, вышедшего в момент времени $\tau = 0$ в направлении возрастающих ξ, имеем

$$\xi = V\tau,$$

или

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}\, x'\right).$$

Но относительно начала координат системы k луч света при измерении, произведенном в покоящейся системе, движется со скоростью $V - v$, вследствие чего

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Подставив это значение t в уравнение для ξ, получим

$$\xi = a\,\frac{V^2}{V^2 - v^2}\, x'.$$

Рассматривая лучи, движущиеся вдоль двух других осей, находим

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}\, x'\right),$$

причем

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t, \qquad x' = 0;$$

следовательно,

$$\eta = a\,\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}\, y$$

и

$$\zeta = a\,\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}\, z.$$

Подставляя вместо x' его значение, получаем

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$
$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt),$$
$$\eta = \varphi(v)y,$$
$$\zeta = \varphi(v)z,$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}},$$

а φ — неизвестная пока функция от v.

Если не делать никаких предположений о начальном положении движущейся системы и о нулевой точке переменной τ, то к правым частям этих уравнений необходимо приписать по одной аддитивной постоянной.

Теперь мы должны показать, что каждый луч света — при измерении в движущейся системе — распространяется со скоростью V, если это утверждение, согласно нашему допущению, справедливо в покоящейся системе; мы еще не доказали, что принцип постоянства скорости света совместим с принципом относительности.

Пусть в момент времени $t = \tau = 0$ из общего в этот момент для обеих систем начала координат посылается сферическая волна, которая распространяется в системе K со скоростью V. Если (x, y, z) есть точка, в которую приходит эта волна, то мы имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2t^2.$$

Преобразуем это уравнение с помощью записанных выше формул преобразования; тогда получим

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2\tau^2.$$

Итак, рассматриваемая волна, наблюдаемая в движущейся системе, также является шаровой волной, распространяющейся со скоростью V. Тем самым доказано, что наши два основных принципа совместимы.

Выведенные формулы преобразования содержат неизвестную функцию φ от v, которую мы теперь определим.

Для этой цели вводим еще одну, третью координатную систему K', которая относительно системы k совершает поступательное движение параллельно оси Ξ таким образом, что ее начало координат движется со скоростью $-v$ по оси Ξ. Пусть в момент времени $t = 0$ все три начала координат совпадают, и пусть при $t = x = y = z = 0$ время t' в системе K' равно 0. Пусть x', y', z' суть координаты, измеренные в системе K'.

После двукратного применения наших формул преобразования получаем

$$t' = \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} = \varphi(v)\varphi(-v)t,$$

$$x' = \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} = \varphi(v)\varphi(-v)x,$$

$$y' = \varphi(-v)\eta \qquad\qquad = \varphi(v)\varphi(-v)y,$$

$$z' = \varphi(-v)\zeta \qquad\qquad = \varphi(v)\varphi(-v)z.$$

Так как соотношения между x', y', z' и x, y, z не содержат времени t, то системы K и K' находятся в покое относительно друг друга, и ясно, что преобразование из K в K' должно быть тождественным преобразованием. Следовательно,

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Выясним теперь физический смысл функции $\varphi(v)$. Для этого рассмотрим ту часть оси H системы k, которая лежит между точками $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ и $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Эта часть оси H представляет собой стержень, движущийся перпендикулярно своей оси со скоростью v относительно системы K. Концы этого стержня в системе K имеют следующие координаты:

$$x_1 = vt, \qquad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \qquad z_1 = 0$$

и

$$x_2 = vt, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0.$$

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе K, равна $l/\varphi(v)$; тем самым выяснен и физический смысл функции $\varphi(v)$. В самом деле, из соображений симметрии теперь ясно, что измеренная в покоящейся системе длина некоторого стержня, движущегося перпендикулярно своей оси, может зависеть только от величины скорости, но не от ее направления и знака. Следовательно, длина движущегося стержня, измеренная в покоящейся системе, не изменяется, если v заменить через $-v$. Отсюда следует:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

или

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Из этого и найденного ранее соотношений следует, что $\varphi(v) = 1$, так что найденные формулы преобразования переходят в следующие:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta(x - vt),$$
$$\eta = y, \quad \zeta = z,$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}}.$$

§ 4. Физический смысл полученных уравнений для движущихся твердых тел и движущихся часов

Рассмотрим твердый шар[1] радиуса R, находящийся в покое относительно движущейся системы k, причем центр шара совпадает с началом координат системы k. Уравнение поверхности этого шара, движущегося относительно системы K со скоростью v, имеет вид

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

Уравнение этой поверхности, выраженное через x, y, z, в момент времени $t = 0$ будет

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-(v/V)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Следовательно, твердое тело, которое в покоящемся состоянии имеет форму шара, в движущемся состоянии — при наблюдении из покоящейся системы — принимает форму эллипсоида вращения с полуосями

$$R\sqrt{1-(v/V)^2},\ R,\ R.$$

В то время как размеры шара (а следовательно, и всякого другого твердого тела любой формы) по осям Y и Z от движения не изменяются, размеры по оси X сокращаются в отношении $1 : \sqrt{1-(v/V)^2}$, и тем сильнее, чем больше v. При $v = V$ все движущиеся объекты, наблюдаемые из «покоящейся» системы, сплющиваются и превращаются в плоские фигуры. Для скоростей, превышающих скорость света, наши рассуждения теряют смысл; впрочем, из дальнейших рассуждений будет видно, что скорость света в нашей теории физически играет роль бесконечно большой скорости. Ясно, что те же результаты получаются для тел, находящихся в покое в «покоящейся» системе, но рассматриваемые из системы, которая равномерно движется.

Представим себе, далее, что часы, находясь в покое относительно покоящейся системы, показывают время t, а, находясь в покое относитель-

[1] Т. е. тело, которое в состоянии покоя имеет шаровую форму.

но движущейся системы, показывают время τ. Пусть они помещены в начале координат системы k. Как быстро идут эти часы при рассмотрении из покоящейся системы?

Величины x, t, τ, относящиеся к месту, в котором находятся эти часы, очевидно, связаны соотношениями

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

и

$$x = vt.$$

Таким образом,

$$\tau = t\sqrt{1-(v/V)^2} = t - \left(1-\sqrt{1-(v/V)^2}\,\right)t,$$

откуда следует, что показание часов (наблюдаемое из покоящейся системы) отстает в секунду на

$$\left(1-\sqrt{1-(v/V)^2}\right) \textit{сек},$$

или, с точностью до величин четвертого и высших порядков, на

$$\frac{1}{2}(v/V)^2 \textit{ сек}.$$

Отсюда вытекает своеобразное следствие. Если в точках A и B системы K помещены покоящиеся синхронно идущие часы, наблюдаемые в покоящейся системе, и если часы из точки A двигать по линии, соединяющей ее с B, в сторону последней со скоростью v, то по прибытии этих часов в B они уже не будут более идти синхронно с часами в B. Часы, передвигавшиеся из A в B, отстают по сравнению с часами, находящимися в B с самого начала, на $(1/2)\,t\,(v^2/V^2)$ *сек* (с точностью до величин четвертого и высших порядков), если t — время, в течение которого часы из A двигались в B. Сразу видно, что этот результат получается и тогда, когда часы движутся из A в B по любой ломаной линии, а также тогда, когда точки A и B совпадают.

Если принять, что результат, доказанный для ломаной линии, верен также для непрерывноменяющей свое направление кривой, то получаем следующую теорему.

Если в точке A находятся двое синхронно идущих часов и мы перемещаем одни из них по замкнутой кривой с постоянной скоростью до тех пор, пока они не вернутся в A (на что потребуется, скажем, t *сек*), то эти часы по прибытии в A будут отставать по сравнению с часами, остававшимися неподвижными, на

$$\frac{1}{2}\,t\,(v^2/V^2) \textit{ сек}.$$

Отсюда можно заключить, что часы с балансиром, находящиеся на земном экваторе, должны идти несколько медленнее, чем точно такие же часы, помещенные на полюсе, но в остальном поставленные в одинаковые условия.

§ 5. Теорема сложения скоростей

Пусть в системе k, движущейся со скоростью v вдоль оси X системы K, движется точка согласно уравнениям

$$\xi = w_\xi \tau, \qquad \eta = w_\eta \tau, \qquad \zeta = 0,$$

где w_ξ и w_η — постоянные.

Найдем движение точки относительно системы K. Если в уравнения движения точки с помощью выведенных в § 3 формул преобразования ввести величины x, y, z, t, то получим

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1-(v/V)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

Итак, закон параллелограмма скоростей в нашей теории верен только в первом приближении. Положим

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

и

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{w_y}{w_x};$$

тогда α надо рассматривать как угол между скоростями v и w. После простого вычисления получается

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}}.$$

Замечательно, что v и w входят симметрично в выражение для результирующей скорости. Если w тоже имеет направление оси X (оси Ξ), то формула для U принимает следующий вид:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Из этого уравнения следует, что результирующая скорость, получающаяся при сложении двух скоростей, которые меньше V, всегда меньше V. Положив $v = V - \varkappa$, $w = V - \lambda$, где $\varkappa$ и λ обе положительны и меньше V, имеем:

$$U = V \frac{2V - \varkappa - \lambda}{2V - \varkappa - \lambda + \frac{\varkappa\lambda}{V}} < V.$$

Далее следует, что скорость света V от сложения со скоростью, которая меньше скорости света, не может быть изменена. Для этого случая получается

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

В том случае, когда v и w имеют одинаковые направления, мы могли бы получить формулу для U также путем последовательного применения двух преобразований из § 3. Если мы наряду с системами K и k, фигурирующими в § 3, введем еще третью координатную систему k', движущуюся параллельно системе k вдоль оси Ξ со скоростью w, то получим уравнения, которые связывают величины x, y, z, t с соответствующими величинами системы k'. Они отличаются от найденных в § 3 только тем, что вместо v стоит величина

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Отсюда видно, что такие параллельные преобразования, как это и должно быть, образуют группу.

Таким образом, мы вывели необходимые нам положения кинематики, построенной в соответствии с нашими двумя принципами, и переходим теперь к тому, чтобы показать их применение в электродинамике.

II. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 6. Преобразование уравнений Максвелла — Герца для пустого пространства. О природе электродвижущих сил, возникающих при движении в магнитном поле

Пусть уравнения Максвелла — Герца справедливы для пустого пространства в покоящейся системе K; в таком случае имеем

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

где (X, Y, Z) — вектор напряженности электрического поля, (L, M, N) — вектор напряженности магнитного поля.

Если мы применим к этим уравнениям преобразование, которое было получено в § 3, и отнесем электромагнитные процессы к введенной там координатной системе, движущейся со скоростью v, то получим уравнения

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta}-\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial L}{\partial \zeta}-\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi}-\frac{\partial L}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi}-\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi}-\frac{\partial X}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial X}{\partial \eta}-\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi}.$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}}.$$

Принцип относительности требует, чтобы справедливые в системе K уравнения Максвелла — Герца для пустоты были бы также справедливы и в системе k; это значит, что для векторов напряженности электрического и магнитного полей $[(X', Y', Z')$ и $(L', M', N')]$, определенных в движущейся системе k через их пондеромоторные действия на электрические заряды, или, соответственно, магнитные массы, должны быть справедливы следующие уравнения:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial\tau} = \frac{\partial N'}{\partial\eta} - \frac{\partial M'}{\partial\zeta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial\tau} = \frac{\partial Y'}{\partial\zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial\eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial\tau} = \frac{\partial L'}{\partial\zeta} - \frac{\partial N'}{\partial\xi}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial\tau} = \frac{\partial Z'}{\partial\xi} - \frac{\partial X'}{\partial\zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial\tau} = \frac{\partial M'}{\partial\xi} - \frac{\partial L'}{\partial\eta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial\tau} = \frac{\partial X'}{\partial\eta} - \frac{\partial Y'}{\partial\xi}.$$

Обе системы уравнений, найденные для системы k, очевидно, должны выражать в точности одно и то же, так как обе системы уравнений эквивалентны уравнениям Максвелла — Герца для системы K. Далее, так как уравнения обеих систем совпадают друг с другом во всем за исключением символов, изображающих векторы, то отсюда следует, что функции, стоящие в соответствующих местах обеих систем уравнений, должны быть равны между собой с точностью до множителя $\psi(v)$, общего для всех функций, который не зависит от ξ, η, ζ, τ, но может, вообще говоря, зависеть от v. Итак,

$$X' = \psi(v)\,X, \qquad L' = \psi(v)\,L,$$

$$Y' = \psi(v)\,\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \qquad M' = \psi(v)\,\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$

$$Z' = \psi(v)\,\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \qquad N' = \psi(v)\,\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

Если обратить эту систему уравнений, во-первых, путем непосредственного решения и, во-вторых, с помощью обратного преобразования (из k в K), которое характеризуется скоростью $-v$, и принять во внимание, что обе получившиеся системы должны быть тождественны, то

$$\psi(v)\,\psi(-v) = 1.$$

Далее из соображений симметрии следует [1]

$$\psi(v) = \psi(-v);$$

таким образом,

$$\psi(v) = 1$$

и наши уравнения принимают следующий вид:

$$X' = X, \qquad L' = L,$$

$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right), \qquad M' = \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right),$$

$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right), \qquad N' = \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right).$$

Для интерпретации этих уравнений заметим следующее. Пусть имеется точечный заряд, который при измерении в покоящейся системе K равен «единице», т. е., покоясь относительно покоящейся системы, он на расстоянии 1 *см* действует с силой в 1 *дину* на такое же количество электричества. Согласно принципу относительности, этот электрический заряд при измерении в движущейся системе тоже равен «единице». Если это количество электричества находится в покое относительно покоящейся системы, то вектор (X, Y, Z), согласно определению, равен силе, действующей на упомянутый заряд. Если же заряд находится в покое относительно движущейся системы (по крайней мере в соответствующий момент времени), то сила, действующая на него и измеренная в движущейся системе, равна вектору (X', Y', Z'). Следовательно, первые три из написанных выше уравнений можно сформулировать следующими двумя способами.

1. Если в электромагнитном поле движется единичный точечный заряд, то на него, кроме электрического поля, действует еще «электромоторная сила», которая при условии пренебрежения членами, пропорциональными второй и более высоким степеням v/V, равна деленному на скорость света векторному произведению скорости движения единичного заряда на напряженность магнитного поля. (Старая формулировка.)

2. Если единичный точечный заряд движется в электромагнитном поле, то действующая на него сила равна напряженности электрического поля в месте нахождения этого заряда, получающейся в результате преобразования поля к координатной системе, покоящейся относительно этого заряда. (Новая формулировка.)

---

[1] Если, например, $X = Y = Z = L = M = 0$ и $N \neq 0$, то из соображений симметрии ясно, что, когда v меняет знак без изменения своего численного значения, Y' должно изменить свой знак также без изменения своего численного значения.

Аналогичные положения справедливы для «магнитомоторных сил». Мы видим, что в изложенной теории электромоторная сила играет роль вспомогательного понятия, которое своим введением обязано тому обстоятельству, что электрические и магнитные поля не существуют независимо от состояния движения координатной системы. Ясно, что асимметрия, упомянутая в введении при рассмотрении токов, возникающих вследствие относительного движения магнита и проводника, исчезает. Вопросы о том, где «сидят» электродинамические силы (униполярные машины), также теряют смысл.

§ 7. Теория аберрации и эффекта Допплера

Пусть в системе K очень далеко от начала координат находится некоторый источник электродинамических волн, которые в некоторой части пространства, включающей начало координат, могут быть с достаточной степенью точности представлены уравнениями

$$X = X_0 \sin \Phi, \qquad L = L_0 \sin \Phi,$$
$$Y = Y_0 \sin \Phi, \qquad M = M_0 \sin \Phi,$$
$$Z = Z_0 \sin \Phi, \qquad N = N_0 \sin \Phi,$$
$$\Phi = \omega\left(t - \frac{ax + by + cz}{V}\right).$$

Здесь (X_0, Y_0, Z_0) и (L_0, M_0, N_0) представляют собой векторы, определяющие амплитуду цуга волн; a, b, c — направляющие косинусы нормали к фронту волны.

Выясним теперь, каковы свойства этих волн, когда они исследуются наблюдателем, находящимся в покое относительно движущейся системы k. Применив найденные в § 6 формулы преобразования напряженностей электрического и магнитного полей, а также полученные в § 3 формулы преобразования координат и времени, получаем:

$$X' = X_0 \sin \Phi', \qquad L' = L_0 \sin \Phi',$$
$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0\right) \sin \Phi', \qquad M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0\right) \sin \Phi',$$
$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0\right) \sin \Phi', \qquad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0\right) \sin \Phi',$$
$$\Phi' = \omega\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right),$$

где

$$\omega' = \omega\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}.$$

Возьмем наблюдателя, движущегося со скоростью v относительно бесконечно удаленного источника света, частота которого равна ν. Из уравнения для ω' вытекает, что если угол между линией, соединяющей источник света с наблюдателем, и скоростью наблюдателя, отнесенной к координатной системе (покоящейся относительно источника света), равен φ, то воспринимаемая наблюдателем частота ν' света дается следующей формулой:

$$\nu' = \nu\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - (v/V)^2}}.$$

Это и есть принцип Допплера для любых скоростей. При $\varphi = 0$ формула принимает более простой вид

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Мы видим, что, в противоположность обычному представлению, при $v = -\infty$ частота $\nu = \infty$.

Если обозначить через φ' угол между нормалью к фронту волны (направлением луча) и линией, соединяющей источник света с наблюдателем, то формула для φ' примет вид

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Эта формула выражает закон аберрации в его наиболее общей форме. Если $\varphi = \pi/2$, то формула принимает простой вид

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Мы должны теперь найти значение амплитуды волн, воспринимаемых наблюдателем в движущейся системе. Обозначив соответственно через A и A' амплитуды напряженностей электрического или магнитного полей, измеренные в покоящейся и в движущейся системах, получим

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right)}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Это соотношение при $\varphi = 0$ переходит в более простое

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Из выведенных уравнений следует, что наблюдателю, который будет приближаться со скоростью V к некоторому источнику света, последний будет казаться бесконечно интенсивным.

§ 8. Преобразование энергии лучей света. Теория давления, производимого светом на идеальное зеркало

Так как $A^2/8\pi$ равняется энергии света в единице объема, то на основании принципа относительности величину $A'^2/8\pi$ мы должны рассматривать как энергию света в движущейся системе. Поэтому величина A'^2/A^2 была бы отношением энергии определенного светового комплекса, «измеренной в движении», к энергии того же комплекса, «измеренной в покое», если бы объем светового комплекса оставался бы одним и тем же при измерении в системах k и K. Однако это не так. Если a, b, c представляют собой направляющие косинусы нормалей к фронту световой волны в покоящейся системе, то через элементы поверхности сферы

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2,$$

движущейся со скоростью света, не проходит никакая энергия; поэтому мы можем утверждать, что эта поверхность все время ограничивает собой один и тот же световой комплекс. Выясним, какое количество энергии заключено внутри этой поверхности, если наблюдение ведется в системе k, т. е. какова будет энергия этого светового комплекса относительно системы k.

Сферическая поверхность, рассматриваемая в движущейся системе, представляет собой поверхность эллипсоида, уравнение которого в момент времени $\tau = 0$ будет

$$\left(\beta\xi - a\beta \frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2.$$

Если через S обозначить объем шара, а через S' объем этого эллипсоида, то, как показывает простое вычисление, должно выполняться соотношение

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1-(v/V)^2}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Обозначая через E энергию света, заключенную внутри рассматриваемой поверхности и измеренную в покоящейся системе, а через E' ту же энергию, измеренную в движущейся системе, получаем

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}S'}{\frac{A^2}{8\pi}S} = \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(v/V)^2}}.$$

Эта формула при $\varphi = 0$ переходит в более простую

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}}}.$$

Замечательно то, что и энергия, и частота светового комплекса с изменением состояния движения наблюдателя меняются по одному и тому же закону.

Пусть теперь координатная плоскость $\xi = 0$ представляет собой идеальную зеркальную поверхность, от которой отражаются плоские волны, рассмотренные в предыдущем параграфе. Выясним, чему равно световое давление, производимое на зеркальную поверхность, и каковы направление, частота и интенсивность света после отражения.

Пусть падающий свет характеризуется величинами A, $\cos\varphi$, ν (отнесенными к системе K). При наблюдении из системы k для соответствующих величин имеем

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V} \cos\varphi}{\sqrt{1-(v/V)^2}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi},$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(v/V)^2}}.$$

Если мы отнесем этот процесс к системе k, то для отраженного света получим

$$A'' = A',$$

$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi',$$

$$\nu'' = \nu'.$$

Наконец, производя обратное преобразование к системе K, получаем для отраженного света

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-(v/V)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left[1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right]\cos\varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-(v/V)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}.$$

Энергия, падающая на единицу поверхности зеркала в единицу времени (измеренная в покоящейся системе), очевидно, равняется

$$\frac{A^2}{8\pi}(V\cos\varphi - v).$$

Энергия, уходящая с единицы поверхности зеркала в единицу времени, составляет

$$\frac{A'''^2}{8\pi}(-V\cos\varphi''' + v).$$

Разность между этими двумя выражениями, согласно принципу сохранения энергии, равна работе, произведенной световым давлением в единицу времени. Приравнивая работу произведению Pv, где P — световое давление, получаем:

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Отсюда в первом приближении получаем в согласии с опытом и с другими теориями

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi.$$

Примененным здесь методом могут быть решены все задачи оптики движущихся тел. Существо дела заключается в том, что электрическое и магнитное поля в световой волне, подвергающейся воздействию со стороны движущегося тела, преобразуются к координатной системе, покоящейся относительно этого тела. Благодаря этому каждая задача оптики движущихся тел сводится к задачам оптики покоящихся тел.

§ 9. Преобразование уравнений Максвелла — Герца с учетом конвекционных токов

Мы исходим из уравнений:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\rho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\rho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\rho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

где

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

означает умноженную на 4π плотность электрического заряда, а (u_x, u_y, u_z) — вектор скорости электрического заряда. Если представить себе, что заряды неизменно связаны с очень малыми твердыми телами (ионы, электроны), то эти уравнения являются основой электродинамики Лоренца и оптики движущихся тел.

Если преобразовать эти уравнения, которые справедливы в системе K, с помощью формул преобразования из §§ 3 и 6 к системе k, то получаются следующие уравнения:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\rho' + \frac{\partial X'}{\partial\tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial\eta} - \frac{\partial M}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial L'}{\partial\tau} = \frac{\partial Y'}{\partial\zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial\eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\rho' + \frac{\partial Y'}{\partial\tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial\zeta} - \frac{\partial N'}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial M'}{\partial\tau} = \frac{\partial Z'}{\partial\xi} - \frac{\partial X'}{\partial\zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\rho' + \frac{\partial Z'}{\partial\tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial\xi} - \frac{\partial L'}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial N'}{\partial\tau} = \frac{\partial X'}{\partial\eta} - \frac{\partial Y'}{\partial\xi},$$

где

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta, \qquad \rho' = \frac{\partial X'}{\partial\xi} + \frac{\partial Y'}{\partial\eta} + \frac{\partial Z'}{\partial\zeta} = \beta\cdot\left(1 - \frac{v u_x}{V^2}\right)\rho,$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V}\right)} = u_\zeta.$$

Таким образом, как это и следует из теоремы сложения скоростей (§ 5), вектор (u_ξ, u_η, u_ζ) есть не что иное, как скорость электрических зарядов, измеренная в системе k. Тем самым показано, что электродинамическая основа лоренцовской электродинамики движущихся тел подчиняется принципу относительности, если исходить из наших кинематических принципов.

Отметим еще кратко, что из доказанных уравнений легко может быть выведена следующая важная теорема: если электрически заряженное тело движется в пространстве произвольно и если его заряд, наблюдаемый из координатной системы, движущейся вместе с этим телом, при этом не изменяется, то этот заряд остается неизменным и при наблюдении из «покоящейся» системы K.

§ 10. Динамика (слабо ускоренного) электрона

Пусть в электромагнитном поле движется точечная частица с электрическим зарядом ε (в дальнейшем называемая «электроном»), о законе движения которой мы будем предполагать только следующее.

Если электрон находится в покое в течение определенного промежутка времени, то в ближайший за ним элемент времени движение электрона, поскольку оно является медленным, будет описываться уравнениями:

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X,$$

$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Y,$$

$$\mu \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon Z,$$

где x, y, z — координаты электрона, а μ — масса электрона.

Далее, пусть электрон в течение определенного промежутка времени обладает скоростью v. Найдем закон, согласно которому электрон движется в непосредственно следующий за этим промежутком элемент времени.

Не ограничивая общности рассуждений, мы можем допустить и допустим на самом деле, что в тот момент, когда мы начинаем наблюдение, наш электрон находится в начале координат и движется вдоль оси X системы K со скоростью v. В таком случае ясно, что в указанный момент времени ($t = 0$) электрон находится в покое относительно координатной системы k, движущейся параллельно оси X с постоянной скоростью v.

Из сделанного выше предположения в сочетании с принципом относительности следует, что уравнения движения электрона, наблюдаемого из системы k в течение времени, непосредственно следующего за $t = 0$ (при малых значениях t), имеют вид:

$$\mu \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \varepsilon X',$$

$$\mu \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z',$$

где обозначенные через ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' величины относятся к системе k. Если к тому же положить, что при $t = x = y = z = 0$ должны быть

$\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, то будут справедливы формулы преобразования из § 3 и 6 и, следовательно, будут выполняться следующие уравнения:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta(x - vt), \qquad X' = X,$$

$$\eta = y, \qquad Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right),$$

$$\zeta = z, \qquad Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right).$$

С помощью этих уравнений преобразуем написанные выше уравнения движения от системы k к системе K и получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta^3}X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Z + \frac{v}{V}M\right). \end{aligned}\right\}(A)$$

Опираясь на обычный прием рассуждений, определим теперь «продольную» и «поперечную» массы движущегося электрона. Запишем уравнения (А) в следующем виде:

$$\mu\beta^3\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X = \varepsilon X',$$

$$\mu\beta^2\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y',$$

$$\mu\beta^2\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z'.$$

При этом заметим прежде всего, что $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ являются компонентами пондеромоторной силы, действующей на электрон, причем эти компоненты рассматриваются в координатной системе, которая в данный момент движется вместе с электроном с такой же, как у электрона, скоростью. (Эта сила могла бы быть измерена, например, пружинными весами, покоящимися в этой системе.) Если теперь эту силу будем называть просто «силой, действующей на электрон», и сохраним уравнение (для численных значений)

Масса $\times$ Ускорение $=$ Сила,

и если мы далее установим, что ускорения должны измеряться в покоящейся системе K, то из указанных выше уравнений получим:

$$\text{Продольная масса} = \frac{\mu}{(\sqrt{1-(v/V)^2})^3},$$

$$\text{Поперечная масса} = \frac{\mu}{1-(v/V)^2}.$$

Конечно, мы будем получать другие значения для масс при другом определении силы и ускорения; отсюда видно, что при сравнении различных теорий движения электрона нужно быть весьма осторожным. Заметим, что эти результаты относительно массы справедливы также и для нейтральных материальных точек, ибо такая материальная точка может быть путем присоединения *сколь угодно малого* электрического заряда превращена в электрон (в нашем смысле).

Определим кинетическую энергию электрона. Если электрон из начала координат системы K с начальной скоростью 0 движется все время вдоль оси X под действием электростатической силы X, то ясно, что взятая у электростатического поля энергия будет равна $\int \varepsilon X dx$. Так как электрон ускоряется медленно и вследствие этого не должен отдавать энергию в форме излучения, то энергия, взятая у электростатического поля, должна быть положена равной энергии движения W электрона. Принимая во внимание, что в течение всего рассматриваемого процесса движения справедливо первое из уравнений (A), получаем:

$$W = \int \varepsilon X\, dx = \int_0^v \beta^3 \mu v\, dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1 \right\}.$$

При $v = V$ величина W становится, таким образом, бесконечно большой. Как в прежних результатах, так и здесь, скорости, превышающие скорость света, существовать не могут. Это выражение для кинетической энергии должно быть справедливым и для любых масс в силу приведенного выше аргумента.

Перечислим теперь все вытекающие из системы уравнений (A) свойства движения электрона, допускающие опытную проверку.

1. Из второго уравнения системы (A) следует, что электрическое поле Y и магнитное поле N одинаково сильно отклоняют электрон, движущийся со скоростью v, в том случае, когда $Y = N \frac{v}{V}$. Отсюда видно, что, согласно нашей теории, для любых скоростей можно определить скорость электрона из отношения отклонения магнитным полем A_m к от-

клонению электрическим полем A_e, если применить закон:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Это соотношение поддается экспериментальной проверке, так как скорость электрона может быть измерена также и непосредственно, например, при помощи быстро переменных электрических и магнитных полей.

2. Из формулы для кинетической энергии электрона следует, что между пройденной разностью потенциалов P и достигнутой скоростью v электрона должно существовать следующее соотношение:

$$P = \int X\,dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Вычислим радиус кривизны R орбиты, когда имеется перпендикулярное скорости электрона магнитное поле напряженностью N (как единственная отклоняющая сила).

Из второго уравнения (A) получаем

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{v}{V}\,N\sqrt{1-(v/V)^2},$$

или

$$R = V^2\,\frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1-(v/V)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Эти три соотношения являются полным выражением законов, по которым, согласно предложенной теории, должны двигаться электроны.

В заключение отмечу, что мой друг и коллега М. Бессо явился верным помощником при разработке изложенных здесь проблем и что я обязан ему за ряд ценных указаний.

Поступила 30 июня 1905 г.

Это первая (и основная) работа Эйнштейна по теории относительности. До этой статьи Эйнштейном в 1901—1905 гг. были опубликованы восемь работ по молекулярной физике и теории света (они будут помещены в третьем томе). Статья включена в сборник 1913 года (H. A. L o r e n t z. Das Relativitätsprinzip, eine Sammlung von Abhandlungen. Leipzig, Teubner, 1913). Сборник несколько раз переиздавался и переводился на английский и французский языки. Английский перевод сборника был издан в Англии (H. A. L o r e n t z. The Principle of Relativity, a collection of original memories. London, Methuen, 1923), а также в Индии (The principle of Relativity. Original papers, by A. Einstein and H. Minkowski, Calcutta, 1920).

Французский перевод статьи (перевод М. Соловина) издан в 1925 г. (Paris, Gauthier). Русский перевод был опубликован под редакцией В. К. Фредерикса и Д. Д. Иваненко в 1936 г. (Принцип относительности. Г. А. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн и Г. Минковский. ОНТИ, 1935).

ЗАВИСИТ ЛИ ИНЕРЦИЯ ТЕЛА ОТ СОДЕРЖАЩЕЙСЯ В НЕМ ЭНЕРГИИ?*

Результаты ранее опубликованного исследования [1] приводят нас к очень интересному следствию, вывод которого будет дан в этой статье.

В предыдущем исследовании я исходил, кроме уравнений Максвелла — Герца для пустоты и формулы Максвелла для электромагнитной энергии пространства, еще из следующего принципа.

Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из двух координатных систем, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга, отнесены эти изменения состояния (принцип относительности). Исходя из этого [2], я, в частности, пришел к следующему результату (см. § 8 цитированной выше работы).

Пусть система плоских волн света, отнесенная к координатной системе (x, y, z), обладает энергией l и пусть направление луча (нормаль к фронту волны) образует угол φ с осью x системы. Если ввести новую координатную систему (ξ, η, ζ), движущуюся равномерно и прямолинейно относительно системы (x, y, z), и если начало координат первой системы движется со скоростью v вдоль оси x, то упомянутая энергия света, измеренная в системе (ξ, η, ζ), будет

$$l^* = l\,\frac{1 - \dfrac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(v/V)^2}},$$

где V — скорость света. В дальнейшем мы воспользуемся этим результатом.

---

* *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* Ann. Phys., 1905, 18, 639—641.

[1] Ann. Phys., 1905, 17, 891. (Статья 1).

[2] Использованный там принцип постоянства скорости света содержится, конечно, в уравнениях Максвелла.

Пусть в системе (x, y, z) находится покоящееся тело, энергия которого, отнесенная к системе (x, y, z), равна E_0. Энергия же этого тела, отнесенная к системе (ξ, η, ζ), движущейся, как выше, со скоростью v, пусть равна H_0.

Пусть это тело посылает в направлении, составляющем угол φ с осью x, плоскую световую волну с энергией $L/2$ [измеренной относительно системы (x, y, z)] и одновременно посылает такое же количество света в противоположном направлении. При этом тело остается в покое относительно системы (x, y, z). Для этого процесса должен выполняться закон сохранения энергии и притом (согласно принципу относительности) по отношению к обеим координатным системам. Если мы обозначим через E_1 энергию тела после излучения света при измерении ее относительно системы (x, y, z) и соответственно через H_1 энергию относительно системы (ξ, η, ζ), то, пользуясь полученным выше соотношением, находим

$$E_0 = E_1 + \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right),$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2}\,\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(v/V)^2}} + \frac{L}{2}\,\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(v/V)^2}}\right] = H_1 + \frac{L}{\sqrt{1-(v/V)^2}}.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1\right\}.$$

В этом соотношении обе разности вида $H - E$ имеют простой физический смысл. Величины H и E представляют собой значения энергии одного и того же тела, отнесенные к двум координатным системам, движущимся относительно друг друга, причем тело покоится в одной из систем [в системе (x, y, z)].

Таким образом, ясно, что разность $H - E$ может отличаться от кинетической энергии K тела, взятой относительно другой системы [системы (ξ, η, ζ)], только на некоторую аддитивную постоянную C, которая зависит от выбора произвольных аддитивных постоянных в выражениях для энергий H и E. Следовательно, мы можем положить

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$

$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

так как постоянная C при испускании света не изменяется.

Таким образом, получаем

$$K_0 - K_1 = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1\right\}.$$

Кинетическая энергия тела относительно системы (ξ, η, ζ) уменьшается при испускании света на величину, не зависящую от природы тела. Кроме того, разность $K_0 - K_1$ зависит от скорости точно так же, как кинетическая энергия электрона (см. § 10 цитированной выше работы).

Пренебрегая величинами четвертого и более высоких порядков, можно получить

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2}\cdot\frac{v^2}{2}.$$

Из этого уравнения непосредственно следует, что если тело отдает энергию L в виде излучения, то его масса уменьшается на L/V^2. При этом, очевидно, несущественно, что энергия, взятая у тела, прямо переходит в лучистую энергию излучения, так что мы приходим к более общему выводу.

Масса тела есть мера содержащейся в нем энергии; если энергия изменяется на величину L, то масса меняется соответственно на величину $L/(9\cdot 10^{20})$, причем здесь энергия измеряется в эргах, а масса—в граммах.

Не исключена возможность того, что теорию удастся проверить для веществ, энергия которых меняется в большей степени (например для солей радия).

Если теория соответствует фактам, то излучение переносит инерцию между излучающими и поглощающими телами.

Поступила 27 сентября 1905 г.

В этой работе впервые сформулирована связь между массой и энергией. К выводу знаменитой формулы $E = mc^2$ (в современных обозначениях) Эйнштейн возвращается еще несколько раз (статья 3, статьи 112 и 131, том II).

3

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ И ИНЕРЦИЯ ЭНЕРГИИ*

В спубликованной в прошлом году работе [1] мы показали, что электромагнитные уравнения Максвелла вместе с принципом относительности и законом сохранения энергии приводят к выводу, что масса тела меняется при изменении его энергии, каков бы ни был характер этих изменений. Мы показали, что изменение энергии на величину ΔE должно соответствовать эквивалентному изменению массы на величину $\Delta E/V^2$, где V — скорость света.

В настоящей работе мы покажем, что это утверждение является необходимым и достаточным условием того, чтобы выполнялся, по крайней мере в первом приближении, закон сохранения движения центра тяжести системы, в которой, кроме механических, происходят также и электромагнитные процессы. Несмотря на то что простое формальное рассмотрение, которое должно быть проведено для доказательства этого утверждения, в основном содержится в работе А. Пуанкаре [2], мы из соображений наглядности не будем основываться на этой работе.

§ 1. Частный случай

Пусть в пространстве имеется совершенно произвольный покоящийся твердый полый цилиндр K (рис. 1). В точке A находится устройство, посылающее в полость к точке B определенное количество S лучистой энергии. В процессе излучения на левую внутреннюю стенку полого цилиндра K действует световое давление; при этом цилиндр движется влево с некоторой скоростью. Если полый цилиндр обладает массой M,

---

* *Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie*. Ann. Phys., 1906, **20**, 627—633.

[1] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, **18**, 639. (Статья 2).

[2] H. Poincaré. Lorentz-Festschrift, 1900, 252.

то эта скорость, как легко показать, пользуясь законом светового давления, равна $\frac{1}{V}\frac{S}{M}$, причем V означает скорость света. Эту скорость цилиндр K имеет до тех пор, пока порция света, размеры которой много меньше полости цилиндра K, не поглотится в точке B. Продолжительность движения полого цилиндра (с точностью до членов выше первого порядка) равна a/V, где a — расстояние между точками A и B. После поглощения порции света в точке B тело K снова переходит в состояние покоя. В результате такого процесса цилиндр передвинется влево на отрезок

$$\delta = \frac{1}{V}\frac{S}{M}\cdot\frac{a}{V}.$$

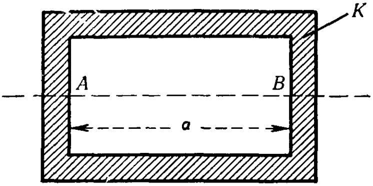

Рис. 1.

Пусть в полости цилиндра K находится, для простоты, невесомое воображаемое тело k вместе с некоторым также невесомым механизмом, который передвигает между точками B и A тело k, находящееся сначала в точке B. После того как точка B получит количество излучения S, эта энергия передается телу k, которое затем переносится в точку A. В конце концов, в точке A количество энергии S снова получит полый цилиндр K, а тело k снова возвратится в точку B. В результате вся система совершит полный круговой процесс, который можно представить себе повторяющимся сколь угодно долго.

Если предположить, что передаточное тело k невесомо и в том случае, когда оно получило количество энергии S, то следует предположить, что передачу количества энергии S в обратном направлении нельзя связать с изменением положения полого цилиндра K. Результатом всего описанного процесса является лишь сдвиг δ всей системы влево, и этот сдвиг можно увеличивать сколь угодно повторением данного кругового процесса. Следовательно, наш результат заключается в том, что первоначально покоящаяся система без воздействия на нее внешних сил может менять положение своего центра тяжести как угодно часто, и при этом без того, чтобы сама система испытывала длительные изменения. Ясно, что полученный результат не содержит внутреннего противоречия, но он противоречит основным законам механики, согласно которым первоначально покоящееся тело, на которое не действуют другие тела, не может перемещаться.

Однако, если принять во внимание, что каждой энергии E соответствует инерция E/V^2, то противоречие с законами механики исчезает. Согласно этому предположению, передвигающееся тело обладает массой

E/V^2 при передаче количества энергии S из точки B в точку A; так как центр тяжести *всей системы* при этом должен находиться в состоянии покоя, то полый цилиндр K в целом передвигается вправо на величину

$$\delta' = \alpha \frac{S}{V^2} \cdot \frac{1}{M}.$$

Сравнение с приведенным выше результатом показывает, что, по крайней мере в первом приближении, $\delta = \delta'$; следовательно, положение системы до и после описанного кругового процесса остается тем же самым. Таким образом, противоречие с основами механики устраняется.

§ 2. О законе сохранения движения центра тяжести

Рассмотрим систему n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и координатами $x_1, \ldots, z_n$. Эти материальные точки в термодинамическом и электрическом отношениях не являются элементарными объектами (атом, молекула) и должны рассматриваться как тела незначительных размеров в обычном смысле, энергия которых не определяется скоростью центра тяжести. Эти массы могут воздействовать друг на друга как электромагнитным образом, так и посредством консервативных сил (например сила тяжести, упругие связи). Тем не менее мы будем предполагать, что как потенциальную энергию консервативных сил, так и кинетическую энергию движения центра тяжести всегда следует рассматривать бесконечно малыми относительно «внутренней» энергии масс $m_1, \ldots, m_n$.

Во всем пространстве можно считать справедливыми уравнения Максвелла — Лоренца

$$\left.\begin{aligned}
\frac{u}{V}\rho + \frac{1}{V}\frac{dX}{dt} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\\
\frac{v}{V}\rho + \frac{1}{V}\frac{dY}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V}\frac{dM}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\\
\frac{w}{V}\rho + \frac{1}{V}\frac{\partial Z}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V}\frac{dN}{dt} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

причем

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

означает умноженную на 4π плотность электрического заряда.

Если уравнения (1), умноженные соответственно на

$$\frac{V}{4\pi} Xx, \ \frac{V}{4\pi} Yx, \ldots, \ \frac{V}{4\pi} Nx,$$

сложить и проинтегрировать по всему пространству, то после нескольких интегрирований по частям получим

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\rho}{4\pi} x(uX + vY + wZ)\,d\tau + \frac{d}{dt}\left\{\int x\cdot\frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + \ldots + N^2)\,d\tau\right\} - \\ - \frac{V}{8\pi}\int (YN - ZM)\,d\tau = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Первый член этого соотношения представляет собой энергию электромагнитного поля тел $m_1, \ldots, m_n$. Так как, согласно нашей гипотезе о зависимости массы от энергии, необходимо первый член суммы приравнять выражению

$$V^2 \sum x_\nu \frac{dm_\nu}{dt},$$

то в соответствии с изложенным выше примем, что энергия и, следовательно, масса отдельной материальной точки m_ν изменяется *только* при поглощении электромагнитной энергии.

Если далее мы припишем электромагнитному полю плотность массы (ρ_e), которая отличается от плотности энергии множителем $\frac{1}{V^2}$, то второй член соотношения (2) примет вид

$$V^2 \frac{d}{dt}\left\{\int x\rho_e\,d\tau\right\}.$$

Если через J обозначить интеграл, входящий в третий член соотношения (2), то последнее можно записать в форме

$$\sum\left(x_\nu \frac{dm_\nu}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left\{\int x\rho_e\,d\tau\right\} - \frac{1}{4\pi V} J = 0. \qquad (2а)$$

Мы должны теперь выяснить физический смысл интеграла J. Умножая второе, третье, пятое и шестое уравнения (1) соответственно на NV, $-MV$, $-ZV$, YV, складывая и интегрируя по пространству, после некоторых интегрирований по частям получаем

$$\frac{dJ}{dt} = -4\pi V \int \frac{\rho}{4\pi}\left(X + \frac{v}{V} N - \frac{w}{V} M\right) d\tau = -4\pi V R_x, \qquad (3)$$

где R_x — алгебраическая сумма x-компонент всех сил, с которыми электромагнитное поле действует на массы $m_1, \ldots, m_n$. Так как соответствующая сумма всех сил, обусловленных консервативными взаимодействиями, обращается в нуль, то величина R_x является одновременно суммой x-компонент *всех* сил, действующих на массы m_ν.

Теперь нам следует заняться уравнением (3), которое не связано с гипотезой зависимости массы от энергии. Если сначала не обращать внимания на зависимость массы от энергии и обозначить через $\mathfrak{X}_\nu$ равнодействующую x-компонент всех сил, действующих на массу m_ν, то для массы m_ν мы получим уравнение движения

$$m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right\} = \mathfrak{X}_\nu, \tag{4}$$

а также

$$\frac{d}{dt}\sum\left(m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right) = \sum \mathfrak{X}_\nu = R_x. \tag{5}$$

Из уравнений (5) и (3) имеем

$$\frac{J}{4\pi V} + \sum m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} = \text{const}. \tag{6}$$

Снова вводя гипотезу о зависимости массы m_ν от энергии, а следовательно, и от времени мы сталкиваемся с той трудностью, что для этого случая уравнения механики больше неизвестны; первое равенство в соотношении (4) теперь уже не выполняется. Тем не менее нужно принять во внимание, что разность

$$\frac{d}{dt}\left\{m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right\} - m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = \frac{dm_\nu}{dt}\,\frac{dx_\nu}{dt} = \frac{1}{V^2}\int \frac{\rho}{4\pi}\,\frac{dx_\nu}{dt}\,(uX + vY + wZ)\,d\tau$$

пропорциональна второй степени скорости. Поэтому, если все скорости так малы, что можно пренебречь членами второй степени, то при изменении массы m_ν уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right) = \mathfrak{X}_\nu$$

остается справедливым с принимаемой во внимание точностью. Тогда будут справедливы также уравнения (5) и (6), а из уравнений (6) и (2а) получим

$$\frac{d}{dt}\left[\sum (m_\nu x_\nu) + \int x\rho_e\,d\tau\right] = \text{const}. \tag{2б}$$

Обозначая через ξ x-координату центра тяжести весомых масс и массы электромагнитного поля, имеем

$$\xi = \frac{\sum (m_\nu x_\nu) + \int x\rho_e d\tau}{\sum m_\nu + \int \rho_e d\tau},$$

причем в соответствии с законом сохранения энергии знаменатель правой части этого равенства не зависит от времени[3]. Поэтому уравнение (2б) мы можем записать также в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \text{const}. \tag{2в}$$

Итак, если каждой энергии E приписать инертную массу E/V^2, то по крайней мере в первом приближении закон сохранения движения центра тяжести будет справедлив также и для систем, в которых происходят электромагнитные процессы.

Из предыдущего исследования следует, что нужно либо отказаться от основного положения механики, согласно которому первоначально покоящееся тело, не подвергающееся воздействиям внешних сил, не может прийти в состояние поступательного движения, либо принять, что инерция тела зависит указанным образом от содержащейся в нем энергии.

Поступила 17 мая 1906 г.

---

[3] С точки зрения положений, развитых в настоящей работе, закон сохранения массы является частным случаем закона сохранения энергии.

О МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОПЕРЕЧНОЙ И ПРОДОЛЬНОЙ МАССАМИ ЭЛЕКТРОНА*

У катодных лучей имеются характеристики, доступные точному наблюдению, а именно: напряжение, благодаря которому лучи приобретают свою скорость, электростатическое и магнитное отклонения. Эти три величины связаны между собой двумя независимыми соотношениями, знание которых для больших скоростей лучей представляет значительный теоретический интерес. Одно из этих соотношений, а именно: зависимость между магнитным и электростатическим отклонениями, изучалось Кауфманом для β-лучей.

Ниже мы покажем, что второе соотношение между этими величинами — соотношение между напряжением и электростатическим отклонением катодных лучей, или (что то же самое) соотношение между поперечной и продольной массами электрона в зависимости от напряжения — может быть определено с достаточной точностью.

Если квадрат скорости электронов много меньше квадрата скорости света, то в случае, когда на электрон не действуют никакие силы кроме электростатических, для электронов справедливы уравнения движения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\varepsilon}{\mu_0} X \text{ и т. д.},$$

где $\frac{\varepsilon}{\mu_0}$ — отношение заряда к массе электрона, x, y, z — координаты электрона, X, Y, Z — компоненты напряженности электрического поля.

Предположим, что электроны движутся с нулевой начальной скоростью от некоторой точки x_0, y_0, z_0 (катод). Тогда движение однозначно определяется упомянутыми выше уравнениями; уравнения движения

---

* *Über eine Methode zur Bestimmung des Verhältnisses der transversalen und longitudinalen Masse des Elektrons.* Ann. Phys., 1906, 21, 583—586.

имеют вид:

$$x = \varphi_1(t),$$
$$y = \varphi_2(t),$$
$$z = \varphi_3(t).$$

Представим себе, что все компоненты напряженности электрического поля мы умножили на величину n^2. Тогда электрон будет двигаться, как это нетрудно заметить из уравнений движения, согласно уравнениям:

$$x = \varphi_1(nt),$$
$$y = \varphi_2(nt),$$
$$z = \varphi_3(nt).$$

Отсюда следует, что при пропорциональном изменении полей изменяется скорость электронов, но не их траектория. Изменение траектории при пропорциональном изменении полей наступает впервые только при таких скоростях электронов, при которых отношение продольной массы к поперечной заметно отличается от единицы. Если выбрать такое электростатическое поле, при котором катодные лучи имеют сильно искривленную траекторию, то уже незначительное различие между поперечной и продольной массами будет заметно влиять на траекторию. На рис. 1 изображена схема установки, при помощи которой можно по указанному принципу определить отношение поперечной массы электрона к продольной. Катодные лучи образуются между заземленным катодом K и анодом A, присоединенным к положительной клемме источника тока M и служащим одновременно диафрагмой. Затем катодные лучи проходят через соединенную с A трубку t в пространство между металлическими цилиндрами R_1 и R_2. Цилиндр R_1 заземлен, а цилиндр R_2 соединен с трубкой t и с положительным полюсом источника тока, тогда как отрицательный полюс источника заземлен. Размеры выбраны так, что медленные катодные лучи двигались бы приблизительно по окружности на малом расстоянии от цилиндра R_2. Затем лучи попадают в слегка коническую трубку t', соединенную металлическим проводом с цилиндром R_2. В этой трубке находится фосфоресцирующий экран S. На последний падает тень от проволоки D, расположенной вертикально во внутреннем конце трубки t'.

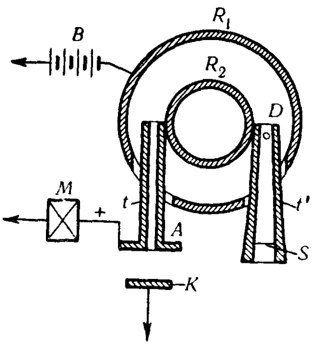

Рис. 1.

Используя медленные катодные лучи, мы получаем тень от проволоки D на экране S в некотором совершенно определенном месте (нулевое положение). При повышении задающего напряжения тень от проволоки будет передвигаться. Включением батареи B и заземлением R_1 мы можем возвратить тень в нулевое положение.

Если через П обозначить потенциал, при котором отклоненные лучи дают тень, то П будет также напряжением, которое сообщило этим лучам их кинетическую энергию. Обозначая далее через ρ радиус кривизны этих лучей, получаем

$$\frac{\mu_t}{\mu_l} = \frac{\rho}{2}\frac{X}{\Pi}.$$

При этом μ_t означает «поперечную» массу электрона, μ_l — «продольную» массу, которая определяется соотношением

$$\text{Кинетическая энергия} = \mu_l \frac{v^2}{2},$$

а X представляет собой напряженность отклоняющего электрического поля.

Обозначим через P потенциал цилиндра R_2 (потенциал положительного полюса источника тока M), через p — потенциал цилиндра R_1, при которых тень находится в нулевом положении; тогда

$$\Pi = P - \alpha(P - p),$$

причем коэффициент α зависит от размеров установки и является малой величиной по сравнению с 1. Кроме того, величина X пропорциональна напряжению $P - p$. Таким образом, из приведенного выше уравнения получаем

$$\frac{\mu_t}{\mu_l} = \text{const.}\frac{P - p}{P - \alpha(P - p)},$$

или (после некоторых пренебрежений)

$$\frac{\mu_t}{\mu_l} = \text{const.}\left[1 - (1 + \alpha)\frac{p}{P}\right].$$

Очевидно, что значение α может быть установлено достаточно точно. Потенциалы P и p измеряются с точностью до нескольких процентов, так что точность определения отклонения величины μ_t/μ_l от единицы существенно зависит от точности, с которой может быть установлено нулевое положение тени. Легко убедиться, что точность установления нулевого положения тени может быть сделана настолько большой, что отклонение величины μ_t/μ_l от единицы на 0,3% (это соответствует сдвигу тени около 1 *мм*, когда расстояние $\overline{DS} = 10$ *см*) еще будет заметно. Упомянем, в частности, что неизбежные колебания потенциала P во время эксперимента могут оказать лишь незначительное влияние на точность измерения.

Мы хотим еще указать на соотношения между μ_t/μ_l и напряжением Π в первом приближении, которые следуют из различных теорий. Если Π измерять в вольтах, то имеем по теории Бухерера

$$\frac{\mu_t}{\mu_l} = 1 - 0{,}0070 \cdot \frac{\Pi}{10\,000},$$

по теории Абрагама

$$\frac{\mu_t}{\mu_l} = 1 - 0{,}0084 \cdot \frac{\Pi}{10\,000},$$

по теории Лоренца и Эйнштейна

$$\frac{\mu_t}{\mu_l} = 1 - 0{,}0104 \cdot \frac{\Pi}{10\,000}.$$

Автор не в состоянии сам поставить подобный эксперимент и будет рад, если кто-нибудь из физиков заинтересуется предложенным методом.

Поступила 4 августа 1906 г.

М. Абрагам (см., например, Г. А. Лоренц. Теория электронов. ГТТИ, 1934, стр. 62, 285), предполагая, что масса электрона имеет чисто электромагнитную природу, представлял себе электрон как поверхностно заряженный недеформирующийся шарик. А. Бухерер (Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Leipzig, 1904, 57—58; см. также Г. А. Лоренц, Теория электронов, стр. 298) считал, что при движении шарик (не изменяя своего объема) деформируется так, что его поверхность оказывается эквипотенциальной. Это значит, что он принимает форму сплюснутого [в отношении $1 : (1/\sqrt{1-\beta^2})$] эллипсоида. Для отношения продольной массы к поперечной теория Абрагама дает значение $1 + (4/5)\,\beta^2 + \ldots$ теория Бухерера — $1 + (2/3)\,\beta^2 \ldots$, а теория относительности — $(1-\beta^2)^{-1} \approx 1 + \beta^2 + \ldots$,

1907

5

О ВОЗМОЖНОСТИ НОВОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРИНЦИПА ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

В важной работе Штарка [1], появившейся в прошлом году, доказано, что излучение движущихся положительных ионов каналовых лучей имеет линейчатый спектр. При этом было обнаружено и измерено допплеровское смещение. Штарк предпринял это исследование с целью обнаружить и измерить эффект второго порядка [пропорциональный $(v/V)^2$]. Однако его установка не была приспособлена специально для этой цели и точность эксперимента оказалась недостаточной для получения надежных результатов.

Ниже мы кратко покажем, что принцип относительности вместе с принципом постоянства скорости света позволяет предугадать этот эффект. Как показано в одной из наших предыдущих работ [2], из этих принципов следует, что равномерно движущиеся часы с точки зрения покоящейся системы отсчета идут медленнее, чем с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с ними. Если обозначить через ν число тиканий часов в единицу времени для покоящегося наблюдателя, а через ν_0 соответствующее число для движущегося вместе с ними наблюдателя, то будем иметь

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{1-(v/V)^2},$$

или, в первом приближении,

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0} = -\frac{1}{2}(v/V)^2.$$

Излучение определенной частоты, испускаемое и поглощаемое атомами каналовых лучей, представим теперь как быстро движущиеся часы; поэтому только что записанное соотношение применимо и в этом случае.

---

* *Über die Möglichkeit einer neuen Prüfung des Relativitätsprinzips.* Ann. Phys., 1907, 23, 197—198.

[1] J. Stark. Ann. Phys., 1906, 21, 401.

[2] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 17, 891. (Статья 1).

Необходимо принять во внимание, что частота ν_0 (для движущегося вместе с часами наблюдателя) неизвестна, так что упомянутое выше соотношение недоступно непосредственной экспериментальной проверке.

Можно предположить, что частота ν_0 равна частоте излучения, которое ион испускает, или поглощает, в состоянии покоя, и именно по следующей причине. Из того факта, что одна и та же линия спектра возникает при совершенно различных условиях, мы заключаем, что частота ν_0 не зависит от взаимодействия между движущимися ионами и покоящимся газом; эта частота и является собственной частотой иона. Отсюда с помощью принципа относительности можно заключить, что ν_0 должна быть равна частоте испускаемого, или поглощаемого, излучения покоящегося иона.

Соотношение

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{1}{2}(v/V)^2$$

дает искомый эффект второго порядка.

Указанная Штарком величина эффекта в десять раз больше величины, получаемой из приведенной выше формулы. Нам представляется вероятным, что точные результаты можно ожидать только в том случае, если удастся получить (несветящиеся) каналовые лучи в пространстве, совершенно не содержащем газа.

Поступила 17 марта 1907 г.

6

ПО ПОВОДУ ЗАМЕТКИ ПАУЛЯ ЭРЕНФЕСТА „ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕКТРОНОВ И ТЕОРЕМА ПЛОЩАДЕЙ“ *

В названной выше заметке [1] содержится следующее замечание: «Релятивистская электродинамика Лоренца в формулировке, опубликованной Эйнштейном, рассматривается с достаточной общностью как замкнутая система. В соответствии с этим из нее чисто дедуктивным путем должен получаться ответ на вопрос, возникающий при распространении проблемы Абрагама с абсолютно твердого на деформируемый электрон: предположим, что существует деформируемый электрон, обладающий в покое какой-нибудь нешарообразной и неэллипсоидальной формой. При равномерном прямолинейном движении этот электрон, согласно Эйнштейну, испытывает известное лоренцово сокращение. Возможно ли для этого электрона в отсутствие внешних сил равномерное прямолинейное движение в произвольном направлении или нет?» По этому поводу необходимо заметить следующее:

1. Принцип относительности, или, точнее, принцип относительности вместе с принципом постоянства скорости света, следует понимать не как «замкнутую систему» и не как систему вообще, а только как некоторый эвристический принцип, сам по себе содержащий лишь высказывания о твердых телах, часах и световых сигналах. Все остальное теория относительности дает только потому, что она требует существования связей между явлениями, которые раньше казались независимыми.

Например, теория движения электрона получается следующим образом. Предполагают, что в некоторой пространственно-временнóй системе отсчета справедливы уравнения Максвелла для пустоты. Применяя преобразования пространства-времени, даваемые теорией относительности, находят формулы преобразования для напряженностей электрического

* *Bemerkungen zu der Notiz von Hrn. Paul Ehrenfest «Die Translation deformierbaren Elektronen und der Flächensatz».* Ann. Phys., 1907, 23, 206—208.

[1] Заметка П. Эренфеста опубликована в том же томе (стр. 204—205).— *Прим. ред.*

4*

и магнитного полей. С помощью этих формул, снова выполняя преобразование пространства-времени, из закона ускорения медленно движущегося электрона (который постулируется или берется из опыта) находят закон ускорения электрона, движущегося сколь угодно быстро. Следовательно, здесь речь идет совсем не о «системе», в которой неявно содержались бы отдельные законы, выводимые из нее простой дедукцией, но всего лишь о принципе, который позволяет (подобно второму закону термодинамики) свести одни законы к другим.

2. Если же не опираться на принцип относительности, а стремиться определить закон движения электрона электродинамическим путем, то приходится делать более определенные предположения о распределении электрического заряда, чтобы проблема не была неопределенной. При этом считают, что электричество распределено по (абсолютно жесткому) остову. Однако следует учитывать, что законы, по которым движется такое образование, нельзя вывести из одной только электродинамики. Ведь предположение об остове означает не что иное, как введение сил, уравновешивающих электродинамические силы. Если мы будем рассматривать остов как абсолютно твердое (т. е. недеформируемое внешними силами) тело, то проблема движения электрона решится без произвола, путем дедукции, тогда и только тогда, когда будет достаточно известна динамика абсолютно твердого тела.

В теории относительности мы еще далеко не достигли последней цели. Мы знаем только кинематику прямолинейного движения и выражение для кинетической энергии поступательно движущегося тела, если оно не взаимодействует с другими телами [2]; в остальном же как динамику, так и кинематику абсолютно твердого тела для рассматриваемого случая следует считать пока неизвестной.

Поступила 16 апреля 1907 г.

[2] То, что это ограничение существенно, мы скоро покажем в отдельной статье. (Ср. статью 7, § 3.— *Прим. ред.*)

7

ОБ ИНЕРЦИИ ЭНЕРГИИ, ТРЕБУЕМОЙ ПРИНЦИПОМ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Принцип относительности в совокупности с уравнениями Максвелла приводит к заключению, что инерция тела по вполне определенному закону убывает или возрастает с его энергией. Действительно, рассмотрим тело, которое испускает одновременно в двух противоположных направлениях определенную порцию энергии излучения, и исследуем этот процесс в двух равномерно движущихся друг относительно друга системах координат [1]. Применим к этому процессу — в обеих системах координат — закон сохранения энергии. Тогда мы придем к результату, что приращению энергии ΔE рассматриваемого тела всегда должно соответствовать приращение массы $\Delta E/V^2$, где V — скорость света.

То обстоятельство, что рассмотренный частный случай приводит с необходимостью к предположению исключительной общности (о зависимости инерции от энергии), побуждает доказать необходимость или обоснованность сформулированного предположения более общим путем. Прежде всего возникает вопрос, не приводят ли другие частные случаи к следствиям, несовместимым с указанным предположением? Первый шаг в этом направлении я сделал в прошлом году [2], когда показал, что такое предположение устраняет противоречие между электродинамикой и принципом сохранения движения центра тяжести (по крайней мере до членов первого порядка).

Ответить на поставленный вопрос *в общем виде* пока невозможно, так как у нас еще нет полной картины мира, соответствующей принципу относительности. Мы скорее должны ограничиться теми частными случаями, которые можно в настоящее время без произвола рассматривать в рамках релятивистской электродинамики. В дальнейшем мы исследуем два таких

---

* *Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie.* Ann. Phys., 1907, 23, 371—384.

[1] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 18, 639 (Статья 2).
[2] A. Einstein. Ann. Phys., 1906, 20, 627 (Статья 3).

случая; в первом из них система, инертная масса которой должна исследоваться, состоит из одного твердого наэлектризованного тела, во втором — из некоторого числа равномерно движущихся материальных точек, не взаимодействующих друг с другом.

Прежде чем переходить к исследованию, следует сделать еще одно замечание о предположительной области применимости уравнений Максвелла для пустого пространства, чтобы ответить на напрашивающееся возражение. В предыдущих работах я показал, что наша современная электромеханическая картина мира непригодна для объяснения свойств энтропии излучения, а также закономерностей поглощения и испускания света и законов теплоемкости. Более того, по моему мнению, следует считать, что в свойствах любого периодического процесса есть нечто общее, что превращение энергии может происходить только определенными порциями конечной величины (кванты света), что, следовательно, многообразие возможных в действительности процессов меньше многообразия процессов, возможных согласно нашим теперешним теоретическим взглядам [3]. В частности, процесс излучения следовало бы представлять себе так, чтобы мгновенное электромагнитное состояние в некоторой части пространства полностью определялось *конечным* числом величин — в противоположность векторной теории излучения. Тем не менее, пока в нашем распоряжении еще нет картины мира, отвечающей указанным требованиям, мы, не боясь впасть в ошибку, будем, естественно, пользоваться существующей теорией во всех вопросах, не касающихся превращений элементарно малых количеств энергии, а также не затрагивающих соотношений, в которые входит энтропия. Мои представления о современном состоянии этого вопроса нагляднее всего можно проиллюстрировать на следующем вымышленном примере.

Представим себе, что молекулярно-кинетическая теория теплоты еще не создана, но вполне надежно установлен факт независимости броуновского движения (движения частиц, взвешенных в жидкости) от поступления энергии извне, а также понята невозможность объяснить это движение при помощи механики и термодинамики. При таком положении дел мы с полным основанием пришли бы к заключению о необходимости далеко идущих изменений в основах теории. Но, несмотря на это, никто не побоялся бы обратиться к основным уравнениям механики и термодинамики при обсуждении вопросов, не касающихся мгновенного состояния в малых частях пространства. В этом смысле можно, по моему мнению, с уверенностью основывать свои рассуждения на уравнениях Максвелла.

Представляется естественным, что последующее могло быть уже частично выяснено другими авторами раньше; однако, принимая во внимание,

[3] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 17, 132; 1906, 20, 199; 1907, 22, 180 (см. т. III).

что затронутые здесь вопросы обсуждаются с новой точки зрения, я позволил себе отказаться от весьма затруднительного для меня просмотра литературы, надеясь, что этот пробел будет восполнен другими, как это уже было любезно сделано гг. Планком и Кауфманом в отношении моей первой работы о принципе относительности.

§ 1. О кинетической энергии твердого тела, равномерно движущегося под действием внешних сил

Рассмотрим твердое тело, движущееся равномерно и прямолинейно (со скоростью v) в направлении возрастающих значений координаты x некоторой воображаемой покоящейся системы координат (x, y, z). Если на это тело не действуют внешние силы, то его кинетическая энергия K_0 определяется, согласно теории относительности, выражением [4]

$$K_0 = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1 \right\},$$

где μ — масса тела (в обычном смысле), а V — скорость света в пустоте.

Покажем теперь, что если на тело действуют взаимно уравновешивающиеся внешние силы, то, по теории относительности, это выражение уже не справедливо. Чтобы в этом случае можно было провести исследование, мы должны предположить, что эти силы являются электродинамическими. Поэтому представим себе, что тело наэлектризовано (с непрерывным распределением электричества) и находится под действием электромагнитного поля. Плотность электрического заряда предположим всюду настолько малой, а поле настолько интенсивным, что силами, соответствующими взаимодействию между электрическими зарядами в теле, можно было пренебречь по сравнению с силами, действующими на электрические заряды тела со стороны внешнего поля [5]. Энергия ΔE, переданная телу полем в интервале между моментами времени t_0 и t_1, дается выражением

$$\Delta E = \int_{t_0}^{t_1} dt \int vX \frac{\rho}{4\pi}\, dx\, dy\, dz,$$

причем интегрирование по объему распространяется на все тело и введено обозначение

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

[4] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, **17**, 891 (Статья 1).

[5] Мы ввели это предположение, чтобы можно было считать, что действующие силы благодаря способу, которым они введены, не подчинены никаким ограничительным условиям.

Приведем это выражение с помощью содержащихся в цитированной выше работе [6] формул преобразований, к той пространственно-временной системе отсчета (ξ, η, ζ, τ), которая соответствует системе координат, покоящейся относительно тела, с осями, параллельными осям системы (x, y, z). Тогда после простых выкладок получаем

$$\Delta E = \iint \beta v X' \frac{\rho'}{4\pi} d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau.$$

Здесь обозначения в точности соответствуют использованным в той же работе, причем β, как и там, означает

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}}.$$

Следует иметь в виду, что, согласно нашему предположению, силы X' не могут быть произвольными. Больше того, в каждый момент времени они должны быть такими, чтобы рассматриваемое тело не испытывало ускорения. Поэтому из теоремы статики получается необходимое (но не достаточное) условие обращения в нуль суммы x-компонент действующих на тело сил при рассмотрении в системе координат, движущейся вместе с телом. Таким образом, для каждого τ

$$\int X'\rho'\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 0.$$

Если бы пределы интегрирования по τ в приведенном выше выражении для ΔE не зависели от ξ, η и ζ, то ΔE равнялось бы 0. Однако это не так. Из формулы преобразования

$$t = \beta\left(\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right)$$

непосредственно следует, что пределы интегрирования по времени в движущейся системе суть

$$\tau = \frac{t_0}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi \quad \text{и} \quad \tau = \frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi.$$

Представим себе, что интеграл в выражении для ΔE разбит на три части. Первая часть охватывает значения времени τ между

$$\frac{t_0}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi \quad \text{и} \quad \frac{t_0}{\beta},$$

вторая часть — между

$$\frac{t_0}{\beta} \quad \text{и} \quad \frac{t_1}{\beta}$$

---

[6] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 17, 891 (Статья 1, §§ 3 и 6).

и третья — между

$$\frac{t_1}{\beta} \text{ и } \frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi.$$

Вторая часть обращается в нуль, поскольку пределы интегрирования по времени здесь не зависят от ξ, η, ζ. Первая и третья части принимают определенное значение, вообще говоря, только тогда, когда сделано предположение, что силы, действующие на тело, не зависят от времени вблизи моментов времени $t = t_0$ и $t = t_1$, т. е. во всех точках твердого тела между моментами времени

$$\tau = \frac{t_0}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi \text{ и } \tau = \frac{t_0}{\beta},$$

и соответственно между

$$\tau = \frac{t_1}{\beta} \qquad \text{и} \qquad \tau = \frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi$$

напряженность электрического поля X' не зависит от времени. Обозначим через X_0' и соответственно через X_1' значения X' в этих двух промежутках времени; тогда получим

$$\Delta E = -\int \frac{v^2}{V^2}\beta\frac{\xi X_1'\rho'}{4\pi}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \int \frac{v^2}{V^2}\beta\frac{\xi X_0'\rho'}{4\pi}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Примем далее, что вначале (при $t = t_0$) на тело не действовало никаких сил. Тогда второй из этих интегралов обращается в нуль. Если учесть, что выражение

$$\frac{X_1'\rho'}{4\pi}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

есть ξ-компонента K_ξ пондеромоторной силы, действующей на элемент объема, получим

$$\Delta E = -\frac{(v^2/V^2)}{\sqrt{1-(v/V)^2}}\sum(\xi K_\xi),$$

причем суммирование производится по всем элементам массы тела.

Таким образом, мы получаем следующий странный результат. Пусть на твердое тело, на которое сначала не действовали никакие силы, действуют силы, не сообщающие ему ускорения. Тогда эти силы — при рассмотрении в системе координат, движущейся относительно тела,— совершают над телом работу ΔE, которая зависит только от окончательного распределения сил и скорости движения. Отсюда, согласно закону сохранения энергии, следует, что кинетическая энергия твердого тела, подверженного действию сил, на ΔE больше кинетической энергии столь же быстро движущегося тела, на которое силы не действуют.

§ 2. Об инерции электрически заряженного твердого тела

Снова рассмотрим твердое наэлектризованное тело, которое равномерно и прямолинейно движется (со скоростью v) в направлении возрастания значений координаты x «покоящейся» системы координат. Пусть внешнего электромагнитного поля нет. Мы хотим теперь учесть электромагнитное поле, порождаемое электрическим зарядом тела. Прежде всего вычислим энергию электромагнитного поля

$$E_e = \frac{1}{8\pi}\int (X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Для этой цели преобразуем данное выражение, используя формулы преобразования, содержащиеся в цитированной выше статье. Введем под знак интеграла величины, которые относятся к системе координат, движущейся вместе с телом. Тогда получим

$$E_e = \frac{1}{8\pi}\int \frac{1}{\beta}\left[X'^2 + \frac{1+(v/V)^2}{1-(v/V)^2}\left(Y'^2 + Z'^2\right)\right]d\xi\,d\eta\,d\zeta\,.$$

Следует иметь в виду, что значения, которые принимает это выражение, зависят от ориентации твердого тела относительно направления движения. Поэтому, если бы полная кинетическая энергия наэлектризованного тела составлялась только из кинетической энергии K_0, которую тело приобретает вследствие своей весомой массы, и из избытка электромагнитной энергии движущегося тела над электростатической энергией тела в состоянии покоя, то мы пришли бы, как легко усмотреть из последующего, к противоречию.

Представим себе, что рассматриваемое тело бесконечно медленно вращается относительно системы координат, движущейся вместе с ним, и во время этого движения оно не подвергается внешним воздействиям. Ясно, что это движение должно быть возможным и без действия сил, так как, согласно принципу относительности, законы движения тела в системе координат, движущейся вместе с ним, такие же, как законы движения в «покоящейся» системе. Рассмотрим теперь равномерно движущееся и бесконечно медленно вращающееся тело в «покоящейся» системе. Так как вращение должно быть бесконечно медленным, то оно ничего не добавляет к кинетической энергии. Поэтому выражение для кинетической энергии в рассматриваемом случае такое же, как в отсутствие вращения, когда имеет место только равномерное прямолинейное движение. Поскольку тело теперь в процессе движения располагается различно (произвольно) относительно направления движения и во время всего движения должен выполняться закон сохранения энергии, то ясно, что зависимость кинетической энергии прямолинейно движущегося наэлектризованного тела от его ориентации невозможна.

Это противоречие будет устранено на основе результатов предыдущего параграфа. Дело в том, что кинетическую энергию для рассматриваемого тела нельзя вычислить как для твердого тела, на которое не действуют никакие силы. Напротив, согласно § 1, надо учитывать, что наше твердое тело подвержено действию сил, которые возникают вследствие взаимодействия между электрическими зарядами. Обозначим, таким образом, через K_0 кинетическую энергию в случае, когда электрический заряд отсутствует; тогда для полной кинетической энергии K тела получим выражение

$$K = K_0 + \Delta E + (E_e - E_s),$$

где E_s означает электростатическую энергию рассматриваемого тела в состоянии покоя. В нашем случае

$$\Delta E = -\frac{v^2}{V^2}\beta\frac{1}{4\pi}\int \xi X'\left(\frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

откуда путем интегрирования по частям с учетом того, что X', Y', Z' выводятся из потенциала, получается

$$\Delta E = \frac{v^2}{V^2}\beta\,\frac{1}{8\pi}\int (X'^2 - Y'^2 - Z'^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Если принять во внимание приведенные в § 1 выражения для K_0 и β, то для кинетической энергии наэлектризованного твердого тела получается выражение

$$K = \left(\mu + \frac{E_s}{V^2}\right) V^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1\right).$$

Это выражение, как и должно быть, не зависит от ориентации тела относительно направления перемещения. Если мы сравним выражение для K с выражением для энергии K_0 электрически незаряженного тела

$$K_0 = \mu V^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1\right),$$

то увидим, что электрически заряженное тело обладает инертной массой, превосходящей массу незаряженного тела на электростатическую энергию, деленную на квадрат скорости света. Таким образом, теорема об инерции энергии подтверждается нашим результатом в рассмотренном частном случае.

§ 3. Замечания относительно динамики твердого тела

Из предшествующего может создаться впечатление, что мы не так далеки от создания соответствующей принципу относительности динамики равномерного и прямолинейного движения твердого тела. Однако по этому поводу следует напомнить, что изложенное в § 1 исследование дает энергию твердых тел, подверженных действию сил лишь в случае, когда эти силы постоянны во времени. Если в момент времени t_1 сила X' зависит от времени, то работа ΔE и, следовательно, энергия твердого тела оказываются зависящими не только от тех сил, которые действуют в *один* определенный момент времени.

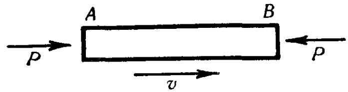

Рис. 1.

Чтобы по возможности ярче осветить стоящее перед нами затруднение, рассмотрим следующий простой частный случай. Представим себе жесткий стержень AB (рис. 1), который покоится в системе координат (ξ, η, ζ), причем ось стержня совпадает с осью ζ. Пусть в некоторый определенный момент времени τ_0 к концам стержня в течение очень короткого времени приложены противоположно направленные равные силы P, а все остальное время на стержень силы не действуют. Ясно, что описанное действие на стержень в момент τ_0 *не вызывает* движения. Теперь рассмотрим в точности то же событие в системе координат, относительно которой наш стержень движется в направлении A — B со скоростью v, и оси которой параллельны осям ранее использованной системы координат. Но в новой системе координат импульсы сил в точках A и B уже не будут одновременными; напротив, импульс в точке B запаздывает относительно импульса в точке A на $l\beta\frac{v}{V^2}$ единиц времени, причем l означает (измеренную в покоящейся относительно стержня системе отсчета) длину стержня. Таким образом, мы пришли к следующему странному результату. К движущемуся стержню приложены сначала импульс силы в точке A и спустя некоторое время противоположный импульс в точке B. Оба эти импульса сил компенсируют друг друга таким образом, что движение под действием их не нарушается. Дело представляется еще более странным, если мы интересуемся энергией стержня в момент, когда импульс в точке A уже кончился, а импульс в точке B еще не начал действовать. Импульс в точке A совершает над стержнем работу (так как стержень движется); благодаря этой работе должна, следовательно, увеличиться энергия стержня. Однако ни скорость стержня, ни другие относящиеся к нему величины, от которых могла бы зависеть энергия стержня, не изменились. Налицо, таким образом, кажущееся нарушение закона сохранения энергии.

Принципиальное разрешение этой трудности очевидно. Своим неявным предположением, что мгновенное состояние стержня можно полностью определить действующими на него силами и скоростью стержня в тот же момент, мы допустили, что вследствие приложенной к телу в какой-то точке силы скорость его возрастает *мгновенно* и что, следовательно, распространение на все тело силы, действующей в какой-либо точке, не требует времени. Предположение такого рода, как вскоре будет показано, несовместимо с принципом относительности. Таким образом, мы вынуждены в нашем случае считать, что под влиянием импульса в точке A в теле происходит изменение состояния неизвестного характера, которое с конечной скоростью распространяется по телу и через короткое время приводит к ускорению тела, если за это время к телу не будут приложены другие силы, действие которых скомпенсирует действие первой. Итак, если даже релятивистская электродинамика верна, мы еще очень далеки от создания динамики поступательного перемещения твердого тела.

Мы хотим теперь показать, что не только предположение о *мгновенном* распространении какого-либо действия, но и вообще всякое предположение о распространении действия со сверхсветовой скоростью несовместимо с принципом относительности.

Пусть вдоль оси X системы координат (x, y, z) расположен материальный канал, относительно которого некоторое действие может распространяться со скоростью W. Пусть в точках $x = 0$ (точка A) и $x = +l$ (точка B) находятся покоящиеся относительно системы координат (x, y, z) наблюдатели. Наблюдатель в точке A посредством упомянутого выше действия посылает сигнал наблюдателю в точке B по материальному каналу, причем этот канал не покоится, а движется со скоростью v $(< V)$ вдоль оси x в отрицательном ее направлении. Тогда сигнал передается из точки A в точку B со скоростью [7]

$$\frac{W - v}{1 - \dfrac{Wv}{V^2}}.$$

[7] См. A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 17, 891 (Статья 1, § 5).

Таким образом, время T, протекшее между отправлением сигнала из точки A и его прибытием в точку B, равно

$$T = l\,\frac{1-\dfrac{Wv}{V^2}}{W-v}\,.$$

Скорость v может принимать любое значение, меньшее скорости V. Следовательно, если, согласно нашему предположению, $W > V$, то скорость v всегда можно выбрать так, чтобы T было меньше нуля. Этот результат означает, что мы должны допустить существование передаточного механизма, при использовании которого действие (сопровождаемое волевым актом) *предшествует* его причине. Хотя, по моему мнению, этот результат и не содержит чисто логического противоречия, он настолько противоречит всему нашему опыту, что невозможность предположения $W > V$ можно считать достаточно обоснованной.

§ 4. Об энергии системы, состоящей из некоторого числа свободно движущихся материальных точек

При рассмотрении выражения для кинетической энергии k материальной точки с массой μ, движущейся со скоростью v,

$$k = \mu V^2 \left\{\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1\right\}$$

бросается в глаза, что это выражение имеет вид разности, а именно:

$$k = \left\{\mu V^2\,\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}}\right\}\Bigg|_{v=0}^{v=v}.$$

Если интересоваться не кинетической энергией, а просто энергией ε движущейся точки, то $\varepsilon = k + \mathrm{const}$. В то время как в классической механике произвольная постоянная в этом равенстве полагается для удобства равной нулю, в релятивистской механике простейшее выражение для энергии ε получается, если нулевая точка энергии выбирается так [8], чтобы энергия покоящейся материальной точки ε_0 равнялась μV^2. Тогда имеем

$$\varepsilon = \mu V^2\,\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}}\,.$$

---

[8] Следует отметить, что упрощающее предположение $\mu V^2 = \varepsilon_0$ является одновременно выражением принципа эквивалентности массы и энергии, и в случае наэлектризованного тела с нулевой массой ε_0 представляет собой не что иное, как его электрическую энергию.

На таком выборе нулевой точки энергии мы и остановимся в дальнейшем.

Введем теперь снова две равномерно движущиеся относительно друг друга системы координат (x, y, z) и (ξ, η, ζ). Пусть некоторая масса μ движется относительно системы (ξ, η, ζ) со скоростью w в направлении, составляющем с осью ξ угол φ. Если использовать соотношения, приведенные в § 5 цитированной выше работы [9], то легко определить энергию ε материальной точки в системе (x, y, z)

$$\varepsilon = \mu V^2 \frac{1 + \frac{vw\cos\varphi}{V^2}}{\sqrt{1-(v^2/V^2)}\,\sqrt{1-(w^2/V^2)}}.$$

Если имеется несколько материальных точек с различными массами, скоростями и направлениями движения, то для общей энергии E получаем выражение

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}}\left\{\sum \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1-(w/V)^2}}\right\} + \frac{v}{\sqrt{1-(v/V)^2}}\left\{\sum \frac{\mu w\cos\varphi}{\sqrt{1-(w/V)^2}}\right\}.$$

До сих пор мы никак не ограничивали движение системы (ξ, η, ζ) относительно движущихся масс. Мы можем теперь и в дальнейшем подчинить движение системы (ξ, η, ζ) однозначно определяющим его условиям:

$$\sum \frac{\mu w_\xi}{\sqrt{1-(w/V)^2}} = 0, \qquad \sum \frac{\mu w_\eta}{\sqrt{1-(w/V)^2}} = 0,$$

$$\sum \frac{\mu w_\zeta}{\sqrt{1-(w/V)^2}} = 0,$$

где w_ξ, w_η, w_ζ — компоненты скорости w. Этому ограничению в классической механике соответствует условие равенства нулю количества движения системы масс в системе (ξ, η, ζ). Тогда получаем

$$E = \left(\sum \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1-(w/V)^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}},$$

или, если ввести энергию системы масс E_0 относительно системы (ξ, η, ζ),

$$E = \frac{E_0}{V^2} V^2 \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}}.$$

Если мы сравним это выражение с выражением для энергии некоторой

[9] См. A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 17, 891 (Статья 1).

материальной точки, движущейся со скоростью v,

$$\varepsilon = \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}},$$

то придем к следующему результату: благодаря зависимости энергии от состояния движения системы координат, к которой отнесен процесс, систему равномерно движущихся материальных точек можно заменить одной единственной материальной точкой с массой $\mu = E_0/V^2$.

Таким образом, система движущихся материальных точек — взятая как целое — обладает тем большей инертностью, чем быстрее материальные точки движутся друг относительно друга. Зависимость снова описывается приведенным во Введении к настоящей статье законом.

Поступила 14 мая 1907 г.

О ПРИНЦИПЕ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЕГО СЛЕДСТВИЯХ*

Ньютоновы уравнения движения сохраняют свою форму после перехода к новой системе координат, движущейся равномерно и прямолинейно относительно прежней системы и связанной с ней формулами

$$x' = x - vt,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z.$$

До тех пор, пока считали, что всю физику можно построить на основе уравнений движения Ньютона, не сомневались и в том, что законы природы выглядят одинаково в любой из равномерно и прямолинейно движущихся относительно друг друга (неускоренных) систем координат. Однако такая независимость от состояния движения используемой системы координат, в дальнейшем называемая „принципом относительности“, сразу была поставлена под вопрос блестящими подтверждениями электродинамики движущихся тел Г. А. Лоренца [1]. Дело в том, что эта теория основана на предпосылке покоящегося неподвижного эфира; ее основные уравнения при применении написанных выше формул преобразования не сохраняют своей формы.

Со времени возникновения этой теории следовало ожидать, что удастся экспериментально обнаружить влияние движения Земли относительно

---

* *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen.* Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik, 1907, 4, 411—462.

[1] H. A. L o r e n t z. Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 1904, 6, 809. [Есть русский перевод: Г. А. Л о р е н ц. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света. Опубликована в сб. «Принцип относительности», ГТТИ, 1934.— *Прим. ред.*]

эфира на оптические явления. Правда, Лоренц, как известно, показал в цитированной выше работе, что, согласно его основным предположениям, влияние этого относительного движения на распространение лучей в оптических опытах не должно обнаруживаться, если ограничиваться при вычислении членами, содержащими первую степень отношения v/c относительной скорости к скорости света в пустоте. Однако отрицательный результат опытов Майкельсона и Морли[2] показал, что по крайней мере в этом случае отсутствует также эффект второго порядка (пропорциональный v^2/c^2), хотя, согласно основам теории Лоренца, он должен был бы проявиться на опыте.

Известно, что это противоречие между теорией и опытом формально было устранено гипотезой Г. А. Лоренца и Фицджеральда, согласно которой движущиеся тела испытывают определенное сокращение в направлении своего движения. Но эта гипотеза, введенная *ad hoc*, кажется всего лишь искусственным средством спасения теории; опыт Майкельсона и Морли обнаружил, что эти явления согласуются с принципом относительности даже тогда, когда этого нельзя было ожидать по теории Лоренца. Поэтому создавалось впечатление, что от теории Лоренца надо отказаться, заменив ее теорией, которая основывается на принципе относительности, ибо такая теория позволила бы сразу предвидеть отрицательный результат опыта Майкельсона и Морли.

Однако неожиданно оказалось, что необходимо лишь достаточно точно сформулировать понятие времени, чтобы обойти только что изложенную трудность. Следовало лишь понять, что введенную Г. А. Лоренцом вспомогательную величину, названную им «местным временем», на самом деле следует определить как «время». С таким определением времени основные уравнения теории Лоренца будут удовлетворять принципу относительности, если заменить написанные выше преобразования другими уравнениями, соответствующими новому понятию времени. Тогда гипотеза Лоренца и Фицджеральда окажется необходимым следствием теории. И только представление об эфире как носителе электрических и магнитных сил не находит места в излагаемой здесь теории; напротив, электромагнитные поля оказываются здесь не состояниями некоторой материи, а самостоятельно существующими объектами, имеющими одинаковую природу с весомой материей и обладающими вместе с ней свойством инерции.

Ниже делается лишь попытка свести в единое целое работы, которые возникли до настоящего времени путем объединения теории Лоренца и принципа относительности. В первых двух частях работы рассматриваются кинематические основы теории, а также применение их к основным уравнениям теории Максвелла — Лоренца; при этом я следовал работам

[2] A. A. Michelson, E. W. Morley. Amer. J. Sci., 1887 (3), 34, 333.

Лоренца[3] и своей[4]. В первой части, где излагаются исключительно кинематические основы теории, рассмотрены также некоторые задачи оптики (принцип Допплера, аберрация, увлечение света движущимися средами); на возможность такого способа рассмотрения мое внимание было обращено М. Лауэ в беседе с ним, а также работой последнего[5] и работой (правда, требующей уточнения) И. Лауба[6].

В третьей части развивается динамика материальной точки (электрона). Для вывода уравнений движения применен тот же метод, что и в названной выше работе автора. Сила определяется так же, как в работе Планка. Из этой работы взяты и преобразования уравнений движения материальной точки, которые так отчетливо выявляют аналогию уравнений движения с уравнениями классической механики.

Четвертая часть работы посвящена общим следствиям, к которым приводит теория относительности и которые касаются энергии и количества движения физических систем. Эти следствия были развиты в оригинальных работах автора[7], а также М. Планка[8]. Однако здесь они получены новым способом, который, как мне кажется, позволяет особенно ясно проследить связь этих выводов с основами теории. Здесь рассматривается также зависимость энтропии и температуры от состояния движения; в вопросе об энтропии я полностью придерживаюсь только что цитированной работы Планка; температуру движущихся тел я определяю так же, как Мозенгайль в своей работе о движущейся полости, содержащей излучение[9].

Важнейшим результатом четвертой части является следствие об инертной массе энергии. Этот результат наводит на мысль о том, не обладает ли энергия также *тяжелой* (гравитирующей) массой. Далее напрашивается вопрос, ограничен ли принцип относительности системами, движущимися *без ускорения*. Чтобы не оставить эти вопросы без разъяснения, я добавил к этой работе пятую часть, которая содержит новое релятивистское рассмотрение ускорения и гравитации.

---

[3] H. A. Lorentz. Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, 1904.
[4] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 17, 891. (Статья 1). Следует учесть также и работу Е. Кона по этому вопросу, но здесь она никак не использовалась.
[5] M. v. Laue. Ann. Phys., 1907, 23, 989.
[6] J. Laub. Ann. Phys., 1907, 32.
[7] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 18, 639; 1907, 23, 371.
[8] M. Planck. Sitzungber. preuß. Akad. Wiss., 1907, XXIX.
[9] K. v. Mosengeil. Ann. Phys., 1907, 22, 867.

I. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 1. Принцип постоянства скорости света. Определение времени. Принцип относительности

Для описания какого-либо физического процесса мы должны уметь измерять происходящие в отдельных точках пространства изменения в пространстве и времени. Для пространственного измерения процесса бесконечно малой длительности (точечного события), происходящего в элементе пространства, необходимо иметь декартову систему координат, т. е. три жестких стержня, расположенных перпендикулярно друг другу и жестко между собой связанных, а также жесткий единичный масштаб [10]. Геометрия позволяет определить положение точки или место точечного события тремя числами (координатами x, y, z) [11]. Для измерения времени точечного события нам нужны часы, которые покоятся относительно системы координат и в непосредственной близости от которых происходит точечное событие. Время точечного события определяется одновременным показанием часов.

Представим себе, что во многих точках расположены покоящиеся относительно системы координат часы. Пусть все они равноценны, т. е. разность показаний двух таких часов не изменяется. Если представить себе, что эти часы каким-то образом синхронизованы, то совокупность часов, расположенных на достаточно малых расстояниях, позволяет определить время любого точечного события при помощи ближайших часов.

Однако совокупность этих показаний часов еще не дает нам «время» в том виде, в каком оно нужно для физических целей. Кроме того, нам требуется еще рецепт, по которому эти часы могут быть сверены друг с другом.

Предположим теперь, *что часы могут быть сверены так, что скорость распространения каждого светового луча в вакууме, измеренная с помощью этих часов, везде равна универсальной постоянной* c при условии, что система координат является неускоренной. Пусть на расстоянии r друг от друга расположены две покоящиеся относительно системы координат точки A и B, снабженные часами, и пусть t_A — показание часов в A, когда в точку A прибывает распространяющийся через вакуум в направлении AB световой луч, а t_B — показание часов в точке B в момент прибытия светового луча в B; тогда, как бы ни двигались источник света,

---

[10] Здесь и в дальнейшем вместо «жестких» тел можно говорить о твердых телах, не подверженных действию деформирующих сил.

[11] Для этого необходимы еще вспомогательные стержни (линейки, циркули).

испустивший луч, и другие тела, всегда должно выполняться равенство

$$\frac{r}{t_B - t_A} = c.$$

Действительно ли осуществляется в природе сделанное здесь предположение, которое мы назовем «принципом постоянства скорости света»? Это ни в коем случае не очевидно; однако, по крайней мере для системы координат в определенном состоянии движения, оно стало вероятным благодаря подтверждениям, которые получила на опыте [12] теория Лоренца [13], основанная на предпосылке о существовании абсолютно покоящегося эфира.

Совокупность показаний всех сверенных указанным образом часов, которые можно представить себе покоящимися относительно системы координат и расположенными в заданных точках пространства, мы назовем временем, принадлежащим используемой системе координат, или, коротко, временем этой системы.

Эту систему координат вместе с единичным масштабом и часами, служащими для определения времени системы, мы назовем «системой отсчета S». Представим себе, что законы природы определены относительно системы S, первоначально покоившейся относительно Солнца. Пусть затем система S ускоряется некоторым внешним воздействием в течение некоторого времени и затем снова приходит в состояние неускоренного движения. Как будут выглядеть законы природы, если все явления изучать в системе отсчета, находящейся теперь в новом состоянии движения?

В ответ на этот вопрос мы сделаем логически простейшее и подсказываемое опытом Майкельсона и Морли предположение: *законы природы не зависят от состояния движения системы отсчета, по крайней мере, если она не ускорена.*

В дальнейшем мы будем опираться как на это предположение, которое мы назовем «принципом относительности», так и на только что указанный принцип постоянства скорости света.

§ 2. Общие замечания о пространстве и времени

1. Рассмотрим ряд неускоренных, движущихся с равной скоростью (покоящихся относительно друг друга) жестких стержней. Согласно принципу относительности, мы заключаем, что законы пространственного

[12] В особенности следует учитывать, что эта теория дает коэффициент увлечения (опыт Физо) в согласии с опытом.

[13] H. A. Lorentz. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegter Körper (Leiden, 1895). [Перевод двух параграфов этой книги (89 и 92) помещен в сборнике «Принцип относительности», под заглавием: «Интерференционный опыт Майкельсона». ГТТИ, 1934.— *Прим. ред.*].

расположения этих тел относительно друг друга не меняются при изменении движения всей системы этих тел. Отсюда следует, что законы геометрии всегда определяют возможности одинакового размещения твердых тел, независимо от их общего движения. Поэтому высказывания о форме неускоренно движущегося тела имеют непосредственный смысл. Форму тела в указанном смысле мы назовем «геометрической формой». Последняя, очевидно, не зависит от состояния движения системы отсчета.

2. Согласно данному в § 1 определению времени, указание времени имеет смысл только по отношению к системе отсчета, движущейся определенным образом. Поэтому можно предположить (в дальнейшем это будет показано), что два пространственно разделенных события, которые относительно системы отсчета S являются одновременными, в общем случае не будут одновременными относительно системы отсчета S', движущейся по отношению к системе S.

3. Пусть тело, состоящее из материальных точек P, как-то движется относительно системы отсчета S. К моменту времени t в системе S каждая материальная точка P обладает в S определенным положением, т. е. совпадает с определенной, покоящейся относительно S точкой П. Совокупность положений точки П относительно системы координат S мы назовем положением, а совокупность взаимных связей между положениями точки П — кинематической формой тела относительно S в момент времени t. Если тело покоится относительно S, его кинематическая форма относительно S тождественна его геометрической форме.

Ясно, что покоящийся относительно системы S наблюдатель может определить в S лишь *кинематическую форму* тела, движущегося относительно S, а не его геометрическую форму.

В дальнейшем мы, как правило, не будем явно различать геометрическую и кинематическую формы, и высказывание геометрического характера будет относиться к кинематической или геометрической форме в зависимости от того, связано оно с системой отсчета S или нет.

§ 3. Преобразования координат и времени

Пусть S и S' суть равноценные системы отсчета, т. е. пусть эти системы обладают единичными масштабами одинаковой длины и одинаково идущими часами при условии, что масштабы и часы сравниваются друг с другом в состоянии относительного покоя. Тогда очевидно, что любой закон природы, действующий в системе отсчета S, справедлив в точно такой же форме и в системе S', если S и S' находятся в относительном покое. Принцип относительности требует, чтобы это полное совпадение законов распространялось также на случай, когда S' движется равномерно и прямолинейно относительно S. В частности, скорость света в пустоте по отношению к обеим системам должна выражаться одним и тем же числом.

Пусть точечное событие определяется относительно S переменными x, y, z, t и относительно S' — переменными x', y', z', t', причем S и S' движутся относительно друг друга без ускорения. Найдем уравнения, связывающие между собой указанные переменные.

Можно сразу сказать, что эти уравнения должны быть линейными по отношению к указанным переменным, поскольку этого требуют свойства однородности пространства и времени. Отсюда, в частности, следует, что координатные плоскости системы S', отнесенные к системе S, движутся равномерно; однако в общем случае эти плоскости не перпендикулярны друг другу. Если же выбрать положение оси x' так, чтобы ее направление относительно S совпадало с направлением движения S', то из соображений симметрии следует, что координатные плоскости системы S', отнесенные к системе S, должны быть перпендикулярными друг другу. В частности, можно выбрать обе системы координат так, чтобы ось x системы S и ось x' системы S' совпадали и чтобы отнесенная к S ось y' системы S' была параллельна оси y системы S. Далее выберем за начало отсчета времени в обеих системах момент, когда начала координат совпадают; тогда искомые линейные уравнения преобразований будут однородными.

Из известного теперь положения координатных плоскостей системы S' относительно S непосредственно вытекает, что каждые из следующих уравнений попарно эквивалентны:

$$x' = 0 \quad \text{и} \quad x - vt = 0,$$

$$y' = 0 \quad \text{и} \quad y = 0,$$

$$z' = 0 \quad \text{и} \quad z = 0.$$

Следовательно, три искомых формулы преобразований должны иметь вид

$$x' = a(x - vt),$$

$$y' = by,$$

$$z' = cz.$$

Поскольку скорость распространения света в пустоте относительно обеих систем координат равна c, уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

и
$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

должны быть эквивалентными.

Отсюда и из только что найденных выражений для x', y', z' после простых вычислений заключаем, что искомые формулы преобразования должны иметь вид

$$t'=\varphi(v)\cdot\beta\cdot\left(t-\frac{v}{c^2}\,x\right),$$

$$x'=\varphi(v)\cdot\beta\cdot(x-vt),$$

$$y'=\varphi(v)\cdot y,$$

$$z'=\varphi(v)\cdot z.$$

При этом введено обозначение

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}.$$

Определим теперь оставшуюся пока неизвестной функцию $\varphi\,(v)$. Вводя третью систему отсчета S'', эквивалентную S и S', которая движется относительно S' со скоростью $-v$ и ориентирована относительно S' так же, как S' относительно S, после двукратного применения только что полученных формул получаем

$$t''=\varphi(v)\cdot\varphi(-v)\cdot t,$$

$$x''=\varphi(v)\cdot\varphi(-v)\cdot x,$$

$$y''=\varphi(v)\cdot\varphi(-v)\cdot y,$$

$$z''=\varphi(v)\cdot\varphi(-v)\cdot z.$$

Поскольку начала координат систем S и S'' всегда совпадают, оси одинаково ориентированы и системы «эквивалентны», это преобразование тождественно[14], так что

$$\psi(v)\cdot\varphi(-v)=1.$$

Далее, поскольку соотношение между y и y' не может зависеть от знака v,

$$\varphi(v)=\varphi(-v).$$

---

[14] Это заключение основано на физической предпосылке, что длина масштаба, равно как и ход часов, не претерпевают никаких изменений, если масштаб и часы приводятся в движение, а затем возвращаются в состояние покоя.

Следовательно [15], $\varphi(v) = 1$ и формулы преобразования приобретают вид

$$t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$
$$x' = \beta(x - vt), \tag{1}$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$

причем

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}.$$

Разрешая соотношения (1) относительно x, y, z, t, нетрудно получить соотношения, отличающиеся только тем, что в них «штрихованные» величины заменены одноименными «нештрихованными» и наоборот, а вместо v стоит $-v$. Это следует непосредственно из принципа относительности и из того, что система S движется равномерно относительно S' в направлении оси x' со скоростью $-v$.

Вообще, в соответствии с принципом относительности, из каждого правильного соотношения между «штрихованными» (определенными относительно S') и «нештрихованными» (определенными относительно S) величинами или величинами только одного из этих классов опять можно получить правильное соотношение, заменяя нештрихованные величины соответствующими штрихованными и наоборот, а v на $-v$.

§ 4. Следствия из формул преобразования для твердых масштабов и часов

1. Пусть некоторое тело покоится относительно системы отсчета S'. Пусть x_1', y_1', z_1' и x_2', y_2', z_2' — координаты двух его материальных точек, отнесенные к S'. Между координатами этих точек x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 в системе отсчета S во всякое время t в системе S, в соответствии с выведенными в предыдущем параграфе формулами преобразований, существуют соотношения

$$x_2 - x_1 = \sqrt{1-(v^2/c^2)}\,(x_2' - x_1'),$$
$$y_2 - y_1 = y_2' - y_1', \tag{2}$$
$$z_2 - z_1 = z_2' - z_1'.$$

---

[15] Случай $\varphi(v) = -1$ нами не рассматривается.

Таким образом, кинематическая форма равномерно и прямолинейно движущегося тела зависит от его скорости относительно системы отсчета, причем кинематическая форма тела отличается от его геометрической формы только сокращением в направлении относительного движения в отношении $1 : \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$. Относительное движение систем отсчета со сверхсветовой скоростью несовместимо с нашими принципами.

2. Пусть в начале координат системы S' покоятся часы, идущие в ν_0 раз быстрее, чем часы, применяемые для измерения времени в системах S и S', т. е. пусть стрелки этих часов совершают ν_0 оборотов за время одного оборота стрелок покоящихся относительно них часов того же типа, которыми пользуются в системах S и S'. Спрашивается, как идут первые часы, если их рассматривать в системе S?

Стрелки рассматриваемых часов заканчивают оборот в промежутки времени $t'_n = n/\nu_0$, причем n принимает целые значения, и часы постоянно находятся в точке $x' = 0$. Отсюда с помощью двух первых формул преобразований для промежутков времени t_n, в течение которых стрелки часов заканчивают оборот в системе S, получаем

$$t_n = \beta t'_n = \frac{\beta}{\nu_0} n.$$

Следовательно, в системе S стрелки часов в единицу времени совершают $\nu = \frac{\nu_0}{\beta} = \nu_0\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ оборотов; другими словами, часы, движущиеся относительно некоторой системы отсчета со скоростью v, идут в этой системе медленнее в отношении $1 : \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$, чем те же часы в случае, если они покоятся относительно той же системы отсчета.

Формула $\nu = \nu_0\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ допускает очень интересное применение. В прошлом году И. Штарк [16] показал, что ионы, образующие каналовые лучи, дают линейчатый спектр, причем наблюдается сдвиг спектральных линий, который можно истолковать как эффект Допплера.

Поскольку колебательный процесс, соответствующий спектральной линии, вероятно, следует рассматривать как внутриатомный процесс, частота которого определяется только ионом, такой ион можно считать часами с определенной частотой ν_0, которую можно измерить, например, исследуя свет, испускаемый такими же ионами, покоящимися относительно наблюдателя. Тогда проведенное выше рассмотрение показывает, что эффект Допплера лишь частично объясняет влияние движения на частоту света, определяемую наблюдателем: собственную частоту (кажущуюся) излучающих ионов уменьшает, согласно приведенному выше соотношению [ср. § 6, формулу (4а)], само движение ионов.

---

[16] J. Stark. Ann. Phys., 1906, 21, 401.

§ 5. Закон сложения скоростей

Пусть относительно системы S' равномерно движется точка согласно уравнениям

$$x' = u'_x t',$$

$$y' = u'_y t',$$

$$z' = u'_z t'.$$

Заменяя x', y', z', t' их выражениями через x, y, z, t с помощью формул преобразования (1), получаем x, y, z как функции t, а следовательно, и составляющие скорости точки w_x, w_y, w_z относительно системы S. В результате находим

$$w_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}},$$

$$w_y = \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} u'_y, \tag{3}$$

$$w_z = \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} u'_z.$$

Следовательно, закон параллелограмма скоростей справедлив лишь в первом приближении. Полагая

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2,$$

$$u'^2 = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z$$

и обозначая через α угол между осью x' (v) и направлением движения точки относительно S' (w'), получаем

$$u = \frac{\sqrt{(v^2 + u'^2 + 2vu' \cos\alpha) - \left(\frac{vu' \sin\alpha}{c^2}\right)^2}}{1 + \frac{vu' \cos\alpha}{c^2}}.$$

Если обе скорости (v и u') имеют одинаковое направление, то имеем

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}}.$$

Из этого соотношения следует, что при сложении двух скоростей, меньших c, всегда получается скорость, меньшая c. Так, если в последнее соотношение подставить $v = c - \varkappa$, $u' = c - \lambda$, где $\varkappa$ и λ положительны и меньше c, то

$$u = c\frac{2c - \varkappa - \lambda}{2c - \varkappa - \lambda + \frac{\varkappa\lambda}{c}} < c.$$

Далее следует, что при сложении скорости света c и скорости, меньшей c, опять получается скорость света c.

Из закона сложения скоростей получается также другое интересное следствие: не может существовать взаимодействия, которое можно использовать для передачи сигналов и которое распространяется быстрее, чем свет в пустоте. Именно, пусть вдоль оси X системы S расположен материальный канал, относительно которого может распространяться некоторое действие со скоростью W, и пусть как в точке $x = 0$ (точка A), так и в точке $x = \lambda$ (точка B) оси X находится покоящийся относительно S наблюдатель. Наблюдатель в точке A посылает сигнал наблюдателю в точке B при помощи вышеуказанного действия через канал; при этом пусть последний не покоится, а движется со скоростью v ($< c$) в *отрицательном* направлении оси x. Тогда, как следует из первого уравнения системы (3), сигнал будет переноситься из A в B со скоростью $(W - v)/(1 - Wv/c^2)$. Таким образом, необходимое для этого время T будет

$$T = l\,\frac{1 - \frac{Wv}{c^2}}{W - v}.$$

Скорость v может принимать любое значение, меньшее c. Если же $W > c$, как мы предположили, то v всегда можно выбрать так, что $T < 0$. Этот результат показывает, что мы вынуждены считать возможным механизм передачи сигнала, при использовании которого достигаемое действие предшествует причине. Хотя этот результат с чисто логической точки зрения и не содержит, по-моему, в себе никаких противоречий, он все же настолько противоречит характеру всего нашего опыта, что невозможность предположения $W > c$ представляется в достаточной степени доказанной.

§ 6. Применение формул преобразования к некоторым задачам оптики

Пусть интенсивность плоской световой волны, распространяющейся в вакууме, в системе S пропорциональна

$$\sin \omega \left(t - \frac{lx + my + nz}{c}\right),$$

а интенсивность той же волны в системе S' пропорциональна

$$\sin \omega' \left(t' - \frac{l'x' + m'y' + n'z'}{c}\right).$$

Формулы преобразования, полученные в § 3, требуют, чтобы между величинами ω, l, m, n и ω', l', m', n' существовали следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega\beta\left(1 - l\frac{v}{c}\right), \\ l' &= \frac{l - \frac{v}{c}}{1 - l\frac{v}{c}}, \\ m' &= \frac{m}{\beta\left(1 - l\frac{v}{c}\right)}, \\ n' &= \frac{n}{\beta\left(1 - l\frac{v}{c}\right)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Поясним формулу для ω' двумя разными способами, считая, что движется наблюдатель, а источник света (бесконечно удаленный) покоится, или, наоборот, что наблюдатель покоится, а источник движется.

1. Если наблюдатель движется со скоростью v по отношению к бесконечно удаленному источнику света частоты ν так, что линия «источник света — наблюдатель» образует угол φ со скоростью наблюдателя по отношению к системе координат, покоящейся относительно источника света, то частота ν' света, воспринимаемого наблюдателем, определяется соотношением

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

2. Если источник, испускающий в движущейся вместе с ним системе свет с частотой ν_0, движется так, что линия «источник света — наблюдатель

датель» образует угол φ со скоростью источника света по отношению к системе, покоящейся относительно наблюдателя, то частота ν, воспринимаемая наблюдателем, определяется соотношением

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi}. \tag{4a}$$

Оба эти соотношения выражают принцип Допплера в его общей форме; последнее соотношение позволяет определить, как зависит от скорости движения ионов и от направления наблюдения частота света, испускаемого (или поглощаемого) каналовыми лучами.

Далее, если обозначить через φ (или φ') угол между нормалью к фронту волны (направлением луча) и направлением движения системы S (или S') относительно системы S' (или S) (т. е. осью x или x'), соотношение для l' приобретает вид

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{c}}{1-\cos\varphi\,\frac{v}{c}}.$$

Это соотношение показывает влияние относительного движения наблюдателя на видимое положение бесконечно удаленного источника света (аберрация).

Рассмотрим далее скорость распространения света в среде, движущейся в направлении светового луча. Пусть среда покоится относительно системы S', а интенсивность световой волны пропорциональна

$$\sin\omega'\left(t' - \frac{x'}{V'}\right)$$

или

$$\sin\omega\left(t - \frac{x}{V}\right),$$

в зависимости от того, относится этот процесс к системе S' или S. Из формул преобразования получаем:

$$\omega = \beta\omega'\left(1+\frac{v}{V'}\right),$$

$$\frac{\omega}{V} = \beta\,\frac{\omega'}{V'}\left(1+\frac{V'v}{c^2}\right).$$

При этом V' следует считать функцией ω', известной из оптики покоящихся тел. Разделив первое соотношение на второе, получим

$$V = \frac{V' + v}{1 + \frac{V'v}{c^2}}.$$

Это соотношение можно было бы получить и непосредственно, применяя закон сложения скоростей [17]. Если скорость V' считать известной, последнее соотношение полностью решает задачу. Если же можно считать известной лишь частоту (ω), отнесенную к «покоящейся» системе S, как, например, в известном опыте Физо, то для определения трех неизвестных ω', V' и V следует применять оба приведенных выше соотношения, связывающих ω' и V'.

Далее, если G (G') — групповая скорость, отнесенная к системе S (S'), то согласно закону сложения скоростей,

$$G = \frac{G' + v}{1 + \frac{G'v}{c^2}}.$$

Так как связь между G' и ω' следует брать из оптики покоящихся сред [18], а ω', согласно сказанному выше, можно вычислить из ω, то групповую скорость G можно определить и в том случае, если задана только частота света относительно S, а также скорость движения тела и его природа.

II. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 7. Преобразование уравнений Максвелла—Лоренца

Будем исходить из уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left\{u_x\rho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\
\frac{1}{c}\left\{u_y\rho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\
\frac{1}{c}\left\{u_z\rho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y};
\end{aligned} \tag{5}$$

---

[17] См. M. von Laue. Ann. Phys., 1907, 23, 989.

[18] Именно: $G' = \dfrac{V'}{1 + \dfrac{1}{V'}\dfrac{dV'}{\partial\omega'}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{6}$$

В этих уравнениях через (X, Y, Z) обозначен вектор напряженности электрического поля, через (L, M, N) — вектор напряженности магнитного поля, через

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

— плотность электрического заряда, умноженная на 4π, и, наконец, через (u_x, u_y, u_z) — вектор скорости электрического заряда.

Эти уравнения вместе с предположением, что электрические заряды постоянно связаны с очень малыми твердыми телами (ионами, электронами), составляют основу лоренцовой электродинамики и оптики движущихся сред.

Пусть эти уравнения выполняются в системе S. Преобразуя их с помощью формул (1) к системе S', движущейся относительно S, как и в предыдущих рассуждениях, получаем уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left\{u'_x\rho' + \frac{\partial X'}{\partial t'}\right\} &= \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'}, \\
\frac{1}{c}\left\{u'_y\rho' + \frac{\partial Y'}{\partial t'}\right\} &= \frac{\partial L'}{\partial z'} - \frac{\partial N'}{\partial x'}, \\
\frac{1}{c}\left\{u'_z\rho' + \frac{\partial Z'}{\partial t'}\right\} &= \frac{\partial M'}{\partial x'} - \frac{\partial L'}{\partial z'};
\end{aligned} \tag{5'}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial t'} &= \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial t'} &= \frac{\partial Z'}{\partial x'} - \frac{\partial X'}{\partial z'}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial t'} &= \frac{\partial X'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial x'}.
\end{aligned} \tag{6'}$$

При этом введены обозначения

$$\begin{aligned}
X' &= X, \\
Y' &= \beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right), \\
Z' &= \beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right);
\end{aligned} \tag{7a}$$

$$L' = L,$$

$$M' = \beta\left(M + \frac{v}{c} Z\right), \tag{7б}$$

$$N' = \beta\left(N - \frac{v}{c} Y\right);$$

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} = \beta\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)\rho, \tag{8}$$

$$u' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}},$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, \tag{9}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}.$$

Полученные уравнения имеют тот же вид, что и уравнения (5) и (6). С другой стороны, из принципа относительности следует, что электродинамические процессы, отнесенные к системе S', протекают по тем же законам, что и в системе S. Отсюда мы прежде всего заключаем, что величины X', Y', Z' или L', M', N' суть компоненты напряженности электрического или магнитного поля, отнесенные к системе S' [19]. Далее, так как в соответствии с обращенными формулами (3) в соотношениях (9) величины u'_x, u'_y, u'_z равны компонентам скорости электрического заряда относительно S', то ρ' есть плотность электрических зарядов относительно S'. Таким образом, электродинамические основы теории Максвелла — Лоренца соответствуют принципу относительности.

По поводу интерпретации соотношений (7а) можно заметить следующее. Пусть точечный электрический заряд, покоящийся относительно системы S, равен в S «единице», т. е. действует на такой же покоящийся в системе S заряд на расстоянии в 1 *см* с силой в 1 *дину*. Согласно принципу относительности, этот электрический заряд будет равен «единице» и в том случае, если он покоится относительно S' и исследуется в системе

[19] Совпадение найденных уравнений с уравнениями (5) и (6) оставляет открытой возможность, что величины X' и т. д. отличаются постоянным множителем от векторов поля, отнесенных к системе S'. Однако легко показать, подобно тому как было сделано в § 3 для функции $\varphi(v)$, что этот множитель равен 1.

S' [20]. Если этот электрический заряд покоится относительно S, то, согласно определению, величина (X, Y, Z) представляет собой действующую на него силу, которая может быть измерена, например, пружинными весами, покоящимися относительно системы S. Вектор (X', Y', Z') имеет такой же смысл по отношению к системе S'.

В соответствии с соотношениями (7а) и (7б) напряженность электрического или магнитного поля сама по себе не существует, ибо от выбора системы координат зависит, есть ли в данном месте (точнее, в пространственно-временно́й окрестности точечного события) электрическое или магнитное поле. Далее можно увидеть, что вводившиеся до настоящего времени «пондеромоторные» силы, действующие на движущиеся в магнитном поле электрические заряды, представляют собой не что иное, как электрические силы, если ввести систему отсчета, покоящуюся относительно рассматриваемого заряда. Поэтому вопросы о локализации этих сил (например, в униполярных машинах) становятся беспредметными; именно, ответ будет различным в зависимости от состояния движения системы отсчета.

Смысл соотношения (8) виден из следующего. Пусть электрически заряженное тело покоится относительно системы S'. Тогда его суммарный заряд относительно S' есть $\varepsilon' = \int (\rho'/4\pi)\, dx'dy'dz'$. Каков его суммарный заряд ε в определенное время t в системе S? Из трех последних уравнений (1) следует, что для постоянного t справедливо соотношение

$$dx'dy'dz' = \beta\, dx\, dy\, dz.$$

Соотношение (8) в нашем случае имеет вид:

$$\rho' = \frac{1}{\beta}\rho.$$

Из этих двух равенств следует, что

$$\varepsilon' = \varepsilon.$$

Таким образом, из соотношения (8) следует, что электрический заряд не зависит от состояния движения системы отсчета. Если заряд произвольно движущегося тела остается постоянным с точки зрения движущейся вместе с ним системы отсчета, то он остается постоянным также относительно любой другой системы отсчета.

С помощью формул (1), (7) — (9) каждую задачу электродинамики или оптики движущихся сред можно свести к ряду задач электродина-

---

[20] Этот вывод основывается на предположении, что величина электрического заряда не зависит от предыстории его движения.

мики или оптики покоящихся сред, если при этом существенную роль играют только скорости, но не ускорения.

Рассмотрим еще один простой пример применения полученных здесь соотношений. Пусть в вакууме распространяется плоская световая волна, которая в системе S описывается уравнениями

$$X = X_0 \sin \Phi, \quad L = L_0 \sin \Phi,$$
$$Y = Y_0 \sin \Phi, \quad M = M_0 \sin \Phi, \quad \Phi = \omega\left(t - \frac{lx + my + nz}{c}\right).$$
$$Z = Z_0 \sin \Phi, \quad N = N_0 \sin \Phi,$$

Найдем свойства этой волны в случае, когда она рассматривается в системе S'. Применяя формулы преобразования (1) и (7), получаем

$$X' = X_0 \sin \Phi', \qquad L' = L_0 \sin \Phi',$$
$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{c} N_0\right) \sin \Phi', \qquad M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{c} Z_0\right) \sin \Phi',$$
$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{c} M_0\right) \sin \Phi', \qquad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{c} Y_0\right) \sin \Phi',$$
$$\Phi' = \omega'\left(t' - \frac{l'x' + m'y' + n'z'}{c}\right).$$

Так как функции X' и т. д. должны удовлетворять уравнениям (5′) и (6′), то нормаль к фронту волны, вектор напряженности электрического поля и вектор напряженности магнитного поля взаимноперпендикулярны и в системе S', причем два последних вектора равны друг другу. Мы уже рассматривали в § 6 соотношения, вытекающие из тождества $\Phi = \Phi'$; здесь нам предстоит определить еще амплитуду и поляризацию волны в системе S'.

Выберем плоскость XY параллельной нормали к фронту волны и рассмотрим прежде всего случай, когда вектор напряженности электрического поля параллелен оси Z. Тогда мы должны положить

$$X_0 = 0, \qquad L_0 = -A \sin \varphi,$$
$$Y_0 = 0, \qquad M_0 = -A \cos \varphi,$$
$$Z_0 = A, \qquad N_0 = 0,$$

причем φ означает угол между нормалью к фронту волны и осью X. В соответствии с изложенным выше получим

$$X' = 0, \qquad L' = -A \sin \varphi \sin \Phi',$$

$$Y' = 0, \qquad M' = \beta\left(-\cos\varphi + \frac{v}{c}\right) A \sin\Phi',$$

$$Z' = \beta\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right) A \sin\varphi', \qquad N' = 0.$$

Следовательно, если A' означает амплитуду волны в системе S', то

$$A' = A\,\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\,. \tag{10}$$

Для частного случая, когда вектор напряженности *магнитного* поля перпендикулярен направлению относительного движения и нормали к фронту волны, справедливо, очевидно, такое же уравнение. Поскольку общий случай можно получить суперпозицией этих двух частных случаев, при введении новой системы отсчета S' соотношение (10) остается справедливым, и угол между плоскостью поляризации и плоскостью, параллельной нормали к фронту волны и направлению относительного движения, в обеих системах одинаков.

III. МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ЭЛЕКТРОНА)

§ 8. Вывод уравнений движения (медленно ускоряемой) материальной точки или электрона

Пусть в электромагнитном поле движется частица с электрическим зарядом ε (в дальнейшем мы будем называть ее «электроном»), о законе движения которой мы предположим следующее.

Если электрон в определенный момент времени покоится в (неускоренной) системе S', то его движение в S' происходит в дальнейшем в соответствии с уравнениями

$$\mu\,\frac{d^2x'_0}{dt'^2} = \varepsilon X',$$

$$\mu\,\frac{d^2y'_0}{dt'^2} = \varepsilon Y',$$

$$\mu\,\frac{d^2z'_0}{dt'^2} = \varepsilon Z',$$

причем через x_0', y_0', z_0' обозначены координаты электрона относительно S', а через μ — постоянная, которую мы назовем массой электрона.

Введем систему S, движущуюся относительно S' как в предыдущих наших исследованиях, и преобразуем наши уравнения движения с помощью формул преобразования (1) и (7а). Первые из этих формул в нашем случае принимают вид

$$t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x_0\right),$$

$$x_0' = \beta(x_0 - vt),$$

$$y_0' = y,$$

$$z_0' = z.$$

Вводя обозначения $\frac{dx_0}{dt} = \dot{x}_0$ и т. д., из этих уравнений получаем

$$\frac{dx_0'}{dt'} = \frac{\beta(\dot{x}_0 - v)}{\beta\left(1 - \frac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)} \text{ и т. д.,}$$

$$\frac{d^2x_0'}{dt'^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_0'}{dt'}\right)}{\beta\left(1 - \frac{vx'_0}{c^2}\right)} = \frac{1}{\beta}\,\frac{\left(1 - \frac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)\ddot{x}_0 + (\dot{x}_0 - v)\frac{v\ddot{x}_0}{c^2}}{\left(1 - \frac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)} \text{ и т. д.}$$

Вводя эти выражения в написанные выше уравнения, подставляя $\dot{x}_0 = v$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$ и заменяя одновременно X', Y', Z' с помощью формул (7а), получаем

$$\mu\beta^3\ddot{x}_0 = \varepsilon X,$$

$$\mu\beta\ddot{y}_0 = \varepsilon\left(Y - \frac{v}{c}N\right),$$

$$\mu\beta\ddot{z}_0 = \varepsilon\left(Z + \frac{v}{c}M\right).$$

Эти уравнения являются уравнениями движения электрона для случая, когда в рассматриваемый момент времени $\dot{x}_0 = v$, $y_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$. В левой части этих уравнений вместо v можно ввести скорость q, определенную равенством

$$q = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2},$$

а в правой части заменить v на $\dot{x}_0$. Кроме того, прибавим в соответствующих местах члены, получаемые из $\frac{\dot{x}_0}{c}M$ и $\frac{-\dot{x}_0}{c}N$ циклической перестановкой и обращающиеся в нуль в рассматриваемом частном случае. Опуская индекс у x_0 и т. д., для рассматриваемого частного случая получаем уравнения, эквивалентные написанным выше,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\}=K_x,$$
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{y}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\}=K_y, \tag{11}$$
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{z}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\}=K_z;$$

здесь введены обозначения:

$$K_x=\varepsilon\left(X+\frac{\dot{y}}{c}N-\frac{\dot{z}}{c}M\right),$$
$$K_y=\varepsilon\left(Y+\frac{\dot{z}}{c}L-\frac{\dot{x}}{c}N\right), \tag{12}$$
$$K_z=\varepsilon\left(Z+\frac{\dot{x}}{c}M-\frac{\dot{y}}{c}L\right).$$

Эти уравнения не меняют своей формы, если ввести новую, находящуюся в относительном покое систему координат с иначе направленными осями. Поэтому они остаются в силе и в общем случае, а не только при $\dot{x}=\dot{z}=0$.

Вектор (K_x, K_y, K_z) мы назовем силой, действующей на материальную точку. В случае, когда величина q^2 мала по сравнению с c^2, компоненты K_x, K_y, K_z в соответствии с уравнениями (11) переходят в компоненты силы механики Ньютона. В следующих параграфах будет показано, что этот вектор и в других случаях играет такую же роль в релятивистской механике, какую сила — в классической механике.

Мы будем считать, что уравнения (11) справедливы и в том случае, когда сила, действующая на материальную точку, имеет неэлектромагнитную природу. В этом случае уравнения (11) не имеют физического смысла и их следует рассматривать как определение силы.

§ 9. Движение материальной точки и принципы механики

Умножая уравнения (5) и (6) по порядку на $X/4\pi$, $Y/4\pi$, . . ., $N/4\pi$ и интегрируя по объему, на границах которого напряженность электрического и магнитного полей равна нулю, получаем

$$\int\frac{\rho}{4\pi c}(u_xX+u_yY+u_zZ)\,d\omega+\frac{dE_e}{dt}=0, \tag{13}$$

где

$$E_e = \int \left[\frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{8\pi}\left(L^2 + M^2 + N^2\right)\right] d\omega$$

есть электромагнитная энергия рассматриваемого объема. В соответствии с законом сохранения энергии первый член соотношения (13) соответствует энергии, передаваемой в единицу времени от электромагнитного поля носителям электрических зарядов. Если электрические заряды жестко связаны с материальной точкой (электроном), то падающая на них часть этой энергии дается выражением

$$\varepsilon(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}),$$

где (X, Y, Z) означает напряженность *внешнего* электрического поля, т. е. поля за вычетом того, которое создается зарядом самого электрона. В силу уравнений (12) это выражение может быть записано в виде

$$K_x\dot{x} + K_y\dot{y} + K_z\dot{z}.$$

Таким образом, вектор (K_x, K_y, K_z), названный в предыдущем параграфе «силой», связан с совершаемой работой так же, как и сила в механике Ньютона.

Следовательно, если уравнения (11) умножить соответственно на $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, сложить и проинтегрировать по времени, то в результате должны получить кинетическую энергию материальной точки (электрона). В самом деле,

$$\int (K_x\dot{x} + K_y\dot{y} + K_z\dot{z})\, dt = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - (q^2/c^2)}} + \text{const}. \tag{14}$$

Тем самым показано, что уравнения движения (11) удовлетворяют закону сохранения энергии. Покажем теперь, что они соответствуют также закону сохранения количества движения.

Умножая второе и третье из уравнений (5) и второе и третье из уравнений (6) соответственно на $N/4\pi$, $-M/4\pi$, $-Z/4\pi$, $Y/4\pi$, складывая и интегрируя по объему, на границах которого напряженность поля обращается в нуль, получаем

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN - ZM)\, d\omega\right] + \int \frac{\rho}{4\pi}\left(X + \frac{u_y}{c}N - \frac{u_z}{c}M\right) d\omega = 0, \tag{15}$$

или, в соответствии с уравнениями (12),

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN - ZM)\, d\omega\right] + \sum K_x = 0. \tag{15a}$$

Если электрические заряды прикреплены к движущейся материальной точке (электрону), это соотношение в силу уравнений (11) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN - ZM)\,d\omega\right] + \sum \frac{\mu \dot{x}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} = 0. \qquad (15б)$$

Это соотношение вместе с получаемыми из него путем циклической перестановки соотношениями выражает закон сохранения количества движения в рассматриваемом здесь случае. Следовательно, величина $\xi = \frac{\mu \dot{x}}{\sqrt{1-q^2/c^2}}$ играет роль количества движения материальной точки, и в соответствии с уравнениями (11), как и в классической механике, имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = K_x.$$

Возможность введения количества движения материальной точки основана на том, что силу в уравнениях движения, или второй член соотношения (15), можно представить в виде производной по времени.

Далее непосредственно видно, что нашим уравнениям движения материальной точки можно придать форму уравнений Лагранжа, ибо в соответствии с уравнениями (11)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right] = K_x \text{ и т. д.},$$

причем здесь введено обозначение

$$H = -\mu c^2 \sqrt{1-(q^2/c^2)} + \text{const}.$$

Уравнения движения можно представить также в виде принципа Гамильтона

$$\int_{t_0}^{t} (dH + A)\,dt = 0,$$

причем время t, начальное и конечное положения не варьируются; здесь A означает виртуальную работу

$$A = K_x\delta x + K_y\delta y + K_z\delta z.$$

Наконец, составим также канонические уравнения движения (уравнения Гамильтона). Для этого надо ввести «импульсные переменные» (составляющие количества движения) ξ, η, ζ, причем, как и выше,

$$\xi = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \frac{\mu \dot{x}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} \text{ и т. д.}$$

Если кинетическую энергию L рассматривать как функцию ξ, η, ζ и ввести обозначение $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho^2$, то получим

$$L = \mu c^2 \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\mu^2 c^2}} + \text{const},$$

и уравнения Гамильтона примут вид

$$\frac{d\xi}{dt} = K_x, \qquad \frac{d\eta}{dt} = K_y, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = K_z,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \xi}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \eta}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \zeta}.$$

§ 10. О возможности экспериментальной проверки теории движения материальной точки. Опыты Кауфмана

Сравнение полученных в последних параграфах результатов с опытом возможно только тогда, когда электрически заряженные материальные точки имеют скорости, сравнимые со скоростью света, так что уже нельзя будет пренебречь квадратом скорости по сравнению с c^2. Это условие выполняется для быстрых катодных лучей и для электронов, испускаемых радиоактивными веществами (β-лучей).

В случае электронных лучей имеются три величины, взаимосвязь которых может быть предметом более тщательного экспериментального исследования, а именно: ускоряющий потенциал, или кинетическая энергия лучей, отклонение электрическим полем и отклонение магнитным полем.

Ускоряющий потенциал П определяется в соответствии с (14) из формулы

$$\Pi\varepsilon = \mu \left\{ \frac{c^2}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} - 1 \right\}.$$

Для вычисления двух других величин выпишем два последние уравнения (11) для случая, когда движение первоначально происходит параллельно оси x; обозначая через ε абсолютную величину заряда электрона,

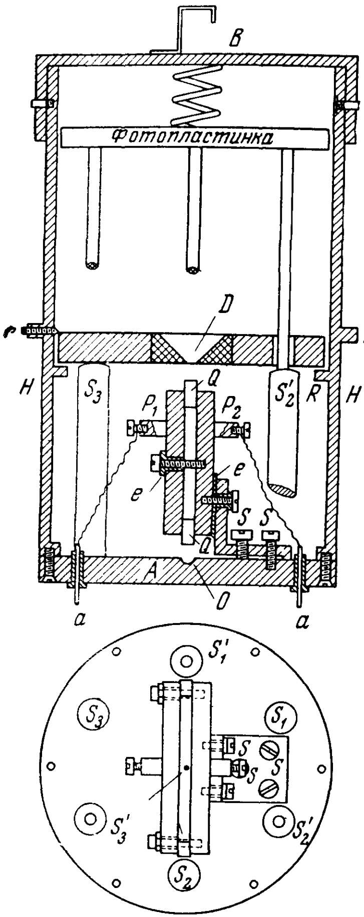

Рис. 1.

получаем

$$-\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\varepsilon}{\mu}\sqrt{1-(q^2/c^2)}\left(Z+\frac{q}{c}M\right).$$

Если Z и M — единственные компоненты отклоняющих полей, то искривление происходит в плоскости XZ и радиус кривизны R определяется из формулы $q^2/R=[d^2z/dt^2]$. Принимая в качестве меры электрического или магнитного отклонения, соответственно, величину $A_e=\frac{1}{R}:Z$ или $A_m=\frac{1}{R}:M$ для случая, когда отлична от нуля *только* одна составляющая электрического или магнитного поля, получаем

$$A_e=\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}{q^2},$$

$$A_m=\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}{cq}.$$

В случае катодных лучей необходимо измерять все три величины П, A_e и A_m; однако исследования достаточно быстрых катодных лучей пока еще не производились. В случае β-лучей (практически) можно наблюдать только величины A_e и A_m. В. Кауфман с тщательностью, достойной восхищения, определил связь между A_m и A_e для β-лучей, испускаемых крупинкой бромистого радия [21].

Его экспериментальная установка, главные части которой изображены в натуральную величину на рис. 1, состояла в сущности из латунного цилиндра H, помещенного внутри эвакуированного непрозрачного стеклянного сосуда. На нижней крышке цилиндра A в небольшом углублении O находится крупинка радия. Испускаемые им β-лучи пересекают

[21] W. Kaufmann. Ann. Phys., 1906, 19. Оба рисунка взяты из этой работы Кауфмана.

пространство между пластинами конденсатора P_1 и P_2, проходят через диафрагму D диаметром 0,2 *мм* и затем падают на фотопластинку. Лучи отклоняются в перпендикулярном направлении электрическим полем, приложенным к пластинам P_1 и P_2 конденсатора, а также магнитным полем того же направления, возбуждаемым большим постоянным магнитом, так что благодаря действию лучей определенной скорости на пластинке получается точка, а в результате совместного действия частиц разной скорости — кривая.

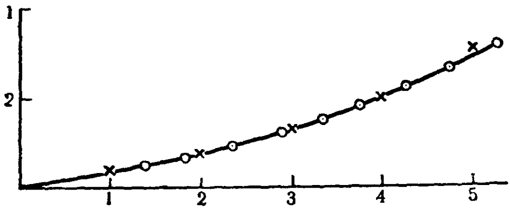

Рис. 2.

На рис. 2 показана эта кривая [22], изображающая с точностью до масштаба абсцисс и ординат связь между A_m (абсцисса) и A_e (ордината). Крестиками на кривой указаны значения, вычисленные согласно теории относительности, причем для ε/μ принято значение $1{,}878 \cdot 10^7$.

Принимая во внимание трудность исследования, такое согласие можно считать удовлетворительным. Однако наблюдаемые отклонения являются систематическими и значительно превосходят экспериментальные ошибки измерений Кауфмана. Тот факт, что вычисления Кауфмана не содержат ошибок, следует из того, что Планк [23], применяя другой метод вычислений, получил результаты, полностью согласующиеся с результатами Кауфмана.

Вопрос о том, являются ли причинами систематических отклонений еще не учтенные источники ошибок или несоответствие основ теории относительности экспериментальным фактам, можно с уверенностью решить лишь тогда, когда будут получены более разнообразные экспериментальные данные.

---

[22] Указанный на рис. 2 масштаб означает миллиметры на фотопластинке. Изображенная кривая является не точно наблюдаемой кривой, а «приведенной к бесконечно малому отклонению».

[23] Ср. M. Planck. Verhandl. Dtsch. Phys. Ges. VIII. Jahrg., 1906, N 20; IX. Jahrg., 1907, № 14.

Необходимо еще отметить, что теории движения электронов Абрагама[24] и Бухерера[25] дают кривые, согласующиеся с экспериментальной кривой значительно лучше, чем кривая, соответствующая теории относительности. Однако, по нашему мнению, эти теории вряд ли достоверны, поскольку их основные предположения о массе движущегося электрона не вытекают из теоретической системы, охватывающей более широкий круг явлений.

IV. К МЕХАНИКЕ И ТЕРМОДИНАМИКЕ СИСТЕМ

§ 11. О зависимости массы от энергии

Рассмотрим физическую систему, окруженную оболочкой, непрозрачной для излучения. Пусть эта система не закреплена в пространстве и не подвержена действию никаких иных сил, кроме электрических и магнитных сил окружающего пространства. Благодаря последним в систему может поступать энергия в форме работы и теплоты и эта энергия может претерпевать некие изменения внутри системы. Согласно соотношению (13), полученная физической системой энергия, отнесенная к S, определяется выражением

$$\int dE = \int dt \int \frac{\rho}{4\pi} (X_a u_x + Y_a u_y + Z_a u_z)\, d\omega,$$

где (X_a, Y_a, Z_a) означает вектор внешнего не принадлежащего к системе поля и $\rho/4\pi$ — плотность электричества в системе. Преобразуем это выражение, обращая соотношения (7а), (8) и (9) и учитывая, что, согласно уравнениям (1), функциональный определитель

$$\frac{D(x', y', z', t')}{D(x, y, z, t)}$$

равен единице. В результате получаем

$$\int dE = \beta \iint \frac{\rho'}{4\pi} (u'_x X'_a + u'_y Y'_a + u'_z Z'_a)\, d\omega'\, dt' +$$

$$+ \beta v \iint \frac{\rho'}{4\pi} \left(X'_a + \frac{u'_y}{c} N'_a - \frac{u'_z}{c} M'_a \right) d\omega'\, dt',$$

[24] M. Abraham. Gött. Nachr., 1902.

[25] A. H. Bucherer. Math. Einführung in die Elektronentheorie. Leipzig, 1904, 58 (Ср. примечание после статьи 4, стр. 50.—*Ред.*).

или, поскольку и в системе S' должен соблюдаться закон сохранения энергии,

$$dE = \beta dE' + \beta v \int [\sum K'_x]\, dt'; \tag{16}$$

здесь смысл обозначений ясен.

Применим это соотношение к случаю, когда рассматриваемая система движется равномерно и прямолинейно так, что она, как целое, покоится относительно системы отсчета S'. Тогда, если части системы движутся относительно S' так медленно, что квадраты скоростей относительно S' пренебрежимо малы по сравнению с c^2, в системе отсчета S' можно применять законы механики Ньютона. Например, в соответствии с теоремой о движении центра тяжести рассматриваемая система (точнее, ее центр тяжести) будет оставаться длительное время в покое лишь в том случае, если для произвольного значения t'

$$\sum K'_x = 0.$$

Несмотря на это, второй член в правой части соотношения (16) нельзя опускать, так как интегрирование по времени следует проводить между двумя определенными значениями t, а не t'.

Если же в начале и в конце рассматриваемого промежутка времени внешние силы не действуют на систему, то этот член обращается в нуль, так что мы получаем просто

$$dE = \beta dE'.$$

Из этого равенства мы прежде всего заключаем, что энергия (равномерно) движущейся системы, не подверженной действию внешних сил, представляет собой функцию двух переменных, а именно: энергии E_0 системы относительно сопутствующей системы отсчета [26] и скорости перемещения системы q, причем

$$\frac{\partial E}{\partial E_0} = \frac{1}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}.$$

Отсюда следует, что

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} E_0 + \varphi(q),$$

где $\varphi(q)$ — некоторая, пока еще не известная функция q.

---

[26] Здесь, как и в дальнейшем, нижний индекс 0 применяется для указания того, что рассматриваемая величина относится к системе отсчета, покоящейся по отношению к данной физической системе. Поскольку рассматриваемая система покоится относительно системы отсчета S', можно заменить здесь E' на E_0.

В § 8 и 9 мы уже исследовали случай, когда E_0 равна нулю, т. е. когда энергия движущейся системы является функцией *только скорости* q. Из соотношения (14) непосредственно следует, что мы должны положить

$$\varphi(q) = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} + \text{const}.$$

Таким образом, мы получаем

$$E = \left(\mu + \frac{E_0}{c^2}\right)\frac{c^2}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}, \tag{16a}$$

причем здесь постоянная интегрирования опущена. Из сравнения этого выражения для E с содержащимся в соотношении (14) выражением для кинетической энергии материальной точки видно, что оба выражения имеют одинаковую форму; в отношении зависимости энергии от скорости рассматриваемая физическая система ведет себя как материальная точка с массой M, причем M зависит от энергии E_0 системы согласно формуле

$$M = \mu + \frac{E_0}{c^2}. \tag{17}$$

Этот результат имеет чрезвычайно важное теоретическое значение: в последнем соотношении инертная масса и энергия физической системы выступают как однородные величины. Масса μ эквивалентна в смысле инерции количеству энергии μc^2. Поскольку E_0 можно отсчитывать от произвольного значения энергии, мы никак не можем отличить «истинную» массу системы от «кажущейся». Гораздо естественнее считать, что всякая инертная масса представляет собой запас энергии.

В соответствии с нашим результатом закон постоянства массы выполняется для отдельной физической системы только тогда, когда сохраняется ее энергия; в этом случае он равносилен закону сохранения энергии. Конечно, изменения массы в известных нам физических процессах всегда неизмеримо малы. Например, убыль массы системы, отдающей 1000 *гкал*, составляет $4{,}6 \cdot 10^{-11}$ *г*.

При радиоактивном распаде вещества освобождаются огромные количества энергии; но достаточно ли велико изменение массы, чтобы его можно было обнаружить.

По этому поводу Планк пишет: «Согласно И. Прехту [27], грамм-атом радия, если его окружить достаточно толстым слоем свинца, выделяет в час $134{,}4 \times 225 = 30\,240$ *гкал*. В соответствии с соотношением (17) уменьшение массы за час будет равно

$$\frac{30\,240 \cdot 419 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^{20}}\ г = 1{,}41 \cdot 10^{-6}\ мг.$$

[27] J. Precht. Ann. Phys., 1906, 21, 599.

За год уменьшение массы составит 0,012 *мг*. Эта величина, конечно, все еще так мала, что она пока еще лежит за пределами экспериментальных возможностей, особенно если учесть высокий атомный вес радия». Напрашивается вопрос, нельзя ли достичь цели, применяя какой-либо косвенный метод. Пусть M — атомный вес распадающегося атома, m_1, m_2 и т. д.— атомные веса конечных продуктов радиоактивного распада; тогда

$$M - \sum m = \frac{E}{c^2},$$

где E — энергия, выделяемая при распаде одного грамм-атома радиоактивного элемента; ее можно вычислить, если известны энергия, выделяемая в единицу времени при стационарном распаде, и среднее время распада. Успех применения метода зависит в первую очередь от того, существуют ли радиоактивные превращения, для которых $(M - \Sigma m)/M$ не слишком мало в сравнении с единицей. Для вышеупомянутого случая радия, если время жизни последнего принять равным 2600 лет, получается

$$\frac{M - \sum m}{M} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 2600}{250} = 0{,}00012.$$

Следовательно, если время жизни радия определено хоть в какой-то мере правильно, для проверки нашей формулы нужно было бы знать атомные веса соответствующих элементов с точностью до пятого знака. Это, конечно, недостижимо. Однако не исключено, что будут открыты радиоактивные процессы, в которых в энергию радиоактивных излучений превращается значительно бо́льшая часть массы исходного атома, чем в случае радия. По крайней мере, напрашивается вывод, что выделение энергии при распаде одного атома различается для разных веществ не меньше, чем скорость распада.

До сих пор молчаливо предполагалось, что такое изменение массы можно измерить обычно применяемым для измерения инструментом — весами, т. е. что соотношение

$$M = \mu + \frac{E_0}{c^2}$$

справедливо не только для *инертной* массы, но и для *тяготеющей* массы, или, другими словами, что инерция и тяжесть системы при всех обстоятельствах строго пропорциональны. Например, мы должны были бы предположить, что замкнутое в полости излучение обладает не только инерцией, но и весом. Эта пропорциональность между инертной и тяжелой массой соблюдается без исключения для всех тел с достигнутой до-настоящего времени точностью, так что впредь до доказательства обратного мы должны предполагать универсальность этой пропорциональности. В последней главе настоящей работы мы приведем новый аргумент в пользу этого предположения.

§ 12. Энергия и количество движения движущейся системы

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим свободно движущуюся в пространстве систему, окруженную непроницаемой для излучения оболочкой. Как и прежде, обозначим через X_a, Y_a, Z_a и т. д. компоненты внешнего электромагнитного поля, благодаря которому данная система обменивается энергией с другими системами. С помощью метода, примененного при выводе формулы (15), для этого внешнего поля получаем

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(Y_a N_a - Z_a M_a)\, d\omega\right] + \int \frac{\rho}{4\pi}\left(X_a + \frac{u_y}{c} N_a - \frac{u_z}{c} M_a\right) d\omega = 0.$$

Предположим теперь, что закон сохранения количества движения всегда выполняется. Тогда та часть второго члена этого соотношения, в которой интегрирование производится по поверхности оболочки, должна представляться в виде производной по времени от величины G_x, полностью определяемой мгновенным состоянием системы; величину G_x назовем x-компонентой количества движения системы. Найдем теперь закон преобразования величины G_x. Применяя формулы преобразования (1) и (7) — (9) в точности так же, как в предыдущих параграфах, получаем соотношение

$$\int dG_x = \beta \int\int \frac{\rho'}{4\pi}\left(X'_a + \frac{u'_y}{c} N'_a - \frac{u'_z}{c} M'_a\right) d\omega'\, dt' + \\ + \frac{\beta v}{c^2} \int\int \frac{\rho'}{4\pi}(X'_a u'_x + Y'_a u'_y + Z'_a u'_z)\, d\omega'\, dt',$$

или

$$dG_x = \frac{\beta v}{c^2} dE' + \beta \int \left[\sum K'_x\right] dt'. \tag{18}$$

Пусть теперь тело движется неускоренно так, что оно в течение продолжительного времени покоится относительно системы отсчета S'; тогда снова

$$\sum K'_x = 0.$$

Несмотря на то, что пределы интегрирования по времени зависят от x', второй член в правой части равенства опять обращается в нуль, если тело не подвергается действию внешних сил до и после рассматриваемого изменения; в этом случае

$$dG_x = \beta \frac{v}{c^2} dE'.$$

Отсюда следует, что количество движения системы, не подверженной действию внешних сил, является функцией только двух переменных, а именно: энергии E_0 в системе отсчета, движущейся вместе с рассматриваемой системой, и скорости q переносного движения. Очевидно,

$$\frac{\partial G}{\partial E_0} = \frac{q}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}.$$

Отсюда также следует, что

$$G = \frac{q}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} \left(\frac{E_0}{c^2} + \psi(q) \right),$$

где $\psi(q)$ — некоторая пока еще неизвестная функция q.

Поскольку $\psi(q)$ есть не что иное, как количество движения в случае, когда оно определяется только скоростью, из формулы (15б) следует

$$\psi(q) = \frac{\mu q}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}.$$

Таким образом, мы получаем

$$G = \frac{q}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} \left\{ \mu + \frac{E_0}{c^2} \right\}. \tag{18a}$$

Эта формула отличается от формулы для количества движения материальной точки только тем, что μ заменяется на $(\mu + \frac{E_0}{c^2})$, в согласии с результатом предыдущих параграфов.

Найдем теперь энергию и количество движения тела, покоящегося в системе отсчета S, при условии, что тело постоянно подвержено действию внешних сил. Хотя и в этом случае для любого t'

$$\sum K'_x = 0,$$

входящий в соотношения (16) и (18) интеграл

$$\int \left[\sum K'_x \right] dt'$$

не обращается в нуль, поскольку его пределами являются определенные значения t, а не t'. Поскольку, согласно первому из уравнений (1), разрешенному относительно t,

$$t = \beta\left(t' + \frac{v}{c^2}\, x\right),$$

пределы интегрирования по t' суть

$$\frac{t_1}{\beta} + \frac{v}{c^2}\, x' \text{ и } \frac{t_2}{\beta} - \frac{v}{c^2}\, x',$$

причем t_1 и t_2 не зависят от x', y', z'. Таким образом, пределы интегрирования по времени в системе отсчета S' зависят от положения точки приложения сил. Представим рассматриваемый интеграл в виде суммы трех интегралов:

$$\int \left[\sum K_x'\right] dt' = \int\limits_{\frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{c^2}x'}^{t_1/\beta} + \int\limits_{t_1/\beta}^{t_2/\beta} + \int\limits_{t_2/\beta}^{\frac{t_2}{\beta} - \frac{v}{c^2}x'} .$$

Второй из этих интегралов обращается в нуль, поскольку его пределы интегрирования постоянны по времени. Далее, если силы K_x' меняются с произвольной быстротой, оба других интеграла нельзя вычислить; в этом случае в рамках применяемой здесь теории вообще нельзя говорить об энергии или количестве движения системы [28]. Если же эти силы очень мало меняются в интервале времени порядка vx'/c^2, то можно положить

$$\int\limits_{\frac{t_1}{\beta} - \frac{vx'}{c^2}}^{t_1/\beta} \left[\sum K_x'\right] dt' = \sum K_x' \int\limits_{\frac{t_1}{\beta} - \frac{vx'}{c^2}}^{t_1/\beta} dt' = \frac{v}{c^2} \sum x' K_x'.$$

Заменяя аналогичным способом третий интеграл, получаем

$$\int \left[\sum K_x'\right] dt' = -d\left\{\frac{v}{c^2} \sum x' K_x'\right\}.$$

Теперь из соотношений (16) и (18) можно без труда вычислить энергию и количество движения; находим

$$E = \left(\mu + \frac{E_0}{c^2}\right) \frac{c^2}{\sqrt{1 - (q^2/c^2)}} - \frac{q^2/c^2}{\sqrt{1 - (q^2/c^2)}} \sum (\delta_0 K_{0\delta}), \tag{16б}$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - (q^2/c^2)}} \left(\mu + \frac{E_0 - \sum (\delta_0 K_{0\delta})}{c^2}\right), \tag{18б}$$

---

[28] Ср. A. Einstein. Ann. Phys., 1907, **23**, 371, § 2. (Статья 7).

причем $K_{0\delta}$ означает продольную составляющую силы, отнесенной к сопутствующей системе координат, δ_0 — измеренное в той же системе расстояние точки приложения этой силы от плоскости, перпендикулярной направлению движения.

Если внешней силой, как мы будем предполагать в дальнейшем, является давление p_0, не зависящее от направления и действующее везде по нормали к поверхности системы, то, в частности,

$$\sum(\delta_0 K_{0\delta}) = -p_0 V_0, \tag{19}$$

где V_0 — объем системы, отнесенный к сопутствующей системе отсчета. В этом случае формулы (16б) и (18б) принимают вид

$$E = \left(\mu + \frac{E_0}{c^2}\right)\frac{c^2}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} + \frac{q^2/c^2}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\, p_0 V_0, \tag{16в}$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\left(\mu + \frac{E_0 + p_0 V_0}{c^2}\right). \tag{18в}$$

§ 13. Объем и давление движущейся системы. Уравнения движения

Для определения состояния рассматриваемой системы используем величины E_0, p_0, V_0, определенные в системе отсчета, сопутствующей физической системе. Однако вместо указанных величин можно также использовать соответствующие величины, определенные в той системе отсчета, к которой относится количество движения G. Для этого необходимо исследовать, как меняется объем и давление при введении новой системы отсчета.

Пусть тело покоится в системе отсчета S'. Пусть далее V' — его объем в системе отсчета S', а V — его объем в системе отсчета S. Из уравнений (2) непосредственно следует

$$\int dx\, dy\, dz = \sqrt{1-(v^2/c^2)} \int dx'\, dy'\, dz',$$

или

$$V = V'\sqrt{1-(v^2/c^2)}.$$

Заменяя в соответствии с нашими обозначениями V' на V_0 и v на q, получаем

$$V = V_0\sqrt{1-(q^2/c^2)}. \tag{20}$$

Далее, чтобы найти формулу преобразования для сил давления, необходимо исходить из формул преобразования, справедливых для сил в общем случае. Поскольку мы определили движущие силы в § 8 так, что их можно заменить силовым воздействием электромагнитных полей на электрические заряды, здесь можно ограничиться отысканием формул преобразования для электромагнитных сил [29].

Рассмотрим электрический заряд ε, покоящийся относительно S'. Действующая на него сила в соответствии с соотношениями (12) определяется формулами

$$K_x = \varepsilon X, \qquad K'_x = \varepsilon X',$$
$$K_y = \varepsilon \left(Y - \frac{v}{c} N\right), \qquad K'_y = \varepsilon Y',$$
$$K_z = \varepsilon \left(Z + \frac{v}{c} M\right), \qquad K'_z = \varepsilon Z'.$$

Из этих формул и из формул (7а) следует

$$\begin{aligned} K'_x &= K_x, \\ K'_y &= \beta K_y, \\ K'_z &= \beta K_z. \end{aligned} \tag{21}$$

По этим формулам можно вычислить силы, если они известны в сопутствующей системе отсчета.

Рассмотрим теперь силу давления, действующую на элемент поверхности s', покоящийся относительно S'; тогда

$$K'_x = p's' \cos l' = p's'_x,$$
$$K'_y = p's' \cos m' = p's'_y,$$
$$K'_z = p's' \cos n' = p's'_z,$$

где l', m', n' — направляющие косинусы нормали (направленной внутрь тела), а s'_x, s'_y, s'_z — проекции s'.

Из уравнений (2) следует, что

$$s'_x = s_x,$$
$$s'_y = \beta s_y,$$
$$s'_z = \beta s_z,$$

[29] Этим обстоятельством оправдывается также применявшийся в предыдущих исследованиях метод, который заключался в том, что мы вводили между рассматриваемыми системами взаимодействие лишь чисто электромагнитного характера. Результаты остаются справедливыми и в самом общем случае.

причем s'_x, s'_y, s'_z — проекции элемента поверхности относительно системы отсчета S. Для составляющих рассматриваемой силы давления K_x, K_y, K_z относительно системы отсчета S из последних трех систем уравнений получаем:

$$K_x = K'_x = p'S'_x = p'S_x = p's\cos l,$$

$$K_y = \frac{1}{\beta}K'_y = \frac{1}{\beta}p'S'_y = p'S_y = p's\cos m,$$

$$K_z = \frac{1}{\beta}K'_z = \frac{1}{\beta}p'S'_z = p'S_z = p's\cos n,$$

причем s означает площадь элемента поверхности, l, m, n — направляющие косинусы его нормали в системе отсчета S. Таким образом, мы получаем, что давление p' относительно сопутствующей системы координат можно заменить в другой системе отсчета давлением той же величины, так же нормальным к элементу поверхности. Следовательно, в наших обозначениях

$$p' = p_0. \tag{22}$$

Соотношения (16в), (20) и (22) дают нам возможность определять состояние физической системы не только определенными в сопутствующей системе отсчета величинами E_0, V_0, p_0, но и величинами E, V, p, определенными в той же системе отсчета, что и количество движения G и скорость q системы. Например, если состояние рассматриваемой системы для сопутствующего наблюдателя полностью определяется двумя переменными (V_0 и E_0), а следовательно, ее уравнение состояния можно понимать как соотношение между p_0, V_0 и E_0, то уравнение состояния можно с помощью названных соотношений привести к виду

$$\varphi\,(q, p, V, E) = 0.$$

Преобразуя соответственно соотношение (18в), получаем

$$G = q\{\mu + (E + pV)/c^2\}. \tag{18г}$$

Это равенство вместе с соотношениями, выражающими закон сохранения количества движения

$$\frac{dG_x}{dt} = \sum K_x \text{ и т. д.},$$

полностью определяет переносное движение системы как целого, если кроме величин ΣK_x и т. д. известны также величины E, p, V как функции времени, или если вместо последних трех функций известны три эквивалентных им параметра, характеризующих движение системы.

§ 14. Примеры

Пусть рассматриваемая система состоит из электромагнитного излучения, заключенного в невесомой полости, стенки которой уравновешивают давление излучения. Если на полость не действуют никакие внешние силы, то ко всей системе (включая полое тело) можно применить соотношения (16а) и (18а). Таким образом,

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}},$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} E_0 = q\frac{E}{c^2},$$

где E_0 — энергия излучения в сопутствующей системе отсчета.

Наоборот, если стенки полости идеально гибки и растяжимы, так что оказываемое на них давление излучения должно уравновешиваться внешними силами, исходящими от тел, не принадлежащих к рассматриваемой системе, то следует применить уравнения (16в) и (18в), в которые надлежит подставить известное значение давления излучения

$$p_0 = \frac{1}{3}\frac{E_0}{c^2};$$

в результате получим

$$E = \frac{E_0\left(1+\frac{1}{3}\frac{q^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}},$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\cdot\frac{4}{3}\frac{E_0}{c^2}.$$

Рассмотрим далее случай электрически заряженного невесомого тела. Если внешние силы на него не действуют, можно опять применить формулы (16а) и (18а). Обозначив через E_0 электрическую энергию в сопутствующей системе, получим

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}},$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\cdot\frac{E_0}{c^2}.$$

Одна часть этих значений E и G связана с электромагнитным полем, другая же — с невесомым телом, подверженным действию сил, обусловленных его зарядом [30].

[30] Ср. А. Эйнштейн. Ann. Phys., 1907, 23, 371. (Статья 7).

§ 15. Энтропия и температура движущихся систем

Из совокупности переменных, определяющих состояние физической системы, мы рассматривали пока лишь давление, объем, энергию, скорость и количество движения, но еще не говорили о тепловых величинах. Это объясняется тем, что для движения системы безразлично, в какой форме подводится к ней энергия, так что пока у нас не было необходимости учитывать различие между теплотой и механической работой. Теперь же мы рассмотрим еще тепловые величины.

Предположим, что состояние движущейся системы полностью определяется величинами q, V, E. Для такой системы мы должны, очевидно, рассматривать в качестве подведенной теплоты dQ суммарный прирост энергии за вычетом работы, совершенной давлением и затраченной на увеличение количества движения, т. е.

$$dQ = dE + pdV - qdG. \tag{23}$$

После того как определена подведенная теплота для движущейся системы, путем рассмотрения обратимого кругового процесса можно ввести абсолютную температуру T и энтропию η движущейся системы точно так же, как это делается в термодинамике. Для обратимых процессов и в этом случае справедливо соотношение

$$dQ = Td\eta. \tag{24}$$

Теперь нам предстоит вывести уравнения, связывающие dQ, η, T и соответствующие им величины dQ_0, η_0, T_0 в сопутствующей системе отсчета. Относительно энтропии повторим здесь рассуждение Планка [31], причем заметим, что под «штрихованной» или «нештрихованной» системой отсчета следует понимать систему отсчета S' или S соответственно.

«Представим себе, что при помощи некоего обратимого адиабатического процесса тело переводится из одного состояния, в котором оно покоится в нештрихованной системе отсчета, в другое состояние, в котором оно покоится в штрихованной системе отсчета. Обозначая энтропию тела в нештрихованной системе в начальном состоянии через η_1, а в конечном состоянии — через η_2, в силу обратимости и адиабатичности можем написать $\eta_1 = \eta_2$. Однако процесс остается обратимым и адиабатическим и в штрихованной системе, и мы имеем, следовательно, также $\eta_1' = \eta_2'$.» [32]

«Предположим теперь, что $\eta_1' \neq \eta_1$, например $\eta_1' > \eta_1$. Это означало бы, что энтропия тела в движущейся системе отсчета больше, чем энтропия

[31] M. P l a n c k. Zur Dynamik bewegter Systeme. Sitzungber. preuß. Akad. Wiss., 1907.

[32] См. там же.

в той же системе отсчета, если эта система покоится. Тогда в соответствии с этим предположением должно бы также быть $\eta_2 > \eta_2'$, ибо во втором состоянии тело покоится в штрихованной системе отсчета, тогда как относительно нештрихованной системы оно движется. Однако эти два неравенства противоречат полученным выше двум равенствам. Также не может быть $\eta_1' > \eta_1$; следовательно, $\eta_1' = \eta_1$, и вообще $\eta' = \eta_1$, т. е. энтропия тела не зависит от выбора системы отсчета».

В наших обозначениях мы должны положить

$$\eta = \eta_0. \tag{25}$$

Вводя в правую часть равенства (23) с помощью соотношений (16в), (18в), (20) и (22) величины E_0, p_0 и V_0, получаем

$$dQ = \sqrt{1-(q^2/c^2)}\,(dE_0 + p_0 dV_0),$$

$$dQ = dQ_0\sqrt{1-(q^2/c^2)}. \tag{26}$$

Поскольку, согласно (24), справедливы два соотношения

$$dQ = Td\eta,$$

$$dQ_0 = Td\eta_0,$$

с учетом (25) и (26) окончательно получаем

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1-(q^2/c^2)}.$$

Таким образом, температура системы в движущейся системе отсчета всегда меньше, чем в покоящейся системе отсчета.

§ 16. Динамика системы и принцип наименьшего действия

В своей работе «К динамике движущихся систем» Планк исходит из принципа наименьшего действия (и из формул преобразования для давления и температуры излучения в полости) и приходит к результатам, совпадающим с нашими результатами. Поэтому возникает вопрос, какова взаимосвязь между основами его работы и настоящего исследования.

Мы исходили из закона сохранения энергии и закона сохранения количества движения. Обозначив через F_x, F_y, F_z компоненты равнодействующей всех сил, приложенных к системе, можно сформулировать эти законы для обратимых процессов и системы, состояние которой определяется переменными q, V, T, следующим образом:

$$dE = F_x dx + F_y dy + F_z dz - pdV + Td\eta, \tag{28}$$

$$F_x = \frac{dG_x}{dt} \text{ и т. д.} \tag{29}$$

Из этих соотношений, учитывая, что

$$F_x dx = F_x \dot{x} dt = \dot{x} dG_x = d(\dot{x} G_x) - G_x d\dot{x} \text{ и т. д.}$$

и

$$Td\eta = d(T\eta) - \eta dT,$$

получаем соотношение

$$d(-E + T\eta + qG) = G_x d\dot{x} + G_y d\dot{y} + G_z d\dot{z} + pdV + \eta dT.$$

Поскольку правая часть должна быть также полным дифференциалом, отсюда, учитывая соотношение (29), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right) = F_x, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right) = F_y, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\right) = F_z,$$

$$\frac{\partial H}{\partial V} = p, \qquad \frac{\partial H}{\partial T} = \eta.$$

Это и есть те выводимые из принципа наименьшего действия уравнения, из которых исходил Планк.

V. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ТЯГОТЕНИЕ

§ 17. Ускоренная система отсчета и гравитационное поле

До сих пор мы применяли принцип относительности, т. е. требование независимости законов природы от состояния движения системы отсчета, только к *неускоренным* системам отсчета. Можно ли представить себе, что принцип относительности выполняется и для систем, движущихся относительно друг друга с ускорением?

Правда, пока еще нет возможности подробно обсуждать здесь этот вопрос. Но поскольку этот вопрос должен возникнуть перед каждым, кто следил за применениями принципа относительности до настоящего времени, я не могу не высказать здесь своего мнения на этот счет.

Рассмотрим две системы отсчета Σ_1 и Σ_2. Пусть Σ_1 движется с ускорением в направлении своей оси X, и пусть ее ускорение (постоянное во времени) равно γ. Предположим, что Σ_2 покоится, но находится в однородном гравитационном поле, которое сообщает всем телам ускорение $-\gamma$ в направлении оси X.

Как известно, физические законы относительно Σ_1 не отличаются от законов, отнесенных к Σ_2; это связано с тем, что в гравитационном поле все тела ускоряются одинаково. Поэтому при современном состоянии наших знаний нет никаких оснований полагать, что системы отсчета Σ_1 и Σ_2 в каком-либо отношении отличаются друг от друга, и в дальнейшем мы будем предполагать полную физическую равноценность гравитационного поля и соответствующего ускорения системы отсчета.

Это предположение распространяет принцип относительности на случай равномерно ускоренного прямолинейного движения системы отсчета. Эвристическая ценность этого предположения состоит в том, что оно позволяет заменить однородное поле тяжести равномерно ускоренной системой отсчета, которая до известной степени поддается теоретическому рассмотрению.

§ 18. Пространство и время в равномерно ускоренной системе отсчета

Рассмотрим сначала тело, отдельные материальные точки которого в некоторый определенный момент времени t в неускоренной системе отсчета S покоятся относительно S, но обладают определенным ускорением. Как влияет это ускорение γ на форму тела в системе отсчета S?

Если подобное влияние существует, оно будет заключаться либо в равномерном изменении размеров в направлении ускорения, либо же в двух перпендикулярных ускорению направлениях, ибо другие результаты исключаются по соображениям симметрии. Каждое обусловленное ускорением сокращение (если оно вообще существует) должно быть четной функцией γ; следовательно, им можно пренебречь, если ограничиться случаем, когда γ так мало, что можно отбросить члены второй и более высоких степеней по γ. Поскольку в дальнейшем мы ограничимся этим случаем, влияние ускорения на размеры тела можно не учитывать.

Рассмотрим теперь систему отсчета Σ, равномерно ускоренную относительно неускоренной системы отсчета S в направлении оси X последней. Пусть часы или масштаб в системе отсчета Σ в покое идентичны часам или масштабу в S. Предположим, что начало координат системы отсчета Σ движется вдоль оси X системы отсчета S, а оси Σ параллельны осям S. В каждый момент времени существует неускоренная система отсчета S', координатные оси которой в рассматриваемый момент (в определенный момент времени t' в S') совпадают с координатными осями системы отсчета Σ. Если точечное событие, происходящее в этот момент времени t', имеет в Σ координаты ξ, η, ζ, то

$$x' = \xi,$$

$$y' = \eta,$$

$$z' = \zeta,$$

поскольку, согласно сказанному выше, можно не учитывать влияние ускорения на размеры тела, применяемого для измерения ξ, η, ζ. Представим себе далее, что часы в Σ в момент времени t' в S' идут так, что показывают в этот момент t'. Как будут идти часы в следующий промежуток времени τ?

Прежде всего следует учесть, что специфическое влияние *ускорения* на ход часов Σ можно не принимать во внимание, так как оно должно быть порядка γ^2. Далее, поскольку влиянием скорости, приобретенной за время τ, на ход часов можно пренебречь и поскольку путь, пройденный относительно S' часами за время τ, по порядку величины равен τ^2, и, таким образом, им можно тоже пренебречь, показания часов в Σ за элемент времени τ полностью совпадают с показаниями часов в S'.

Отсюда следует, что свет в вакууме распространяется относительно Σ в течение элемента времени τ с универсальной скоростью c, если мы определим одновременность в системе отсчета S', мгновенно покоящейся относительно Σ, и если мы будем применять для измерения времени и координат соответственно часы и масштабы, эквивалентные тем, которые применяются для измерения времени и пространства в неускоренных системах. Таким образом, и в этом случае для определения понятия одновременности можно применять принцип постоянства скорости света, если ограничиться очень малыми световыми путями.

Теперь представим себе, что часы в Σ поставлены указанным образом в тот момент $t = 0$ в S, когда Σ мгновенно покоится относительно S. Совокупность показаний поставленных таким образом часов мы будем называть «местным временем» σ системы отсчета Σ. Физический смысл местного времени, как это непосредственно видно, заключается в следующем. Если для измерения времени процессов, происходящих в отдельных элементах пространства Σ, применять местное время σ, то законы, которым подчиняются эти процессы, не могут зависеть от положения рассматриваемого элемента объема, т. е. от его координат, при условии, что в разных элементах объема применяются не только одинаковые часы, но и одинаковые масштабы.

Напротив, местное время σ непосредственно нельзя считать «временем» системы отсчета Σ, и именно по той причине, что два точечных события, происходящие в разных точках Σ, в смысле нашего определения неодновременны, когда их местные времена равны. Если какие-либо двое часов в Σ в момент $t=0$ синхронны относительно S и совершают указанные движения, то они всегда остаются синхронными относительно S. Но в соответствии с § 4 эти часы не будут синхронными относительно системы отсчета S', мгновенно покоящейся относительно Σ, но движущейся относительно S, и, следовательно, по нашему определению, они не будут синхронными относительно Σ.

Определим теперь «время» τ системы отсчета Σ как совокупность тех показаний часов, находящихся в начале координат системы отсчета Σ, которые в смысле нашего определения являются одновременными с рассматриваемыми событиями [33].

Найдем теперь соотношение между временем τ и местным временем σ точечного события. Из первого уравнения (1) следует, что два события одновременны относительно S', а следовательно, и относительно Σ, при условии

$$t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 = t_2 - \frac{v}{c^2} x_2,$$

причем индексы указывают на принадлежность к тому или другому точечному событию. Ограничимся сначала рассмотрением таких коротких промежутков времени [34], что можно отбросить все члены, содержащие вторую или более высокие степени τ или v; тогда с учетом (1) и (29) следует положить (см. примечание редактора на стр. 114. — *Ред.*)

$$\begin{gathered} x_2 - x_1 = x_2' - x_1' = \xi_2 - \xi_1, \\ t_1 = \sigma_1, \quad t_2 = \sigma_2, \\ v = \gamma t = \gamma \tau, \end{gathered}$$

так что из написанного выше соотношения получается

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{\gamma\tau}{c^2}(\xi_2 - \xi_1).$$

Помещая первое точечное событие в начало координат, так что $\sigma_1 = \tau$ и $\xi_1 = 0$, и опуская индекс для второго точечного события, получаем

$$\sigma = \tau\left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right). \tag{30}$$

Это соотношение выполняется, прежде всего, если τ и ξ меньше определенных пределов. Оно, очевидно, выполняется и для произвольного τ,

---

[33] Таким образом, символ τ применяется здесь в другом смысле, чем было выше.

[34] Тем самым, согласно уравнению (1), предполагается также известное ограничение значений $\xi = x'$.

если ускорение γ постоянно относительно системы отсчета Σ, так как в этом случае соотношение между σ и τ должно быть линейным. Для произвольных ξ соотношение (30) не выполняется. Из того, что выбор начала координат не должен влиять на это соотношение, можно заключить, что оно должно быть заменено точным соотношением

$$\sigma = \tau e^{\frac{\gamma\xi}{c^2}}.$$

Однако мы будем придерживаться формулы (30). В соответствии с § 17 формула (30) применима также в системе координат, в которой действует однородное гравитационное поле. В этом случае мы должны положить $\Phi = \gamma\xi$, причем Φ означает потенциал силы тяжести; в результате получим

$$\sigma = \tau\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{30a}$$

Мы определили время в системе отсчета Σ двояко. Какое из этих определений следует применять в различных случаях? Предположим, что в двух местах с различными гравитационными потенциалами ($\gamma\xi$) находятся физические системы, и мы хотим сравнивать их свойства. Здесь, по-видимому, наиболее естественно поступить следующим образом. Отправимся сначала с нашими измерительными приборами в первую физическую систему и проведем там измерения; после этого направимся вместе со всеми измерительными приборами во вторую систему, чтобы произвести в ней такие же измерения. Если измерения в этих системах дадут одинаковые результаты, мы будем называть обе физические системы «одинаковыми». Среди названных измерительных приборов имеются часы, которыми мы измеряем местные времена σ. Поэтому вполне естественно для определения физических величин в областях, в которых существует поле тяжести, использовать время σ.

Если же речь идет о явлении, в котором необходимо одновременно рассматривать тела, находящиеся в областях с разными гравитационными потенциалами, то в выражениях, в которые время входит явно (т. е. не только посредством других физических величин), мы должны использовать время τ: иначе одновременность двух событий не выражалась бы равенством значений времени обоих событий. Поскольку же при определении времени τ используются моменты времени по часам, находящимся в некотором произвольно выбранном месте, то при пользовании временем τ законы природы могут зависеть от координат.

§ 19. Влияние гравитационного поля на часы

Если в точке P с гравитационным потенциалом Φ находятся часы, показывающие местное время, то, согласно соотношению (30а), их показания в $(1 + \Phi/c^2)$ раз больше, чем τ, т. е. они идут в $(1 + \Phi/c^2)$ раз быстрее одинаковых с ними часов, находящихся в начале координат. Пусть показания обоих этих часов воспринимаются каким-нибудь способом, например оптическим путем, наблюдателем, находящимся где-то в пространстве. Поскольку время $\Delta\tau$, проходящее между показанием часов и моментом, когда это показание будет воспринято наблюдателем, находящимся где-то в пространстве, не зависит от τ, то часы в точке P идут в $(1 + \Phi/c^2)$ раз быстрее, чем часы в начале координат. В этом смысле можно сказать, что процесс, происходящий в часах,— и вообще любой физический процесс — протекает тем быстрее, чем больше гравитационный потенциал в области, где разыгрывается этот процесс.

Существуют «часы», находящиеся в местах с различными гравитационными потенциалами, скорость «хода» которых можно проконтролировать с большой точностью; это — источники света с линейчатым спектром. Из сказанного выше следует [35], что свет, приходящий от такого источника, расположенного на поверхности Солнца, обладает длиной волны, приблизительно на две миллионных доли большей, чем свет, испускаемый теми же атомами на Земле.

§ 20. Влияние тяготения на электромагнитные процессы

Если мы будем относить электромагнитный процесс в некоторый момент времени к неускоренной системе отсчета S', мгновенно покоящейся относительно системы отсчета Σ, движущейся равномерно ускоренно, то в соответствии с (5) и (6) выполняются уравнения

$$\frac{1}{c}\left(\rho' u_x' + \frac{\partial X'}{\partial t}\right) = \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'} \text{ и т. д.}$$

и

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial t} = \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'} \text{ и т. д.}$$

Согласно сказанному выше, величины ρ', u', X', L', x' и т. д., отнесенные к системе отсчета S', можно сразу приравнять соответствующим величинам ρ, u, X, L, ξ и т. д., отнесенным к Σ, если мы ограничиваемся

---

[35] В предположении, что соотношение (30а) выполняется также в неоднородном гравитационном поле.

бесконечно малым временем[36], бесконечно близким к времени относительного покоя S' и Σ. Далее t' мы должны заменить местным временем σ Однако для этого нельзя положить просто

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

по той причине, что покоящаяся относительно системы отсчета Σ точка, к которой должны относиться преобразованные к Σ уравнения, за время $dt' = d\sigma$ меняет свою скорость относительно S', причем согласно соотношениям (7а) и (7б) этому изменению соответствует изменение во времени компонент поля, отнесенных к системе отсчета Σ. Поэтому следует положить:

$$\frac{\partial X'}{\partial t'} = \frac{\partial X}{\partial \sigma}, \qquad \frac{\partial L'}{\partial t'} = \frac{\partial L}{\partial \sigma},$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial t'} = \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c} N, \qquad \frac{\partial M'}{\partial t'} = \frac{\partial M}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c} Z,$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial t'} = \frac{\partial Z}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c} M, \qquad \frac{\partial N'}{\partial t'} = \frac{\partial N}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c} Y.$$

Таким образом, уравнения электромагнитного поля, отнесенные к Σ, принимают вид

$$\frac{1}{c}\left(\rho u_\xi + \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{c}\left(\rho u_\eta + \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c} N\right) = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{c}\left(\rho u_\zeta + \frac{\partial Z}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c} M\right) = \frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \frac{\partial Y}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial M}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c} Z\right) = \frac{\partial Z}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial N}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c} Y\right) = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \xi}.$$

---

[36] Это ограничение не влияет на пределы применимости наших результатов, поскольку выводимые далее законы природы по существу не могут зависеть от времени.

Умножим эти уравнения на $(1+\frac{\gamma\xi}{c_2})$ и введем обозначения

$$X^*=X\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right),\quad Y^*=Y\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right) \text{ и т. д.}$$

$$\rho^*=\rho\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right).$$

Далее, пренебрегая членами второй степени по γ, получаем уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left(\rho^* u_\xi+\frac{\partial X^*}{\partial\sigma}\right)&=\frac{\partial N^*}{\partial\eta}-\frac{\partial M^*}{\partial\zeta},\\
\frac{1}{c}\left(\rho^* u_\eta+\frac{\partial Y^*}{\partial\sigma}\right)&=\frac{\partial L^*}{\partial\zeta}-\frac{\partial N^*}{\partial\xi},\\
\frac{1}{c}\left(\rho^* u_\zeta+\frac{\partial Z^*}{\partial\sigma}\right)&=\frac{\partial M^*}{\partial\xi}-\frac{\partial L^*}{\partial\eta},
\end{aligned}\tag{31a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial L^*}{\partial\sigma}&=\frac{\partial Y^*}{\partial\zeta}-\frac{\partial Z^*}{\partial\eta},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial M^*}{\partial\sigma}&=\frac{\partial Z^*}{\partial\xi}-\frac{\partial X^*}{\partial\zeta},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial N^*}{\partial\sigma}&=\frac{\partial X^*}{\partial\eta}-\frac{\partial Y^*}{\partial\xi}.
\end{aligned}\tag{32a}$$

Из этих уравнений прежде всего видно, какое влияние оказывает гравитационное поле на статические и стационарные явления. В этих случаях выполняются такие же закономерности, как в поле без тяготения, с той лишь разницей, что компоненты поля X и т. д. заменяются на $X\,(1+\frac{\gamma\xi}{c_2})$ и т. д. и ρ на $\rho\,(1+\frac{\gamma\xi}{c^2})$.

Для рассмотрения хода нестационарных процессов мы будем пользоваться временем τ как при дифференцировании по времени, так и для определения скоростей, т. е., согласно соотношению (30), положим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma}$$

и

$$w_\xi=\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)u_\xi.$$

Таким образом, мы получаем

$$\frac{112}{c\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)}\left((\rho^* w_\xi+\frac{\partial X^*}{\partial\tau}\right)\doteq\frac{\partial N^*}{\partial\eta}-\frac{\partial M^*}{\partial\xi}\quad\text{и д. т.}\tag{31б}$$

и

$$\frac{1}{c\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)}\cdot\frac{\partial L^*}{\partial\tau}=\frac{\partial Y^*}{\partial\zeta}-\frac{\partial Z^*}{\partial\eta}\ \text{и т. д.}\qquad(32б)$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как в неускоренной системе или пространстве, свободном от тяготения; но вместо c в них входит величина

$$c\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)=c\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Отсюда следует, что световые лучи, распространяющиеся не по оси X, искривляются гравитационным полем; изменение направления, как легко видеть, составляет $\frac{\gamma}{c^2}\sin\varphi$ на 1 *см* пути света, где φ означает угол между направлениями силы тяжести и светового луча.

С помощью этих формул и уравнений для поля и электрического тока в точке, известных из оптики покоящихся сред, можно определить влияние гравитационного поля на оптические явления в покоящихся средах. При этом следует учитывать, что уравнения оптики покоящихся сред выполняются для местного времени σ. К сожалению, согласно нашей теории, влияние поля тяготения Земли так незначительно (вследствие того, что величина $\frac{\gamma x}{c^2}$ мала), что нет никаких перспектив на сравнение результатов теории с опытом.

Умножая уравнения (31а) и (32а) соответственно на $X^*/4\pi, \ldots, N^*/4\pi$ и интегрируя по бесконечному пространству, получаем в наших прежних обозначениях

$$\int\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\frac{\rho}{4\pi}(u_\xi X+u_\eta Y+u_\zeta Z)\,d\omega+$$
$$+\int\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)^2\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\sigma}(X^2+Y^2+\ldots+N^2)\,d\omega=0.$$

При этом

$$\frac{\rho}{4\pi}(u_\xi X+u_\eta Y+u_\zeta Z)$$

есть энергия η_σ, подводимая к веществу в единицу объема за единицу местного времени σ, при условии, что эта энергия измеряется прибором, находящимся в рассматриваемой области. Следовательно, согласно соотношению (30),

$$\eta_\sigma=\eta_\tau\left(1-\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)$$

представляет собой энергию, подведенную (и так же измеренную) к веществу в единицу объема за единицу времени τ; $\frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + \ldots + N^2)$ есть электромагнитная энергия ε на единицу объема, измеренная таким же способом. Учитывая далее, что, согласно (30), $\frac{\partial}{\partial\sigma} = \left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}$, получаем

$$\int\left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\eta_\tau d\omega + \frac{d}{d\tau}\left\{\int\left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\varepsilon d\omega\right\} = 0.$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии и содержит весьма примечательный результат. Вкладу энергии $E = \varepsilon d\omega$ (или приросту энергии $\eta d\omega d\tau$) в интеграл энергии соответствует еще дополнительный вклад величиной $\frac{E}{c^2}\gamma\xi = \frac{E}{c^2}\Phi$, связанной с местом, где находится E. Следовательно, каждому количеству энергии E в гравитационном поле соответствует потенциальная энергия, по величине равная потенциальной энергии «тяжелой» массы величиной E/c^2.

Таким образом, выведенная в § 11 теорема о том, что энергии E соответствует масса величиной E/c^2, выполняется не только для *инертной*, но и для *тяготеющей* массы, если остается в силе предположение, введенное в § 17.

Поступила 4 декабря 1907 г.

В этой статье поставлен вопрос о влиянии постоянного гравитационного поля на частоту излучаемого света (ср. статью 14). Вычисления отклонения луча света еще не учитывали эффекта кривизны пространства, а потому привели к результату, вдвое меньшему правильного (ср. статью 36).

Некоторые опечатки в этой статье были исправлены Эйнштейном в заметке, опубликованной в следующем томе «Jahrbuch d. Radioakt.» (1908, 5, 98, 99); в той же заметке, отвечая на письмо Планка, он уточняет понятие «равномерно ускоренного движения».

«В используемой нами кинематике ускорение dv/dt зависит от состояния (неускоренной) системы отсчета. Из всех значений ускорения, которые можно рассматривать для определенной эпохи движения, выделяется значение, отвечающее системе отсчета, относительно которой тело имеет скорость $v = 0$. Именно это значение ускорения должно оставаться постоянным при «равномерно ускоренном» движении. Использованное на стр. 108 соотношение $v = \gamma t$ справедливо только в первом приближении; это, однако, достаточно, так как мы учитываем лишь линейные члены».

9

ОБ ОСНОВНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА*

(Совместно с И. Лаубом)

В краткой статье Минковского[1] выведены основные уравнения электродинамических процессов в движущихся телах. Принимая во внимание то, что эта работа в математическом отношении предъявляет к читателю слишком большие требования, мы считаем полезным получить эти основные уравнения элементарным путем, который, впрочем, в основном соответствует методу Минковского.

§ 1. Вывод основных уравнений электродинамики для движущегося тела

Избранный нами путь состоит в следующем. Введем две инерциальные системы координат K и K', которые движутся относительно друг друга. Если в пространстве находится вещество, покоящееся по отношению к K', то для K' справедливы законы электродинамики покоящегося тела, которые выражаются уравнениями Максвелла — Герца. Приводя эти уравнения к системе K, непосредственно получаем электродинамические уравнения движущегося тела для случая, когда скорость вещества постоянна в пространстве и времени.

Уравнения, полученные таким путем, очевидно, справедливы по крайней мере в первом приближении при горизонтальном распределении скоростей вещества. Это предположение оправдано отчасти также тем, что результат, полученный этим путем, строго справедлив в тех случаях,

---

* *Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper.* Ann. Phys., 1908, 26, 532—540 (Mit J. Laub).

[1] H. Minkowski. Gött. Nachr., 1908, 45.

когда имеется некоторое количество одинаковых тел, движущихся с различными скоростями и разделенных друг от друга вакуумом.

Обозначим относящиеся к системе K' векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно через $\mathfrak{E}'$ и $\mathfrak{H}'$, векторы электрической и магнитной индукции соответственно через $\mathfrak{D}'$ и $\mathfrak{B}'$, вектор плотности электрического тока — через $\mathfrak{s}'$; далее через ρ' обозначим плотность электрического заряда. Для системы отсчета K' справедливы следующие уравнения Максвелла — Герца:

$$\mathrm{rot}'\,\mathfrak{H}' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial t'} + \mathfrak{s}'\right), \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}'\,\mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t'}, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}'\,\mathfrak{D}' = \rho', \tag{3}$$

$$\mathrm{div}'\,\mathfrak{B}' = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим вторую прямоугольную систему отсчета K, оси которой параллельны осям системы K'. Начало координат системы K' движется с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x системы K. Тогда при выборе удобного начала отсчета времени, как известно, справедливы для каждого события следующие преобразования [2]:

$$\begin{aligned} x' &= \beta(x - vt),\\ y' &= y,\\ z' &= z, \qquad \left(\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\right),\\ t' &= \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где x, y, z, t означают пространственные и временную координаты в системе K.

Произведя эти преобразования, получаем уравнения [3]

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{s}\right), \tag{1a}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}, \tag{2a}$$

---

[2] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, **17**, 902.

[3] В формулах (8), (9), (12а) и (13) исправлены опечатки, на которые было указано самими же авторами [см. A. Einstein, J. Laub. Ann. Phys., 1908, **27**, 232]. — *Прим. ред.*

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \rho, \tag{3a}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \tag{4a}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}'_x, & \mathfrak{D}_x &= \mathfrak{D}'_x, \\ \mathfrak{E}_y &= \beta\left(\mathfrak{E}'_y + \frac{v}{c}\mathfrak{B}'_z\right), & \mathfrak{D}_y &= \beta\left(\mathfrak{D}'_y + \frac{v}{c}\mathfrak{H}'_z\right), \\ \mathfrak{E}_z &= \beta\left(\mathfrak{E}'_z - \frac{v}{c}\mathfrak{B}'_y\right), & \mathfrak{D}_z &= \beta\left(\mathfrak{D}'_z - \frac{v}{c}\mathfrak{H}'_y\right), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{H}'_x, & \mathfrak{B}_x &= \mathfrak{B}'_x, \\ \mathfrak{H}_y &= \beta\left(\mathfrak{H}'_y - \frac{v}{c}\mathfrak{D}'_z\right), & \mathfrak{B}_y &= \beta\left(\mathfrak{B}'_y - \frac{v}{c}\mathfrak{E}'_z\right), \\ \mathfrak{H}_z &= \beta\left(\mathfrak{H}'_z + \frac{v}{c}\mathfrak{D}'_y\right), & \mathfrak{B}_z &= \beta\left(\mathfrak{B}'_z + \frac{v}{c}\mathfrak{E}'_z\right), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и

$$\rho = \beta\left(\rho' + \frac{v}{c^2}\mathfrak{s}'_x\right), \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{s}_x &= \beta\left(\mathfrak{s}'_x + v\rho'\right), \\ \mathfrak{s}_y &= \mathfrak{s}'_y, \\ \mathfrak{s}_z &= \mathfrak{s}'_z. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Чтобы выразить штрихованные величины как функции нештрихованных, надо поменять местами штрихованные и нештрихованные величины и заменить v на $-v$.

Уравнения (1a)—(4a), которые описывают электромагнитные процессы относительно системы K, имеют тот же самый вид, что и уравнения (1)—(4). *Поэтому величины*

$$\mathfrak{E},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{H},\ \mathfrak{B},\ \rho,\ \mathfrak{s}$$

по аналогии будем называть соответствующими величинами относительно системы K, а именно: будем называть $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, ρ, $\mathfrak{s}$ соответственно напряженностью электрического поля, электрической индукцией, напряженностью магнитного поля, магнитной индукцией, плотностью электрического заряда, плотностью электрического тока относительно системы K.

Преобразования (6) и (7) переходят для вакуума в найденные ранее преобразования для напряженностей электрического и магнитного полей [4].

---

[4] A. Einstein. Ann. Phys., 1907, 23, 909.

Повторное применение этих преобразований очевидно всегда должно приводить к уравнениям того же вида, что и первоначальные уравнения (1) — (4), и соотношения (6) — (9) являются для таких преобразований универсальными, так как в формальном отношении при выводе преобразований не использовалось условие, что вещество покоится относительно первоначальной системы.

Мы считаем, что в первом приближении преобразованные уравнения (1а) — (4а) справедливы также для случая, когда скорость вещества переменна в пространстве и времени.

Замечательно, что граничные условия для векторов $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ на границе двух сред те же, что и для покоящихся тел. Это непосредственно следует из уравнений (1а) — (4а) [5].

Уравнения (1а) — (4а) имеют вообще такое же значение, что и уравнения (1) — (4), для неоднородных и анизотропных тел. Они еще не полностью определяют электромагнитные процессы. Напротив, еще необходимо задать соотношения, которые определяют вектора $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{s}$ через $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$. Эти уравнения мы получим только для того случая, когда *вещество изотропно*. Если мы опять рассмотрим прежде всего случаи, когда вещество покоится относительно системы K', то в системе K' справедливы уравнения

$$\mathfrak{D}' = \varepsilon\mathfrak{E}', \tag{10}$$

$$\mathfrak{B}' = \mu\mathfrak{H}', \tag{11}$$

$$\mathfrak{s}' = \sigma\mathfrak{E}', \tag{12}$$

где ε — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, σ — электрическая проводимость, зависящие от координат x', y', z', t'. Преобразуя уравнения (10) — (12) в систему K при помощи соотношений (6) — (9), получаем уравнения, применимые для системы K,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \varepsilon\mathfrak{E}_x, \\ \mathfrak{D}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{H}_z &= \varepsilon\left(\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{B}_z\right), \\ \mathfrak{D}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{H}_y &= \varepsilon\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right), \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= \mu\mathfrak{H}_x, \\ \mathfrak{B}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{E}_z &= \mu\left(\mathfrak{H}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{D}_z\right), \\ \mathfrak{B}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{E}_y &= \mu\left(\mathfrak{H}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{D}_y\right), \end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

[5] Ср. статью 10.— *Прим. ред.*

$$\left.\begin{aligned} \beta(\mathfrak{s}_x - v\beta) &= \sigma\mathfrak{E}_x, \\ \mathfrak{s}_y &= \sigma\beta\left(\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{B}_z\right), \\ \mathfrak{s}_z &= \sigma\beta\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right). \end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

Если скорость вещества не параллельна оси X, то, выражая эту скорость через вектор $\mathfrak{v}$, из уравнений (10a)— (12a) получаем векторные соотношения

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] &= \varepsilon\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right\}, \\ \mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{E}] &= \mu\left\{\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{D}]\right\}, \\ \beta(\mathfrak{s}_{\mathfrak{v}} - |\mathfrak{v}|\rho) &= \sigma\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right\}_{\mathfrak{v}}, \\ \mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{v}}} &= \sigma\beta\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right\}_{\bar{\mathfrak{v}}}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где индекс $\mathfrak{v}$ означает, что берется компонента, направленная по $\mathfrak{v}$, а индекс $\bar{\mathfrak{v}}$, — что берется компонента, перпендикулярная $\mathfrak{v}$.

§ 2. Об электромагнитных свойствах движущегося диэлектрика. Опыт Вильсона

В этом параграфе мы хотим рассмотреть такой простой специальный случай, как движущийся диэлектрик, и показать, чем отличаются результаты, предсказанные теорией относительности и теорией Лоренца.

Пусть бесконечная полоса S, поперечное сечение которой изображено на рис. 1, расположена перпендикулярно плоскости чертежа. Эта полоса движется перпендикулярно к плоскости чертежа с постоянной скоростью v между двумя пластинами A_1 и A_2 конденсатора. Размер полосы S в направлении, перпендикулярном пластинам A, бесконечно мал по сравнению с ее размерами в направлении, параллельном плоскости пластин, и по сравнению с размерами пластин; зазор между полосой S и пластинами A по сравнению с толщиной полосы S пренебрежимо мал. Отнесем рассматриваемую систему тел к системе координат, покоящейся относительно пластин A. Пусть ось X направлена вдоль движения полосы, а оси Y и Z направлены соответственно параллельно и перпендикулярно пластинам A. Мы хотим исследовать электромагнитные свойства полосы, находящейся между пластинами A, если электромагнитное состояние стационарно.

Представим себе замкнутую поверхность, которая окружает полосу S вместе с непосредственно прилегающими к ней частями пластин конденсатора. Внутри этой поверхности нет ни истинного заряда, ни электрического тока проводимости и применимы уравнения [ср. уравнения (1a) — (4a)]

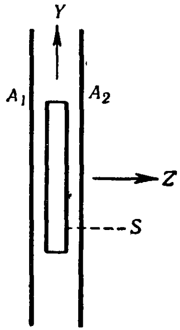

Рис. 1.

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

Внутри этого объема электрическое и магнитное поля потенциальны. Поэтому мы можем определить распределение векторов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, если известно распределение плотностей электрических и, соответственно, магнитных зарядов. Ограничимся рассмотрением случая, когда напряженность магнитного поля $\mathfrak{H}$ параллельна оси Y, а напряженность электрического поля $\mathfrak{E}$ параллельна оси Z. При этом упомянутые выше условия о порядках величин размеров рассматриваемой системы дают нам право считать поля однородными внутри полосы и в промежутках. По той же причине магнитные заряды, находящиеся на концах сечения полосы, вносят лишь исчезающе малый вклад в магнитное поле[6]. Тогда соотношения (13) дают для области внутри полосы следующие соотношения:

$$\mathfrak{D}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{H}_y = \varepsilon\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right),$$

$$\mathfrak{B}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{E}_z = \mu\left(\mathfrak{H}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{D}_z\right).$$

Эти соотношения могут быть записаны также в следующей форме:

$$\begin{aligned} \left(1 - \varepsilon\mu\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{B}_y &= \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\,\mathfrak{E}_z + \mu\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{H}_y, \\ \left(1 - \varepsilon\mu\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{D}_z &= \varepsilon\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\,\mathfrak{H}_y. \end{aligned} \tag{1}$$

Для пояснения соотношений (1) заметим следующее: на поверхности полосы электрическая индукция $\mathfrak{D}_z$ не испытывает скачка, так что $\mathfrak{D}_z$

[6] Это становится понятным также из того, что мы без существенного изменения соотношения между размерами пластин конденсатора и полосы можем придать им форму круглых цилиндров, в случае которых, как видно из соображений симметрии, свободные магнитные заряды вообще не могут возникнуть.

равняется заряду единицы поверхности пластины конденсатора (точнее, заряду на пластине A_1). Далее разность потенциалов между пластинами конденсатора A_1 и A_2 равна $\mathfrak{E}_z\delta$, где δ — расстояние между пластинами, так как если мы представим себе бесконечно узкую щель, пересекающую полосу параллельно плоскости XZ, то $\mathfrak{E}_z$ благодаря граничным условиям равна электрической напряженности в щели.

Рассмотрим сначала случай, когда внешнее магнитное поле отсутствует, т. е. когда в рассматриваемом пространстве напряженность магнитного поля $\mathfrak{H}_y$ вообще исчезает. Тогда соотношения (1) принимают следующий вид:

$$\left(1-\varepsilon\mu\,\frac{v^2}{c}\right)\mathfrak{B}_y=\frac{v}{c}\,(\varepsilon\mu-1)\,\mathfrak{E}_z,$$

$$\left(1-\varepsilon\mu\,\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{D}_z=\varepsilon\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{E}_z.$$

Так как $v<c$, то если $\varepsilon\mu-1>0$, коэффициенты при $\mathfrak{E}_z$ в обоих последних равенствах положительны. Коэффициенты при $\mathfrak{B}_y$ и $\mathfrak{D}_z$ при этом больше, равны или меньше нуля, когда скорость полосы соответственно меньше, равна или больше, чем $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, т. е. скорость распространения электромагнитных волн в диэлектрике. Если $\mathfrak{E}_z$ имеет определенное значение, т. е. к пластинам конденсатора приложено определенное напряжение, и если изменять скорость диэлектрика от меньших величин к большим, то сначала растет как вектор $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$, пропорциональный заряду пластин конденсатора, так и магнитная индукция в диэлектрике. Если v достигнет величины $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, то как заряд конденсатора, так и магнитная индукция станут бесконечно большими. Значит в этом случае диэлектрик был бы разрушен от приложения сколь угодно малой разности потенциалов. Для всех $v>c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ значения $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ и $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ отрицательны. В последнем случае напряжение, приложенное к пластинам конденсатора, создавало бы на конденсаторе заряд противоположного знака.

Теперь рассмотрим еще случай, когда существует внешнее магнитное поле $\mathfrak{H}_y$. Тогда получаем соотношение

$$\left(1-\varepsilon\mu\,\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{D}_z=\varepsilon\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{E}_z+\frac{v}{c}\,(\varepsilon\mu-1)\,\mathfrak{H}_y,$$

которое дает связь между $\mathfrak{E}_z$ и $\mathfrak{D}_z$ при заданном $\mathfrak{H}_y$.

Ограничиваясь величинами первого порядка по v/c, получаем

$$\mathfrak{D}_z=\varepsilon\mathfrak{E}_z+\frac{v}{c}\,(\varepsilon\mu-1)\,\mathfrak{H}_y, \tag{2}$$

в то время как теория Лоренца приводит к соотношению

$$\mathfrak{D}_z = \varepsilon \mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}(\varepsilon - 1)\,\mu \mathfrak{H}_y. \tag{3}$$

Последнее соотношение было проверено экспериментально Г. Вильсоном (эффект Вильсона). Как мы видим, выражения (2) и (3) отличаются членами первого порядка. Если бы существовали диэлектрические тела со значительной магнитной проницаемостью, то можно было бы экспериментально выбрать между выражениями (2) и (3).

Если пластины A_1 и A_2 конденсатора соединить проводником, то на пластинах появится заряд величины $\mathfrak{D}_z$ на единицу площади. Мы получим эту величину из соотношения (2), замечая, что для замкнутых пластин конденсатора, соединенных проводником, $\mathfrak{E}_z = 0$. Это дает:

$$\mathfrak{D}_z = \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\,\mathfrak{H}_y.$$

Соединяя пластины конденсатора A_1 и A_2 с электрометром бесконечно малой емкости, так что $\mathfrak{D}_z = 0$, мы получаем для напряжения $(\mathfrak{E}_z \cdot \delta)$ соотношение

$$0 = \varepsilon \mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\,\mathfrak{H}_y.$$

Поступила 2 мая 1908 г.

ЗАМЕЧАНИЯ К НАШЕЙ РАБОТЕ „ОБ ОСНОВНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ“ *

(Совместно с И. Лаубом)

М. Лауэ любезно обратил наше внимание на неправильное утверждение, содержащееся в нашей работе [1], названной в заглавии [2]. В указанной работе мы писали:

«Замечательно, что граничные условия для векторов $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ на границе двух сред те же, что и для покоящихся тел. Это непосредственно следует из уравнений (1а) — (4а)».

Помимо того, что при выводе граничных условий уравнения (3а) — (4а) не рассматриваются, это утверждение верно только в случае, если нормальная к граничной поверхности компонента скорости обращается в нуль, как это было в задаче, рассмотренной в § 2 названной работы. Граничные условия для общего случая легче всего найти, следуя по пути, соответствующему предложению Г. Герца.

Если граничная поверхность, или, точнее, бесконечно тонкая пограничная оболочка, движется произвольно, то в расположенной на ней мгновенно покоящейся точке величины, определяющие электромагнитное поле, в общем случае изменяются во времени скачкообразно, или бесконечно быстро; однако эти изменения будут непрерывными для точки, движущейся вместе с веществом. Таким образом, применение оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)$$

---

* *Bemerkungen zu unserer Arbeit «Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper»*. Ann. Phys., 1908, 28, 445—447. (Mit J. Laub).

[1] Ann. Phys., 1908, **26**, 535 (Предыдущая статья).

[2] В своем письме Лауэ уже сообщил нам правильные граничные условия и их вывод другим способом.

к скаляру или вектору на граничной поверхности также не приводит к бесконечно большим значениям. Записывая теперь уравнение (1а) цитированной выше работы в виде

$$\frac{1}{c}\{(\partial\mathfrak{D}/\partial t)+(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{D}\}+\mathfrak{s}=\operatorname{rot}\mathfrak{H}+\frac{1}{c}\,(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{D}$$

и предполагая, что плотность тока $\mathfrak{s}$ конечна и в граничном слое, мы убеждаемся, что левая часть этого уравнения будет конечной в пограничном слое. То же самое справедливо, следовательно, и для правой части уравнения.

Для облегчения интерпретации этого результата представим себе, что система координат расположена так, что некоторый бесконечно малый кусок граничной поверхности, который мы будем теперь рассматривать, оказывается параллельным плоскости YZ. Тогда ясно, что производные всех величин по y и z в рассматриваемом куске пограничной поверхности остаются конечными. Следовательно, и для тех членов в правой части уравнения, которые содержат производные по x, также должно получиться некоторое конечное значение. Разлагая правую часть уравнения в ряд и опуская члены, содержащие производные по y и z, мы получаем результат, что в пограничном слое остаются конечными следующие выражения:

$$\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\,\frac{\partial\mathfrak{D}_x}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial x}-\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\,\frac{\partial\mathfrak{D}_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x}+\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\,\frac{\partial\mathfrak{D}_z}{\partial x}.$$

Предполагая также, что компоненты скорости остаются непрерывными на граничной поверхности, находим, что выражения

$$\mathfrak{D}_x,$$

$$\mathfrak{H}_y+\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\,\mathfrak{D}_z,$$

$$\mathfrak{H}_z-\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\,\mathfrak{D}_y$$

имеют одинаковые значения по обе стороны граничной поверхности (плоскость YZ). Поскольку $\mathfrak{D}_x$ и компоненты $\mathfrak{v}$ непрерывны, два последних выражения можно представить в виде

$$\mathfrak{H}_y-\frac{1}{c}\,(\mathfrak{v}_z\mathfrak{D}_x-\mathfrak{v}_x\mathfrak{D}_z),$$

$$\mathfrak{H}_x-\frac{1}{c}\,(\mathfrak{v}_x\mathfrak{D}_y-\mathfrak{v}_y\mathfrak{D}_x).$$

Можно освободиться от специального выбора положения координатных осей по отношению к рассматриваемому элементу граничной поверхности, переписав результат в векторной форме. Обозначая индексами n или $\bar{n}$ компоненты вектора, касательного (перпендикулярного к нормали) к поверхности разрыва, получаем, что выражения

$$\mathfrak{D}_n,$$

$$\left\{\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{D}]\right\}_{\bar{n}}$$

должны быть непрерывными на граничной поверхности.

Аналогичным способом из уравнения (2а) цитированной работы можно доказать непрерывность компонент

$$\mathfrak{B}_n,$$

$$\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right\}_{\bar{n}}.$$

Поступила 6 декабря 1908 г.

Дополнение. Если на рассматриваемой граничной поверхности находятся истинные электрические заряды ($\int \rho d\tau$) с поверхностной плотностью η, то плотность тока $\mathfrak{s}$ становится бесконечной. Тогда выражение

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} + \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{D} - \mathfrak{s}$$

остается конечным в пограничном слое, причем $\mathfrak{s}$ следует заменить на $(\mathfrak{v}/c)\,\rho$. Для этого случая также получаются указанные выше граничные условия, с той разницей, что первые из них необходимо заменить на

$$\mathfrak{D}_{n2} - \mathfrak{D}_{n1} = \eta.$$

Поступило 19 января 1909 г.

11

О ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ НА ПОКОЯЩИЕСЯ ТЕЛА*

(Совместно с И. Лаубом)

В недавно опубликованной работе Минковский[1] привел выражение для пондеромоторных сил электромагнитного происхождения, действующих на любое движущееся тело. В частном случае покоящегося однородного изотропного тела выражение Минковского для x-компоненты силы, действующей на элемент объема, принимает вид

$$K_x = \rho\mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{s}_z\mathfrak{B}_y, \tag{1}$$

где ρ — плотность заряда, $\mathfrak{B}$ — магнитная индукция, $\mathfrak{s}$ — плотность электрического тока проводимости, $\mathfrak{E}$ — напряженность электрического поля.

Это выражение, как нам кажется, не согласуется с представлениями электронной теории по следующей причине. Согласно электронной теории, в магнитном поле силы действуют именно на то тело, которое является носителем тока (тока проводимости). Если бы вместо тока проводимости тело в магнитном поле пронизывалось бы током поляризации ($\partial\mathfrak{D}/\partial t$), то по формуле (1) это было бы не так. Таким образом, согласно Минковскому, здесь возникает принципиальное различие между током проводимости и током смещения, заключающееся в том, что проводник не может рассматриваться как диэлектрик с бесконечно большой диэлектрической постоянной.

---

* *Über die im elektromagnetischen Felde auf ruhende Körper ausgeubten ponderomotorischen Kräfte.* Ann. Phys., 1908, 26, 541—550 (Mit J. Laub).

[1] H. Minkowski. Gött. Nachr., 1908, 45.

На этом основании нам представляется интересным получить при помощи электронной теории выражение для пондеромоторных сил для любого намагниченного тела. В дальнейшем мы дадим такой вывод, ограничиваясь покоящимися телами.

§ 1. Силы, не зависящие от скорости элементарных частиц

Мы будем последовательно придерживаться основ электронной теории [2]. Итак, положим

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{Q}, \tag{3}$$

где $\mathfrak{P}$ обозначает электрический, а $\mathfrak{Q}$ — магнитный вектор поляризации. Электрическую или магнитную поляризацию мы представляем себе как пространственное смещение положения равновесия связанных электрических или магнитных масс диполей. Кроме того, предположим существование не связанных в диполи подвижных электрических частиц (электронов проводимости). Пусть в пространстве между упомянутыми частицами выполняются уравнения Максвелла для пустого пространства, и пусть, как у Лоренца, *взаимодействие между материей и электромагнитным полем обусловливается исключительно этими частицами.* Соответственно этому мы примем, что силы, действующие в электромагнитном поле на элемент объема материи, являются результирующей пондеромоторных сил, которые действуют в этом поле на все находящиеся в данном элементе объема электрические и магнитные элементарные частицы. Под элементом объема материи мы всегда понимаем объем такой величины, чтобы в нем содержалось очень большое число электрических или магнитных частиц. В дальнейшем границы рассматриваемого элемента объема надо всегда выбирать так, чтобы ограничивающая его поверхность не проходила через электрические или магнитные диполи.

Вычислим сначала действующую на электрический диполь силу, которая появляется вследствие того, что напряженность поля $\mathfrak{E}$ в тех местах, где находятся элементарные массы диполя, не равна напряженности поля в остальном пространстве. Если обозначить вектор дипольного момента через $\mathfrak{p}$, то выражение для x-компоненты силы будет иметь вид:

$$\mathfrak{f}_x = \mathfrak{p}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}.$$

[2] Однако ради простоты изложения будем придерживаться дуалистического толкования электрических и магнитных явлений.

Записывая последнее выражение для всех диполей в единице объема, суммируя и учитывая соотношение

$$\sum \mathfrak{p} = \mathfrak{P},$$

получаем

$$\mathfrak{F}_{1x} = \left\{\mathfrak{P}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}\right\}. \tag{4}$$

Если алгебраическая сумма положительных и отрицательных электронов проводимости не равна нулю, то к выражению (4) прибавляется еще один член, который мы теперь вычислим. x-компонента пондеромоторной силы, действующей на электрон проводимости с электрической массой e, равна $e\,\mathfrak{E}_x$. Суммируя эту силу по всем электронам проводимости в единице объема, получаем

$$\mathfrak{F}_{2x} = \mathfrak{E}_x \sum e. \tag{5}$$

Если представить себе, что рассматриваемая материя находится в единице объема и окружена поверхностью, не проходящей через диполи, то, согласно теореме Гаусса и определению вектора смещения $\mathfrak{D}$, получим

$$\sum e = \operatorname{div} \mathfrak{D},$$

так что

$$\mathfrak{F}_{2x} = \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{D}. \tag{5a}$$

Поэтому x-компонента силы, действующей в электрическом поле на единицу объема материи, будет равна

$$\mathfrak{F}_{ex} = \mathfrak{F}_{1x} + \mathfrak{F}_{2x} = \mathfrak{P}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} + \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{D}. \tag{6}$$

Аналогично, принимая во внимание соотношение

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

для x-компоненты действующей в магнитном поле силы получаем

$$\mathfrak{F}_{mx} = \mathfrak{Q}_x \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \mathfrak{Q}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} + \mathfrak{Q}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z}. \tag{7}$$

Следует заметить, что для вывода выражений (6) и (7) не нужно делать никаких предположений о соотношениях, связывающих напряженности поля $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ с векторами поляризации $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$.

Для анизотропных тел напряженность электрического или магнитного поля является источником не только силы, но и пары сил, которая воздействует на материю. Искомый вращательный момент легко находится для отдельных диполей и суммы всех электрических и магнитных диполей в единице объема. Этот момент получается равным

$$\mathfrak{L} = \{[\mathfrak{P}\mathfrak{E}] + [\mathfrak{Q}\mathfrak{H}]\}. \tag{8}$$

Формула (6) определяет пондеромоторные силы, которые проявляются в электростатических задачах. Преобразуем это выражение для случая изотропного тела так, чтобы оно допускало сравнение с тем выражением для пондеромоторной силы, которое дается в электростатике. Если положить

$$\mathfrak{P} = (\varepsilon - 1)\,\mathfrak{E},$$

то формула (6) переходит в

$$\mathfrak{F}_{ex} = \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{D} - \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon - 1)\,\mathfrak{E}^2.$$

Оба первых члена этого выражения идентичны известным из электростатики. Третий член, как это видно, можно получить из потенциала. Если речь идет о силах, которые действуют на тело, находящееся в пустоте, то последний член при интегрировании по всему объему тела не дает никакого вклада. Если же речь идет о пондеромоторном действии на жидкость, то часть силы, соответствующая третьему члену, компенсируется распределением давления в жидкости.

§ 2. Силы, зависящие от скорости элементарных частиц

Перейдем теперь к той части пондеромоторной силы, которая возникает вследствие движения элементарных зарядов.

Будем исходить из закона Био — Савара. В случае, если рассматриваемое вещество не намагничивается в магнитном поле, на элемент объема, через который протекает ток и который находится в магнитном поле, действует, согласно опыту, сила, для единицы объема равная

$$\frac{1}{c}[\mathfrak{s}\mathfrak{H}].$$

Внутри магнитно поляризуемого тела эту силу до сих пор полагали, насколько нам известно, равной [3]

$$\frac{1}{c}[\mathfrak{s}\mathfrak{B}],$$

где $\mathfrak{B}$ — магнитная индукция. Покажем теперь, что и в случае *магнитно поляризуемой* среды сила, действующая на элемент объема, в которой

[3] См., например: M. Abraham. Theorie der Elektrizität. Bd. 2, 1905, 319.

течет ток, получается добавлением к выражению (7) объемного члена:

$$\mathfrak{K}_s = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{s}\mathfrak{H}]. \tag{9}$$

Покажем это сначала на одном простом примере.

Пусть бесконечно тонкая полоса S, изображенная в разрезе на рис. 1, простирается бесконечно далеко в обе стороны перпендикулярно плоскости данного листа книги. Она представляет собой слой магнитно поляризуемого материала и находится в однородном магнитном поле $\mathfrak{H}_a$, направление которого на рисунке обозначено стрелками. Нас интересует сила, действующая на слой вещества, в случае, когда по нему течет ток $\mathfrak{i}$.

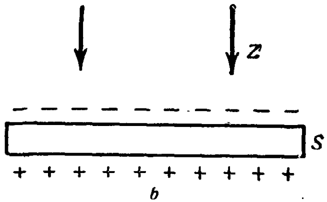

Рис. 1.

Опыт учит, что эта сила не зависит от магнитной проницаемости материала проводника. Отсюда делают вывод, что не напряженность поля $\mathfrak{H}$, а магнитная индукция $\mathfrak{B}_i$ должна определять пондеромоторные силы, так как магнитная индукция $\mathfrak{B}_i$ внутри полосы равна действующей извне на нее силе $\mathfrak{H}_a$, независимо от магнитной проницаемости полосы, в то время как действующая внутри полосы сила $\mathfrak{H}_i$ при заданном внешнем поле зависит от μ. Однако это заключение неосновательно, так как рассмотренная пондеромоторная сила не единственно действующая на полосу вещества сила. Внешнее поле $\mathfrak{H}_a$ индуцирует на верхней и нижней поверхностях полосы соответственно отрицательные и положительные магнитные заряды с плотностью[4] $(1 - 1/\mu)\,\mathfrak{H}_a$. На каждый такой заряд действует сила, вызванная протекающим по полосе током. Сила, действующая на единицу длины полосы, равна $\mathfrak{i}\,/2b$ и направлена на верхней и нижней поверхностях полосы в разные стороны[5]. Эти результирующие пондеромоторные силы складываются, так что мы получаем сум-

[4] Эта плотность равна $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{B}_i - \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_a\,(1-1/\mu)$.

[5] Вместо этих сил, действующих на заряды, мы должны были бы ввести, конечно, в соответствии с результатами предыдущего параграфа, объемные силы, что, однако, не меняет результата.

марную пондеромоторную силу: $(1-1/\mu)\,\mathfrak{h}_a\,\mathfrak{i}$. Эта сила, как нам кажется, до сих пор не принималась во внимание.

Сила, действующая в конечном итоге на единицу длины полосы, будет теперь равна сумме только что вычисленной силы и силы R, которая действует в магнитном поле на элемент объема вследствие того, что в нем течет электрический ток. Так как общая сила, действующая на единицу длины полосы, согласно опыту равна $\mathfrak{i}\,\mathfrak{h}_a$, то имеет место соотношение

$$(1-1/\mu)\,\mathfrak{i}\mathfrak{h}_a + R = \mathfrak{i}\mathfrak{h}_a,$$

или

$$R = \frac{\mathfrak{i}\mathfrak{h}_a}{\mu} = \mathfrak{i}\mathfrak{h}_i.$$

Таким образом, видно, что для вычисления пондеромоторной силы R, действующей на элемент объема, в котором течет ток, существенна не магнитная индукция $\mathfrak{B}_i$, а напряженность поля $\mathfrak{h}_i$.

Чтобы устранить всякое сомнение, обсудим еще один пример, на котором можно убедиться, что принцип равенства действия и противодействия требует выбранного нами выражения.

Представим себе находящийся в пустоте цилиндрический проводник, по которому течет ток $\mathfrak{s}$ и который простирается вдоль оси X некоторой координатной системы бесконечно в обе стороны. Пусть физические параметры проводника, как и появляющийся в дальнейшем вектор напряженности поля, не зависят от x, а являются функциями z и y. Пусть также проводник обладает сильной магнитной восприимчивостью и пусть он намагничен перпендикулярно оси X. Предположим, что внешнее магнитное поле не действует на проводник, и, следовательно, напряженность магнитного поля $\mathfrak{h}$ обращается в нуль на большом расстоянии от проводника.

Ясно, что на проводник в целом никакая пондеромоторная сила не действует, так как этому действию нет видимого противодействия. Покажем теперь, что при выборе нашего выражения эта сила на самом деле обращается в нуль. Общую силу, действующую в направлении оси Z на единицу длины нашего проводника, можно представить в соответствии с формулами (7) и (9) в виде

$$R = \int\left(\mathfrak{Q}_y\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y} + \mathfrak{Q}_z\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial z}\right)df + \int\frac{1}{c}\,\mathfrak{s}_x\mathfrak{H}_y\,df, \tag{10}$$

где df обозначает элемент поверхности в плоскости YZ.

Примем, что на поверхности проводника все рассматриваемые величины постоянны. Рассмотрим сначала первый интеграл в соотношении (10). Очевидно, что

$$\mathfrak{Q}_y\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y} + \mathfrak{Q}_z\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{Q}_y\mathfrak{H}_z}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Q}_z\mathfrak{H}_z}{\partial z} - \mathfrak{H}_z\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Q}_z}{\partial z}\right).$$

Если подставить правую часть этого соотношения в наш интеграл, то при интегрировании по плоскости YZ обращаются в нуль оба первых члена, так как на бесконечности напряженность поля равна нулю. Третий член можно преобразовать с учетом уравнения

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

так, что наш интеграл примет вид

$$\int \mathfrak{H}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z}\right) df.$$

Очевидно также, что

$$\mathfrak{H}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial_y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial_z}\right) = \frac{\partial \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{H}_z^2}{\partial z} - \mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y}.$$

Однако при интегрировании исчезают оба первых члена

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{H}_z^2}{\partial z}.$$

Член $-\mathfrak{H}_y \dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y}$ можно преобразовать с помощью уравнения Максвелла; тогда он будет иметь вид

$$-\frac{1}{c} \mathfrak{H}_y \left[\mathfrak{s}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right],$$

так что мы сможем, наконец, записать соотношение (10) в виде

$$R = -\frac{1}{c} \int \mathfrak{H}_y \left(\mathfrak{s}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right) df + \frac{1}{c} \int \mathfrak{s}_x \mathfrak{H}_y \, df = -\frac{1}{c} \int \mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} df = -\frac{1}{2c} \int \frac{\partial \mathfrak{H}_y^2}{\partial z} df.$$

Последний интеграл равен нулю, так как на бесконечности напряженность поля обращается в нуль.

После того как мы таким образом нашли силу, действующую на вещество, в котором течет ток проводимости, получим силу, действующую на пронизываемое потоком поляризации тело, приняв во внимание, что поляризационный ток и ток проводимости должны быть эквивалентны в отношении электродинамического действия, во всяком случае с точки зрения электронной теории.

Если учесть дуализм электрических и магнитных явлений, то получим еще силу, действующую в электрическом поле на тело, пронизываемое потоком магнитной поляризации. В качестве общего выражения для сил, которые зависят от скорости элементарных частиц, мы получим таким путем равенство:

$$\mathfrak{K}_a = \frac{1}{c} [\mathfrak{s}\mathfrak{H}] + \frac{1}{c} [(\partial \mathfrak{P}/\partial t) \mathfrak{H}] + \frac{1}{c} [\mathfrak{E}(\partial \mathfrak{Q}/\partial t)]. \tag{11}$$

§ 3. Равенство действия и противодействия

Если сложить соотношения (6), (7) и (11), то для x-компоненты пондеромоторной силы, действующей на единицу объема вещества, получится общее выражение в форме

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{D} + \mathfrak{P}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} + \mathfrak{Q}_x \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \\ + \mathfrak{Q}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \mathfrak{Q}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} + \frac{1}{c} [\mathfrak{s}\mathfrak{H}]_x + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \mathfrak{H}\right]_x + \frac{1}{c} \left[\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t}\right]_x .$$

Это выражение для F_x можно записать также в виде

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{D} + \frac{1}{c} [\mathfrak{s}\mathfrak{H}]_x + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \mathfrak{H}\right]_x + \mathfrak{H}_x \operatorname{div} \mathfrak{H} + \frac{1}{c} \left[\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right]_x + \\ + \frac{\partial (\mathfrak{P}_x \mathfrak{E}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathfrak{P}_y \mathfrak{E}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathfrak{P}_z \mathfrak{E}_z)}{\partial z} + \frac{\partial (\mathfrak{Q}_x \mathfrak{H}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathfrak{Q}_y \mathfrak{H}_y)}{\partial y} + \\ + \frac{\partial (\mathfrak{Q}_z \mathfrak{H}_z)}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x .$$

Если заменить

$$\frac{1}{c}\left(\mathfrak{s} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right) \text{ и } \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} ,$$

пользуясь уравнением Максвелла, соответственно на $\operatorname{rot} \mathfrak{H}$ и $\operatorname{rot} \mathfrak{E}$, то после некоторых простых преобразований получим

$$F_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t} . \tag{12}$$

Здесь введены обозначения [6]:

$$\begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x, \\ X_y &= \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y, \\ X_z &= \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_z \\ \mathfrak{S}_x &= c [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x . \end{aligned} \tag{13}$$

Соответствующие соотношения существуют также и для двух других компонент пондеромоторной силы.

---

[6] Г-н Вин обратил наше внимание на то, что уже Лоренц ввел в этой же форме пондеромоторные силы для ненамагничивающихся тел (H. A. Lorentz. Enzycl. math. Wiss., 5, 247).

Если соотношение (12) проинтегрировать по всему пространству, то в случае обращения в нуль вектора напряженности поля на бесконечности получим соотношение:

$$\int \mathfrak{F}_x \, d\tau = -\frac{1}{c^2}\int d\tau \, \frac{d\mathfrak{S}_x}{dt}. \tag{14}$$

Оно свидетельствует о том, что пондеромоторные силы при учете электромагнитного количества движения удовлетворяют закону равенства действия и противодействия.

Поступила 18 мая 1908 г.

12

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ МИРИМАНОВА „ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ...“ *

1. Система дифференциальных уравнений и уравнения преобразования в работе Мириманова [1] отличаются от введенных Минковским *только* тем, что вместо вектора, обычно обозначаемого через $\mathfrak{H}$ (напряженность магнитного поля), автор вводит вектор

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{P}\mathfrak{w}].$$

Как указывает сам автор, именно при введении вектора $\mathfrak{Q}$ дифференциальное уравнение (1) совпадает с соответствующим уравнением Минковского; в остальные же три дифференциальных уравнения вектор $\mathfrak{H}$ не входит и они имеют тот же вид, что и соответствующие уравнения Минковского. Автор указывает также на то, что его векторы $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{B}$ преобразуются как обычные векторы поля, обозначаемые через $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$.

2. Соотношения между векторами, содержащие материальные константы (ε, μ и σ), также не отличаются от соответствующих соотношений Минковского. Автор исходит из того, что для системы координат, покоящейся в данный момент времени относительно рассматриваемой системы материальных точек, должны выполняться соотношения:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}, \ \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}, \ \mathfrak{J} = \sigma\mathfrak{E}.$$

Если теперь предположить, что вектор $\mathfrak{H}$ (автора) при $\mathfrak{w} = 0$ совпадает с вектором $\mathfrak{Q}$, а вектор $\mathfrak{Q}$ в дифференциальных уравнениях и уравнениях преобразований автора играет ту же роль, что и вектор $\mathfrak{m}$ в уравнениях

---

* *Bemerkung zu der Arbeit von D. Mirimanoff «Die Grundgleichungen...».* Ann. Phys. 1909, **28**, 885—888.

[1] Mirimanoff. Ann. Phys., 1909, **28**, 192.

Минковского (обычно обозначаемый через $\mathfrak{H}$), то можно видеть, что эти уравнения также совпадают с уравнениями Минковского с точностью до замены обозначения $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{Q}$.

3. Таким образом, показано, что величина $\mathfrak{Q}$ во всех уравнениях Мириманова играет ту же роль, что и величина, обозначаемая обычно через $\mathfrak{H}$ и называемая «магнитной силой» или «напряженностью магнитного поля». Однако уравнения Мириманова имеют несколько другое содержание, чем уравнения Минковского, так как величина $\mathfrak{Q}$ у Мириманова, в соответствии с определением, имеет иной физический смысл, чем обычная, обозначаемая через $\mathfrak{H}$ величина.

Чтобы разобраться в этом, рассмотрим сначала вопрос о том, каков смысл векторов $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ в уравнениях:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}+\mathfrak{i}, &\qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} &= \rho,\\ \operatorname{rot}\mathfrak{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}, &\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Заметим, что эти векторы в частном случае, когда скорость вещества $\mathfrak{w}$ отлична от нуля, до сих пор определены не были.

Определения, на которых могли бы базироваться (идеальные) измерения этих величин, имеются только для случая, когда скорость $\mathfrak{w}$ равна нулю; мы подразумеваем именно те определения, которые хорошо известны из электродинамики покоящихся тел. После того, как мы нашли с использованием уравнений Минковского, что в определенном элементе объема тела, движущемся со скоростью $\mathfrak{w}$, векторы поля в некоторый момент времени имеют определенные (векторные) значения $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, нам необходимо прежде всего преобразовать эти векторы поля к системе координат, покоящейся относительно данного элемента объема. Полученные таким образом векторы $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{B}'$ имеют определенный физический смысл, известный из электродинамики покоящихся тел.

Таким образом, дифференциальные уравнения Минковского для точки, где $\mathfrak{w} \neq 0$, сами по себе еще решительно ни о чем не говорят, и имеют смысл только вместе с уравнениями преобразований Минковского и с утверждением, что в случае $\mathfrak{w} = 0$ определения электродинамики покоящихся тел должны быть справедливы для векторов поля.

Мы можем теперь спросить, действительно ли вектор $\mathfrak{Q}$ Мириманова определяется иначе, чем вектор, только что обозначенный нами через $\mathfrak{H}$? Это оказывается не так по следующим причинам.

1. Векторы поля $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{B}$ Мириманова подчиняются тем же дифференциальным уравнениям и уравнениям преобразований, что и векторы поля $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ уравнений (A) Минковского.

2. И вектор Мириманова $\mathfrak{Q}$ и вектор $\mathfrak{h}$ из уравнений (А) определены только для случая $\mathfrak{w} = 0$; поэтому, в силу уравнения Мириманова

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{h} - \frac{1}{c}[\mathfrak{p}\mathfrak{w}],$$

следует положить, что $\mathfrak{Q} = \mathfrak{h}$ = напряженности поля; вектор $\mathfrak{h}$ входит в уравнение (А) так, что он, в случае $\mathfrak{w} = 0$, совпадает с напряженностью поля в смысле электродинамики покоящихся тел.

3. Эти два аргумента убеждают нас в том, что вектор Мириманова $\mathfrak{Q}$ и вектор $\mathfrak{h}$ в уравнениях (А) вполне равнозначны.

4. Чтобы сравнить свои результаты, относящиеся к опыту Вильсона, с результатами, полученными нами с Лаубом, автору следовало бы развить свои рассуждения настолько, чтобы найти соотношения между определенными, по крайней мере принципиально доступными опыту величинами. Для этого ему нужно было бы только использовать при решении своей системы уравнений соответствующие граничные условия. После вышеизложенного он пришел бы к точно тем же выводам, что и мы, так как его теория совпадает с теорией Минковского.

В заключение мне хотелось бы указать на значение недавно появившейся работы Франка [2], в которой посредством учета условий Лоренца восстанавливается соответствие между лоренцовым толкованием электродинамики движущихся тел в рамках электронной теории и толкованием Минковского. Преимущество толкования с точки зрения электронной теории заключается, с одной стороны, в том, что оно дает наглядное объяснение вектору поля, а с другой стороны, в том, что оно обходится без искусственных предположений о том, что производные от скорости вещества не входят в дифференциальные уравнения.

Поступила 22 января 1909 г.

[2] Ph. Frank. Ann. Phys., 1908, 27, 1059.

13

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЕГО СЛЕДСТВИЯ В СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКЕ*

§ 1. Эфир

С тех пор, как было признано, что между упругими колебаниями весомой материи и явлениями интерференции и дифракции света существует глубокая аналогия, появилось убеждение, что свет должен рассматриваться как колебательное состояние особого вида материи. Так как, кроме того, свет может распространяться там, где отсутствует весомая материя, ученые пришли к выводу, что в том случае, когда речь идет о распространении света, необходимо признать существование особого вида материи, отличного от весомой материи. Этот вид материи был назван эфиром. Поскольку в разреженных телах, например в газе, скорость распространения света почти такая же, как и в пустоте, естественно было признать, что и в этих случаях эфир играл большую роль в световых явлениях. Наконец, гипотеза о существовании эфира внутри жидких и твердых тел была необходимой для понимания законов распространения света в этих телах, поскольку невозможно было объяснить большую скорость распространения только упругими свойствами весомой материи. Из всего сказанного выше следует, что существование особой среды, пронизывающей всю материю, казалось неоспоримым и что гипотеза о существовании эфира составляла для физика прошлого столетия важную часть представления о Вселенной.

Возникновение электромагнитной теории света внесло некоторые изменения в гипотезу об эфире. Прежде всего, не вызывало сомнений, что электромагнитные явления необходимо свести к способам движения этой среды. Однако постепенно крепло убеждение в том, что никакая механическая теория эфира не дает ясного представления об электро-

---

* *Principe de relativité et ses conséquences dans la physique moderne.* Arch. sci. phys. Natur., ser. 4, 1910, 29, 5—28, 125—144.

магнитных явлениях, и тогда стали рассматривать электрические и магнитные поля как сущности, механическое толкование которых является излишним. Прямым следствием такого толкования было то, что эти поля в пустоте стали рассматривать как особые состояния эфира, не требующие более детального анализа.

Механическое и чисто электромагнитное толкование оптических и электромагнитных явлений имеет то общее, что в обоих случаях электромагнитное поле рассматривается как особое состояние гипотетической среды, заполняющей все пространство. Именно в этом указанные два толкования коренным образом отличаются от теории истечения Ньютона, согласно которой свет состоит из движущихся частиц. Согласно Ньютону, пространство должно рассматриваться как несодержащее ни весомой материи, ни лучей света, т. е. как абсолютно пустое. В то же время механическая и электромагнитная теории заставляют рассматривать само пространство как заполненное эфиром.

§ 2. Оптика движущихся тел и эфир

Приняв гипотезу о существовании эфира, нужно ответить на вопрос о механических связях, соединяющих эфир и материю. Когда материя приходит в движение, увлекается ли эфир полностью движущейся материей, или же он движется лишь частично, или, наконец, он остается неподвижным? Эти вопросы являются основными для оптики и электродинамики движущихся тел.

Проще всего было бы предположить, что движущиеся тела полностью увлекают эфир, который они содержат. Именно при этом предположении Герц построил непротиворечивую электродинамику движущихся тел. Тем не менее, как следует из знаменитого эксперимента Физо, эта теория неприемлема. Опыт Физо, который можно рассматривать как experimentum crucis, основан на следующих соображениях. Пусть u' — скорость распространения света в прозрачной и неподвижной среде. Сообщим этой среде равномерное и прямолинейное движение со скоростью V. Если среда заставляет двигаться весь содержащийся в ней эфир, то распространение света *по отношению к среде* будет таким же, как если бы среда была неподвижна; иначе говоря, u' будет также и скоростью распространения света по отношению к движущейся среде. Чтобы найти скорость по отношению к наблюдателю, не принимающему участия в движении среды, достаточно, следуя правилу сложения скоростей, к скорости u' прибавить векторно скорость V. В частном случае, если u' и V лежат на одной прямой, получается либо $u' + V$, либо $u' - V$, в зависимости от того, одинаковое или разное направление имеют скорости u' и V. Однако даже самые большие скорости, которые можно было бы сообщить телу, очень малы по сравнению со скоростью света; следовательно, возникает необходимость в очень точном экспериментальном методе, который позволил бы убедительно показать влияние движения среды на эту скорость. Физо предложил следующий эксперимент. Рассмотрим два луча света, способных интерферировать друг с другом, и две трубы, наполненные одинаковой жидкостью. Пропустим вдоль каждой трубы параллельно ее оси пучки света так, чтобы они интерферировали друг с другом после их выхода из труб.

Положение интерференционных полос изменится, если жидкость приходит в движение параллельно оси труб.

По различным положениям интерференционных полос в зависимости от изменения скорости течения можно определить скорость распространения света [1] относительно стенок трубы, т. е. скорость в движущейся среде. Физо нашел таким путем для суммы скоростей не величину $u' + V$, как мы могли бы ожидать из всего предыдущего, а $u' + \alpha V$, где α — число, заключенное в пределах между 0 и 1 и зависящее от показания преломления n среды [2] $\alpha = 1 - 1/n^2$.

Итак, частично свет увлекается движущейся жидкостью. Этот эксперимент отвергает гипотезу полного увлечения эфира. Следовательно, остаются две возможности.

1. Эфир полностью неподвижен, т. е. он не принимает абсолютно никакого участия в движении материи.

2. Эфир увлекается движущейся материей, но он движется со скоростью, отличной от скорости движения материи.

Развитие второй гипотезы требует введения каких-либо предположений относительно связи между эфиром и движущейся материей. Первая же возможность очень проста, и для ее развития на основе теории Максвелла не требуется никакой дополнительной гипотезы, могущей осложнить основы теории.

В 1895 г. Лоренц [3], предполагая эфир абсолютно неподвижным, предложил весьма совершенную теорию электромагнитных явлений. Эта теория позволяла не только количественно предсказать результаты эксперимента Физо, но и очень просто объясняла почти все опыты, которые можно было представить себе в этой области.

Лоренц утверждает, что материя состоит из элементарных частиц, часть которых, по крайней мере, обладает электрическими зарядами. Движущаяся по отношению к эфиру заряженная частица может быть

---

[1] Точнее, фазовую скорость света.

[2] В этом выражении пренебрегается дисперсией.

[3] H. A. L o r e n t z. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in Bewegten Körpern. Leyden, 1895.

отождествлена с элементом тока. Действие электромагнитного поля на частицу и реакция частицы на поле — вот единственные связи между материей и эфиром. В эфире, там, где пространство свободно от частиц, электрическое и магнитное поля описываются уравнениями Максвелла для свободного эфира, в том случае, конечно, если уравнения относятся к системе отсчета, неподвижной по отношению к эфиру.

Большая плодотворность теории Лоренца состоит в том, что свойства материи, проявляющиеся в оптике и электромагнетизме, могут быть объяснены только относительными положениями и движениями заряженных частиц.

§ 3. Эксперименты и следствия, не согласующиеся с теорией

Эксперимент Физо наталкивал на мысль, что движущаяся жидкость увлекает не весь эфир; происходит лишь частичное увлечение эфира. Однако, поскольку Земля вращается вокруг своей оси и вокруг Солнца и направление скорости ее движения в течение года сильно меняется, следовало думать, что эфир в наших лабораториях принимает некоторое участие как в движении Земли, так и в движении жидкости в исследованиях Физо. Отсюда вытекает, что эфир движется по отношению к нашим приборам со скоростью, изменяющейся со временем. Кроме того, надо было бы ожидать, что в оптических явлениях будет наблюдаться анизотропия пространства; иначе говоря, эти явления должны были бы зависеть от ориентации приборов. Так, например, в пустоте или в воздухе свет в направлении движения Земли должен был бы распространяться быстрее, чем против движения Земли. Нельзя было и думать получить непосредственное экспериментальное подтверждение этого следствия теории; так как по порядку величины ожидаемый эффект равен отношению скорости Земли к скорости света, т. е. 10^{-4}, то нечего было и думать о достижении подобной точности при прямом определении скорости света. Кроме того,— и это главное — способами измерения в земных условиях можно определить скорость света, используя лучи света, проходящие по замкнутому пути — туда и обратно,— а не по прямой. Причина этого заключается в том, что необходимо определить момент выхода лучей и момент их возвращения с помощью одних и *тех же приборов*, например, с помощью зубчатого колеса.

Известно много оптических явлений, которые позволяют надежно фиксировать изменения скорости света порядка 10^{-4}; наблюдая эти явления, согласно теории, можно было бы ожидать, что результаты получатся различными в зависимости от ориентации приборов по отношению к скорости Земли. Не вдаваясь в подробности, скажем, что все эти эксперименты дали отрицательные результаты. Таким образом, эксперимент Физо приводил к гипотезе частичного увлечения эфира движущимися телами, а все иные эксперименты не подтверждали этой гипотезы. Теория Лоренца [4] дает, по крайней мере, хоть какой-то ключ к решению этой загадки. Наличие постоянной скорости v прибора по отношению к эфиру оказывает влияние на оптические явления; однако это влияние на распределение интенсивности света оказалось очень слабым, соответствующие ему члены в уравнениях Лоренца пропорциональны $(v/c)^2$ (c — скорость света в пустоте).

Казалось бы, таким образом объясняется отрицательный результат экспериментов, поставленных с целью доказать существование относительного движения Земли по отношению к эфиру. Тем не менее, один из этих отрицательных результатов оказался настоящей головоломкой для теоретиков. Мы имеем в виду знаменитый опыт Майкельсона и Морли. Эти физики исходили из следующего замечания. Пусть M и N — две точки твердого тела; световой луч испускается из точки M и идет к N, где он отражается и возвращается в M. В этом случае, если тело имеет постоянную скорость по отношению к эфиру, теория предсказывает для времени t, необходимого для прохождения замкнутого пути MNM, различные величины в зависимости от того, по этому направлению или перпендикулярно ему движется тело. Правда, разница времен прохождения очень невелика, поскольку она порядка $(v/c)^2$, где v— скорость Земли, т. е. порядка 10^{-8}; тем не менее Майкельсон и Морли смогли поставить интерференционный эксперимент, с помощью которого эту разницу можно было измерить. Основные идеи их опыта состоят в следующем. Световой луч из источника S (см. рис. 1) разделяется с помощью полупрозрачного зеркала в точке A на два пучка. Один из них отражается от зеркала в B и возвращается в A, где он снова разделяется и дает луч, который идет в I. Другой луч проходит через полупрозрачное зеркало A и идет в зеркало B', где он отражается и попадает в A. В точке A он отражается снова и дает луч, также идущий в I. В точке I эти два луча интерферируют. Положение интерференционных полос зависит от разности хода обоих лучей ABA и $AB'A$. Эта разность хода должна зависеть от ориентации прибора.

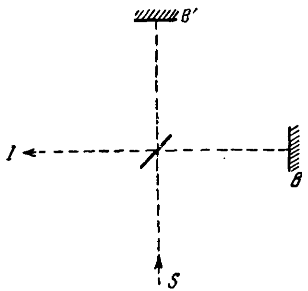

Рис. 1

[4] Правда, необходимо сказать, что Лоренц не рассматривал тела, которые способны вращать плоскость поляризации в отсутствие магнитного поля (тела с природной активностью).

Должно было бы наблюдаться смещение интерференционных полос, если вместо плеча AB' по направлению движения Земли будет ориентировано плечо AB. Однако ничего подобного не было обнаружено, и основы теории Лоренца пошатнулись. Чтобы спасти эту теорию, Лоренц и Фицджеральд прибегли к странной гипотезе: они предположили, что размеры любого тела, движущегося относительно эфира, сокращаются в направлении движения на часть, или, что сводится к тому же, если рассматривать только члены второго порядка малости, — что длина тела в этом направлении уменьшается в отношении $1 : \sqrt{1 - (v/c)^2}$.

В самом деле, эта гипотеза уничтожала разногласие между теорией и экспериментом. Однако эта теория не представляла собой единого целого. Она основывалась на существовании эфира, который нужно было считать движущимся относительно Земли, причем последствия этого движения никогда невозможно было бы обнаружить экспериментально. Такое странное свойство теории можно было объяснить, только с помощью введения априори маловероятных гипотез. Можно ли действительно думать, что вследствие любопытной случайности законы природы представляются нам таким необычным образом, что ни один из них не позволяет изучить быстрое движение нашей планеты через эфир? Не правда ли, было бы более правдоподобным допустить, что нас завело в тупик какое-то ошибочное соображение?

Прежде чем сказать, как избавиться от этих трудностей, покажем, что даже в частных случаях теория, основанная на существовании эфира, не всегда удовлетворительно объясняет явления, хотя она может прямо и не противоречить эксперименту.

Итак, рассмотрим, например, магнитный полюс, движущийся относительно замкнутого проводника. Если число силовых линий, пересекающих поверхность проводника, изменяется с течением времени, то в проводнике возникает ток. Известно, что возникший ток зависит только от изменения потока через проводник. Величина этого изменения зависит только от *относительного движения* полюса по отношению к проводнику, иначе говоря, с точки зрения конечного результата безразлично, будет это движущийся полюс и неподвижный проводник или же наоборот. Чтобы понять это явление с точки зрения теории эфира, необходимо приписать последнему состояния, в корне различные в зависимости от того, полюс или проводник движутся относительно эфира. В первом случае следует помнить, что движение полюса изменяет в каждое мгновение напряженность магнитного поля в различных точках эфира. Полученное таким образом изменение создает электрическое поле с замкнутыми силовыми линиями, существование которого не зависит от присутствия проводника. Это поле, как и любое другое электрическое поле, обладает определенной энергией; оно-то и создает электрический ток в проводнике. Если же, наоборот, проводник движется, а полюс остается в покое, то при этом не возникает никакого электрического поля. В этом случае на электроны, находящиеся в проводнике, действуют лишь пондеромоторные силы, получающиеся в результате движения этих электронов в магнитном поле; результатом же наличия этих сил является движение электронов, т. е. возникновение электрического тока.

Таким образом, чтобы с помощью теории эфира понять эти два в принципе не различающиеся эксперимента, необходимо, чтобы эфиру были приписаны принципиально различные состояния. В конце концов, подобное раздвоение, чуждое природе явлений, вводится всякий раз, как только приходится обращаться к факту существования эфира для объяснения явлений, вызванных относительными движениями двух тел.

§ 4. Принцип относительности и эфир

Каковы корни всех этих трудностей?

Теория Лоренца находится в противоречии с чисто механическими представлениями, к которым физики надеялись свести все явления Вселенной. Действительно, если в механике не существует абсолютного движения, а только движение одних тел относительно других, то в теории Лоренца существует особое состояние, которое физически соответствует состоянию абсолютного покоя; это состояние тела, неподвижного относительно эфира.

Если основные уравнения механики Ньютона, записанные для неускоряющейся системы отсчета, преобразовать с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

к новой системе координат, находящейся в прямолинейном и равномерном движении по отношению к первой, то при этом получаются уравнения в переменных t', x', y', z', идентичные исходным уравнениям в переменных t, x, y, z. Иначе говоря, при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся равномерно и прямолинейно по отношению к первой, ньютоновские законы движения преобразуются в законы того же вида. Именно это и имеют в виду, когда говорят, что в классической механике выполняется принцип относительности.

В общем виде принцип относительности сформулируем следующим образом.

Законы, управляющие явлениями природы, не зависят от состояния движения системы координат, по отношению к которой эти явления наблюдаются, если эта система движется без ускорения [5].

Если основные уравнения теории Лоренца преобразовать с помощью соотношений (1), то получаются уравнения другого вида, причем в них величины x', y', z' входят уже несимметрично. Итак, теория Лоренца, основанная на гипотезе эфира, не удовлетворяет принципу относительности. С этим, главным образом, и связаны встретившиеся до сих пор трудности. Более глубокие их причины выяснятся в дальнейшем. Как бы то ни было, не может быть приемлемой теория, не учитывающая принцип относительности,— принцип, который не опровергается ни одним экспериментальным фактом.

§ 5. О двух произвольных гипотезах, неявно содержащихся в привычных понятиях времени и пространства

Мы видели, что, допуская существование эфира, мы экспериментальным путем пришли к необходимости рассматривать эту среду как неподвижную. Затем мы видели, что обоснованная таким образом теория позволяет предсказать основные экспериментальные факты. Тем не менее она имеет один пробел: она не признает принципа относительности, что находится в противоречии с экспериментальными данными. Таким образом, возникает вопрос: нельзя ли согласовать основные положения теории Лоренца с принципом относительности? Первым шагом к этому является отказ от гипотезы эфира. В самом деле, с одной стороны, мы должны были признать неподвижность эфира; с другой стороны, принцип относительности требует, чтобы законы явлений природы, отнесенные к системе отсчета S', находящейся в равномерном движении, были идентичны законам тех же явлений, отнесенных к системе отсчета S, неподвижной по отношению к эфиру. Поэтому нет оснований допускать, как этого требуют теория и эксперимент, существование эфира, неподвижного по отношению к системе S, не делая такого допущения по отношению к системе S'. Эти две системы отсчета не могут отличаться одна от другой; признавая это, нелепо отводить особую роль одной из систем, считая ее неподвижной по отношению к эфиру. Отсюда следует, что нельзя создать удовлетворитель-

[5] При этом мы предполагаем, что понятие ускорения имеет объективное значение, иными словами, что наблюдатель, связанный с системой координат, может с помощью экспериментальных средств определить, движется система ускоренно или нет. В дальнейшем мы будем рассматривать только системы координат, движущиеся без ускорения.

ную теорию, не отказавшись от существования некоей среды, заполняющей все пространство. Таков первый шаг.

Чтобы сделать второй шаг, необходимо примирить принцип относительности с основным следствием теории Лоренца, так как отказаться от этого следствия — означало бы отказаться от основ этой теории. Вот это следствие.

Скорость s светового луча в пустоте постоянна, причем она не зависит от движения излучающего тела.

В § 6 это следствие мы возведем в принцип. Для краткости будем называть его в дальнейшем *принципом постоянства скорости света.*

В теории Лоренца этот принцип справедлив только для одной системы в особом состоянии движения: в самом деле, необходимо, чтобы система находилась в покое относительно эфира. Если мы хотим сохранить принцип относительности, мы обязаны допустить справедливость принципа постоянства скорости света для любой системы, движущейся без ускорения. На первый взгляд это кажется невозможным. Действительно, рассмотрим луч света, распространяющийся по отношению к системе отсчета S со скоростью c, и предположим, что мы хотели бы определить скорость его распространения по отношению к системе отсчета S', находящейся в состоянии равномерного прямолинейного движения относительно первой. Применяя правило сложения скоростей (правило параллелограмма скоростей), мы получим в общем случае скорость, отличную от c; иначе говоря, принцип постоянства скорости света, справедливый по отношению к S, неприменим в системе S'.

Чтобы теория, основанная на этих двух принципах, не приводила к противоречивым выводам, необходимо отказаться от привычного правила сложения скоростей, или, что лучше, заменить его другим. Как бы это правило ни казалось на первый взгляд хорошо обоснованным, тем не менее в нем скрыто не меньше двух произвольных гипотез, которые, как мы это увидим, управляют всей кинематикой. Эти гипотезы и заставляли считать, что с помощью законов преобразований (1) можно показать несовместимость теории Лоренца с принципом относительности.

Первая из гипотез касается физического понятия измерения времени. Чтобы измерить время, мы пользуемся часами. Что такое часы? Под часами мы подразумеваем любое устройство, которое характеризует явление, периодически проходящее через одни и те же фазы, причем, в силу достаточной наглядности этого процесса, мы вынуждены признать, что все происходящее во время данного периода идентично всему, что происходит во время любого периода [6]. Если часами является механизм, имею-

[6] Мы высказываем постулат, что два идентичных явления имеют одинаковую длительность. Таким образом, определенные идеальные часы играют в измерении времени ту же роль, что и идеальный масштаб при измерении длины.

щий стрелки, то, отмечая положение стрелок, мы тем самым отсчитываем число прошедших периодов. По определению, измерить отрезок времени — значит отсчитать количество периодов, показываемых часами от начала до конца какого-либо события.

Это определение абсолютно ясно, пока часы находятся настолько близко от места, где происходит событие, что можно одновременно наблюдать и часы, и событие. Если же предположить, что событие происходит на некотором расстоянии от местонахождения часов, немедленное сопоставление отдельных фаз явления и различных положений часовых стрелок становится невозможным. Из этого следует, что определение не полно: оно нуждается в дополнении. До настоящего времени это дополнение производилось бессознательно.

Чтобы узнать время в каждой точке пространства, мы можем представить себе пространство заполненным огромным количеством часов, причем все часы должны быть совершенно одинаковыми. Рассмотрим точки A, $B, C, \ldots$, в каждой из которых находятся часы, и которые отнесены с помощью независящих от времени координат к системе отсчета, не находящейся в ускоренном движении. В этом случае можно определить время всюду, где мы позаботились поместить часы. Если часов взято достаточно много, так чтобы на каждые из них приходился по возможности меньший участок пространства, то мы сможем определить время в любом месте пространства с какой угодно точностью. Однако, действуя подобным образом, мы не получаем такого определения времени, которое открывало бы для физика достаточно широкие возможности. Действительно, мы не сказали, каково должно быть положение стрелок в данный момент в разных точках пространства. Мы забыли синхронизировать наши часы и поэтому ясно, что промежутки времени, проходящие в течение какого-либо события, имеющего определенную длительность, будут различны в зависимости от того, в каких точках пространства происходит событие. Так, например, будет обстоять дело при изучении движения материальной точки, траектория которой проходит через точки A, B, C .... При прохождении материальной точки через A, фиксируем на находящихся в этой точке часах момент времени t_A. Таким же образом зафиксируем моменты t_B и t_C прохождения материальной точки через B и C. Поскольку к тому же координаты точек $A, B, C \ldots$ можно определить непосредственно с помощью градуированного масштаба, можно, например, сопоставляя координаты x_A, y_A, z_A, ..., точек A, B, C ... и моменты времени t_A, t_B, t_C, ..., получить координаты x, y, z движущейся материальной точки как функции переменной t, которую мы будем называть временем. Ясно, что форма этой функции зависит в основном от того, каким образом были установлены эти часы, когда их поместили в соответствующие места.

Для того, чтобы получить полное физическое определение времени, необходимо сделать еще один шаг. Надо сказать, каким образом все часы были выверены в начале эксперимента. Поступим следующим образом: во-первых, найдем способ передавать сигналы, например, из A в B или из B в A. Этот способ должен быть таким, чтобы мы были абсолютно уверены, что явления передачи сигналов из A в B нисколько не отличаются от явлений передачи сигналов из B в A. В этом случае очевидно, что существует только одна возможность поставить часы в точке B по часам в A так, чтобы сигнал, идущий из A в B, проходил бы этот путь за то же время, измеренное с помощью этих же часов, что и сигнал, идущий из B в A.

Если ввести обозначения:

t_A — показание часов в точке A в момент, когда сигнал AB выходит из A,

t_B — показание часов в точке A в момент, когда сигнал AB приходит в B,

$t_{B'}$ — показание часов в точке B в момент, когда сигнал BA выходит из B,

$t_{A'}$ — показание часов в точке B в момент, когда сигнал BA приходит в A,

то можно поставить часы, находящиеся в B, по часам в A таким образом, что

$$t_B - t_A = t_{A'} - t_{B'}.$$

В качестве сигналов можно использовать, например, звуковые волны, которые распространяются между A и B, проходя через среду, неподвижную [7] по отношению к этим точкам.

С неменьшим успехом можно пользоваться световыми лучами, распространяющимися в пустоте или в однородной среде, неподвижной по отношению к A и B. Оба этих способа передачи сигналов одинаково приемлемы. Если же, пользуясь и тем и другим способом, мы получим различные результаты, это будет объясняться тем, что, по крайней мере, в одном из способов условие эквивалентности путей AB и BA не соблюдается.

Тем не менее, среди всех возможных способов передачи сигналов мы отдаем предпочтение тем из них, где используются световые лучи, распространяющиеся в пустоте. Дело в том, что синхронизация часов требует эквивалентности пути туда и пути обратно; в этом же случае мы будем иметь эту эквивалентность по определению, так как, в силу принципа постоянства скорости света, в пустоте свет распространяется всегда со скоростью c.

[7] Среда должна быть неподвижной или, по крайней мере, скорость среды не должна иметь компоненты в направлении AB, чтобы пути AB и BA были эквивалентны.

Итак, мы должны синхронизовать наши часы таким образом, чтобы время, необходимое световому сигналу для прохождения пути из A в B, равнялось времени, за которое он проходит обратный путь из B в A.

Теперь мы располагаем вполне определенным методом проверки одних часов относительно других. Как только часы выверены, мы говорим, что они идут в фазе. Далее, если мы будем последовательно выверять часы B по часам A, часы C по часам B, . . ., мы получим ряд часов, идущих в фазе с предшествующими. Более того, в силу принципа постоянства скорости света две пары любых часов этой совокупности, не находящихся рядом, должны быть в фазе.

Совокупность показаний всех этих часов, идущих в фазе друг с другом, и составит то, что мы называем физическим временем.

Предполагаемое событие, сосредоточенное в одной точке и обладающее минимальной длительностью, называется *элементарным событием*. Показание часов, расположенных в максимальной близости от происходящего события, снятое в момент, когда это событие происходит, называется координатой времени элементарного события. Таким образом, элементарное действие определено четырьмя координатами: координатой времени и тремя координатами, определяющими положение в пространстве точки, где по предположению происходит событие.

Благодаря нашему физическому определению времени, мы можем придать вполне определенный смысл понятиям одновременности или неодновременности двух событий, происходящих в удаленных друг от друга местах. Таким же образом введение координат x, y, z точки придает вполне определенный смысл понятию положения. Так, например, сказать, что абсцисса точки P, расположенной на оси абсцисс, есть x, значит сказать, что если, следуя правилу, откладывать от начала координат единичный стержень x раз, то мы непременно должны попасть в точку P. Подобным же образом поступают, чтобы установить положение точки, если все три координаты отличны от нуля: только операции будут несколько сложнее. Как бы то ни было, указание отдельных координат связывается со вполне определенным экспериментом, относящимся к измерению положения твердых тел [8].

Необходимо сделать следующее важное замечание: для определения физического времени по отношению к данной системе координат мы вос-

[8] Мы не утверждаем, что координаты времени и пространства обязательно должны быть определены таким образом, что их определения могли бы служить основой для экспериментальных методов измерения этих координат, как это описано выше. Тем не менее, всякий раз, когда величины t, x, y, z вводятся в качестве чисто математических переменных в физические уравнения, последние будут правильны только в том случае, если эти переменные могут быть из них исключены.

пользовались группой часов, находящихся в состоянии покоя относительно этой системы. Согласно этому определению, показание времени или констатация одновременности двух событий будут иметь смысл только в том случае, если известно движение этой группы часов или системы координат.

Пусть даны две системы координат S и S', движущиеся равномерно и прямолинейно одна относительно другой. Предположим, что с каждой из этих двух систем связана группа часов, причем все часы, принадлежащие к одной и той же системе, идут в фазе. В этих условиях показания группы часов, связанной с S, определяют физическое время по отношению к системе отсчета S; подобным же образом показания группы часов, связанной с системой отсчета S' определяют физическое время по отношению к S'. Любое элементарное событие будет иметь координату времени t по отношению к системе отсчета S и координату времени t' по отношению к S'. *Итак, мы не имеем права априори предположить, что можно выверить часы двух групп таким образом, что обе координаты времени элементарного события были бы одинаковы, иными словами*, чтобы t было равно t'. Предположить это значило бы ввести произвольную гипотезу. Вплоть до настоящего времени эта гипотеза вводилась в кинематике.

Вторая произвольная гипотеза, введенная в кинематику, относится к конфигурации движущегося тела. Рассмотрим стержень AB, движущийся в направлении своей оси со скоростью V относительно системы отсчета S, не находящейся в ускоренном движении. Что следует понимать под «длиной стержня»? Вначале были попытки считать, что это понятие не требует специального определения. Ошибочность этой попытки будет ясно видна, если рассмотреть следующие два метода определения длины стержня.

1. Движение наблюдателя, обладающего масштабом, ускоряется до тех пор, пока его скорость не будет равна V, т. е. до тех пор, пока он будет неподвижен по отношению к стержню. После этого наблюдатель измеряет длину AB, последовательно прикладывая свой масштаб к стержню.

2. С помощью группы синхронизованных часов, неподвижных по отношению к системе отсчета S, определяют точки P_1 и P_2 системы S, где в момент t находятся оба конца стержня. После этого определяют длину прямой, соединяющей точки P_1 и P_2, последовательно прикладывая масштаб к линии P_1P_2, которая предполагается материальной.

Очевидно, что полученные в том и в другом случае результаты можно с некоторым основанием рассматривать как «длину стержня». Однако, априори отнюдь не ясно, что эти две операции непременно должны приводить к одному и тому же численному значению длины стержня. Все, что можно вывести из принципа относительности, и это легко доказывается,—

это то, что эти два метода приводят к одному и тому же численному значению, если стержень AB неподвижен относительно системы отсчета S. Тем не менее, абсолютно невозможно утверждать, что второй метод дает выражение для длины, не зависящее от скорости V стержня.

В более общем виде это можно сформулировать следующим образом: при определении конфигурации тела, движущегося равномерно и прямолинейно по отношению к системе S, обычными геометрическими методами, т. е. с помощью масштаба или других твердых тел, движущихся точно таким же образом, результаты измерений не будут зависеть от скорости V равномерного и прямолинейного движения. Такого рода измерения дают нам то, что мы называем *геометрической конфигурацией* тела. Если же, напротив, в системе S отмечают положение различных точек тела в данный момент и геометрическими измерениями с помощью масштаба, неподвижного по отношению к системе S, определяют конфигурацию, образованную этими точками, то в результате получают то, что мы называем *кинематической конфигурацией* тела относительно системы S.

Итак, вторая неосознанная гипотеза в кинематике может быть выражена так: конфигурация кинематическая и конфигурация геометрическая идентичны.

§ 6. Новые формулы преобразования (преобразование Лоренца) и их физический смысл

Из всего сказанного в предыдущем параграфе ясно, что правило параллелограмма скоростей, которое заставляло считать невозможным согласование теории Лоренца с принципом относительности, основано на произвольных и неприемлемых гипотезах. В самом деле, это правило приводит к следующим формулам преобразования:

$$t' = t, \qquad x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z,$$

или, в более общем виде,

$$t' = t, \qquad x' = x - v_x t, \qquad y' = y - v_y t, \qquad z' = z - v_z t.$$

Как мы видели, первое из этих соотношений выражает плохо обоснованную гипотезу о координатах времени элементарного события, взятых по отношению к двум системам отсчета S и S', движущимся равномерно и прямолинейно одна по отношению к другой. Три другие соотношения выражают гипотезу о том, что кинематическая конфигурация системы S' относительно системы S идентична геометрической конфигурации системы S'.

Если оставить в покое обычную кинематику и на новых принципах создать новую, то при этом возникают формулы преобразования, отличные от приведенных выше. Итак, мы сейчас покажем [9], что из

1. Принципа относительности и

2. Принципа постоянства скорости света

следуют формулы преобразования, позволяющие видеть, что теория Лоренца совместима с принципом относительности. Теорию, основанную на этих принципах, мы называем *теорией относительности*.

Пусть S и S' — две эквивалентные системы отсчета, т. е. такие, в которых длины измеряются одной единицей и в каждой из которых имеется по группе часов, идущих синхронно, если обе системы неподвижны одна относительно другой [10]. В соответствии с принципом относительности законы природы должны быть одинаковы в этих системах, независимо от того, находятся ли они в состоянии относительного покоя или движутся равномерно и прямолинейно одна по отношению к другой. Так, в частности, скорость света в пустоте должна выражаться одним и тем же числом в обеих системах. Пусть t, x, y, z — координаты элементарного события в системе S и t', x', y', z' — координаты того же события в системе S'. Мы поставили перед собой задачу найти соотношения, связывающие эти две совокупности координат. Используя однородность времени и пространства [11], можно показать, что эти соотношения должны быть линейными, т. е. время t связано с временем t' формулой вида:

$$t' = At + Bx + Cy + Dz. \tag{2}$$

Отсюда, в частности, для наблюдателя, связанного с системой S, следует, что три координатные плоскости системы S движутся равномерно; однако эти три плоскости не образуют прямоугольного трехгранника, хотя мы и предполагаем, что с точки зрения наблюдателя, связанного с этой системой, система S является прямоугольной. Если же, обратившись к системе S', мы выберем ось x параллельно направлению движения S', то, в силу симметрии, отсюда будет следовать, что система S' будет казаться нам прямоугольной. В частности мы можем выбрать относительное положение двух систем таким образом, что ось x будет постоянно совпадать с осью x', ось y будет все время параллельна оси y' и, кроме того, для наблюдателя, связанного с системой S, одноименные оси будут иметь одинаковое направление. Начнем отсчитывать время

---

[9] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 17, 891; Jahrb. Radioact., 1907, Bd. IV, H. 4, 441. (Статьи 1 и 8).

[10] В дальнейшем мы всегда будем неявно предполагать, что факт приведения в движение и остановки линейки, или часов, не изменяет ни длины линейки, ни хода часов.

[11] См. замечание на стр. 158.

с того момента, когда начала координат обеих систем совпадут. При этих условиях искомые соотношения оказываются однородными и уравнения

$$\begin{aligned} x' &= 0 \quad \text{и} \quad x - vt = 0, \\ y' &= 0 \quad \text{и} \quad y = 0, \\ z' &= 0 \quad \text{и} \quad z = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

эквивалентными; иначе говоря, координаты x, y, z, x', y', z' связаны соотношениями следующего вида

$$\begin{aligned} x' &= E(x - vt), \\ y' &= Fy, \\ z' &= Gz. \end{aligned}$$

Для определения постоянных A, B, C, D, E, F, G, входящих в уравнения (2) и (3), мы учтем, что в соответствии с принципом постоянства скорости света, скорость распространения имеет одну и ту же величину c по отношению к обеим системам, т. е., что уравнения

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2t'^2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

эквивалентны. Заменяя во втором из уравнений t', x', y', z' их значениями из (2) и (3) и сравнивая с первым уравнением, получаем формулы преобразования следующего вида:

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(v)\cdot\beta(t - (v/c^2)x), \\ x' &= \varphi(v)\cdot\beta(x - vt) \\ y' &= \varphi(v)\,y, \\ z' &= \varphi(v)\,z. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

а $\varphi(v)$ — некоторая функция v, подлежащая определению. Ее легко определить, если ввести третью систему координат S'', эквивалентную двум первым, движущуюся относительно S' с постоянной скоростью $-v$ и ориентированную по отношению к системе S таким же образом, как и S' по отношению к S.

Применяя два раза формулы преобразования (5), находим, что

$$\begin{aligned} t'' &= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,t, \\ x'' &= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,x, \\ y'' &= \varphi(v)\varphi(-v)\,y, \\ z'' &= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,z. \end{aligned}$$

Поскольку начала координат систем S и S'' все время совпадают, оси имеют одну и ту же ориентацию и системы эквивалентны, мы должны обязательно получить

$$\varphi(v)\,\varphi(-v) = 1$$

Так как, кроме того, соотношение между y и y' (как и между z и z') не зависит от знака v, то

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(v) = 1,$$

(значение $\varphi(v) = -1$ в этом случае непригодно)

$$t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right), \tag{I}$$

$$x' = \beta(x - vt),$$

$$y' = y$$

$$z' = z,$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\,.$$

Лоренц очень удачно ввел эти формулы преобразования в электродинамику. В дальнейшем мы будем их называть *преобразованием Лоренца.*

Если эти формулы разрешить относительно t, x, y, z, получаются формулы того же вида, где однако штрихованные величины заменены нештрихованными и v заменено на $-v$. В конце концов этот результат является очевидным следствием принципа относительности: система отсчета S движется относительно системы отсчета S' параллельно осям x и x' со скоростью $-v$.

Комбинируя формулы преобразования с уравнениями, описывающими вращение одной системы относительно другой, можно получить более общие преобразования координат.

§ 7. Физическая интерпретация формул преобразования

1. Рассмотрим тело, покоящееся относительно системы отсчета S'. Пусть x_1', y_1', z_1' и x_2', y_2', z_2' — координаты двух точек тела. В любой момент t, в системе S между этими координатами справедливы следующие

соотношения:

$$x_2 - x_1 = \sqrt{1-(v^2/c^2)}\,(x'_2 - x'_1),$$
$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1, \tag{6}$$
$$z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1.$$

Это показывает, что кинематическая конфигурация тела, движущегося равномерно и прямолинейно по отношению к некоторой системе отсчета, зависит от скорости v поступательного движения. Более того, кинематическая конфигурация отличается от геометрической только сокращением размеров в направлении движения в отношении $1 : \sqrt{1-(v^2/c^2)}$. Относительное движение двух систем со скоростью v, большей скорости света в пустоте, несовместимо с принятыми нами принципами.

В полученных выше уравнениях нетрудно узнать гипотезу Лоренца и Фицджеральда (§ 3). Эта гипотеза казалась нам странной, и ввести ее было необходимо для того, чтобы иметь возможность объяснить отрицательный результат эксперимента Майкельсона и Морли. Здесь эта гипотеза выступает как естественное следствие принятых нами принципов.

2. Рассмотрим часы H', находящиеся в начале координат системы S' и идущие в p_0 раз быстрее часов, используемых для определения физического времени в системах S или S'. Иначе говоря, при сравнении часов, когда они находятся в относительном покое, часы H' покажут p_0 единиц времени за единицу времени, отсчитанную другими часами. Сколько единиц времени покажут часы H' за единицу времени, если вести наблюдение из системы S?

Часы H' отметят концы периодов в моменты

$$t'_1 = \frac{1}{p_0}, \quad t'_2 = \frac{2}{p_0}, \quad t'_3 = \frac{3}{p_0}, \ldots, t'_n = \frac{n}{p_0}.$$

Так как мы определяем время по отношению к системе S, первая из формул преобразования (I) должна иметь следующий вид:

$$t = \beta\left(t' - \frac{v}{c^2}x'\right),$$

и так как часы H' все время остаются в начале координат S', то

$$x' = 0,$$

что дает

$$t_n = \beta t'_n = \frac{\beta}{p_0}n.$$

Итак, если вести наблюдение из системы S, часы H' покажут за единицу времени

$$p = \frac{p_0}{\beta} = p_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

периодов. Другими словами, если наблюдать часы из системы, по отношению к которой они равномерно движутся со скоростью v, то окажется, что они идут в $1 : \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ раз медленнее, чем те же часы, неподвижные по отношению к этой системе.

Остановимся на одном интересном применении предыдущей формулы. В 1907 году [12] Штарк обратил внимание на то, что спектральные линии, которые излучают ионы каналовых лучей, наводят на мысль о чем-то подобном явлению Допплера, т. е. о смещении спектральных линий, вызываемом движением источника.

Поскольку колебательные явления, вызывающие возникновение спектральных линий, должны рассматриваться как внутриатомные явления, частота которых определяется только природой ионов, мы можем использовать эти ионы как часы. Частота p_0 колебательного движения ионов даст нам возможность измерять время. Найти эту частоту можно, наблюдая спектр, который дают ионы того же типа, находящиеся, однако, в покое относительно наблюдателя. Предыдущая формула показывает, что помимо явления, известного под названием явления Допплера, на источник влияет движение, уменьшающее видимую частоту линий.

3. Рассмотрим уравнения движения точки, движущейся относительно S' равномерно со скоростью u.

$$x' = u_{x'} t',$$

$$y' = u_{y'} t',$$

$$z' = u_{z'} t'.$$

Если, воспользовавшись соотношениями (I) вместо x', y', z', t' подставить сюда их выражения через x, y, z, t, то получим x, y, z как функции t и, следовательно, компоненты u_x, u_y, u_z скорости u точки по отношению к системе S. Таким образом, можно получить формулу, которая выражает теорему сложения скоростей в ее общем виде, и тогда немедленно станет ясным, что закон параллелограмма скоростей применим лишь как первое приближение. В частном случае, когда скорость u' имеет то же направление, что и скорость v поступательного движения S' относительно S, легко

---

[12] J. Stark. Ann. Phys., 1907, 21, 401.

получить, что

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}}. \tag{7}$$

Из этого соотношения видно, что при сложении двух скоростей, меньших скорости света в пустоте, результирующая скорость всегда меньше скорости света. Действительно, если взять $v = c - \lambda$, $u' = c - \mu$, где λ и μ положительны и меньше c, то

$$u = c \cdot \frac{2c - \lambda - \mu}{2c - \lambda - \mu + \frac{\mu\lambda}{c}} < c.$$

Кроме того, отсюда следует, что, складывая скорость света со скоростью, меньшей c, мы всегда получаем скорость света. Теперь можно понять, почему Физо для суммы скорости света в жидкости u' и скорости v жидкости в трубе не получил величины $u' + v$ (§ 2). В самом деле, пренебрегая членами высшего по сравнению с первым порядка малости и заменяя отношение c/u' показателем преломления жидкости [13] n, можно переписать соотношение (7) следующим образом:

$$u = u' + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Это соотношение совпадает с тем, которое Физо получил экспериментальным путем.

Из теоремы сложения скоростей непосредственно вытекает и другое следствие, настолько же странное, насколько и интересное. Можно показать, что не существует никакого способа посылать сигналы, которые распространялись бы быстрее, чем свет в пустоте. Рассмотрим стержень, движущийся равномерно вдоль оси X системы S со скоростью $-v$ ($|v| < c$), с которого можно посылать сигналы, распространяющиеся по отношению к самому стержню со скоростью u'. Предположим, что в точке $x = 0$ оси X находится наблюдатель A, а в точке $x = x_1$ той же оси находится наблюдатель B. Оба наблюдателя неподвижны в системе S. Если наблюдатель A с помощью этого стержня посылает в B сигнал, то скорость этого сигнала относительно наблюдателей будет

$$\frac{v - u'}{1 - \frac{vu'}{c^2}}.$$

[13] Строго говоря, коэффициент преломления соответствует не показателю преломления жидкости для частоты источника, используемого в эксперименте, но коэффициенту преломления жидкости для частоты, которую измерял бы наблюдатель, движущийся вместе с жидкостью.

Следовательно, время, необходимое сигналу для прохождения пути AB, равно

$$T = x_1 \frac{1 - \frac{vu'}{c^2}}{v - u'},$$

где v может быть любой величиной, меньшей c.

Итак, предположив, что u' больше, чем c, можно всегда выбрать такое v, чтобы T было отрицательным. Иными словами, должно было бы существовать явление, заключающееся в том, что сигнал приходит к месту назначения до того, как он отправлен, т. е. результат предшествовал бы причине. Хотя такой вывод логически возможен, он слишком противоречит всем нашим экспериментальным данным, чтобы поставить под сомнение доказанную невозможность иметь $u' > c$.

4. Теория относительности, построенная на принятых здесь принципах, позволяет найти в общем виде формулы, описывающие явления Допплера и аберрацию. Для этого достаточно сравнить вектор, пропорциональный

$$\sin\omega\left(t - \frac{lx + my + nz}{c}\right),$$

т. е. вектор плоской световой волны, распространяющейся в пустоте относительно системы S, с вектором, пропорциональным

$$\sin\omega'\left(t' - \frac{l'x' + m'y' + n'z'}{c}\right),$$

т. е. с вектором той же волны относительно системы S'. Заменяя в последнем выражении t', x', y', z' их значениями, полученными из формул преобразования (I), и сопоставляя их с первым выражением, можно найти соотношения, связывающие ω', l', m', n' с ω, l, m, n. Пользуясь этими уравнениями, нетрудно вывести формулы аберрации и эффекта Допплера.

Фундаментальное значение формул преобразования (I) заключается в том, что они дают критерий, позволяющий проверять точность физической теории.

В самом деле, необходимо, чтобы при замене с помощью формул преобразования переменных t, x, y, z переменными t', x', y', z' любое уравнение, выражающее физический закон, преобразовалось бы в уравнение того же вида. Кроме того, зная законы, применяемые к неподвижному телу или к телу, движущемуся с бесконечно малой скоростью, можно с помощью формул преобразования найти законы, применимые к тому же телу, движущемуся с большой скоростью [14].

[14] Теперь нетрудно понять, что мы имели в виду в § 6, когда говорили о свойствах однородности времени и пространства, т. е. почему мы допускали априори, что уравнения преобразования должны быть линейными. В самом деле, если из

§ 8. Замечания о некоторых формальных свойствах уравнений преобразования

Рассмотрим две системы координат Σ и Σ', которые одинаково ориентированы и имеют общее начало.

В механике Ньютона существует два вида преобразований координат, не изменяющих законы движения.

1. Вращение системы Σ' по отношению к системе Σ вокруг общего начала. Это преобразование характеризуется линейными уравнениями относительно x', y', z' и x, y, z, между коэффициентами которых существуют такие соотношения, что условие

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{1}$$

выполняется тождественно.

2. Равномерное и прямолинейное движение системы Σ' относительно системы Σ. Это преобразование характеризуется уравнениями

$$\begin{aligned} x' &= x + \alpha t, \\ y' &= y + \beta t, \\ z' &= z + \gamma t, \end{aligned} \tag{2}$$

где α, β, γ — постоянные. Для этих двух видов преобразований должно соблюдаться условие

$$t' = t. \tag{3}$$

Иными словами, время при этих преобразованиях должно оставаться неизменным. Комбинируя преобразования (1) и (2), можно получить наиболее общее преобразование, с помощью которого можно преобразовывать уравнения механики, не изменяя их вида. Это преобразование описывается уравнением (3) и тремя уравнениями, с помощью которых координаты x', y', z' выражаются как линейные функции от x, y, z, t; при этом коэффициенты этих трех уравнений связаны между собой соотношениями, которые при $t = 0$ тождественно удовлетворяют условию (1).

системы S наблюдать ход часов, неподвижных относительно S', то этот ход не должен зависеть ни от того места, где эти часы были помещены в системе S', ни от времени в системе S' в месте рядом с часами. Аналогичное замечание применимо также к ориентации и длине стержня, связанного с S' и наблюдаемого из системы S. Все эти условия выполняются, если только уравнения преобразования являются линейными.

Рассмотрим теперь наиболее общие преобразования координат, совместимые с теорией относительности. Исходя из всего предыдущего, это преобразование характеризуется тем, что x', y', z', t' должны быть такими линейными функциями x, y, z, t, чтобы тождественно выполнялось условие

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{a}$$

Необходимо отметить, что преобразования, совместимые с механикой Ньютона, немедленно получаются из соотношения (а), если в нем положить $c = \infty$. Итак, следуя тем путем, которым мы шли раньше, можно получить уравнения обычной кинематики, если вместо принципа постоянства скорости света допустить существование сигналов, не требующих времени для своего распространения.

Группа преобразований, характеризующаяся условием (а), содержит преобразования, соответствующие изменению ориентации системы. Это — преобразования, совместимые с условием

$$t = t'.$$

Наиболее простыми уравнениями, удовлетворяющими условию (а), являются уравнения, для которых две из четырех координат не изменяются. Рассмотрим, например, преобразования, при которых x и t постоянны. В этом случае, вместо общего условия (а) мы имеем

$$\left.\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x, \\ y'^2 + z'^2 &= y^2 + z^2 \end{aligned}\right\} \tag{a$_1$}$$

Этому условию соответствует вращение системы вокруг оси X. Если же мы рассмотрим преобразования, при которых две пространственные координаты, например, y и z, остаются неизменными, то получим вместо общего условия (а) частные условия

$$\left.\begin{aligned} y' &= y, \\ z' &= z, \\ x'^2 - c^2t'^2 &= x^2 - c^2t^2. \end{aligned}\right\} \tag{a$_2$}$$

Это — преобразования, которые мы встретили в предыдущем параграфе, рассматривая систему, равномерно движущуюся параллельно оси X другой неподвижной системы, расположенной таким же образом.

Бросается в глаза формальная аналогия между преобразованиями (а$_1$) и (а$_2$). Обе системы уравнений отличаются только знаком в третьем условии. Но даже и это различие можно устранить, если здесь, следуя Минковскому [15], в качестве переменной вместо t взять ict, где i есть $\sqrt{-1}$. В этом случае мнимая временнàя координата будет входить в формулы преобразования симметрично с пространственными координатами. Если ввести обозначения

$$x = x_1,$$

$$y = x_2,$$

$$z = x_3,$$

$$ict = x_4$$

и рассматривать x_1, x_2, x_3, x_4 как координаты какой-либо точки четырехмерного пространства так, чтобы любому элементарному событию соответствовала одна точка этого пространства, то все, что происходит в физическом мире, сведется к статике в четырехмерном пространстве. В этом случае условие (а) будет записываться в следующем виде:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Это условие будет соответствовать вращению без относительного поступательного движения четырехмерной системы координат.

Принцип относительности требует, чтобы законы физики не изменялись от вращения четырехмерной системы координат, к которой они отнесены. Четыре координаты x_1, x_2, x_3, x_4 должны входить в выражения законов природы симметрично. Для описания различных физических состояний можно пользоваться четырехмерными векторами, которые входят в вычисления точно так же, как и обычные векторы трехмерного пространства.

§ 9. Некоторые применения теории относительности

Применим уравнения преобразования (I) к уравнениям Максвелла — Лоренца, описывающим электромагнитное поле. Пусть E_x, E_y, E_z — компоненты вектора напряженности электрического поля и M_x, M_y, M_z — компоненты вектора напряженности магнитного поля относительно системы отсчета S. Вычисления показывают, что если положить

$$E_x' = E_x, \qquad M_x' = M_x,$$

---

[15] H. Minkowski. Raum und Zeit. Leipzig, 1908. [Русский перевод был опубликован несколько раз; последний раз в сб. «Принцип относительности». ГТТИ, 1934.— *Прим. ред.*].

$$E'_y = \beta\left(E_y - \frac{v}{c} M_z\right), \qquad M'_y = \beta\left(M_y + \frac{v}{c} E_z\right), \tag{1}$$

$$E'_z = \beta\left(E_z + \frac{v}{c} M_y\right), \qquad M'_z = \beta\left(M_z - \frac{v}{c} E_y\right),$$

то преобразованные уравнения идентичны исходным. Векторы (E'_x, E'_y, E'_z) и (M'_x, M'_y, M'_z) в уравнениях, записанных в системе S', играют ту же роль, что и векторы (E_x, E_y, E_z) и (M_x, M_y, M_z) в уравнениях, записанных в системе S. Отсюда вытекает следующий важный вывод. *Существование электрического поля, равно как и магнитного, зависит от движения системы координат.*

Преобразованные уравнения позволяют определить электрическое поле по отношению к какой-либо системе координат S', движущейся без ускорения, если известно поле относительно другой системы S того же типа.

Эти преобразования были бы невозможны, если бы состояние движения системы координат не входило в определение векторов поля. В этом можно тотчас же убедиться, если рассмотреть определение электрического поля: величина, направление и знак напряженности поля в данной точке определяются величиной пондеромоторной силы, с которой поле действует на единицу количества электричества, предполагаемую сосредоточенной в рассматриваемой точке и *неподвижную по отношению к системе координат.*

Формулы преобразования показывают, что встреченные нами трудности (§ 3), связанные с явлениями, вызванными относительными движениями замкнутого проводника и магнитного полюса, полностью преодолены в новой теории.

В самом деле, рассмотрим электрический заряд, движущийся равномерно относительно магнитного полюса. Мы можем вести наблюдение или из системы координат S, связанной с магнитом, или из системы координат S', связанной с электрическим зарядом. По отношению к системе S существует только одно магнитное поле (M_x, M_y, M_z) и никакого электрического поля. Напротив, по отношению к системе S' существует, как видно из выражений для E'_y и E'_z, электрическое поле, действующее на электрический заряд, неподвижный относительно системы S'. Итак, трактовка явлений меняется в зависимости от состояния движения системы координат. Все зависит от точки зрения; тем не менее, эти изменения точек зрения не играют большой роли и во всяком случае не могут привести ни к каким противоречиям. Совсем иначе обстоит дело, когда эти изменения приписывали изменениям состояния среды, заполняющей все пространство.

Как уже отмечалось, зная законы, применимые к покоящемуся телу, можно немедленно найти законы, применимые к телу, движущемуся с большой скоростью. Так, например, можно получить уравнения движения материальной точки с массой m, имеющей заряд e (например электрон) и находящейся под действием электромагнитного поля. Действительно, уравнения движения материальной точки в тот момент, когда ее скорость равна нулю, известны. Исходя из уравнений Ньютона и из определения напряженности электрического поля, имеем

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=eE_x, \tag{2}$$

а также еще два подобных уравнения для y- и z-компонент. Тогда, применяя уравнения преобразования (I) и соотношения (1) этого параграфа, находим для произвольно движущейся точки

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\right\}=F, \tag{3}$$

где

$$u=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

и

$$F_x=a\left\{E_x+\frac{1}{c}\left[\frac{dy}{dt}\cdot M_z-\frac{dz}{dt}\cdot M_y\right]\right\},$$

и два других подобных уравнения для остальных компонент. Эти уравнения позволяют проследить путь катодных и β-лучей в электромагнитном поле. Их точность почти так же несомненна, как и точность эксперимента Бухерера и Хупки.

Если мы хотим сохранить соотношение между силой и механической работой, а также теорему о моменте количества движения, то мы должны рассматривать входящие в эти уравнения векторы F_x, F_y, F_z как векторные компоненты пондеромоторной силы, действующей на движущуюся материальную точку. В этих условиях уравнения (3) следует рассматривать как наиболее общие уравнения движения материальной точки — уравнения, совместимые с принятыми здесь принципами и не зависящие от природы силы (F_x, F_y, F_z).

Если выразить математически, сначала в системе S, а затем в системе S', тот факт, что при испускании и поглощении энергии, излучаемой телом, закон сохранения энергии, а также закон сохранения момента количества движения остаются в силе, то сам собой напрашивается важный вывод: масса любого тела зависит от содержащегося в нем количества энергии. Если обозначить через m массу, соответствующую определенному количеству энергии, содержащемуся в теле, то, увеличив на W энергию тела, мы получим массу, равную

$$m = \frac{W}{c^2},$$

где через c обозначена, как всегда, скорость света в пустоте.

Итак, закон сохранения массы, принятый в механике Ньютона, справедлив только для системы, энергия которой постоянна. Масса и энергия становятся такими же эквивалентными друг другу величинами, как, например, теплота и механическая работа. Таким образом, мы вплотную подошли к тому, чтобы рассматривать массу как сосредоточение колоссального количества энергии. К сожалению, изменения массы W/c^2 настолько малы, что в настоящее время нет никакой надежды обнаружить их экспериментальным путем.

1911

14

О ВЛИЯНИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА*

В работе, опубликованной четыре года назад, мы уже пытались ответить на вопрос, влияет ли тяготение на распространение света [1]. Мы снова возвращаемся к этой теме, так как нас не удовлетворяет прежнее изложение вопроса; кроме того, мы теперь еще раз убедились в том, что один из наиболее важных выводов указанной работы поддается экспериментальной проверке. Оказывается, что лучи, проходящие вблизи Солнца, согласно излагаемой ниже теории, испытывают под влиянием поля тяготения Солнца отклонение, вследствие чего должно произойти кажущееся увеличение углового расстояния между оказавшейся вблизи Солнца неподвижной звездой и самим Солнцем почти на одну дуговую секунду.

Развитие этих идей привело также к некоторым результатам, относящимся к тяготению. Так как изложение всех рассуждений было бы громоздким в ущерб ясности, то ниже будут даны только некоторые совершенно элементарные соображения, с помощью которых удобно ориентироваться в предпосылках и в логическом развитии теории. Выведенные в настоящей работе соотношения, даже если теоретическое основание их и соответствует действительности, являются верными только в первом приближении.

---

* *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes.* Ann. Phys., 1911, 35, 898—908.

[1] A. Einstein. Jahrb. d. Radioakt., 1907, 4, 411. (Статья 8).

§ 1. Гипотеза о физической природе гравитационного поля

Пусть в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести γ) находится покоящаяся координатная система K, которая ориентирована так, что силовые линии поля идут в отрицательном направлении оси z. Пусть в пространстве, свободном от гравитационных полей, находится вторая координатная система K', которая равномерно ускоренно (с ускорением γ) движется в положительном направлении своей оси z. Чтобы не усложнять рассуждения, откажемся от теории относительности и рассмотрим обе системы в рамках привычной нам кинематики, а происходящие в них движения — в рамках обычной механики.

Материальные точки, которые не подвергаются влиянию со стороны других материальных точек, движутся относительно K, как и относительно K', в соответствии с уравнениями

$$\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y_\nu}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z_\nu}{dt^2} = -\gamma.$$

Для ускоренной системы отсчета K' это следует прямо из принципа Галилея; для покоящейся же в однородном гравитационном поле системы отсчета K это следует из того опытного факта, что все тела в таком поле ускоряются равномерно и одинаково сильно. Этот опытный факт об одинаковом ускорении падения всех падающих в гравитационном поле тел является одним из наиболее общих фактов, установленных нами из наблюдений; несмотря на это, закон этот не нашел еще отражения в основах нашей физической картины мира.

Однако мы придем к весьма удовлетворительной интерпретации этого опытного закона, если допустим, что системы отсчета K и K' физически в точности равноценны, т. е. если допустим, что систему K равным образом можно рассматривать как систему, находящуюся в пространстве, свободном от поля тяжести, но при этом мы должны рассматривать K как равномерно ускоренную систему. При таком подходе нельзя говорить об абсолютном ускорении координатной системы, так же как нельзя в обычной теории относительности говорить об *абсолютной скорости* системы [2]. С этой точки зрения одинаковое ускорение всех падающих тел в гравитационном поле очевидно.

Пока мы ограничиваемся чисто механическими явлениями, для которых справедлива механика Ньютона, мы уверены в равноценности систем

[2] Конечно, нельзя *любое* поле тяжести заменить состоянием движения системы без гравитационного поля, точно так же, как нельзя преобразовать все точки произвольно движущейся среды к покою посредством релятивистского преобразования.

K и K'. Однако представление наше будет достаточно глубоким только в том случае, если системы K и K' окажутся равноценными относительно всех физических явлений, т. е. если законы природы по отношению к системе K полностью совпадут с законами природы по отношению к системе K'. Приняв это, мы получаем принцип, имеющий большое эвристическое значение, если он действительно справедлив. В самом деле, с помощью теоретического изучения явлений, протекающих относительно равномерно ускоренной координатной системы, мы получаем представление о ходе явлений в однородном гравитационном поле. В дальнейшем будет прежде всего показано, каким образом с точки зрения обычной теории относительности наша гипотеза приобретает значительную долю вероятности.

§ 2. О тяжести энергии

Теория относительности привела к выводу, что инертная масса тела растет с увеличением содержащейся в нем энергии; если приращение энергии составляет E, то приращение инертной массы равно E/c^2, где c — скорость света. Но соответствует ли этому приращению инертной массы также приращение тяготеющей массы? Если нет, то тело в одном и том же поле тяжести падало бы с различным ускорением в зависимости от энергии тела. Столь удовлетворительный результат теории относительности, согласно которому закон сохранения массы содержится в законе сохранения энергии, оказался бы несправедливым, хотя в этом случае для *инертной* массы и нужно было бы отбросить закон сохранения массы в его старой формулировке, но для тяготеющей массы он остался бы в силе.

Такой вывод нужно считать весьма маловероятным. С другой стороны, обычная теория относительности не дает ни одного аргумента, из которого можно было бы заключить, что вес тела зависит от содержащейся в нем энергии. Однако мы покажем, что из нашей гипотезы об эквивалентности систем отсчета K и K' тяжесть энергии вытекает как необходимое следствие.

Пусть две физические системы тел S_1 и S_2, снабженные измерительными приборами, расположены на оси Z системы отсчета K на расстоянии h друг от друга [3], так что гравитационный потенциал в том месте, где находится система S_2, на γh больше гравитационного потенциала в месте нахождения S_1 (рис. 1). Пусть из S_2 посылается в S_1 определенное количество энергии E в виде излучения. Пусть при этом количество энергии измеряется с помощью приборов, которые, будучи установлены *в одном и том же* месте систем z и там друг с другом сравнены, оказались бы

---

[3] Размеры систем S_1 и S_2 рассматриваются как бесконечно малые по сравнению с h.

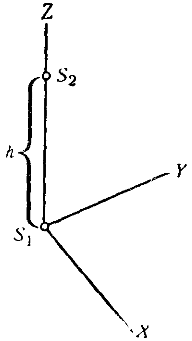

Рис. 1.

совершенно одинаковыми. Априори ничего нельзя сказать о процессе переноса энергии излучением, потому что мы не знаем, как влияет поле тяжести на энергию излучения и на измерительные инструменты в S_1 и S_2.

Но, согласно допущению об эквивалентности систем отсчета K и K', мы можем на место системы K, находящейся в однородном поле тяжести, поставить свободную от тяготения систему отсчета K', движущуюся равномерно ускоренно в направлении положительных значений z, с осью z которой жестко связаны физические системы S_1 и S_2.

Пусть мы обсуждаем процесс переноса энергии излучением из S_2 в S_1, находясь в некоторой системе отсчета K_0, которая не обладает ускорением. Положим, что в тот момент, когда энергия излучения E_2 переносится из S_2 в S_1, система K' обладает относительно системы K_0 скоростью, равной нулю. Лучи достигнут системы S_1 спустя время h/c (в первом приближении). В этот момент система S_1 обладает относительно K_0 скоростью $\gamma h/c = v$. Поэтому, согласно обычной теории относительности, достигающее S_1 излучение имеет не энергию E_2, а бо́льшую энергию E_1, которая в первом приближении связана с E_2 соотношением[4]:

$$E_1 = E_2\left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_2\left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right). \qquad (1)$$

По нашему предположению, точно такое же соотношение справедливо и в том случае, когда рассматриваемый процесс протекает в неускоренной, но находящейся в гравитационном поле системе K. В этом случае мы можем заменить γh потенциалом Φ гравитационного поля в точке, где находится S_2, если произвольная постоянная потенциала Φ в точке, где находится S_1, приравнивается нулю. Следовательно, мы имеем:

$$E_1 = E_2 + \frac{E_2}{c^2}\Phi. \qquad (1a)$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии для рассматриваемого процесса. Энергия E_1, приходящая в S_1, больше, чем измеренная такими же приборами энергия E_2, которую отдает система в S_2, и притом на величину потенциальной энергии массы E_2/c^2 в поле тяжести. Таким образом, оказывается, что для выполнения закона сохранения энергии нужно к энергии E перед ее испусканием из S_2 прибавить потенциальную энергию, которая соответствует (тяжелой) массе E/c^2 в поле тяжести.

[4] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 17, 891. (Статья 1).

Следовательно, наше допущение об эквивалентности систем отсчета K и K' устраняет изложенную в начале этого параграфа трудность, чего не могла сделать обычная теория относительности.

Смысл этого результата становится особенно ясным при рассмотрении следующего кругового процесса.

1. Энергия E, измеренная в S_2, посылается в форме излучения из S_2 в S_1, где, согласно только что полученному результату, поглощается энергия $E\left(1+\frac{\gamma h}{c^2}\right)$, измеренная в S_1.

2. Тело W с массой M падает из S_2 в S_1, причем совершается работа $M\gamma h$.

3. Энергия E из системы S_1 переносится на тело W, когда оно находится в S_1. Благодаря этому изменяется тяжелая масса M; пусть ее новое значение равно M'.

4. Тело W снова поднимается в S_2, причем затрачивается работа $M'\gamma h$.

5. Энергия E переносится с тела W на систему S_2.

В результате этого кругового процесса система S_1 приобрела энергию $E\,(\gamma h/c^2)$ и системой передана энергия $M'\gamma h - M\gamma h$ в форме механической работы. Тогда по закону сохранения энергии должно выполняться соотношение:

$$E\,\frac{\gamma h}{c^2} = M'\gamma h - M\gamma h,$$

или

$$M' - M = \frac{E}{c^2}\,. \tag{1в}$$

Таким образом, приращение *тяжелой* массы равно E/c^2, т. е. оно равно тому приращению *инертной* массы, которое следует из теории относительности.

Еще более непосредственно этот результат получается из эквивалентности системы отсчета K и K', согласно которой тяжелая масса, определенная относительно K, точно равна инертной массе, определенной относительно K'. Поэтому энергия должна иметь тяжелую массу, равную ее инертной массе. Если в системе отсчета K' взвесить массу M_0 с помощью пружинных весов, то последние вследствие инертности M_0 покажут кажущийся вес $M_0\gamma$. Если сообщить энергию E массе M_0, то, согласно предположению об инерции энергии, пружинные весы покажут $\left(M_0+\frac{E}{c^2}\right)\gamma$.

В соответствии с нашим основным предположением, то же самое должно наступить при воспроизведении опыта в системе отсчета K, т. е. в поле тяготения.

§ 3. Время и скорость света в поле тяжести

Если излучение, испускаемое в равномерно ускоренной системе отсчета K' из S_2 по направлению к S_1, имело относительно находящихся в S_2 часов частоту ν_2, то по прибытии в S_1 оно имеет относительно находящихся там точно таких же часов уже частоту не ν_2, а бóльшую частоту ν_1, которая в первом приближении равна

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right). \tag{2}$$

В самом деле, если снова ввести неускоренную систему отсчета K_0, относительно которой система отсчета K' в момент испускания света имела нулевую скорость, то S_1 будет иметь относительно K_0 в момент прибытия излучения в S_1 скорость $\gamma\ (h/c)$, откуда в силу принципа Допплера непосредственно получается соотношение (2).

Согласно нашему предположению об эквивалентности систем отсчета K' и K, это соотношение справедливо и для покоящейся координатной системы K, в которой существует однородное поле тяжести, в том случае, когда в этой системе происходит описанный выше перенос энергии излучения. Таким образом, получается, что луч света, испускаемый в области с определенным потенциалом тяготения из S_2 и имеющий при его испускании частоту ν_2, измеренную часами, находящимися в S_2, обладает при его прибытии в S_1 другой частотой ν_1, если последняя измеряется с помощью точно таких же часов, находящихся в S_1. Заменим γh через потенциал тяготения Φ, взятый в S_2 по отношению к S_1, потенциал которой принят за нуль, и примем, что соотношение, полученное нами для *однородного* гравитационного поля, справедливо также и для полей другого вида; в таком случае

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{2a}$$

Прежде всего этот результат (справедливый, согласно его выводу, в первом приближении) можно применить следующим образом. Пусть ν_0 — частота некоторого элементарного источника света, измеренная с помощью часов U, находящихся в том же месте, где и источник. Эта частота не зависит от того, где установлен источник света вместе с часами. Представим себе, что источник и часы помещены, например, на поверхности Солнца (там находится наша система S_2). Часть испускаемого там света доходит до Земли (S_1), где мы часами U точно такой же конструкции, что и упомянутые выше, измеряем частоту ν приходящего света. Тогда, согласно соотношению (2a), имеем

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

где Φ — (отрицательная) разность гравитационных потенциалов между поверхностью Солнца и поверхностью Земли.

Таким образом, согласно нашим представлениям, спектральные линии солнечного света должны несколько сместиться по сравнению с соответствующими спектральными линиями земных источников света в сторону красного конца спектра, а именно, на относительную величину

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{-\Phi}{c^2} = 2 \cdot 10^{-6}.$$

Это смещение можно было бы измерить, если бы были точно известны условия, при которых испускается солнечный свет. Однако ввиду того, что другого рода причины (давление, температура) также влияют на положение центра тяжести спектральных линий, трудно установить, действительно ли существует выведенное выше соотношение, в котором учитывается влияние гравитационного потенциала. [5]

При поверхностном рассмотрении может показаться, что соотношения (2) или (2а) бессмысленны. Возможно ли, чтобы при непрерывном испускании света из S_2 он прибывал в S_1 с другой частотой, чем свет, вышедший из S_2? Однако ответ на этот вопрос прост. Мы не можем рассматривать ν_2 и ν_1 просто как частоты (числа периодов в секунду), так как мы еще не установили времени в системе отсчета K. Величина ν_2 означает число периодов, отнесенное к единице времени часов U в S_2, а ν_1— число периодов, отнесенное к единице времени точно таких же часов U в S_1. У нас нет никаких оснований допускать, что часы, находящиеся в точках с различными гравитационными потенциалами, должны рассматриваться как одинаково идущие. Напротив, мы непременно должны определить время в системе отсчета K так, чтобы число гребней и минимумов волн между S_2 и S_1 не зависело от абсолютного значения времени, ибо рассматриваемый процесс по своей природе стационарен. Если это условие не выполнено, то мы приходим к определению времени, которое будет явно входить в законы природы, что, конечно, неестественно и нецелесообразно. Итак, нельзя сказать, что оба часовых механизма, в S_2 и S_1, показывают правильное «время». Если мы определяем время в S_1 часами U, *то мы должны измерять время в S_2 часами, которые идут в* $[1 + (\Phi/c^2)]$ *раза медленнее, чем часы U, если их сравнить с часами U в одном и том же месте*. Это связано с тем, что измеренная подобными часами частота рассмотрен-

[5] Джевил [L. F. Jewell. J. phys., 1897, 6, 84] и особенно Фабри и Буассон [Ch. Fabry, H. Boisson. Compt. Rend., 1909, 148, 688—690] действительно нашли подобное смещение узких спектральных линий в сторону красного конца спектра, вычисленного выше порядка, но приписали это смещение влиянию давления в поглощающем слое.

ного выше луча света при его отправлении из S_2

$$\nu_2\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right),$$

в согласии с формулой (2а), равна частоте ν_1 того же луча света при его прибытии в S_1.

Отсюда вытекает следствие фундаментального значения для теории. Если скорость света измерять в различных местах ускоренной системы отсчета K' в отсутствие гравитационного поля, пользуясь одинаково идущими часами U, то всюду будет получаться одно и то же значение. Согласно нашему основному допущению, то же самое справедливо для системы K. Однако отсюда следует, что в местах с различными гравитационными потенциалами при измерении времени мы должны пользоваться по-разному идущими часами. В том месте, которое относительно начала координат обладает гравитационным потенциалом Φ, мы должны при измерении времени применять часы, которые при перенесении их в начало координат шли бы в $\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)$ раза медленнее, чем те часы, которыми определяется время в начале координат. Если мы обозначим через c_0 скорость света в начале координат, то скорость света c в некотором месте с гравитационным потенциалом Φ будет равна

$$c=c_0\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{3}$$

По этой теории, принцип постоянства скорости света справедлив не в той формулировке, в какой он кладется в основу обычной теории относительности.

§ 4. Искривление лучей света в гравитационном поле

Из только что доказанного положения — скорость света в поле тяжести является функцией места — нетрудно с помощью принципа Гюйгенса доказать, что лучи света, распространяющиеся поперек поля тяжести, должны искривляться. В самом деле, пусть ε — плоскость равной фазы некоторой плоской световой волны в момент времени t, а P_1 и P_2 — две точки на ней, расстояние между которыми равно единице. Точки P_1 и P_2 лежат в плоскости чертежа, которая выбрана так, что взятая по нормали к ней производная от Φ, а следовательно и от c, обращается в нуль (рис. 2). Описывая около точек P_1 и P_2 окружности радиусами c_1dt и c_2dt и проводя к ним общую касательную, получаем плоскость равной фазы, точнее, ее сечение плоскостью чертежа для момента времени $t+dt$, причем c_1 и c_2 представляют собой скорости света соответственно в точках

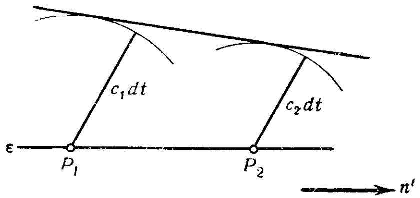

Рис. 2.

P_1 и P_2. Следовательно, угол отклонения луча света на пути cdt составляет

$$(c_1 - c_2)\,dt = -\frac{\partial c}{\partial n'}\,dt,$$

если мы его считаем положительным, когда луч света изгибается в сторону возрастания n'. Таким образом, угол отклонения на единицу пути луча света будет равен

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial n'},$$

или, в силу соотношения (3),

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial n'}.$$

Наконец, для отклонения α, которое луч света испытывает на любом пути s в сторону n', получаем выражение

$$\alpha = -\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial \Phi}{\partial n'}\,ds. \tag{4}$$

Этот же результат мы могли бы получить и путем непосредственного рассмотрения распространения луча света в равномерно ускоренной системе отсчета K', преобразования результата к системе K и затем обобщения на случай гравитационного поля произвольного вида.

По формуле (4) луч света, проходящий мимо какого-либо небесного тела, испытывает отклонение в сторону убывания гравитационного потенциала, т. е. в сторону небесного тела, равное

$$\alpha = \frac{1}{c^2}\int\limits_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=+\frac{\pi}{2}} \frac{kM}{r^2}\cos\vartheta\,ds = \frac{2kM}{c^2\Delta},$$

где k — гравитационная постоянная, M — масса небесного тела, Δ — расстояние от луча до центра небесного тела (рис. 3).

По этой причине луч света, проходящий мимо Солнца, испытал бы отклонение, равное $4 \cdot 10^{-6} = 0{,}83$ *дуговой секунды.* Благодаря искривлению луча угловое расстояние звезды от центра диска Солнца окажется увеличенным на эту величину. Так как звезды в соседних с Солнцем областях неба становятся видимыми при полных солнечных затмениях, то это следствие теории можно сравнить с опытом. Для планеты Юпитер ожидаемое смещение достигает примерно $^1/_{100}$ указанного значения. Было бы крайне желательным, чтобы астрономы заинтересовались поставленным здесь вопросом даже и в том случае, если бы предыдущие рассуждения казались недостаточно обоснованными или фантастическими. В самом деле, независимо от всякой теории, возникает вопрос: можно ли вообще современными средствами установить влияние гравитационных полей на распространение света.

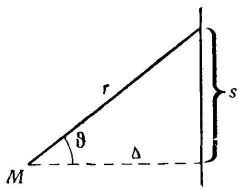

Рис. 3.

Поступила 21 июня 1911 г.

В статьях 8, 14, 17 — 19 Эйнштейн анализирует возможность включения гравитационного поля в специальную энергию относительности.

В статье 8 выясняется влияние гравитационного поля на ход часов. В статье 14 впервые формулируется принцип эквивалентности для постоянного однородного гравитационного поля и равномерно ускоренной системы координат. Новым в этих работах явился отказ от постоянства скорости света в присутствии гравитационного поля. Скорость света c принимается в качестве функции, характеризующей гравитационное поле; это приводит к выводу первой (неверной) формулы для отклонения луча света в поле Солнца.

Однако такой подход наталкивается на большие трудности (см. статью 18). Возникает противоречие с принципом эквивалентности и с соотношением между массой и энергией, которыми Эйнштейн не хочет жертвовать.

Хотя в статье 19 Эйнштейн описывает положение в пессимистических тонах, уже через год, в 1913 г., он публикует статью (вместе с Гроссманом), в которой излагаются идеи общего принципа относительности.

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Одним из устоев, на котором покоится теория, известная под названием «теории относительности», является так называемый принцип относительности. Сейчас я постараюсь объяснить, что следует понимать под принципом относительности. Представим себе двух физиков, каждый из которых имеет свою лабораторию, оборудованную всеми необходимыми приборами. Предположим, что лаборатория первого физика расположена где-нибудь в поле, а лаборатория второго — в железнодорожном вагоне, движущемся с постоянной скоростью в одном направлении. Принцип относительности утверждает следующее: если эти два физика, применяя все свои приборы, будут изучать законы природы,— первый в своей неподвижной лаборатории, а второй в лаборатории, движущейся по железной дороге,— то они откроют тождественные законы природы, при условии, что вагон движется равномерно и без тряски. В несколько более абстрактной форме можно сказать: согласно принципу относительности законы природы не зависят от движения системы отсчета.

Остановимся теперь на роли, которую играет принцип относительности в классической механике. Эта механика основана в первую очередь на принципе Галилея, в соответствии с которым тело, не подвергающееся действию других тел, движется прямолинейно и равномерно. Если этот принцип выполняется в одной из названных выше лабораторий, то он будет выполняться и в другой. В этом можно убедиться непосредственно на опыте; но к такому же заключению можно прийти на основании уравнений механики Ньютона, преобразуя эти уравнения к системе отсчета, равномерно движущейся относительно первоначальной системы.

До сих пор я говорил о лабораториях. Однако в математической физике явления обычно относят не к какой-то определенной лаборатории, а к некоторой системе координат. При этом существенно следующее: если

---

* *Die Relativitätstheorie.* Naturforsch. Gesellschaft, Vierteljahresschrift, Zürich, Jahrg., 1911, 56, 1—14. (Доклад на заседании Общества естествоиспытателей в Цюрихе 16 января 1911 г.)

мы делаем какое-либо высказывание о положении точки, то всегда указываем на совпадение этой точки с точкой некоторой другой системы тел. Например, если в качестве такой материальной точки я возьму самого себя и скажу: «Я нахожусь в этом месте в этом зале», то тем самым мое местоположение совпадает с некоторой определенной точкой этого зала, точнее, я говорю о таком совпадении. В математической физике это делается с помощью трех чисел, так называемых координат, указывающих, с какими точками системы жестко скрепленных тел, которая называется координатной системой, совпадает точка, положение которой рассматривается.

Это и есть наиболее общие сведения о принципе относительности. Если бы физику XVIII или первой половины XIX столетия задать вопрос, существуют ли у него какие-нибудь сомнения в этом принципе, то он со всей решительностью ответил бы: нет. У него не было оснований сомневаться в этом принципе, поскольку в те времена царило убеждение, что все происходящее в природе можно объяснить законами классической механики. Теперь я расскажу о том, как опыт заставил физиков выдвинуть физические теории, противоречившие принципу относительности. Для этого нам придется кратко обрисовать с точки зрения принципа относительности развитие оптики и электродинамики в течение последних десятилетий.

Свет, как и звуковые волны, способен к интерференции и дифракции, так что физики склонны были рассматривать свет как волновое движение или вообще как периодически изменяющееся состояние некоей среды. Эту среду назвали эфиром. До самого последнего времени физики были абсолютно уверены в существовании такой среды. Теория, кратко излагаемая в дальнейшем, несовместима с гипотезой эфира; однако сначала мы все же будем придерживаться последней. Посмотрим же, как развивались представления об этой среде и какие проблемы возникли в связи с физической теорией, основанной на гипотезе эфира. Мы уже говорили, что свет можно рассматривать как колебания некоторой среды, т. е., что в этой среде распространяются световые и тепловые колебания. Пока речь шла только об оптических явлениях в покоящихся телах, можно было не интересоваться другими движениями этой среды, кроме тех, которые образуют свет. Предполагалось просто, что эта среда вместе с рассматриваемыми материальными телами находится в состоянии покоя (отвлекаясь от колебательных движений, образующих свет).

Когда же началось изучение оптических явлений в движущихся телах и одновременно связанное с этим рассмотрение электромагнитных свойств движущихся тел, то пришлось поставить вопрос о том, как ведет себя эфир, если тела в рассматриваемой физической системе имеют разные скорости. Увлекается ли световой эфир телами, так что в каждом месте эфир движется таким же образом, как и находящееся там вещество, или же этого нет? Простейшее предположение состоит в том, что световой эфир движется всюду так же, как и вещество. Второе возможное предположение, тоже очень простое, заключается в следующем: эфир вообще не участвует в движении вещества. Тогда оказались бы возможными и промежуточные случаи, которые характеризовались бы тем, что эфир движется в пространстве до некоторой степени независимо от вещества. Посмотрим теперь, как пытались получить ответ на этот вопрос. Первое важное разъяснение было получено благодаря фундаментальному опыту, выполненному французским физиком Физо. Постановка этого опыта решает следующий вопрос.

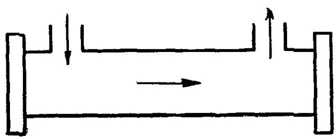

Рис. 1.

Пусть изображенная труба (рис. 1) закрыта спереди и сзади стеклянными пластинами. Штуцеры на обоих ее концах позволяют пропускать через трубу жидкость в направлении вдоль ее оси. Как влияет скорость, с которой жидкость течет в трубе, на скорость светового луча, распространяющегося по трубе в аксиальном направлении? Если окажется, что световой эфир действительно движется вместе с веществом, текущим в трубе, то должно происходить следующее. Предположив, что в покоящейся воде свет распространяется со скоростью V, т. е. V есть скорость света относительно воды, и что скорость воды относительно трубы есть v, мы должны сказать: если световой эфир увлекается водой, то скорость света относительно воды всегда одинакова независимо от того, движется вода или нет. Таким образом, следует ожидать, что скорость распространения света относительно трубы в случае движущейся жидкости будет на v больше, чем в случае покоящейся жидкости. В опыте Физо один из двух интерферирующих пучков света проходил через трубу описанным образом. По влиянию известной скорости жидкости на положение интерференционных полос можно вычислить, насколько велико влияние движения воды со скоростью v на скорость распространения света относительно неподвижной трубы. Физо обнаружил, что скорость света относительно трубы увеличивается вследствие движения жидкости не на величину скорости v, а всего лишь на некоторую долю этой величины (именно, на $v(1 - 1/n^2)$, где n — показатель преломления жидкости). Если показатель преломления почти равен единице, т. е. если свет распространяется в жидкости почти с такой же скоростью, что и в пустоте, то движение жидкости почти не влияет на скорость света. Отсюда можно заключить, что представление о том, что свет всегда распространяется в воде с одинаковой скоростью V, противоречит опыту.

Следующая простая гипотеза состояла в том, что световой эфир вообще не участвует в движении вещества. На основе этой гипотезы вопрос о влиянии движения вещества на оптические явления не удается решить столь же простым способом. Однако в середине 90-х годов Г. А. Лоренцу удалось построить теорию, основанную на предпосылке, что световой эфир абсолютно неподвижен. Его теория совершенно правильно воспроизводит почти все известные явления оптики и электродинамики движущихся сред, в том числе и только что упомянутый опыт Физо. Я сразу же отмечу, что невозможно построить основанную на наглядных предпосылках теорию, принципиально отличающуюся от теории Лоренца и вместе с тем приводящую к тем же результатам. Поэтому вплоть до последнего времени приходилось принимать теорию покоящегося светового эфира как единственную теорию, согласующуюся со всей совокупностью опытных данных.

Рассмотрим теперь эту теорию покоящегося эфира с точки зрения принципа относительности. Если мы условимся называть неускоренными все системы, относительно которых материальные точки, не подверженные действию внешних сил, движутся равномерно, то принцип относительности утверждает: законы природы тождественны во всех неускоренных системах. С другой стороны, основная гипотеза Лоренца о покоящемся световом эфире выделяет из всех неускоренных движущихся систем системы с определенным состоянием движения, а именно те, которые находятся в покое относительно этой светоносной среды. Следовательно, хотя отсюда и нельзя утверждать, что существует абсолютное движение в философском смысле (поскольку это невозможно в принципе, мы можем говорить только об изменениях взаимного расположения тел), однако в физическом смысле абсолютное движение существует, так как мы только что выделили одно состояние движения, а именно: покой относительно эфира. Мы можем называть тело абсолютно покоящимся в том смысле, что оно покоится относительно светоносной среды. Системы отсчета, покоящиеся относительно эфира, отличаются от всех прочих неускоренных систем. В этом смысле основное представление Лоренца о покоящемся световом эфире противоречит принципу относительности. Это представление приводит к следующему общему рассуждению. Пусть система отсчета k покоится относительно светового эфира. Другая система отсчета k' пусть движется равномерно и прямолинейно относительно светового эфира. Следует ожидать, что относительное движение системы k' по отношению к эфиру оказывает влияние на законы природы, действующие в системе k'. Таким образом, следовало бы ожидать, что законы природы в системе k' отличаются от законов природы в системе k вследствие движения системы k' в световом эфире. Далее пришлось бы сказать, что Земля вместе с нашими лабораториями не могла бы в течение всего года оставаться в покое по отношению к этой светоносной среде, т. е., что Земля должна бы играть роль системы отсчета k'. Следовательно, необходимо предположить, что можно найти какое-нибудь явление, в котором проявилось бы влияние этого движения на эксперименты в наших лабораториях. Приходилось думать, что наше физическое пространство в том виде, в каком мы имеем его на Земле, вследствие этого относительного движения должно иметь различные свойства в различных направлениях. Однако пока ничего подобного не удавалось обнаружить ни в одном опыте.

Этот эфир привел нас к неприятному положению. Из опыта Физо следует: эфир не увлекается веществом, т. е. существует движение светоносной среды относительно вещества. Однако все попытки обнаружить это относительное движение приводили к отрицательному результату. Эти два результата, по-видимому, противоречили друг другу, и физики страдали от того, что не могли разрешить это противоречие. Следовало спросить, нельзя ли все-таки согласовать теорию Лоренца с принципом относительности, отклонения от которого не удавалось обнаружить, несмотря на все старания. Прежде чем перейти к этому вопросу, мы извлечем из теории покоящегося эфира Лоренца следующие наиболее существенные для нас сведения. Что означает физически утверждение: существует покоящийся световой эфир? Важнейшее содержание этой гипотезы можно выразить следующим образом: существует система отсчета (называемая в теории Лоренца «системой, покоящейся относительно эфира»), относительно которой каждый световой луч распространяется в пустоте с универсальной скоростью c. Это должно происходить независимо от того, находится тело, излучающее свет, в покое или в движении. Назовем это утверждение принципом постоянства скорости света. Итак, только что поставленный вопрос можно также сформулировать следующим образом: нельзя ли принцип относительности, который выполняется, по-видимому, без исключений, привести в согласие с этим принципом постоянства скорости света?

На первый взгляд, против этого говорит следующее рассуждение. Поскольку каждый световой луч распространяется со скоростью c относительно системы отсчета k, то этого не может быть в системе k', если система k' движется относительно системы отсчета k. Именно, если система k движется со скоростью v в направлении распространения света, то в соответствии с известными нам воззрениями следовало бы считать скорость светового луча в системе k' равной $c - v$. Таким образом, законы распространения света в системе k' отличались бы от законов распространения света в системе k, что означало бы нарушение принципа относительности. Это страшное заключение. Но оказывается, что природа не имеет к нему никакого отношения. Оно возникло из-за того, что в наших рассуждениях, а следовательно, и в рассуждениях, только что приведенных здесь, мы молчаливо делали предположения, которые необходимо отбросить, чтобы прийти к непротиворечивому и более простому пониманию вещей.

Попытаемся разъяснить эти произвольные предположения, проникшие в основы нашего физического мышления. Первое и важнейшее произвольное предположение касается понятия времени, и мы попытаемся объяснить, в чем состоит этот произвол. С целью сделать это лучше, будем говорить сперва о пространстве, чтобы потом провести аналогию с измерением времени. Когда мы хотим указать положение точки в пространстве, т. е. положение точки относительно некоторой системы координат k, то мы указываем декартовы координаты x, y, z этой точки. Смысл этих координат таков: по известным правилам надо из данной точки опустить перпендикуляры на координатные плоскости и посмотреть, сколько раз можно нанести на эти перпендикуляры данный единичный масштаб. В результате этой операции и получаются значения координат. Таким образом, задание пространственного положения координатами есть результат определенных манипуляций. В соответствии с этим указываемые нами координаты имеют вполне определенный физический смысл; всегда можно проверить, действительно ли некоторая заданная точка имеет указанные координаты.

Как обстоит дело в этом отношении со временем? Здесь мы находимся в положении, не столь блестящем. До сих пор всегда довольствовались высказыванием: время есть независимая переменная бытия. На таком определении никоим образом нельзя основывать измерение момента времени фактически происходящего события. Следовательно, мы должны попытаться определить время так, чтобы на основе нашего определения были возможны измерения времени. Представим себе в начале координат системы k часы (например, часы с балансиром). С помощью этих часов можно непосредственно отсчитывать время событий, происходящих в этой точке или в ее ближайшей окрестности. Однако время событий, происходящих в какой-либо другой точке системы k, этими часами измерить непосредственно нельзя. Если наблюдатель, находящийся в начале координат системы k, отметит по часам время, когда он получит световой сигнал о происшедшем событии, то это время не будет совпадать с временем самого события, а окажется больше на промежуток времени, необходимый для прохождения светового сигнала от места события до часов наблюдателя. Если бы мы знали скорость распространения света в системе k для заданного направления, то время события можно было бы определить по названным выше часам; однако измерение скорости света возможно только в том случае, если рассматриваемая нами задача определения времени уже решена. Именно, чтобы измерить скорость света в определенном направлении, необходимо измерить расстояние между двумя точками A и B, между которыми распространяется световой сигнал, и затем — время отправления света из A и прибытия света в B. Следовательно, необходимо было бы проводить измерения времени в разных точках, что можно выполнить в том случае, если искомое определение времени уже существует. Но если скорость, в частности скорость света, принципиально невозможно измерить без произвольных допущений, то мы имеем право делать произвольные предположения и о скорости света. Допустим теперь, что скорость распространения света в пустоте из точки A в точку B равна скорости прохождения света из B в A. В силу этого допущения мы действительно можем синхронизовать однотипные часы, покоящиеся в различных точках системы k. Поставим, например, часы, находящиеся в точках A и B, таким образом, что выполняется следующее условие: если из A в момент времени t (измеренный по часам в A) посылается световой луч в B, прибывающий в B в момент $t + a$ (измеренный по часам в B), то и, наоборот, световой сигнал, посылаемый из B в A в момент t (измеренный по часам в B), также должен прибывать в A в момент $t + a$ (измеренный по часам в A). Это и будет правилом установки всех часов, находящихся в системе k. Если мы выполним это правило, то получим определение времени с точки зрения физика, который делает измерения. Время события как раз равно показанию часов, поставленных в соответствии с только что принятым правилом и находящихся на месте события.

Чего же особо примечательного мы достигли этим способом? Ведь все это выглядит как нечто само собой разумеющееся. Примечательное состоит в том, что для придания вполне определенного смысла показаниям часов это правило относится к системе часов, которая покоится во вполне определенной системе координат k. Мы получили не время вообще, а время, отнесенное к координатной системе k, вернее, к координатной системе k вместе с системой установленных в ней часов, покоящихся относительно k. Конечно, те же самые операции можно выполнить и в том случае, если мы имеем вторую систему координат k', равномерно движущуюся относительно системы k. Мы можем расположить в пространстве этой системы координат k' систему часов, но так, чтобы все часы двигались вместе с k'. Тогда эти часы, покоящиеся относительно k', можно поставить точно по указанному правилу. Если мы это сделаем, то получим также время, отнесенное к системе k'.

Однако нельзя утверждать априори, что если два события одновременны в системе отсчета k — мы подразумеваем под этим систему координат вместе с часами,— то те же события также должны быть одновременными в системе отсчета k'. Нельзя сказать, что время имеет абсолютный, т. е. независимый от состояния движения системы отсчета смысл. Это и есть произвол, который содержался в нашей кинематике.

Но в нашей кинематике имеется и второе обстоятельство, содержащее произвол. Мы имеем в виду размеры тела, например, длину стержня, и верим, будто точно знаем, какова эта длина, даже тогда, когда тело находится в движении относительно системы отсчета, в которой мы описываем события. Но следующее короткое рассуждение показывает, что это вовсе не такое простое понятие, какое мы инстинктивно представляем себе. Возьмем стержень, движущийся относительно системы отсчета k вдоль своей оси. Спрашивается, какова длина этого стержня? Этот вопрос может иметь только один смысл: какие операции мы должны проделать, чтобы узнать, какова длина стержня. Наблюдателю с масштабной линейкой можно сообщить такой импульс, чтобы он приобрел скорость, равную скорости стержня; тогда он будет покоиться относительно стержня и сможет определить длину этого стержня, повторно прикладывая свой масштаб совершенно так же, как на самом деле определяется длина покоящегося тела. В результате измерения он получит вполне определенное число и сможет с известным основанием констатировать, что измерил длину этого стержня.

Но если существуют только такие наблюдатели, которые не движутся вместе со стержнем, а находятся в покое относительно некоторой определенной системы отсчета k, то мы можем поступать следующим образом. Представим себе, что вдоль пути, проходимого стержнем, который движется вдоль своей оси, расположено очень большое количество часов и возле каждых часов стоит наблюдатель. Пусть часы сверены с помощью световых сигналов описанным выше способом, так что в своей совокупности они показывают время, относящееся к системе отсчета k. Пусть теперь эти наблюдатели определяют в системе k два положения, в которых находятся начало и конец стержня в определенное заданное время t, или, другими словами, положение обоих часов, мимо которых проходит начало или конец стержня, когда эти часы показывают время t. Затем расстояние между двумя полученными таким образом точками (или часами) определяется путем последовательного прикладывания к соединяющему их отрезку масштабной линейки, покоящейся относительно системы отсчета k. Результаты этих двух манипуляций с полным основанием можно назвать длиной движущегося стержня. Однако следует отметить, что эти две манипуляции необязательно должны приводить к совпадающим результатам или, другими словами, что геометрические размеры тела нельзя считать независимыми от состояния движения системы отсчета, относительно которой эти размеры определяются.

Если мы не сделаем этих двух произвольных предположений, то уже не сможем решить следующую элементарную задачу: пусть даны координаты x, y, z и время t события в системе k; требуется определить координаты x', y', z' и время t' того же события, отнесенные к другой системе, которая совершает известное равномерное и прямолинейное движение относительно системы k. И вот оказывается, что простое решение этой задачи, принятое до сих пор, основывается на этих двух предположениях, только что признанных нами произвольными.

Как же снова поставить на ноги кинематику? Ответ получается сам собой: как раз те обстоятельства, которые причиняли нам раньше мучительные затруднения, и выводят нас на правильный путь после того, как мы получим больше свободы действий, отказавшись от указанных произвольных предположений. Оказывается, что как раз те два на первый взгляд несовместимых постулата, на которые указывает нам опыт, а именно: принцип относительности и принцип постоянства скорости света, приводят к вполне определенному решению проблемы преобразований координат и времени. Получающиеся при этом результаты в некоторых отношениях резко противоречат нашим обычным представлениям. Математические соображения, приводящие к этим результатам, очень просты, однако здесь не место подробно излагать их [1]. Мы остановимся лишь на главнейших следствиях, которые получаются из них чисто логическим путем, без дополнительных предположений.

Сначала рассмотрим кинематику. Поскольку мы дали физическое определение координат и времени, то каждое соотношение между пространственными и временными величинами будет иметь вполне определенный физический смысл. Получаются следующие результаты. Если мы имеем твердое тело, равномерно движущееся относительно выбранной нами координатной системы k, то это тело в направлении своего движения выглядит укороченным во вполне определенном отношении по сравнению с размерами, которыми оно обладает в этой системе в состоянии покоя. Если скорость тела обозначить через v, а скорость света — через c, то любая длина, измеряемая в направлении движения и равная l при неподвижном состоянии тела, вследствие движения тела по отноше-

[1] Если x, y, z, t и x', y', z', t' означают пространственно-временные координаты в двух системах отсчета k и k', то эти два основополагающих принципа требуют, чтобы уравнения преобразований были такими, что каждое из двух соотношений

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

и

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

было следствием другого. Поскольку по причинам, которые мы не будем здесь объяснять, преобразования должны быть линейными, то, как показывает краткое исследование, тем самым устанавливается закон преобразования. [См., например, A. E i n s t e i n, Jahrb. Radioakt. 1907, 4, 418. (Статья 8)].

нию к неподвижному наблюдателю уменьшается до значения

$$l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Если тело в покое имеет форму шара, то при движении в некотором направлении оно принимает форму сплюснутого эллипсоида вращения. Если скорость приближается к скорости света, то тело сплющивается и становится плоским. С точки же зрения наблюдателя, движущегося вместе с телом, оно, как и прежде, сохраняет форму шара, однако все предметы, не движущиеся вместе с этим наблюдателем, точно таким же образом представляются ему укороченными в направлении движения. Этот результат оказывается не таким уж странным, если учесть, что это высказывание о размерах движущегося тела имеет весьма сложный смысл, поскольку в соответствии с предыдущим размеры тела можно определить только с помощью измерения времени.

Мнение, что понятие «форма движущегося тела» имеет непосредственно наглядный смысл, возникает потому, что на повседневном опыте мы привыкли иметь дело только с такими движениями, скорости которых можно считать практически бесконечно малыми по сравнению со скоростью света.

Теперь второе чисто кинематическое следствие теории, которое кажется даже еще более удивительным. Представим себе часы, способные показывать время системы отсчета k и находящиеся в состоянии покоя относительно k. Можно показать, что те же часы, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно системы отсчета k, с точки зрения системы k будут идти медленнее: если показание часов увеличивается на единицу, то часы системы k покажут, что в этой системе прошло время

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\,.$$

Таким образом, движущиеся часы идут медленнее, чем такие же часы, покоящиеся относительно системы k. При этом необходимо представлять себе, что скорость хода часов в движущемся состоянии определяется путем постоянного сравнения положения стрелок этих часов с положением стрелок тех покоящихся относительно системы k часов, которые измеряют время системы k и мимо которых проходят рассматриваемые движущиеся часы. Если бы нам удалось сообщить часам скорость света (мы могли бы сообщить им скорость, близкую к скорости света, если бы имели достаточную силу), то стрелки часов с точки зрения системы k двигались бы бесконечно медленно.

Положение становится еще более поразительным, если представить себе следующее. Пусть эти часы приобретут очень большую скорость (почти равную c) и будут равномерно двигаться дальше, а потом, после того как они пройдут большое расстояние, получат импульс в противоположном направлении, так что снова возвратятся в исходный пункт, откуда они начали движение. Тогда окажется, что положение стрелок этих часов в течение всего их путешествия почти не изменилось, тогда как на тождественных часах, оставшихся в состоянии покоя в пункте отправления, положение стрелок за это время изменилось весьма существенно. Следует добавить, что выводы, которые справедливы для этих часов, взятых нами в качестве простой системы, представляющей все физические процессы, остаются в силе и для замкнутой физической системы с каким-либо другим устройством. Например, если бы мы поместили живой организм в некий футляр и заставили бы всю эту систему совершить такое же движение вперед и обратно, как описанные выше часы, то можно было бы достичь того, что этот организм после возвращения в исходный пункт из своего сколь угодно далекого путешествия изменился бы как угодно мало, в то время как подобные ему организмы, оставленные в пункте отправления в состоянии покоя, давно бы уже уступили место новым поколениям. Для движущегося организма длительное время путешествия будет лишь мгновением, если движение будет происходить со скоростью, близкой к скорости света! Это — неизбежное следствие наших исходных принципов, к которым нас приводит опыт.

Теперь еще несколько слов о значении теории относительности для физики. Эта теория требует, чтобы математическое выражение закона природы, который справедлив при произвольных скоростях, не изменяло своего вида при переходе с помощью уравнений преобразования к новым пространственно-временным координатам в формулах, выражающих этот закон. Благодаря этому многообразие возможностей существенно сужается. Простым преобразованием удается получить физические законы для движущихся как угодно быстро тел из законов, известных для покоящихся или медленно движущихся тел. Так, например, можно вывести законы движения быстрых катодных лучей. При этом оказывается, что уравнения Ньютона несправедливы для материальных точек, движущихся с большой скоростью, и должны быть заменены уравнениями движения несколько более сложной структуры. Эти законы для отклонения катодных лучей находятся в весьма удовлетворительном согласии с опытом.

Из физически важных следствий теории относительности необходимо упомянуть следующие. Мы уже видели, что, согласно теории относительности, движущиеся часы идут медленнее, чем те же часы в состоянии покоя. Можно считать почти исключенной проверку этого утверждения посредством опыта с карманными часами, так как скорости, которые им можно сообщить, исчезающе малы по сравнению со скоростью света.

Однако природа предоставляет нам объекты, вполне обладающие свойствами часов и в то же время движущиеся чрезвычайно быстро. Это — атомы, которые испускают излучение с линейчатым спектром и которым в электрическом поле можно сообщить скорость, равную многим тысячам километров в секунду (каналовые лучи). В соответствии с теорией относительности следует ожидать, что вследствие движения атомов частоты их колебаний будут изменяться точно таким же образом, как ход движущихся часов. Хотя соответствующие эксперименты также сопряжены с серьезными трудностями, мы все-таки не должны терять надежды на то, что в ближайшие десятилетия на этом пути будет получено важное доказательство, подтверждающее либо опровергающее теорию относительности.

Кроме того, теория дает важный результат, заключающийся в том, что инертная масса тела зависит от содержания энергии в нем (правда, в крайне слабой степени), так что прямое экспериментальное подтверждение этого следствия представляется совершенно безнадежным. Если энергия некоторого тела увеличивается на E, то его инертная масса возрастает на E/c^2. Эта теорема опровергает закон сохранения массы; точнее, она объединяет его с законом сохранения энергии. Каким бы странным ни казался этот результат, следует указать, что в некоторых частных случаях данные, известные из опыта, и без теории относительности позволяют с уверенностью заключить, что инертная масса увеличивается с ростом энергии.

Наконец, еще несколько слов о чрезвычайно интересном математическом направлении, которым теория обязана главным образом математику Минковскому, к сожалению столь безвременно скончавшемуся. Уравнения преобразований в теории относительности таковы, что они обладают следующим инвариантом:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Если вместо времени t ввести в качестве временнóй координаты мнимую переменную $ct\sqrt{-1} = \tau$, то этот инвариант принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2.$$

При этом пространственные и временнáя координаты играют равноправную роль. Дальнейшее применение этого формального равноправия пространственных и временнóй координат привело к чрезвычайно ясному изложению теории относительности, существенно облегчающему ее приложения. Физические события изображаются в четырехмерном мире и пространственно-временны́е соотношения между ними представляются в этом четырехмерном мире геометрическими теоремами.

К ПАРАДОКСУ ЭРЕНФЕСТА *

Замечание к статье В. Варичака

Недавно в этом журнале [1] В. Варичак опубликовал замечания, которые нельзя оставить без возражений, поскольку они могут вызвать путаницу.

Автор неправильно проводит различие между воззрениями Лоренца и моими на *физические факты*. Вопрос о том, реально лоренцово сокращение или нет, не имеет смысла. Сокращение не является реальным, поскольку оно не существует для наблюдателя, движущегося вместе с телом; однако оно реально, так как оно может быть принципиально доказано физическими средствами для наблюдателя, не движущегося вместе с телом. Это именно то, что обнаруживает весьма изящным способом Эренфест.

Мы получаем в системе отсчета K форму тела, движущегося относительно этой системы, определяя точки в системе K, с которыми в определенное время t совпадают материальные точки движущегося тела. Поскольку используемое при этом понятие одновременности определено так, что на основании этого определения принципиально возможна констатация одновременности экспериментальным путем, то и лоренцово сокращение принципиально наблюдаемо.

Может быть, это В. Варичак и признал бы, а следовательно, в известном смысле взял бы назад свое высказывание о том, будто лоренцово сокращение является «субъективным явлением». Однако он, возможно, остался бы при том мнении, что лоренцово сокращение имеет свои корни исключительно в произвольном определении «способа сверки часов и измерения длин». Насколько это мнение ошибочно, показывает следующий мысленный эксперимент.

---

* *Zum Ehrenfestschen Paradoxon*. Phys. Z., 1911, XII, 509, 510.

[1] V. Varičak. Phys. Z., 1911, 12, 169.

Пусть два стержня $A' B'$ и $A'' B''$, имеющие одинаковую длину при измерении в состоянии покоя, могут скользить вдоль оси X неускоренной системы отсчета параллельно, с одинаковой ориентацией. Стержни $A'B'$ и $A'' B''$ должны скользить так, что стержень $A'B'$ движется со сколь угодно большой скоростью в положительном, а стержень $A''B''$ — в отрицательном направлении оси X. При этом концы стержней A' и A'' встречаются в точке A^*, а концы B' и B'' — в точке B^* оси X. Тогда, согласно теории относительности, расстояние A^*B^* окажется меньше длины каждого из стержней $A' B'$ и $A'' B''$, что можно установить с помощью одного из стержней, прикладывая его в состоянии покоя к отрезку A^*B^*.

Поступила 18 мая 1911 г.

1912

17

СКОРОСТЬ СВЕТА И СТАТИЧЕСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ*

В нашей работе[1], вышедшей в прошлом году, показано, что из гипотезы о физической эквивалентности ускоренной системы координат полю тяжести следуют выводы, хорошо согласующиеся с результатами теории относительности (теории относительности равномерного движения). Но при этом оказалось, что справедливость одного из основных принципов последней, а именно: закона постоянства скорости света — ограничена областями пространства-времени, в которых постоянен гравитационный потенциал. Несмотря на то, что этот результат исключает всеобщую применимость преобразований Лоренца, он не должен отпугивать от дальнейшего следования по предложенному пути. По моему мнению, гипотеза о том, что «поле ускорения» является частным случаем гравитационного поля, по крайней мере настолько правдоподобна, особенно при учете уже полученных в первой работе результатов относительно гравитационной массы энергии, что следует предпринять детальное исследование тех следствий, к которым приводит этот принцип эквивалентности.

Позже Абрагам[2] построил теорию гравитации, которая содержит, как частный случай, результаты нашей предыдущей работы. Однако дальше мы увидим, что систему уравнений Абрагама нельзя согласовать с принципом эквивалентности и что к его представлениям о времени и пространстве нельзя прийти исходя из формальной, чисто математической точки зрения.

---

* *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes.* Ann. Phys., 1912, 38, 355—369.

[1] A. Einstein. Ann. Phys., 1911, 35, 898. (Статья 14).

[2] M. Abraham. Phys. Z., 1912, 13, N. 1.

§ 1. Пространство и время в поле ускорения

Пусть система отсчета K (координаты x, y, z) движется равномерно ускоренно в направлении своей оси X. Это ускорение является равномерным в смысле Борна; это означает, что ускорение начала координат этой системы относительно такой неускоренной системы, по отношению к которой точки системы K покоятся (точнее, имеют бесконечно малую скорость), постоянно. Такая система K, согласно принципу эквивалентности, в точности эквивалентна некоторой покоящейся системе, в которой действует свободное от масс гравитационное поле[3] определенного вида. Пространственные измерения в системе K осуществляются посредством масштабов, которые при их сравнении друг с другом в состоянии покоя и в определенном месте системы K обладают одинаковыми длинами. Все геометрические свойства, равно как и соотношения между координатами x, y, z и другими длинами, должны исследоваться такими масштабами. Эти правила не являются само собой разумеющимися; они содержат в себе некоторые физические предположения, которые иногда могут оказаться и неправильными. Так, например, весьма вероятно, что они несправедливы в равномерно вращающейся системе, в которой вследствие лоренцова сокращения отношение длины окружности к диаметру при применении нашего определения длины должно отличаться от π. Масштабы, равно как и оси координат, следует представлять себе в виде абсолютно твердых стержней. Это можно делать, несмотря на то, что, согласно теории относительности, абсолютно твердые тела в действительности не могут существовать. В самом деле, абсолютно твердые измерительные стержни можно представить себе состоящими из большого числа тел, не являющихся абсолютно твердыми; они так связаны между собой, что не передают друг другу давление при остановке каждого из стержней. Время t в системе отсчета K мы будем измерять этими часами, установленными в пространственных точках системы K так, что измеряемый с их помощью промежуток времени, необходимый для прохождения луча света между какими-либо двумя точками A и B системы, не зависит от момента испускания луча света из A. Понятие одновременности, как это будет показано ниже, можно определить непротиворечивым образом благодаря тому, что по нашим часам все лучи света, проходящие через какую-либо точку A системы K, обладают независимо от их *направления* одной и той же скоростью распространения.

Мы хотим тепе́рь наряду с системой отсчета K (x, y, z, t) рассмотреть также и неускоренную систему отсчета (с постоянным гравитационным потенциалом) $\Sigma(\xi, \eta, \zeta, \tau)$. Прежде всего расположим ее так, чтобы ось ξ

---

[3] Массы, создающие это поле, можно представить себе находящимися в бесконечности.

была направлена по оси X, а оси η и ζ были параллельны соответственно осям Y и Z. Такое расположение осей возможно, если предположить, что ускоренное движение не деформирует систему K по отношению к Σ. Положим это физическое предположение в основу наших рассуждений.

Из него следует, что для произвольного τ должны выполняться равенства

$$\left.\begin{aligned} \eta &= y, \\ \zeta &= z \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

так, что мы должны лишь найти связь между ξ и τ, с одной стороны, и x и t — с другой. Пусть обе системы отсчета совпадают в момент времени $\tau = 0$; тогда искомые уравнения связи должны во всяком случае иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \lambda + \alpha t^2 + \ldots, \\ \tau &= \beta + \gamma t + \delta t^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Коэффициенты в этих разложениях, справедливых при достаточно малых положительных и отрицательных значениях t, будем пока рассматривать как неизвестные функции x. Ограничиваясь выписанными выше членами в разложениях (2), путем дифференцирования получаем:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= (\lambda' + \alpha' t^2)\, dx + 2\alpha t dt, \\ d\tau &= (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)\, dx + (\gamma + 2\delta t)\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Будем считать, что в системе Σ время измеряется в таких единицах, что скорость света в этой системе равна единице. Тогда, ограничившись бесконечно малой окрестностью пространственно-временных точек, мы можем записать уравнение сферической поверхности, расширяющейся со скоростью света из произвольной пространственно-временной точки, следующим образом:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\tau^2 = 0.$$

Эта же самая поверхность в системе K должна описываться уравнением

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0.$$

Поэтому уравнения связи (2) должны быть такими, чтобы оба уравнения поверхности были бы эквивалентными. Последнее требование с учетом равенств (1) приводит к соотношению

$$d\xi^2 - d\tau^2 = dx^2 - c^2 dt^2.$$

Левую часть этого соотношения можно выразить через dx и dt при помощи равенств (3); приравнивая коэффициенты при dx^2, dt^2 и $dxdt$ в обеих частях равенства, получаем уравнения

$$1 = (\lambda' + \alpha' t^2)^2 - (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)^2,$$

$$-c^2 = 4\alpha^2 t^2 - (\gamma + 2\delta t)^2,$$

$$0 = (\lambda' + \alpha' t^2)\, 2\alpha t - (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)(\gamma + 2\delta t).$$

Эти уравнения представляют собой тождества по t с точностью до таких степеней t, когда еще не существенны опущенные в (2) члены, а именно: первое уравнение — с точностью до второй степени t, а второе и третье — с точностью до первой степени t. Отсюда следуют соотношения

$$1 = \lambda'^2 - \beta'^2, \qquad 0 = \beta'\gamma', \qquad 2\lambda\alpha' - \gamma'^2 - 2\beta'\delta' = 0,$$

$$-c^2 = -\gamma^2, \qquad 0 = \gamma\delta,$$

$$0 = \beta'\gamma, \qquad 0 = 2\alpha\lambda' - 2\beta'\delta - \gamma\gamma'.$$

Так как γ не может равняться нулю, то из первого соотношения третьей строки следует, что $\beta' = 0$. Коэффициент β является постоянной величиной, которую можно соответствующим выбором начала отсчета времени сделать равной нулю. Коэффициент γ должен быть положительным; тогда из первого соотношения второй строки следует, что

$$\gamma = c.$$

Согласно второму соотношению второй строки,

$$\delta = 0.$$

Так как коэффициент β' равен нулю и мы можем поменять местами x и ξ, из первого соотношения первой строки находим

$$\lambda' = 1.$$

Далее, если при $t = 0$ и $\xi = 0$ должно равняться нулю значение x, то

$$\lambda = \alpha.$$

Наконец, из третьего соотношения первой строки и второго соотношения третьей строки с помощью уже найденных соотношений можно получить следующие дифференциальные уравнения

$$2\alpha' - c'^2 = 0,$$

$$2\alpha - cc' = 0.$$

Отсюда следует, что

$$c = c_0 + ax,$$

$$2\alpha = a(c_0 + ax) = ac,$$

где через c_0 и a обозначены постоянные интегрирования.

Тем самым мы нашли уравнения связи для достаточно малых значений t. С точностью до третьей и более высоких степеней t справедливы следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \frac{ac}{2}t^2, \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \\ \tau &= ct, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

причем скорость света c в системе K, которая может зависеть только от x, но не от t, определяется с помощью только что полученного соотношения

$$c = c_0 + ax. \tag{5}$$

Выбор постоянной c_0 зависит от скорости хода часов, которыми мы измеряем время в начале координат системы K. Значение постоянной a определяется следующим образом. Первое и четвертое из соотношений (4) приводят с учетом (5) к уравнению движения начала координат ($x = 0$) системы K

$$\xi = \frac{a}{2c_0}\tau^2.$$

Таким образом, a/c_0 есть не что иное, как ускорение начала координат системы K по отношению к Σ, измеренное с помощью тех же единиц времени, в которых скорость света равна единице.

§ 2. Дифференциальное уравнение статического гравитационного поля. Уравнение движения материальной точки в статическом гравитационном поле

Из предыдущей работы следует, что в случае статического гравитационного поля существует соотношение между c и гравитационным потенциалом, или, другими словами, поле определяется величиной c. Из соотношения (5) и принципа эквивалентности следует, что в этом гравитационном поле, которое соответствует рассмотренному в § 1 полю ускорения, выполняется уравнение

$$\Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 0; \tag{5a}$$

Отсюда напрашивается предположение, что это уравнение справедливо и в случае любого статического гравитационного поля в отсутствие масс[4]. Во всяком случае, это уравнение является простейшим из тех, которые согласуются с соотношением (5).

Легко построить такое, предположительно справедливое, уравнение, которое соответствовало бы уравнению Пуассона. Именно, из физического смысла c непосредственно следует, что c определено лишь с точностью до постоянного множителя, зависящего от того, какими часами пользуются для измерения t в начале координат системы K. Уравнение, соответствующее уравнению Пуассона, должно быть также однородным по c. Простейшее уравнение такого рода имеет вид

$$\Delta c = kc\rho, \tag{5б}$$

где под k следует понимать (универсальную) гравитационную постоянную, а под ρ — плотность вещества. Последняя должна быть определена таким образом, чтобы, будучи заданной распределением масс, т. е. количеством вещества в элементе объема, она не зависела от c. Этого мы добьемся, принимая за единицу массы массу одного кубического сантиметра воды вне зависимости от того, в каком гравитационном потенциале она находится; тогда ρ будет представлять собой отношение массы, содержащейся в одном кубическом сантиметре, к этой единице.

Попытаемся теперь получить уравнения движения материальной точки в статическом поле тяготения. Для этого сначала найдем уравнения движения материальной точки, свободно движущейся в поле ускорения, рассмотренном в § 1. В системе Σ это движение описывается уравнениями

$$\xi = A_1\tau + B_1,$$

$$\eta = A_2\tau + B_2,$$

$$\zeta = A_3\tau + B_3,$$

где A и B — постоянные. С помощью соотношений (4) эти уравнения при достаточно малых t можно записать в виде

$$x = A_1ct + B_1 - \frac{ac}{2}t^2,$$

$$y = A_2ct + B_2,$$

$$z = A_3ct + B_3.$$

---

[4] В работе, которая скоро будет опубликована (статья 18, § 4.—*Ред.*), показано, что уравнения (5а) и (5б) не могут считаться абсолютно точными. Однако в настоящей работе мы еще будем ими пользоваться.

С помощью одно- и двукратного дифференцирования из первого уравнения можно получить следующие два уравнения (для момента $t = 0$)[5]:

$$\dot{x} = A_1 c,$$

$$\ddot{x} = 2A_1\dot{c} - ac.$$

Исключая из этих уравнений A_1, получаем

$$c\ddot{x} - 2\dot{c}\dot{x} = -ac^2,$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{c^2}\right) = -\frac{a}{c^2}.$$

Аналогичным образом получаем уравнения для других двух компонент

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{c^2}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{c^2}\right) = 0.$$

Эти три уравнения законны лишь для момента $t = 0$. Однако они справедливы всегда, так как эта временная точка ничем не отличается от остальных, за исключением лишь того, что мы выбрали ее в качестве начальной. Таким образом, полученные уравнения и являются искомыми уравнениями свободного движения частиц в постоянном поле ускорения. Принимая во внимание, что $a = (\partial c/\partial x)$ и $(\partial c/\partial y) = (\partial c/\partial z) = 0$, эти уравнения можно переписать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{c^2}\right) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{c^2}\right) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial y}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{c^2}\right) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

При такой записи направление оси x уже не является выделенным; обе части уравнений имеют векторный характер. Итак, эти уравнения, по-видимому, можно рассматривать как общие уравнения движения материальной точки в статическом гравитационном поле, если на эту точку действуют лишь силы тяжести.

---

[5] Опущенные в разложениях (2) члены не сказываются на результате при двукратном дифференцировании и последующем приравнивании t нулю.

Из уравнений (6) сразу же можно сказать, как связаны друг с другом входящая в уравнение (5б) постоянная k и обычная гравитационная постоянная K. В случае скоростей, малых по сравнению с c, из уравнений (6) следует

$$\ddot{x} = -c\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

так что уравнение (5б) при пренебрежении некоторыми членами можно записать в виде

$$\Delta\Phi = kc^2\rho.$$

Мы видим, что

$$K = kc^2.$$

Таким образом, гравитационная постоянная K не совпадает с универсальной постоянной k; универсальная постоянная есть K/c^2.

Умножим уравнения (6) соответственно на $\frac{\dot{x}}{c^2}$, $\frac{\dot{y}}{c^2}$, $\frac{\dot{z}}{c^2}$ и сложим; тогда, вводя обозначение

$$q^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

получаем соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{c^4}\right) = -\frac{\dot{c}}{c^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2c^2}\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\right] = 0;$$

следовательно,

$$\frac{c}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} = \text{const}. \tag{7}$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии материальной точки, движущейся в стационарном гравитационном поле. Левая часть этого соотношения зависит от q точно таким же образом, как и энергия материальной точки в обычной теории относительности. Поэтому с точностью до множителя, зависящего только от самой материальной точки, мы можем рассматривать левую часть соотношения (7) как энергию E этой точки. Этот множитель, очевидно, равен массе m, определяемой так, как это делалось выше, ибо данное там определение массы не зависит от гравитационного потенциала.

Итак,

$$E = \frac{mc}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}, \tag{8}$$

или приближенно

$$E = mc + \frac{m}{2c} q^2. \tag{8a}$$

Из второго члена этого разложения следует, что величина, которую мы назвали энергией, обладает размерностью, отличной от обычной. Это также согласуется с тем, что величина массы, эквивалентной единице энергии, в c раз меньше, чем в обычной системе. Кроме того, «кинетическая энергия», которую в формуле (8) нельзя точно отделить от энергии гравитационного поля, зависит не только от m и q, но и от c, т. е. от гравитационного потенциала. Далее из формулы (8) следует важный результат, что энергия точки, покоящейся в поле тяжести, равна mc. Таким образом, если мы хотим придерживаться соотношения

Сила $\times$ Путь = Сообщаемая энергия,

то мы должны принять, что на покоящуюся в поле тяготения материальную точку действует сила

$$\mathfrak{K} = -m\,\mathrm{grad}\, c.$$

Теперь мы хотим вывести уравнения движения материальной точки в произвольном статическом гравитационном поле для случая, когда, кроме сил тяжести, на точку действуют другие силы. Заметим, что уравнения (6) не похожи на уравнения движения релятивистской механики. Однако умножим их на выражение, стоящее в левой части соотношения (7); полученные таким образом уравнения, эквивалентные системе уравнений (6), имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\frac{\dot{x}}{c}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\} = -\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} \quad \text{и т. д.} \tag{6a}$$

Здесь левая часть, кроме несущественного в обычной релятивистской теории множителя $1/c$ в числителе, имеет такой же вид, что и в обычной теории относительности. Поэтому мы назовем стоящее в скобках выражение x-компонентой импульса (для точки с массой, равной единице). Мы только что доказали, что величину $-(\partial c/\partial x)$ следует рассматривать как x-компоненту силы, с которой гравитационное поле действует на неподвижную материальную точку. Отсюда следует, что сила, с которой поле тяжести действует на произвольно движущуюся материальную точку с массой, равной единице, может отличаться от предыдущей только на множитель, обращающийся в единицу при $q \to 0$. Только что полученное уравнение требует, чтобы эта сила $\mathfrak{K}_x$ была равна $-\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) \Big/ \sqrt{1-(q^2/c^2)}$. Тогда правая часть этого уравнения и будет как раз равна $\mathfrak{K}_x$. Таким образом, производная импульса по времени равна действующей силе. Если на точку действует еще какая-нибудь сила $\mathfrak{K}$, мы должны прибавить к правой части уравнения еще член $\mathfrak{K}/m$, и уравнения движения материальной точки с массой m принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m(\dot{x}/c)}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\} = -\frac{m(\partial c/\partial x)}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} + \mathfrak{K}_x \text{ и т. д.} \tag{6б}$$

Однако эти уравнения справедливы лишь тогда, когда выполняется закон сохранения энергии в форме

$$\mathfrak{K}\mathfrak{q} = \dot{E}.$$

Покажем это следующим образом. Запишем уравнения (6б) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{c^2}E\right) + \frac{1}{c}E\frac{\partial c}{\partial x}E = \mathfrak{K}_x \text{ и т. д.}$$

Умножая эти уравнения соответственно на $\frac{\dot{x}}{c^2}$, $\frac{\dot{y}}{c^2}$ и $\frac{\dot{z}}{c^2}$ и складывая, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{c^4}\dot{E} + \frac{1}{2}E\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{c^4}\right) + E\frac{\dot{c}}{c^3} = \frac{\mathfrak{K}\mathfrak{q}}{c^2}.$$

Отсюда и получается искомое соотношение, если принять во внимание, что, согласно формуле (8),

$$\frac{q^3}{c^4} = \frac{1}{c^2} - \frac{m^2}{E^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{c^4}\right) = -\frac{\dot{c}}{c^3} + \frac{m^2 E}{E^3}.$$

Таким образом, связь между силой, импульсом и энергией сохраняется.

§ 3. Замечания о физическом смысле статических гравитационных потенциалов

Если в области с почти постоянным гравитационным потенциалом мы будем определять скорость света, измеряя с помощью данных часов время, которое требуется для прохождения света по замкнутому пути определенной длины, то для измеренной таким образом скорости света всегда будем получать одно и то же значение, независимо от величины гравитационного потенциала в этой области[6]. Это непосредственно следует из принци-

[6] Во всех измерениях должны использоваться одни и те же часы; они должны быть неподвижно установлены в том месте, в котором мы хотим определить c.

па эквивалентности. Если мы говорим, что скорость света в точке P в c/c_0 раз больше, чем в точке P_0, то это означает (если сравнивать ход часов в одной и той же точке), что часы, используемые для определения времени [7] в P, идут в c/c_0 раз медленнее часов, используемых для измерения времени в P_0. Другими словами, часы в некоторой точке идут тем быстрее, чем больше в ней скорость света, определенная с их помощью. Такая зависимость скорости течения времени от гравитационного потенциала (c) справедлива для временнóго хода любого события. Это уже было показано в предыдущей работе.

Таким же образом зависит сила натяжения растянутой пружины и вообще сила, или энергия, произвольной системы от величины c в точке нахождения системы. Это легко заметить из следующих элементарных соображений. Если мы производим измерения последовательно нескольких малых частей пространства, обладающих различными c, и при этом все время пользуемся одними и теми же часами, масштабом и т. д., то мы всюду найдем, несмотря на возможную разницу в напряженностях полей тяготения, один и тот же закон с одними и теми же постоянными. Это следует из принципа эквивалентности. В качестве часов мы можем использовать хотя бы два зеркала, отстоящие друг от друга на 1 *см*, и считать число прохождений светового сигнала от одного зеркала к другому; в этом случае мы имеем дело со своего рода местным временем, которое Абрагам обозначал через l. Оно связано с универсальным временем соотношением

$$dl = cdt.$$

Измеряя время в системе l, мы получаем для растянутой пружины с массой m вполне определенную скорость dx/dl, независимо от того, каково значение c в месте, где происходит этот процесс. Следовательно,

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dx}{cdt} = a,$$

причем a не зависит от c. Однако, согласно формуле (8), кинетическую энергию, соответствующую этому движению, можно записать в виде

$$\frac{m}{2c} q^2 = \frac{m}{2c} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2c} a^2 c^2 = \frac{ma^2}{2} c.$$

Итак, энергия пружины пропорциональна c; то же самое остается справедливым для энергии и силы произвольной системы.

Такая зависимость имеет непосредственный физический смысл. Например, представим себе невесомую нить, натянутую между точками P_1 и P_2 с различным гравитационным потенциалом. Далее возьмем две совершенно

---

[7] Т. е. для определения времени, которое в уравнении обозначается через t.

одинаковые пружины и прикрепим их к нити — одну в точке P_1, другую в точке P_2 — так, чтобы существовало равновесие. При этом удлинения пружин, соответственно l_1 и l_2, не будут равны друг другу. Тогда условие равновесия будет [8]

$$l_1 c_1 = l_2 c_2.$$

Наконец, надо упомянуть, что уравнение (5б) находится в согласии с этим общим результатом. В самом деле, из этого уравнения и из выражения для гравитационной силы $-m \operatorname{grad} c$, действующей на массу m, следует, что сила $\mathfrak{K}$, с которой притягиваются две массы, находящиеся в поле с потенциалом c на расстоянии r друг от друга, в первом приближении равна

$$\mathfrak{K} = ck \cdot \frac{mm'}{4\pi r^2}.$$

Эта сила также пропорциональна c. Представим себе далее «гравитационные часы», состоящие из некоей массы m, вращающейся на фиксированном расстоянии R вокруг неподвижной массы m', причем будем считать, что на массу m действует лишь гравитационная сила, обусловленная массой m'. Тогда, пользуясь уравнением (6б), получаем в первом приближении уравнение

$$m\ddot{x} = c\mathfrak{K}_x \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что

$$m\omega^2 R = c^2 k \cdot \frac{mm'}{4\pi R^2}.$$

Итак, частота вращения ω гравитационных часов также пропорциональна c, как это и должно быть для любых часов.

§ 4. Общие замечания о пространстве и времени

В какой же связи находятся представленная нами здесь теория и старая теория относительности (т. е. теория с постоянным значением c)? По мнению Абрагама, преобразования Лоренца должны по-прежнему оставаться справедливыми в бесконечно малом, т. е. должны существовать преобразования x и t, представляемые формулами

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

[8] При этом, конечно, предполагается, что на натянутую невесомую нить в гравитационном поле не действуют никакие силы. Это будет обосновано в работе, которая скоро выйдет. (Статья 18.—*Ред.*)

$$dt' = \frac{-\frac{v}{c^2}\,dx + dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Здесь dx' и dt' должны быть полными дифференциалами. Следовательно, обязаны выполняться уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

Пусть теперь в нештрихованной системе гравитационное поле является статическим. В этом случае c является произвольной заданной функцией x, которая, однако, не зависит от t. Пусть штрихованная система находится в состоянии равномерного движения, так что v при фиксированном x не зависит от t. При этом левые, а следовательно, и правые части выписанных выше уравнений должны обратиться в нуль. Однако последнее невозможно, так как при произвольной зависимости c от x и при соответствующем выборе v как функции x правые части обоих уравнений не могут одновременно обращаться в нуль. Таким образом, оказывается, что даже в бесконечно малых пространственно-временных областях преобразования Лоренца нельзя считать справедливыми, если отказаться от строгого постоянства c.

Нам кажется, что проблему пространства — времени надо ставить следующим образом. Если ограничиться областью постоянного гравитационного потенциала, то законы природы принимают чрезвычайно простую и инвариантную форму по отношению к множеству пространственно-временных систем, связанных друг с другом преобразованиями Лоренца с постоянным c. Если же не ограничиваться областями, где c постоянна, то множество эквивалентных систем, равно как и множество преобразований, оставляющих законы природы неизменными, станет более обширным; однако законы при этом станут более сложными.

Поступила 26 февраля 1912 г.

К ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ*

В нашей недавно опубликованной работе выведены уравнения движения материальной точки в гравитационном поле, исходя из гипотезы, названной принципом эквивалентности **. В настоящей работе мы покажем, какое влияние согласно принципу эквивалентности оказывает статическое гравитационное поле на электромагнитные и тепловые процессы. Первый из этих двух вопросов в первом приближении уже был нами рассмотрен. В конце работы будет получено дифференциальное уравнение статического гравитационного поля.

§ 1. Вывод уравнений электромагнитного поля с учетом (статического) гравитационного поля

Мы будем придерживаться здесь в точности того же пути, который привел нас в предыдущей работе к уравнениям движения материальной точки, а именно: будем искать уравнения электромагнитного поля, справедливые в равномерно ускоренной (в смысле Борна) системе K (x, y, z, t), и предполагать в соответствии с гипотезой эквивалентности, что эти уравнения сохраняют силу и в статическом гравитационном поле. Чтобы найти уравнения, справедливые в системе K, будем исходить из известных уравнений, справедливых в неускоренной системе $\Sigma(\xi, \eta, \zeta, t)$. Если в последнем случае единицу времени выбрать так, чтобы скорость света стала равной 1, то эти уравнения для вакуума будут иметь известный вид

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}'\rho' + (\partial\mathfrak{E}'/\partial\tau) &= \mathrm{rot}'\,\mathfrak{H}', \\ 0 &= \mathrm{div}'\,\mathfrak{H}', \\ (\partial\mathfrak{H}'/\partial\tau) &= -\mathrm{rot}'\,\mathfrak{E}', \\ \rho' &= \mathrm{div}'\,\mathfrak{E}'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

* *Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes.* Ann. Phys., 1912, 38, 443—458.
** Статья 17.—*Ред.*

Штрихи у скаляров, векторов и операторов в этих уравнениях указывают на их принадлежность к системе Σ. Эти уравнения можно записать в равномерно ускоренной системе K с помощью соотношений, которые для достаточно малых t и при соответствующем выборе координатных осей и начала отсчета времени могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \frac{ac}{2} t^2, \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \\ \tau &= ct, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$c = c_0 + ax.$$

Векторы поля $\mathfrak{E}'$ и $\mathfrak{H}'$ также следует записать в ускоренной системе K. Сделаем это на основе требования, что в системе K векторы поля $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ должны совпадать с векторами поля $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ такой неускоренной системы Σ, относительно которой система K имеет скорость, равную нулю. Для $t = \tau = 0$ из этого утверждения непосредственно следует, что

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}',$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'.$$

То же самое мы потребуем для плотности электрического заряда, так что для

$$t = \tau = 0$$
$$\rho = \rho'.$$

Заметим теперь, что достаточно установить преобразованные уравнения, соответствующие уравнениям (1), для случая $t = \tau = 0$, так как эти уравнения должны иметь один и тот же вид для любого t. Согласно (2), для $t = \tau = 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Из сказанного выше следует, что если опустить штрихи, то правые части уравнений (1) остаются неизменными, так же как и левые части второго и четвертого уравнений (1). Некоторого анализа требует только преобразование левых частей первого и третьего уравнений (1).

Прежде всего, из соотношений (2) следует, что для движущейся точки к моменту времени $t = 0$ справедливы равенства:

$$\left.\begin{aligned} dx &= d\xi, \\ dy &= d\eta, \\ dz &= d\zeta, \\ dt &= \frac{1}{c}\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

Отсюда, если подставить $\mathfrak{v}_x = \dfrac{dx}{dt}$ и т. д., непосредственно вытекает, что

$$\mathfrak{v} = c\mathfrak{v}' \quad \text{или} \quad \mathfrak{v}' = \frac{1}{c}\,\mathfrak{v}.$$

Обозначим через $d\mathfrak{E}$ изменение, которое испытывает $\mathfrak{E}$ за бесконечно малый отрезок времени в некоторой точке системы K, и через $d'\mathfrak{E}'$ соответствующее изменение, которое испытывает в соответствующее время $\mathfrak{E}'$ в мгновенно совпадающей точке системы Σ. Пусть в начале бесконечно малого отрезка времени dt или $d\tau$ выполняется равенство $t = \tau = 0$; к этому моменту времени $E = E'$. Однако последнее равенство в конце отрезка времени dt или $d\tau$ уже не выполняется точно по двум причинам. Во-первых, в конце интервала $d\tau$ точка системы K уже не совпадает с точкой системы Σ; правда, этого можно не учитывать, поскольку упомянутое отклонение является бесконечно малой величиной второго порядка. Во-вторых, в течение рассмотренного бесконечно малого интервала времени точка системы K приобретает скорость $\mathfrak{g}d\tau$ в направлении оси ξ. Следовательно, чтобы получить значение $\mathfrak{E}$ в конце отрезка $d\tau$, необходимо отнести электромагнитное поле к неускоренной системе, которая движется относительно Σ в положительном направлении оси ξ со скоростью $\mathfrak{g}d\tau$. При этом электромагнитное поле преобразуется известным образом. Принимая во внимание вышесказанное, получаем

$$d\mathfrak{E} = d'\mathfrak{E}' + [\mathfrak{g}\mathfrak{H}']\,dt,$$

или с учетом последнего из равенств (2a)

$$\partial\mathfrak{E}' / \partial\tau = \frac{1}{c}\,(\partial\mathfrak{E} / \partial t) - \frac{1}{c}\,[\mathfrak{g}\mathfrak{H}].$$

Но из соотношений (2) вытекает

$$|\mathfrak{g}| = \frac{a}{c} = \frac{1}{c}\frac{dc}{dx}$$

и, следовательно, поскольку c не зависит от y и z,

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c}\operatorname{grad} c.$$

Наконец, получаем

$$\partial\mathfrak{E}' / \partial\tau = \frac{1}{c}(\partial\mathfrak{E} / \partial t) + \frac{1}{c}[\operatorname{grad} c, \mathfrak{H}].$$

Совершенно аналогично можно получить

$$\partial\mathfrak{H}' / \partial\tau = \frac{1}{c}(\partial\mathfrak{H} / \partial t) + \frac{1}{c}[\operatorname{grad} c, \mathfrak{H}].$$

Если теперь принять еще во внимание, что по правилам векторного исчисления

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} + [\operatorname{grad} c, \mathfrak{H}] = \operatorname{rot}(c\mathfrak{H})$$

и что аналогичное равенство справедливо для rot $(c\mathfrak{E})$, то, учитывая полученные выше результаты, находим вместо уравнений (1) следующие уравнения, записанные в системе K:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}\rho + (\partial\mathfrak{E} / \partial t) &= \operatorname{rot}(c\mathfrak{H}), \\ 0 &= \operatorname{div} \mathfrak{H}, \\ \partial\mathfrak{H} / \partial t &= -\operatorname{rot}(c\mathfrak{E}), \\ \rho &= \operatorname{div} \mathfrak{E}. \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

При этом физический смысл величин, входящих в эти уравнения, полностью определен. Координаты x, y, z измеряются масштабами, установленными в неподвижной системе K. Время t в системе K измеряется покоящимися в точках системы K часами; t определяется требованием, что скорость света в системе K не должна зависеть от времени и направления; $\mathfrak{v}$ — скорость электрических зарядов, измеренная с помощью времени t; ρ — плотность электричества, измеренная в единицах, которые обладают следующим свойством: две таких единицы электричества, находящиеся в неускоренной системе Σ на расстоянии 1 *см* друг от друга, должны действовать друг на друга с силой в 1 единицу, причем сила в 1 единицу такова, что сообщила бы 1 *г* ускорение 1, если в качестве единицы времени выбрано время, в течение которого свет прошел бы 1 *см* (световое время). Вектор напряженности поля $\mathfrak{E}$ имеет следующий смысл. Если пружинные весы отградуировать так, чтобы в неускоренной[1] системе Σ они измеряли силу в системе единиц, в которой скорость света равна единице, и прикрепить к этим пружинным весам единицу электричества, то эти весы измерили бы непосредственно напряженность поля $|\mathfrak{E}|$. Аналогично определяется $\mathfrak{H}$.

Согласно принципу эквивалентности, уравнения (1a) надо рассматривать как основные электромагнитные уравнения в статическом поле тяже-

[1] Конечно, подразумевается та система Σ, скорость которой в рассматриваемый момент времени относительно системы K равна нулю.

сти. Эти уравнения следует считать точными, поскольку они должны быть справедливы в том же приближении, как бы ни менялся в пространстве потенциал гравитационного поля. Однако они могут оказаться неточными в самой основе, так как электромагнитное поле может так изменять гравитационное поле, что последнее перестанет быть статическим. Кроме того, даже в тех случаях, когда эти уравнения являются точными, они не позволяют вычислить влияние электромагнитного поля на статическое гравитационное поле (c).

§ 2. Замечания о содержании полученных уравнений

Введенные в предыдущем параграфе для наглядной интерпретации векторов электромагнитного поля пружинные весы будем, по предложению П. Эренфеста, называть «карманными» пружинными весами. Вообще прилагательным «карманные»[2] будут обозначаться такие физические устройства, которые можно мысленно располагать в областях с различными гравитационными потенциалами и показаниям которых можно доверять в областях со сколь угодно большим c. Так, часы, показывающие «световое время», можно назвать «карманными часами», пружинные весы с единицей электрического заряда на конце — «карманным измерителем поля» и т. д.

Из предыдущей работы следует, что «карманные пружинные весы» измеряют действующую на них силу не прямо. Последняя должна быть приравнена показанию карманных пружинных весов, умноженному на c. Отсюда непосредственно вытекает, что пондеромоторную силу, действующую на покоящуюся в системе K единицу электрического заряда, следует приравнять не $\mathfrak{E}$, а $c\mathfrak{E}$. То же относится и к вектору напряженности поля $\mathfrak{H}$.

Поскольку в соответствии с третьим из уравнений (1a) в статическом электрическом поле $\operatorname{rot}(c\mathfrak{E}) = 0$, интеграл от вектора $c\mathfrak{E}$ по замкнутой кривой также обращается в нуль, и следовательно, невозможно получить неограниченную работу, перемещая единицу электричества по замкнутому пути.

Установим теперь закон Кулона для пространства с постоянным c. Из последнего уравнения (1a) следует, что поле точечного заряда ε равно $|\mathfrak{E}| = \frac{\varepsilon}{4\pi r^2}$, где через r обозначено расстояние от точечного заряда. Если

---

[2] «Карманные» означает, что прибор можно переносить, а не считать его прикрепленным к одному месту. (В этом смысле сейчас принято говорить не о величинах, измеренных «карманными» приборами, но о величинах, измеренных в собственной системе координат.— *Прим. ред.*)

в этом случае имеется второй электрический заряд ε', то действующая на него сила равна $c\varepsilon' \, |\mathfrak{E}|$, или $c\frac{\varepsilon\varepsilon'}{4\pi r^2}$, что согласуется с выводом предыдущей работы, что сила, определяемая любой «карманной системой» в определенном состоянии, пропорциональна c. С этим результатом тесно связано следующее. Возьмем два идентичных конденсатора C и C' с обкладками a, b и a', b', один из которых поместим в область с гравитационным потенциалом c, а другой — в область с гравитационным потенциалом c'. Пусть обкладка a соединена проводником с обкладкой a', а b — с b'. Если конденсаторы заряжены, то вследствие того, что $\operatorname{rot}(c\mathfrak{E}) = 0$, заряд обоих конденсаторов не будет одинаковым; напротив, $c\mathfrak{E} = c'\mathfrak{E}'$ и, так как $\rho = \operatorname{div}\mathfrak{E}$, то и $c\varepsilon = c'\varepsilon'$ (если через ε и ε' обозначить заряды этих конденсаторов).

Из найденного выражения для закона Кулона следует, что плотности электромагнитной энергии мы должны приравнять не $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$, а $\frac{c}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$. Если первое из уравнений (1a) умножить скалярно на $c\mathfrak{E}$, третье — на $c\mathfrak{H}$, сложить их и затем проинтегрировать по произвольному замкнутому объему, то получим соотношение, выражающее закон сохранения энергии,

$$\int \mathfrak{v} c\mathfrak{E}\rho d\tau + \frac{d}{dt}\left[\int \frac{c}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, d\tau\right] = \int [c\mathfrak{E},\ c\mathfrak{H}]_{\mathfrak{n}} d\sigma. \tag{3}$$

Здесь $d\tau$ — элемент объема, $d\sigma$ — элемент ограничивающей поверхности, $\mathfrak{n}$ — внутренняя нормаль к ней.

Следовательно, закон сохранения энергии соблюдается, причем вектор $c^2\,[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$ представляет собой поток энергии.

Получим теперь закон сохранения импульса, умножая векторно первое из уравнений (1a) на $\mathfrak{H}$, третье — на $-E$ и складывая. Подставляя следующие выражения для максвелловских натяжений

$$X_x = c\left(\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{H}_x^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right), \qquad X_y = c\,(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y),$$

$$X_z = c\,(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z)$$

и т. д., получаем

$$\rho\,(c\mathfrak{E}_x + [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]_x) + \frac{d}{dt}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_x = \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\frac{\partial c}{\partial x}, \tag{4}$$

а также соотношения, получающиеся отсюда циклической перестановкой. В этом соотношении первый член представляет собой x-компоненту импульса, который электрические заряды сообщают единице объема подвижных масс системы в единицу времени.

Следовательно, выражение для пондеромоторной силы с точностью до множителя c совпадает с выражением, указанным Г. А. Лоренцом. Второй член в левой части соответствует приросту электромагнитного импульса единицы объема. Если пространственные производные c равны нулю, т. е. гравитационное поле отсутствует, то соответствующий левой части соотношения(4) прирост импульса единицы объема происходит, как и в электродинамике, лишь за счет электромагнитных натяжений, без учета поля тяжести. Однако при наличии гравитационного поля последний член в правой части следует рассматривать как источник электромагнитного импульса. Электромагнитное поле получает импульс от поля тяжести точно так же, как и покоящаяся весомая масса, ибо в предыдущей работе показано, что гравитационное поле передает в единицу времени покоящейся массе m импульс—m grad c. Отсюда, например, получается, что излучение в полости обладает тяжелой массой, в точности соответствующей его инертной массе; этот результат уже содержится в уравнениях (1а) и выражении для пондеромоторных сил, поскольку соотношение (4), выражающее закон сохранения импульса, является следствием уравнений (1а). Заметим, что тяжесть электромагнитного поля определяется величиной $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)$, а не собственной плотностью энергии $\frac{c}{2}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)$, т. е. эквивалентна пространственной плотности неподвижной инертной массы. Этого также следовало ожидать, так как $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)$ представляет собой плотность энергии, которую обнаруживает наблюдатель, пользующийся «карманными инструментами». Следовательно, эта величина аналогична инертной массе в соответствии с принятым нами определением последней.

Из этих рассуждений следует, что электромагнитное поле в свою очередь оказывает обратное воздействие на гравитационное поле, выражение для напряженности которого в статическом случае в соответствии с указанными соображениями получается весьма просто, поскольку пространственная плотность $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)$ эквивалентна равной ей по величине плотности неподвижной весомой массы. Мы не будем здесь останавливаться на этом более подробно. Не будем также рассматривать здесь содержащийся в уравнениях (1а) закон искривления световых лучей в поле тяжести, так как он уже был рассмотрен в первом приближении в сообщении по этому вопросу, опубликованном нами в прошлом году[3].

---

[3] Статья 14.— *Прим. ред.*

§ 3. Тепловые величины и гравитационное поле

Пусть в двух удаленных друг от друга областях, скорости света в которых равны соответственно c_1 и c_2, помещены два тепловых резервуара W_1 и W_2. Тогда, если один и тот же термометр («карманный термометр»), приведенный с ними поочередно в соприкосновение, покажет в обоих случаях одну и ту же температуру T^* (температуру по «карманному термометру»), то резервуары действительно должны иметь одинаковые температуры. Под «температурой» (T) понимается температура, определяемая циклом Карно. Мы поставим вопрос о соотношении между температурами тепловых резервуаров W_1 и W_2.

Представим себе следующий круговой процесс. Пусть тело с «карманной» температурой T^* получает из резервуара W_1 «карманное» количество тепла Q^*, после чего это тело перемещается к резервуару W_2. Затем это же самое количество тепла Q^* передается от тела тепловому резервуару W_2 при «карманной» температуре T^*, и, наконец, тело снова возвращается к резервуару W_1.

Согласно результатам предыдущей работы, отданное или полученное тепло в резервуарах в действительности равно

$$Q_1 = Q^* c_1,$$

$$Q_2 = Q^* c_2.$$

Из известного соотношения

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

сразу получаем

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Следовательно, если два тепловых резервуара имеют одинаковую температуру, измеренную «карманным» термометром, то их истинные (термодинамические) температуры относятся как скорости света в соответствующих областях. Это можно также выразить следующим образом: истинную температуру получают умножением показания «карманного» термометра на c

$$T = cT^*.$$

Отсюда следует также, что два тепловых резервуара, находящихся в областях с различным гравитационным потенциалом и соединенные проводниками тепла, не принимают одну и ту же «карманную» температуру, а что последняя при температурном равновесии обратно пропорциональна скоростям света.

Напротив, энтропия тела зависит только от его состояния, измеренного «карманными» инструментами, а не от гравитационного потенциала. Это следует, с одной стороны, из того, что тело может переместиться в область с другим гравитационным потенциалом без изменения своего состояния, измеренного «карманными» инструментами, без притока тепла, а с другой стороны, — из только что найденных соотношений, поскольку они относятся к двум равноценным телам, которые в различных областях испытывают одинаковые изменения, измеренные «карманными» инструментами,

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q^*}{T^*} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

§ 4. Дифференциальное уравнение статического гравитационного поля

Из последнего уравнения (2)

$$c = c_0 + ax$$

путем обобщения в предыдущей работе и было получено уравнение для статического гравитационного поля

$$\Delta c = 0 \tag{3}$$

в случае пространства, свободного от материи, и уравнение

$$\Delta c = kc\sigma \tag{3a}$$

в случае пространства, заполненного материей. Однако оказывается, что уравнение (3а) ведет к противоречию с найденным нами в предыдущей работе выражением для силы $\mathfrak{F}$, которая действует на находящуюся в единице объема весомую материю σ. Именно, если материя покоится, то

$$\mathfrak{F} = -\sigma \operatorname{grad} c. \tag{4}$$

Рассмотрим интеграл $\int \mathfrak{F} d\tau$ по пространству, для которого в бесконечности c постоянна; тогда закон равенства действия и противодействия требует, чтобы этот интеграл обращался в нуль. В противном случае все множество находящихся в рассматриваемом пространстве масс, которые мы представим себе прикрепленными к жестким стержням, не имеющим массы, стремилось бы прийти в движение. Однако, согласно (4) и (3а),

$$\int \mathfrak{F}\, d\tau = -\int \sigma \operatorname{grad} c\, d\tau = -\frac{1}{k}\int \frac{\Delta c}{c} \operatorname{grad} c\, d\tau;$$

легко показать, что в общем случае последний интеграл не равен нулю.

Таким образом, мы пришли к довольно рискованному результату, который может вызвать сомнения в справедливости всей развитой здесь теории. Этот результат, очевидно, свидетельствует о глубоком пробеле в основах наших исследований, поскольку вряд ли можно получить для найденной (для равномерно ускоренной системы) величины $c=c_0+ax$ уравнение, отличное от уравнения (3), которое в свою очередь с необходимостью ведет к уравнению (3а).

Чтобы преодолеть эту трудность, прежде всего хочется, принимая во внимание результаты старой теории относительности, предположить, что стержням, подверженным напряжениям, следует приписать тяжелую массу, так что к силам, с которыми действует гравитационное поле на массы с плотностью σ, прибавляются силы, с которыми оно действует на части стержней, подверженные напряжениям. Однако следующее рассуждение доказывает несостоятельность и этой гипотезы.

Пусть в статическом гравитационном поле находится ящик с отражающими стенками, в котором заключено излучение с энергией E, измеренной «карманными инструментами»; иными словами, пусть

$$E=\frac{1}{2}\int(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\,d\tau.$$

Если размеры ящика достаточно малы, то из соотношения (4) настоящей работы получается, что сила, которая действует на стенки ящика со стороны излучения, равна

$$-E\operatorname{grad}c.$$

Эта сила должна равняться результирующей сил, действующих на всю систему (ящик вместе с излучением) со стороны гравитационного поля, если ящик не имеет массы и если то обстоятельство, что в стенках ящика возникают напряжения, связанные с давлением излучения, не приводит к действию гравитационного поля на стенки ящика. Если бы это было не так, то равнодействующая сил, действующих на ящик (вместе с его содержимым) со стороны гравитационного поля, отличалась бы от значения $-E\operatorname{grad}c$, т. е. тяжелая масса системы отличалась бы от E.

С другой стороны, если наш ящик с излучением находится в пространстве с постоянной c, то для него остаются в силе результаты старой теории относительности. В частности, инертная масса системы должна быть равна E.

Итак, если мы хотим сохранить пропорциональность тяжелой и инертной масс такой системы, которую можно рассматривать как материальные точки. то необходимо предположить, что *тяжелая* масса нашей системы также равна E. Однако по приведенному выше соображению это будет только в том случае, если мы *не предполагаем* существования сил, действующих со стороны гравитационного поля на подверженные напряжениям стенки, не обладающие массой.

Совершенно аналогично можно рассмотреть уравнения движения материальной точки, найденные в предыдущей работе. Именно, рассмотрим ящик, в котором в любых направлениях движутся материальные точки, упруго отражающиеся от стенок (модель одноатомного газа). Точно так же, как в случае ящика с излучением, находим, что тяжелая и инертная массы всей системы равны только в том случае, если гравитационное поле действует на стенки, в которых есть напряжения, но у которых нет массы.

Таким образом, содержащееся в уравнениях (3а) и (4) нарушение закона равенства действия и противодействия остается в силе. Выражение (4) для силы, действующей в гравитационном поле на покоящиеся массы, с необходимостью вытекает из наших уравнений движения материальной точки. Поэтому, естественно, приходится сомневаться в справедливости этих уравнений; однако последние нелегко поддаются изменению, что вытекает из следующего рассуждения.

Если импульс материальной точки — как этого требует старая теория относительности — в пространстве с постоянной c определяется как $m\dot{x}/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$, то в общем случае выражение для импульса может отличаться от приведенного здесь только множителем, являющимся функцией лишь c[4]. Из соображений размерности этот множитель должен быть степенью c (т. е. c^α). Следовательно, уравнения движения должны иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\dot{x}\,c^\alpha}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\}=\mathfrak{K}_{xs}+\mathfrak{K}_{xa},$$

если обозначить через $\mathfrak{K}_{xs}$ x-компоненту силы, действующей на точку со стороны гравитационного поля, а через $\mathfrak{K}_{xa}$ x-компоненту равнодействующей сил другого происхождения. Вопрос теперь сводится к тому, каким должно быть выражение для $\mathfrak{K}_s$. Если речь идет об одной точке, для которой $q=0$, то сила должна быть пропорциональной вектору $-m\operatorname{grad} c$ (если только предположить, что статическое гравитационное поле характеризуется величиной c). Эта сила может отличаться от $-m\operatorname{grad} c$ только множителем, зависящим лишь от c; этот множитель из соображений размерности также должен быть степенью c (т. е. c^β). В случае, когда $q\neq 0$, сила зависела бы также и от q, а именно: зависимость тяжелой массы ящика, содержащего движущиеся упругие материальные точки, была бы той же, что и у любой тяжелой массы. Принимая во внимание результаты старой

[4] Собственно говоря, можно еще допустить, что импульс зависит от пространственных производных c. Однако мы предположим, что это не так.

теории относительности, этого можно достичь лишь в том случае, если предположить, что

$$\mathfrak{K}_s = -\frac{m \operatorname{grad} c \cdot c^{\beta}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} \cdot \mathrm{const}.$$

Подставив это выражение для $\mathfrak{K}_s$ в уравнения движения, можно показать, что выражение $\mathfrak{K}_{xa}\dot{x} + \mathfrak{K}_{ya}\dot{y} + \mathfrak{K}_{za}\dot{z}$ может быть производной по времени только в том случае, если постоянным α и β придать значения, при которых получаются уравнения движения, указанные в нашей предыдущей работе. Следовательно, нужно либо останавливаться как на этом, так и на получающемся отсюда выражении (4), либо вообще отказаться от всей теории (определения гравитационного поля посредством c).

Таким образом, устранение названного противоречия закону равенства действия и противодействия, по-видимому, возможно только путем замены уравнений (3) и (3а) другими однородными по c уравнениями, для которых этот закон выполняется при использовании выражения (4) для силы. На этот шаг тяжело решиться, так как с ним мы покидаем область справедливости принципа эквивалентности. По-видимому, последний можно сохранить только для бесконечно слабых полей. Наш вывод уравнений движения материальной точки и уравнений электромагнитного поля справедлив только потому, что уравнения (2) применяются в нем к бесконечно малым областям пространства. Этот вывод можно связать, например, с более общими уравнениями

$$\begin{aligned} \xi &= x + \frac{c\,\frac{dc}{dx}}{2} t^2, \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \\ \tau &= ct, \end{aligned}$$

где c — произвольная функция x.

С помощью соответствующего преобразования интеграла по произвольному объему

$$\int \frac{\Delta c}{c} \operatorname{grad} c\, d\tau$$

легко убедиться, что закон равенства действия и противодействия будет выполняться, если мы наряду с сохранением (4) заменим уравнение (3а) на уравнение

$$c\Delta c - \frac{1}{2}(\operatorname{grad} c)^2 = kc^2\sigma, \tag{3б}$$

которое можно привести к виду

$$\Delta(\sqrt{c}) = \frac{k}{2}\sqrt{c}\sigma, \tag{3б'}$$

где σ — плотность весомой материи или, точнее, сумма плотности весомой материи и плотности энергии, измеренной «карманными» приборами. Из этих уравнений

$$\mathfrak{F}_x = -\sigma\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \text{ и т. д.},$$

причем

$$ckX_x = \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{2}(\operatorname{grad} c)^2, \quad ckX_y = \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y}, \quad ckX_z = \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial z} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, закон равенства действия и противодействия действительно выполняется. Член, добавленный в уравнение (3б) для того, чтобы выполнялся закон равенства действия и противодействия, заслуживает доверия благодаря следующим соображениям.

Если любая плотность энергии (σc) дает некоторую (отрицательную) дивергенцию силовых линий гравитации, то это должно сохраняться также и для плотности энергии самой гравитации. Записывая (3б) в форме

$$\Delta c = k\left\{c\sigma + \frac{1}{2k}\frac{\operatorname{grad}^2 c}{c}\right\},$$

легко увидеть, что второй член в скобках следует рассматривать как плотность энергии гравитационного поля [5]. Покажем, что этот член соответствует плотности энергии гравитационного поля в соответствии с законом сохранения энергии.

Для этой цели представим себе находящееся в конечной области пространственное распределение весомых масс (с плотностью σ), охватываемое бесконечно удаленной поверхностью; пусть c в бесконечности стремится к постоянному значению, насколько это позволяет уравнение (3б) или (3б'). Тогда нужно показать, что для любого бесконечно малого смещения масс (δx, δy, δz) работа δA, производимая над системой, равна увеличению δE интеграла от плотности энергии, стоящей в скобках предыдущего уравнения, по всему пространству.

Прежде всего вследствие (4) получаем

$$\delta A = \int\sigma\left(\frac{\partial c}{\partial x}\delta x + \frac{\partial c}{\partial y}\delta y + \frac{\partial c}{\partial z}\delta z\right)d\tau = -\int c\left[\frac{\partial(\sigma\delta x)}{\partial x} + \cdots\right]d\tau = \int c\delta\sigma\, d\tau.$$

---

[5] Следует отметить, что она, как и у Абрагама, сохраняет положительное значение.

Для вычисления δE заметим, что

$$\delta\left\{\int \frac{\operatorname{grad}^2 c}{c}\,d\tau\right\} = \delta\left\{4\int \operatorname{grad}^2 \sqrt{c}\,d\tau\right\} = \delta\left\{4\int \operatorname{grad}^2 u\,d\tau\right\} =$$

$$= 8\int\left[\frac{\partial u}{\partial x}\,\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \cdots\right]d\tau = 8\left\{\int \delta u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \int \Delta u\delta u\,d\tau\right\}.$$

Первый из этих интегралов (поверхностный интеграл по бесконечно удаленной поверхности) обращается в нуль, ибо величины δu и $\frac{du}{dn}$ с увеличением радиус-вектора R стремятся к нулю соответственно как $1/R$ и $1/R^2$. Второй же интеграл в силу уравнения поля (3б′) можно преобразовать следующим образом:

$$\delta\left\{\int \frac{\operatorname{grad}^2 c}{c}\,d\tau\right\} = -4k\int v\delta u\sigma d\tau = -2k\int \sigma\delta c\,d\tau.$$

Используя последнее равенство, находим

$$\delta E = \int (c\delta\sigma + \sigma\delta c - \sigma\delta c)\,d\tau = \delta A.$$

Тем самым доказано, что $\frac{1}{2k}\,\frac{\operatorname{grad}^2 c}{c}$ действительно можно рассматривать как плотность энергии гравитационного поля.

Поступила 23 марта 1912 г.

Дополнение при корректуре

Интересно отметить, что уравнения движения материальной точки в поле тяготения

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\frac{\dot{x}}{c}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} + \frac{\mathfrak{K}_x}{m} \quad \text{и т. д.}$$

принимают очень простой вид, если их записать в форме уравнений Лагранжа. Именно, если положить

$$H = -m\sqrt{c^2 - q^2},$$

то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial H}{\partial x} = \mathfrak{K}_x \quad \text{и т. д.}$$

Для материальной точки, движущейся в статическом гравитационном поле без воздействия внешних сил, в соответствии с этим находим

$$\delta\left\{\int H d\tau\right\} = 0,$$

или

$$\delta\left\{\int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\, d\tau\right\} = 0.$$

В этом случае также оказывается, как это было показано Планком для обычной теории относительности, что значение уравнений аналитической механики выходит далеко за пределы механики Ньютона. Написанное в конце уравнение Гамильтона позволяет предположить, как должны быть построены уравнения движения материальной точки в динамическом гравитационном поле.

В работе устанавливается, что уравнения гравитационного поля должны быть нелинейными и что энергия этого поля сама служит (наряду с плотностью масс σ) его источником.

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ И ГРАВИТАЦИЯ*

Ответ на замечание М. Абрагама

В заметке, напечатанной в этом же номере журнала [1], М. Абрагам ответил на некоторые критические соображения, высказанные мною по адресу его исследований гравитации, а также со своей стороны подверг критике мои работы по этому вопросу. Ниже я хочу рассмотреть затронутые им вопросы и в особенности противопоставить выраженным им взглядам свои взгляды на современное состояние теории относительности.

Абрагам заявляет, будто я нанес завершающий удар теории относительности, отказавшись от постулата постоянства скорости света и от связанной с ним инвариантности системы уравнений относительно преобразований Лоренца. Чтобы ответить на это, требуются некоторые размышления об основах теории относительности.

Теория, называемая в настоящее время «теорией относительности», базируется на двух принципах, совершенно независимых друг от друга, а именно:

1) на принципе относительности для равномерного прямолинейного движения;

2) на принципе постоянства скорости света.

Сформулируем оба эти принципа точнее, не для того, чтобы высказать при этом нечто новое, а лишь для того, чтобы впоследствии нам было легче выражать свои мысли. Сопоставим друг с другом две формулировки принципа относительности.

1. Если мы относим физические системы к такой координатной системе K, в которой законы природы по возможности более просты, то сущест-

* *Relativität und Gravitation. Erwiderung auf eine Bemerkung von M. Abraham.* Ann. Phys., 1912, 38, 1059—1064.

[1] Ann. Phys., 1912, 38, 1056—1058.— *Прим. ред.*

вует бесконечно много координатных систем, относительно которых эти законы не изменяются; к этим системам принадлежат все координатные системы, которые движутся равномерно и прямолинейно относительно системы K.

2. Пусть некоторая система Σ изолирована от всех других физических систем (в смысле, привычном для физиков) и отнесена к такой координатной системе K, что законы, которым подчиняются пространственно-временные изменения Σ, по возможности просты; тогда имеется бесконечно много координатных систем, относительно которых эти законы остаются неизменными; к этим системам принадлежат все те координатные системы, которые движутся относительно K равномерно и прямолинейно.

Легко увидеть, что только принцип относительности в форме 2 подсказывается опытом. Пусть Σ опять обозначает рассматриваемую «изолированную» систему, а U — совокупность всех остальных систем мира. Чтобы проверить принцип относительности в форме 1, необходимо было бы провести два опыта, в первом из которых U и Σ приводятся в точно такое же состояние относительно K, как во втором опыте относительно K'. Это никогда не было и не будет возможным. Чтобы проверить принцип относительности в форме 2, необходимо, напротив, переводить в различные состояния одну только систему Σ, не беспокоясь о совокупности систем U; необходимо произвести два опыта, в первом из которых только Σ приводится в такое же состояние относительно K, как во втором опыте относительно K'.

До сих пор считалось лишним различать эти две формулировки, поскольку не предполагалось, что «остаточная система» U может влиять на процессы в системе Σ. Однако размышления о гравитации, мои и Абрагама, не допускают такого понимания. Согласно этим рассуждениям, ход процессов в Σ (например, скорость света) зависит от состояния U (например, от среднего расстояния от Σ отдельных систем, составляющих U). Однако при этом необходимо всегда помнить, что принцип относительности в форме 2 подтверждается характером всех наших физических знаний и, в особенности, опытом Майкельсона и Морли, так что для обоснования сомнений в этом принципе потребовались бы весьма серьезные доводы. Постулат относительности в подтверждаемой опытом форме 2 можно выразить короче, но менее точно, также следующим образом:

«Относительная скорость системы отсчета K по отношению к остаточной системе U не входит в физические законы».

Указанные выше соображения, по нашему мнению, имеют следствием то, что надо отклонять всякую теорию, которая выделяет *одну* систему отсчета из других движущихся относительно нее равномерно и прямолинейно систем отсчета. Абрагам делает даже попытку определить подобную выделенную систему отсчета словами: «Если среди всех систем отсчета выделена такая, в которой поле тяжести является статическим или квазистатическим, то отнесенное к этой системе движение позволительно называть «абсолютным» и т. д.». Это представляется нам неправильным даже в том случае, если бы каждый элемент поля тяжести можно было преобразованием скоростей перевести в статическое поле. Ибо невозможно, чтобы такое преобразование одновременно преобразовало подобным образом *все* элементы динамического гравитационного поля; следовательно, таким условием нельзя выделить одну систему отсчета из всех равномерно и прямолинейно движущихся относительно нее.

Общеизвестно, что нельзя основывать теорию законов преобразования пространства и времени на одном лишь принципе относительности. Это связано, как известно, с относительностью понятий «одновременность» и «форма движущегося тела». Чтобы заполнить этот пробел, мы ввели позаимствованный из лоренцовой теории покоящегося светового эфира принцип постоянства скорости света, который содержит, так же как и принцип относительности, физическое предположение, которое представлялось оправданным только соответствующими опытами (опыты Физо, Роуланда и т. д.). Этот принцип утверждает:

Существует система отсчета K, в которой любой луч света распространяется в вакууме с универсальной скоростью c, независимо от того, покоится или движется источник света относительно K.

Из этих двух принципов и может быть развита та самая теория, которая в настоящее время известна под названием «теории относительности». Эта теория правильна в той мере, в какой оправдываются оба положенных в ее основу принципа. Поскольку они, по-видимому, широко оправдываются, мне кажется, что теория относительности в ее теперешней форме означает важный шаг вперед; я не думаю, что она затормозила дальнейшее развитие теоретической физики!

Как же обстоит дело с границами применимости обоих принципов? Как уже подчеркивалось, сомневаться во всеобщей справедливости принципа относительности у нас нет ни малейшего основания. Напротив, я придерживаюсь мнения, что принцип постоянства скорости света можно сохранить лишь до тех пор, пока мы ограничиваемся пространственно-временными областями с постоянным гравитационным потенциалом. По-моему, здесь лежит граница применимости не принципа относительности, а принципа постоянства скорости света и тем самым нашей теперешней теории относительности. К этому мнению нас приводят следующие соображения.

Одним из важнейших результатов теории относительности является утверждение, что всякая энергия E обладает пропорциональной ей инерцией (E/c^2). Поскольку же всякая инертная масса является, насколько нам известно, в то же время тяжелой массой, мы не можем не приписать всякой энергии E также и тяжелую массу E/c^2 [2]. Отсюда немедленно следует, что сила тяжести действует на движущееся тело сильнее, чем на то же самое тело, но покоящееся.

Если поле тяжести может быть истолковано в смысле нашей теперешней теории относительности, то это может быть сделано, вероятно, только двумя способами. Вектор гравитационного поля можно представить либо как 4-вектор, либо как 6-вектор. Для каждого из этих двух случаев получаются формулы преобразования для перехода к равномерно и прямолинейно движущейся системе отсчета. С помощью этих формул преобразования и формул преобразования для пондеромоторных сил удается найти силы, действующие в обоих случаях на материальную точку, движущуюся в статическом поле тяжести. Однако при этом получаются результаты, которые противоречат указанным выше следствиям из положения о тяжелой массе энергии. Таким образом, вектор гравитационного поля, по-видимому, не может быть введен без противоречий в схему теперешней теории относительности.

Однако это положение вещей, по-моему, никоим образом не означает крушения метода, основанного на теории относительности, равно как открытие и правильное объяснение броуновского движения не ведет к тому, чтобы рассматривать термодинамику и гидродинамику как ересь. Теперешняя теория относительности, по-моему, всегда будет сохранять свое значение как простейшая теория пространственно-временных процессов для важного предельного случая постоянного гравитационного потенциала. Задачей ближайшего будущего должно быть создание релятивистской схемы, в которой найдет свое выражение эквивалентность инертной и тяжелой массы. Первый, довольно скромный вклад в создание такой теории мы пытались сделать в работах о статическом гравитационном поле. При этом мы исходили из убеждения, что эквивалентность инертной и тяжелой масс следует понимать по существу как тождество этих двух элементарных свойств материи и энергии и что статическое гравитационное поле следует считать физически тождественным ускорению системы отсчета. Необходимо признать, что эту интерпретацию мы смогли провести непротиворечивым образом только для бесконечно малых областей пространства и что не можем указать никакого удовлетворительного объяснения этого обстоятельства. Однако я не усматриваю в этом никаких оснований для того, чтобы отказаться от принципа эквивалентности также и для бесконечно ма-

---

[2] Ланжевен обратил наше внимание на то, что без этого предположения мы вступаем в противоречие с опытом. Именно, поскольку при радиоактивном распаде выделяются большие количества энергии, *инертная* масса материи должна при этом убывать. Если бы тяжелая масса убывала непропорционально, ускорение силы тяжести тел, состоящих из разных элементов, было бы в одном и том же поле тяжести заметно различным.

лых областей; никто не может отрицать, что этот принцип является естественной экстраполяцией одного из самых общих экспериментальных законов физики. С другой стороны, принцип эквивалентности открывает нам интересную перспективу — уравнения теории относительности, охватывающей гравитацию, должны быть инвариантны также относительно преобразований ускорения (и вращения). Однако путь к этой цели представляется нам весьма трудным. Уже из рассмотренного до сих пор очень частного случая тяготения покоящихся масс видно, что пространственно-временные координаты теряют свой простой физический смысл и нельзя предвидеть, какую форму могут иметь общие уравнения пространственно-временных преобразований. Хочу предложить всем специалистам попробовать свои силы в решении этой важной задачи!

Сделаем теперь несколько замечаний в связи с заметкой Абрагама. Возражая нам, М. Абрагам говорит о своей теории: «Не может быть и речи о каком-либо виде относительности, т. е. о соответствии двух систем, которое можно было бы выразить соотношениями между их пространственно-временными параметрами x, y, z, t и x', y', z', t'». Я не могу судить о том, было ли это первоначальным предположением Абрагама или нет. Во всяком случае при отказе от принципа относительности использованная Абрагамом в качестве путеводной нити релятивистская схема теряет всякую убедительность. Кроме того, Абрагам обратил мое внимание на то, что в своей работе [3] он уже указал выражение для энергии материальной точки в поле тяжести

$$\frac{mc}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}};$$

к сожалению, я просмотрел это. Во всяком случае этот результат противоречит основным уравнениям теории Абрагама. А именно, из этого выражения для энергии следует, что на покоящуюся в поле тяжести материальную точку действует сила $-m \operatorname{grad} c$; однако в противоречии с этим из уравнений (2) и (6) работы Абрагама для этой же самой величины получается выражение $-mc \operatorname{grad} c$. Далее, Абрагам утверждает, будто мы использовали его выражения для плотности энергии и для натяжений в поле тяжести. Это не соответствует действительности; например, по Абрагаму плотность энергии в статическом поле тяжести равна $\frac{c^2}{\gamma} \operatorname{grad}^2 c$, тогда как согласно нашей теории $\frac{1}{2k}\frac{\operatorname{grad}^2 c}{c}$. В эти выражения величина c входит по-разному.

Поступила 4 июля 1912 г.

[3] M. Abraham. Phys. Z., 1912, 13, № 19, 2.

В небольшой заметке Абрагам утверждал, что отказ от постоянства скорости света в гравитационном поле есть отказ от теории относительности вообще. Он считал, что поле тяжести представляет собой «абсолютную систему отсчета, к которой надо относить движение». Абрагам высказывал также сомнение в том, что «принцип эквивалентности» может служить основой теории.

В ответ на заметку Эйнштейна Абрагам опубликовал еще одну статью: «Еще раз об относительности гравитации» (Ann. Phys., 1912, 39, 444—448). Это вызвало следующий ответ Эйнштейна, поступивший в редакцию 2 сентября 1912 г. (Ann. Phys., Ser. 4, 39, 704):

«Поскольку каждый из нас изложил свою точку зрения со всей необходимой подробностью, я не считаю нужным снова отвечать на указанную статью Абрагама.

Я прошу читателя только о том, чтобы он не принял мое молчание за согласие».

СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ГРАВИТАЦИОННОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ, АНАЛОГИЧНОЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ? *

В одном наглядном частном случае поставленный в заголовке вопрос можно сформулировать следующим образом. Пусть рассматривается система тяготеющих масс, состоящая из сферической оболочки K с массой M, равномерно распределенной по поверхности шара, и из расположенной в центре этой оболочки материальной точки P с массой m (рис. 1). Будет ли действовать на жестко закрепленную материальную точку P сила, если оболочке K сообщить ускорение Г? Следующие рассуждения заставляют считать такое силовое воздействие действительно существующим и позволяют определить в первом приближении его величину.

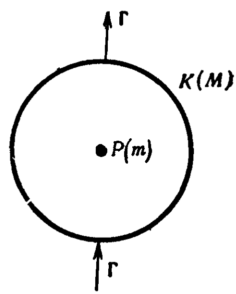

Рис. 1.

1. Согласно теории относительности, инертная масса замкнутой физической системы зависит от содержания энергии в ней, так что прирост энергии системы на величину E увеличивает инертную массу на E/c^2, где c — скорость света в пустоте. Если M — инертная масса оболочки K в отсутствие P, а m — инертная масса точки P в отсутствие K, или, другими словами, $M+m$ означает инертную массу системы, состоящей из P и K, при условии, что точка P с массой m бесконечно удалена от K, то отсюда следует, что в случае, когда m находится в центре оболочки K, инертная масса системы, состоящая из K и m, принимает значение

$$M+m-\frac{kMm}{Rc^2}, \tag{1}$$

---

* *Gibt es eine Gravitationswirkung, die der elektrodynamischen Induktionswirkung analog ist?* Vierteljahrschr. gerichtl., Med., 1912, Ser. 3, 44, 37—40.

причем k — гравитационная постоянная, R — радиус оболочки K. В самом деле, kMm/R (по крайней мере в первом приближении) есть энергия, которую необходимо затратить, чтобы перевести точку P из центра оболочки K в бесконечность.

2. В работе, которая появится в Ann. Phys.[1], на основе некоторой определенной гипотезы о природе статического гравитационного поля мы показали, что уравнения движения материальной точки в статическом поле имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\dot{x}/c}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\} = -\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} + \frac{\mathfrak{K}_x}{m} \quad \text{и т. д.}$$

При этом $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, q — скорость материальной точки, m — ее масса, $\mathfrak{K}_x$ — действующая на нее сила, c — скорость света, которую следует рассматривать как функцию координат x, y, z.

Из этих уравнений, между прочим, следует, что $\frac{mc}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}$ надо понимать как энергию материальной точки, а $\frac{m}{2}\,\frac{q^2}{c}$ в первом приближении — как ее кинетическую энергию. Чтобы получить кинетическую энергию в обычных единицах, это выражение надо умножить на постоянную c_0, равную скорости света в гравитационном поле с данным потенциалом. Следовательно, в обычных единицах кинетическая энергия L будет равна

$$L = \frac{m}{2}\, q^2 \frac{c_0}{c}\,.$$

Хотя тем самым получено выражение для L в произвольной точке, необходимо еще определить c как функцию x, y, z. В силу указанного уравнения движения для достаточно медленно движущейся точки, на которую не действуют другие силы, кроме сил гравитационного поля, получаем

$$\ddot{x} = -\,c\,\frac{\partial c}{\partial x} \quad \text{и т. д.},$$

или, определяя подобным же образом гравитационный потенциал Φ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = c\,\frac{\partial c}{\partial x} \quad \text{и т. д.}$$

Если обозначить через Φ_0 гравитационный потенциал на бесконечности, то отсюда после интегрирования с достаточной точностью следует

$$\Phi_0 - \Phi = c_0\,(c_0 - c) = c_0^2\left(1 - \frac{c}{c_0}\right),$$

[1] Статья 18.— *Прим. ред.*

или

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \frac{\Phi_0 - \Phi}{c_0^2}.$$

Для материальной точки, находящейся внутри оболочки K, $\Phi_0 - \Phi = \frac{kM}{R}$, так что для нее приближенно получаем

$$L_P = \frac{m}{2} q^2 \left(1 + \frac{kM}{Rc_0^2}\right).$$

Следовательно, инертная масса m' с учетом влияния оболочки K равна

$$m' = m + \frac{kmM}{Rc_0^2}. \tag{2}$$

Этот результат очень интересен. Он показывает, что присутствие оболочки K, обладающей инертной массой, увеличивает инертную массу находящейся внутри нее материальной точки P. Это наводит на мысль о том, что инерция материальной точки полностью обусловлена воздействием всех остальных масс посредством некоторого рода взаимодействия с ними [2]. В какой мере оправдывается эта точка зрения, выяснится, когда мы будем располагать динамической теорией гравитации.

Ясно, что инертная масса оболочки K таким же образом увеличивается вследствие присутствия точки P. Совершенно аналогичным способом для инертной массы M' оболочки K с учетом влияния точки P получаем

$$M' = M + \frac{kmM}{Rc_0^2}. \tag{3}$$

3. Рассмотрим теперь, какие силы F (или f) необходимы, чтобы сообщить массам M (или m) ускорение Γ (или γ) в определенном направлении. Если обозначить через A, a и α пока неопределенные коэффициенты, то во всяком случае можно положить

$$\left.\begin{aligned} F &= A\Gamma + \alpha\gamma, \\ f &= a\gamma + \alpha\Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

[2] Это полностью совпадает с точкой зрения, выдвинутой Э. Махом в его остроумных исследованиях по этому вопросу. [E. Mach. Die Entwicklung der Prinzipien der Dynamik. Zweite Kapitel. Newtons Ansichten über Zeit, Raum und Bewegung. (Русский перевод: Э. Мах. Механика. СПб., 1909, 186.— *Ред.*)].

Коэффициенты при вторых членах (α) выбраны одинаковыми в обоих уравнениях, поскольку действие оболочки K на точку P, если ускоряется только K, очевидно, должно быть равным действию точки P на оболочку K, если ускоряется только P.

Коэффициенты A, a и α получаются из рассмотрения трех частных случаев, к которым относятся уравнения (1), (2) и (3).

В первом случае одинаково ускоряются сразу оболочка K и точка P. Пусть совместное ускорение равно γ. Из формул (4) и (1) получаем

$$F + f = (A + a + 2\alpha)\gamma = \left(M + m - \frac{kMm}{Rc^2}\right)\gamma,$$

или

$$A + a + 2\alpha = M + m - \frac{kMm}{Rc^2}. \tag{1a}$$

Во втором случае, когда ускоряется только точка P, в силу второй из формул (4) и в силу соотношения (2) получаем:

$$f = a\gamma = \left(m + \frac{kmM}{Rc^2}\right)\gamma,$$

или

$$a = m + \frac{kmM}{Rc^2}. \tag{2a}$$

Третий случай аналогично дает

$$A = M + \frac{kmM}{Rc^2}. \tag{3a}$$

Из соотношений (1a), (2a) и (3a) следует:

$$\alpha = -\frac{3}{2}\frac{kMm}{Rc^2}.$$

Для случая, когда ускоряется только оболочка K, а точка P жестко закреплена, второе из соотношений (4) с только что полученным значением коэффициента α переходит в

$$(-K) = \frac{3}{2}\frac{kmM}{Rc^2}\Gamma.$$

При этом K — сила, которая должна действовать на материальную точку P, чтобы она оставалась в покое; следовательно, $(-K)$ — сила (индуцированная), действующая на P со стороны сферической оболочки, обладающей ускорением Γ. Эта сила имеет одинаковый знак с ускорением, в противоположность соответствующему взаимодействию между одноименными электрическими зарядами.

ПРОЕКТ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ*

(Совместно с М. Гроссманом)

I. ФИЗИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Излагаемая теория возникла на основе убеждения, что пропорциональность инертной и тяжелой масс является точным законом природы, который должен находить свое отражение уже в самих основах теоретической физики. Это убеждение я стремился отразить в ряде предыдущих работ[1], в которых делалась попытка свести *тяжелую* массу к *инертной*; это стремление привело меня к гипотезе о том, что поле тяжести (однородное в бесконечно малом объеме) физически можно полностью заменить ускоренной системой отсчета. Наглядно эту гипотезу можно сформулировать так: наблюдатель, находящийся в закрытом ящике, никаким способом не сможет установить, покоится ящик в статическом гравитационном поле или же находится в пространстве, свободном от гравитационных полей, но движется с ускорением, вызываемым приложенными к ящику силами (гипотеза эквивалентности).

Тот факт, что пропорциональность тяжелой и инертной масс выполняется всегда с чрезвычайно высокой точностью, мы знаем благодаря фундаментальному исследованию Этвеша[2], которое основано на следующем

---

* *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitation.* Z. Math. und Phys., 1913, 62, 225—261. (Mit M. Grossmann). [Раздел I настоящей работы («Физическая часть») написан А. Эйнштейном, а раздел II— М. Гроссманом. Работа вышла также отдельным изданием (Teubner Verlag, 1913). Заметим, что в этой статье еще не используются верхние и нижние индексы. Ср. примечание на стр. 250.— *Прим. ред.*].

[1] A. Einstein. Ann. Phys., 1911, (IV), 35, 898; 1912, 38, 355. (Статьи 14 и 17).

[2] B. Eötvös. Mathematische und naturwissenschaftliche Bericht aus Ungarn, VIII. 1890; Wiedemann Beiblätter, 1891, XV, 688.

рассуждении. На тело, покоящееся на поверхности Земли, действует как сила тяжести, так и центробежная сила, возникающая вследствие вращения Земли. Первая из этих сил пропорциональна тяжелой, вторая — инертной массе. Следовательно, если бы пропорциональность инертной и тяжелой масс не соблюдалась, то направление равнодействующей этих двух сил, т. е. направление кажущейся силы тяжести (вертикальное направление), должно было бы зависеть от физической природы рассматриваемых тел. В этом случае кажущиеся силы тяжести, действующие на отдельные части неоднородной жесткой системы, вообще говоря, не сводились бы к одной равнодействующей; в общем случае оставался бы еще вращательный момент кажущихся сил тяжести, который можно было бы обнаружить при подвешивании системы на незакрученную нить. Установив с большой тщательностью отсутствие таких вращательных моментов, Этвеш показал, что для исследованных им тел отношение обеих масс не зависит от природы тела с такой точностью, что гипотетические относительные различия этого отношения для разных веществ не могут превышать одной двадцатимиллионной.

При распаде радиоактивных веществ выделяются столь значительные количества энергии, что изменение инертной массы системы, которое, согласно теории относительности, соответствует этой убыли энергии, не очень мало по сравнению с общей массой[3]. Например, при распаде радия эта убыль составляет $^1/_{10\,000}$ общей массы. Если бы этим изменениям инертной массы не соответствовали изменения тяжелой массы, то отклонения инертной массы от тяжелой должны были бы значительно превышать допускаемые опытами Этвеша. Поэтому следует считать весьма вероятным, что равенство инертной и тяжелой масс является точным. По этим причинам нам представляется, что и гипотеза эквивалентности, выражающая физическую равнозначность тяжелой и инертной масс, в высшей степени вероятна[4].

§ 1. Уравнения движения материальной точки в статическом гравитационном поле

Согласно обычной теории относительности[5], свободная точка движется в соответствии с соотношением

$$\delta\left\{\int ds\right\} = \delta\left\{\sqrt{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2}\right\} = 0. \tag{1}$$

---

[3] Как известно, убыль инертной массы, соответствующая энергии E, составляет E/c^2, если c — скорость света.

[4] См. также § 7 настоящей работы.

[5] См., например, M. Planck. Verh. deutsch. phys. Ges., 1906, 136.

Это соотношение утверждает лишь, что материальная точка движется прямолинейно и равномерно. Оно представляет собой уравнение движения точки в форме Гамильтона и его можно записать также в виде

$$\delta\left\{\int H dt\right\} = 0, \tag{1a}$$

причем

$$H = -\frac{ds}{dt} m,$$

а m — масса покоя материальной точки.

Отсюда известным способом получаются импульс (I_x, I_y, I_z) и энергия E движущейся материальной точки

$$\left.\begin{aligned} I_x = m\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = m\frac{\dot{x}}{\sqrt{c^2-q^2}} \text{ и т. д.,} \\ E = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\dot{z} - H = m\frac{c^2}{\sqrt{c^2-q^2}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти выражения для энергии и импульса отличаются от обычных лишь тем, что в последних I_x, I_y, I_z и E содержат еще множитель c. Однако поскольку в обычной теории относительности c постоянно, приведенные формулы эквивалентны обычным. Различие состоит лишь в том, что I и E имеют теперь иную размерность.

В предыдущих работах я показал, что гипотеза эквивалентности ведет к следствию, что в статическом гравитационном поле скорость c зависит от гравитационного потенциала. Тем самым я пришел к выводу, что обычная теория относительности является лишь приближенной; эта теория должна быть справедливой в предельном случае, когда в рассматриваемых пространственно-временных областях нет слишком больших изменений гравитационного потенциала. Кроме того, я обнаружил, что уравнениями движения материальной точки в статическом гравитационном поле по-прежнему служат уравнения (1) или (1a); однако при этом c следует рассматривать не как постоянную, а как функцию пространственных координат, представляющую меру гравитационного потенциала. Из соотношения (1a) известным способом получаются уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\dot{x}}{\sqrt{c^2-q^2}}\right\} = -\frac{mc\dfrac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{c^2-q^2}}\,. \tag{3}$$

Нетрудно увидеть, что выражение для количества движения остается таким же, как и выше. Вообще для материальной точки, движущейся в статическом гравитационном поле, справедливы формулы (2). Правая часть уравнения (3) представляет силу $\mathfrak{K}_x$, действующую на материальную точку со стороны гравитационного поля. В частном случае покоя ($q = 0$)

$$\mathfrak{K}_x = -m\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Отсюда видно, что c играет роль гравитационного потенциала. Из формул (2) для медленно движущейся материальной точки следует, что

$$I_x = \frac{m\dot{x}}{c},$$

$$E - mc = \frac{\frac{1}{2}mq^2}{c}. \tag{4}$$

Таким образом, при заданной скорости импульс и кинетическая энергия обратно пропорциональны величине c. Иначе говоря, инертная масса, входящая в выражение для импульса и энергии, есть m/c, где m — характерная для материальной точки постоянная, не зависящая от гравитационного потенциала. Это согласуется со смелой мыслью Маха о том, что причиной инерции является взаимодействие рассматриваемой материальной точки со всеми остальными; в самом деле, если мы поместим другие массы вблизи рассматриваемой материальной точки, то тем самым уменьшим гравитационный потенциал c и, следовательно, увеличим отношение m/c, определяющее инерцию.

§ 2. Уравнения движения материальной точки в произвольном гравитационном поле. Характеристика последнего

Введя предположение, что величина c может изменяться в пространстве, мы вышли из рамок теории, называемой в настоящее время «теорией относительности», ибо величина, обозначаемая через c, теперь уже не будет инвариантом по отношению к линейным ортогональным преобразованиям. Следовательно, если принцип относительности должен остаться в силе — а это не подлежит сомнению,— то необходимо так обобщить теорию относительности, чтобы она содержала как частный случай намеченную ранее теорию статического поля тяжести.

Введем новую пространственно-временну́ю систему координат $K'(x', y', z', t')$ с помощью произвольного преобразования

$$\begin{aligned} x' &= x'(x, y, z, t),\\ y' &= y'(x, y, z, t),\\ z' &= z'(x, y, z, t),\\ t' &= t'(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Если в первоначальной системе отсчета K поле тяжести было статическим, то при этом преобразовании уравнение (1) перейдет в уравнение вида

$$\delta\left\{\int ds'\right\} = 0,$$

причем

$$ds'^2 = g_{11}\,dx'^2 + g_{22}\,dy'^2 + \cdots + 2g_{12}\,dx'\,dy' + \cdots,$$

а величины $g_{\mu\nu}$ суть функции x', y', z', t'. Если вместо x', y', z', t' подставить соответственно x, y, z, t и вместо ds' написать ds, то уравнения движения материальной точки относительно системы K' примут вид

$$\delta\left\{\int ds\right\} = 0, \tag{1'}$$

причем

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu.$$

Таким образом, мы приходим к убеждению, что в общем случае гравитационное поле характеризуется десятью пространственно-временными функциями

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44}, \end{matrix} \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}),$$

которые в случае обычной теории относительности соответственно равны

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +c^2, \end{matrix}$$

где c — постоянная.

Вырождение такого же рода имеет место в статическом поле тяжести рассмотренного выше типа с тем отличием, что в этом случае $g_{44} = c^2$ есть функция от x_1, x_2, x_3.

Функция Гамильтона H в общем случае, таким образом, имеет вид

$$H = -m\frac{ds}{dt} = -m\sqrt{g_{11}\dot{x}_1^2 + \ldots + 2g_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \ldots + 2g_{14}\dot{x}_1 + \ldots + g_{44}}. \tag{5}$$

Из соответствующих уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial H}{\partial x}=0 \text{ и т. д.} \tag{6}$$

сразу получаются выражения для импульса I материальной точки и силы $\mathfrak{K}$, действующей на нее со стороны гравитационного поля,

$$I_x=-m\frac{g_{11}\dot{x}_1+g_{12}\dot{x}_2+g_{13}\dot{x}_3+g_{14}}{\frac{ds}{dt}}=-m\frac{g_{11}\,dx_1+g_{12}\,dx_2+g_{13}\,dx_3+g_{14}\,dx_4}{ds}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{K}_x=-\frac{1}{2}m\frac{\sum\limits_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\,dx_\mu dx_\nu}{ds\cdot dt}=-\frac{1}{2}m\cdot\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}. \tag{8}$$

Далее для энергии E материальной точки получаем

$$-E=-\left(\dot{x}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}+\ldots\right)+H=-m\left(g_{41}\frac{dx_1}{ds}+g_{42}\frac{dx_2}{ds}+g_{43}\frac{dx_3}{ds}+g_{44}\frac{dx_4}{ds}\right). \tag{9}$$

В обычной теории относительности допускаются только линейные ортогональные преобразования. Мы покажем, что для описания воздействия гравитационного поля на материальные процессы можно составить уравнения, ковариантные относительно произвольных преобразований.

Прежде всего, исходя из роли, которую играет ds в законе движения материальной точки, мы можем заключить, что интервал ds должен быть абсолютным инвариантом (скаляром); отсюда следует, что величины $g_{\mu\nu}$ образуют ковариантный тензор второго ранга [6], который мы будем называть ковариантным фундаментальным тензором. Последний определяет гравитационное поле. Далее, из формул (7) и (9) следует, что импульс и энергия материальной точки совместно образуют ковариантный тензор первого ранга, т. е. ковариантный вектор [7].

[6] См. часть II, § 1.
[7] См. там же.

§ 3. Значение фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ для измерения пространства и времени

Из сказанного ранее можно сделать вывод, что между пространственно-временными координатами x_1, x_2, x_3, x_4 и результатами измерений, полученными с помощью масштабов и часов, не существует такой простой связи, как в обычной теории относительности. По отношению ко времени это обнаружилось уже для статического гравитационного поля[8]. Поэтому возникает вопрос о физическом смысле (принципиальной измеримости) координат x_1, x_2, x_3, x_4.

Заметим к тому же, что ds следует понимать как инвариантную меру для расстояния между двумя соседними пространственно-временными точками. Поэтому интервал ds должен также иметь физический смысл независимо от выбранной системы отсчета. Предположим, что ds есть «естественно измеренное» расстояние между двумя пространственно-временными точками; под этим мы будем понимать, что непосредственная окрестность точки (x_1, x_2, x_3, x_4) определяется в координатной системе бесконечно малыми переменными dx_1, dx_2, dx_3, dx_4. Представим себе, что вместо последних линейным преобразованием вводятся новые переменные $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, $d\xi_4$ так, что выполняется равенство

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2.$$

При этом преобразовании $g_{\mu\nu}$ следует считать постоянным; вещественный конус $ds^2 = 0$ оказывается стянутым к своей оси. Тогда в этой элементарной $d\xi$-системе справедлива обычная теория относительности, а расстояния и промежутки времени имеют в этой системе такой же физический смысл, как и в обычной теории относительности, т. е. ds^2 есть квадрат четырехмерного расстояния между двумя бесконечно близкими точками, измеренного при помощи неускоренного в системе $d\xi$ твердого тела и покоящихся в этой системе единичных масштабов и часов.

Отсюда видно, что при данных dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 соответствующее этим дифференциалам естественное расстояние можно измерить только в том случае, если известны величины $g_{\mu\nu}$, определяющие гравитационное поле. Это же можно выразить так: гравитационное поле влияет на измерительные тела и часы вполне определенным образом.

Из основного равенства

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu \, dx_\nu$$

[8] См., например, A. Einstein. Ann. Phys., 1911, 35, 898. (Статья 14).

видно, что для установления размерности величин $g_{\mu\nu}$ и x_ν требуется еще одно условие. Величина ds имеет размерность длины. Условимся, что x_ν (в том числе x_4) также имеют размерность длины; тогда величины $g_{\mu\nu}$ будут безразмерными.

§ 4. Движение непрерывно распределенных несвязанных масс в произвольном поле тяжести

Для вывода закона движения непрерывно распределенных несвязанных масс вычислим импульс и пондеромоторную силу на единицу объема и применим затем закон сохранения импульса.

Для этого сначала вычислим трехмерный объем V нашей материальной точки. Рассмотрим бесконечно малый (четырехмерный) отрезок пространственно-временно́й траектории нашей материальной точки. Объем этого отрезка есть

$$\iiiint dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = V\, dt.$$

Если вместо dx ввести естественные дифференциалы $d\xi$, причем измерительный масштаб предполагать покоящимся относительно материальной точки, то получим

$$\iiint d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = V_0,$$

т. е. «покоящийся объем» материальной точки. Далее

$$\int d\xi_4 = ds,$$

где ds имеет тот же смысл, что и выше.

Если дифференциалы dx связаны с $d\xi$ соотношениями

$$dx_\mu = \sum_\sigma \alpha_{\mu\sigma}\, d\xi_\sigma,$$

то

$$\iiiint dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = \iiiint \frac{\partial\,(dx_1,\, dx_2,\, dx_3,\, dx_4)}{\partial\,(d\xi_1,\, d\xi_2,\, d\xi_3,\, d\xi_4)}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3\, d\xi_4,$$

или

$$V\, dt = V_0\, ds \cdot |\, \alpha_{\rho\sigma}\,|\, .$$

Однако, так как

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = \sum_{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\nu}\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\sigma}\, d\xi_\rho d\xi_\sigma = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2,$$

то между определителем

$$g = |g_{\mu\nu}|,$$

т. е. дискриминантом квадратичной дифференциальной формы ds^2, и определителем преобразования $|\alpha_{\rho\sigma}|$ существует соотношение

$$g \cdot |\alpha_{\rho\sigma}|^2 = -1,$$

или

$$|\alpha_{\rho\sigma}| = \frac{1}{\sqrt{-g}}.$$

Следовательно, для V получаем соотношение

$$V\,dt = V_0\,ds \cdot \frac{1}{\sqrt{-g}}.$$

Отсюда с помощью равенств (7), (8) и (9) после замены $\frac{m}{V_0}$ на ρ_0 получаем

$$\frac{I_x}{V} = -\rho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_{\nu} g_{1\nu} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds},$$

$$\frac{-E}{V} = -\rho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_{\nu} g_{4\nu} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds},$$

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{1}{2}\rho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Заметим, что

$$\Theta_{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}$$

есть контравариантный тензор второго ранга относительно произвольных преобразований. Из сказанного выше можно предположить, что закон сохранения импульса-энергии имеет вид

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu}\Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Theta_{\mu\nu} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{10}$$

Первые три из этих соотношений ($\sigma = 1, 2, 3$) выражают закон сохранения импульса, последнее ($\sigma = 4$) — закон сохранения энергии. Эти соотношения действительно оказываются ковариантными относительно произвольных преобразований [9].

---

[9] Ср. часть II, § 4, п. 1.

Кроме того, интегрированием по линии тока из этих соотношений можно снова получить наши исходные уравнения движения материальной точки.

Тензор $\Theta_{\mu\nu}$ назовем (контравариантным) тензором энергии-натяжений материальных тел. Соотношению (10) мы приписываем область применимости, далеко выходящую за рамки частного случая движения несвязанных масс. Это соотношение выражает вообще энергетический баланс между гравитационным полем и любой материальной системой; необходимо лишь придавать $\Theta_{\mu\nu}$ то значение, которое соответствует тензору энергии-натяжений рассматриваемой системы. Первая сумма в указанном соотношении содержит пространственные производные натяжений или плотности потока энергии и временные производные импульса или плотности энергии; вторая сумма выражает влияние гравитационного поля на материальный процесс.

§ 5. Дифференциальные уравнения гравитационного поля

После того как мы получили выражение энергии-импульса для материальных явлений (механических, электрических и других) в их связи с гравитационным полем, перед нами стоит еще следующая задача. Пусть задан тензор $\Theta_{\mu\nu}$ для материальной системы. Какими будут дифференциальные уравнения, позволяющие определить величины g_{ik}, т. е. гравитационное поле? Другими словами, мы ищем обобщение уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\varkappa\rho.$$

Для решения этой задачи мы не нашли метода, который был бы столь же естественным, как в случае предыдущей задачи. Нам пришлось ввести некоторые далеко не очевидные, хотя и вероятные допущения.

Искомое уравнение, по всей вероятности, должно иметь вид:

$$\varkappa\Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}, \tag{11}$$

где $\varkappa$ — постоянная, $\Gamma_{\mu\nu}$ — контравариантный тензор второго ранга, образованный из производных фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$.

В соответствии с законом Ньютона — Пуассона представляется разумным потребовать, чтобы эти уравнения (11) были уравнениями *второго* порядка. Однако следует возразить, что это предположение не позволяет найти дифференциальное выражение, являющееся обобщением $\Delta\varphi$, которое было бы *тензором*[10] по отношению к *произвольным* преобразованиям. Априори нельзя утверждать, что окончательные точные уравнения гравитации не могут содержать производных выше второго порядка. Поэтому все еще существует возможность, что окончательные точные дифференциальные уравнения гравитации могут быть ковариантными относительно произвольных преобразований. Однако при современном состоянии наших знаний о физических свойствах гравитационного поля обсуждение подобных возможностей было бы преждевременным. Поэтому мы вынуждены ограничиться уравнениями второго порядка и, следовательно, отказаться от поисков уравнений гравитации, ковариантных относительно произвольных преобразований. Необходимо впрочем подчеркнуть, что у нас нет никаких оснований для общей ковариантности уравнений гравитации[11].

Скалярный лапласиан $\Delta\varphi$ получается из скаляра φ посредством применения последовательных операций градиента и дивергенции. Обе операции можно обобщить так, что они могут применяться к каждому тензору как угодно высокого ранга, допуская при этом произвольные замены основных переменных[12]. Однако эти операции вырождаются, если их проделать над фундаментальным тензором $g_{\mu\nu}$[13]. Отсюда, по-видимому, следует, что искомые уравнения должны быть ковариантными относительно только одной определенной пока неизвестной нам группы преобразований.

Обращаясь к прежней теории относительности, естественно предположить при этих обстоятельствах, что в искомую группу преобразований должны входить линейные преобразования. Следовательно, мы требуем, чтобы величины $\Gamma_{\mu\nu}$ составляли тензор относительно произвольных линейных преобразований.

Выполнив преобразование, легко доказать следующие теоремы.

1. Если $\Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ есть контравариантный тензор ранга n относительно линейных преобразований, то величина

$$\sum_{\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}}{\partial x_{\mu}}$$

есть контравариантный тензор ранга $n+1$ относительно линейных преобразований (расширение)[14].

---

[10] Ср. часть II, § 4, пункт 2.

[11] См. также соображения, приведенные в начале § 6. (См. также стр. 265—*Ред.*)

[12] Ср. часть II, § 2.

[13] См. примечание на стр. 253 (ч. II, § 2).

[14] $\gamma_{\mu\nu}$ есть контравариантный тензор, обратный $g_{\mu\nu}$ (см. часть II, § 1).

2. Если $\Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ есть контравариантный тензор ранга n относительно линейных преобразований, то

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}}{\partial x_{\lambda}}$$

есть контравариантный тензор ранга $n-1$ относительно линейных преобразований (дивергенция).

Выполняя над некоторым тензором обе операции поочередно, мы получаем тензор того же ранга, что и первоначальный (операция Δ, примененная к тензору). Применяя эти операции к фундаментальному тензору, получаем

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right). \tag{a}$$

Следующее рассуждение показывает, что этот оператор является родственным оператору Лапласа. В обычной теории относительности (когда гравитационное поле отсутствует) следовало бы положить

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \qquad g_{44} = c^2, \qquad g_{\mu\nu} = 0 \text{ для } \mu \neq \nu;$$

следовательно,

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -1, \qquad \gamma_{44} = \frac{1}{c^2}, \; \gamma_{\mu\nu} = 0 \text{ для } \mu \neq \nu.$$

Если же имеется достаточно слабое гравитационное поле, т. е. если $g_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$ отличаются от этих значений на бесконечно малую величину, то, пренебрегая членами второго порядка, вместо выражения (а) получаем

$$-\left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_4^2} \right).$$

Если поле статическое и переменной является только величина g_{44}, то мы приходим к случаю ньютоновской теории гравитации, если положим, что полученное выражение с точностью до постоянного множителя отождествляется с величиной $\Gamma_{\mu\nu}$.

Поэтому можно считать, что выражение (а) с точностью до постоянного множителя и есть искомое обобщение $\Delta\varphi$. Однако это было бы ошибкой, ибо при таком обобщении в подобное выражение могли бы войти члены, сами являющиеся тензорами и обращающиеся в нуль в результате сделанных допущений. Это относится к тем случаям, когда две первые производные $g_{\mu\nu}$ или $\gamma_{\mu\nu}$ умножаются друг на друга. Так, например,

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \cdot \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}$$

есть ковариантный тензор второго ранга (относительно линейных преобразований); он становится величиной, бесконечно малой второго порядка, когда $g_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$ отличаются от постоянных лишь на бесконечно малые величины первого порядка. Поэтому необходимо допустить, что в $\Gamma_{\mu\nu}$ наряду с (а) входят еще другие члены, для которых пока должно выполняться только одно условие, а именно: они все вместе должны иметь тензорный характер относительно линейных преобразований.

Для отыскания этих членов обратимся к закону сохранения энергии-импульса. Для пояснения применяемого метода продемонстрируем его сначала на общеизвестном примере.

В электростатике $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\rho$ есть ν-я компонента импульса, передаваемого единичному объему вещества, если φ означает электростатический потенциал, а ρ — плотность заряда. Для φ ищется дифференциальное уравнение, которое всегда удовлетворяет закону сохранения импульса. Известно, что решением задачи служит уравнение

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu^2} = -\rho.$$

Выполнение закона сохранения импульса доказывается тождеством

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\frac{1}{2}\sum_\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\sum_\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2}\left(= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\cdot\rho\right).$$

Итак, если импульс сохраняется, то для каждого ν должно существовать тождество следующей структуры: в правой части стоит произведение $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$ на левую часть дифференциального уравнения, в левой части — сумма производных.

Если бы дифференциальное уравнение для φ еще не было известно, то задача его получения свелась бы к нахождению этого тождества. Для нас существенно только то, что это тождество можно вывести, зная один из входящих в него членов. Необходимо лишь повторно применять правило дифференцирования произведения

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_\nu}v + \frac{\partial v}{\partial x_\nu}u$$

и

$$u\frac{\partial v}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(uv) - \frac{\partial u}{\partial x_\nu}v,$$

а затем переносить производные в левую часть, остальные члены в правую часть. Например, если исходить из первого члена написанного выше тождейства, то поочередно получим:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) = \sum_{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2} + \sum_{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu \partial x_\mu} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\sum_{\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\right)^2\right\},$$

откуда после перегруппировки следует указанное тождество.

Вернемся теперь к нашей задаче. Из соотношения (10) следует, что

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Theta_{\mu\nu} \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

есть импульс (или энергия), передаваемый гравитационным полем единице объема вещества. Чтобы выполнялся закон сохранения энергии-импульса, необходимо так выбрать дифференциальные выражения $\Gamma_{\mu\nu}$, входящие в уравнения гравитации

$$\varkappa\Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu},$$

чтобы сумму

$$\frac{1}{2\varkappa}\sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Gamma_{\mu\nu}$$

можно было преобразовать в сумму производных. В то же время известно, что в искомое уравнение для $\Gamma_{\mu\nu}$ входит член (a).

Следовательно, искомое тождество имеет вид

$$\text{Сумма производных} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) + \right.$$

$$\left. + \text{другие члены, обращающиеся в нуль в первом приближении}\right\}.$$

Тем самым искомое тождество определяется однозначно; образуя его указанным выше способом, получаем

$$\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right) =$$

$$= \sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) - \sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\beta}g_{\tau\rho}\frac{\partial \gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \gamma_{\nu\rho}}{\partial x_\beta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right\}. \qquad (12)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части, и есть искомый тензор, входящий в уравнения гравитации

$$\varkappa\Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}.$$

Для лучшего обозрения этих уравнений введем следующее сокращенное обозначение:

$$-2\varkappa\vartheta_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\tau\rho}\left(\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right).$$

Назовем $\vartheta_{\mu\nu}$ «*контравариантным тензором энергии-натяжений гравитационного поля*». Взаимный ему ковариантный тензор обозначим через $t_{\mu\nu}$:

$$-2\varkappa t_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\tau\rho}\left(\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right). \tag{14}$$

Для операций дифференцирования, выполняемых над фундаментальными тензорами $\gamma_{\mu\nu}$ или $g_{\mu\nu}$, введем следующие обозначения:

$$\Delta_{\mu\nu}(\gamma) = \sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) - \sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\beta}g_{\tau\rho}\frac{\partial\gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\nu\rho}}{\partial x_\beta} \tag{15}$$

и

$$D_{\mu\nu}(g) = \sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) - \sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\tau\rho}\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\beta}. \tag{16}$$

Каждый из этих операторов порождает тензор того же ранга (относительно линейных преобразований).

С этими сокращенными обозначениями тождество (12) принимает вид

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}\cdot\varkappa\vartheta_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\{-\Delta_{\mu\nu}(\gamma) + \varkappa\vartheta_{\mu\nu}\} \tag{12а}$$

или также

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\mu\nu}\cdot\varkappa t_{\mu\sigma}\} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\{-D_{\mu\nu}(g) - \varkappa t_{\mu\nu}\}. \tag{12б}$$

Написав соотношения (10) и (12а) соответственно для вещества и для гравитационного поля в виде

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}\cdot\Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\Theta_{\mu\nu} = 0, \tag{10}$$

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}\cdot\vartheta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\mu}\cdot\vartheta_{\mu\nu} =$$

$$= -\frac{1}{2\varkappa}\cdot\sum\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\Delta_{\mu\nu}(\gamma), \tag{12в}$$

мы видим, что тензор $\vartheta_{\mu\nu}$ энергии-натяжений гравитационного поля входит в соотношение, выражающее закон сохранения для гравитационного поля, совершенно таким же образом, как и тензор $\Theta_{\mu\nu}$ материального процесса в соотношение закона сохранения для этого процесса. Это обстоятельство весьма примечательно, если учесть различие вывода этих уравнений.

Из соотношения (12а) следует выражение для дифференциального тензора, входящего в уравнение гравитации

$$\Gamma_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu}(\gamma) - \varkappa\vartheta_{\mu\nu}. \tag{17}$$

Следовательно, уравнения гравитации (11) принимают вид

$$\Delta_{\mu\nu}(\gamma) = \varkappa(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu}). \tag{18}$$

Эти уравнения удовлетворяют требованию, по нашему мнению, обязательному для релятивистской теории гравитации; именно, они показывают, что тензор гравитационного поля $\vartheta_{\mu\nu}$ является источником поля наравне с тензором материальных систем $\Theta_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям.

Складывая соотношения (10) и (12а) и принимая во внимание уравнение (18), находим

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \{\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu})\} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{19}$$

Отсюда видно, что соотношения для законов сохранения справедливы для вещества и гравитационного поля вместе взятых.

Выше мы отдавали предпочтение контравариантным тензорам, поскольку контравариантный тензор энергии-натяжений для движения несвязанных масс выражается особенно просто. Однако полученные уравнения можно столь же просто выразить и через ковариантные тензоры. В этом случае вместо $\Theta_{\mu\nu}$ мы должны взять в качестве тензора энергии-натяжений для материального процесса $T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}\, \Theta_{\alpha\beta}$.

Вместо соотношения (10) почленным преобразованием получим

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\mu\nu} T_{\mu\sigma}) + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot T_{\mu\nu} = 0. \tag{20}$$

Из этого соотношения и равенства (16) следует, что уравнения гравитационного поля можно записать также в виде

$$-D_{\mu\nu}(g) = \varkappa(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}); \tag{21}$$

это можно получить и непосредственно из уравнений (18). Аналогом равенства (19) является соотношение

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \{\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\mu\nu}\,(T_{\sigma\nu}+t_{\sigma\nu})\} = 0. \tag{22}$$

§ 6. Влияние гравитационного поля на физические, в частности на электромагнитные, процессы

Поскольку во всех физических процессах большую роль играют импульс и энергия, которые определяют гравитационное поле и на которые это поле в свою очередь воздействует, величины $g_{\mu\nu}$, определяющие поле тяжести, должны входить во все физические уравнения. Мы уже видели, что движение материальной точки описывается уравнением

$$\delta\left\{\int ds\right\} = 0,$$

причем

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}.$$

Интервал ds является инвариантом по отношению к произвольным преобразованиям. Искомые уравнения, определяющие ход того или иного физического процесса, должны быть построены так, чтобы из инвариантности ds следовала ковариантность соответствующей системы уравнений.

Однако при попытке выполнить эту общую задачу мы наталкиваемся на принципиальную трудность. Мы не знаем, относительно какой группы преобразований должны быть ковариантны искомые уравнения. Сначала наиболее естественным кажется требование ковариантности системы уравнений относительно *произвольных* преобразований. Однако такому требованию противоречит тот факт, что построенные нами уравнения гравитационного поля этим свойством не обладают. Мы смогли показать, что уравнения гравитационного поля ковариантны лишь относительно произвольных *линейных* преобразований; однако мы не знаем, существует ли общая группа преобразований, относительно которой ковариантны эти уравнения. Вопрос о существовании такой группы преобразований для системы уравнений (18) или (21) имеет важнейшее значение для рассматриваемой здесь задачи. Во всяком случае при современном состоянии теории мы не можем требовать ковариантности уравнений относительно произвольных преобразований.

Однако в то же время мы видели, что для материальных процессов можно составить уравнение баланса энергии-импульса [§ 4, состношение

10)], которое допускает произвольные преобразования. Поэтому все же естественно предположить, что все физические уравнения, за исключением уравнений гравитационного поля, следует сформулировать так, чтобы они были ковариантны относительно произвольных преобразований. Такое исключительное положение уравнений гравитационного поля связано, по нашему мнению, с тем, что они могут содержать лишь первые две производные от составляющих фундаментального тензора.

Для составления упомянутых систем уравнений требуется вспомогательный аппарат — обобщенный векторный анализ в том виде, в каком он излагается в части II настоящей работы.

Мы ограничимся пока тем, что укажем, как этим способом получить уравнения электромагнитного поля в вакууме [15]. Мы исходим из того, что электрический заряд следует рассматривать как нечто неизменное. Пусть произвольно движущееся тело, с бесконечно малой массой, имеет заряд e и объем dV_0 (покоящийся объем) в системе, движущейся вместе с телом. Определим истинную плотность электрического заряда как $e/dV_0 = \rho_0$; по определению она является скаляром. Поэтому

$$\rho_0 \frac{dx_\nu}{ds} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

есть контравариантный 4-вектор, который мы сейчас преобразуем, определив плотность электрического заряда ρ в данной координатной системе равенством

$$\rho_0 dV_0 = \rho dV.$$

Воспользовавшись соотношением из § 4

$$dV_0 ds = \sqrt{-g} \cdot dV \cdot dt,$$

получим

$$\rho_0 \frac{dx_\nu}{ds} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \rho \frac{dx_\nu}{dt},$$

т. е. контравариантный вектор плотности электрического тока.

Электромагнитное поле мы сведем к контравариантному тензору второго ранга $\varphi_{\mu\nu}$ специального вида (6-вектору) и образуем «дуальный» контравариантный тензор второго ранга $\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu}$ по методу, изложенному в § 3 части II [формула (42)]. Дивергенция этого контравариантного тен-

[15] См. в связи с этим также стр. 23 (§ 3) работы Коттлера. [K o t t l e r. Über die Raumzeitlinien der minkowskischen Welt. Wien. Berlin, 1912, **121**].

зора второго ранга, согласно формуле (40) § 3 части II, есть

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\cdot\varphi^*_{\mu\nu}).$$

Обобщением уравнений Максвелла — Лоренца будут уравнения

$$\sum_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\cdot\varphi_{\mu\nu})=\rho\frac{\partial x_\mu}{dt}, \tag{23}$$

$$\sum_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\cdot\varphi^*_{\mu\nu})=0, \tag{24}$$

($dt=dx_4$), ковариантность которых очевидна. Если ввести обозначения

$$\sqrt{-g}\cdot\varphi_{23}=\mathfrak{H}_x,\qquad \sqrt{-g}\cdot\varphi_{31}=\mathfrak{H}_y,\qquad \sqrt{-g}\cdot\varphi_{12}=\mathfrak{H}_z,$$
$$\sqrt{-g}\cdot\varphi_{14}=-\mathfrak{E}_x,\quad \sqrt{-g}\cdot\varphi_{24}=-\mathfrak{E}_y,\quad \sqrt{-g}\cdot\varphi_{34}=-\mathfrak{E}_z,$$

и

$$\rho\frac{dx_\mu}{dt}=u_\mu,$$

то система уравнений (23) в более подробной записи примет вид

$$\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial t}=u_x,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial z}=\rho.$$

Эти уравнения с точностью до выбора единиц совпадают с первой группой уравнений Максвелла. Для получения второй группы уравнений Максвелла необходимо сначала принять во внимание, что к составляющим

$$\mathfrak{H}_x,\ \mathfrak{H}_y,\ \mathfrak{H}_z,\ -\mathfrak{E}_x,\ -\mathfrak{E}_y,\ -\mathfrak{E}_z$$

тензора $\sqrt{-g}\cdot\varphi_{\mu\nu}$ принадлежат компоненты дополнения $f_{\mu\nu}$ [часть II, § 3, формулы (41а)]

$$-\mathfrak{E}_x,\ -\mathfrak{E}_y,\ -\mathfrak{E}_z,\ \mathfrak{H}_x,\ \mathfrak{H}_y,\ \mathfrak{H}_z.$$

В отсутствие гравитационного поля отсюда получается вторая группа, т. е. уравнение (24) может быть записано в виде

$$-\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z}=0.$$

Тем самым показано, что полученные выше уравнения обобщают уравнения обычной теории относительности.

§ 7. Можно ли свести гравитационное поле к скаляру?

Ввиду бесспорной сложности изложенной выше теории гравитации необходимо со всей серьезностью поставить вопрос о том, является ли разумной и оправданной только та точка зрения, которая высказывалась до настоящего времени и согласно которой гравитационное поле сводится к скаляру. Кратко разъясним причины, почему ответ на этот вопрос должен быть, по-видимому, отрицательным [16].

Для сведе́ния гравитационного поля к скаляру необходимо следовать по пути, совершенно аналогичному тому, которому мы следовали выше. В качестве уравнения движения материальной точки в форме Гамильтона следует взять

$$\delta\left\{\int \Phi ds\right\}=0,$$

где ds — четырехмерный элемент длины в обычной теории относительности и Φ — скаляр, а затем следует продвигаться дальше в полной аналогии с вышеизложенным, но не выходя за пределы обычной теории относительности.

Любой материальный процесс и в этом случае характеризуется тензором энергии-натяжений $T_{\mu\nu}$. Однако при этом взаимодействие между гравитационным полем и материальной системой определяется скаляром. Этот скаляр, как указал Лауэ, может быть только следующим

$$\sum_\mu T_{\mu\mu}=P,$$

[16] Ср., однако, стр. 265 и последующую работу (статья 23), где в § 3 Эйнштейн приходит к противоположному выводу.— *Прим. ред.*

который мы будем называть «скаляром Лауэ» [17]. В этом случае можно до известной степени оправдать закон эквивалентности инертной и тяжелой масс. Лауэ обратил внимание на то, что для замкнутой системы выполняется равенство

$$\int P dV = \int T_{44} d\tau.$$

Отсюда видно, что согласно этой точке зрения тяготение в замкнутой системе определяется ее полной энергией.

Однако тяготение незамкнутой системы зависело бы от натяжений T_{11} и т. д., которым подвержена система. Отсюда возникают следствия, которые, как будет показано на примере излучения в полости, представляются нам неприемлемыми.

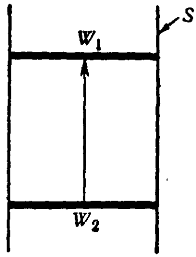

Рис. 1.

Для излучения в вакууме скаляр P, как известно, равен нулю. Если излучение заключено в невесомый зеркальный ящик, то стенки ящика испытывают напряжения растяжения; вся система как целое обладает тяжелой массой $\int P d\tau$ и соответствующей энергией E.

Теперь представим себе, что излучение находится не в полом ящике, а что оно ограничено: 1) неподвижными зеркальными стенками закрепленной шахты S, 2) двумя зеркальными стенками W_1 и W_2, которые могут двигаться в вертикальном направлении. В этом случае тяжелая масса $\int P d\tau$ подвижной системы составляет только одну треть значения, которое она принимает в случае ящика, могущего двигаться как целое. Тогда, если подымать ящик с излучением против гравитационного поля, то в этом случае пришлось бы затратить только одну треть работы от той, которая затрачивалась в только что рассмотренном случае, когда излучение заперто в ящике. Это представляется нам неприемлемым.

Однако с моей точки зрения самое действенное возражение против подобной теории основано на убеждении, что относительность справедлива не только для ортогональных линейных преобразований, но и для значительно более широкой группы преобразований. Однако мы не можем считать это возражение решающим хотя бы потому, что нам не удалось отыскать (наиболее общую) группу преобразований, связанную с нашими уравнениями гравитации.

[17] См. последнюю формулу в § 1 части II.

II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ [18]

Математический аппарат для построения векторного анализа гравитационного поля, характеризуемого инвариантным элементом длины

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu,$$

по существу заложен в фундаментальной работе Кристоффеля[19] о преобразовании квадратичных дифференциальных форм. Исходя из результатов Кристоффеля, Риччи и Леви-Чивита[20] развили свой метод абсолютного, т. е. независимого от координатной системы, дифференциального исчисления, который позволяет придать инвариантную форму дифференциальным уравнением математической физики. Поскольку же векторный анализ для произвольных криволинейных координат в эвклидовом пространстве формально тождествен векторному анализу в произвольном многообразии, заданном своим линейным элементом, то на упомянутую общую теорию Эйнштейна без труда распространяются понятия векторного анализа, разработанные в последние годы Минковским, Зоммерфельдом, Лауэ и другими для специальной теории относительности.

Получаемый таким путем обобщенный векторный анализ при некотором навыке оказывается столь же простым, как и в частном случае трех- или четырехмерного эвклидова пространства; дело в том, что бóльшая общность придает ему ясность, которой порой лишены частные случаи.

Теория специальных тензоров (§ 3) подробно рассмотрена в статье Коттлера [21], появившейся во время выполнения настоящей работы и основанной на теории интегральных форм.

Поскольку с теорией гравитации Эйнштейна, в особенности же с проблемой дифференциальных уравнений гравитационного поля, неизбежно связаны обширные математические изыскания, то систематическое изложение обобщенного векторного анализа представляется вполне уместным. При этом мы намеренно отказываемся от геометрических иллюстраций, так как, по нашему мнению, они мало что дают для наглядности логических построений векторного анализа.

---

[18] Эта часть работы написана Марселем Гроссманом.— *Прим. ред.*

[19] Christoffel. Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. J. Math., 1869, **70**, 46.

[20] Ricci, Levi-Civita. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Math. Ann., 1901, **54**, 125.

[21] Kottler. Über die Raumzeitlinien der minkowskischen Welt. Wien, Berlin, 1912, **121**.

§ 1. Общие тензоры

Пусть

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1}$$

есть квадрат линейного элемента, который рассматривается как инвариантная мера расстояния между двумя бесконечно близкими точками пространства-времени. Последующие выводы (если нет специальных оговорок) не зависят от числа переменных; последнее обозначим через n.

При преобразовании переменных

$$x_i = x_i(x_1', x_2', \ldots x_n') \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

или их дифференциалов

$$dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial x_k'} dx_k' = \sum_k p_{ik} dx_k' \tag{3}$$

$$dx_i' = \sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} dx_k = \sum_k \pi_{ik} dx_k$$

коэффициенты линейного элемента преобразуются по формулам

$$g_{rs}' = \sum_{\mu\nu} p_{\mu r} p_{\nu s} g_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Пусть g есть дискриминант дифференциальной формы (1), т. е. определитель

$$g = |\, g_{\mu\nu} \,|.$$

Если обозначить через $\gamma_{\mu\nu}$ деленный на дискриминант («нормированный») минор g, сопряженный элементу $g_{\mu\nu}$, то эти величины $\gamma_{\mu\nu}$ преобразуются по формулам

$$\gamma_{rs}' = \sum_{\mu\nu} \pi_{\mu r} \pi_{\nu s} \gamma_{\mu\nu}. \tag{5}$$

Теперь введем следующие определения.

I. *Совокупность функций $T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}$ от переменных x называется ковариантным тензором ранга λ, если эти функции преобразуются по формулам*

$$T'_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots r_\lambda} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \ldots p_{i_\lambda r_\lambda} \Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}. \tag{6}$$

II. *Совокупность функций* $\Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}$ *от переменных* x *называется контравариантным тензором ранга* λ, *если эти функции преобразуются по формулам*[22]

$$\Theta'_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \pi_{i_1 r_1} \pi_{i_2 r_2} \ldots \pi_{i_\lambda r_\lambda} \Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}. \tag{7}$$

III. *Совокупность функций* $\mathfrak{T}_{i_1 i_2 \ldots i_\mu | k_1 k_2 \ldots k_\mu}$ *от переменных* x *называется смешанным тензором, ковариантным ранга* μ, *контравариантным ранга* ν, *если эти функции преобразуются по формулам*

$$\mathfrak{T}'_{r_1 r_2 \ldots r_\mu | s_1 s_2 \ldots s_\nu} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_\mu \\ k_1 k_2 \ldots k_\nu}} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \ldots p_{i_\mu r_\mu} \cdot \pi_{k_1 s_1} \pi_{k_2 s_2} \ldots \pi_{k_\nu s_\nu} \cdot \mathfrak{T}_{i_1 i_2 \ldots i_\mu | k_1 k_2 \ldots k_\nu}. \tag{8}$$

Из определений и формул преобразований (4) и (5) следует:

величины $g_{\mu\nu}$ образуют ковариантный, а величины $\gamma_{\mu\nu}$ — контравариантный тензор второго ранга; при $n = 4$ они образуют фундаментальные тензоры гравитационного поля.

Величины dx_i, преобразующиеся согласно формулам (3), образуют контравариантный тензор первого ранга. Тензоры первого ранга называются также векторами первого рода или 4-векторами при $n = 4$.

Непосредственно из определения тензоров получаются следующие алгебраические тензорные операции:

1. Сумма двух однородных тензоров ранга λ есть также однородный тензор ранга λ, составляющие которого получаются сложением соответствующих компонент обоих тензоров.

2. Внешнее произведение двух ковариантных (контравариантных) тензоров ранга λ или μ есть ковариантный (контравариантный) тензор ранга $\lambda + \mu$ с компонентами

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda k_1 k_2 \ldots k_\mu} = A_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} B_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} \tag{9}$$

или

$$\Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda k_1 k_2 \ldots k_\mu} = \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \Psi_{k_1 k_2 \ldots k_\mu}. \tag{9'}$$

[22] Таким образом, наши ковариантные (контравариантные) тензоры ранга λ тождественны «ковариантным (контравариантным) системам порядка λ» Риччи и Леви-Чивиты, которые обозначаются этими авторами $x_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$ или $x^{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$. Хотя эти обозначения имеют большие преимущества, мы все же оказались вынужденными, ввиду сложности составляемых уравнений, выбрать свои обозначения, а именно: обозначать ковариантные тензоры латинскими, контравариантные — греческими, смешанные — готическими буквами. Ковариантные и контравариантные тензоры представляют собой частные случаи смешанных тензоров.

3. Внутренним произведением двух тензоров мы назовем
а) ковариантный тензор

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} \Phi_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} \cdot A_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda k_1 k_2 \ldots k_\mu}, \tag{10}$$

б) контравариантный тензор

$$\Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} A_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} \cdot \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda k_1 k_2 \ldots k_\mu}, \tag{11}$$

в) смешанный тензор

$$\mathfrak{T}_{r_1 r_2 \ldots r_\mu | s_1 s_2 \ldots s_\nu} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda} A_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda r_1 r_2 \ldots r_\mu} \Phi_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda s_1 s_2 \ldots s_\nu}, \tag{12}$$

или
г) более общий случай тензора, охватывающий все случаи «а» — «в»

$$\mathfrak{T}_{r_1 r_2 \ldots r_\mu u_1 u_2 \ldots u_\alpha | s_1 s_2 \ldots s_\nu v_1 v_2 \ldots v_\beta} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda} \mathfrak{A}_{r_1 r_2 \ldots r_\mu | k_1 k_2 \ldots k_\lambda v_1 v_2 \ldots v_\beta} \times$$
$$\times \mathfrak{B}_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda u_1 u_2 \ldots u_\alpha | s_1 s_2 \ldots s_\nu}.$$

Термины «внешнее и внутреннее произведение», взятые из обычного векторного анализа, оправдываются тем, что операции векторного анализа являются частными случаями операций, рассмотренных выше.

Если в случаях «а» или «б» ранг λ равен нулю, то внутреннее произведение будет скаляром.

4. Взаимность ковариантного и контравариантного тензора. Образуем из ковариантного тензора ранга λ обратный контравариантный тензор ранга λ посредством λ-кратного внутреннего умножения на контравариантный фундаментальный тензор

$$\Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda} \gamma_{i_1 k_1} \gamma_{i_2 k_2} \ldots \gamma_{i_\lambda k_\lambda} T_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda}. \tag{13}$$

Отсюда следует

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda} g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} \ldots g_{i_\lambda k_\lambda} \Theta_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda}. \tag{14}$$

Следовательно, из тензора можно образовать скаляр, умножая его на обратный тензор по формуле

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \cdot \Theta_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}. \tag{15}$$

Ковариантный (контравариантный) тензор первого ранга (4-вектор при $n = 4$) имеет инвариант

$$\sum_{ik} \gamma_{ik} T_i T_k$$

или

$$\sum_{ik} g_{ik} \Theta_i \Theta_k.$$

В обычной теории относительности контравариантность и ковариантность тождественны, и этот инвариант равен квадрату длины 4-вектора

$$T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + T_t^2.$$

Ковариантный (контравариантный) тензор второго ранга имеет инвариант

$$\sum_{ik} \gamma_{ik} T_{ik}$$

или

$$\sum_{ik} g_{ik} \Theta_{ik},$$

который в случае обычной теории относительности имеет вид [23]

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{tt}.$$

§ 2. Дифференциальные операции над тензорами

Введем следующие общие определения.

I. Расширением ковариантного (контравариантного) тензора ранга λ называется ковариантный (контравариантный) тензор ранга $\lambda + 1$, получаемый из первоначального тензора «ковариантным (контравариантным) дифференцированием».

Согласно Кристоффелю,

$$T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda s} = \frac{\partial T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}}{\partial x_s} - \sum_k \left(\begin{Bmatrix} r_1 s \\ k \end{Bmatrix} T_{k r_2 \ldots r_\lambda} + \right.$$
$$\left. + \begin{Bmatrix} r_2 s \\ k \end{Bmatrix} T_{r_1 k \ldots r_\lambda} + \ldots + \begin{Bmatrix} r_\lambda s \\ k \end{Bmatrix} T_{r_1 r_2 \ldots k} \right) \qquad (16)$$

---

[23] В дальнейшем мы не будем указывать, какой вид принимают наши формулы в случае обычной теории относительности, и лишь сошлемся на работы 4—6.

есть ковариантный тензор ранга $\lambda + 1$, производимый из тензора ранга λ. Риччи и Леви-Чивита называют дифференциальную операцию в правой части «ковариантным дифференцированием» тензора $T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$. При этом введены обозначения

$$\left\{ \begin{matrix} rs \\ u \end{matrix} \right\} = \sum_t \gamma_{ut} \left[\begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right], \tag{17}$$

$$\left[\begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{st}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_t} \right). \tag{18}$$

Здесь $\left[\begin{smallmatrix} rs \\ t \end{smallmatrix} \right]$ и $\left\{ \begin{smallmatrix} rs \\ u \end{smallmatrix} \right\}$ представляют собой трехзначковые символы Кристоффеля первого или второго рода соответственно; обращая соотношение (17), находим [24]

$$\left[\begin{matrix} rs \\ u \end{matrix} \right] = \sum_t g_{ut} \left\{ \begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right\}. \tag{19}$$

Вводя в соотношение (16) вместо ковариантных тензоров взаимные им контравариантные тензоры, получаем «контравариантное расширение»

$$\Theta_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda s} = \sum_{ik} \gamma_{si} \left(\frac{\partial \Theta_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}}{\partial x_i} \right) + \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \Theta_{k r_2 \ldots r_\lambda} + \left\{ \begin{matrix} ik \\ r_2 \end{matrix} \right\} \Theta_{r_1 k \ldots r_\lambda} + \ldots + \left\{ \begin{matrix} ik \\ r_\lambda \end{matrix} \right\} \Theta_{r_1 r_2 \ldots k}. \tag{20}$$

II. Дивергенцией ковариантного (контравариантного) тензора ранга λ будем называть ковариантный (контравариантный) тензор ранга $\lambda - 1$, получаемый внутренним умножением расширения на контравариантный (ковариантный) фундаментальный тензор. Следовательно, дивергенцией ковариантного тензора $T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$ будет тензор

$$T_{r_2 r_3 \ldots r_\lambda} = \sum_{s r_1} \cdot \gamma_{s r_1} T_{r_1 \ldots r_\lambda s}, \tag{21}$$

а дивергенцией контравариантного тензора $\Theta_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$ — тензор

$$\Theta_{r_2 r_3 \ldots r_\lambda} = \sum_{s r_1} g_{s r_1} \Theta_{r_1 \ldots r_\lambda s}. \tag{22}$$

---

[24] На основании этих формул легко показать, что расширение фундаментального тензора тождественно равно нулю.

Дивергенция тензора неоднозначна; в общем случае результат меняется, если в соотношениях (21) и (22) индекс r_1 заменять индексами r_2, r_3,... r_λ.

III. Обобщенной операцией Лапласа, в применении к тензору, будем называть последовательность операций расширения и дивергенции. Поэтому обобщенная операция Лапласа позволяет получить из тензора однородный тензор того же ранга.

Особый интерес представляют случаи $\lambda = 0, 1, 2$.

a) $\lambda = 0$.

Исходный тензор есть скаляр T, который можно рассматривать как ковариантный или контравариантный тензор нулевого ранга.

Тензор

$$T_r = \frac{\partial T}{\partial x_r} \tag{23}$$

есть ковариантное расширение скаляра T, т. е. ковариантный тензор первого ранга (для $n = 4$ ковариантный 4-вектор), называемый градиентом скаляра. Инвариант

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial T}{\partial x_r} \frac{\partial T}{\partial x_s} \tag{24}$$

есть первый дифференциальный параметр Бельтрами скаляра T.

Для образования дивергенции градиента необходимо из его расширения

$$T_{rs} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_k \begin{Bmatrix} rs \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

образовать скаляр

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs},$$

которому можно придать вид [25]

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\sqrt{g}\,\gamma_{rs}\frac{\partial T}{\partial x_r}\right). \tag{25}$$

Дивергенция градиента является результатом применения обобщенного оператора Лапласа, применяемого к скаляру T, и тождественно совпадает со вторым дифференциальным параметром Бельтрами скаляра T.

---

[25] См., например, цитированную выше работу Коттлера, а также вычисление дивергенции 4-вектора в случае «б».

б) $\lambda = 1$.

Пусть исходным тензором будет ковариантный 4-вектор, хотя с таким же успехом можно взять и контравариантный тензор.

Согласно соотношению (16), ковариантным расширением будет

$$T_{rs} = \frac{\partial T_r}{\partial x_s} - \sum_k \left\{ {rs \atop k} \right\} T_k. \tag{26}$$

Дивергенция определяется выражением

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \sum_{rsk} \gamma_{rs} \left(\frac{\partial T_r}{\partial x_s} - \left\{ {rs \atop k} \right\} T_k \right), \tag{27}$$

которому в соответствии с (17) мы придадим вид:

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \sum_{rskl} \left[\frac{\partial}{\partial x_s} (\gamma_{rs} T_r) - \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_s} \cdot T_r - \frac{1}{2} \gamma_{rs} \gamma_{kl} \left(\frac{\partial g_{rl}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_l} \right) T_k \right]. \tag{28}$$

Если исключить $\dfrac{\partial \gamma_{rs}}{dx_s}$ с помощью формулы [26]

$$\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_t} = -\sum_{\rho\sigma} \gamma_{r\rho} \gamma_{s\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_t}, \tag{29}$$

то в равенстве (28) три средних члена под знаком суммы сократятся, и, кроме первого члена, останется

$$\sum_{rskl} \frac{1}{2} \gamma_{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_l} \cdot \gamma_{kl} T_k = \sum_{kl} \gamma_{kl} T_k \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_l},$$

---

[26] Эта формула, которую мы применяем также в § 4 при составлении дифференциальных уравнений гравитационного поля, доказывается следующим образом. Имеем

$$\sum_l g_{il} \gamma_{kl} = \delta_{ik} \text{ (0 или 1)}.$$

Следовательно,

$$\sum_l g_{il} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_t} = -\sum_l \gamma_{kl} \cdot \frac{\partial g_{il}}{\partial x_t},$$

где t — одно из чисел 1,2.

Для определенного k, таким образом, получается n уравнений ($i = 1, 2, \ldots n$) с n неизвестными $\dfrac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_t}$ ($l = 1, 2, \ldots n$), решение которых дает формулу (29) в тексте.

так что для дивергенции ковариантного 4-вектора[27] получим

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} (\sqrt{g}\, \gamma_{rs} T_r). \tag{30}$$

в) $\lambda = 2$.

Пусть исходным тензором будет контравариантный тензор второго ранга Θ_{rs}, расширение которого по формуле (20) имеет вид

$$\Theta_{rst} = \sum_{ik} \gamma_{ti} \left(\frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_i} + \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} \Theta_{ks} + \begin{Bmatrix} ik \\ s \end{Bmatrix} \Theta_{rk} \right). \tag{31}$$

Отсюда в качестве дивергенции контравариантного тензора Θ_{rs} получается либо дивергенция по строкам

$$\Theta_r = \sum_{st} g_{st} \Theta_{rst} = \sum_{sk} \left(\frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_s} + \begin{Bmatrix} sk \\ r \end{Bmatrix} \Theta_{ks} + \begin{Bmatrix} sk \\ s \end{Bmatrix} \Theta_{rk} \right), \tag{32}$$

либо дивергенция по столбцам

$$\Theta_s = \sum_{rt} g_{rt} \Theta_{rst} = \sum_{rk} \left(\frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_r} + \begin{Bmatrix} rk \\ r \end{Bmatrix} \Theta_{ks} + \begin{Bmatrix} rk \\ s \end{Bmatrix} \Theta_{rk} \right). \tag{33}$$

Эти две дифференциальные операции для симметричных тензоров совпадают. Поскольку

$$\sum_r \begin{Bmatrix} rk \\ r \end{Bmatrix} = \sum_{rs} \gamma_{rs} \begin{bmatrix} rk \\ s \end{bmatrix} = \sum_{rs} \frac{1}{2} \gamma_{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_k}, \tag{34}$$

то формулу (33) можно также переписать в виде

$$\Theta_s = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} (\sqrt{g} \cdot \Theta_{rs}) + \sum_{rk} \begin{Bmatrix} rk \\ s \end{Bmatrix} \Theta_{rk}. \tag{35}$$

§ 3. Специальные тензоры (векторы)

Ковариантный (контравариантный) тензор называется специальным [28], если его компоненты образуют систему альтернирующих функций основных переменных.

В соответствии с этим компоненты специального тензора подчиняются условиям:

---

[27] К такому же результату пришел Коттлер (см. цитированную выше работу), который исходил из специального тензора третьего ранга (ср. ниже с § 4) и применил теорию интегральных форм.

[28] По современной терминологии — полностью антисимметричным.— *Прим. ред.*

1. $T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = 0$, если какие-нибудь два из индексов равны между собой.

2. Если индексы $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ и $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ отличаются только порядком, то $T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = \pm T_{s_1 s_2 \ldots s_\lambda}$ в зависимости от того, принадлежат $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ и $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ одному классу перестановок или нет. Как известно, две перестановки принадлежат одному классу, если они обе получаются из основной перестановки $1, 2 \ldots n$ четным или нечетным числом перестановок двух индексов.

Таким образом, число линейно независимых компонент специального тензора ранга λ равно $\binom{n}{\lambda}$.

В силу этих свойств теория специальных тензоров оказывается более простой, но в то же время и более содержательной, чем теория общих тензоров; особое значение она имеет для математической физики, так как теорию векторов ранга λ (4-, 6-векторов при $n = 4$) можно свести к теории специальных тензоров ранга λ. С точки зрения общей теории более целесообразно исходить из тензоров, а векторы рассматривать лишь как специальные тензоры.

Для векторного анализа n-мерного многообразия

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$$

важную роль играет тензор ранга n, связанный с дискриминантом линейного элемента [29]. Этот дискриминант преобразуется по уравнению

$$g' = p^2 g, \tag{36}$$

где

$$p = |\, p_{ik} \,| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \right|$$

есть функциональный определитель подстановки.

Если величине $\sqrt{g}$ приписать определенный знак в первоначальной системе отсчета и условиться о том, должен или не должен меняться этот знак в результате преобразования, в зависимости от чего определитель преобразования будет положительным или отрицательным, то соотношение

$$\sqrt{g'} = p\sqrt{g} \tag{37}$$

будет иметь точный смысл с учетом знака.

Пусть теперь $\delta_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ равняется нулю, если какие-нибудь два индекса равны друг другу, и ± 1, если все индексы различны и перестановка

[29] «Система ε» Риччи и Леви-Чивиты (см. цитированную выше работу этих авторов).

$r_1, r_2, \ldots r_n$ получается из основной перестановки $1, 2, \ldots n$ четным или нечетным числом перестановок двух индексов. Тогда величины

$$e_{r_1 r_2 \ldots} \sqrt{g} \tag{38}$$

будут компонентами специального ковариантного тензора ранга n, который мы назовем *ковариантным дискриминантным* тензором. Поскольку преобразование сначала дает

$$e'_{r_1 r_2 \ldots r_n} = \delta_{r_1 r_2 \ldots r_n} \cdot \sqrt{g'} = \delta_{r_1 r_2 \ldots r_n} \cdot p \sqrt{g},$$

где

$$p = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot p_{i_1 1} p_{i_2 2} \ldots p_{i_n n} = \delta_{r_1 r_2 \ldots r_n} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2}, \ldots p_{i_n r_n},$$

то отсюда следует

$$e'_{r_1 r_2 \ldots r_n} = \sqrt{g} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \ldots p_{i_n r_n},$$

или, в силу определения (38),

$$e'_{r_1 r_2 \ldots r_n} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} e_{i_1 i_2 \ldots i_n} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \ldots p_{i_n r_n}.$$

Для обратного контравариантного тензора в соответствии с (13) находим

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{r_1 r_2 \ldots r_n} \gamma_{i_1 r_1} \gamma_{i_2 r_2} \ldots \gamma_{i_n r_n} \cdot e_{r_1 r_2 \ldots r_n},$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sqrt{g} \cdot \sum_{r_1 r_2 \ldots r_n} \delta_{r_1 r_2 \ldots r_n} \cdot \gamma_{i_1 r_1} \gamma_{i_2 r_2} \ldots \gamma_{i_n r_n},$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot \sqrt{g} \cdot \sum_{r_1 r_2 \ldots r_n} \delta_{r_1 r_2 \ldots r_n} \gamma_{1 r_1} \gamma_{2 r_2} \ldots \gamma_{n r_n}.$$

Поскольку же определитель нормированного минора γ_{in} равен

$$|\gamma_{ik}| = \frac{1}{\sqrt{g}},$$

то

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}}{\sqrt{g}}. \tag{39}$$

Значение ковариантного (контравариантного) дискриминантного тензора заключается в том, что внутреннее умножение его на контравариантный (ковариантный) тензор ранга λ дает однородный тензор ранга $\lambda - n$, причем меняется тип тензора, если разность $\lambda - n$ отрицательна (дополнение к тензору).

Если

$$n = 4,$$

то существуют специальные тензоры вплоть до четвертого ранга, поскольку все специальные тензоры высших рангов тождественно обращаются в нуль.

Отличные от нуля составляющие специального ковариантного тензора четвертого ранга либо равны друг другу, либо противоположны по знаку. Дополнение (внутреннее произведение на контравариантный дискриминантный тензор) дает скаляр, так что дифференциальные операции, применимые к специальному тензору четвертого ранга, сводятся к дифференциальным операциям над скаляром.

Дополнение специального ковариантного тензора третьего ранга есть контравариантный вектор первого ранга. Дополнение специального ковариантного тензора второго ранга есть контравариантный специальный тензор второго ранга. Наконец, дополнение специального ковариантного вектора первого рода приводит к контравариантному тензору третьего ранга.

Исследование влияния гравитационного поля на физические процессы (часть I, § 6) требует более подробного рассмотрения специальных тензоров второго ранга (6-векторов).

Если $\Theta_{\mu\nu}$ есть специальный тензор второго ранга, то его дивергенция [формула (35)]

$$\Theta_\mu = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{g}\cdot\Theta_{\mu\nu}) + \sum_{\nu\varkappa} \left\{ {\nu\varkappa \atop \mu} \right\} \Theta_{\nu\varkappa},$$

в силу равенств

$$\Theta_{\nu\varkappa} = -\Theta_{\varkappa\nu}, \qquad \Theta_{\nu\nu} = 0,$$

сводится к

$$\Theta_\mu = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{g}\cdot\Theta_{\mu\nu}). \tag{40}$$

Выведем далее из контравариантного тензора второго ранга $\Theta_{\mu\nu}$ дуальный контравариантный тензор второго ранга Θ_{rs} следующим образом. Образуем сначала дополнение [30]

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} e_{ik\mu\nu}\cdot\Theta_{\mu\nu} \tag{41}$$

[30] Множитель $^1/_2$ служит лишь для упрощения результатов и с точки зрения теории инвариантов несуществен.

или

$$T_{12} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{34}, \quad T_{13} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{42}, \quad T_{14} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{23}, \tag{41a}$$
$$T_{23} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{14}, \quad T_{24} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{31}, \quad T_{34} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{12}.$$

Искомый дуальный тензор является обратным этому дополнению, т. е. имеет вид

$$\Theta_{rs} = \sum_{ik} \gamma_{ir}\gamma_{ks} T_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{ik\mu\nu} \gamma_{ir}\gamma_{ks} e_{ik\mu\nu} \cdot \Theta_{\mu\nu}. \tag{42}$$

Последовательность обеих операций — дополнения и образования обратного тензора — в силу взаимности обоих дискриминантных тензоров является обратимой.

§ 4. Математические дополнения к физической части

1. *Доказательство ковариантности уравнений энергии-импульса.*

Следует доказать, что соотношения (10) части I, которые с точностью до множителя $\sqrt{-1}$ имеют вид

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sqrt{g} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Theta_{\mu\nu} = 0, \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4),$$

ковариантны относительно произвольных преобразований.

Согласно формуле (35) дивергенция контравариантного тензора $\Theta_{\mu\nu}$ равна

$$\Theta_\mu = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{g} \cdot \Theta_{\mu\nu}) + \sum_{\nu k} \begin{Bmatrix} \nu k \\ \mu \end{Bmatrix} \Theta_{\nu k}.$$

Следовательно, ковариантный вектор T_σ, обратный этому контравариантному вектору Θ_μ, есть

$$T_\sigma = \sum_\mu g_{\sigma\mu}\Theta_\mu = \sum_{\mu\nu k} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu}) - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} \cdot \Theta_{\mu\nu} + g_{\sigma\mu} \begin{Bmatrix} \nu k \\ \mu \end{Bmatrix} \Theta_{\nu k} \right].$$

Однако последний член этой суммы равен

$$\sum_{\nu k} \begin{bmatrix} \nu k \\ \sigma \end{bmatrix} \Theta_{\nu k} = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) \cdot \Theta_{\mu\nu}.$$

Таким образом, получаем

$$T_\sigma = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Theta_{\mu\nu},$$

т. е. с точностью до множителя $1/\sqrt{g}$ левую часть исследуемого соотношения. Если это соотношение разделить на $\sqrt{g}$, то его левая часть будет представлять σ-компоненту ковариантного вектора, т. е. действительно является ковариантной. Поэтому содержание этих четырех соотношений можно выразить следующим образом.

Дивергенция (контравариантного) тензора энергии-натяжений тока материи или физической системы обращается в нуль.

2. *Дифференциальные тензоры многообразия, заданного его линейным элементом.*

Проблема нахождения дифференциальных уравнений гравитационного поля (часть I, § 5) связана с рассмотрением *дифференциальных инвариантов* и *дифференциальных ковариантов* квадратичной формы

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu.$$

Теория этих дифференциальных ковариантов в смысле нашего обобщенного векторного анализа приводит к дифференциальным тензорам, определяемым гравитационным полем. Полная система этих дифференциальных тензоров (относительно произвольных преобразований) сводится к найденному Риманом[31] и независимо Кристоффелем[32] ковариантному дифференциальному тензору четвертого ранга, который мы будем называть *дифференциальным тензором Римана* и который имеет вид

$$R_{iklm} = (ik, lm) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_l \partial x_i} \right) +$$

$$+ \sum_{\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma} \left(\begin{bmatrix} im \\ \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kl \\ \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} km \\ \sigma \end{bmatrix} \right). \quad (43)$$

Произведя ковариантные алгебраические и дифференциальные операции, мы получаем из дифференциального тензора Римана и дискриминантного тензора [§ 3, формула (38)] полную систему дифференциальных тензоров (а следовательно, и дифференциальных инвариантов) многообразия.

---

[31] B. Riemann. Über die Hypotesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, 1854. (См. перевод в сб. «Об основаниях геометрии». М., 1956.— *Ред.*)

[32] См. цитированную выше работу [J. Math., 1869, **70**, 46].

Величины $(ik,\ lm)$ называются также четырехзначковыми символами Кристоффеля первого рода. Наряду с ними применяются четырехзначковые символы второго рода

$$\{ik,\ lm\} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} im \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_\rho \left(\begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho m \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho l \\ k \end{Bmatrix} \right), \tag{44}$$

которые связаны с символами Кристоффеля первого рода соотношениями

$$\{i\rho,\ lm\} = \sum_k \gamma_{\rho k}(ik,\ lm) \tag{45}$$

или

$$(ik,\ lm) = \sum_\rho g_{k\rho}\{i\rho,\ lm\}.$$

В обобщенном векторном анализе четырехзначковые символы Кристоффеля второго рода имеют смысл составляющих смешанного тензора, контравариантного по трем значкам и ковариантного по одному значку [33].

Важнейшее значение этих понятий для *дифференциальной геометрии* многообразия, заданного своим линейным элементом [34], позволяет априори предположить, что эти обобщенные дифференциальные тензоры могут оказаться полезными и для составления дифференциальных уравнений гравитационного поля. Действительно, можно сразу указать ковариантный тензор второго ранга и второго порядка G_{im}, который мог бы входить в эти уравнения, а именно:

$$G_{im} = \sum_{kl} \gamma_{kl}(ik,\ lm) = \sum_k \{ik,\ km\}. \tag{46}$$

Однако в частном случае бесконечно слабого статического поля тяжести этот тензор *не сводится* к $\Delta\varphi$. Поэтому вопрос о том, как далеко простирается связь проблемы уравнений гравитационного поля и общей теории дифференциальных тензоров, связанных с гравитационным полем, остается открытым. Такая зависимость должна была бы существовать, если бы уравнения гравитационного поля допускали произвольные преобразования; однако в этом случае, по-видимому, совершенно невозможно ограничиться дифференциальными уравнениями второго порядка. Напротив, если бы оказалось, что уравнения гравитационного поля допускают только одну определенную группу преобразований, то возможность обойтись

[33] Это следует из самого первого соотношения (45).

[34] Тождественное равенство нулю тензора R_{iklm} представляет собой необходимое и достаточное условия того, чтобы дифференциальная форма могла быть приведена к виду $\sum_i dx_i^2$.

без дифференциальных тензоров, полученных в общей теории, стала бы очевидной. Как показано в физической части настоящей работы, мы пока что не можем дать однозначное решение этой проблемы [35].

3. *К выводу уравнений гравитационного поля*

Вывод уравнений гравитационного поля, данный Эйнштейном, ниже излагается во всех подробностях.

Мы исходим из баланса энергии в следующем почти очевидном виде

$$U = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) \tag{47}$$

и производим интегрирование по частям [36]. Таким образом, получаем:

$$U = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) - \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial y_\beta} \cdot \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\alpha}.$$

Первая из сумм, стоящих в правой части последнего равенства, имеет нужный нам вид суммы производных и мы будем обозначать ее через A:

$$A = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right). \tag{48}$$

Вторую сумму, стоящую в правой части, мы снова проинтегрируем по частям. Тогда тождество принимает вид:

$$U = A - \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) + \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right).$$

Первую сумму, полученную в правой части, запишем в виде суммы дифференциалов и обозначим через B:

$$B = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right). \tag{49}$$

Во второй сумме выполним дифференцирование. Тогда получим

$$U = A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\sigma} + \sqrt{g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} \right)$$

или, после применения формулы (29) из § 2 ко второму слагаемому и

[35] Ср. по этому поводу конец статьи 25, где Эйнштейн отказывается от части аргументов.— *Прим. ред.*

[36] Вывод искомого тождества упрощается, если мы введем множитель $\sqrt{g}$ под знак дифференцирования, что никак не влияет на результат.

интегрирования третьего слагаемого по частям,

$$U = A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\sqrt{g}}{2} \gamma_{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} -$$

$$- \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \gamma_{\alpha i} \gamma_{\beta k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} + \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) -$$

$$- \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right).$$

Обе первые суммы имеют вид членов, написанных нами в левой части нашего тождества. Обозначим их через

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{ik} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}, \tag{50}$$

$$W = \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \sqrt{g}\, \gamma_{\alpha i} \gamma_{\beta k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{51}$$

Третья сумма в правой части имеет вид суммы производных; исключая из нее $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ с помощью формулы (29), получаем уже введенную нами величину A. Наконец, в последней сумме заменим величину $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ ее выражением по формуле (29). Таким образом, получим

$$U - V + W = 2A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right)$$

или

$$U - V + W = 2A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) -$$

$$- \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k}).$$

В силу тождества

$$\sum_{\mu\nu} \gamma_{i\mu} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha}$$

первая из этих сумм сводится к

$$- \sum_{\alpha\beta ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha} \right) = -U.$$

Благодаря взаимозаменяемости значков i и k, μ и ν вторую из этих сумм можно записать в виде

$$2X = 2\sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\mu i} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\nu k}}{\partial x_\beta} =$$

$$= -2\sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{i\mu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{k\nu}}{\partial x_\beta}.$$

Следовательно, искомое тождество гласит

$$2U - V + W + 2X = 2A - B$$

и, таким образом, совпадает с тождеством, указанным в § 5 части I.

Примечания (к Физической части)

К § 5 и 6. При написании данной работы мы считали недостатком теории то, что для гравитационного поля нам не удалось найти общековариантные уравнения, т. е. ковариантные относительно произвольных преобразований. Впоследствии же я обнаружил, что уравнения, однозначно определяющие $\gamma_{\mu\nu}$ по $\Theta_{\mu\nu}$ и в то же время *общековариантные*, вообще не могут существовать; доказательство этого следует ниже.

Пусть в четырехмерном многообразии имеется область L, в которой отсутствует «материальный процесс», т. е. $\Theta_{\mu\nu}$ равны нулю. По нашему предположению, значения $\Theta_{\mu\nu}$ вне L полностью определяют $\gamma_{\mu\nu}$ всюду и, следовательно, внутри L. Представим теперь, что вместо первоначальных координат x_ν введены новые координаты x'_ν следующим образом. Вне L всюду $x_\nu = x'_\nu$; однако внутри L и, по крайней мере, в части области L и хотя бы для одного индекса ν $x_\nu \neq x'_\nu$. Ясно, что таким преобразованием можно добиться того, что хотя бы в части L $\gamma'_{\mu\nu} \neq \gamma_{\mu\nu}$. С другой стороны, $\Theta'_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}$ всюду, как вне L, где $x'_\nu = x_\nu$, так и внутри L, где $\Theta_{\mu\nu} = 0 = \Theta'_{\mu\nu}$. Отсюда следует, что если в рассмотренном случае считать допустимыми все преобразования, то одной системе $\Theta_{\mu\nu}$ соответствует больше чем одна система $\gamma_{\mu\nu}$.

Следовательно, если — как это делается в нашей работе — придерживаться требования, чтобы $\Theta_{\mu\nu}$ полностью определяли значения $\gamma_{\mu\nu}$, то приходится ограничить выбор систем отсчета. В нашей работе это ограничение достигается благодаря тому, что постулируется соблюдение законов сохранения, т. е. выполнимость соотношений типа (19) для материального процесса и гравитационного поля вместе взятых. Именно из этого постулата в § 5 выведены уравнения (18) гравитационного поля.

Соотношения (19) ковариантны относительно только *линейных* преобразований, так что в развитой выше теории допустимыми следует считать только *линейные* преобразования. Поэтому координатные оси таких систем можно назвать «прямыми», координатные плоскости — «плоскостями». Весьма примечательно, что законы сохранения позволяют дать физическое определение прямой, хотя в нашей теории и не существует объекта или процесса, могущего непосредственно служить моделью прямой, наподобие светового луча в обычной теории относительности.

К § 4 и 5. Основные уравнения теории становятся особенно ясными после введения смешанных тензоров. Полагая

$$\mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu}\Theta_{\mu\nu}, \qquad \mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu}\vartheta_{\mu\nu},$$

получаем вместо (10) соотношение

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \gamma_{\mu\tau} \mathfrak{T}_{\tau\nu}.$$

Вместо соотношения (19) имеем

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}) = 0;$$

вместо уравнений (18) гравитационного поля —

$$\sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\sqrt{-g}\, \gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right) = \varkappa (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}).$$

К § 7. Возражение против скалярной теории тяготения (теории Нордстрема), выдвинутое в § 7, оказалось необоснованным. Его можно обойти, если допустить, что размеры тела определенным образом зависят от гравитационного потенциала. Более точно эта проблема освещается в докладе автора (на собрании естествоиспытателей в Вене), который будет напечатан в конце 1913 г. в журнале «Physikalische Zeitschrift»[37].

Эта статья Эйнштейна и Гроссмана суммирует все предыдущие работы по теории гравитационного поля (работы 7, 13, 15, 16; работа 28 содержит ответ на критику Ми). В этой работе ясно сформулирована связь гравитационного поля с фундаментальным тензором $g_{\mu\nu}$ и тем самым окончательно отброшено представление о скалярном характере этого поля, типа теории Нордстрема (о которой см. статью 23).

Эйнштейн не может еще найти верное уравнение тяготения (это будет сделано только в 1916 г.) и строит уравнения второго порядка для гравитационного поля, определяющие (performance ковариантно) закон сохранения энергии-импульса (тензора энергии-натяжений, по терминологии автора).

Замечательным в этой работе явилось первое систематическое применение тензорного анализа. В математической части, написанной Гроссманом, появляется тензор кривизны Римана ($R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в современных обозначениях) четвертого ранга и даже тензор второго ранга $R_{\alpha\beta}$. О последнем Гроссман замечает, что он мог бы входить в уравнение гравитационного поля, но эта мысль остается нереализованной.

[37] Статья 23.— *Прим. ред.*

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ*

Словом «масса» тела обозначаются два совершенно различных по своему определению понятия: инертное сопротивление тела, с одной стороны, и постоянная, характеризующая воздействие поля тяжести на тело,— с другой. Один из самых замечательных опытных фактов физики заключается в том, что обе эти массы, инертная и тяжелая, по своей величине в точности равны. Это равенство точнее всего показано опытом Этвеша. На поверхности Земли на тело действуют две в общем случае различно направленные силы, которые вместе составляют тяжесть тела. Одна из этих сил, собственно тяжесть, зависит от тяжелой массы, другая — центробежная сила — зависит от инертной массы. Опытом с крутильными весами Этвеш установил, что отношение этих двух сил не зависит от природы тела. Таким образом, он доказал равенство этих двух масс тела с относительной точностью, превышающей 10^{-7}.

Этот опытный закон можно сформулировать и так: все тела в поле тяжести падают с одинаковым ускорением. Тем самым подсказывается предположение о том, что в отношении действия на механические и другие физические явления поле тяжести можно заменить ускоренным состоянием тела отсчета (системы координат). Эта концепция не является необходимым следствием указанных опытов, но представляет большую эвристическую ценность. В силу того, что ход физических процессов в ускоренной системе отсчета можно определить теоретически, эта гипотеза эквивалентности позволяет предсказать влияние гравитационного поля на произвольные физические процессы. Экспериментальная проверка полученных таким образом следствий должна показать, правильна ли положенная в основу гипотеза.

---

* *Physikalische Grundlagen einer Gravitationstheorie.* Naturforsch. Gesellschaft, Zürich, Vierteljahrschr., 1913, 58, 284—290. (По докладу, сделанному 9 сентября 1913 г. на годичном собрании Швейцарского общества естествоиспытателей в Фрауэнфельде.)

Указанным способом можно показать, что произвольный физический процесс протекает тем быстрее, чем больше гравитационный потенциал в области, где находится рассматриваемая физическая система. Поэтому, например, спектральные линии солнечного света должны испытывать небольшой сдвиг в сторону красного конца спектра по сравнению с соответствующими линиями земных источников света. Именно, этот сдвиг составляет две миллионных части длины волны. Другим следствием этой гипотезы эквивалентности является искривление световых лучей в поле тяготения; для луча, проходящего мимо Солнца, это искривление составляет 0,84 дуговой секунды и, следовательно, лежит в пределах экспериментальных возможностей [1]. Искривление световых лучей означает, что скорость света не постоянна, но зависит от места. Поэтому становится необходимым обобщить теорию пространства и времени, известную под названием теории относительности, поскольку последняя основана на постулате о постоянстве скорости света.

Согласно обычной теории относительности, изолированная материальная точка движется прямолинейно и равномерно в соответствии с уравнением

$$\delta\left(\int ds\right) = 0,$$

где

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2,$$

причем c означает (постоянную) скорость света. Гипотеза эквивалентности допускает следствие, что в статическом поле тяжести (специального вида) материальная точка движется в соответствии с тем же уравнением, при этом c является функцией точки и определяется гравитационным потенциалом. От этого частного случая тяготения всегда можно перейти к общему случаю при помощи преобразования координат к движущейся системе отсчета [2]. Таким способом выясняется, что единственное достаточно всеобъемлющее инвариантное обобщение указанного закона движения получается, если представить «линейный элемент» ds в виде

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

где g_{ik} являются функциями x_1, x_2, x_3 и x_4; три первые координаты характеризуют пространство, последняя — время. При этом уравнение движе-

---

[1] Величина отклонения еще содержит ошибку (см. статью 14). Она вдвое меньше правильного значения.— *Прим. ред.*

[2] При этом мы постулируем, что равноправное описание процесса достигается в системе координат, движущейся соответствующим образом; тем самым мы следуем основной идее теории относительности.

ния должно сохранять прежний вид

$$\delta\left(\int ds\right) = 0.$$

Учитывая, что в этой теории вместо обычного линейного элемента первоначальной теории относительности

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2$$

в качестве абсолютного инварианта (скаляра) выступает линейный элемент более общего вида

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

нетрудно увидеть, каким образом получается обобщение теории относительности, включающее тяготение на основе гипотезы эквивалентности. В первоначальной теории относительности независимость физических уравнений от специального выбора системы отсчета основывается на постулировании фундаментального инварианта $ds^2 = \Sigma dx_i^2$, а теперь речь идет о том, чтобы построить теорию, в которой роль фундаментального инварианта играет линейный элемент наиболее общего вида

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Необходимая для этой цели система понятий векторного анализа приводит к методам абсолютного дифференциального исчисления, которые будут изложены в докладе Гроссмана [3].

Из приведенных выше соображений следует, что поле тяготения характеризуется десятью величинами g_{ik}; они заменяют скалярный гравитационный потенциал φ ньютоновой теории тяготения и образуют ковариантный фундаментальный тензор гравитационного поля. Фундаментальный физический смысл этих величин заключается между прочим в том, что они определяют свойства масштабов и часов.

Метод абсолютного дифференциального исчисления позволяет обобщать установленные в первоначальной теории относительности системы уравнений для какого-либо процесса таким образом, что они включаются в схему новой теории. В эти уравнения всегда входят составляющие поля тяготения g_{ik}. Физически это означает, что эти уравнения объясняют влияние гравитационного поля на явления в изучаемой области. В качестве простейшего примера этого рода может служить приведенный выше закон движения материальной точки. В дальнейшем мы ограничимся тем,

[3] См. ч. II статьи 21.— *Прим. ред.*

что сформулируем наиболее общий закон, соответствующий известному в теоретической физике закону сохранения импульса и энергии в первоначальной теории относительности. Как известно, в этой теории имеется симметричный тензор $T_{\mu\nu}$, составляющие которого образуют компоненты натяжений, компоненты импульса, компоненты плотности потока энергии и плотность энергии. Эти величины можно указать для каждой области явлений. Законы сохранения импульса и энергии содержатся в уравнениях

$$\sum_{\nu} \frac{\partial T_{\sigma\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \qquad (\nu, \sigma = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

поскольку путем интегрирования по пространственным координатам, распространенного на всю систему, из этих уравнений можно получить уравнения сохранения

$$\frac{d}{dt}\left(\int T_{\sigma 4} d\tau\right) = 0, \tag{1a}$$

причем $d\tau$ означает элемент трехмерного объема.

В общей теории уравнениям (1) соответствуют следующие уравнения

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} \gamma_{\mu\tau} \mathfrak{T}_{\sigma\tau} \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

Здесь

$$\mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g} \cdot \sum_{\mu} g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu},$$

причем g означает определитель $|g_{ik}|$, $\gamma_{\mu\tau}$ — миноры, деленные на этот определитель, $\Theta_{\mu\nu}$ — симметричный контравариантный тензор второго ранга, характеризующий энергетические свойства в рассматриваемой области явлений. Величины $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ имеют здесь тот же физический смысл, что и величины $T_{\sigma\nu}$ в первоначальной теории относительности; компоненты натяжений и энергии гравитационного поля в них не содержатся.

Правая часть уравнений (2) обращается в нуль, если величины $g_{\mu\nu}$ постоянны, т. е. если гравитационное поле отсутствует. В этом случае уравнение (2) переходит в уравнение (1) и поэтому его можно представить в форме (1a); иначе говоря, законы сохранения выполняются для одних материальных процессов. Если же $g_{\mu\nu}$ переменны, т. е. если имеется гравитационное поле, то правые части уравнений (2) выражают влияние поля тяготения на материю. Ясно, что в этом случае из уравнений (2) нельзя непосредственно вывести законы сохранения, поскольку компоненты тензора энергии натяжений одной материи не удовлетворяют никаким законам сохранения.

Очерченный выше метод показывает, как можно получать системы физических уравнений с учетом влияния заданного поля тяготения. Однако главная проблема теории гравитации тем самым не решается, поскольку она заключается в определении величин g_{ik} по заданным материальным источникам поля (включая электрические заряды). Другими словами, необходимо найти обобщение уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = 4\pi k\rho. \tag{3}$$

Пропорциональность энергии и инертной массы, являющаяся следствием обычной теории относительности, с одной стороны, и опытный факт пропорциональности инертной и тяжелой массы — с другой, с необходимостью приводят к убеждению, что гравитационные свойства системы должны определяться теми же величинами, которые обусловливают энергетические свойства этой системы. Отсюда мы заключаем, что в искомые уравнения гравитационного поля вместо плотности ρ уравнения (3) должен входить тензор $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$. Следовательно, надо найти уравнения, выражающие равенство двух тензоров, одним из которых является заданный тензор $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$, другой же должен получаться путем дифференциальных операций из фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$.

Оказывается, что законы сохранения импульса и энергии дают возможность вывести эти уравнения. Выше уже подчеркивалось, что одна лишь материя не может удовлетворить законам сохранения; мы должны потребовать, чтобы законы сохранения выполнялись для материи и гравитационного поля совместно. В соответствии с приведенными выше соображениями это означает, что должны существовать четыре уравнения вида

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Здесь $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$ характеризуют компоненты тензора энергии-натяжений гравитационного поля аналогично тому, как величины $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ характеризуют их для материи. В частности, величины $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ и $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$ должны иметь одинаковые ковариантные свойства.

Из общих соображений можно показать, что уравнения, полностью определяющие гравитационное поле, не могут быть ковариантными относительно произвольных преобразований. Это принципиальное замечание заслуживает особого внимания, поскольку все остальные физические уравнения, например уравнения (2), обладают общей ковариантностью. В соответствии с этим общим результатом постулированные уравнения (4) ковариантны также относительно не произвольных, а только линейных преобразований. Следовательно, мы должны требовать и от искомых уравнений гравитационного поля ковариантности относительно лишь линейных преобразований. Оказывается, что можно найти совершенно определенные уравнения, прибавив к этим соображениям требование, чтобы из искомых уравнений в частном случае и путем предельного перехода получалось уравнение Пуассона (3). Указанным способом получаются уравнения

$$\sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) = \varkappa\,(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}) \qquad (\sigma, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{5}$$

При этом

$$-2\varkappa t_{\sigma\nu} = \sqrt{-g}\left(\sum_{\beta\tau\rho} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\tau\sigma} \delta_{\sigma\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right). \tag{6}$$

Здесь $\varkappa$ — универсальная постоянная, соответствующая гравитационной постоянной; $\delta_{\sigma\nu} = 0$ или 1, в зависимости от того, различны или одинаковы σ и ν.

Из системы уравнений (5), соответствующей уравнению (3), можно видеть, что наряду с компонентами тензора энергии-натяжений материи $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ в качестве равноценных источников поля выступают также компоненты тензора гравитационного поля (именно $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$); это требование, очевидно, необходимо, поскольку гравитационное воздействие системы не может зависеть от физической природы энергии, служащей источником поля.

Поскольку допускаются только линейные преобразования, становятся предпочтительными некоторые одно-, дву- и трехмерные многообразия, которые можно назвать прямыми, плоскостями и линейными пространствами.

Изложенная теория устраняет гносеологический недостаток, присущий не только первоначальной теории относительности, но и механике Галилея, что особенно подчеркивалось Э. Махом. Оказывается, что понятию ускорения материальной точки так же, как и понятию скорости, нельзя приписывать абсолютное значение. Ускорение можно определить лишь как относительное ускорение точки по отношению ко всем другим телам. Это обстоятельство делает бессмысленным приписывание телу сопротивления ускорению (инерция тела в смысле классической механики); наоборот, необходимо потребовать, чтобы появление инертного сопротивления было связано с относительным ускорением тела (по отношению к другим телам). Необходимо требовать, чтобы инертное сопротивление тела увеличивалось только потому, что в окрестности тела располагаются неускоренные инертные массы; это увеличение инертного сопротивления должно снова исчезать, если указанные массы ускоряются вместе с телом. Из уравнений (5) действительно следует такое поведение инертного сопротивления, что можно назвать относительностью инерции. Это обстоятельство образует одну из важнейших опор изложенной теории.

К СОВРЕМЕННОМУ СОСТОЯНИЮ ПРОБЛЕМЫ ТЯГОТЕНИЯ*

§ 1. Общие замечания о постановке проблемы

Всеобщее притяжение масс принадлежит к той области физических явлений, которая раньше всего получила теоретическое освещение. Законы тяготения и движений небесных тел были сведены Ньютоном к простому закону движения материальной точки и закону взаимодействия двух тяготеющих материальных точек. Эти законы оказались настолько точными, что с точки зрения опыта нет особых оснований сомневаться в их строгой выполнимости. Если же, несмотря на это, в настоящее время едва ли найдется физик, который бы верил в строгость этих законов, то это следует приписать преобразующему влиянию развития наших знаний об электромагнитных явлениях за последние десятилетия.

До Максвелла электромагнитные явления сводились к элементарным законам, которые строились как можно точнее по образцу ньютонова закона тяготения. Согласно этим законам взаимодействие электрических зарядов, магнитных масс, элементарных токов и т. д. имеет характер дальнодействия, не требующего никакого времени для распространения в пространстве. Затем, 25 лет назад Г. Герц в своем гениальном экспериментальном исследовании о распространении электромагнитного поля показал, что для распространения электрических воздействий требуется время. Тем самым он помог победе теории Максвелла, в которой вместо непосредственного дальнодействия используются дифференциальные уравнения в частных производных. После того как в области электродинамики была

---

* *Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems.* Phys. Z., 1913, 14, 1249—1262. (Доклад на 85-м собрании общества немецких естествоиспытателей в Вене. [Опубликовано также в Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärt Verhandlung, 1917, 3—24. Изложение опубликовано в «Himmel und Erde», 26, 90—93.— *Прим. ред.*]).

доказана несостоятельность теории дальнодействия, вера в правильность ньютоновой теории дальнодействия для тяготения была также поколеблена. Должно было проложить себе дорогу убеждение, что ньютонов закон тяготения так же неполно описывает совокупность явлений тяготения, как кулоновы законы электростатики и магнитостатики — совокупность электромагнитных явлений. Тот факт, что ньютонов закон оказывался до сих пор достаточным для вычисления движения небесных тел, следовало связать с малостью скоростей и ускорений при этих движениях. Действительно, легко показать, что небесные тела, движения которых определялись бы электрическими силами, происходящими от расположенных на небесных телах электрических зарядов, не раскрыли бы нам законов электродинамики Максвелла, если бы скорости и ускорения каждого небесного тела имели такой же порядок величины, как при движениях известных нам небесных тел. Эти движения можно было бы с большой точностью описать на основе закона Кулона.

Хотя вера во всеобъемлющее значение ньютонова закона дальнодействия была таким образом поколеблена, прямых оснований к обобщению теории Ньютона сначала все же не было. Однако для тех, кто убежден в правильности теории относительности, сегодня такое прямое основание имеется. Именно, согласно теории относительности, в природе не существует средств, позволяющих посылать сигналы со сверхсветовой скоростью. С другой стороны, очевидно, что в случае строгой справедливости закона Ньютона мы могли бы применять тяготение для мгновенной передачи сигналов из области A в отдаленную область B, ибо движение тяготеющей массы в A должно было бы иметь следствием одновременные изменения гравитационного поля в B — в противоречии с теорией относительности.

Но теория относительности не только заставляет нас видоизменить теорию Ньютона; к счастью, она также в значительной мере ограничивает возможности видоизменения. Если бы этого не было, обобщение теории Ньютона являлось бы безнадежным. Чтобы яснее представить себе это, вообразим лишь следующее аналогичное положение: пусть из электромагнитных явлений были бы экспериментально известны только явления электростатики. Известно также, что электрические воздействия не могут распространяться со сверхсветовой скоростью. Кто мог бы на основе этих данных построить максвеллову теорию электромагнитных явлений? Однако наши знания в области тяготения в точности соответствуют рассмотренному случаю; мы знаем только взаимодействие между покоящимися массами, к тому же, вероятно, лишь в первом приближении. Разнообразие возможных обобщений ограничивается теорией относительности, поскольку, согласно последней, временна́я координата, с точностью до различия в знаке, входит во все системы уравнений таким же образом, как три пространственные координаты. Это не вполне точно сформулированное здесь глубокое формальное правило Минковского, имеет, как оказалось, большое значение в качестве вспомогательного средства для отыскания соответствующих уравнений из теории относительности.

§ 2. Простейшие физические гипотезы о гравитационном поле

Ниже мы укажем некоторые общие постулаты, которые можно принять (но необязательно все) в теории гравитации.

1. Выполнение законов сохранения импульса и энергии.

2. Равенство инертной и тяжелой масс замкнутых систем.

3. Справедливость теории относительности (в более узком смысле), т. е. системы уравнений должны быть ковариантны относительно линейных ортогональных подстановок (обобщенные преобразования Лоренца).

4. Наблюдаемые законы природы не должны зависеть от абсолютных значений гравитационного потенциала (или гравитационных потенциалов). Физически это означает следующее: совокупность связей между наблюдаемыми величинами, которую можно найти в некоторой лаборатории, не должна меняться, если всю лабораторию переместить в область с другим гравитационным потенциалом (постоянным в пространстве и времени).

Сделаем следующие замечания относительно этих постулатов. Все теоретики согласны, что постулат 1 должен выполняться. Не столь единодушно убеждение, что необходимо придерживаться постулата 3. Например, М. Абрагам выдвинул теорию гравитации, в которой постулат 3 не выполняется. Мы могли бы присоединиться к этой точке зрения, если бы система Абрагама была ковариантна относительно преобразований, которые в областях с постоянным гравитационным потенциалом переходят в линейные ортогональные преобразования; однако в теории Абрагама это, по-видимому, не так. Следовательно, эта теория не содержит в себе в качестве частного случая теорию относительности в том виде, как она развивалась до сих пор без учета тяготения. Против подобной теории говорят все те аргументы, которые были выдвинуты в пользу теории относительности в ее современном виде. По нашему мнению, безусловно необходимо придерживаться постулата 3, если только не будет оснований, принуждающих отказаться от него; как только мы отказываемся от этого постулата, разнообразие возможностей становится необозримым.

Для более точного рассмотрения необходим постулат 2, которого, по-моему, следует придерживаться, если не будет доказано обратного. Этот постулат опирается прежде всего на опытный факт, что все тела в поле тяжести падают с одинаковым ускорением; позднее нам придется еще раз обратить внимание на этот важный факт. Следует заметить, что равенство (пропорциональность) тяжелой и инертной массы с большой точностью установлено исследованием Этвеша [1], представляющим для нас огромное значение. Этвеш установил эту пропорциональность, экспериментально показав, что равнодействующая силы тяжести и центробежной силы вращения Земли не зависит от природы материала (относительная разность обеих масс $< 10^{-7}$)[2]. Постулат 2 вместе с одним из главных результатов обычной теории относительности приводит к следствию, которое необходимо указать уже здесь. Согласно теории относительности, инертная масса замкнутой системы (система рассматривается как целое) определяется ее энергией. Согласно постулату 2 то же самое должно быть справедливым для *тяжелой* массы. Следовательно, если состояние системы изменяется произвольно, но так, чтобы полная энергия ее не менялась, то гравитационное дальнодействие системы не меняется, даже если часть энергии системы переходит в гравитационную энергию. Тяготеющая масса системы определяется ее полной энергией, включая ее гравитационную энергию.

Наконец, постулат 4, вероятно, нельзя обосновать опытом. Он оправдывается не чем иным, как верой в простоту законов природы, и мы не можем полагаться на то, что он выполняется с таким же правом, как в случае остальных трех упомянутых аксиом.

Мы прекрасно сознаем, что постулаты 2—4 похожи скорее на научный символ веры, нежели на надежный фундамент. Мы также далеки от того, чтобы утверждать, что оба изложенные в дальнейшем обобщения теории Ньютона являются единственно возможными; однако все же осмелюсь сказать, что при современном состоянии наших знаний они являются наиболее естественными.

§ 3. Теория гравитации Нордстрема

Согласно существующей теории относительности, изолированная материальная точка движется равномерно и прямолинейно в соответствии с уравнением Гамильтона

$$\delta\left\{\int d\tau\right\} = 0, \tag{1}$$

где, как обычно,

$$d\tau = \sqrt{-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2} = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt\sqrt{c^2 - q^2}. \tag{2}$$

[1] B. Eötvös. Math. und Naturwiss. Ber. aus Ungarn, 1890, VIII, Beibl., 1891, 15, 688.

[2] Современные опыты Р. Дикке повысили точность равенства обеих масс до 10^{-11}.— *Прим. ред.*

Уравнение (1) можно также записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\delta\left\{\int H dt\right\} = 0,\\ \text{где}\quad &H = -m\frac{d\tau}{dt} = -m\sqrt{c^2 - q^2} \end{aligned}\right\}\qquad (1a)$$

функция Лагранжа движущейся точки, m — характеризующая эту точку постоянная, ее «масса». Отсюда, как показал Планк, непосредственно получаются импульс (I_x, I_y, I_z) и энергия E точки [3]

$$I_x = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = m\frac{\dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}},$$

$$E = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\dot{z} - H = \frac{mc^2}{\sqrt{c^2 - q^2}}.$$

Отсюда легко приходим к теории Нордстрема, предположив, как и прежде, ковариантность уравнения относительно линейных ортогональных преобразований, и т о л ь к о таких, которые рассматривают в известной теории относительности. Гравитационное поле можно описать одним скаляром. Движение материальной точки в поле тяжести можно представить уравнением в форме Гамильтона. В этом случае получаем уравнение [4]

$$\delta\left\{\int \varphi\, d\tau\right\} = 0, \qquad (1')$$

причем (2) остается в силе с постоянной c и φ — скаляр, определяющий гравитационное поле. Для распространения светового луча имеем $d\tau = 0$, следовательно $q = c$; другими словами, скорость распространения света равна постоянной c. Световые лучи не искривляются гравитационным полем.

Вместо уравнений (1a) получается

$$\delta\left\{\int H\, d\tau\right\} = 0,$$

где

$$H = -m\varphi\frac{d\tau}{dt} = -m\varphi\sqrt{c^2 - q^2}. \qquad (1a')$$

---

[3] Эти выражения отличаются от обычно применяющихся лишь постоянным множителем $1/c$.

[4] С учетом того, что интеграл Гамильтона должен быть инвариантом.

Лагранжевы уравнения движения приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\left\{m\varphi\frac{\dot{x}}{\sqrt{c^2-q^2}}\right\}+m\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sqrt{c^2-q^2}=0 \qquad \text{и т. д.} \tag{2}$$

Отсюда для импульса, энергии и силы $\mathfrak{K}$, действующей на точку со стороны поля тяжести, получаются выражения

$$\left.\begin{aligned} I_x &= m\varphi\frac{\dot{x}}{\sqrt{c^2-q^2}} \qquad \text{и т. д.,}\\ E &= m\varphi\frac{c^2}{\sqrt{c^2-q^2}},\\ \mathfrak{K}_x &= -m\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sqrt{c^2-q^2} \qquad \text{и т. д.,}\end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

причем m — характерная для материальной точки постоянная, не зависящая от φ и q.

Выражение для $\mathfrak{K}$ показывает, что φ играет роль гравитационного потенциала. Далее, выражения для I_x и E показывают, что согласно теории Нордстрема инерция материальной точки определяется произведением $m\varphi$; чем меньше φ, т. е. чем бóльшие массы скопляются вблизи рассматриваемой материальной точки, тем меньше становится инертное сопротивление, которое материальная точка оказывает изменению ее скорости. Это является одним из важнейших физических следствий скалярной теории гравитации, к которому мы вернемся позднее.

В этой теории, так же как и в той, которая будет изложена позже, разности координат не имеют столь простого физического смысла, как в обычной теории относительности. Представим себе переносный единичный масштаб и переносные часы, которые идут так, что свет проходит в вакууме путь, равный длине единичного масштаба[5], когда по часам проходит равное единице время. Четырехмерный интервал между двумя бесконечно близкими точками пространства-времени, который измеряется этими измерительными средствами точно так же, как в случае обычной теории относительности, мы назовем «естественным» четырехмерным интервалом $d\tau_0$ между пространственно-временными точками. По своему определению он является инвариантом и поэтому в случае обычной теории относительности равен $d\tau$. Последнюю величину, в противоположность естественному интервалу, мы будем называть, в соответствии с ее определением, «коор-

[5] Делается предположение, что достижимы все значения координат и времени; при этом речь идет об одном специальном случае постулата 4.

динатным интервалом» или просто «интервалом» между пространственно-временными точками. Однако в нашем случае оказывается, что естественный интервал $d\tau_0$ отличается от координатного интервала $d\tau$ множителем, являющимся функцией φ. В соответствии с этим подставим

$$d\tau_0 = \omega\, d\tau. \tag{3}$$

Далее, можно говорить о естественной длине l_0 и естественном объеме V_0 некоторого тела. Это длина или объем, которые получаются при измерении посредством движущегося вместе с телом единичного масштаба. Наряду с этим имеют смысл длины l или объемы V, измеренные в координатах. Между координатным объемом V и естественным объемом можно вывести соотношение

$$\frac{1}{V} = \frac{\omega^3}{V_0}\frac{c\,dt}{d\tau} = \frac{\omega^3 c}{V_0\sqrt{c^2-q^2}}\,. \tag{4}$$

Далее, под единицей массы мы подразумеваем массу воды, которая содержится в единичном естественном объеме. Масса тела есть отношение его инерции к инерции единичной массы, следовательно, скаляр. Под естественной плотностью ρ_0 мы понимаем плотность, отнесенную к плотности воды, или массу в единичном естественном объеме; таким образом, ρ_0 по своему определению также является скаляром.

Из полученных выше результатов мы можем вывести дальнейшие следствия, переходя от материальной точки к континууму. Это достигается путем рассмотрения материальной точки как континуума координатного объема V и естественного объема V_0. Умножая на $1/V$ выражения (2а) для I_x, E и $\mathfrak{K}_x$ и используя (4), получаем импульс i_x и т. д., энергию η и пондеромоторную силу $\mathfrak{k}_x$ и т. д. на единицу объема для потока массы. Учитывая соотношение

$$\rho = \frac{m}{V_0}\,,$$

получаем

$$\begin{aligned} ici_x &= \frac{icI_x}{V} = \rho_0 c\varphi\omega^3 \frac{dx_1}{d\tau}\frac{dx_4}{d\tau}\,,\\ \eta &= -\frac{E}{V} = \rho_0 c\varphi\omega^3 \frac{dx_4}{d\tau}\frac{dx_4}{d\tau}\,,\\ \mathfrak{k}_x &= \frac{\mathfrak{K}_x}{V} = -\rho_0 c\omega^3 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,. \end{aligned} \tag{2б}$$

В первом из этих уравнений i означает мнимую единицу. Напомним только о выражении для закона сохранения энергии-импульса в теории относительности. Если величины X_x и т. д. суть обобщенные напряжения, f_x и т. д.— составляющие плотности потока энергии, то величины

$$\begin{matrix} X_x & X_y & X_z & ici_x \\ Y_x & Y_y & Y_z & ici_y \\ Z_x & Z_y & Z_z & ici_z \\ \frac{i}{c}f_x & \frac{i}{c}f_y & \frac{i}{c}f_z & -\eta \end{matrix}$$

образуют симметричный тензор, который мы будем обозначать через $T_{\mu\nu}$ (индексы μ и ν пробегают значения от 1 до 4).

Далее, если обозначить через $\mathfrak{l}$ мощность, передаваемую внешними силами на единицу объема материи, то величины

$$\mathfrak{k}_x,\ \mathfrak{k}_y,\ \mathfrak{k}_z,\ \frac{i}{c}\,\mathfrak{l}$$

образуют 4-вектор, составляющие которого будут обозначаться через k_μ. Тогда закон сохранения энергии-импульса будет выражаться четырьмя уравнениями

$$\sum_\nu \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = k_\mu \ (\mu = 1 \text{ до } 4). \tag{5}$$

Эту схему можно непосредственно применить — как показывают уравнения (2б) — в нашем случае движения несвязанных масс в поле тяжести, положив

$$\left.\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \rho_0 c\varphi\omega^3 \frac{dx_\mu}{dt}\frac{dx_\nu}{d\tau}, \\ k_\mu &= -\rho_0 c\omega^3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Пока мы обсуждали только вопрос о том, как действует гравитационное поле на материю, но не вопрос, по каким законам материя в свою очередь определяет гравитационное поле. В случае теории Нордстрема последнее задается скаляром φ; следовательно, поле должно порождаться также скаляром, который входит в дифференциальное уравнение для φ. Таким скаляром может быть только скаляр $\sum_\sigma T_{\sigma\sigma}$, существование и смысл которого особенно подчеркивались Лауэ. Образуя этот скаляр для случая движения несвязанных масс, с учетом (5а), имеем:

$$\sum_{\sigma} T_{\sigma\sigma} = -\rho_0 c \varphi \omega^3,$$

$$k_\mu = \sum_{\sigma} T_{\sigma\sigma} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

Таким образом, вместо (5) получим

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \sum_{\sigma} T_{\sigma\sigma} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}. \tag{5б}$$

Это уравнение имеет особое значение, потому что в него уже не входит ничего, что напоминает рассматриваемый нами случай движения несвязанных масс. Согласно теории Нордстрема, уравнение (5б) выражает баланс энергии любого материального процесса, если вместо $T_{\mu\nu}$ поставить соответствующий этому процессу тензор энергии-натяжений.

Из уравнения (5б) вытекает, что теория Нордстрема удовлетворяет постулату 2. Именно, если рассматривается материальная система, настолько малая, что на пространственном протяжении этой системы $\frac{\partial \lg \varphi}{\partial x_\mu}$ можно считать постоянным, то для силы, действующей со стороны гравитационного поля на систему в целом по оси X, получим

$$\frac{\partial \lg \varphi}{\partial x_\mu} \int \sum T_{\sigma\sigma} dv = \frac{\partial \lg \varphi}{\partial x_\mu} \int T_{44} dv = -\frac{\partial \lg \varphi}{\partial x_\mu} \int \eta dv.$$

Здесь dv — элемент трехмерного объема.

Это преобразование основано на теореме Лауэ, согласно которой для замкнутой системы

$$\int \sum T_{11} dv = \int \sum T_{22} dv = \int \sum T_{33} dv = 0.$$

Тем самым показано, что тяжелая масса замкнутой системы определяется ее полной массой.

Далее, уравнение (5б) позволяет нам определить оставшуюся неопределенной функцию φ из той физической предпосылки, что в статическом поле тяжести нельзя получить работу при помощи кругового процесса. В § 7 работы о гравитации, опубликованной совместно с М. Гроссманом [6], я доказывал противоречие скалярной теории с названной основной теоремой, но при этом исходил из молчаливого предположения $\omega = \text{const}$. Однако,

[6] Статья 21.— *Прим. ред.*

как легко показать, противоречие разрешается, если положить

$$l = \frac{l_0}{\omega} = \frac{\text{const}}{\varphi},$$

или

$$\omega = \text{const}\,\varphi. \tag{6}$$

Позже мы дадим другое обоснование этого утверждения.

Теперь уже нетрудно написать для гравитационного поля общее уравнение, которое следует понимать как обобщение уравнения Пуассона для гравитационного поля. Именно, нужно приравнять скаляр Лауэ такому скалярному дифференциальному выражению, образованному из φ, чтобы для материи и гравитационного поля выполнялся совместный закон сохранения. Это достигается, если положить

$$-\varkappa \sum T_{\sigma\sigma} = \varphi \Box \varphi, \tag{7}$$

где $\varkappa$ — универсальная постоянная (гравитационная постоянная), а символ $\Box$ означает оператор $\sum\limits_{\tau} \dfrac{\partial^2}{\partial x_\tau^2}$ (τ пробегает значение от 1 до 4). Тот факт, что законы сохранения действительно выполняются, следует из уравнений (5б) и (7) в силу тождества, вытекающего из (7):

$$\sum T_{\sigma\sigma} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\sigma^2} = -\sum \frac{\partial t_{\mu\nu}}{\partial x_\nu},$$

причем

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{\varkappa} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \right)^2 \right\}. \tag{8}$$

Здесь $\delta_{\mu\nu}$ означает 1, если $\mu = \nu$, или 0, если $\mu \neq \nu$; $t_{\mu\nu}$ — составляющая тензора энергии-натяжений гравитационного поля.

Из предпоследнего уравнения и уравнения (5б) следует, что

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) = 0. \tag{9}$$

Следовательно, постулат 1 выполняется. Можно далее показать, что в согласии с постулатом 2 число силовых линий гравитационного поля, уходящих в бесконечность из замкнутой стационарной системы, зависит только от полной энергии системы.

В согласии с постулатом 4 находится далее следующее. Если на концах отрезка естественной длины l_0 поместить два обращенных друг к другу зеркала, между которыми в вакууме пробегает взад и вперед световой луч, то эта система представляет собой часы (световые часы). Если две массы m_1 и m_2, находящиеся на естественном расстоянии l_0, заставить вращаться друг около друга под влиянием их гравитационного взаимодействия, то эта система тоже представляет собой часы (гравитационные часы). При помощи полученных уравнений легко показать, что относительная скорость хода этих двух часов, если они находятся в точках с одинаковым гравитационным потенциалом, не зависит от абсолютной величины этого потенциала. Это служит косвенным подтверждением выражения для ω, данного в уравнении (6).

Резюмируя, мы можем сказать, что скалярная теория Нордстрема, которая придерживается постулата о постоянстве скорости света, удовлетворяет всем требованиям, которые при современном состоянии эксперимента можно предъявить теории гравитации. Неудовлетворительным остается только то обстоятельство, что, согласно этой теории, инерция тела хотя и подвержена влиянию остальных тел, но не обусловлена ими, поскольку в этой теории инерция тела тем больше, чем дальше оно от других тел.

§ 4. Оправдывается ли попытка обобщения теории относительности? [7]

Чтобы объяснить непосвященному, в какой мере удалась попытка построить теорию относительности, мы можем рассказать ему следующее. Если кто-нибудь находится в движущемся прямолинейно и равномерно железнодорожном вагоне, окна которого занавешены, то он не сможет определить, в каком направлении и с какой скоростью движется вагон; если отвлечься от неизбежной тряски вагона, то даже невозможно решить, движется ли он вообще. Абстрактно выражаясь, законы механики в системе отсчета (вагон), равномерно движущейся относительно исходной системы отсчета (Земля), имеют такой же вид, как и в исходной системе (Земля); мы называем это утверждение принципом относительности равномерного движения.

Однако обычно склонны добавлять: конечно, совсем другое дело, если железнодорожный вагон движется неравномерно; если вагон изменит свою скорость, то пассажир получит толчок, который заставит его почувствовать ускорение вагона. Абстрактно говоря, принцип относительности неравномерного движения не имеет места. Однако это заключение отнюдь не безупречно; ибо еще неясно, должны ли пассажиры вагона обязательно связывать с ускорением вагона толчок, который они почувствовали. Следующий пример показывает, что это заключение преждевременно.

[7] A. Einstein. Ann. Phys., 1911, 35, 898. (Статья 14).

Два физика, A и B, очнувшись от наркотического сна, обнаружили, что они вместе с приборами находятся в закрытом ящике с непрозрачными стенками. Они не имеют никакого представления о том, где расположен ящик или как он движется. Они констатируют теперь, что тела, помещенные в середину ящика и освобожденные там, все падают в одном и том же направлении — скажем, вниз — с одинаковым общим ускорением γ. Что могут заключить отсюда физики? A заключает, что ящик спокойно лежит на небесном теле и что направление вниз является направлением к центру этого небесного тела, если последнее шарообразно. Однако B стоит на точке зрения, что ящик, возможно, под действием приложенной к нему извне силы равномерно ускоренно движется вверх с ускорением γ; при этом нет необходимости предполагать близость небесного тела. Существует ли для обоих физиков критерий, с помощью которого они могли бы решить, кто прав? Мы не знаем такого критерия, но нам также неизвестно, может ли такой критерий существовать. Однако точный опыт Этвеша относительно равенства инертной и тяжелой массы говорит все же о том, что такого критерия не существует. Видно, что в этом отношении опыт Этвеша играет роль, сходную с ролью опыта Майкельсона в вопросе о возможности физически обнаружить равномерное движение.

Если же оба физика действительно не могут решить в принципе, какое из этих мнений правильно, то ускорение должно иметь столь же малый[8] абсолютный физический смысл, как и скорость. Одну и ту же систему отсчета с одинаковым правом можно считать ускоренной или неускоренной, но тогда, в соответствии с выбранным утверждением, следует предполагать существование гравитационного поля, определяющего вместе с возможным ускоренным движением системы относительное движение свободно движущихся тел в данной системе отсчета.

То обстоятельство, что в неускоренных системах отсчета тела ведут себя при наличии поля тяжести в точности так же, как если бы система отсчета была ускоренной, принуждает нас к попытке распространить принцип относительности на случай ускоренных систем отсчета.

С математической точки зрения это сводится к тому, что к уравнениям, выражающим законы природы, мы предъявляем требование ковариантности не только относительно линейных ортогональных преобразований, но и относительно более общих, в особенности нелинейных, преобразований, поскольку лишь нелинейные преобразования соответствуют переходу к относительно ускоренным системам. Однако при этом выявляется трудность, состоящая в том, что наши скудные эмпирические зна-

[8] Это утверждение будет изменено в § 6; пока же мы будем строго придерживаться его.

ния о гравитационном поле не позволяют надежно определять виды преобразований, относительно которых следует требовать ковариантности уравнений. В исследовании [9], выполненном совместно с моим другом Гроссманом, выяснилось, что можно и целесообразно требовать ковариантности уравнений прежде всего по отношению к произвольным преобразованиям.

Предварительно сделаем еще одно замечание для устранения напрашивающегося недоразумения. Сторонник обычной современной теории относительности с известным правом называет «кажущейся» скорость материальной точки. Именно, он может выбрать систему отсчета так, что материальная точка имеет в рассматриваемый момент скорость, равную нулю. Если же существует система материальных точек, которые обладают разными скоростями, то он уже не может ввести такую систему отсчета, чтобы скорости всех материальных точек относительно этой системы обращались в нуль. Аналогичным образом физик, стоящий на нашей точке зрения, может называть «кажущимся» гравитационное поле, поскольку соответствующим выбором ускорения системы отсчета он может достичь того, чтобы в определенной точке пространства-времени гравитационное поле обращалось в нуль. Однако примечательно, что обращение в нуль гравитационного поля посредством преобразования в общем случае не может быть достигнуто для протяженных гравитационных полей. Например, гравитационное поле Земли нельзя сделать равным нулю посредством выбора подходящей системы отсчета.

§ 5. Характеристика поля тяжести; его воздействие на физические процессы

Поскольку нам неизвестна совокупность допустимых преобразований пространства-времени, то — как уже отмечалось — сначала можно допустить в качестве наиболее естественных произвольные подстановки переменных x, y, z, t, причем эти переменные для удобства будут обозначаться x_1, x_2, x_3, x_4. При рассматриваемом обобщении оказывается нецелесообразным вводить мнимую временную координату.

Рассмотрим сначала область пространства-времени, в которой соответствующим выбором системы координат можно исключить гравитационное поле. Тогда мы приходим к случаю, известному из обычной теории относительности. Свободная материальная точка движется прямолинейно

---

[9] A. E i n s t e i n, M. G r o s s m a n n. Z. Math. und Phys., 1913, **62**, 225. (Статья 21).

и равномерно в соответствии с уравнением

$$\delta\left\{\int\sqrt{-dx^2-dy^2-dz^2+c^2\,dt^2}\right\}=0.$$

Если мы введем новые координаты x_1, x_2, x_3, x_4 при помощи произвольной подстановки, то относительно новой координатной системы движение точки будет происходить согласно уравнению

причем

$$\left.\begin{aligned}\delta\left\{\int ds\right\}&=0,\\ ds^2&=\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}dx_\mu\,dx_\nu.\end{aligned}\right\}\qquad(1б)$$

Можно также положить

где

$$\left.\begin{aligned}\delta\left\{\int H dt\right\}&=0,\\ H&=-m\frac{ds}{dt}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(1б')$$

Здесь H — функция Гамильтона.

В новой координатной системе движение материальной точки определяется величинами $g_{\mu\nu}$, которые в соответствии с предыдущими параграфами следует понимать как составляющие гравитационного поля, как только мы захотим рассматривать эту новую систему «покоящейся». В общем случае каждое поле тяготения определяется десятью составляющими $g_{\mu\nu}$, которые являются функциями x_1, x_2, x_3, x_4. Движение материальной точки всегда определяется уравнениями указанной формы. Элемент ds по своему физическому смыслу должен быть инвариантом относительно всех подстановок. Тем самым устанавливается закон преобразования для составляющих $g_{\mu\nu}$, если задано преобразование координат. Элемент ds представляет собой единственный инвариант, связанный с четырехмерным линейным элементом (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4). Назовем величину линейного элемента интервалом[10]. В случае отсутствия гравитационного поля значения $g_{\mu\nu}$ при соответствующем выборе переменных сводятся к следующей системе

$$\begin{matrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c^2.\end{matrix}$$

В этом случае мы возвращаемся к обычной теории относительности.

[10] Эйнштейн называет «интервал» ds «Betrag» или «Größe». Мы будем пользоваться термином «интервал», хотя это слово и появилось позже.— *Прим. ред.*

Закон распространения света определяется уравнением

$$ds = 0.$$

Отсюда ясно, что в общем случае скорость света зависит не только от выбранной точки пространства-времени, но и от направления. Тот факт, что мы ничего подобного не замечаем, обусловлен тем, что в доступной нам области пространства-времени $g_{\mu\nu}$ почти постоянны, и мы можем выбрать систему отсчета так, что $g_{\mu\nu}$ обладают указанными постоянными значениями с точностью до малых отклонений.

Так же, как и в теории Нордстрема, мы можем говорить здесь о естественной длине четырехмерного элемента. Это длина элемента, измеренная переносным единичным масштабом и переносными часами. По своему определению эта естественная длина есть скаляр и поэтому должна быть равна интервалу ds с точностью до постоянной, которую мы приравняем 1. Благодаря этому задается соотношение между дифференциалами координат, с одной стороны, и измеримыми длинами и промежутками времени, с другой; поскольку в эти соотношения входят величины $g_{\mu\nu}$, координаты сами по себе не имеют физического смысла. Равным образом соотношения для массы и естественной плотности по-прежнему остаются в силе.

Исходя из уравнений (1б) и (1б′), мы можем теперь точно так же, как при нашем рассмотрении теории Нордстрема, составить лагранжевы уравнения движения материальной точки. Из них мы получим выражения для импульса I, энергии E материальной точки, а из поля тяжести — для силы $\mathfrak{K}$, действующей на материальную точку. Так же, как и раньше, мы можем вывести выражения для соответствующих величин на единицу объема и получить

$$\begin{gathered} i_x = -\rho_0 \sqrt{-g} \sum_{\nu s} g_{1\nu} \frac{dx_\nu}{dx_s} \frac{dx_4}{dx_s}, \\ -\eta = -\rho_0 \sqrt{-g} \sum_{\nu s} g_{4\nu} \frac{dx_\nu}{dx_s} \frac{dx_4}{dx_s}, \\ \mathfrak{k}_x = -\frac{1}{2} \rho_0 \sqrt{-g} \sum_{\nu s} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1} \frac{dx_\mu}{dx_s} \frac{dx_\nu}{dx_s}. \end{gathered} \tag{2в}$$

Отсюда мы получаем, как и раньше, закон сохранения энергии-импульса для несвязанного потока массы:

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \Theta_{\mu\nu} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4), \tag{5б}$$

$$\Theta_{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

При этом g означает определитель $g_{\mu\nu}$. Первые три равенства (5б) выражают закон сохранения импульса, последнее — закон сохранения энергии. Этой системе можно придать несколько более наглядную форму, введя величины

$$\mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g}\sum_{\mu} g_{\sigma\mu}\Theta_{\mu\nu}.$$

Тогда получим

$$\sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\tau}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}\gamma_{\mu\tau}\mathfrak{T}_{\tau\nu}, \tag{5в}$$

где $\gamma_{\mu\tau}$ означает поделенные на g миноры $g_{\mu\nu}$.

Физический смысл величин $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ вытекает из следующей схемы [11]

$$\begin{matrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} & \mathfrak{T}_{13} & \mathfrak{T}_{14} \\ \mathfrak{T}_{21} & \mathfrak{T}_{22} & \mathfrak{T}_{23} & \mathfrak{T}_{24} \\ \mathfrak{T}_{31} & \mathfrak{T}_{32} & \mathfrak{T}_{33} & \mathfrak{T}_{34} \\ \mathfrak{T}_{41} & \mathfrak{T}_{42} & \mathfrak{T}_{43} & \mathfrak{T}_{44} \end{matrix} = \begin{matrix} -X_x & -X_y & -X_z & i_x \\ -Y_x & -Y_y & -Y_z & i_y \\ -Z_x & -Z_y & -Z_z & i_z \\ \mathfrak{f}_x & \mathfrak{f}_y & \mathfrak{f}_z & \eta. \end{matrix}$$

Причем стоящие справа величины имеют тот же смысл, что и в § 3. Правая часть (5в) выражает отдаваемый гравитационным полем в единице объема и в единицу времени импульс ($\sigma = 1, 2, 3$) или отдаваемую энергию ($\sigma = 4$).

Равенства (5б) и (5в) без сомнения имеют значение, далеко выходящее за рамки рассматриваемого движения несвязанных масс; вероятно, они выражают вообще баланс энергии и импульса между материальной системой и полем тяжести. Только для каждой особой физической области величины $\Theta_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ необходимо выражать особым образом.

§ 6. Замечания о математическом методе

В изложенной теории обычная четырехмерная теория векторов и тензоров не может применяться, поскольку в соответствии с ней Σdx_{ν}^2 не является инвариантом. Фундаментальный инвариант, который мы назвали интервалом, есть

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu}.$$

Однако теория ковариантов таких четырехмерных многообразий, определенных своим линейным элементом, была развита ранее в особенности в

[11] В оригинале пропущены все знаки минус в правой части. Эта опечатка исправлена автором в одной из последующих работ (статья 25). — *Прим. ред.*

работах Риччи и Леви-Чивиты[12], которые опирались главным образом на основопологающую работу Кристоффеля[13], и известна под названием «абсолютного дифференциального исчисления». Доступное изложение важнейших теорем можно найти в выполненной М. Гроссманом части нашей цитированной выше работы.

В этой теории различают много видов тензоров, а именно: ковариантные, контравариантные и смешанные тензоры, для которых действуют сходные алгебраические законы, как в общеизвестном случае, который характеризуется эвклидовым линейным элементом. Определены также дифференциальные операции, дающие при применении к тензорам снова тензоры, так что для алгебраических и дифференциальных соотношений обычной теории векторов и тензоров можно указать соответствующие соотношения и в случае обобщенного линейного элемента.

Следует заметить, что dx_ν есть ν-я составляющая контравариантного тензора 1-го ранга (т. е. с одним индексом), $g_{\mu\nu}$ или $\gamma_{\mu\nu}$ суть составляющие ковариантного или контравариантного тензора 2-го ранга, который мы будем называть фундаментальным тензором, ввиду его значения для линейного элемента. Далее, $\Theta_{\mu\nu}$ есть контравариантный тензор 2-го ранга, $\frac{1}{\sqrt{-g}}\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ — смешанный тензор 2-го ранга.

Из равенства (5б) вытекает, что «дивергенция» тензора $\Theta_{\mu\nu}$ обращается в нуль. Отсюда следует, что равенство (5б) ковариантно относительно любых подстановок, чего, конечно, надо требовать и с физической точки зрения.

Заменяя уравнения теории относительности с помощью абсолютного дифференциального исчисления соответствующими им уравнениями, мы получаем системы уравнений, учитывающих влияние гравитационного поля на рассматриваемую область явлений. Эта задача для электромагнитных явлений в вакууме уже решена Коттлером[14].

Из сказанного следует, что вопрос о влиянии гравитационного поля на любые физические процессы в принципе решается удовлетворительно, а именно таким образом, что соответствующие уравнения являются ковариантными по отношению к любым преобразованиям. При этом пространственно-временные координаты сводятся к произвольно выбираемым вспомогательным переменным, не имеющим физического смысла. Следовательно, вся проблема гравитации была бы решена удовлетворительно, если бы удалось найти ковариантные относительно произ-

---

[12] Ricci u. Levi-Civitá. Méthodes de calcul différentiel absolut et leurs applications. Math. Ann., 1900, **54**, 125.

[13] Christoffel. J. Math., 1869, **70**, 96.

[14] Kottler. Über die Raumzeitlinien der minkowskischen Welt. -Wien. Berlin, 1912, 121.

вольных преобразований уравнения, которым удовлетворяет гравитационное поле $g_{\mu\nu}$. Однако решить проблему таким способом нам не удалось [15]. Решение все же удалось получить, дополнительно ограничивая выбор систем отсчета. К этому пути довольно естественно приводит следующее соображение. Ясно, что для одного только материального процесса (т. е. без его гравитационного поля) законы сохранения энергии и импульса не могут выполняться. Этому обстоятельству соответствует появление члена в правой части равенства (5в). С другой стороны, мы должны, по-видимому, требовать, чтобы для материального процесса и гравитационного поля вместе взятых выполнялись законы сохранения. Это следует из того, что мы требуем существования выражений $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$ для натяжений, плотности потока импульса и энергии и плотности энергии гравитационного поля, которые вместе с соответствующими величинами $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ для материального процесса удовлетворяют соотношению

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}) = 0.$$

Если $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$ с точки зрения теории инвариантов должны иметь такой же характер, как и $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$, то левая часть этого соотношения не может быть ковариантной по отношению к произвольным преобразованиям; по-видимому, она является таковой только по отношению к произвольным линейным преобразованиям.

Следовательно, требуя выполнения законов сохранения, мы в значительной степени специализируем систему отсчета и тем самым отказываемся от установления уравнений гравитации в общековариантном виде.

Таким образом, здесь находится граница применимости соображений, приведенных в § 4. Если исходить из системы отсчета, по отношению к которой выполняются законы сохранения в заданной форме, и произвести преобразование ускорения к новой системе отсчета, то по отношению к последней законы сохранения уже не будут выполняться. Несмотря на это, я считаю, что уравнения, выведенные на основе соображений § 1, не теряют под собой почвы. С одной стороны, конечно, можно описывать процессы по отношению к произвольным системам отсчета, с другой стороны, невозможно понять, какие ограничения возникают для этих уравнений после введения ограничения на системы отсчета.

---

[15] Недавно я нашел доказательство, что подобное общековариантное решение вообще не может существовать. (Ср. стр. 265.— *Прим. ред.*)

§ 7. Система уравнений гравитационного поля

Искомая система уравнений должна быть обобщением уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\varkappa\rho.$$

Так как в нашей теории гравитационное поле вместо φ определяют 10 величин $g_{\mu\nu}$, то вместо одного уравнения мы должны получить 10 уравнений. Равным образом вместо ρ в качестве источника поля в правой части уравнений должен появиться симметричный тензор $\Theta_{\mu\nu}$ с десятью составляющими, так что искомые уравнения должны иметь вид

$$\Gamma_{\mu\nu} = \varkappa\Theta_{\mu\nu}.$$

$\Gamma_{\mu\nu}$ представляют собой дифференциальное выражение, образованное из $g_{\mu\nu}$, о котором мы знаем, что оно должно быть ковариантным относительно линейных преобразований.

Затем я предположил, что $\Gamma_{\mu\nu}$ не содержит производных выше второго порядка. Далее, закон сохранения требует следующее: если в правой части уравнения (5б) $\Theta_{\mu\nu}$ заменить на $^1/\varkappa\Gamma_{\mu\nu}$, то эта часть должна допускать такое преобразование, чтобы ее, как и левую часть (5б), можно было записать в виде суммы производных. Эти условия позволили, как мне представляется, единственным путем определить $\Gamma_{\mu\nu}$ и тем самым искомые уравнения. Последние имеют вид

$$\Delta_{\mu\nu}(\gamma) = \varkappa(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu}), \tag{7a}$$

причем

$$\Delta_{\mu\nu}(\gamma) = \sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) - \sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\beta}\,g_{\tau\rho}\,\frac{\partial\gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial\gamma_{\nu\rho}}{\partial x_\beta}$$

и

$$-2\varkappa\vartheta_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\tau\rho}\left(\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right).$$

Уравнение энергии-импульса для материального процесса вместе с гравитационным полем принимает вид

$$\sum\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\sqrt{-g}\,g_{\sigma\mu}(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu})\} = 0. \tag{9a}$$

Из соотношения (9а) видно, что $\vartheta_{\mu\nu}$ играет для гравитационного поля такую же роль, как $\Theta_{\mu\nu}$ для материального процесса. По отношению к линейным преобразованиям $\vartheta_{\mu\nu}$ является контравариантным тензором, и мы будем называть его контравариантным тензором энергии-натяжений гравитационного поля. В соответствии с постулатом 2 $\vartheta_{\mu\nu}$, как и $\Theta_{\mu\nu}$, описывает источник поля.

Соотношения несколько упрощаются, если ввести компоненты натяжений

$$\mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}$$

и

$$\mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu} \vartheta_{\mu\nu}.$$

Тогда эти соотношения принимают вид

$$\sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\, \gamma_{\alpha\beta}\, g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) = \varkappa\,(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}), \tag{7б}$$

$$-2\varkappa \mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g}\left(\sum_{\beta\tau\rho} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\tau\rho} \gamma_{\sigma\nu}\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right),$$

а закон сохранения энергии-импульса принимает вид:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}) = 0. \tag{9б}$$

Уравнение (7б) позволяет заключить, что полученные таким образом соотношения удовлетворяют постулату 2 [16].

§ 8. Ньютоновское гравитационное поле

Полученные уравнения гравитации, конечно, очень сложны. Однако некоторые важные следствия из них легко получить на основе следующего соображения. Если бы обычная теория относительности в известной форме была точной, то $g_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$ выражались бы следующими таблицами [17]:

Таблица $g_{\mu\nu}$

—1	0	0	0
0	—1	0	0
0	0	—1	0
0	0	0	c^2

Таблица $\gamma_{\mu\nu}$

—1	0	0	0
0	—1	0	0
0	0	—1	0
0	0	0	$\frac{1}{c^2}$.

---

[16] Из уравнения (7б) можно увидеть, например, что величины $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$, которые для гравитационного поля играют такую же роль, что и величины $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ для материального процесса, являются в согласии с постулатом 2 такими же источниками поля, как и величины $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$.

[17] Напомним, что сейчас $\gamma_{\mu\nu}$ обозначают как $g^{\mu\nu}$.— *Прим. ред.*

В действительности, уравнения гравитации не допускают, чтобы компоненты фундаментального тензора принимали эти значения в конечной области, если в этой области совершается какой-нибудь физический процесс. Однако оказывается, что в доступной нам области Вселенной отклонения компонент тензора от указанных постоянных значений можно считать очень малыми. Мы получим хорошее приближение, если эти отклонения, которые мы обозначим соответственно через $\overset{*}{g}_{\mu\nu}$ или $\overset{*}{\gamma}_{\mu\nu}$, вместе с их производными мы будем учитывать только тогда, когда они линейны, пренебрегая всеми теми членами, в которые входят произведения двух таких величин. Тогда уравнения (7а) или (7б) принимают вид

$$\Box \overset{*}{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \overset{*}{g}_{\mu\nu}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overset{*}{g}_{\mu\nu}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overset{*}{g}_{\mu\nu}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overset{*}{g}_{\mu\nu}}{\partial t^2} = \varkappa T_{\mu\nu}, \tag{7в}$$

причем $T_{\mu\nu}$ для несвязанных масс задается схемой

$$\begin{matrix}
\frac{\rho_0}{c^2-q^2}\dot{x}\dot{x} & \frac{\rho_0}{c^2-q^2}\dot{x}\dot{y} & \cdot & -\frac{\rho_0 c^2}{c^2-q^2}\dot{x} \\
\frac{\rho_0}{c^2-q^2}\dot{y}\dot{x} & \cdot & \cdot & -\frac{\rho_0 c^2}{c^2-q^2}\dot{y} \\
\cdot & \cdot & \cdot & -\frac{\rho_0 c^2}{c^2-q^2}\dot{z} \\
-\frac{\rho_0 c^2}{c^2-q^2}\dot{x} & \cdot & \cdot & \frac{\rho_0 c^4}{c^2-q^2}
\end{matrix} \tag{8}$$

Ньютонову систему мы получим, если сделаем следующие приближения.

1. Из источников поля учитываются только несвязанные массы.

2. Не учитывается влияние скоростей масс, создающих поле; следовательно, поле считается статическим.

3. В уравнениях движения материальной точки составляющие скорости и ускорения рассматриваются как малые величины и сохраняются лишь величины низшего порядка.

Наконец, нужно еще предположить, что в бесконечности $\overset{*}{g}_{\mu\nu}$ обращаются в нуль.

Тогда из (7в) и (8) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \Delta \overset{*}{g}_{\mu\nu} &= 0 \qquad (\text{если } \mu \neq \nu \neq 4), \\ \Delta \overset{*}{g}_{44} &= \varkappa c^2 \rho_0, \end{aligned}\right\} \tag{7г}$$

где через Δ обозначен оператор Лапласа.

Отсюда, как известно, вытекает

$$g^*_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{кроме случая } \mu = \nu = 4),$$

$$g^*_{44} = \frac{\varkappa c^2}{4\pi} \int \frac{\rho_0 dv}{r},$$

причем интегрирование производится по трехмерному пространству и r означает расстояние между dv и источником. Из уравнений (1б) или (1б′) с учетом сделанных пренебрежений имеем

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^*_{44}}{\partial x}. \tag{1в}$$

Уравнения (9) и (1в) содержат ньютонову теорию гравитации, причем обычная гравитационная постоянная K связана с нашей постоянной $\varkappa$ соотношением

$$K = \frac{\varkappa c^2}{8\pi}, \tag{11′}$$

откуда при $K = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$ получается $\varkappa = 1{,}88 \cdot 10^{-27}$.

Для «естественного» четырехмерного элемента ds в рассматриваемом приближении получаем

$$ds = \sqrt{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + g_{44}\, dt^2},$$

где

$$g_{44} = c^2 \left(1 - \frac{\varkappa}{4\pi} \int \frac{\rho_0 dv}{r}\right).$$

Отсюда видно, что координаты равны естественным длинам ($dt = 0$); следовательно, «ньютоново» гравитационное поле не искажает масштабы. Напротив, скорость хода часов зависит от гравитационного потенциала. Именно, $\frac{ds}{dt}$ является мерой этой скорости хода, если подставить $dx = dy = dz = 0$. Тогда получим

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{44}} = \text{const} \left(1 - \frac{\varkappa}{8\pi} \int \frac{\rho_0 dv}{r}\right).$$

Следовательно, часы идут тем медленнее, чем бóльшие массы расположены вблизи от них [18]. Интересно отметить, что этот же результат получается и в теории Нордстрема.

---

[18] Согласно постулату 4, этот результат справедлив для скорости протекания любого процесса.

Для скорости распространения света ($ds = 0$) находим

$$\mathfrak{L} = \left|\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}}\right|_{ds=0} = \sqrt{g_{44}} = c\left(1 - \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\rho_0 dv}{r}\right).$$

Таким образом, согласно излагаемой теории и в противоположность теории Нордстрема, световые лучи искривляются гравитационным полем. Это единственное найденное до сих пор следствие теории, доступное проверке на опыте.

Не делая дальнейших приближений при вычислении поля, приведем точные уравнения движения точки в рассматриваемом здесь поле. Из общего уравнения движения (1б′) имеем

$$\frac{d}{dt}\left\{-m\sum_{\nu} g_{\sigma\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\right\} = -\frac{1}{2}m\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{dt}. \qquad (1б'')$$

Отсюда для частного случая ньютонова поля получаем

$$\frac{d}{dt}\left\{m\frac{\dot{x}}{\sqrt{g_{44} - q^2}}\right\} = -\frac{1}{2}m\frac{\frac{\partial g_{44}}{\partial x}}{\sqrt{g_{44} - q^2}}. \qquad (1в')$$

§ 9. Об относительности инерции

Из уравнения (1в′) следует, что импульс I и энергия E материальной точки, медленно движущейся в ньютоновом поле тяжести, выражаются формулами

$$\left.\begin{aligned} I_x &= m\left(1 + \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\rho_0 dv}{r}\right)\frac{x}{c} \quad \text{и т. д.} \\ \text{и} \quad E &= mc\left(1 - \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\rho_0 dv}{r}\right) + \frac{1}{2}\frac{m}{c}\left(1 + \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\rho_0 dv}{r}\right)q^2. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Таким образом, несмотря на то, что энергия покоящейся материальной точки, как показывает первый член выражения для E, уменьшается от скопления масс в ее окрестности, то же самое скопление масс приводит к увеличению инерции рассматриваемой точки[19]. Этот результат представляет большой теоретический интерес. В самом деле, если инерция тела повышается при скоплении масс в его окрестности, то едва ли можно отказаться от того, чтобы считать инерцию точки обусловленной существованием остальных масс. Следовательно, инерция проявляется как своего рода взаимодействие ускоряемой материальной точки со всеми остальными материальными точками.

[19] Речь идет о виде первой и второй скобок в выражении для E.— *Прим. ред.*

Этот результат представляется вполне удовлетворительным, если принять во внимание следующее. Говорить о движении, а следовательно, также об ускорении тела A самого по себе не имеет смысла. Можно говорить только о движении или ускорении тела A относительно других тел B, C и т. д. То, что справедливо для ускорения в кинематическом отношении, должно быть справедливым и для инертного сопротивления, которое тела оказывают ускорению; разумно, а может быть и просто необходимо ожидать априори [20], что инертное сопротивление есть не что иное, как сопротивление ускорению рассматриваемого тела A относительно совокупности всех остальных тел B, C и т. д. Известно, что впервые эту точку зрения со всей остротой и ясностью выдвинул Э. Мах в своей истории механики, так что здесь можно просто сослаться на его выводы. Сошлемся также на остроумную брошюру венского математика В. Гофмана, где независимо выдвинута та же самая точка зрения. Изложенное выше утверждение я буду называть гипотезой относительности инерции.

Во избежание недоразумений необходимо еще раз сказать, что я, как и Мах, не придерживаюсь взгляда, что относительность инерции является логической необходимостью. Однако теория, обеспечивающая относительность инерции, более удовлетворительна, чем привычная для нас современная теория, поскольку в последней вводится инерциальная система, состояние движения которой, с одной стороны, не связано с состоянием наблюдаемых предметов и, следовательно, не определяется чем-либо доступным восприятию, а, с другой стороны, она должна определять поведение материальных точек.

Однако понятие относительности инерции не только требует, чтобы инерция массы A увеличивалась при скоплении покоящихся масс B, C, ... в ее окрестности; оно требует также, чтобы это увеличение инертности не происходило, когда массы B, C, ... ускоряются вместе с массой A. Это можно выразить также следующим образом: ускорение масс B, C, ... должно индуцировать ускоряющую силу, приложенную к A и направленную по ускорению. При этом ясно, что эта ускоряющая сила должна превысить то увеличение инерции, которое обусловлено одним только присутствием масс B, C, ..., поскольку, в соответствии с соотношением между инерцией и энергией системы, система A, B, C, ... как целое должна быть тем более инертной, чем меньше ее гравитационная энергия.

Чтобы убедиться в том, что в нашей теории это требование выполняется, мы должны учесть в правой части системы уравнений (7в) те члены, ко-

[20] Обычно следствия подобных рассмотрений получаются путем введения таких систем отсчета, по отношению к которым свободные от действия сил материальные точки совершают прямолинейное и равномерное движение (инерциальные системы). При этом остается, к сожалению, невыясненным, каким образом можно отличить инерциальные системы от других систем.

торые пропорциональны первой степени скорости масс, служащих источниками поля. Тогда вместо системы уравнений (7г) получим

$$
\begin{aligned}
&\Box g^*_{\mu\nu} = 0 \qquad (\text{если } \mu \neq 4 \text{ и } \nu \neq 4),\\
&\Box g^*_{14} = -\varkappa\rho_0\dot{x},\\
&\Box g^*_{24} = -\varkappa\rho_0\dot{y},\\
&\Box g^*_{34} = -\varkappa\rho_0\dot{z},\\
&\Box g^*_{44} = -\varkappa c^2\rho_0.
\end{aligned}
\tag{7д}
$$

Уравнения движения материальной точки (1б″) отличаются от (1в′) тем, что теперь отличны от нуля также g_{14}, g_{24}, g_{34}. В подробной записи они имеют вид

$$
\frac{d}{dt}\left\{m\left(\frac{dx}{ds} - g_{14}\frac{dt}{ds}\right)\right\} =
$$
$$
= -\frac{1}{2}m\left(2\frac{\partial g_{14}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + 2\frac{\partial g_{24}}{\partial x}\frac{dy}{ds} + 2\frac{\partial g_{34}}{\partial x}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial g_{44}}{\partial x}\frac{dt}{ds}\right) \qquad \text{и т. д.}
$$

Для медленно движущейся точки это уравнение можно записать в обычных трехмерных векторных обозначениях следующим образом

$$
\ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{1}{2}\operatorname{grad} g_{44} + \dot{\mathfrak{g}} - [\dot{\mathfrak{r}}, \mathfrak{o}]. \tag{1г}
$$

При этом $\mathfrak{r}$ — радиус-вектор материальной точки, $\dot{\mathfrak{r}} = (d\mathfrak{r}/dt)$ и т. д. $\mathfrak{g}$ — вектор с составляющими g_{14}, g_{24}, g_{34}, $\mathfrak{o} = \operatorname{rot}\mathfrak{g}$.

Обозначив скорость масс — источников поля (составляющие $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$) — через $\mathfrak{v}$, уравнения (7в) можно написать короче

$$
\left.
\begin{aligned}
\Box \mathfrak{g} &= -\varkappa\rho_0\mathfrak{v},\\
\Box g^*_{44} &= \varkappa c^2\rho_0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{7д′}
$$

Уравнения (7д′) и (1г) показывают, как воздействуют друг на друга медленно движущиеся массы, согласно новой теории гравитации. Эти уравнения в значительной мере соответствуют уравнениям электродинамики, причем g_{44} соответствует скалярному потенциалу электрической массы с точностью до знака и с точностью до множителя $^1/_2$ в первом члене правой части уравнения (1г). Векторному потенциалу электрического тока соответствует $\mathfrak{g}$; второй член в правой части (1г), соответствующий напряженности электрического поля, возникающего вследствие изменения векторного потенциала во времени, в точности выражает те совпадающие по направлению с ускорением индукционные воздействия, которые мы должны ожидать в соответствии с понятием инертности энергии. Вектор $\mathfrak{o}$ соответствует в электродинамике напряженности магнитного поля (ротору векторного потенциала); следовательно, последний член в уравнении (1г) соответствует лоренцовой силе.

Далее следует напомнить, что член вида $[\mathfrak{r}, \dot{\mathfrak{o}}]$ появляется в механике относительного движения, где он известен под названием силы Кориолиса. Из уравнений (7д′) можно показать, что внутри вращающейся полой сферы существует поле вектора $\mathfrak{o}$, вследствие чего плоскость колебаний маятника, укрепленного внутри полой сферы, не остается неподвижной в пространстве, но ввиду вращения сферы должна совершать прецессионное движение в сторону этого вращения. Этот результат также можно было предвидеть с точки зрения относительности инерции, и он давно предусматривался. Замечательно, что теория и в этом пункте соответствует указанной точке зрения; к сожалению, ожидаемый эффект настолько мал, что мы не можем надеяться на его обнаружение в опытах на Земле или в астрономии.

§ 10. Заключительные замечания

Выше были очерчены пути развития теории тяготения. При этом можно оставаться на точке зрения обычной теории относительности, т. е. предположить, что уравнения, выражающие законы природы, ковариантны лишь по отношению к линейным ортогональным преобразованиям. В этом случае можно получить скалярную теорию тяготения (теория Нордстрема), которая достаточно проста и удовлетворяет основным требованиям, предъявляемым к теории тяготения, однако из нее не вытекает относительность инерции. Можно также обобщить теорию относительности указанным выше способом. В этом случае хотя и получаются уравнения значительной сложности, но зато искомые уравнения следуют из основных положений при удивительно малом числе гипотез; кроме того, при этом восстанавливается точка зрения относительности инерции.

Соответствует ли природе первый или второй путь, должно решить исследование снимков звезд, появляющихся рядом с Солнцем во время полных солнечных затмений. Можно надеяться, что к важным результатам приведет уже наблюдение солнечного затмения 1914 года.

В этой работе ясно сформулированы различия между скалярными теориями гравитационного поля (т. е. теориями, в которых потенциал этого поля считается скаляром) и теорией, в которой гравитационное поле является тензором (что, фактически, отвечает введению кривизны пространства). В работе указано, что опытом, который позволит сделать выбор между теориями, является наблюдение отклонения луча света в поле Солнца. В 1914 г. этому опыту помешала начавшаяся мировая война и он был проведен лишь в 1919 г. (см. статью 52).

24

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ОТВЕТ НА ВОПРОС РЕЙСНЕРА*

К сожалению, я совершенно не понял вопроса, заданного мне Рейснером в дискуссии по моему докладу о гравитации [1], и неправильно ответил, хотя вопрос был поставлен ясно. Повторяю сначала вопрос [2]:

«Эйнштейн говорил об отклоняющем воздействии поля тяжести на колебательную энергию светового луча. Теперь я прошу Эйнштейна высказать мнение о... влиянии поля тяжести на собственную энергию этого поля.

В нелинейном уравнении Эйнштейна для потенциала, обобщающем уравнение Лапласа, один из членов можно, как показал Эйнштейн, отождествить с гравитационным воздействием статической энергии поля. Как же тогда показать или вывести математически, что статическая энергия чисто гравитационного поля хотя и обладает инерцией и тяжестью, но не обладает остальными свойствами тяжелой массы — не обнаруживает пондеромоторных сил? Другими словами, как получается, что поле остается статическим, хотя полевая энергия пустого пространства подвержена тяжести? Как охарактеризовать особый вид энергии, присущий тяжелой массе, в противоположность другим видам энергии?».

Сначала напомним, что безусловно следует требовать, чтобы вещество и энергия вместе удовлетворяли законам сохранения импульса и энергии. Поэтому необходимо потребовать, чтобы существовали уравнения вида (9б), т. е.

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}) = 0. \tag{9б}$$

---

* *Nachträgliche Antwort auf eine Frage von Herr Reißner.* Phys. Z., 1914, 15, 108—110.

[1] Phys. Z., 1913, 14, 1265. (Статья 23).

[2] Мы не повторяем примечания, потому что цитата достаточно ясно формулирует вопрос. [Речь идет о примечании, которое добавил Рейснер к напечатанному отчету по докладу Эйнштейна, считая, что оно делает вопрос понятней.— *Прим. ред.*].

Предполагая, что система из вещества и гравитационного поля имеет конечные размеры, интегрированием (9б) по всему трехмерному объему, занимаемому системой, получаем четыре уравнения

$$\frac{d}{dt}\left\{\int (\mathfrak{T}_{\sigma 4} + \mathfrak{t}_{\sigma 4})\, dV\right\} = 0,$$

т. е. уравнения, имеющие обычный вид законов сохранения.

Едва ли можно найти для законов сохранения иное, чем (9б), четырехмерное симметричное выражение.

Однако уравнение (9б) может вызвать сомнение, выраженное Рейснером. Согласно (9б), уравнения импульса статического поля тяготения в отсутствие вещества принимают вид

$$\frac{\partial t_{\sigma 1}}{\partial x} + \frac{\partial t_{\sigma 2}}{\partial y} + \frac{\partial t_{\sigma 3}}{\partial z} = 0.$$

При этом равновесие в статическом поле тяготения сводится к равновесию одних только *поверхностных сил*, тогда как в поле тяжести должны существовать своеобразные объемные силы, поскольку из основных предпосылок теории следовало бы ожидать, что поле тяжести действует на свои собственные «компоненты энергии» $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$ так же, как на соответствующие компоненты энергии материи $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$.

Между тем следует заметить, что из таких представлений не вытекает никаких следствий о физической природе рассматриваемых взаимодействий. Их возможность не означает ничего другого, кроме того, что выполняется закон сохранения импульса. Когда Рейснер говорит, что существование плотности энергии статического гравитационного поля должно приводить к отдаче импульса поля тяжести самому себе, то я с ним согласен, если при этом не отказываться от основной идеи теории. Но эта отдача импульса должна компенсироваться действием (отдачей импульса) сил давления, так как в противном случае нарушился бы закон сохранения импульса. Объемные и поверхностные силы не разделяются в законе сохранения импульса, и он требует, чтобы все силы можно было свести к поверхностным[3].

Однако, с другой стороны, от теории следует требовать, чтобы компоненты энергии поля тяжести, входящего в замкнутую систему, давали точно такой же вклад в тяжелую массу всей системы, какой вносят компоненты энергии вещества, образующего систему. Как показано ниже, это условие действительно выполняется в теории.

[3] В электростатике, например, все силы, действующие на вещество, можно представить через тензор натяжений Максвелла; однако из этого нельзя сделать вывод о том, что на вещество в самом деле не действуют объемные силы; речь идет скорее о таком способе представления, которое делает очевидным справедливость принципа равенства действия и противодействия.

Расположим в прежде свободном от гравитации пространстве $\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=0\right)$ статическую материальную систему Σ, компоненты энергии которой частично принадлежат гравитационному полю, порождаемому частями Σ. Уравнения гравитационного поля (7б) после подстановки

$$\sum_{\beta\mu}\sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta}g_{\sigma\mu}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}=G_{\alpha\sigma\nu}$$

имеют вид

$$\sum_\alpha\frac{\partial G_{\alpha\sigma\nu}}{\partial x_\alpha}=\varkappa\,(\mathfrak{T}_{\sigma\nu}+\mathfrak{t}_{\sigma\nu}).$$

При этом величины $G_{\alpha\sigma\nu}$ в известном смысле можно называть компонентами гравитационного поля. Поскольку все производные по времени в нашем случае должны обращаться в нуль, то интегрированием по объему внутри замкнутой поверхности отсюда получается следующая система уравнений, соответствующих теореме Гаусса:

$$\int(G_{1\sigma\nu}\cos(nx)+G_{2\sigma\nu}\cos(ny)+G_{3\sigma\nu}\cos(nz))\,d\sigma=\varkappa\int(\mathfrak{T}_{\sigma\nu}+\mathfrak{t}_{\sigma\nu})\,dV,$$

где n означает направление внешней нормали к элементу поверхности $d\sigma$, а dV — элемент объема.

Выберем в качестве границы объема интегрирования поверхность, заключающую в себе систему Σ вместе с ее гравитационным полем, так что с точностью до пренебрежимо малых величин эта поверхность включает всю гравитационную энергию поля. Тогда нетрудно убедиться в том, что число «силовых линий гравитационного поля», пронизывающих бесконечно удаленную поверхность, зависит только от интеграла в правой части соответствующего уравнения. При этом, как показывают уравнения сохранения импульса, в интересующем нас случае при соответствующем выборе систем отсчета правая часть отлична от нуля только для $\sigma=\nu=4$.

Из сказанного следует, что напряженность гравитационного поля на большом расстоянии от Σ зависит, кроме расстояния, только от интеграла

$$\int(\mathfrak{T}_{44}+\mathfrak{t}_{44})\,dV,$$

т. е. только от полной энергии системы Σ (энергия вещества плюс энергия гравитационного поля)[4]. Аналогичное положение имеет место и для пон-

[4] При этом молчаливо предполагается радиальная симметрия поля в бесконечности. Этого можно добиться, выбирая систему отсчета так, чтобы в бесконечности выполнялся принцип постоянства скорости света (система отсчета, законная в смысле первоначальной теории относительности).

деромоторного действия гравитационного поля, порожденного системой Σ, на материальную точку P, достаточно удаленную от Σ.

Однако эта материальная точка P оказывает обратное воздействие на систему Σ и в силу равенства (9б) как раз таким образом, что соблюдается равенство действия и противодействия. Следовательно, полное силовое воздействие точки P на систему Σ, производимое гравитацией, зависит, помимо относительного расположения Σ и P и массы P, только от полной энергии системы Σ. Тем самым наше утверждение доказано.

Впрочем, в основах теории содержится не только требование о том, чтобы тяжелая масса замкнутой статической системы определялась лишь ее полной энергией, так что гравитационное поле дает такой же вклад в полную массу, как и вещество. Напротив, то же самое должно выполняться и для инертной массы системы. Это доказывается следующим образом.

Заметим сначала, что $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ $(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}$ (есть смешанный) по индексу σ ковариантный, по индексу ν контравариантный) тензор относительно линейных преобразований.

Пусть $\mathfrak{A}_{\sigma\nu}$ — произвольный смешанный тензор такого рода. Тогда $\sum\limits_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu}$ — ковариантный вектор или, что то же самое,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu} \sqrt{-g}}{\partial x_\nu} - \sum \mathfrak{A}_{\sigma\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\nu}.$$

Но при линейном преобразовании $\sqrt{-g}$ изменяется только на постоянный множитель. Поэтому $\frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\nu}$ есть ковариантный 4-вектор, так же как и второй член написанного выше выражения. Отсюда следует, что четыре величины

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu} \sqrt{-g}}{\partial x_\nu}$$

также образуют ковариантный 4-вектор. С другой стороны, произведение четырехмерного элемента объема $d\tau$ на $\sqrt{-g}$ есть скаляр. Отсюда следует, что и

$$d\tau \sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu} \sqrt{-g}}{\partial x_\nu}$$

также есть ковариантный 4-вектор. Это справедливо и для интеграла от этой величины по произвольной части четырехмерного объема.

Сделаем теперь следующие предположения о величинах $\mathfrak{A}_{\sigma\nu}$.

1. Все $\mathfrak{A}_{\sigma\nu}$ для (положительных и отрицательных) бесконечно больших x_1, x_2, x_3 обращаются в нуль.

2. Сумма $\sum\limits_{\nu} \dfrac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu}$ отличается от нуля только в некотором конечном интервале x_4, а для меньших и больших значений x_4 обращается в нуль.

При этих предположениях интеграл

$$\int d\tau \sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu} \sqrt{-g}}{\partial x_\nu},$$

распространенный на все значения x_1, x_2, x_3 и на интервал x_4 между двумя значениями t_1 и t_2, включающими указанный в пункте 2 интервал x_4, равен

$$\left| \int\int\int \mathfrak{A}_{\sigma4} \sqrt{-g}\, dx_1 dx_2 dx_3 \right|_{t_1}^{t_2} = \left| I_\sigma \right|_{t_1}^{t_2}.$$

В соответствии со сказанным выше, этот интеграл, распространенный на определенную часть четырехмерного объема, есть ковариантный 4-вектор. Это свойство сохраняется, если распространить область интегрирования на объемы, в которых подынтегральная функция равна нулю. Отсюда следует, что и последний рассмотренный нами интеграл также является 4-вектором. Это справедливо и для трехмерного интеграла

$$I_\sigma = \int \mathfrak{A}_{\sigma4} \sqrt{-g}\, dV,$$

если для всех рассматриваемых систем отсчета область трехмерного интегрирования находится внутри четырехмерного объема, в котором всюду выполняется равенство

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Отсюда, подставляя вместо $\mathfrak{A}_{\sigma\nu}$ тензор $\dfrac{1}{\sqrt{-g}}(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu})$, заключаем, что четыре трехмерных интеграла

$$I_\sigma = \int (\mathfrak{T}_{\sigma4} + \mathfrak{t}_{\sigma4})\, dV,$$

распространенные на замкнутую (полную) систему Σ, образуют ковариантный 4-вектор.

Ясно, что три первых интеграла I_1, I_2, I_3 образуют компоненты импульса (с обратным знаком), а последний (I_4) дает полную энергию системы Σ. Отсюда следует, что инерциальные свойства замкнутой системы (рассматриваемой как целое) тождественны инерциальным свойствам материальной точки со сколь угодно малой массой. Мы должны только исследовать, как связана «масса» системы с указанными интегралами. Обозначая через I_σ^* ковариантный вектор импульса-энергии материальной точки с массой m, получаем [5]

$$I_\sigma^* = m \sum_\nu g_{\sigma\nu} \frac{\partial x_\nu}{ds} ,$$

причем

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu.$$

Предположим, что поле тяжести на бесконечности исчезает, т. е. что величины $g_{\mu\nu}$ на бесконечности постоянны. Следовательно, мы можем выбрать систему отсчета так, что величины $g_{\mu\nu}$ всюду в бесконечности принимают значения

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{matrix}$$

здесь c — постоянная.

Далее мы выберем систему отсчета так, чтобы система Σ в целом, как и эквивалентная ей материальная точка, находилась в покое в выбранной системе отсчета, т. е. так, чтобы интегралы I_1, I_2, I_3 и I_1^*, I_2^*, I_3^* обращались в нуль. Тогда получается

$$I_4 = \int (\mathfrak{T}_{44} + \mathfrak{t}_{44})\, dV,$$

$$I_4^* = mc.$$

Эти две величины можно приравнять друг другу, причем I_4 имеет смысл «энергии покоя» U_0. Таким образом,

$$m = \frac{U_0}{c} .$$

Следовательно, инерция замкнутой системы Σ полностью определяется ее энергией покоя.

Выше показано, что компоненты энергии гравитационного поля совершенно так же, как и компоненты энергии материальных объектов, дают вклад в тяжесть и инерцию системы.

Поступила 11 декабря 1913 г.

---

[5] Ср. A. E i n s t e i n, M. G r o s s m a n n. Z. Math. und. Phys., 1913, **62**, 225. (Статья 21).

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ НОРДСТРЕМА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ*

(Совместно с А. Д. Фоккером)

Во всех существовавших до сих пор изложениях теории гравитации Нордстрема [1] в качестве теоретико-инвариантного вспомогательного аппарата использовалась только ковариантная теория Минковского, т. е. от уравнений теории требовалась лишь ковариантность относительно линейных ортогональных преобразований пространства-времени. Однако это условие, априори наложенное на уравнения, не ограничивает теоретические возможности настолько, чтобы можно было получить основные уравнения теории непосредственно, без дополнительных физических предположений. В дальнейшем будет показано, что можно достигнуть совершенно замкнутого и удовлетворительного в нормальном отношении изложения теории, если, как это было сделано в теории Эйнштейна — Гроссмана, воспользоваться инвариантным вспомогательным аппаратом, каким является абсолютное дифференциальное исчисление. Поскольку в природе не существует систем отсчета, к которым можно относить предметы, мы будем относить четырехмерное многообразие сначала к совершенно произвольным координатам (соответствующим гауссовым координатам в теории поверхностей) и ограничим выбор систем отсчета только тогда, когда рассматриваемая нами задача сама побудит к этому.

При этом оказывается, что теория Нордстрема заменяет теорию Эйнштейна — Гроссмана, если сделать единственное предположение о том, что выбор привилегированной системы отсчета возможен таким образом, чтобы обеспечить принцип постоянства скорости света.

---

* *Die Nordströmsche Gravitationstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalküls.* Ann. Phys., 1914, 44, 321—328 (Mit A. D. Fokker).

[1] Cp. G. Nordström. Ann. Phys., 1913, **42**, 533; A. Einstein. Phys. Z., 1913, 14, 1249. (Статья 23.— *Ред.*) [Нордстрем описывает гравитационное поле скаляром; содержание его теории ясно из статей Эйнштейна.— *Прим. ред.*]

§ 1. Характеристика гравитационного поля. Влияние гравитационного поля на физические процессы

Предположим[2], что для материальной точки, движущейся в гравитационном поле, выполняется закон движения в форме Гамильтона:

$$\delta \int ds = 0, \tag{1}$$

причем

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{2}$$

Тогда гравитационное поле характеризуется десятью пространственно-временными функциями $g_{\mu\nu}$; величина ds является инвариантом относительно любых преобразований, которые в общей теории относительности, основанной на абсолютном дифференциальном исчислении, играют такую же роль, какую эвклидов элемент длины — в инвариантной теории Минковского. Будучи единственным скаляром, образованным из координат двух соседних точек пространства-времени, ds имеет смысл «естественно измеренного» расстояния между этими двумя точками пространства-времени.

Так как каждой векторной величине или каждой операции векторного анализа в эвклидовом многообразии соответствует обобщенная векторная величина или операция в многообразии, заданном произвольным линейным элементом, то законам физических явлений в первоначальной теории относительности можно сопоставить соответствующие законы в общей теории относительности. Полученные таким образом законы, являясь общековариантными, содержат влияние гравитационного поля на физические процессы.

Из всех таких законов, описывающих физические процессы, мы рассмотрим здесь лишь один, имеющий наиболее общее значение, именно: закон, который соответствует закону сохранения энергии и импульса в первоначальной теории относительности. В этой теории энергетические свойства процессов выражались через тензор энергии-импульса ($T_{\mu\nu}$). Этим величинам $T_{\mu\nu}$ в общей теории относительности соответствуют величины $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$, которые образуют умноженные на $\sqrt{-g}$ компоненты смешанного тензора, получаемые из симметричного контравариантного тензора ($\Theta_{\mu\nu}$) посредством смешанного-умножения

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} g_{\sigma\mu}\Theta_{\mu\nu}$$

---

[2] См. A. Einstein. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitation. Z. Math. und Phys., 1913, **62**, 225 (Статья 21.— *Прим. ред.*).

(здесь g означает определитель, образованный из величин $g_{\mu\nu}$). Например, если физическая система состоит из движущейся непрерывно распределенной массы, плотность которой в состоянии покоя есть ρ_0, то

$$\Theta_{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds},$$

и физический смысл тензора $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ становится ясным из следующей таблицы[3]:

$$\begin{matrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} & \mathfrak{T}_{13} & \mathfrak{T}_{14} \\ \mathfrak{T}_{21} & \mathfrak{T}_{22} & \mathfrak{T}_{23} & \mathfrak{T}_{24} \\ \mathfrak{T}_{31} & \mathfrak{T}_{32} & \mathfrak{T}_{33} & \mathfrak{T}_{34} \\ \mathfrak{T}_{41} & \mathfrak{T}_{42} & \mathfrak{T}_{43} & \mathfrak{T}_{44} \end{matrix} = \begin{matrix} -X_x & -X_y & -X_z & i_x \\ -Y_x & -Y_y & -Y_z & i_y \\ -Z_x & -Z_y & -Z_z & i_z. \\ f_x & f_y & f_z & \eta \end{matrix}$$

Здесь X_x и т. д.— компоненты поверхностного давления, i_x и т. д.— компоненты плотности импульса, f_x и т. д.— компоненты плотности потока энергии, η — плотность энергии.

Упомянутые законы сохранения в общей теории имеют общековариантную форму:

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \gamma_{\mu\tau} \mathfrak{T}_{\tau\nu}. \tag{3}$$

Правая часть этого уравнения показывает, что рассматриваемый процесс сам по себе не удовлетворяет законам сохранения, поскольку импульс и энергия передаются от гравитационного поля материальной системе.

Компоненты тензора $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ связаны со всеми физическими процессами в пространстве, за исключением тех, которые касаются самого гравитационного поля.

Из первоначальной теории относительности мы знаем, что только тензор энергии определяет инерционные свойства системы. Из правой части равенства (3) следует, что и влияние гравитационного поля определяется только через компоненты тензора энергии. Это полностью соответствует установленному на опыте закону равенства инертной и тяжелой массы. В дальнейшем мы предположим, что только тензор энергии определяет гравитационное поле, создаваемое материальной системой.

---

[3] В таблице, приведенной в нашей статье в Physikalische Zeitschrift (1913, 14, 1249) (статья 23), на стр. 1257 имеется ошибка в знаке.

§ 2. Дифференциальное уравнение гравитационного поля в случае теории Нордстрема

Сказанное выше справедливо как для теории Нордстрема, так и для теории Эйнштейна — Гроссмана; различие же между обеими теориями заключается в следующем.

Гравитационное поле определяется десятью величинами $g_{\mu\nu}$. В теории Эйнштейна — Гроссмана для определения этих десяти величин имеется десять формально равноценных уравнений. Теория же Нордстрема основана на предположении, что путем соответствующего выбора системы отсчета можно удовлетворить принципу постоянства скорости света. Покажем сразу, что это соответствует предположению, что при соответствующем выборе системы отсчета десять величин $g_{\mu\nu}$ можно свести к одной величине Φ^2.

Именно для того, чтобы выполнялся принцип постоянства скорости света, уравнение

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0,$$

определяющее распространение света, должно переходить в уравнение

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0.$$

Отсюда следует, что при некотором выборе системы отсчета должно выполняться соотношение

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = \Phi^2 dx_1^2 + \Phi^2\, dx_2^2 + \Phi^2 dx_3^2 - \Phi^2\, dx_4^2,$$

где теперь сделана подстановка: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и $x_4 = ct$.

Следовательно, система величин $g_{\mu\nu}$ вырождается в систему

$$\begin{matrix} \Phi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi^2. \end{matrix} \tag{4}$$

Для определения одной величины Φ^2 требуется единственное дифференциальное уравнение, которое будет иметь скалярный характер, подобно уравнению Пуассона. Это уравнение так же, как и прежние, мы установим в общековариантной форме, т. е. без специализации системы отсчета, подсказываемой принципом постоянства скорости света. Искомое уравнение полностью определяется предположением, что оно является уравнением второго порядка, если при этом учесть, что оно должно быть обобщением уравнения Пуассона. Очевидно, оно будет иметь вид

$$\Gamma = \varkappa \mathfrak{T}, \tag{5}$$

где Γ — скаляр, образованный из величин $g_{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных, $\mathfrak{T}$ — скаляр, определяемый материальным процессом, следовательно, компонентами тензора $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ в соответствии со сказанным выше, и, наконец, $\varkappa$ — постоянная.

Из математических исследований дифференциальных тензоров в многомерном пространстве следует, что выражение, которое можно использовать для составления Γ, должно быть функцией от

$$\sum_{ikl} \gamma_{im}\gamma_{kl}\,(ik,\ lm).$$

Здесь $(ik,\ lm)$ означает известный тензор четвертого ранга Римана — Кристоффеля, который связан с мерой кривизны в теории поверхностей и определяется формулой

$$(ik,\ lm) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_i \partial x_l}\right) + \\ + \sum_{\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma}\left(\begin{bmatrix} im \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kl \\ \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} km \\ \sigma \end{bmatrix}\right),$$

где через $\begin{bmatrix} im \\ \rho \end{bmatrix}$ обозначено выражение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\rho}}{\partial x_m} + \frac{\partial g_{m\rho}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x_\rho}\right).$$

Далее, из общей теории ковариантов ясно, что $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ содержит лишь скаляр $\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau}$ (или функцию этой величины).

Отсюда следует, что искомое уравнение должно иметь форму

$$\sum_{iklm} \gamma_{im}\gamma_{kl}\,(ik,\ lm) = \varkappa \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau}. \tag{5a}$$

При этом во всяком случае *предполагается*, что вторые производные величин $g_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ входят в искомое уравнение *линейно*.

Уравнение (5a), которое мы только что установили, и уравнения (3) полностью содержат теорию Нордстрема по отношению к произвольным пространственно-временным координатам, если на величины $g_{\mu\nu}$ наложить дополнительное условие, чтобы для соответствующим образом выбранной системы отсчета выполнялся принцип постоянства скорости света.

§ 3. Основные уравнения теории Нордстрема в системе координат, выбранной в соответствии с принципом постоянства скорости света

Теперь представим себе привилегированную систему координат, относительно которой выполняется принцип постоянства скорости света. Тогда компоненты $g_{\mu\nu}$ фундаментального тензора заданы значениями, записанными в таблице (4). Значения $g_{\mu\nu}$ можно найти в таблице:

$$
\begin{array}{cccc}
+\frac{1}{\Phi^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & +\frac{1}{\Phi^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & +\frac{1}{\Phi^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Phi^2}
\end{array}
$$

В этом случае имеем

$$ds = \Phi \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2}.$$

Как уже упоминалось, ds является «естественно измеренным» расстоянием между двумя соседними пространственно-временны́ми точками. Будем различать случаи, когда связывающий вектор является пространственно-подобным или временно-подобным. В первом случае соответствуюшим выбором системы отсчета вектор можно перевести в чисто пространственный; тогда для длин, измеренных «естественно» и в координатной мере, получаем соотношение

$$ds = \Phi \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

т. е. масштаб естественной длины ds имеет координатную длину $\frac{ds}{\Phi}$.

Для временно-подобного вектора при соответствующем выборе системы отсчета пространственные компоненты обращаются в нуль и мы получаем

$$ds = \Phi \sqrt{-dx_4^2}, \quad \text{или} \quad \frac{ds}{i} = \Phi dx_4.$$

Величина $\frac{ds}{i}$ есть не что иное, как промежуток времени, измеренный заданными часами. Тогда величина $\frac{ds}{\Phi_i}$ представляет собой разность времен в координатной мере.

Следовательно, $1/\Phi$ есть множитель, на который следует умножить «естественно измеренные» длины и промежутки времени, чтобы получить соответственно координатные времена или координатные длины.

Из формы линейного элемента

$$ds^2 = \Phi^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2)$$

следует, что уравнения теории Нордстрема ковариантны не только по отношению к преобразованиям Лоренца, но и по отношению к преобразованиям подобия.

Уравнения сохранения импульса и энергии (3) для материи принимают вид

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \log \Phi}{\partial x_\sigma} \sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau}. \tag{3a}$$

Следует отметить, что согласно этому уравнению влияние гравитационного поля на систему определяется только скаляром $(1/\sqrt{-g}) \sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau}$. Это согласуется с соображением, которое мы высказали при выводе уравнения (5а).

Дифференциальное уравнение гравитационного поля (5а) принимает вид:

$$\frac{1}{\Phi^3}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4^2}\right) = \frac{k}{\Phi^4} \sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau} \tag{5б}$$

(здесь k означает новую постоянную), или

$$\Phi \Box \Phi = k \sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau}.$$

Поскольку отношение естественных и координатных длин в *одной* точке можно выбрать произвольно, постоянная k выбирается произвольно. Например, вслед за Нордстремом можно положить $k = 1$.

Нетрудно видеть, что полученные уравнения полностью согласуются с уравнениями, найденными Нордстремом.

§ 4. Заключительные замечания

Выше было показано, что если исходить из принципа постоянства скорости света, то теорию Нордстрема можно получить из чисто формальных соображений, т. е. без использования других физических гипотез. Поэтому нам представляется, что эта теория заслуживает предпочтения перед всеми другими теориями гравитации, основанными на этом принципе. С физической точки зрения это естественно и потому, что указанная теория строго удовлетворяет закону эквивалентности инертной и тяжелой массы.

Заметим, что только применение инвариантной теории абсолютного дифференциального исчисления позволило прийти к ясному пониманию формального содержания теории Нордстрема. Далее, наш метод без привлечения новых гипотез позволяет рассматривать влияние гравитационного поля на любой физический процесс, которое следует ожидать согласно теории Нордстрема. С полной отчетливостью выступает также связь теории Нордстрема с теорией Эйнштейна — Гроссмана.

Наконец, роль, которую играет в настоящем исследовании дифференциальный тензор Римана — Кристоффеля, наводит на мысль, что можно было бы также найти способ вывода гравитационных уравнений Эйнштейна — Гроссмана, независимый от физических предположений. Доказательство существования или отсутствия связи такого рода означало бы важный теоретический прогресс [4].

Поступила 19 февраля 1914 г.

---

[4] Обоснование отсутствия связи такого рода, данное в § 4 «Проекта обобщенной теории относительности» [Ч. II статьи 21.—*Ред.*], после более точного анализа отпадает.

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ П. ГАРЦЕРА „УВЛЕЧЕНИЕ СВЕТА В СТЕКЛЕ И АБЕРРАЦИЯ"*

Названная выше статья[1], по-моему, должна быть исправлена в двух существенных пунктах. Гарцер говорит: «Согласно электромагнитной теории света, а также принципу относительности Эйнштейна величина коэффициента увлечения k для света с длиной волны λ, измеренной в покоящейся среде, определяется формулой

$$k = 1 - 1/n^2 - (\lambda/n)\, dn/d\lambda,$$

из которой следует, что аберрация зависит, хотя и в незначительной степени, от движения среды». По этому поводу я сделаю следующие замечания.

1. В приведенной цитате, по-видимому, высказывается мнение, будто согласно теории относительности существует зависимость угла аберрации от природы вещества, через которое проходит свет в телескопе. Но подобная зависимость исключается уже самими основами теории относительности. Это становится очевидным, если весь процесс рассматривать в системе координат, относительно которой телескоп покоится; тогда весь процесс, за исключением испускания света источником, можно полностью описать в рамках оптики покоящихся тел.

2. Согласно теории относительности, приведенная выше формула для k вовсе не является универсальной; она справедлива только в одном частном случае, реализуемом в опыте Физо, но несправедлива в случае опыта Гарреса. Ниже мы поясним это утверждение.

Введем обозначения: V — скорость света в среде с точки зрения движущегося относительно нее наблюдателя, V' — скорость света в среде с точки зрения сопутствующего наблюдателя, v — скорость среды (одина-

* *Bemerkungen zu P. Harzers Abhandlungen «Über die Mitführung des Lichtes in Glas und die Aberration»*. Astron. Nachr., 1914, 199, 8—10.

[1] P. Harzer. Astron. Nachr., 1914, 198, 378.

ково направленная со скоростью наблюдателя); тогда, согласно теории относительности, всегда имеем (в первом приближении)

$$V = V' + (1 - 1/n^2)\, v. \tag{1}$$

Поэтому скорость света относительно среды V' соответствует той частоте ν', которую свет имеет в системе координат, движущейся вместе со средой.

Если V' не зависит от ν', т. е. если можно пренебречь дисперсией, то V' будет просто скоростью света в среде. Поэтому величину $(1-1/n^2)$, без всякого сомнения, можно рассматривать как «коэффициент увлечения» k.

Если же V' зависит от ν', то формула (1) для V сама по себе еще не имеет определенного смысла. Ибо для ее применения надо еще знать, какова частота света ν' относительно среды. Если ставится задача выразить ν' через частоту применяемого света ν в движущейся относительно среды системе, то, как будет показано ниже, от случая к случаю получаются разные результаты. Среди них будут и такие случаи, когда V вообще не зависит ни от частоты света (с точки зрения движущегося относительно среды наблюдателя), ни от природы движущегося тела, ни от его скорости v, а определяется только тем как свет входит в тело.

1-й случай. Свет входит в тело, движущееся равномерно и прямолинейно в том же направлении, в каком он выходит из тела. Здесь, как легко видеть, применяя принцип Допплера к свету перед его входом в тело, в первом приближении получаем

$$\nu' = \nu\,(1 - v/c).$$

Следовательно,

$$V'(\nu') = V'(\nu) - \nu\,(v/c)\,(dV'/d\nu) = V'(\nu) - (\lambda/n^2)\,(dn/d\lambda)\, v.$$

Итак, вместо формулы (1) получаем:

$$V = V'(\nu) + [1 - 1/n^2 - (\lambda/n^2)\,(dn/d\lambda)]\, v. \tag{1a}$$

Следовательно, в этом случае величину

$$k = 1 - 1/n^2 - (\lambda/n^2)\,(dn/d\lambda)$$

в известном смысле можно называть «коэффициентом увлечения».

2-й случай. Свет входит в тело в направлении, перпендикулярном направлению выхода из тела. Здесь в первом приближении

$$\nu' = \nu$$

и

$$V = V'(\nu) + (1 - 1/n^2)\, v. \tag{1б}$$

В том же смысле, как и выше, здесь можно положить

$$k = 1 - 1/n^2.$$

3-й случай (опыт Физо). Свет проходит вдоль оси неподвижной трубы, вдоль от которой течет жидкость со скоростью v. В этом случае формула (1) также справедлива, но скорость V' относительно жидкости, равно как и частота ν', зависит от частоты вводимого света иначе, чем в двух уже рассмотренных случаях. Именно, здесь ν означает частоту света внутри жидкости с точки зрения наблюдателя, покоящегося относительно трубы. Поэтому частота ν' с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с жидкостью, согласно принципу Допплера равна

$$\nu' = \nu(1 - v/V);$$

следовательно,

$$V'(\nu') = V'(\nu) - (\nu v/V)(dV'/d\nu).$$

Подставляя это в формулу (1), получаем

$$V = V'(\nu) + [1 - 1/n^2 - (\lambda/n)(dn/d\lambda)]\, v, \tag{1в}$$

$$k = 1 - 1/n^2 - (\lambda/n)(dn/d\lambda).$$

Гарцер теперь утверждает, что согласно теории относительности «коэффициент увлечения» должен определяться формулой (1в), тогда как из опыта Гарреса коэффициент увлечения дается формулой (1б). Однако при взгляде на схему установки Гарреса нетрудно видеть, что здесь как раз осуществляется случай (1б), так что в действительности опыт вместе с вычислениями Гарцера не опровергает, а подтверждает теорию относительности.

Берлин — Далем, 18 июля 1914 г.

ОТВЕТ НА РЕПЛИКУ П. ГАРЦЕРА *

Как я показал, величина k определяется частотой света относительно пронизываемой им среды; ибо именно частота определяет скорость света относительно среды. В нашем случае речь идет об оптическом явлении, которое следует считать стационарным относительно вращающейся системы призм. Отсюда следует, что частота света относительно движущихся призм, а следовательно, и величина k, одинакова для всех призм. Тем самым возражение Гарцера опровергается.

Берлин — Далем, 18 августа 1914 г.

---

* *Antwort auf eine Replik P. Harzers.* Astron. Nachr., 1914, 199, № 4755, 47, 48.

В опытах Гарреса, выполненных в 1909—1911 гг., свет проходил через вращающуюся систему призм, расположенных по окружности (свет приходил в эту систему по радиусу). В опыте Физо свет проходил через неподвижную трубу, в которой текла жидкость. При наличии дисперсии формулы для этих двух случаев получаются разные, так как надо различать частоту света относительно движущейся среды. Именно в этом пункте и содержалась ошибка Гарцера, который исправил вычисления, проделанные самим Гарресом, и дал в остальном правильное объяснение явления. Опыты Гарреса (погибшего во время первой мировой войны) были подробно описаны его руководителем Кнопфом (O. Knopf, Ann. d. Phys. 4te Folge, 1920, 62, 389). Подробный теоретический анализ этих опытов, основанный на статье Эйнштейна, был дан в помещенной в том же выпуске журнала статье Лауэ (M. von Laue, ibid., S. 448).

К ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ*

С тех пор как превосходство максвелловой теории электромагнетизма над прежними теориями, основанными на дальнодействии, стало очевидным фактом, физикам пришлось признать, что и закон тяготения Ньютона означает лишь первый шаг в познании явлений гравитации. Ведь едва ли кто сможет утверждать, что в теории тяготения мы продвинулись дальше, чем физики в теории электричества в XVIII веке, когда был известен только закон Кулона.

Этот вывод ставит перед нами задачу — так усовершенствовать теорию тяготения, чтобы она охватывала и быстро протекающие процессы и распространение гравитационных воздействий в пространстве и времени. Решение этой задачи сначала казалось безнадежным предприятием ввиду безграничного произвола в выборе возможностей. Однако благодаря тому, что теория относительности говорит о существенном равноправии времени и пространственных координат в формулировке законов природы, мы все же подошли к решению поставленной задачи. При этом маршрут для теории оказывается практически полностью определенным, если предположить универсальность фундаментального эмпирического закона — закона равенства инертной и тяжелой массы тел.

Еще со времени Галилея мы знаем, что ускорение свободного падения тел не зависит от их материала. Этот закон можно сформулировать следующим образом: та характеристическая постоянная, которая определяет инертность тела, определяет также и его гравитационное воздействие. Этот закон приобретает еще более фундаментальное значение в силу того, что согласно теории относительности существует общая связь между инертной массой и энергией тела. Таким образом, энергия, инерция и тяжесть тела сводятся друг к другу. Равенство инерции и тяжести было

---

* *Zur Theorie der Gravitation.* Naturforsch. Geselschaft, Zürich, Vierteljahrschr., 1914, 59,T. 2, Sitzungsber., IV—VI. (Автореферат доклада на заседании Общества 9 февраля 1914 г. перед переездом Эйнштейна в Берлин.— *Прим. ред.*)

установлено экспериментально Этвешем около 20 лет назад с такой точностью, что исключаются относительное различие гравитационной и инерционной констант порядка 10^{-7}.

Удалось построить две теории, удовлетворяющие выдвинутым выше требованиям, а именно: теорию Нордстрема и теорию Эйнштейна — Гроссмана. Первая из них более проста и с точки зрения первоначальной теории относительности более очевидна; именно, первая сохраняет фундаментальное предположение, что пространственно-временные системы отсчета можно выбирать так, что в них свет распространяется в вакууме с одинаковой скоростью c (принцип постоянства скорости света).

Теория Эйнштейна — Гроссмана сложнее, чем теория Нордстрема, поскольку она отказывается от принципа постоянства скорости света и поэтому приходит к необходимости обобщения теории относительности. Зато она устраняет гносеологический недостаток, свойственный прежней механике, который давно был замечен проницательными философами, в особенности Эрнстом Махом.

Закон движения материальной точки и тем самым вся механика и вся теоретическая физика были основаны Галилеем и Ньютоном на понятии ускорения. Но простой анализ показывает, что ускорение может восприниматься только как ускорение по отношению к другим телам, т. е. что мы вообще можем определить его только как относительное ускорение. Поэтому сомнительно, чтобы закон движения Галилея — Ньютона, утверждающий, что тела оказывают сопротивление ускорению, содержал в себе какие-либо высказывания об ускорении самом по себе (т. е. не об относительном, а об абсолютном ускорении). Новая теория лишена этой непоследовательности; в ней инерция проявляется как сопротивление относительному ускорению тел.

Выбор между двумя теориями должен быть сделан на основе сравнения с опытом, поскольку согласно теории Эйнштейна — Гроссмана, в противоположность теории Нордстрема, гравитационное поле должно приводить к искривлению световых лучей. Поскольку единственным гравитационным полем, могущим дать наблюдаемое на опыте искривление света, является гравитационное поле Солнца, предпринимается тщательная подготовка к солнечному затмению в августе 1914 г.: фотоснимки неподвижных звезд, близких к краю солнечного диска, должны установить, действительно ли существует искривление световых лучей.

28

ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ*

Поводом для этой статьи послужила критика, которой Ми подверг в этом журнале [1] теорию, разработанную мной при содействии Гроссмана. Я не согласен с этой критикой и не могу отделаться от впечатления, что Ми неправильно понимает мои теоретические взгляды. Однако вместе с тем я думаю, что причина этого недоразумения заключается в несовершенстве моего изложения основных идей теории. Это несовершенство связано с тем, что в некоторых отношениях я сам еще не пришел к полной ясности. Поэтому здесь я хочу кратко обсудить ряд принципиальных вопросов, причем буду предполагать, что читатель уже знает формальное содержание теории.

1. Теория, называемая в настоящее время «теорией относительности», основана на предположении, что существует некоторая «привилегированная» система отсчета K, в которой законы природы принимают особенно простую форму; при этом, однако, напрасно не ставится вопрос, в чем же возможная причина привилегированности указанной системы отсчета K перед другой системой отсчета K' (например, «вращающейся»). Это, по-моему, является серьезным недостатком теории. Привилегированные системы отсчета определяются как такие, в которых соблюдается принцип постоянства скорости света в пустоте. Можно не сомневаться в том, что этот принцип имеет фундаментальное значение; и все же я не могу верить, что он выполняется точно. Мне кажется невероятным, чтобы ход какого-

---

* *Prinzipielles zur verallgemeinerten Relativitätstheorie und Gravitationstheorie* Phys. Z., 1914, 15, 176—180.

[1] Phys. Z., 1914, 15, 115, 169. [В этих заметках Ми критикует работы Эйнштейна, считая, что они доказывают несправедливость его же идей. Ми считает также неверным принцип эквивалентности, полагая, что поля тяготения образуют абсолютную систему отсчета.— *Прим. ред.*]

нибудь процесса (например, распространения света в пустоте) можно было бы считать независимым от всех остальных процессов в мире. Но и не обращаясь к подобным аргументам, во всяком случае интересно задать вопрос: в какой мере можно построить теорию относительности, не содержащую в своих основах принцип постоянства скорости света?

2. Теория относительности формально вытекает из предположения, что для каждого разрешенного преобразования пространственно-временных переменных выражение

$$ds^2 = \sum dx_\nu^2 \tag{1}$$

является инвариантом; предположение это вытекает из принципа постоянства скорости света. В соответствии с этим разрешаются только линейные ортогональные преобразования. Уравнение свободно движущейся материальной точки в форме Гамильтона имеет вид

$$\delta\left\{\int ds\right\} = 0. \tag{2}$$

В случае же отказа от постулата постоянства скорости света никаких априорно выделенных систем координат не существует. Поэтому координаты x_ν можно заменить пока совершенно произвольными функциями этих величин. Если будут существовать четырехмерные области, в которых при соответственном выборе координат x_ν материальная точка движется в соответствии с уравнениями (1) и (2), то их нельзя уже рассматривать как всеобщий закон движения точки в отсутствии сил. Вместо этого уравнение (2) следует дополнить равенством

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \tag{1a}$$

где величины $g_{\mu\nu}$ являются функциями x_ν.

3. Указанный закон движения (2), (1a) сначала выводится только для случая, когда точка движется в полном отсутствии сил, т. е. когда на точку не действует и гравитационное поле (в подходящей системе отсчета). Поскольку же опыт показывает, что закон движения материальной точки не зависит от материала тела, и поскольку этот закон всегда можно выразить в форме Гамильтона, напрашивается вывод, что уравнения (2), (1a) вообще следует рассматривать как закон движения точки, на которую не действуют никакие силы, кроме гравитационных. В этом суть «гипотезы эквивалентности».

4. В соответствии со сказанным функции $g_{\mu\nu}$ следует понимать как компоненты гравитационного поля относительно совершенно произвольно выбранной системы отсчета. Поскольку уравнение движения Гамильтона

должно определять движение материальной точки совершенно независимо от выбора системы отсчета, сумму $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ следует рассматривать как инвариант относительно всех преобразований координат. Положительный корень квадратный из этой величины мы будем называть (четырехмерным) линейным элементом пространственно-временно́го многообразия.

5. Минковский на основе инварианта (1) построил четырехмерную ковариантную теорию, содержащую уравнения первоначальной теории относительности. Аналогичным образом,на инварианте (1а) с помощью «абсолютного дифференциального исчисления» можно основать ковариантную теорию, дающую соответствующие уравнения новой теории относительности. В эти уравнения входят величины $g_{\mu\nu}$, так что без труда можно находить влияние, которое гравитационное поле оказывает на различные физические процессы. Уравнения новой теории относительности переходят в уравнения первоначальной теории в частном случае, когда величины $g_{\mu\nu}$ можно считать постоянными (при соответствующем выборе x_ν); в этом частном случае гравитационным полем можно пренебрегать. Для теории существенно, что уравнение (1а) инвариантно относительно произвольных преобразований. В этом кроется причина того, что построение теории можно производить без произвола, несмотря на присутствие $g_{\mu\nu}$.

6. Однако новая теория относительности еще должна решить проблему, не имеющую аналога в первоначальной теории относительности. Именно, она должна дать уравнения, которым удовлетворяет само гравитационное поле, т. е. уравнения, из которых следует вычислять $g_{\mu\nu}$, если известны величины, относящиеся к материальным процессам. Энергетические свойства системы характеризуются тензором энергии $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}/\sqrt{-g}$ (смешанный тензор). Так как энергия связана с инерцией, а инерция — с тяжестью, то гравитационное поле должно определяться величинами $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$. Следовательно, необходимо отыскать дифференциальные уравнения, являющиеся обобщением уравнения Пуассона и позволяющие вычислять $g_{\mu\nu}$ из $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$; при этом уравнения должны быть общековариантными.

7. Мы не смогли выразить в общековариантной форме связь между $g_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$; и именно поэтому специалисты обрекают нашу теорию на неудачу. Далее мы покажем, почему они, по нашему мнению, неправы.

Если заданы уравнения, связывающие какие-либо величины[2] и справедливые только при специальном выборе системы координат, то следует различать два случая:

---

[2] Конечно, трансформационные свойства величин должны быть заданы для произвольных преобразований.

1. Заданным уравнениям соответствуют уравнения общековариантные, т. е. справедливые в произвольной системе отсчета;

2. Общековариантных уравнений, которые можно вывести из уравнений, заданных для специально выбранной системы отсчета, не существует.

В случае 2 уравнения ничего не говорят об объектах, изображаемых введенными величинами, они лишь ограничивают выбор системы отсчета. Если же уравнения содержат какие-либо высказывания об объектах, изображаемых этими величинами, то тогда реализуется случай 1, т. е. в этом случае всегда существуют общековариантные соотношения между величинами.

Таким образом, если мы, не зная общековариантных уравнений гравитационного поля, специализируем систему отсчета и составим уравнения гравитационного поля только для этой специальной системы отсчета, то теория не может вызвать никаких возражений, кроме одного, а именно — что составленные уравнения, возможно, лишены всякого физического содержания. Однако в рассматриваемом случае никто не поддержит это возражение всерьез.

8. «Совершенно верно,— подумает читатель,— но тот факт, что Эйнштейн и Гроссман не могут указать уравнений гравитационного поля в общековариантной форме, не может служить для меня достаточным основанием, чтобы я согласился с выбором специальной системы отсчета». Однако есть два важных аргумента, оправдывающих этот шаг, из которых один имеет логическое, другой эмпирическое происхождение.

а) Если система отсчета выбирается совершенно произвольно, то величины $g_{\mu\nu}$ вообще нельзя полностью определить через $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$. Именно, представим себе, что $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ заданы всюду и что в некоторой части Ф четырехмерного пространства все $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ обращаются в нуль. Но я могу ввести новую систему отсчета, которая полностью совпадает с первоначальной вне Ф, а внутри Ф отличается от нее (не нарушая непрерывности). Если мы отнесем все к этой новой системе отсчета, причем $\mathfrak{T}'_{\mu\nu}$ изображает вещество, а $g'_{\mu\nu}$ означает гравитационное поле, то хотя всюду

$$\mathfrak{T}'_{\sigma\nu} = \mathfrak{T}_{\sigma\nu},$$

но внутри Ф уравнения

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu},$$

конечно, не могут выполняться [3]. Отсюда следует высказанное утверждение.

---

[3] Уравнения следует понимать так, что в левой части их независимым переменным x'_ν придаются такие же числовые значения, как переменным x_ν в правой части.

Если же мы стремимся к тому, чтобы величины $g_{\mu\nu}$ (гравитационное поле) определялись через величины $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ (вещество), то этой цели можно добиться только ограничением в выборе системы отсчета.

б) В первоначальной теории относительности закон сохранения импульса и энергии выражается уравнением вида

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \tag{3}$$

Соответствующее уравнение, получаемое с помощью абсолютного дифференциального исчисления, гласит

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{\varkappa} \sum_{\mu\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \gamma_{\mu\tau} \mathfrak{T}_{\nu\tau}. \tag{4}$$

Уравнение (4) уже не выражает закон сохранения. С физической точки зрения это понятно, поскольку вещество, взятое отдельно, не может удовлетворять законам сохранения при наличии гравитационного поля, потому что поле тяготения передает импульс и энергию веществу. Это выражается правой частью уравнения (4). Однако, если вообще должны существовать законы сохранения, то необходимо требовать, чтобы эти законы в форме уравнения (3) выполнялись для вещества и гравитационного поля вместе. Тогда должна существовать система уравнений типа

$$\sum_{\nu} \frac{\partial (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + t_{\sigma\nu})}{\partial x_{\nu}} = 0, \tag{5}$$

где величины $t_{\sigma\nu}$ могут зависеть только от $g_{\mu\nu}$ и их производных. Однако общековариантных систем уравнений типа (5) не существует. Напротив, более глубокое исследование показывает, что такие системы ковариантны только по отношению к линейным преобразованиям. Следовательно, требуя формулировать уравнения гравитационного поля так, чтобы при этом обеспечивалось выполнение законов сохранения, мы ограничиваем выбор систем отсчета таким образом, что только линейные преобразования переводят одну разрешенную систему отсчета в другую.

9. Как находить уравнения гравитационного поля в специализированных таким способом системах отсчета, мы показывали не раз. Спрашивается, какие дифференциальные выражения из величин $g_{\mu\nu}$ надо приравнять $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$, чтобы уравнения (4) переходили в уравнения (5) при подстановке в правую часть (4) вместо $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ их выражений через величины $g_{\mu\nu}$? Эта постановка вопроса приводит к дифференциальным уравнениям:

$$\sum_{\alpha\beta\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\sqrt{-g}\, \gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right) = \varkappa (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + t_{\sigma\nu}), \tag{6}$$

где введено обозначение

$$-2\varkappa t_{\sigma\nu} = \sqrt{-g}\left(\sum_{\beta\tau\rho}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\delta_{\sigma\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right).$$

При этом $\delta_{\sigma\nu} = 1$, если $\sigma = \nu$, и $\delta_{\sigma\nu} = 0$, если $\sigma \neq \nu$, соответственно. Легко показать, что эти уравнения ковариантны относительно линейных преобразований.

Этим уравнениям, без сомнения, соответствует некоторое, хотя и незначительное число общековариантных уравнений, вывод которых ни с физической, ни с логической точки зрения не представляет, однако, особого интереса, что, очевидно, из соображений, приведенных в пункте 8. Тем не менее для нас принципиально важно, что общековариантные уравнения, соответствующие уравнениям (6), существуют. В самом деле, только в этом случае можно требовать ковариантности остальных уравнений по отношению к произвольным преобразованиям. С другой стороны, возникает вопрос, не подвергаются ли эти уравнения каким-либо ограничениям в результате специализации системы отсчета. В общем случае, по-видимому, это не так.

10. Из предыдущего изложения основ теории видно, что для ее обоснования не требуется прибегать к каким-либо специальным предположениям. И если в опубликованной недавно в этом журнале упомянутой работе Ми утверждает обратное, то только потому, что он применяет в качестве вспомогательного эвристического принципа только требования ковариантности, содержащиеся в обычной теории относительности, т. е. потому, что он вводит таким образом априорно предпочтительные системы отсчета. При этом способе рассмотрения защищаемая мной теория действительно имеет крайне малое право на существование! Я надеюсь, однако, что в настоящем сообщении мои взгляды изложены достаточно ясно.

11. Наконец, вернемся еще раз к закону равенства инертной и тяжелой масс и к вопросу о связи массы и энергии.

Взятый с отрицательным знаком импульс материальной точки образует вместе с ее энергией ковариантный 4-вектор с компонентами

$$m\sum_\nu g_{\sigma\nu}\frac{\partial x_\nu}{ds}.$$

Аналогичным образом взятый со знаком минус импульс образует[4] вместе с энергией замкнутой физической системы ковариантный 4-вектор

$$\int(\mathfrak{T}_{\sigma4} + t_{\sigma4})\,dV.$$

[4] Phys. Z., 1914, 15, 108. (Статья 23).

Отсюда сразу следует, что инерциальные свойства замкнутой системы тождественны свойствам материальной точки, т. е. эта система как целое может быть заменена материальной точкой. Чтобы представить суммарную массу замкнутой системы в простой форме, образуем компоненты этих двух 4-векторов для случая, когда система отсчета выбрана так, что материальная точка относительно нее покоится и что величины $g_{\mu\nu}$ на бесконечности принимают такие же значения, как и в обычной теории относительности. При этом выборе системы отсчета для компонент обоих приравниваемых один другому векторов получим:

$m\sum g_{\sigma\nu}\dfrac{dx_\sigma}{ds}$	0	0	0	0
$\int(\mathfrak{T}_{\sigma 4}+\mathfrak{t}_{\sigma 4})\,dV$	$\int(\mathfrak{T}_{14}+\mathfrak{t}_{14})\,dV$	$\int(\mathfrak{T}_{24}+\mathfrak{t}_{24})\,dV$	$\int(\mathfrak{T}_{34}+\mathfrak{t}_{34})\,dV$	$\int(\mathfrak{T}_{44}+\mathfrak{t}_{44})\,dV$

Отсюда видно, что масса системы равна деленной на c полной энергии системы, измеренной таким способом. При этом c означает скорость света в пустоте на бесконечности ($c=\sqrt{g_{44}}$), которую, впрочем, можно считать произвольной, поскольку она не фиксирована. То, что тяжелая масса замкнутой системы в указанном смысле равна энергии системы, если система стационарна, выясняется непосредственно с помощью интегрирования уравнений (6) по очень большому объему, содержащему систему, причем система отсчета выбирается как указано выше.

Я полагаю, что в настоящей статье опровергнуты все возражения против теории гравитационного поля, разработанной мною вместе с Гроссманом. Я прошу тех коллег, которые также хотят участвовать в прояснении связанных с этим вопросов, придерживаться приведенных выше соображений, могущих служить разумной основой для дискуссии.

Поступила 24 января 1914 г.

ФОРМАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

В последние годы мною, частично вместе с моим другом Гроссманом, было разработано обобщение теории относительности. В этих поисках, кроме пестрой смеси физических и математических требований, использовались и вспомогательные эвристические средства; поэтому трудно обозреть и охарактеризовать теорию с формальной математической точки зрения на основе одних этих работ. Предлагаемой работой я в первую очередь хочу восполнить этот пробел. В частности, уравнения гравитационного поля удается теперь получить исключительно из соображений ковариантности (раздел D). Я постарался также дать простые выводы основных законов абсолютного дифференциального исчисления, которые в какой-то степени, видимо, являются новыми (раздел B), чтобы сделать возможным для читателя полное понимание теории без чтения других, чисто математических сочинений. В качестве иллюстрации математических методов я вывел (эйлеровы) уравнения гидродинамики и уравнения электродинамики движущихся тел (раздел C). В разделе E показано, что теория гравитации Ньютона следует из общей теории как некоторое приближение; там же выведен ряд элементарных для предлагаемой теории характерных свойств ньютоновских (статических) гравитационных полей (искривление световых лучей, сдвиг спектральных линий).

A ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ

§ 1. Вводные соображения

В основе специальной теории относительности лежит предположение, что все системы координат, находящиеся по отношению друг к другу в прямолинейном равномерном движении, полностью равноценны для

* *Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1914, 2, 1030—1085.

описания законов природы. В своем развитии эта теория использовала в качестве главной опоры тот факт, что при экспериментах в земных условиях мы совершенно не замечаем того, что Земля со значительной скоростью движется вокруг Солнца.

Однако доверие, которое мы оказываем теории относительности, имеет и другое основание, которое, правда, не так просто увидеть. Если K и K' — две системы координат, движущиеся по отношению друг к другу равномерно и прямолинейно, то с кинематической точки зрения они вполне равноценны. Поэтому мы напрасно стали бы искать веских оснований, почему одна из этих систем могла бы быть более подходящей для формулировки законов природы в качестве системы отсчета, чем другая; мы скорее чувствуем себя вынужденными постулировать равноценность этих систем.

Но этот аргумент сейчас же вызывает возражение. Кинематическая эквивалентность двух систем координат в действительности не ограничивается случаем, когда обе рассматриваемые системы K и K' движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно. Эта эквивалентность с кинематической точки зрения также хорошо, например, выполняется, если одна система равномерно вращается относительно другой. Поэтому представляется необходимым обобщить существующую теорию относительности таким образом, чтобы устранить из нее кажущееся несправедливым предпочтение равномерных и прямолинейных движений перед относительными движениями других типов. Необходимость подобного расширения теории должен почувствовать каждый, кто обстоятельно знаком с предметом.

Правда, сначала кажется, что такое расширение теории относительности невозможно по физическим причинам, а именно: пусть K обозначает систему координат в смысле Галилея — Ньютона, K' — система координат, равномерно вращающаяся по отношению к системе K. Тогда на покоящиеся в системе K' массы действуют центробежные силы, в то время как на массы, покоящиеся в системе K, они не действуют. Уже Ньютон видел в этом доказательство того, что вращение системы K' следует понимать как «абсолютное», что систему K' нельзя с таким же правом, как и систему K, выбирать в качестве «покоящейся». Однако этот аргумент, как, в частности, показал Э. Мах, не обоснован. Существование центробежных сил в действительности не обязательно основывается на движении самой системы K'. С таким же успехом мы можем их приписать среднему вращательному движению весомых удаленных масс в окрестности системы по отношению к K', причем систему K' мы считаем покоящейся. Если ньютоновские законы механики и гравитации не допускают такой интерпретации, то это можно считать скорее недостатками этих теорий. В пользу релятивистского истолкования, с другой стороны, говорит следующий важный аргумент. Центробежные силы, которые действуют в таких условиях на некоторое тело, будут определяться в точности той же мировой постоянной, что и действие на него поля тяжести, так что мы не имеем средств отличить «поле центробежных сил» от поля тяжести. Таким образом, то, что мы измеряем как вес некоторого тела на поверхности Земли, на самом деле представляет собой результат совместного действия полей обоих названных типов, которые мы не можем разделить. Отсюда следует, что мы имеем все основания рассматривать вращающуюся систему K' как покоящуюся и интерпретировать поле центробежных сил как некоторое гравитационное поле. Эта интерпретация напоминает положение дел в специальной теории относительности, когда пондеромоторная сила, действующая на движущуюся в магнитном поле электрическую массу, истолковывается как действие на эту массу электрического поля, которое с точки зрения движущейся вместе с ней системы отсчета присутствует в месте расположения заряда.

Из сказанного следует, что в теории относительности, обобщенной в указанном смысле, гравитация должна играть фундаментальную роль. Если посредством некоторого преобразования перейти от системы отсчета K к системе отсчета K', то относительно системы K', вообще говоря, существует некоторое гравитационное поле; при этом нет необходимости, чтобы поле существовало бы и в системе K.

Теперь, естественно, возникает вопрос, какие системы отсчета и какие преобразования в обобщенной теории относительности мы рассматриваем как «допустимые». Ответ на этот вопрос будет дан значительно позже (раздел D). Пока же мы примем ту точку зрения, что допустимы все координатные системы и преобразования, которые совместимы со всегда предполагаемым в физической теории условием непрерывности. В дальнейшем окажется, что теория относительности способна к очень далеко идущему обобщению, почти свободному от всякого произвола.

§ 2. Гравитационное поле

В специальной теории относительности материальная точка, которая не подвергается действию ни гравитационных, ни прочих сил, движется прямолинейно и равномерно согласно уравнению

$$\delta\left\{\int ds\right\} = 0, \tag{1}$$

где

$$ds^2 = -\sum_\nu dx_\nu^2. \tag{2}$$

Здесь $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$; $x_4 = it$. Величина ds является дифференциалом «собственного времени», т. е. на эту величину изменяются показания часов, движущихся вместе с материальной точкой на элементе пути (dx, dy, dz). Варьирование в соотношении (1) производится таким образом, чтобы значения координат x_ν на концах интервала интегрирования оставались неизменными.

Совершим теперь произвольное преобразование координат; соотношение (1) не изменяется, тогда как равенство (2) принимает более общую форму:

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{2a}$$

При этом десять величин $g_{\mu\nu}$ являются функциями координат x_ν, определяемыми произведенным преобразованием. Физически величины $g_{\mu\nu}$ задают в новой системе координат гравитационное поле, как это вытекает из соображений предыдущего параграфа. Поэтому соотношения (1) и (2а) определяют теперь движение материальной точки в некотором гравитационном поле, обращающемся в нуль при подходящем выборе системы отсчета. Однако мы намерены вообще принять, что движение материальной точки в гравитационном поле всегда следует этому уравнению.

Величины $g_{\mu\nu}$ имеют еще и другой смысл. Мы всегда можем положить

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = -\sum_\nu dX_\nu^2, \tag{2б}$$

где величины dX_ν, вообще, не являются полными дифференциалами. Однако в бесконечно малой области эти величины можно использовать как координаты. Поэтому можно сказать, что в бесконечно малой области справедлива специальная теория относительности. Тогда величины dX_ν являются координатами в бесконечно малой области, непосредственно измеряемыми единичным масштабом и подходящим образом выбранной единицей времени. Величина ds^2 означает в этом смысле измеряемый естественным образом интервал между двумя пространственно-временными точками. В то же время величины dX_ν не могут быть получены таким способом прямо из измерений с неподвижными телами и часами. Напротив, они, согласно равенству (2б), связаны с интервалом ds определенным образом через величины $g_{\mu\nu}$.

В связи со сказанным выше ds представляет собой величину, не зависящую от выбора системы координат, т. е. скаляр. Величина ds играет в обобщенной теории относительности ту же самую роль, что и элемент мировой линии в специальной теории относительности.

Ниже будут получены некоторые важные теоремы абсолютного дифференциального исчисления, которые в нашей теории заменяют теоремы обычного векторного и тензорного анализа в трехмерном или четырехмерном пространстве (относящиеся к эвклидовскому элементу ds); с помощью этих теорем законы общей теории относительности, которые соответствуют известным законам специальной теории относительности, могут быть выведены без особых трудностей.

B. ИЗ ТЕОРИИ КОВАРИАНТОВ

§ 3. 4-векторы

Ковариантный 4-вектор. Четыре функции A_ν координат, определенные в произвольной системе координат, называются ковариантным 4-вектором, или ковариантным тензором первого ранга, если для произвольно выбранного линейного элемента с компонентами dx_ν сумма

$$\sum A_\nu dx_\nu = \Phi \qquad (3)$$

является инвариантом (скаляром) относительно произвольного преобразования координат. Величины A_ν называются «компонентами» 4-вектора.

Закон преобразования для этих компонент следует непосредственно из этого определения. В самом деле, пусть через A'_ν, dx'_ν обозначены соответствующие величины в той же точке пространства, но по отношению к другой, произвольно выбранной координатной системе; тогда имеем

$$\sum_\nu A'_\nu dx'_\nu = \sum_\alpha A_\alpha dx_\alpha = \sum_{\alpha,\,\nu} A_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} dx'_\nu .$$

Это соотношение выполняется при произвольных значениях величин dx'_ν; поэтому искомый закон преобразования должен иметь вид

$$A'_\nu = \sum \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} A_\alpha. \qquad (3a)$$

Легко показать и обратно, что в силу этого закона преобразования величина A_ν является ковариантным 4-вектором.

Контравариантный 4-вектор. Четыре функции координат A^ν, определенные в любой произвольной системе координат, называются контравариантным 4-вектором или контравариантным тензором первого ранга, если закон преобразования компонент A^ν совпадает с законом преобразования компонент dx_ν линейного элемента. Отсюда следует закон преобразования:

$$A^{\nu'} = \sum_{\alpha} \frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\alpha}} A^{\alpha}. \tag{4}$$

Следуя Риччи и Леви-Чивите, мы обозначаем контравариантный характер тензора тем, что поднимаем индекс вверх. Естественно, согласно этому определению, величины dx_{ν} сами являются компонентами контравариантного 4-вектора; несмотря на это, мы здесь не хотим нарушать общепринятых обозначений и будем продолжать писать индекс внизу.

Из двух определений непосредственно следует, что выражение

$$\sum_{\nu} A_{\nu} A^{\nu} = \Phi \tag{3б}$$

является скаляром (инвариантом). Назовем Φ внутренним (скалярным) произведением ковариантного (A_{ν}) и контравариантного (A^{ν}) векторов.

Из линейности уравнений преобразования (3а) и (4) относительно компонент векторов следует, что из двух ковариантных (или контравариантных) 4-векторов можно получить опять ковариантный (или контравариантный) 4-вектор, если сложить (или вычесть) соответствующие компоненты.

§ 4. Тензоры второго и высших рангов

Ковариантный тензор второго и высших рангов. 16 функций координат $A_{\mu\nu}$ называются компонентами ковариантного тензора второго ранга, если сумма

$$\sum A_{\mu\nu}\, dx_{\mu}^{(1)}\, dx_{\nu}^{(2)} = \Phi \tag{5}$$

является скаляром; при этом величины $dx_{\mu}^{(1)}$ и $dx_{\nu}^{(2)}$ обозначают компоненты двух произвольно выбранных линейных элементов. Из соотношения

$$\sum_{\mu\nu} A'_{\mu\nu}\, dx_{\mu}^{(1)'}\, dx_{\nu}^{(2)'} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\, dx_{\alpha}^{(1)}\, dx_{\beta}^{(2)} = \sum_{\alpha,\,\beta,\,\mu,\,\nu} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} A_{\alpha\beta}\, dx_{\mu}^{(1)'} dx_{\nu}^{(2)'}$$

(принимая во внимание, что оно должно выполняться при произвольных значениях $dx_{\mu}^{(1)}$ и $dx_{\mu}^{(2)'}$) следуют 16 соотношений:

$$A'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \cdot \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} A_{\alpha\beta}. \tag{5а}$$

Эти соотношения опять эквивалентны приведенному выше определению.

Аналогичным образом могут быть определены также ковариантные тензоры третьего и высших рангов.

Симметричный ковариантный тензор. Если ковариантный тензор в одной системе координат удовлетворяет условию, что две его компоненты, отличающиеся только перестановкой индексов, совпадают ($A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$), то это выполняется, как это видно из уравнения (5а), также и в любой другой системе координат. Тогда для ковариантного тензора второго ранга 16 уравнений преобразования сводятся к 10 уравнениям. В случае, если $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$, для доказательства тензорного характера величин ($A_{\mu\nu}$) достаточно, чтобы сумма

$$\sum A_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu = \Phi \tag{5б}$$

была скаляром. Это следует из тождества

$$\sum_{\mu\nu} A'_{\mu\nu} dx'_\mu\, dx'_\nu = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} A_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} dx^{(1)'}_\mu\, dx^{(2)'}_\nu,$$

если принять во внимание (5а).

Симметричные ковариантные тензоры высших рангов можно определить совершенно аналогично.

Ковариантный фундаментальный тензор. В развиваемой теории особую роль играет величина

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

которую мы будем обозначать как квадрат интервала. Из предыдущего следует, что $g_{\mu\nu}$ является ковариантным симметричным тензором второго ранга. Мы будем называть его «ковариантным фундаментальным тензором».

Замечание. Ковариантный тензор можно также определить как совокупность 16 величин $A_{\mu\nu}$, преобразующихся так же, как 16 произведений $A_\mu B_\nu$ двух ковариантных векторов (A_μ) и (B_μ). Полагая

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu, \tag{6}$$

из уравнения (3а) получаем

$$A'_{\mu\nu} = A'_\mu B_\nu = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_\alpha B_\beta = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta}.$$

Отсюда, принимая во внимание уравнение (5а), находим, что величина $A_{\mu\nu}$ является ковариантным тензором. Все сказанное справедливо и для тензоров высших рангов. Конечно, не всякий ковариантный тензор можно представить в такой форме, поскольку величины ($A_{\mu\nu}$) содержат 16 компонент, тогда как величины A_μ и B_ν вместе имеют лишь 8 компонент; в силу условия (6) между величинами $A_{\mu\nu}$ существуют также алгебраические соотношения, которым тензорные компоненты, вообще говоря, не удовлетворяют. Тем не менее, произвольный тензор удается представить в виде суммы нескольких тензоров вида (6)[5]:

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu + C_\mu D_\nu + \ldots . \tag{6a}$$

Это же справедливо и для ковариантных тензоров высших рангов. Такое представление тензоров через четырехвекторы оказывается полезным при доказательстве многих теорем. Аналогичное замечание можно сделать для ковариантных тензоров высших рангов.

Контравариантные тензоры. Аналогично тому, как ковариантные тензоры, согласно соотношению (6) или (6a), могут быть образованы из ковариантных 4-векторов, можно построить контравариантный тензор из контравариантных 4-векторов, согласно соотношениям

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu \tag{7}$$

и, соответственно,

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu + C^\mu D^\nu + \ldots . \tag{7a}$$

Из этого определения и уравнения (4) непосредственно следует закон преобразования

$$A^{\mu'\nu'} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} A^{\alpha\beta} . \tag{8}$$

Аналогично определяются контравариантные тензоры высших рангов. Таким же путем рассматривается и специальный случай симметричного тензора.

Смешанные тензоры. Можно построить тензоры (второго и высших рангов), которые относительно одних индексов имеют ковариантный, а относительно других — контравариантный характер; такие тензоры называются смешанными. Например, смешанный тензор второго ранга имеет вид

$$A_\mu^\nu = A_\mu B^\nu + C_\mu D^\nu + \ldots . \tag{9}$$

Антисимметричные тензоры. Помимо симметричных ковариантного и контравариантного тензоров, важную роль играют так называемые антисимметричные ковариантные и контравариантные тензоры. Они характеризуются тем, что компоненты, отличающиеся друг от друга перестановкой двух соседних индексов, равны по величине, но проти-

---

[5] Ясно, что при сложении соответствующих компонент тензоров в результате получаются компоненты нового тензора, как это было показано для тензора первого ранга (4-вектора) (сложение и вычитание тензоров).

воположны по знаку. Если, например, контравариантный тензор $A^{\mu\nu}$ удовлетворяет условию $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$, то его называют антисимметричным контравариантным тензором второго ранга, или 6-вектором (так как он имеет 12 отличных от нуля компонент, которые попарно имеют равные абсолютные значения). Контравариантный тензор третьего ранга $A^{\mu\nu\lambda}$ является антисимметричным, если выполняются условия

$$A^{\mu\nu\lambda} = -A^{\mu\lambda\nu} = -A^{\nu\mu\lambda} = A^{\nu\lambda\mu} = -A^{\lambda\nu\mu} = A^{\lambda\mu\nu}.$$

Очевидно, что такой антисимметричный тензор имеет только 4 отличные от нуля различные компоненты (в пространстве 4 измерений).

Независимость этого определения от выбора системы отсчета легко доказывается с помощью соотношения (5а) или (8). Например, согласно соотношению (5а),

$$A'_{\nu\mu} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} A_{\alpha\beta}.$$

Заменяя $A_{\alpha\beta}$ на $-A_{\beta\alpha}$ (что справедливо по предположению) и меняя местами в двойной сумме индексы α и β, по которым производится суммирование, получаем

$$A'_{\nu\mu} = -\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta} = -A'_{\mu\nu},$$

в соответствии с утверждением.

Доказательство для контравариантных тензоров и тензоров третьего и и четвертого рангов может быть дано аналогичным образом. Антисимметричные тензоры рангов, выше четвертого, не могут быть заданы в четырехмерном пространстве, поскольку, по определению, все компоненты, для которых два индекса одинаковы, обращаются в нуль.

§ 5. Умножение тензоров

Внешнее произведение тензоров. Мы видели [ср. соотношения (6), (8) и (9)], что при перемножении компонент тензоров первого ранга получаются компоненты тензоров высших рангов. Аналогично мы можем получать тензоры высших рангов из тензоров низших рангов при перемножении всех компонент одного тензора на компоненты другого. Пусть, например, $(A_{\alpha\beta})$ и $(B_{\lambda\mu\beta})$ ковариантные тензоры; тогда $(A_{\alpha\beta}B_{\lambda\mu\sigma})$ есть также ковариантный тензор (пятого ранга). Доказательство тотчас же следует из того, что любой тензор можно представить в виде суммы произведений

4-векторов:

$$A_{\alpha\beta} = \Sigma A_\alpha^{(1)} A_\beta^{(2)},$$

$$B_{\lambda\mu\sigma} = \Sigma B_\lambda^{(1)} B_\mu^{(2)} B_\sigma^{(3)}$$

и

$$A_{\alpha\beta} B_{\lambda\mu\sigma} = \Sigma A_\alpha^{(1)} A_\beta^{(2)} B_\lambda^{(1)} B_\mu^{(2)} B_\sigma^{(3)}.$$

Поэтому $(A_{\alpha\beta}B_{\lambda\mu\sigma})$ является тензором пятого ранга.

Эту операцию называют «внешним умножением», а ее результат — «внешним произведением» тензоров. Ясно, что при этом не возникает никаких ограничений на тип и ранг «перемножаемых» тензоров. Для нескольких последовательных операций выполняется коммутативный и ассоциативный законы.

Внутреннее произведение тензоров. Операция над тензорами первого ранга A_ν и A^ν, задаваемая соотношением (3б), называется «внутренним умножением», ее результат — «внутренним произведением». Эту операцию легко распространить на любые тензоры, поскольку тензоры высших рангов можно представить через 4-векторы. Пусть, например, $A_{\alpha\rho\gamma\ldots}$ является ковариантным, а $A^{\alpha\beta\gamma}$ — контравариантным тензорами одинаковых рангов; тогда

$$\sum_{\alpha\beta\gamma\ldots} (A_{\alpha\beta\gamma\ldots} A^{\alpha\beta\gamma\ldots}) = \Phi$$

представляет собой скаляр. Доказательство этого непосредственно следует из соотношения (3б), если положить

$$A_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \Sigma A_\alpha B_\beta C_\gamma \ldots,$$

$$A^{\alpha\beta\gamma\ldots}{}_{\iota} = \Sigma A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots,$$

и перемножить эти выражения.

Смешанное произведение тензоров. Самое общее перемножение тензоров состоит во внешнем умножении по одной группе индексов и внутреннем умножении по другой. Из двух тензоров A и B тензор C получается согласно следующей схеме

$$\sum_{\alpha\beta\gamma\ldots\alpha'\beta'\gamma'\ldots} (A_{\alpha\beta\gamma\ldots\rho\sigma\tau\ldots}^{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\lambda\mu\nu\ldots} B_{\alpha'\beta'\gamma'\ldots rst}^{\alpha\beta\gamma\ldots lmn\ldots}) = C_{\rho\sigma\tau\ldots rst}^{\lambda\mu\nu\ldots lmn\ldots}.$$

Доказательство того, что C является тензором, следует из комбинирования обоих вышеуказанных доказательств.

§ 6. О некоторых соотношениях для фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$

Контравариантный фундаментальный тензор. Записав $g_{\mu\nu}$ в виде определителя, образуем для каждого элемента $g_{\mu\nu}$ его алгебраическое дополнение и разделим их на определитель $g = |g_{\mu\nu}|$. Мы докажем, что полученные таким образом величины $g^{\mu\nu}$ $(= g^{\nu\mu})$ образуют контравариантный симметричный тензор.

Из этого определения и из известной теоремы об определителях прежде всего следует, что

$$\sum_\sigma g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu, \tag{10}$$

где δ_μ^ν равно 1 и 0, в зависимости от того, $\mu = \nu$ или $\mu \neq \nu$[6]. Далее

$$\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta$$

представляет собой скаляр, который, согласно соотношению (10), можно положить равным

$$\sum_{\mu\alpha\beta} g_{\mu\beta} \delta_\alpha^\mu\, dx_\alpha\, dx_\beta$$

или

$$\sum_{\alpha\beta\mu\nu} g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} g^{\mu\nu}\, dx_\alpha\, dx_\beta.$$

Согласно предыдущему параграфу, величины

$$d\xi_\mu = \sum_\beta dx_\beta g_{\mu\beta}$$

представляют собой компоненты ковариантного вектора; естественно, таковыми являются и величины

$$d\xi_\nu = \sum_\alpha g_{\nu\alpha} dx_\alpha.$$

Соответственно этому наш скаляр принимает форму

$$\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d\xi_\mu\, d\xi_\nu.$$

Так как эта величина есть скаляр, а величины $d\xi_\mu$ (по отношению к произвольной системе координат) — компоненты ковариантного 4-вектора и так как $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$, то легко доказывается, что $g^{\mu\nu}$ представляет собой контравариантный тензор.

[6] Согласно предыдущему параграфу, δ_μ^ν является смешанным тензором («смешанный фундаментальный тензор»).

Замечание. Согласно теореме умножения определителей

$$\left|\sum_\alpha g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}\right| = |g_{\nu\alpha}| \cdot |g^{\alpha\nu}|.$$

С другой стороны,

$$\left|\sum_\alpha (g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu})\right| = |\delta_\mu^\nu| = 1,$$

отсюда следует, что

$$|g_{\mu\nu}| \cdot |g^{\mu\nu}| = 1. \tag{11}$$

Инвариантный объем. В непосредственной близости некоторой точки пространства, согласно равенству (2б), всегда можно положить

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu\, dx_\nu = \sum_\sigma dX_\sigma^2, \tag{12}$$

если допускать мнимые значения dX_σ. Для выбора системы dX_σ имеется еще бесконечно много возможностей; тем не менее, все такие системы связаны друг с другом посредством линейных ортогональных преобразований. Отсюда следует, что взятый по этому элементу объема интеграл

$$d\tau_0^* = \int dX_1\, dX_2\, dX_3\, dX_4$$

является инвариантом, т. е. не зависит от выбора системы координат.

Найдем для этого инварианта другое выражение. Во всяком случае существуют соотношения вида

$$dX_\sigma = \sum_\mu \alpha_{\sigma\mu}\, dx_\mu, \tag{13}$$

откуда следует, что

$$d\tau_0^* = |\alpha_{\sigma\mu}|\, d\tau, \tag{14}$$

где через $d\tau$ и $d\tau_0^*$ обозначены, соответственно, интегралы

$$\int dx_1 \ldots dx_4 \quad \text{и} \quad \int dX_1\, dX_2\, dX_3\, dX_4,$$

взятые по одному и тому же элементарному объему. Кроме того, из равенств (12) и (13) имеем

$$g_{\mu\nu} = \sum_\sigma \alpha_{\sigma\mu} \alpha_{\sigma\nu}, \tag{15}$$

и по теореме умножения определителей

$$|g_{\mu\nu}| = \left|\sum_\sigma (\alpha_{\sigma\mu}\alpha_{\sigma\nu})\right| = |\alpha_{\sigma\nu}|^2. \tag{16}$$

После этого, согласно соотношению (14), получаем

$$\sqrt{g}\,d\tau = d\overset{*}{\tau}_0, \tag{17}$$

где для краткости мы использовали обозначение $|g_{\mu\nu}| = g$. Тем самым искомый инвариант найден.

Замечание. Из равенства (12) вытекает, что величины dX_σ соответствуют обычным координатам в специальной теории относительности. В этом случае три из них вещественны, а одна (например dX_1) мнимая. Поэтому величина $d\tau_0$ является чисто мнимой. С другой стороны, в случае специальной теории относительности при вещественной временно́й координате определитель g отрицателен; тогда величины $g_{\mu\nu}$ (при подходящем выборе единицы времени) принимают значения

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}, \tag{18}$$

а поэтому выражение $\sqrt{g}$ является чисто мнимым. В § 17 будет показано, что это справедливо в общем случае. Чтобы избежать мнимых значений $g_{\mu\nu}$, положим

$$d\tau_0 = \frac{1}{i}\int dX_1\,dX_2\,dX_3\,dX_4$$

и, вместо соотношения (17), напишем

$$\sqrt{-g}\,d\tau = d\tau_0. \tag{17a}$$

Антисимметричный фундаментальный тензор Риччи и Леви-Чивиты. Мы утверждаем, что

$$G_{iklm} = \sqrt{g}\,\delta_{iklm} \tag{19}$$

представляет собой ковариантный тензор. При этом величина δ_{iklm} принимает значение $+1$ или -1, в зависимости от того, каким числом перестановок соседних индексов — четным или нечетным — можно из 1234 получить $iklm$.

Для доказательства заметим сначала, что определитель

$$\sum_{iklm} \delta_{iklm}\,dx_i^{(1)}\,dx_k^{(2)}\,dx_l^{(3)}\,dx_m^{(4)} = V \tag{20}$$

с точностью до несущественного числового множителя совпадает с объемом элементарного пентаэдра, углы которого образованы некоторой точкой пространства и четырьмя конечными точками произвольных линейных элементов $(dx_i^{(1)})$, $(dx_k^{(2)})$, $(dx_l^{(3)})$, $(dx_m^{(4)})$, проведенных из этой точки. Из соотношений (19) и (20) имеем

$$\sum_{iklm} G_{iklm} dx_i^{(1)} dx_k^{(2)} dx_l^{(3)} dx_m^{(4)} = \sqrt{g}\, V.$$

Поскольку правая часть этого равенства, в соответствии с соотношением (17), представляет собой скаляр, то из свойств величины δ_{iklm} следует, что G_{iklm} является ковариантным тензором, а именно, антисимметричным ковариантным тензором.

Отсюда путем смешанного умножения легко построить контравариантный тензор по схеме

$$\sum_{\alpha\beta\lambda\mu} G_{\alpha\beta\lambda\mu} g^{\alpha i} g^{\beta k} g^{\lambda l} g^{\mu m} = G^{iklm}. \qquad (21)$$

Контравариантный тензорный характер $G_{\alpha\beta\lambda\mu}$ следует непосредственно из результатов § 4. При учете соотношения (19) левая часть равенства (21) принимает вид:

$$\sqrt{g} \sum_{\alpha\beta\lambda\mu} \delta_{\alpha\beta\lambda\mu} g^{\alpha i} g^{\beta k} g^{\lambda l} g^{\mu m};$$

в силу известных теорем для определителей это равно

$$\sqrt{g}\, \delta_{iklm} \sum \delta_{\alpha\beta\lambda\mu} g^{1\alpha} g^{2\beta} g^{3\lambda} g^{4\mu},$$

или, согласно формуле (11),

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \delta_{iklm}.$$

Тем самым доказано, что

$$G^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_{iklm} \qquad (21a)$$

представляет собой контравариантный антисимметричный тензор.

Наконец, важную роль в теории общих антисимметричных тензоров играет смешанный тензор, образованный из фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$, компоненты которого имеют вид:

$$G_{ik}^{lm} = \sum_{\alpha\beta} \sqrt{g}\, \delta_{ik\alpha\beta} g^{\alpha l} g^{\beta m} = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_{lm\alpha\beta} g_{\alpha i} g \quad . \qquad (22)$$

Тензорный характер последних выражений очевиден из предыдущего. Докажем только, что они совпадают друг с другом. Второе из них, согласно соотношениям и (19), (21) и (21а) можно представить в форме

$$\sum_{\lambda\mu\rho\sigma\alpha\beta} \sqrt{g}\, \delta_{\lambda\mu\rho\sigma} g^{\lambda l} g^{\mu m} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} g_{\alpha i} g_{\beta k},$$

откуда после суммирования по α и β с помощью формулы (10) получим

$$\sum_{\lambda\mu} \sqrt{g}\, \delta_{\lambda\mu ik} g^{\lambda l} g^{\mu m};$$

последнее выражение отличается от первого выражения в формуле (22) только в обозначениях индексов суммирования и (несущественно) последовательностью пар индексов $\lambda\mu$ и ik в $\delta_{\lambda\mu ik}$. Из формулы (22) явствует, что смешанный тензор (G_{ik}^{lm}) является антисимметричным как по индексам i, k, так и по индексам l, m.

С помощью фундаментального тензора можно из произвольного тензора строить различными способами тензоры другого характера с помощью приведенных в § 5 правил. Например, из ковариантного тензора $(T_{\mu\nu})$ можно построить контравариантный тензор $(T^{\mu\nu})$ по правилу

$$T^{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}, \tag{23}$$

и наоборот,

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}. \tag{23a}$$

Эквивалентность уравнений (23) и (23а) легко показать с помощью формулы (10). Тензоры $(T^{\mu\nu})$ и $(T_{\mu\nu})$ называют «взаимными». Если один из двух взаимных тензоров симметричен или антисимметричен, то другой тензор, как вытекает из соотношений (23) и (23а), обладает тем же свойством. Это выполняется для тензоров произвольного ранга.

Дуальный 6-вектор. Пусть далее $(F^{\mu\nu})$ антисимметричный тензор (второго ранга). Тогда мы можем поставить в соответствие ему второй антисимметричный тензор $F^{\mu\nu *}$ с помощью формулы

$$F^{\mu\nu *} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}. \tag{24}$$

$F^{\mu\nu *}$ называют контравариантным 6-вектором, «дуальным» $F^{\mu\nu}$. В свою очередь, $F^{\mu\nu}$ дуален $F^{\mu\nu *}$. Умножая обе части равенства (24) на $G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}$ и суммируя по индексам μ и ν, получаем

$$\frac{1}{2}\sum G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}F^{\mu\nu *} = \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\mu\nu} G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta};$$

но, согласно формуле (22), имеем [7]

$$\sum_{\mu\nu} G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu\lambda\varkappa\lambda'\varkappa'} \sqrt{g}\,\delta_{\mu\nu\lambda\varkappa}g^{\lambda\sigma}g^{\varkappa\tau}\frac{1}{\sqrt{g}}\delta_{\mu\nu\lambda'\varkappa'}g_{\lambda'\alpha}g_{\varkappa'\beta} = 2\,(\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\tau}_{\beta} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\tau}_{\alpha}).$$

Тогда получим

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\mu\nu} G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(F^{\sigma\tau} - F^{\tau\sigma}) = F^{\sigma\tau},$$

откуда и следует утверждение.

Для ковариантных 6-векторов все результаты сохраняются. Далее, легко доказать, что 6-векторы, взаимные к двум дуальным 6-векторам, дуальны между собой.

§ 7. Геодезические линии, или уравнения движения точки

В § 2 уже указывалось, что движение материальной точки в гравитационном поле происходит согласно уравнению

$$\delta\{ds\} = 0. \tag{1}$$

С математической точки зрения движению материальной точки соответствует также геодезическая в нашем четырехмерном многообразии. Мы приведем здесь для полноты общеизвестный вывод явных уравнений этой линии.

Среди проходящих через две точки $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ линий имеется линия, которая в отличие от всех соседних бесконечно близких линий удовлетво-

---

[7] Второе из этих преобразований основывается на том, что $\delta_{\mu\nu\lambda\varkappa}$ отлично от нуля только тогда, когда все индексы различны. Поэтому остаются только две возможности: ($\lambda = \lambda'$, $\varkappa = \varkappa'$) и ($\lambda = \varkappa'$, $\varkappa = \lambda'$); с учетом этого сначала получается после суммирования по μ и ν выражение

$$2\sum_{\lambda\varkappa}\{g^{\lambda\sigma}g^{\varkappa\tau}g^{\lambda\alpha}g^{\varkappa\beta} - g^{\lambda\sigma}g^{\varkappa\tau}g^{\lambda\beta}g^{\varkappa}{}_{\alpha}\},$$

причем суммирование сначала выполняется по таким комбинациям индексов ($\lambda\varkappa$), для которых $\lambda \neq \varkappa$. Однако, поскольку скобка обращается в нуль при $\lambda = \varkappa$, суммирование можно проводить по всем комбинациям. Отсюда, принимая во внимание формулу (10), получаем приведенное в тексте выражение.

ряет уравнению (1). Обозначим через λ некоторую функцию координат x_ν; тогда «поверхность» постоянного значения λ пересекается с каждой из этих бесконечно близких линий в некоторой точке, координаты которой для заданной кривой являются функциями только значений λ. Положим

$$w^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial \lambda};$$

тогда вместо условия (1) получим:

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w \, d\lambda = 0. \tag{1a}$$

Здесь пределы интегрирования λ_1 и λ_2 совпадают для всех рассматриваемых кривых. Обозначим через δx_ν приращение к x_ν, необходимое для того, чтобы перейти от некоторой точки искомой геодезической к точке на варьированной линии, которой соответствует то же самое значение λ; тогда получим

$$\delta w = \frac{1}{w}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\mu\sigma\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}\delta x_\sigma + \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right)\right\}.$$

После подстановки этого выражения в формулу (1a) и интегрирования по частям последнего члена с учетом того, что при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda' = \lambda_2$ приращение δx_ν обращается в нуль, найдем

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sum_\sigma (K_\sigma \delta x_\sigma) = 0,$$

где

$$K_\sigma = \sum_{\mu\nu}\left[\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{g_{\mu\sigma}}{w}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\right\} - \frac{1}{2w}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right].$$

Отсюда следует, что уравнение геодезической имеет вид:

$$K_\sigma = 0. \tag{23'}$$

В специальной теории относительности тем геодезическим, для которых $ds^2 > 0$, соответствует движение материальной точки, а тем, для которых $ds = 0$, отвечает распространение света. То же самое будет справедливо и в общей теории относительности. Исключив из рассмотрения последний случай ($ds = 0$), можно в качестве параметра выбрать длину дуги s вдоль геодезической. Тогда уравнения геодезической принимают вид

$$\sum_\mu g_{\sigma\mu}\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \sum_{\mu\nu}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} = 0, \tag{23a'}$$

причем, следуя Кристоффелю, мы ввели сокращенное обозначение

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{24'}$$

Последнее выражение симметрично относительно индексов μ и ν. Наконец, умножим уравнение (23а') на $g^{\sigma\tau}$ и просуммируем по σ. Принимая во внимание соотношение (10) и используя известные символы Кристоффеля

$$\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix} = \sum_\sigma g^{\sigma\tau}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}, \tag{24a'}$$

получаем вместо уравнения (23а) новое

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} + \sum_{\mu\nu}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds} = 0. \tag{23б'}$$

Это уравнение геодезической в наиболее наглядной форме. Оно дает выражение для вторых производных от x_τ по s через первые их производные. Дифференцируя соотношение (23б') по s, можно получить уравнения, в которых производные высших порядков от координат по s также выражаются через производные первого порядка; так можно получить координаты в виде разложения в ряд Тейлора по степеням переменной s. Уравнение (23б') соответствует уравнению движения материальной точки в форме Минковского, в котором через s обозначено «собственное время».

§ 8. Образование тензоров с помощью операций дифференцирования

Фундаментальное значение тензорных величин состоит, как известно, в том, что уравнения преобразований для тензорных компонент являются линейными и однородными. Это приводит к тому, что компоненты тензора в произвольно выбранной системе координат обращаются в нуль, если только они равны нулю в какой-либо о д н о й системе координат. Если совокупность физических уравнений приведена к форме, выражающей обращение в нуль всех компонент некоторого тензора, то эти уравнения имеют определенный смысл, не зависящий от выбора системы координат. Чтобы иметь возможность создавать подобные тензорные уравнения, необходимо знать законы, по которым можно из заданных тензоров образовывать новые тензоры. Возможность производить это алгебраическим путем уже обсуждалась выше. Мы выведем теперь законы, которые позволяют из известных тензоров образовывать новые с помощью операций д и фференцирования. Такие законы образования тензоров были даны уже Кристоффелем, Риччи и Леви-Чивитой. Здесь мы дадим совсем простой вывод этих законов, который, по-видимому, является новым.

Все дифференциальные операции над тензорами можно свести к так называемому «расширению». Последнее в случае специальной теории относительности, т. е. в случае, когда допускаются только линейные ортогональные преобразования, определяется следующим предположением. Если $T_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ представляет собой тензор ранга l, то $\frac{\partial T_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}}{\partial x_s}$ есть тензор ранга $l+1$. Отсюда легко получаются так называемые «дивергенции» тензоров с помощью определяемого формулой (10) § 6 специального тензора δ_μ^ν. При ограничении линейными ортогональными преобразованиями, когда различие между ковариантными и контравариантными тензорами исчезает, будем обозначать этот тензор через $\delta_{\mu\nu}$. В результате внутреннего умножения — «расширения» — тензора $(l+1)$-го ранга на тензор $\delta_{\mu\nu}$ мы получим тензор $(l-1)$-го ранга:

$$T_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}} = \sum_{ls} \frac{\partial T_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}}{\partial x_s} \delta_{\alpha_l s} = \sum_{\alpha_l} \frac{\partial T_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}}{\partial x_{\alpha_l}} .$$

Это дивергенция тензора $T_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, образованная по индексу α_l. Наша задача состоит в том, чтобы сформулировать обобщение этой операции на случай преобразований, не подчиняющихся ограничивающим условиям (линейности и ортогональности).

Расширение ковариантных тензоров. Пусть $\Phi(x_1 \ldots x_4)$ представляет собой некоторый скаляр, а S — некоторая заданная кривая в нашем пространстве. Пусть s — «длина дуги», отсчитываемая в смысле § 1 и 8 в определенном направлении от некоторой точки P, лежащей на кривой S. Тогда значения функции Φ для точек пространства, расположенных на кривой S, можно рассматривать также как функцию s. Ясно также, что величины $\frac{d\Phi}{ds}$, $\frac{d^2\Phi}{ds^2}$ и т. д. являются скалярами, т. е. величинами, определяемыми независимо от координатной системы. Однако

$$\frac{d\Phi}{ds} = \sum_\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \cdot \frac{dx_\mu}{ds} , \tag{25}$$

а кривая S может быть проведена через каждую точку в произвольном направлении; поэтому, согласно § 3, величины

$$A_\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \tag{26}$$

являются компонентами ковариантного 4-вектора (тензора первого ранга), который мы можем рассматривать как «расширение» скаляра Φ (тензора нулевого ранга).

Далее, согласно уравнению (25), имеем:

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \cdot \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} + \sum_\tau \frac{\partial\Phi}{\partial x_\tau} \frac{d^2 x_\tau}{ds^2}.$$

Ограничим теперь наше рассмотрение предположением (которое не зависит от выбора системы отсчета), что кривая S является геодезической; тогда, согласно уравнению (23б′),

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \sum_\tau \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_\tau} \right] \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}. \tag{27}$$

Рассмотрим величины

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \sum_\tau \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_\tau}, \tag{28}$$

для которых, согласно формулам (24′) и (24а′), выполняется условие симметрии

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}.$$

Отсюда, в соответствии с формулой (5б) из уравнения (27) и скалярного характера $\frac{d^2\Phi}{ds^2}$ вытекает, что $A_{\mu\nu}$ является ковариантным (симметричным) тензором второго ранга. Тензор $A_{\mu\nu}$ мы можем рассматривать как расширение ковариантного тензора первого ранга $A_\mu = \frac{d\Phi}{dx_\mu}$; поэтому формулу (28) можно записать также в виде

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \sum_\tau \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} A_\tau. \tag{28a}$$

Теперь напрашивается предположение, что с помощью дифференцирования (расширения) ковариантный тензор второго ранга может быть получен по формуле (28а) не только из 4-вектора вида (26), но и из произвольного ковариантного 4-вектора. В справедливости этого мы сейчас убедимся.

Прежде всего, легко видеть, что компоненты A_μ произвольного ковариантного 4-вектора в четырехмерном пространстве можно представить в форме

$$A_\mu = \Psi_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_\mu} + \Psi_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_\mu} + \Psi_3 \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_\mu} + \Psi_4 \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_\mu},$$

где величины Ψ_λ и Φ_λ являются скалярами. Если мы выбираем (в используемой специальной системе координат) $\Phi_\nu = x_\nu$, то теперь следует только положить $\Psi_\nu = A_\nu$ (в той же специальной системе координат), чтобы получить это представление. Чтобы убедиться в тензорном характере построенных по формуле (28a) величин $A_{\mu\nu}$, достаточно проверить, что $A_{\mu\nu}$ является тензором, если в формуле (28a) $A_\mu = \Psi \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_\mu}$, причем Ψ и Φ — скаляры.

Согласно формулы (28), величины

$$\Psi\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \sum_\tau \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\tau}\right]$$

являются компонентами тензора, так же как, согласно (26) и (6), и величины

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}.$$

После сложения обнаруживается тензорный характер выражения

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\Psi\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu}\right] - \sum_\tau \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_\tau}\right).$$

Поэтому по формуле (28a) образуется тензор из 4-вектора $\Psi \dfrac{d\Phi}{\partial x_\mu}$ и, следовательно, с учетом сказанного выше, из произвольного ковариантного 4-вектора A_μ. Таким образом, высказанное утверждение доказано.

После того, как произведено расширение ковариантных тензоров первого ранга, легко найти расширения ковариантных тензоров произвольного ранга. Согласно равенствам (6) и (6a), каждый ковариантный тензор может быть представлен в виде суммы тензоров типа

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} = A^{(1)}_{\alpha_1} A^{(2)}_{\alpha_2} \ldots A^{(l)}_{\alpha_l},$$

где через $A^{(\nu)}_{\alpha_\nu}$ обозначен ковариантный 4-вектор. Согласно (28a), величина

$$A^{(\nu)}_{\alpha_\nu s} = \frac{\partial A^{(\nu)}_{\alpha_\nu}}{\partial x_s} - \sum_\tau \begin{Bmatrix}\alpha_\nu s\\ \tau\end{Bmatrix} A^{(\nu)}_\tau$$

представляет собой ковариантный тензор второго ранга.

Перемножим его по правилам внешнего умножения со всеми 4-векторами $A^{(\mu)}_{\alpha_\mu}$ за исключением $A^{(\nu)}_{\alpha_\nu}$; в результате получим тензор ранга $l+1$, при образовании которого индекс ν был выделен. Можно образовать l подобных тензоров, для которых индекс ν принимает последовательно значения $\nu = 1$, $\nu = 2$, ..., $\nu = l$. Сложив их, получим тензор ранга $l + 1$.

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_l s} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}}{\partial x_s} - \sum \left[\begin{Bmatrix} \alpha_1 s \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\tau \alpha_2 \ldots \alpha_l} + \begin{Bmatrix} \alpha_2 s \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\alpha_1 \tau \alpha_3 \ldots \alpha_l} + \ldots \right]. \qquad (29)$$

Эта формула, найденная Кристоффелем, согласно приведенным выше замечаниям, позволяет строить по произвольному ковариантному тензору l ранга новый тензор $(l + 1)$-го ранга, который мы будем называть «р а с ш и р е н и е м» исходного тензора. На основе этой операции могут быть определены все дифференциальные операции.

Умножив выражение (29) на $g^{\alpha_1\beta_1} g^{\alpha_2\beta_2} \ldots g^{\alpha_l\beta_l}$ таким образом, чтобы умножение по отношению к индексам являлось внутренним, а по отношению к β внешним, получим тензор, контравариантный по $\beta_1 \ldots \beta_l$ и ковариантный по s. Наконец, написав опять α вместо β, получим

$$A_s^{\alpha_1 \ldots \alpha_l} = \frac{\partial A^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}}{\partial x_s} + \sum_\tau \left[\begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} A^{\tau \alpha_2 \ldots \alpha_l} + \begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} A^{\alpha_1 \tau \alpha_3 \ldots \alpha_l} + \ldots \right]. \qquad (30)$$

Этот тензор может быть назван р а с ш и р е н и е м к о н т р а в а р и а н т н о г о т е н з о р а.

Изучение выражений (29) и (30) показывает, что определяемое ими расширение всегда приводит к одному индексу ковариантного характера. Легко также получить общую формулу для расширения смешанного тензора, представляющую собой объединение формул (29) и (30).

Дивергенция. Расширение контравариантного тензора l-го ранга является смешанным тензором $(l + 1)$-го ранга. Из него может быть образован контравариантный тензор $(l - 1)$-го ранга путем внутреннего умножения на смешанный фундаментальный тензор (10), что может быть сделано различными способами. Соответственно этому, можно различать l, вообще говоря, различных д и в е р г е н ц и й контравариантного тензора. Одна из них имеет вид

$$A^{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}} = \sum_{\alpha_l s} A_s^{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \delta_{\alpha_l}^s. \qquad (31)$$

Для симметричных и антисимметричных тензоров результат образования дивергенции не зависит от того, какой из индексов α был при этом выделен.

Некоторые вспомогательные формулы. Прежде чем применять полученные формулы к различным специальным случаям, выведем некоторые дифференциальные свойства фундаментальных тензоров. Дифференцируя определитель $|g_{\mu\nu}| = g$ по координате x_α, получаем

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = \sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}g^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_\alpha}. \tag{32}$$

Из формул (24а), (24) и (32) имеем

$$\sum_\tau \begin{Bmatrix}\mu\tau\\ \tau\end{Bmatrix} = \sum_\tau \begin{Bmatrix}\tau\mu\\ \tau\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{\tau\alpha} g^{\tau\alpha}\frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\mu} = \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_\alpha}. \tag{33}$$

Дифференцирование выражения (10) дает

$$\sum_\sigma \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\alpha}g^{\nu\sigma} = -\sum_\sigma \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}g_{\mu\sigma}. \tag{34}$$

После умножения этого равенства на $g_{\nu\tau}$ и суммирования по ν или же после умножения на $g_{\mu\tau}$ и суммирования по μ, принимая во внимание формулу (10), получаем два уравнения, которые в новых обозначениях индексов имеют вид:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = -\sum_{\sigma\tau}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha}g_{\sigma\mu}g_{\tau\nu}, \tag{35}$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = -\sum_{\sigma\tau}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha}g^{\sigma\mu}g^{\tau\nu}. \tag{36}$$

Расширение и дивергенция 4-векторов. Расширение ковариантных 4-векторов дается формулой (28а). Переставляя индексы μ и ν и производя вычитание, получаем антисимметричный тензор

$$A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{28б}$$

Расширение A^μ_ν контравариантного 4-вектора A^μ дается формулой (30)

$$A^\mu_\nu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \sum_\tau \begin{Bmatrix}\nu\tau\\ \mu\end{Bmatrix} A^\tau.$$

Отсюда дивергенция

$$\Phi = \sum_{\mu\nu} A^\mu_\nu \delta^\nu_\mu = \sum_\mu\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu} + \sum_\tau \begin{Bmatrix}\mu\tau\\ \mu\end{Bmatrix} A^\tau\right),$$

Согласно соотношениям (33),

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\sqrt{g}\, A^\mu). \tag{37}$$

Пусть A^μ в последнем выражении представляет собой контравариантный вектор $\sum g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}$, где Φ — скаляр; тогда получим известное обобщение лапласиана $\Delta\Phi$:

$$\Phi = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\right). \tag{38}$$

Расширение и дивергенция тензоров второго ранга. В применении к ковариантным и контравариантным тензорам второго ранга формулы (29) и (30) дают тензоры третьего ранга

$$A_{\mu\nu s} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_s} - \sum_\tau \left(\begin{Bmatrix} \mu s \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\tau\nu} + \begin{Bmatrix} \nu s \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\mu\tau}\right), \tag{29a}$$

$$A^{\mu\nu}_s = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_s} + \sum_\tau \left(\begin{Bmatrix} s\tau \\ \mu \end{Bmatrix} A^{\tau\nu} + \begin{Bmatrix} s\tau \\ v \end{Bmatrix} A^{\mu\tau}\right). \tag{30a}$$

Легко убедиться в том, что «расширение» фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$, или $g^{\mu\nu}$, равно нулю. Для дивергенции тензора $A^{\mu\nu}$ по индексу ν из соотношений (31), (30a) и (33) получаем

$$A^\mu = \sum_{s\nu} A^{\mu\nu}_s \delta^s_\nu = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_\nu \frac{\partial (A^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x_\nu} + \sum_{\tau\nu} \begin{Bmatrix} \tau\nu \\ \mu \end{Bmatrix} A^{\tau\nu} \sqrt{g}\right). \tag{39}$$

Для антисимметричного тензора (6-вектора) в силу симметрии выражения $\left\{ {\tau\nu \atop \mu} \right\}$ относительно индексов τ и ν имеем

$$A^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (A^{\mu\nu} \sqrt{g}). \tag{40}$$

В случае, когда тензор $A^{\mu\nu}$ является симметричным, формула (39) допускает некоторое преобразование, которое окажется существенным в дальнейшем. Образуем взаимный к (A^μ) ковариантный 4-вектор

$\sum\limits_{\mu} A^{\mu} g_{\mu\sigma} = A_\sigma$:

$$A_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{\mu\nu} g_{\mu\sigma} \frac{\partial (A^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x_\nu} + \sqrt{g} \sum_{\mu\nu} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} A^{\mu\nu} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{\mu\nu} \frac{\partial (g_{\mu\sigma} A^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} \sqrt{g} \sum_{\mu\nu} \left(-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) A^{\mu\nu} \right).$$

Отсюда, если тензор $A^{\mu\nu}$ симметричен, получим

$$A_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial (g_{\mu\sigma} A^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} A^{\mu\nu} \sqrt{g} \right); \tag{41}$$

вводя смешанный тензор $\sum\limits_{\mu} g_{\sigma\mu} A^{\mu\nu} = A_\sigma^\nu$, можем также написать

$$A_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{\nu} \frac{\partial (A_\sigma^\nu \sqrt{g})}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} A_\tau^\nu \sqrt{g} \right). \tag{41a}$$

Тензор Римана — Кристоффеля. Формула (29) позволяет дать простой вывод известного критерия того, является ли данное пространство с заданным линейным элементом эвклидовым, т. е. можно ли соответствующим образом выбранной подстановкой добиться, чтобы ds^2 было всюду равно сумме квадратов дифференциалов координат.

Образуем из ковариантного 4-вектора A_μ двукратным расширением, согласно формуле (29), тензор третьего ранга $(A_{\mu\nu\lambda})$. Тогда будем иметь:

$$A_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} - \left[\begin{Bmatrix} \mu\lambda \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\tau}{\partial x_\nu} + \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\tau}{\partial x_\lambda} \right] -$$

$$- \begin{Bmatrix} \nu\lambda \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\tau}{\partial x_\mu} + \begin{Bmatrix} \nu\lambda \\ \tau \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau\mu \\ \sigma \end{Bmatrix} A_\sigma - \left[\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\lambda \\ \tau \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\tau \\ \sigma \end{Bmatrix} \right] A_\sigma.$$

Отсюда непосредственно следует, что $(A_{\mu\lambda\nu} - A_{\mu\nu\lambda})$ представляет собой ковариантный тензор третьего ранга; выражение

$$-\sum_{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \begin{Bmatrix} \mu\lambda \\ \sigma \end{Bmatrix} + \sum_{\tau} \left(\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\tau \\ \sigma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\lambda \\ \tau \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\tau \\ \sigma \end{Bmatrix} \right) \right] A_\sigma$$

также является ковариантным тензором третьего ранга, а выражение в квадратных скобках является тензором четвертого ранга $(K_{\mu\nu\lambda}^\sigma)$, ковариантным по индексам μ, ν, λ и контравариантным по σ. Все компоненты этого тензора исчезают, когда $g_{\mu\nu}$ становятся постоянными. Но тензор обращается в нуль всегда, когда это установлено относительно одной выбранной системы координат. Поэтому обращение в нуль скобок для всех комбинаций индексов также является необходимым условием того, чтобы линейный элемент можно было привести к эвклидовой форме; вопрос о том, является ли это условие достаточным, требует, конечно, дальнейшего доказательства.

V-тензоры. Из формул (37), (39) — (41) и (41а) видно, что компоненты тензоров зачастую входят с множителем $\sqrt{g}$. Поэтому мы собираемся ввести специальное обозначение для тензорных компонент, умноженных на $\sqrt{g}$ (или $\sqrt{-g}$, если g отрицательно). Такие произведения мы будем обозначать заглавными готическими буквами; например, положим

$$A_\sigma \sqrt{g} = \mathfrak{A}_\sigma,$$

$$A_\sigma^\nu \sqrt{g} = \mathfrak{A}_\sigma^\nu,$$

для (A_σ) и (A_σ^ν); эти величины будем называть V-тензорами (объемными тензорами)[8]. Будучи умножены на $d\tau$, они приводят к тензорам в ранее определенном смысле, поскольку выражения $\sqrt{g}\, d\tau = \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$ представляют собой скаляр. При этом способе записи формула (41а), например, принимает вид:

$$\mathfrak{A}_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{A}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \mathfrak{A}_\tau^\nu. \tag{41б}$$

С. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПРИСУТСТВИИ ЗАДАННОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Каждому уравнению специальной теории относительности соответствует общековариантное в смысле предыдущего раздела уравнение в общей теории относительности. При выводе этих уравнений фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$ рассматривается как заданный. Так получается обобщение тех физических законов, которые уже известны в специальной теории относительности; при этом обобщенные уравнения описывают влияние гравитационных полей на те процессы, к которым эти уравнения относятся. Вначале неизвестными остаются только дифференциальные законы самого гравитационного поля, которые должны быть получены особо. Все остальные (например механические, электромагнитные) законы мы будем объединять под названием «законы материальных процессов».

[8] Теперь их называют «тензорными плотностями».— *Прим. ред.*

§ 9. Теорема энергии-импульса для «материальных процессов»

Наиболее общим законом «материальных процессов» является теорема энергии-импульса. В специальной теории относительности в формулировке Минковского — Лауэ этот закон записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}+\frac{\partial (i\mathfrak{i}_x)}{\partial l}&=\mathfrak{f}_x\\
\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial (i\mathfrak{i}_y)}{\partial l}&=\mathfrak{f}_y\\
\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial (i\mathfrak{i}_z)}{\partial l}&=\mathfrak{f}_z\\
\frac{\partial (i\mathfrak{s}_x)}{\partial x}+\frac{\partial (i\mathfrak{s}_y)}{\partial y}+\frac{\partial (i\mathfrak{s}_z)}{\partial z}+\frac{\partial (-\eta)}{\partial l}&=iw
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

При этом в качестве временнóй координаты выбрано $l = it$, причем действительнсе время t измеряется в единицах, в которых скорость света равна 1. Таблица

$$\begin{matrix}
p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} & i\mathfrak{i}_x\\
p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} & i\mathfrak{i}_y\\
p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} & i\mathfrak{i}_z\\
i\mathfrak{s}_x & i\mathfrak{s}_y & i\mathfrak{s}_z & -\eta
\end{matrix}$$

представляет собой симметричный тензор $(T_{\sigma\nu})$ второго ранга (тензор энергии), а совокупность величин

$$\mathfrak{f}_x,\ \mathfrak{f}_y,\ \mathfrak{f}_z,\ iw$$

является 4-вектором (K_σ), разумеется, по отношению к линейным ортогональным преобразованиям, которые только и допускаются в специальной теории относительности. Рассматривая соотношения (42) с формальной точки зрения, нетрудно видеть, что (K_σ) является дивергенцией тензора $T_{\sigma\nu}$. С физической точки зрения p_{xx} и т. д. означает «компоненты тензора натяжений», $\mathfrak{i}$ — вектор плотности импульса, $\mathfrak{s}$ — вектор потока энергии, η — плотность энергии, $\mathfrak{f}$ — вектор внешних сил, действующих на единицу объема системы, и наконец, w — энергию, передаваемую единице объема системы в единицу времени.

Если рассматриваемая система замкнута, то правые части уравнений (42) равны нулю. Наша задача теперь состоит в том, чтобы найти общековариантные уравнения, соответствующие уравнениям (42). Обобщенные уравнения формально также должны, очевидно, характеризоваться тем, что в них дивергенция некоторого тензора второго ранга приравнивается некоторому 4-вектору. Но при каждом таком обобщении возникает та трудность, что в общей теории относительности, в отличие от специальной, имеются тензоры различного характера (ковариантный, контравариантный, смешанный и, кроме того, V-тензоры); поэтому необходимо еще сделать выбор. Этот выбор не вносит, однако, с собой физического произвола; он сказывается только в том, какие переменные в этом представлении оказываются выделенными[9]. Выбор производится так, чтобы уравнения были по возможности более наглядными, и вводимые величины имели наиболее ясный физический смысл. Оказывается, что эти условия лучше всего выполняются, если тензор $T_{\sigma\nu}$ является смешанным V-тензором $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$, которому можно сопоставить в качестве 4-вектора (K_σ) ковариантный объемный 4-вектор $\mathfrak{K}_\sigma$. Взяв, согласно формуле (41б), дивергенцию, получим в качестве обобщения (42) общековариантное уравнение

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\tau\nu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \mathfrak{T}_\tau^\nu + \mathfrak{K}_\sigma. \tag{42a}$$

При этом, сохраняя прежние обозначения, компоненты тензора $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ можно записать в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{c|cccc} & \nu=1 & \nu=2 & \nu=3 & \nu=4 \\ \hline \sigma=1 & -p_{xx} & -p_{xy} & -p_{xz} & -\mathfrak{i}_x \\ \sigma=2 & -p_{yx} & -p_{yy} & -p_{yz} & -\mathfrak{i}_y \\ \sigma=3 & -p_{zx} & -p_{zy} & -p_{zz} & -\mathfrak{i}_z \\ \sigma=4 & \mathfrak{s}_x & \mathfrak{s}_y & \mathfrak{s}_z & \eta \end{array} \tag{43}$$

Компоненты 4-вектора $\mathfrak{K}_\sigma$ можно представить в виде таблицы:

$$\begin{array}{ll} \sigma=1 & -f_x \\ \sigma=2 & -f_y \\ \sigma=3 & -f_z \\ \sigma=4 & w \end{array} \tag{44}$$

[9] Это связано с тем, что из каждого тензора путем умножения на фундаментальный тензор или на $\sqrt{-g}$ может быть получен тензор иного характера.

Соответствующий $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ чисто ковариантный (или чисто контравариантный) тензор является симметричным. Легко увидеть, что уравнения (42а) переходят в уравнения (42), если величины $g_{\mu\nu}$ принимают значения

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}. \tag{45}$$

Обсуждение уравнения (42а). Мы рассмотрим сначала частный случай, когда гравитационное поле отсутствует, т. е. когда все значения $g_{\mu\nu}$ постоянны. В этом случае первый член в правой части уравнения (42а) обращается в нуль. Относительно изучаемой системы предполагается, что она занимает конечную область пространства (по x_1, x_2, x_3). Интеграл от какой-либо величины Ф по координатам $x_1\, x_2\, x_3$, взятый по всему объему системы, обозначим через $\overline{\Phi}$. Тогда из уравнения (42а) после интегрирования по x_1, x_2, x_3 получим

$$\frac{d\bar{\mathfrak{i}}}{dx_4} = \bar{\mathfrak{f}},$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dx_4} = \bar{w}\,.$$

Это — теорема энергии и импульса в обычной форме; из нее следует постоянство энергии $\bar{\eta}$ и импульса $\bar{\mathfrak{i}}$ во времени при отсутствии внешних сил. В этом случае теорема энергии-импульса выражается, собственно, как закон сохранения, который в дифференциальной форме в случае отсутствия внешних сил ($\mathfrak{K}_\sigma = 0$) записывается в виде

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} = 0. \tag{42б}$$

В присутствии поля тяжести, т. е. в случае, когда величины $g_{\mu\nu}$ переменны, теорема сохранения не выполняется для рассматриваемых систем (ограниченных в пространстве) даже тогда, когда компоненты 4-вектора $\mathfrak{K}_\sigma$ равны нулю. В этом случае не существует уравнения типа (42б), поскольку не обращается в нуль первый член в правой части уравнения (42а). С физической точки зрения это обстоятельство соответствует тому, что в гравитационном поле импульс и энергия материальной системы изменяются со временем, так как гравитационное поле передает импульс и энергию материальной системе. Физический смысл первого члена правой части (42а) аналогичен, соответственно, второму члену. Компоненты первого члена, которые мы можем обозначить через

$$-f_x^{(g)},\ -f_y^{(g)},\ -f_z^{(g)},\ w^{(g)},$$

представляют собой взятые с обратным знаком компоненты импульса и соответственно энергию, передаваемые гравитационным полем единице объема материальной системы в единицу времени.

Однако в случае исчезновения 4-вектора $\mathfrak{K}_\sigma$ необходимо потребовать, чтобы для материальной системы и соответствующего гравитационного поля существовал единый закон, выражающий постоянство суммарного импульса и суммарной энергии материи и гравитационного поля. Отсюда вытекает, что должна существовать совокупность величин $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ для гравитационного поля такая, что выполняется уравнение

$$\sum_\nu \frac{\partial (\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu)}{\partial x_\nu} = 0. \tag{42в}$$

Этот вопрос можно будет исследовать более детально, после того как будут сформулированы дифференциальные уравнения гравитационного поля.

Нетрудно увидеть, что для определения воздействия гравитационного поля на материальные процессы должны быть заданы величины

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\tau = \frac{1}{2} \sum_\mu g^{\tau\mu}\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}, \tag{46}$$

которые поэтому мы назовем «компонентами гравитационного поля».

§ 10. Уравнения движения непрерывно распределенных масс

Естественно измеряемые величины. Ранее уже подчеркивалось, что в общей теории относительности нельзя выбрать такую систему координат, в которой можно было бы пространственные и временные разности координат связать путем измерения с некоторым масштабом и часами в такой же мере непосредственно, как это делалось в случае специальной теории относительности. Подобный привилегированный выбор координат возможен только для бесконечно малой области, когда полагается

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = -d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 + d\xi_4^2.$$

Величины $d\xi$, согласно § 2, измеряются точно так же, как координаты в специальной теории относительности, однако они не являются полными дифференциалами. В бесконечно малой области все величины можно относить к системе координат $d\xi$; в этом случае мы будем их называть «естественно измеряемыми» величинами. Систему координат $d\xi$ назовем «нормальной системой».

Согласно соотношению (17а), для бесконечно малого четырехмерного объема справедливо равенство

$$\sqrt{-g}\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4=\int d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\xi_4. \tag{47}$$

Пусть рассматриваемый объем расположен около бесконечно короткого отрезка бесконечно тонкой четырехмерной нити. Пусть dv означает интеграл $\int dx_1\,dx_2\,dx_3$. Выберем систему координат $d\xi$ таким образом, чтобы ось $d\xi_4$ совпадала с осью нити; тогда $d\xi_4=ds$, и интеграл $\int d\xi_1\,d\xi_2 d\xi_3$ означает естественно измеренный покоящийся объем dv_0 нити. Согласно равенству (47), имеем

$$\sqrt{-g}\,dv\,dx_4=dv_0\,ds. \tag{47a}$$

Единица массы. Массы двух материальных точек можно с р а в н и в а т ь с помощью обычных методов. Для измерения массы требуется только одна единица массы. В качестве таковой определим количество воды, которое заключено в естественно измеренном объеме, равном единице, в состоянии относительного покоя. Массы материальных точек, по своему определению, являются инвариантами относительно всех преобразований.

Скалярная плотность. Под скалярной плотностью непрерывно распределенной материи мы понимаем массу, отнесенную к единице (движущегося вместе с ней) естественно измеряемого объема. Скалярная плотность вместе с компонентами скорости $\frac{dx_\mu}{ds}$ полностью характеризует материю в смысле гидродинамики в случае, когда можно не обращать внимания на поверхностные силы.

Тензор энергии движущихся масс. Уравнения движения. Из скаляра ρ_0 и контравариантного 4-вектора $\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right)$ скорости можно построить смешанный V-тензор

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu=\rho_0\sqrt{-g}\,\frac{dx_\nu}{ds}\sum_\mu g_{\sigma\mu}\,\frac{dx_\mu}{ds}. \tag{48}$$

Напрашивается предположение, что величина $(\mathfrak{T}_\sigma^\nu)$ представляет собой тензор энергии тяжелых масс, и что уравнения (42а) вместе с (48) соответствуют уравнениям Эйлера для случая несвязанных масс, т. е. для случая, когда можно пренебречь поверхностными силами. Докажем справедливость этого утверждения; при этом мы заодно получим уравнения, найденные ранее в качестве уравнений движения материальной точки.

Пусть рассматриваемые массы находятся в бесконечно малом объеме x_1, x_2, x_3. Интегрируя (42а) по этим переменным по всей «линии тока» и полагая для краткости $dx_1\, dx_2\, dx_3 = dv$, получаем

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int \mathfrak{T}_\sigma^4\, dv\right\} = \sum_{\tau\nu}\left\{\Gamma_{\nu\sigma}^\tau \int \mathfrak{T}_\tau^\nu\, dv\right\} + \int \mathfrak{K}_\sigma\, dv. \tag{49}$$

Подставляя сюда выражение (48) для $\mathfrak{T}_\sigma^4$ и учитывая, что согласно соотношению (47а)

$$dv = \frac{dv_0}{\sqrt{-g}}\,\frac{ds}{dx_4} \tag{47б}$$

и что

$$m = \int \rho_0\, dv_0, \tag{50}$$

получаем уравнение

$$\frac{d}{dx_4}\left\{m \sum_\mu g_{\sigma\mu}\frac{dx_\mu}{ds}\right\} = \sum_{\nu\tau}\left\{\Gamma_{\nu\sigma}^\tau\,\frac{dx_\nu}{dx_4}\, m \sum_\mu g_{\tau\mu}\,\frac{dx_\mu}{ds}\right\} + \int \mathfrak{K}_\sigma dv, \tag{49a}$$

или, введя для краткости [10] ковариантный 4-вектор

$$I_\sigma = m \sum_\mu g_{\sigma\mu}\,\frac{dx_\mu}{ds}\,, \tag{51}$$

---

[10] Здесь следует упомянуть, почему нами для формулировки теоремы энергии-импульса было использовано уравнение (41), а не уравнение (39). Согласно уравнению (39), тензор энергии был бы контравариантным V-тензором, и компонентами гравитационного поля следовало бы считать величины $\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}$.

Тогда в § 11 с помощью изложенного метода мы пришли бы к тому, что стали бы рассматривать в качестве компонент импульса и энергии компоненты контравариантного 4-вектора $\left(I^\sigma = m\frac{dx_\sigma}{ds}\right)$. То, что такое истолкование противоречит нашему физическому пониманию сущности импульса, будет здесь показано в весьма специальном случае.

В пространстве без гравитационного поля введем систему координат, отличающуюся от «нормальной системы» только тем, что ось x_1 составляет с осью окончательно имеем

$$\frac{dI_\sigma}{dx_4} = \sum_{\nu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\sigma} \frac{dx_\nu}{dx_4} I_\tau + \int \mathfrak{K}_\sigma dv. \tag{49б}$$

Эти уравнения представляют собой уравнения движения материальной точки, если четвертая (временна́я) координата выбрана в качестве независимой переменной. Из таблицы (43) следует, что компоненты (I_σ) по своему физическому смыслу являются взятыми с обратным знаком компонентами импульса или энергии материальной точки. В случае специальной теории относительности, когда величины $g_{\mu\nu}$ принимают значения (18), имеем

$$\left.\begin{aligned} -I_1 &= \frac{m\mathfrak{q}_x}{\sqrt{1-q^2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_4 &= \frac{m}{\sqrt{1-q^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

где $\mathfrak{q}$ — трехмерный вектор скорости, а q — его абсолютная величина. Эти выражения находятся в соответствии с результатом специальной теории относительности, если учесть, что, задавая для $g_{\mu\nu}$ значение (18), мы тем самым выбрали в качестве единицы времени «световую секунду» [11].

Если $\mathfrak{K}_\sigma$ в уравнении (49б) обращается в нуль, т. е. если внешние силы обусловлены исключительно гравитационным полем, то отсюда после умножения уравнения на $\frac{dx_4}{ds} \cdot \frac{1}{m}$ и некоторых простых вычислений получаются эквивалентные (1) уравнения (23а), описывающие движения материальной точки в гравитационном поле. Все это доказывает, что тензор $\mathfrak{T}^\nu_\sigma$ в (48) действительно является тензором энергии движущейся материи.

Тензор энергии идеальной жидкости. Мы дополним теперь формулу (48) таким образом, чтобы получить тензор энергии идеальной жидкости

---

x_2 (в нормальной системе) угол φ, отличный от $\frac{\pi}{2}$. При этом

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - 2dx_1\,dx_2 \cos\varphi - dx_3^2 + dx_4^2.$$

Тогда, например, $-I^2 = m\frac{dx_2}{ds}$. Эта величина обращается в нуль, если точка движется в направлении оси x_1. Ясно, однако, что в рассматриваемом случае x_2-компонента импульса фактически существует и отличается от x_1-компоненты только множителем $\cos\varphi$. Но если теорема энергии импульса базируется на уравнении (41) и соответственно формуле (51) для вычисления импульса и энергии используется ковариантный 4-вектор, то в рассматриваемом случае $-I_2 = -g_{12}m\frac{dx_2}{ds} = m\frac{dx_1}{ds}\cos\Phi = -I_1\cos\Phi$, как и должно быть.

[11] См. примечание на стр. 357.

с учетом имеющихся поверхностных сил (давления) и изменения энергии, связанного с изменением плотности[12]. Тензор энергии в любом месте среды нетрудно получить в нормальной системе отсчета, в которой ось $d\xi$ совпадает в рассматриваемой точке с элементом четырехмерной линии тока.

Пусть Φ — (естественно измеренный) объем такого количества вещества, которое при нулевом давлении занимает объем Φ_0 и имеет массу, равную 1. Естественно измеренная энергия ε этого количества вещества при занимаемом им объеме Φ равна

$$1 - \int\limits_{\Phi_0}^{\Phi} p d\Phi,$$

если допускаются только адиабатические изменения состояния, причем через p обозначено естественно измеряемое давление. Согласно (52), энергия покоящейся единицы массы равна 1, когда давление равно нулю. Взятый с отрицательным знаком интеграл представляет собой функцию одного давления p; мы обозначим его P. Отсюда энергия на единицу объема получается умножением на $\rho_0 = \frac{1}{\Phi}$. Выражение

$$\rho_0 (1 + P)$$

представляет собой плотность энергии.

Искомый тензор задается при нашем выборе системы координат компонентами

$$\begin{matrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0 (1 + P) \end{matrix}$$

В произвольно выбранной системе отсчета этот тензор, очевидно, переходит в

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = -p\delta_\sigma^\nu \sqrt{-g} + \rho_0 \sqrt{-g} (1 + p + P) \frac{dx_\nu}{ds} \sum_\mu g_{\sigma\mu} \frac{dx_\mu}{ds}. \qquad (48a)$$

При этом величины ρ_0, p и P, по нашему определению, являются

[12] При этом мы ограничимся, однако, адиабатическими течениями жидкости с однородным адиабатическим уравнением состояния.

скалярами. Полагая, для краткости,

$$\rho_0 \sqrt{-g}\,(1 + p + P) = \rho^*,$$

уравнение (42a) можно представить в виде

$$-\sqrt{-g}\,\frac{\partial p}{\partial x_\sigma} + \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\rho^* g_{\sigma\mu}\,\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \rho^*\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds} + \mathfrak{K}_\sigma. \qquad (53)$$

Эти четыре уравнения определяют пять неизвестных функций p и $\frac{dx_\nu}{ds}$, причем для последних справедливо соотношение

$$\Sigma g_{\mu\nu}\,\frac{dx_\mu}{ds}\,\frac{dx_\nu}{ds} = 1,$$

а величина ρ^* является функцией давления p, определяемой из известного адиабатического уравнения состояния жидкости.

Величины $g_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{K}_\sigma$ считаются известными. Уравнения (53) заменяют уравнения Эйлера, включая уравнение непрерывности. В этом можно легко убедиться, переходя к случаю специальной теории относительности и вводя дополнительно предположение, что скорости достаточно малы по сравнению со скоростью света, а давление мало настолько, что можно пренебречь его влиянием на инертность.

§ 11. Уравнения электромагнитного поля

Соображения, которые приводят к общековариантным законам для электромагнитных явлений, совершенно аналогичны аргументации в случае специальной теории относительности; поэтому мы будем кратки.

Уравнения электромагнитного поля в вакууме. Пусть $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{F}^{\mu\nu *}$ — два дуальных контравариантных объемных 6-вектора [см. формулу (24)]. Из соотношения (40) следует, что выражения

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu},\quad \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu *}}{\partial x_\nu}$$

являются компонентами контравариантных объемных 4-векторов. Если эти компоненты приравнять нулю, то можно получить уравнения Максвелла в вакууме в общековариантном виде. Легко убедиться, что эти уравнения переходят в максвелловские, если ввести обозначения компонент 6-векторов $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{F}^{\mu\nu *}$ по следующей схеме

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathfrak{F}^{23} & \mathfrak{F}^{31} & \mathfrak{F}^{12} & \mathfrak{F}^{14} & \mathfrak{F}^{24} & \mathfrak{F}^{34} & \mathfrak{F}^{23*} & \mathfrak{F}^{31*} & \mathfrak{F}^{12*} & \mathfrak{F}^{14*} & \mathfrak{F}^{24*} & \mathfrak{F}^{34*} \\ \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z & -\mathfrak{e}_x & -\mathfrak{e}_y & -\mathfrak{e}_z & -\mathfrak{e}^*_x & -\mathfrak{e}^*_y & -\mathfrak{e}^*_z & -\mathfrak{h}^*_x & -\mathfrak{h}^*_y & -\mathfrak{h}^*_z \end{array}$$

и учесть, что, согласно формуле (24),

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^*$$
$$\mathfrak{e}^* = \mathfrak{e},$$

если для величин $g_{\mu\nu}$ взять специальные значения (18).

Плотность зарядов. Ток конвекции. В сопутствующей системе, очевидно, существует плотность электрических зарядов, являющаяся по своему определению скаляром. Получающийся отсюда умножением на $\sqrt{-g}$ V-скаляр мы обозначим через $\rho_{(e)}$. Из него и контравариантного 4-вектора $\frac{dx_\mu}{ds}$ мы образуем контравариантный объемный 4-вектор тока конвекции

$$\rho_{(e)} \frac{dx_\mu}{ds}.$$

Уравнения Лоренца для вакуума. Приписывая все взаимодействия между материей и электромагнитным полем движению электрических зарядов в лоренцовском смысле, следует опираться на уравнения

$$\left.\begin{aligned} \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} &= \rho_{(e)} \frac{dx_\mu}{ds}, \\ \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu *}}{\partial x_\nu} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Они представляют собой основные уравнения электронной теории Лоренца в общековариантной формулировке. Из них следуют законы, по которым гравитационное поле действует на электромагнитное поле.

Уравнения электромагнитного поля движущихся тел для случая, когда рассматриваемые тела имеют равные единице диэлектрическую постоянную и магнитную восприимчивость. Электрическую и магнитную поляризации тел следует учитывать только в такой степени, в какой они приводят к плотностям электрических и магнитных зарядов; электрический и магнитный «ток поляризации» не должен появляться. Напротив, электрический ток проводимости необходимо учитывать. Общековариантные уравнения поля для этого случая будут найдены, если в правой части уравнений учесть как электрический или магнитный ток конвекции, так и электрический ток проводимости.

Пусть величина $\rho_{(e)}$ представляет собой суммарную плотность заряда электронов проводимости и поляризационных в определенном ранее смысле; тогда выражение $\left(\rho_{(e)}\frac{dx_\mu}{ds}\right)$ будет объемным 4-вектором тока конвекции, создаваемого электронами проводимости и поляризационными электронами. Пусть величина $\rho_{(m)}$ представляет собой плотность магнитных зарядов в определенном выше смысле, появляющихся в результате (жесткой) магнитной поляризации. Тогда выражение $\left(\rho_{(m)}\frac{dx_\mu}{ds}\right)$ является объемным 4-вектором магнитного тока конвекции.

Равным образом, току проводимости соответствует объемный 4-вектор, который мы обозначим через $(\mathfrak{L}^\mu)$. Он определяется тем, что в «нормальной системе», с одной стороны,

$$\mathfrak{L}^1 = -\lambda\mathfrak{F}^{14}, \qquad \mathfrak{L}^2 = -\lambda\mathfrak{F}^{24}, \qquad \mathfrak{L}^3 = -\lambda\mathfrak{F}^{34}, \qquad \mathfrak{L}^4 = 0,$$

а с другой:

$$\frac{dx_1}{ds} = 0, \qquad \frac{dx_2}{ds} = 0, \qquad \frac{dx_3}{ds} = 0, \qquad \frac{dx_4}{ds} = 1.$$

Этим условиям можно удовлетворить, положив

$$\mathfrak{L}^\mu = -\lambda\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\,\mathfrak{F}^{\mu\alpha}\frac{dx_\beta}{ds}. \tag{55}$$

Тогда уравнения поля принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\nu \frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \rho_{(e)}\frac{dx_\mu}{ds} + \mathfrak{L}^\mu, \\ &\sum_\nu \frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu *}}{\partial x_\nu} = \rho_{(m)}\frac{\partial x_\mu}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Уравнения поля для изотропных электрически- и магнитно-поляризуемых движущихся тел. Обобщим рассматривавшийся до сих пор случай, приняв во внимание также электрический и магнитный токи поляризации. При этом будет предполагаться, что в сопутствующей нормальной системе компоненты поля пропорциональны этой поляризации.

Уравнения поля для этого случая мы получим из уравнений (56), если в правые части этих уравнений подставить выражения для объемного 4-вектора тока электрической или магнитной поляризации. Электрическую поляризацию мы представим контравариантным объемным 4-вектором $(\mathfrak{P}^{\mu}_{(e)})$, компоненты которого в сопутствующей нормальной системе определяются равенствами

$$\mathfrak{P}^{1}_{(e)} = -\sigma_{(e)}\mathfrak{F}^{14}; \quad \mathfrak{P}^{2}_{(e)} = -\sigma_{(e)}\mathfrak{F}^{24}; \quad \mathfrak{P}^{3}_{(e)} = -\sigma_{(e)}\mathfrak{F}^{34}; \quad \mathfrak{P}^{4}_{(e)} = 0.$$

Этому требованию удовлетворяет равенство

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{(e)} = -\sigma_{(e)} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\mathfrak{F}^{\mu\alpha}\frac{dx_\beta}{ds}, \tag{57}$$

Образуем из этого объемного 4-вектора объемный 6-вектор

$$\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)} = \mathfrak{P}^{\mu}_{(e)}\frac{dx_\nu}{ds} - \mathfrak{P}^{\nu}_{(e)}\frac{dx_\mu}{ds}, \tag{58}$$

из которого с помощью дивергенции, согласно формуле (40), снова получим контравариантный объемный 4-вектор электрического тока конвекции

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)}}{\partial x_\nu}. \tag{59}$$

Заметим, что для нормальной системы компоненты этого вектора имеют вид

$$\frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_x)}{\partial t}; \quad \frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_y)}{\partial t}; \quad \frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_z)}{\partial t}; \quad -\left(\frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_z)}{\partial z}\right).$$

Добавим выражение (59) в правую часть первого из уравнений (56), получим уравнения, которые в нормальной системе переходят в систему уравнений Максвелла для покоящихся тел. Тем самым обоснована справедливость равенств (57) и (58), а также выражения (59).

Для магнитной поляризации, аналогично, положим

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{(m)} = -\sigma_{(m)} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\mathfrak{F}^{\mu\alpha *}\frac{dx_\beta}{ds}, \tag{57a}$$

$$\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)} = \mathfrak{P}^{\mu}_{(m)}\frac{dx_\nu}{ds} - \mathfrak{P}^{\nu}_{(m)}\frac{dx_\mu}{ds}, \tag{58a}$$

откуда для компонент объемного 4-вектора магнитного поляризационного тока получим выражение

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)}}{\partial x_\nu}. \tag{59a}$$

Тогда уравнения поля принимают вид

$$\sum_{\nu} \frac{\partial (\mathfrak{F}^{\mu\nu} - \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)})}{\partial x_\nu} = \rho_{(e)} \frac{dx_\mu}{ds} + \mathfrak{L}^{\mu},$$

$$\sum_{\nu} \frac{\partial (\mathfrak{F}^{\mu\nu *} - \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)})}{\partial x_\nu} = \rho_{(m)} \frac{dx_\mu}{ds}, \tag{60}$$

причем величины $\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)}$, $\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)}$, $\mathfrak{L}^{\mu}$ связаны с 6-векторами поля соотношениями

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{(e)} = -\sigma_{(e)} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \mathfrak{F}^{\mu\alpha} \frac{dx_\beta}{ds}, \qquad \mathfrak{P}^{\mu}_{(m)} = -\sigma_{(m)} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \mathfrak{F}^{\mu\alpha *} \frac{dx_\beta}{ds},$$

$$\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)} = \mathfrak{P}^{\mu}_{(e)} \frac{dx_\nu}{ds} - \mathfrak{P}^{\nu}_{(e)} \frac{dx_\mu}{ds}, \qquad \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)} = \mathfrak{P}^{\mu}_{(m)} \frac{dx_\nu}{ds} - \mathfrak{P}^{\nu}_{(m)} \frac{dx_\mu}{ds}, \tag{60a}$$

$$\mathfrak{L}^{\mu} = -\lambda \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \mathfrak{F}^{\mu\alpha} \frac{dx_\beta}{ds}.$$

Вывод баланса энергии-импульса в смысле уравнения (42а) также не вызывает затруднений. Однако предыдущее рассмотрение в достаточной мере показывает, как надлежит записать уже известные законы природы в общековариантном виде.

D. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В последнем разделе коэффициенты $g_{\mu\nu}$, понимаемые с физической точки зрения в качестве компонент гравитационных потенциалов, рассматривались как заданные функции координат x_ν. Теперь надо найти дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти величины. Теоретико-познавательное значение развивавшейся до сих пор теории состоит в том, что она удовлетворяет принципу относительности в его наиболее широком смысле. С формальной точки зрения это основано на том, что система уравнений о б щ е к о в а р и а н т н а, т. е. ковариантна по отношению к произвольным преобразованиям координат.

После этого представляется необходимым, чтобы дифференциальные уравнения для $g_{\mu\nu}$ были также о б щ е к о в а р и а н т н ы. Однако мы покажем, что это требование необходимо несколько ограничить, если мы хотим полностью удовлетворить принципу причинности. Именно, мы докажем, что законы, определяющие течение событий, в гравитационном поле не могут быть *общековариантными*.

§ 12. Доказательство необходимости ограничений на выбор координат

Мы рассмотрим некоторую конечную часть Σ пространства, в которой не происходят какие-либо материальные процессы. Тогда физические события в области Σ полностью определяются, если по отношению к используемой для описания координатной системы K заданы величины $g_{\mu\nu}$ как функции координат x_ν. Совокупность этих функций будем символически обозначать через $G(x)$.

Введем новую систему координат K', совпадающую с системой K вне области Σ, но отличную от K внутри Σ, такую, что относительно этой системы K' величины $g'_{\mu\nu}$, как и $g_{\mu\nu}$ (вместе с их производными), всюду непрерывны. Совокупность $g'_{\mu\nu}$ обозначим символически через $G'(x')$. Величины $G'(x')$ и $G(x)$ описывают само гравитационное поле. Выразим входящие в $g'_{\mu\nu}$ координаты x'_ν через координаты x_ν, т. е. образуем $G'(x)$, тогда $G'(x)$, равным образом, будет описывать гравитационное поле относительно системы K, которое, однако, не совпадает с имеющимся (или специально заданным) гравитационным полем.

Предположим теперь, что дифференциальные уравнения гравитационного поля общековариантны; тогда их решением будут $G'(x')$ (в системе K'), если в системе K решения суть $G(x)$. Тогда эти уравнения удовлетворяются в системе K также и функциями $G'(x)$. Таким образом, относительно системы K существуют отличные друг от друга решения $G(x)$ и $G'(x)$, несмотря на то, что на границе области оба решения совпадают, т. е. *для общековариантных дифференциальных уравнений гравитационного поля последовательность событий может быть неоднозначной.* Если мы потребуем, чтобы развитие событий в гравитационном поле полностью определялось устанавливаемыми законами, то необходимо ограничить выбор координатных систем таким образом, чтобы было невозможно ввести новую систему координат K' описанного выше вида без того, чтобы не нарушить введенного ограничения. Продолжение координатной системы внутрь некоторой области Σ не может быть произвольным.

§ 13. Ковариантность относительно линейных преобразований. Приспособленная система координат

После того, как мы видели, что система координат должна подчиняться некоторому условию, мы должны рассмотреть некоторые способы специализации выбора системы координат. Весьма далеко идущее ограничение получается, если допустить только линейные преобразования. Если бы мы потребовали от физических уравнений лишь ковариантности относительно линейных преобразований, то наша теория лишилась бы главной опоры. Действительно, преобразования к ускоренной или вращающейся системе не были бы тогда правомерными; отмеченная в § 1 физическая эквивалентность «центробежного» поля и поля тяжести не объяснялась бы их тождественностью. С другой стороны, полезно (как это будет видно из дальнейшего) наложить условие, чтобы линейные преобразования входили в число допустимых преобразований. Поэтому придется кратко сказать о той модификации, развитой в разделе В теории ковариантов, которая возникает, если вместо допустимых произвольных преобразований ограничиться только линейными.

Ковариантность относительно линейных преобразований. Изложенные в § 3—8 алгебраические свойства тензоров не упрощаются даже тогда, когда рассматриваются только линейные преобразования; правила же образования тензоров при помощи операций дифференцирования (§ 9), напротив, становятся проще.

Именно, всегда имеем

$$\frac{\partial}{\partial x'_\rho} = \sum_\delta \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\rho} \frac{\partial}{\partial x_\delta}.$$

Например, для ковариантного тензора второго ранга, согласно (5а), имеем также

$$\frac{\partial A'_{\mu\nu}}{\partial x'_\rho} = \sum_{\alpha\beta\delta} \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\delta}\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta}\right).$$

Для линейного преобразования производные $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}$ и т. д. не зависят от координат x_δ, так что

$$\frac{\partial A'_{\mu\nu}}{\partial x'_\rho} = \sum_{\alpha\beta\delta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \cdot \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\rho} \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta}.$$

Величина $\left(\frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta}\right)$ также представляет собой ковариантный тензор третьего ранга.

Вообще можно показать, что в результате дифференцирования компонент произвольного тензора по координатам опять получается тензор, ранг которого выше на единицу, причем вновь появившийся индекс носит ковариантный характер. В этом состоит операция р а с ш и р е н и я при ограничении только линейными преобразованиями. Поскольку вообще расширение в соединении с алгебраическими операциями составляет основу образования ковариантных величин, мы тем самым владеем системой ковариантов относительно линейных преобразований. Обратимся теперь к некоторым соображениям, которые приведут к гораздо более слабому ограничению на выбор координат.

Закон преобразования интеграла I. Пусть H — некоторая функция величин $g^{\mu\nu}$ и их первых производных $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$, которые мы для краткости обозначим также через $g_\sigma^{\mu\nu}$. Обозначим символом I интеграл

$$I = \int H \sqrt{-g}\, d\tau, \tag{61}$$

распространенный по конечной части Σ пространства. Пусть используемой вначале системой координат является система K_1. Нас интересует изменение ΔI, которое претерпевает интеграл I при переходе от системы K_1 к бесконечно мало отличающейся от нее системе K_2. Обозначив через $\Delta\Phi$ приращение, которое получает произвольная относящаяся к некоторой точке пространства величина Φ при этом преобразовании, согласно соотношению (17), сначала имеем

$$\Delta(\sqrt{-g}\, d\tau) = 0 \tag{62}$$

и, далее,

$$\Delta H = \sum_{\mu\nu\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} \Delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial H}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} \Delta g_\sigma^{\mu\nu} \right). \tag{62a}$$

Приращение $\Delta g^{\mu\nu}$, в силу закона преобразования (8), можно выразить через приращение Δx_μ, где

$$\Delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu\prime} - g^{\mu\nu},$$
$$\Delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu.$$

Тогда получим

$$\Delta g^{\mu\nu} = \sum_\alpha \left(g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha} \right), \tag{63}$$

$$\Delta g_\sigma^{\mu\nu} = \sum_\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma} \right\}. \tag{63a}$$

Соотношения (62а), (63) и (63а) представляют ΔH в виде линейной однородной функции первых и вторых производных от Δx_μ по координатам.

До сих пор мы не налагали никакого ограничения на вид зависимости величины H от $g^{\mu\nu}$ и $g_\sigma^{\mu\nu}$. Теперь мы примем, что H представляет собой инвариант относительно линейных преобразований, т. е. ΔH должно обращаться в нуль, если исчезают вторые производные $\frac{\partial^2 \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}$. При таком условии получаем

$$\frac{1}{2}\Delta H = \sum_{\mu\nu\sigma\alpha} g^{\nu\alpha} \frac{\partial H}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} \frac{\partial^2 \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}. \tag{64}$$

С помощью формул (64) и (62) находим

$$\frac{1}{2}\Delta I = \int d\tau \sum_{\mu\nu\sigma\alpha} g^{\nu\alpha} \frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} \cdot \frac{\partial^2 \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma};$$

отсюда после интегрирования по частям получаем

$$\frac{1}{2}\Delta I = \int d\tau \sum_\mu (\Delta x_\mu B_\mu) + F. \tag{65}$$

Здесь мы ввели следующие обозначения:

$$B_\mu = \sum_{\alpha\sigma\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\sigma \partial x_\alpha}\left(g^{\nu\alpha} \frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\right), \tag{65а}$$

$$F = \int d\tau \sum_{\alpha\sigma\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[g^{\nu\alpha} \frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} \cdot \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\nu\alpha} \frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\right)\Delta x_\mu\right]. \tag{65б}$$

Интеграл F можно преобразовать в поверхностный, который обращается в нуль, если на границе равны нулю величины Δx_μ $\frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\sigma}$.

Приспособленная система координат. Рассмотрим опять часть Σ нашего пространства, конечную по всем координатам, и будем относить ее сначала к системе координат K. Отправляясь от этой системы координат K, представим себе, что последовательно одна за другой вводятся бесконечно близкие системы координат K', K'' и т. д. такие, что при переходе от одной системы к следующей величины Δx_μ и $\frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha}$ на границе обращаются в нуль. Все такие системы назовем «координатными системами с совпадающими граничными координатами». Для каждого из бесконечно малых координатных преобразований между соседними системами семейства K, K', K'',... имеем

$$F = 0,$$

так что вместо равенства (65) получим

$$\frac{1}{2}\Delta I = -\int d\tau \Delta x_\mu B_\mu. \qquad (66)$$

Среди всех систем с совпадающими граничными координатами имеется такая, для которой интеграл I имеет экстремум по отношению к значениям I для всех соседних систем с совпадающими граничными координатами; такую систему координат мы назовем «приспособленной к гравитационному полю системой координат». Для приспособленной системы, в силу равенства (66), выполняются уравнения

$$B_\mu = 0, \qquad (67)$$

поскольку Δx_μ внутри области Σ могут быть произвольны. Обратно, равенство (67) является д о с т а т о ч н ы м условием того, чтобы система координат была приспособленной к гравитационному полю.

Если мы ниже установим дифференциальные уравнения для гравитационного поля, которые выполняются только в приспособленной системе координат, то тем самым нам удастся избежать трудности, на которую было указано в § 13. Действительно, благодаря ограничению приспособленными системами координат заданную вне области Σ систему координат нельзя непрерывно продолжить внутрь Σ произвольным образом.

§ 14. *H*-тензор

Соотношение (65) приводит нас к теореме, которая имеет фундаментальное значение для всей теории. Если мы изменим гравитационное поле, соответствующее значению $g_{\mu\nu}$, на бесконечно малую величину, т. е. вместо $g^{\mu\nu}$ возьмем $g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$, причем $\delta g^{\mu\nu}$ должно исчезать в зоне конечной ширины, прилегающей к границам области Σ, то H переходит в $H + \delta H$, а интеграл I переходит в $I + \delta I$. Мы утверждаем теперь, что уравнение

$$\Delta\{\delta I\} = 0 \qquad (68)$$

остается выполненным, причем величины $\delta g^{\mu\nu}$ также могут быть произвольными, если только системы координат (K_1 и K_2) являются п р и с п о с о б л е н н ы м и координатными системами для исходного гравитационного поля, т. е. при ограничении приспособленными системами координат величины δI представляют собой инвариант.

Для доказательства представим себе, что $\delta g^{\mu\nu}$ состоит из двух частей, и запишем

$$\delta g^{\mu\nu} = \delta_1 g^{\mu\nu} + \delta_2 g^{\mu\nu}, \tag{69}$$

причем обе части вариации выбираются следующим образом.

а) Пусть первая часть, $\delta_1 g^{\mu\nu}$, выбрана так, чтобы система координат K_1 являлась приспособленной не только к (фактическому) гравитационному полю $g^{\mu\nu}$, но также и к (варьированному) гравитационному полю $g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$. Это означает, что должно выполняться не только уравнение

$$B_\mu = 0,$$

но и уравнение

$$\delta_1 B_\mu = 0. \tag{70}$$

Величины $\delta_1 g^{\mu\nu}$ не являются независимыми друг от друга: они связаны между собой четырьмя дифференциальными уравнениями.

б) Пусть вторая часть, $\delta_2 g^{\mu\nu}$, выбрана так, чтобы она была обязана простому изменению системы координат без изменения гравитационного поля, а именно, изменению в такой части области Σ, в которой вариация $\delta g^{\mu\nu}$ отлична от нуля. Такая вариация характеризуется четырьмя независимыми друг от друга функциями (вариациями координат). Ясно, что в общем случае $\delta_2 B_\mu \neq 0$.

Суперпозиция обеих этих вариаций определяется

$$(10 - 4) + 4 = 10$$

независимыми функциями; они эквивалентны также произвольному изменению $\delta g^{\mu\nu}$. Наше предположение будет доказано, если уравнение (68) доказать для обеих вариаций.

Доказательство для вариации δ_1. Взяв δ_1-вариацию соотношения (65), непосредственно получаем

$$\frac{1}{2} \Delta (\delta_1 I) = \int d\tau \sum_\mu (\Delta x_\mu \delta_1 B_\mu) + \delta_1 F. \tag{65a}$$

Если на границе области Σ вариации δ_1 величин $g^{\mu\nu}$ и всех их производных обращаются в нуль, то, согласно формуле (65б), обращается в нуль и преобразуемая к поверхностному интегралу величина $\delta_1 F$. Отсюда и в силу условия (70) соотношение (65а) преобразуется в уравнение

$$\Delta (\delta_1 I) = 0. \tag{68a}$$

Доказательство для вариации δ_2. Вариация $\delta_2 I$ соответствует бесконечно малому преобразованию координат при постоянных значениях координат границы. Так как система координат должна быть приспособленной к исходному (не варьированному) гравитационному полю, то, согласно определению приспособленной системы координат, имеем

$$\delta_2 I = 0.$$

Предположим сначала, что рассматриваемое изменение гравитационного поля относительно системы координат K_1 выбрано в виде δ_2-вариации; тогда имеем

$$\delta_2 (I_1) = 0.$$

Если же эта вариация является δ_2-вариацией также и по отношению к системе K_2 (что будет доказано), то относительно системы K_2 выполняется аналогичное уравнение

$$\delta_2 (I_2) = 0.$$

После вычитания отсюда следует уравнение

$$\delta_2 (\Delta I) = \Delta (\delta_2 I) = 0. \tag{68б}$$

Теперь необходимо доказать, что рассматриваемая вариация является δ_2-вариацией также относительно системы K_2. Обозначим через G_1 (или соответственно G_2) отнесенный к системе K_1 (или соответственно к K_2) неварьированный тензор $g^{\mu\nu}$, а через G_1^* (или G_2^*) варьированный тензор $g^{\mu\nu}$, отнесенный к системе K_1 (или к K_2). От G_1 к G_2 или от G_1^* к G_2^* можно перейти с помощью преобразования координат T; пусть обратное преобразование будет T^{-1}. Далее, от G_1 к G_2 можно перейти преобразованием координат t. Тогда тензор G_2^* получается из тензора G_2 последовательностью преобразований

$$T^{-1} \to t \to T,$$

т. е. опять некоторым преобразованием координат. Тем самым показано, что рассматриваемое изменение величины $g^{\mu\nu}$ представляет собой δ_2-вариацию также относительно системы K_2.

Из уравнений (68а) и (68б) следует, наконец, искомое уравнение (68).

Из доказанного предложения мы выведем существование некоторого комплекса, состоящего из 10 компонент, который при ограничении определенными системами координат обладает тензорным характером. Из равенства (61) имеем

$$\delta I = \delta \{ \int H \sqrt{-g}\, d\tau \} =$$
$$= \int d\tau \sum_{\mu\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial (H \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial (H \sqrt{-g})}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} \delta g_\sigma^{\mu\nu} \right\},$$

или, так как $\delta g_{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}(\delta g^{\mu\nu})$, после интегрирования по частям и, принимая во внимание, что $\delta g^{\mu\nu}$ обращается в нуль на границе,

$$\delta I = \int d\tau \sum_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(\frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}} \right) \right\}. \quad (71)$$

Мы доказали, что вариация δI при ограничении приспособленными системами координат является инвариантом. Так как вариации $\delta g^{\mu\nu}$ должны быть отличны от нуля только в некоторой бесконечно малой области, а выражение $\sqrt{-g}d\tau$ является скаляром, то подынтегральное выражение, деленное на $\sqrt{-g}$, т. е. величина

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathfrak{G}_{\mu\nu}, \quad (72)$$

также является инвариантом: причем здесь мы положили

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu} = \frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(\frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}} \right). \quad (73)$$

Далее, вариация $\delta g^{\mu\nu}$ так же, как и $g^{\mu\nu}$, является контравариантным тензором, а отношения вариаций $\delta g^{\mu\nu}$ выбираются произвольно. Отсюда следует, что величина

$$\frac{\mathfrak{G}_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}$$

при ограничении только приспособленными система координат представляет собой ковариантный тензор, а *сама величина* $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$ *является соответствующим ковариантным* V*-тензором, а именно* [*вследствие* (73)]: *симметричным тензором.*

§ 15 Вывод уравнений поля

Можно думать, что в отыскиваемых уравнениях гравитационного поля, которые должны занять место уравнения Пуассона ньютоновской теории, тензор $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$ играет фундаментальную роль. Действительно, в силу соображений § 13 и 14, мы потребовали, чтобы искомые уравнения, так же как тензор $\mathfrak{G}_{\nu\mu}$, были ковариантны только относительно приспособленных координатных систем. Далее, так как мы видели в связи с уравнением

(42а), что влияние гравитационного поля на материю описывается тензором энергии $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$, то искомые уравнения должны установить некоторую связь между тензорами $\mathfrak{G}_{\sigma\tau}$ и $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$. Можно предположить, что

$$\mathfrak{G}_{\sigma\tau} = \varkappa \mathfrak{T}_{\sigma\tau}. \tag{74}$$

Здесь $\varkappa$ — некоторая универсальная константа, а $\mathfrak{T}_{\sigma\tau}$ — симметричный ковариантный V-тензор, который связан со смешанным тензором энергии $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ соотношениями

$$\mathfrak{T}_{\sigma\tau} = \sum_\nu g_{\nu\tau} \mathfrak{T}_\sigma^\nu,$$

или (75)

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = \sum_\tau \mathfrak{T}_{\sigma\tau} g^{\nu\tau}.$$

Определение функции H. Отыскиваемые уравнения этим пока еще не определены полностью, поскольку еще не фиксирована функция H. До этого момента мы знали только, что H зависит лишь от $g^{\mu\nu}$ и $g_\sigma^{\mu\nu}$ и является скаляром относительно л и н е й н ы х преобразований [13]. Дальнейшие условия, которым должна удовлетворять функция H, мы получим следующим образом.

Пусть $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ — тензор энергии замкнутой материальной системы, находящейся в рассматриваемой области; тогда объемный 4-вектор ($\mathfrak{K}_\sigma$) плотности сил в уравнении (42а) равен нулю. Уравнение (42а) выражает в этом случае исчезновение дивергенции тензора энергии $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ материальной системы; то же самое, в силу уравнения (74), справедливо для тензора $\mathfrak{G}_{\sigma\nu}$ или для образованного из него смешанного V-тензора $\mathfrak{G}_\sigma^\nu$. Для любого гравитационного поля должно также выполняться условие [ср. формулы (41б) и (34)]

$$\sum_{\nu\tau} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (g^{\tau\nu} \mathfrak{G}_{\sigma\tau}) + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \mathfrak{G}_{\mu\nu} = 0.$$

Это условие на основании соотношений (73) и (65а) можно привести к виду

$$\sum_\nu \frac{\partial S_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - B_\sigma = 0, \tag{76}$$

---

[13] Без последнего введенного в § 14 требования для B_μ нам не удалось бы найти соотношение (65а); предложенное далее в тексте рассмотрение в целях определения функции не удается провести, если отказаться от этого требования. Ниже дается оправдание этому.

где

$$S_\sigma^\nu = \sum_{\mu\tau}\left(g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} + g_\mu^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\mu^{\sigma\tau}} + \frac{1}{2}\delta_\sigma^\nu H\sqrt{-g} - \frac{1}{2}g_\nu^{\mu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\nu^{\mu\tau}}\right) \tag{76a}$$

($\delta_\sigma^\nu = 1$ или 0, в зависимости от того, $\sigma = \nu$ или $\sigma \neq \nu$). Если тензор $\mathfrak{T}_{\sigma\tau}$ задан, то 10 уравнений (74) могут служить для определения 10 функций $g^{\mu\nu}$. Однако, $g^{\mu\nu}$ должны также удовлетворять и четырем уравнениям (67), так как система координат должна быть приспособленной. Следовательно, число уравнений больше, чем число искомых функций. Это происходит только тогда, когда не все уравнения независимы. Необходимо потребовать, чтобы уравнения (67) удовлетворялись, если удовлетворяются уравнения (74). Из уравнений (76) и (76а) нетрудно видеть, что это будет в том случае, если выражение S_σ^ν (величины которого являются функциями $g^{\mu\nu}$ и $g_\sigma^{\mu\nu}$, как и H) тождественно равно нулю для каждой комбинации индексов. Таким образом, функция должна выбираться из условия

$$S_\sigma^\nu \equiv 0. \tag{77}$$

Потребуем дальше (формальное обоснование этого я дать не могу), чтобы функция H была однородной функцией второй степени относительно $g_\sigma^{\mu\nu}$. Этим функция H определяется полностью с точностью до некоторого постоянного множителя. Действительно, так как она должна быть скаляром относительно линейных преобразований, то отсюда с учетом вышеуказанного предположения вытекает[14], что она равна некоторой линейной комбинации следующих пяти величин:

$$\sum g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_\tau}; \quad \sum g^{\sigma\sigma'}g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}g_{\mu'\nu'}\frac{\partial g^{\mu'\nu'}}{\partial x_{\sigma'}}; \quad \sum g^{\sigma\sigma'}\frac{\partial g^{\sigma\mu}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g^{\sigma'\nu}}{\partial x_\nu};$$

$$\sum g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'}g^{\sigma\sigma'}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial g^{\mu'\nu'}}{\partial x_{\sigma'}}; \quad \sum g_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x_\tau}\frac{\partial g^{\beta\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Условие (77) приводит, наконец, к тому, что функция H, с точностью до некоторого постоянного множителя, совпадает с четвертой из этих величин. Поэтому мы положим[15], учитывая уравнения (35) и произвольно

[14] Доказательство этого хотя и просто, но длинно; поэтому мы опускаем его.

[15] Выражая H через $\Gamma_{\sigma\tau}^\nu$ — компоненты гравитационного поля [ср. формулу (46)], получаем

$$H = -\sum_{\mu\rho\tau\tau'} g^{\tau\tau'}\Gamma_{\mu\tau}^\rho\Gamma_{\rho\tau'}^\mu.$$

распоряжаясь константой, что

$$H = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\tau\rho} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\tau\rho}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha} . \tag{78}$$

Мы ограничимся доказательством того, что при таком выборе функции H тождество (77) действительно выполняется.

С помощью соотношений

$$dg = g \sum_{\sigma\tau} g^{\sigma\tau} dg_{\sigma\tau} = -g \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} dg^{\sigma\tau},$$

$$dg_{\alpha\beta} = -\sum_{\mu\nu} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} dg^{\mu\nu}$$

получим из формулы (78)

$$\left.\begin{aligned} \sum_\tau g^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} &= \frac{1}{2} H\sqrt{-g}\,\delta_\sigma^\nu + \frac{1}{4}\sqrt{-g} \sum_{\mu\mu'\tau} g^{\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_\tau} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{-g} \sum_{\rho\rho'\varkappa} g^{\rho\rho'} \frac{\partial g_{\sigma\varkappa}}{\partial x_\rho} \cdot \frac{\partial g^{\nu\varkappa}}{\partial x_{\rho'}} , \\ \sum_{\mu\tau} g_\mu^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\mu^{\sigma\tau}} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} \sum_{\rho\rho'\varkappa} g^{\rho\rho'} \frac{\partial g_{\sigma\varkappa}}{\partial x_\rho} \frac{\partial g^{\nu\varkappa}}{\partial x_{\rho'}} , \\ \frac{1}{2} \sum_{\mu\tau} g_\sigma^{\mu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\nu^{\mu\tau}} &= \frac{1}{4}\sqrt{-g} \sum_{\mu\mu'\tau} g^{\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_\tau} . \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Отсюда следует сделанное выше утверждение.

Мы получим теперь чисто формальным путем, т. е. не привлекая непосредственно наших физических знаний о гравитации, вполне определенные уравнения поля. Чтобы записать их в более подробной форме, умножим уравнение (74) на $g^{\nu\tau}$ и просуммируем по индексу τ; тогда, принимая во внимание формулу (73), находим

$$\varkappa \mathfrak{T}_\sigma^\nu = \sum_{\alpha\tau} g^{\nu\tau} \left(\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\alpha^{\sigma\tau}} \right] \right) , \tag{80}$$

или

$$-\sum_{\alpha\tau} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\alpha^{\sigma\tau}} \right) = \\ = \varkappa \mathfrak{T}_\sigma^\nu + \sum_{\alpha\tau} \left(- g^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} + g_\alpha^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\alpha^{\sigma\tau}} \right) . \tag{80a}$$

При этом, поскольку наша система координат является приспособленной, в силу соотношений (67) и (65а) выполняется уравнение

$$\sum_{\alpha\tau\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\alpha^{\sigma\tau}}\right)=0,$$

и, в силу соотношения (80), уравнение

$$\sum_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\mathfrak{T}_\sigma^\nu+\frac{1}{\varkappa}\sum_{\alpha\tau}\left(-g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}}-g_\alpha^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\alpha^{\sigma\tau}}\right)\right\}=0. \qquad (80б)$$

Благодаря соотношениям (78), (79) и (46), мы можем вместо уравнений (80а) и (80б) получить следующие:

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma\beta}^\nu)=-\varkappa\,(\mathfrak{T}_\sigma^\nu+\mathfrak{t}_\sigma^\nu), \qquad (81)$$

$$\sum_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}_\sigma^\nu+\mathfrak{t}_\sigma^\nu)=0, \qquad (42в)$$

где

$$\Gamma_{\sigma\beta}^\nu=\frac{1}{2}\sum_\tau g^{\nu\tau}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\beta}, \qquad (81а)$$

$$\mathfrak{t}_\sigma^\nu=-\frac{\sqrt{-g}}{4\varkappa}\sum_{\mu\mu'\rho\tau}\left(g^{\nu\tau}\frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_\sigma}\cdot\frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_\tau}-\frac{1}{2}\delta_\sigma^\nu g^{\rho\tau}\frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_\rho}\cdot\frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_\tau}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}\sum_{\mu\rho\tau\tau'}\left(g^{\nu\tau}\Gamma_{\mu\sigma}^\rho\Gamma_{\rho\tau}^\mu-\frac{1}{2}\delta_\sigma^\nu g^{\tau\tau'}\Gamma_{\mu\tau}^\rho\Gamma_{\rho\tau'}^\mu\right). \qquad (81б)$$

Уравнения (81) вместе с выражениями (81а) и (81б) представляют собой дифференциальные уравнения гравитационного поля. Уравнения (42в), по предположениям § 10, выражают закон сохранения энергии и импульса материи и гравитационного поля вместе. Величины $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$, относящиеся к гравитационному полю, по своему физическому смыслу аналогичны компонентам $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ тензора энергии-импульса (V-тензора). Необходимо подчеркнуть, что $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ ковариантны не по отношению к произвольным преобразованиям, а только по отношению к л и н е й н ы м; тем не менее мы назовем (t_σ^ν) тензором энергии гравитационного поля. Аналогично $\Gamma_{\sigma\beta}^\nu$ являются компонентами напряженности гравитационного поля.

Система уравнений (81), несмотря на свою сложность, допускает простую физическую интерпретацию. Левая часть выражает своего рода дивергенцию гравитационного поля. Она зависит, как показывает правая часть, от компонент полного тензора энергии. При этом важен вывод, что тензор энергии гравитационного поля так же, как и тензор энергии материи, сам возбуждает поле.

§ 16. Критические замечания об основах теории

В основе изложенной теории лежит то обстоятельство, что в бесконечно малом всюду справедлива специальная теория относительности. Это станет ясным, если показать, что при соответствующем выборе вещественных координат величины $g_{\mu\nu}$ в некоторой произвольно заданной точке принимают значения

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Это как раз тот случай, когда поверхность второго порядка

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu = 1,$$

для каждой встречающейся в нашем пространстве системы значений $g_{\mu\nu}$ всегда обладает тремя мнимыми осями и одной вещественной осью. Если λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — квадраты обратных значений полуосей поверхности, то они удовлетворяют уравнению четвертой степени

$$|g_{\mu\nu} - \lambda\delta_\mu^\nu| = 0 = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)(\lambda_4 - \lambda).$$

Справедливо соотношение

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = g.$$

Чтобы величины $g^{\mu\nu}$ не принимали бесконечных значений, необходимо потребовать, чтобы величина g нигде не обращалась в нуль; тогда $g^{\mu\nu}$ представляют собой деленные на g миноры определителя $g_{\mu\nu}$. Среди λ в этом случае нет значений, равных нулю. Если также для некоторой точки пространства выполняются неравенства $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 > 0$, то эти неравенства имеют место всегда; пространственно-временной характер нашего пространства соответствует также в окрестностях всех точек случаю, положенному в основу специальной теории относительности. Математически это можно выразить следующим образом: из четырех взаимно «перпендикулярных» друг другу линейных элементов, проведенных из некоторой точки, имеется один «временно-подобный», три остальных — «пространственно-подобные».

Этим еще не определено отношение свойств временно- и пространственно-подобности к системе координат x_ν. В то время как в специальной теории относительности каждый линейный элемент, если только dx_4 отлично от нуля, всюду временно-подобен, а каждый линейный элемент с равным нулю dx_4 пространственно-подобен, этого нельзя утверждать для нашей приспособленной системы координат. Весьма возможно себе представить, что для достаточно большой части мира в целом нет такой оси координат, которую можно было обозначить как «ось времени»; наоборот, линейные элементы некоторой оси являются частично временно-подобными, частично пространственно-подобными. Эквивалентность четырех измерений мира была бы тогда не только формальная, но и полная. Этот важный вопрос пока что должен остаться открытым.

Необходимо указать на один еще более далеко идущий вопрос принципиального значения, на который я не могу ответить. В обычной теории относительности каждая линия, которая может описывать движение некоторой материальной точки, т. е. каждая состоящая только из временно-подобных линейных элементов линия обязательно должна быть незамкнутой; действительно, такая линия не содержит элементов, для которых dx_4 исчезает. Соответствующего утверждения в развиваемой здесь теории сделать нельзя. Поэтому априори можно представить себе такое движение точки, при котором четырехмерный путь точки был бы замкнутой кривой. В этом случае одна и та же материальная точка может присутствовать в произвольно малой пространственно-временно́й области во многих внешне независимых друг от друга экземплярах. Это противоречит коренным образом моей физической интуиции. Однако я не в состоянии привести доказательство того, что возможность появления таких кривых исключена в развитой теории.

Так как после такого признания я не уверен в том, что не вызову на лицах читателей сострадательной улыбки, то не могу удержаться от следующего замечания относительно существующего понимания основ физики. До Максвелла законы природы в пространственном отношении были в принципе законами интегральными; под этим понимается, что в элементарные законы входили расстояния между удаленными друг от друга на конечную величину точками. Такое описание природы кладет в основу эвклидову геометрию. Последняя не значит вначале ничего, кроме совокупности следствий из геометрических аксиом; она пока не имеет физического содержания. Но геометрия становится некоторым физическим знанием тогда, когда к ней добавляется определение, что две точки некоторого «жесткого» тела должны определять некоторое вполне определенное и независимое от положения тела расстояние; законы дополненной этим утверждением геометрии либо выполняются (в физическом смысле), либо не выполняются. Геометрия в этом расширенном смысле и представляет собой ту геометрию, которая кладется в основу физики. Законы геометрии с этой точки зрения следует рассматривать как физические интегральные законы, причем они имеют дело с расстояниями между удаленными на к о н е ч н у ю величину точками.

Благодаря Максвеллу с тех пор в физике произошел решительный переворот, во время которого постепенно победило представление о том, что в элементарных законах расстояния между конечноудаленными точками не могут появляться, т. е. «теория дальнодействия» была заменена «теорией близкодействия». При этом, однако, забылось, что эвклидова геометрия, в том виде, как она применялась в физике, также состоит из физических утверждений, которые с физической точки зрения устанавливались из интегральных законов ньютоновской механики точки. Это означает, на мой взгляд, некоторую непоследовательность, от которой нам нужно освободиться.

Поиски решения снова приводят нас к тому, чтобы вместо координат использовать сначала произвольные параметры для описания четырехмерного пространственно-временнóго континуума, который нас окружает.

Мы снова приходим к рассмотрению, которое было проведено в разделах *B* и *C* настоящей статьи, с тем единственным отличием, что взаимосвязь величин $g_{\mu\nu}$ с гравитационным полем не предполагается. Если бы мы пожелали сохранить эвклидову геометрию (в указанном смысле), то вместо выведенных в этом разделе уравнений мы получили бы уравнения, которые являются следствием следующего утверждения: координаты x_ν могут быть выбраны таким образом, чтобы величины $g_{\mu\nu}$ не зависели от x_ν. Таким путем мы пришли бы к требованию, чтобы компоненты введенного в § 9 тензора Римана — Кристоффеля исчезали в этом случае, обращались в нуль. Тем самым законы эвклидовой геометрии были бы сведены к дифференциальным уравнениям; однако при такой формулировке существа дела чувствуется, что с точки зрения последовательного проведения теории близкодействия эта возможность отнюдь не является наиболее простой и очевидной.

E. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ПОЛУЧЕННЫХ ЗАКОНОВ

При выводе законов я старался, насколько это было возможно, оставаться на формальной точке зрения. Теперь, чтобы не оставлять пробелов в изложении рассматриваемого вопроса, осветим кратко и физический смысл полученных результатов. При этом, чтобы не затемнять изложения сложными математическими выкладками, мы ограничимся рассмотрением некоторых приближений.

§ 17. Построение приближенных уравнений с различных точек зрения

Из широкой области применимости уравнений специальной теории относительности следует, что в доступной нашему восприятию пространственно-временно́й области величины $g_{\mu\nu}$ можно приближенно считать постоянными. Поэтому мы положим

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu_0} + h_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} &= g_0^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

где величины $g_{\mu\nu_0}$ и $g_0^{\mu\nu}$ принимают значения

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1. \end{matrix} \tag{82a}$$

При этом величины $h_{\mu\nu}$ и $h^{\mu\nu}$ рассматриваются как бесконечно малые первого порядка, между которыми при пренебрежении бесконечно малыми второго порядка выполняются соотношения

$$h^{\mu\nu} = -h_{\mu\nu}. \tag{83}$$

Здесь, как и у Минковского, временна́я координата выбрана чисто мнимой; этим объясняется, что $(g_{44})_0 = g_0^{44} = -1$ и что система уравнений остается ковариантной относительно линейных ортогональных преобразований. При выборе мнимой временно́й координаты g_{14}, g_{24} и g_{34} будут мнимыми, так же как $\sqrt{-g}$; справедливость выведенных нами уравнений, тем не менее, остается гарантированной, поскольку от вещественной временной координаты к мнимой можно перейти линейным преобразованием. Предположением (82a) достигается также и то, что естественно измеряемые длины и координатные длины в рассматриваемой области совпадают с точностью до бесконечно малых первого порядка.

Заменим уравнения (81) и (81a) уравнениями, которые получаются отсюда при пренебрежении бесконечно малыми величинами второго и высших порядков. Тогда величина $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ обращается в нуль и мы получаем

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 h_{\sigma\nu}}{\partial x_\alpha^2} = i\varkappa \mathfrak{T}_\sigma^\nu, \tag{84}$$

$$\Gamma_{\sigma\beta}^\nu = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial h_{\sigma\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{84a}$$

Введем дальнейшее приближение тем, что в тензоре $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ будем учитывать только те члены, которые соответствуют весомой материи, причем члены, обязанные своим происхождением поверхностным силам, опускаются. При этих предпосылках соотношение (48) дает тензор энергии. Так как, согласно соотношению (48), тензор $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ конечен, то получается далеко идущее приближение, если в (48) пренебречь также и бесконечно малыми первого порядка. Тогда получим

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = -i\rho_0 \frac{dx_\sigma}{ds_0} \frac{dx_\nu}{ds_0}. \tag{84б}$$

Подставляя это выражение для $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ в уравнение (84), находим (если левую часть уравнения (84) обозначить через $\Box h_{\sigma\nu}$)

$$\Box h_{\sigma\nu} = \varkappa\rho_0 \frac{dx_\sigma}{ds_0} \cdot \frac{dx_\nu}{ds_0}. \tag{85}$$

В этом уравнении x_1, x_2, x_3 — пространственные координаты, $x_4 = it$ — (мнимая) временна́я координата, а $ds_0 = dt\sqrt{1 - \frac{dx_1^2}{dt^2} + \frac{dx_2^2}{dt^2} - \frac{dx_3^2}{dt^2}}$ — элемент «собственного времени» Минковского.

После того, как мы заменили уравнение (81) приближенным уравнением, сходство которого с уравнением Пуассона в ньютоновской теории тяготения бросается в глаза, мы проделаем то же самое с уравнениями движения материальной точки (49б) вместе с уравнением (51). Исходное приближение получаем, полагая вместо уравнения (51)

$$I_\sigma = -m \frac{dx_\sigma}{ds_0}. \tag{86}$$

Введем в эти уравнения трехмерный вектор скорости $\mathfrak{q}$, абсолютная величина которого равна q:

$$\left.\begin{aligned} -I_1 &= \frac{m\mathfrak{q}_x}{\sqrt{1-q^2}} \\ -I_2 &= \frac{m\mathfrak{q}_y}{\sqrt{1-q^2}} \\ -I_3 &= \frac{m\mathfrak{q}_z}{\sqrt{1-q^2}} \\ -I_4 &= i\frac{m}{\sqrt{1-q^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{86а}$$

Выбор мнимой временной координаты приводит здесь к тому, что энергией является не I_4 [как было бы в соответствии с уравнениями (52)], а iI_4.

Вместо уравнения (49б) в отсутствие внешних сил, вследствие уравнения (84а) получаем

$$\frac{d\,(-I_\sigma)}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_{\nu\tau}\frac{\partial h_{\nu\tau}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\nu}{dt}\,(-I_\tau)\,. \tag{87}$$

Уравнения (85), (86), (87) в первом приближении заменяют ньютоновскую теорию тяготения.

Теория Ньютона как приближение. Если положить скорость $\mathfrak{q}$ бесконечно малой и, соответственно, сохранить в уравнениях только члены, содержащие компоненты $\mathfrak{q}$ в наименьшей степени, мы приходим к ньютоновской теории.

Тогда вместо уравнения (85) получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\Box\, h_{\sigma\nu} = 0 \qquad (\text{при } \nu \neq \sigma \neq 4),\\ &\Box\, h_{44} = -\varkappa\rho_0, \end{aligned}\right\} \tag{85a}$$

а вместо уравнения (87)

$$\frac{d(m\mathfrak{q})}{dt} = \frac{m}{2}\operatorname{grad} h_{44}. \tag{87a}$$

Из уравнений (85а) можно заключить, что в этом случае (при соответствующем выборе граничных условий на бесконечности) все величины $h_{\sigma\nu}$, кроме h_{44}, обращаются в нуль; из уравнения (87а) следует, что величина $-\frac{h_{44}}{2}$ играет роль гравитационного потенциала. Обозначим эту величину через Φ; тогда получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} \Box\,\Phi &= \frac{\varkappa}{2}\rho_0,\\ \frac{d(m\mathfrak{q})}{dt} &= -m\operatorname{grad}\Phi, \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

находящиеся в согласии с теорией Ньютона в том случае, когда второй производной $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$ можно пренебречь по сравнению со значением $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$ и т. д.

В ньютоновской теории первое из уравнений (88) гласит

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi K\rho_0;$$

отсюда имеем

$$\frac{\varkappa}{2} = 4\pi K.$$

Константа K имеет значение $6{,}7\cdot 10^{-8}$, если в качестве единицы времени взята секунда; если же за единицу времени взята световая секунда, то значение K равно $\frac{6,7\cdot 10^{-8}}{9\cdot 10^{20}}$. Поэтому получаем

$$\varkappa = 8\pi\cdot\frac{6,7\cdot 10^{-8}}{9\cdot 10^{20}} = 1,87\cdot 10^{-27}. \quad (89)$$

Для естественно измеренного расстояния между соседними пространственно-временными точками в случае ньютоновского приближения имеем:

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} q_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + (1 + 2\Phi)\, dt^2.$$

Для чисто пространственного интервала

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Длины в системе координат совпадают с естественно измеренными длинами, т. е. с рассматриваемой точностью справедлива эвклидовская геометрия расстояний. Для чисто временных интервалов

$$ds^2 = (1 + 2\Phi)\, dt^2,$$

или

$$ds = (1 + \Phi)\, dt.$$

Естественно измеренной длительности ds соответствует отрезок времени $ds/(1 - \Phi)$. Скорость хода часов также изменяется как $(1 + \Phi)$, увеличиваясь с ростом гравитационного потенциала. Отсюда можно заключить, что спектральные линии, испускаемые на Солнце, сдвинуты в красную часть спектра по отношению к соответствующим спектральным линиям света, излучаемого на Земле на величину

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\cdot 10^{-6}.$$

Для световых лучей ($ds = 0$) получаем соотношение

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = 1 + \Phi.$$

Скорость света не зависит от направления, но изменяется с изменением гравитационного потенциала. Отсюда следует искривление пути светового луча в гравитационном поле.

Наконец, вычислим импульс и энергию материальной точки в ньютоновском поле, причем будем основываться не на уравнении (86а), а на точном уравнении (51). Подставляя в него для величин $g_{\sigma\mu}$ значения

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + h_{44}, \end{matrix}$$

а вместо dx_ν — величины

$$dx \quad dy \quad dz \quad i\,dt;$$

ограничиваясь членами первого порядка по h_{44}, снова обозначая $\left(-\frac{h_{44}}{2}\right)$ через Φ, а также пренебрегая членами более высокого порядка, чем второй по скорости, получаем

$$-I_1 = m(1-\Phi)\,q_x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$iI_4 = m\left[(1+\Phi)+\frac{1}{2}(1-\Phi)\,q^2\right].$$

Так как величина $(-I_1)$ представляет собой x-компоненту импульса, а величина (iI_4) — энергию материальной точки, то отсюда следует, что инертная масса с уменьшением гравитационного потенциала увеличивается. Это находится в согласии с развитыми здесь представлениями. Действительно, так как согласно нашей теории пространству не придается самостоятельного физического качества, то инертность некоторой массы есть следствие ее взаимодействия с остальными массами; это взаимодействие должно увеличиться от того, что к рассматриваемой массе приближаются другие массы, т. е. когда значение величины Φ уменьшается.

Поступила 26 ноября 1914 г.

Это — последний большой обзор всех работ Эйнштейна, написанных до создания правильной теории тяготения. Трудности, возникшие на пути теории, в основном сконцентрировались на построении тензора энергии-импульса. Эйнштейн вводит в эти работы то, что сейчас называется псевдо-тензором энергии импульса гравитационного поля, который обладает тензорными свойствами по отношению к линейным преобразованиям. Лишь через год, в 1915 г., в работе «К общей теории относительности» (статья 34) Эйнштейн отказывается от условия равенства нулю обычной (нековариантной) дивергенции тензора энергии импульса и приходит к верному уравнению поля тяготения, известному теперь под названием «уравнения Эйнштейна».

В созданном варианте теории Эйнштейн выводит два следствия — смещение спектральных линий и отклонение луча света в поле Солнца. Третий эффект — движение перигелия Меркурия—был открыт в 1915 г. и опубликован в статье 36, в которой также впервые дано правильное выражение для отклонения луча света.

Можно еще отметить, что в настоящей статье уже используются верхние и нижние индексы (обозначения Риччи и Леви-Чивиты).

К ПРОБЛЕМЕ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

После того как два видных специалиста выступили в этом журнале со своими возражениями против теории относительности, читателям, вероятно, будет небезынтересно познакомиться и с воззрениями сторонника этого нового теоретического направления. Эти воззрения в самом сжатом виде излагаются ниже.

В настоящее время следует различать две теоретические системы, подпадающие под название «теории относительности». Первая из них, которую мы назовем «теорией относительности в узком смысле», опирается на большое число экспериментальных данных и воспринимается большинством физиков-теоретиков как простейшее теоретическое выражение экспериментальных фактов. Вторая теория (называемая далее теорией относительности в широком смысле) пока еще совсем не обоснована физическим экспериментом. К этой второй теории большинство специалистов относится скептически или враждебно. Следует тут же заметить, что сторонником теории относительности в узком смысле можно быть и не признавая справедливость теории относительности в широком смысле. Поэтому мы будем обсуждать эти теории по отдельности.

I. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В УЗКОМ СМЫСЛЕ

Как известно, уравнения механики, основанной Галилеем и Ньютоном, справедливы не в любой движущейся системе координат, если допускаются только такие центральные силы, которые удовлетворяют закону равенства действия и противодействия. Однако, если движение рассматривается в системе K, в которой в указанном смысле законы Ньютона выполняются, то эта система координат не будет единственной, относительно которой

* *Zur Relativitätsproblem.* Scientia (Bologna), 1914, 15, 337—348. (В том же томе [Supplemento, 137] напечатан ее французский перевод.— *Прим. ред.*).

справедливы законы механики. Всякая произвольно ориентированная в пространстве движущаяся равномерно и прямолинейно относительно K система координат K' также обладает тем свойством, что в ней действуют упомянутые законы движения. Утверждение о равноправии всех таких систем координат K, K' и т. д. для формулировки законов движения и вообще всех законов физики мы назовем «принципом относительности» (в узком смысле).

Если допускать, что в основе теоретического описания всех явлений должна лежать классическая механика, то можно не сомневаться в справедливости принципа относительности. Но даже без этого допущения, а только с точки зрения опыта, трудно усомниться в том, что принцип относительности выполняется. В самом деле, если бы он не выполнялся, то на явления природы в системе координат, покоящейся относительно Земли, оказывало бы влияние годичное движение Земли вокруг Солнца; в результате этого движения в земных лабораториях должна была бы проявляться физическая анизотропия. Однако, несмотря на самые усердные старания, физики никогда не наблюдали подобную анизотропию.

Следовательно, принцип относительности так же стар, как и механика, и, казалось бы, никто не может сомневаться в нем с точки зрения опыта. И если такие сомнения все же высказывались и высказываются еще теперь, то это следует объяснить тем, что электродинамика Максвелла — Лоренца кажется несовместимой с принципом относительности. Кто может представить себе замкнутость этой теории, малое число предположений, положенных в ее основу, и достижения ее в теоретическом описании опытов в области электродинамики и оптики, тот едва ли сумеет избавиться от впечатления, что основы этой теории следует считать столь же окончательно установленными, как, например, уравнения классической механики. Не удалось также и поставить рядом с этой теорией другую, которая могла бы хоть в какой-то степени соперничать с нею.

Легко указать, в чем состоит кажущаяся несовместимость электродинамики Максвелла — Лоренца с принципом относительности. Пусть уравнения этой теории выполняются в системе K. Это означает, что относительно K всякий световой луч распространяется в пустоте с определенной, независящей от своего направления и движения источника света скоростью c; это утверждение в дальнейшем будет называться «принципом постоянства скорости света». Если же этот световой луч рассматривается наблюдателем, движущимся относительно K, то скорость распространения светового луча с точки зрения этого наблюдателя должна, вообще говоря, отличаться от c; например, если свет распространяется вдоль положительного направления оси x системы K и наш наблюдатель движется в том же направлении с постоянной скоростью v, то, казалось бы, можно прямо утверждать, что скорость света с точки зрения движущегося наблюдателя должна быть $c - v$. Таким образом, относительно наблюдателя, т. е. относительно движущейся системы отсчета K', принцип постоянства скорости света представляется недействительным. Следовательно, здесь кроется очевидное противоречие с принципом относительности.

Однако точный анализ физического содержания наших высказываний о пространстве и времени показал, как известно, что отмеченное противоречие является лишь кажущимся, поскольку оно вытекает из следующих двух произвольных предположений:

1. Утверждение об одновременности двух событий, происходящих в разных точках пространства, не зависит от выбора системы отсчета.
2. Пространственное расстояние между точками, в которых одновременно происходят два события, не зависит от выбора системы отсчета.

Поскольку и теория Максвелла — Лоренца, и принцип относительности находят широчайшее подтверждение на опыте, нам остается лишь отказаться от обоих только что указанных произвольных предположений, кажущаяся очевидность которых основывается только на том, что свет извещает нас, казалось бы, мгновенно о событиях, происходящих в удаленных областях, и что скорости тел, с которыми мы встречаемся в повседневном опыте, малы по сравнению со скоростью света.

Отказываясь от этих произвольных предположений, мы приходим к объединению принципа постоянства скорости света, следующего из электродинамики Максвелла — Лоренца, и принципа относительности. Становится возможным предположение, что один и тот же световой луч распространяется в пустоте со скоростью c не только в системе отсчета K, но и в каждой другой системе отсчета K', движущейся равномерно и прямолинейно относительно K. Следует только соответствующим образом выбрать уравнения преобразования от пространственно-временны́х координат (x, y, z, t) в системе K к пространственно-временны́м координатам (x', y', z', t') в системе K^1; система уравнений преобразования для этих четырех величин, получаемая таким образом, называется «преобразованием Лоренца». Это преобразование Лоренца должно заменять соответствующие уравнения преобразования, которые до создания теории относительности считались единственно возможными, но были основаны на указанных выше предположениях «1» и «2».

Эвристическая ценность теории относительности состоит в том, что она указывает условие, которому должны удовлетворять все уравнения, выражающие общие законы природы. Каждая система таких уравнений должна при применении преобразования Лоренца сохранять свой вид (ковариантность относительно преобразования Лоренца). Минковский указал простую математическую форму, к которой должны приводиться системы уравнений, ковариантные относительно преобразования Лоренца; благодаря этому он достиг того преимущества, что для проверки вопроса о том, удовлетворяют ли уравнения указанному условию, вовсе не требуется практически совершать над ними преобразование Лоренца.

Из сказанного ясно следует, что теория относительности вовсе не является средством для вывода еще не известных законов природы из ничего. Она дает лишь универсально применимый критерий, ограничивающий число возможностей; в этом отношении ее можно сравнить с законом сохранения энергии или со вторым началом термодинамики.

При рассмотрении наиболее общих законов теоретической физики оказалось, что механику Ньютона следует изменить так, чтобы она соответствовала требованиям теории относительности. Видоизмененные уравнения механики оказались применимыми к катодным лучам и β-лучам (т. е. к движению свободных электрически заряженных частиц). Вообще теория относительности еще не знает логических противоречий и не вступает в конфликт с результатами опыта.

Здесь следует особо подчеркнуть только один результат теории относительности, поскольку он имеет важное значение для последующего изложения. Согласно механике Ньютона, инерция (т. е. инертное сопротивление ускорению центра тяжести) системы, состоящей из совокупности материальных точек, не зависит от состояния движения системы. Согласно же теории относительности, свойство инертности в конечном счете определяется энергией системы. Именно энергии, а не инертной массе материальных точек, мы должны приписывать неуничтожаемость; закон сохранения массы переходит, таким образом, в закон сохранения энергии.

Выше было отмечено, что было бы большим заблуждением смотреть на теорию относительности как на универсальный метод, позволяющий строить достоверную теорию для области явлений, почти не исследованной на опыте. Теория относительности только существенно уменьшает число эмпирических фактов, необходимых для построения теории. Однако существует фундаментально важная область, о которой у нас так мало опытных данных, что даже в соединении с теорией относительности их оказывается недостаточно для однозначного выбора общей теории. Эта область охватывает явления тяготения. Здесь мы можем достичь цели, только присоединив к данным, известным из опыта, дополнительные физические гипотезы. Каким способом можно прийти к наиболее естественным, с моей точки зрения, гипотезам, должны в первую очередь показать следующие соображения.

Когда мы говорим о массе тела, то связываем с ней два понятия, логически совершенно независимых. Мы понимаем под массой, во-первых, некую постоянную, измеряющую сопротивление тела ускорению («инертная масса»), а во-вторых,— другую постоянную, определяющую величину силы, испытываемой телом в поле тяжести («тяжелая масса»). Вовсе неочевидно заранее, что инертная масса и тяжелая масса тела должны совпадать; мы лишь привыкли предполагать, что такое совпадение существует. Убеждение в этом основано на опытных фактах, что ускорение различных тел в поле тяжести не зависит от строения этих тел. Этвеш показал, что инертная и тяжелая массы совпадают во всяком случае с очень большой точностью; его опыты с крутильными весами[1] показали, что относительное отличие обеих масс не больше 10^{-8}.

При радиоактивных процессах освобождаются громадные количества энергии в виде тепла, передаваемого окружающей среде. Следовательно, возникающие при реакции продукты распада обладают, в соответствии с изложенным выше результатом, меньшей инертной массой, чем вещество, существовавшее до радиоактивного распада. Относительное изменение инертной массы в таких реакциях с известным выделением тепла по порядку величины составляет 10^{-4}. Если бы вместе с инертной массой системы не происходило изменение тяжелой массы, то инертная масса разных элементов отличалась бы от тяжелой массы намного больше, чем допускается опытами Этвеша. На это важное обстоятельство впервые обратил внимание Ланжевен.

Из сказанного с большой вероятностью следует, что инертная и тяжелая массы замкнутых (покоящихся) систем совпадают; я полагаю, что при современном состоянии эксперимента мы обязаны предполагать это совпадение. Тем самым мы пришли к одному из важнейших физических требований, которое, с моей точки зрения, следует предъявлять к теории тяготения.

Это требование налагает на теории тяготения существенные ограничения, что особенно проявляется при объединении его с принципом инерции энергии. Всякой энергии соответствует инертная масса, а всякой инертной массе соответствует тяжелая масса; поэтому тяжелая масса замкнутой системы должна определяться энергией системы. В энергию замкнутой системы входит также энергия ее гравитационного поля; следовательно, этот последний вид энергии должен сам давать вклад не только в инертную, но и в тяжелую массу системы.

Рассмотрим теории тяготения Абрагама и Ми. Теория Абрагама противоречит принципу относительности; теория Ми не удовлетворяет требованию равенства инертной и тяжелой массы замкнутой системы. Согласно теории Ми, при нагревании тела возрастает, в соответствии с приростом

[1] Идея опыта Этвеша состоит в следующем. На тело, находящееся на поверхности Земли, действуют как сила земного тяготения, так и центробежная сила. Действие первой силы определяется тяжелой, а действие второй — инертной массой тела. Если бы эти две массы не совпадали, то направление результирующей двух сил (кажущейся тяжести) зависело бы от материала тела. Своими опытами с крутильными весами Этвеш доказал с большой точностью отсутствие такой зависимости.

энергии, инертная, а не тяжелая масса тела; последняя в случае газа с повышающейся температурой может даже уменьшаться [2].

Напротив, недавно выдвинутая теория тяготения Нордстрема удовлетворяет как принципу относительности, так и требованию инерции энергии замкнутой системы с одним ограничением, которое будет указано далее. Противоположное утверждение Абрагама в его статье, опубликованной в этом журнале, неправильно. Вообще я считаю, что против теории Нордстрема нельзя почерпнуть из опыта какое-нибудь основательное возражение.

Согласно теории Нордстрема, принцип инерции энергии покоящейся замкнутой системы выполняется статистически. Тяжелая масса замкнутой (покоящейся как целое) системы в общем случае является осциллирующей величиной, среднее по времени значение которой определяется полной энергией. Осцилляторный характер массы приводит к тому, что подобная система должна излучать продольные гравитационные волны. Однако предсказываемое теорией значение потерь энергии при этом столь мало, что они должны ускользать от нашего наблюдения.

В результате самого тщательного изучения теории Нордстрема приходится признать, что эта теория с точки зрения опыта обеспечивает безупречное включение тяготения в схему теории относительности (в узком смысле). И если я все-таки полагаю, что мы не можем удовлетвориться этим решением, то это мнение основано на более общих теоретических соображениях, о которых речь будет идти дальше.

II. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ

Классическая механика, как и только что кратко рассмотренная теория относительности в узком смысле, страдает фундаментальным недостатком, закрывать глаза на который не может ни один человек, способный понимать доводы гносеологического характера. Обсуждаемые далее слабые стороны нашего физического мировоззрения уже были со всей ясностью вскрыты Э. Махом в его глубоких исследованиях основ механики Ньютона, так что мои соображения на этот счет не могут претендовать на новизну. Я поясню главную особенность этого положения на элементарном примере, чтобы оттенить наиболее существенное.

---

[2] Ввиду малой величины эффекта эти явления не могут быть обнаружены на опыте. Но, по-моему, все говорит о том, что взаимосвязь инертной и тяжелой масс является принципиальной, независимой от рода энергии. Согласно Ми, тот факт, что при радиоактивных превращениях равенство инертной и тяжелой масс соблюдается, можно объяснить, лишь предполагая особую природу энергии внутри атома.

В мировом пространстве на большом расстоянии от всех небесных тел движутся две массы. Пусть они находятся достаточно близко друг к другу, чтобы взаимодействие между ними было заметным. Пусть за движением этих двух тел следит наблюдатель, постоянно смотрящий вдоль линии, соединяющей две массы, на совокупность неподвижных звезд. Он увидит, что линия, по которой он смотрит, вычерчивает на видимой совокупности неподвижных звезд замкнутую кривую, положение которой по отношению к неподвижным звездам не меняется. Если наблюдатель обладает природным разумом, но не знает ни геометрии, ни механики, то он сделает следующий вывод: «Мои массы совершают движение, причинно связанное, хотя бы отчасти, с системой неподвижных звезд. Законы, по которым движутся массы в моей окрестности, определяются вместе с тем и неподвижными звездами». Человек, постигший школьную премудрость, посмеется над простодушием нашего наблюдателя и скажет ему: «Движение твоих масс не имеет ничего общего с неподвижными звездами; совершенно независимо от прочих масс оно определяется законами механики. Существует пространство R, в котором эти законы выполняются. Эти законы таковы, что твои массы все время остаются в одной плоскости этого пространства. Но система неподвижных звезд в этом пространстве не может вращаться, потому что в противном случае она была бы разорвана мощными центробежными силами. Следовательно, эта система с необходимостью покоится (по крайней мере почти!), если она вообще в состоянии существовать длительно; поэтому-то плоскость, в которой движутся твои массы, всегда пересекает одни и те же неподвижные звезды».

Но наш бесстрашный наблюдатель скажет: «Может быть, ты несравненно ученее меня, но в нечто громадное, о котором ты мне говоришь, называя его пространством, я верю так же мало, как и в призраки. Я не могу ни видеть это пространство, ни представить его мысленно. Должен ли я представлять себе твое пространство как очень тонкую сетку из тел, к которой относятся другие объекты? Тогда кроме R можно представить себе и вторую такую сетку R', которая движется относительно R произвольным образом (например вращается). Выполняются ли тогда твои уравнения и относительно R'». Ученый муж будет отрицать это с полной уверенностью. На это простодушный наблюдатель скажет: «Откуда же тогда знают массы, относительно какого «пространства» R, R' и т. д. они должны двигаться в соответствии с законами теории относительности, как они узнают пространство или пространства, к которым они должны подстраиваться?» Теперь наш ученый муж придет в величайшее смущение. Хотя он и подчеркнет, что подобные привилегированные пространства должны существовать, но не сумеет указать никакой причины тому, почему одни пространства могут отличаться от других. На это простодушный заметит: «Тогда я вплоть до выяснения буду считать твои привилегированные пространства праздным измышлением и останусь при своем убеждении, что совокупность неподвижных звезд определяет механические свойства моих подопытных масс».

Несоблюдение элементарнейших постулатов теории познания, допускаемое нашей физикой, я изложу и вторым способом. Предпринимались тщетные попытки определить, что следует понимать под ускорением одного единственного тела. Удалось лишь определить относительные ускорения тел. Однако, с другой стороны, мы основываем нашу механику на предпосылке, что для ускорения тела необходима сила (причина), причем мы не замечаем, что совершенно невозможно указать, что же следует при этом понимать под «ускорением», ибо могут существовать только относительные ускорения рассматриваемого объекта восприятия.

Сомнительность нашего способа действий очень ясно иллюстрируется сравнением, за которое я обязан своему другу Бессо. Представим себе, что мы перенеслись в древние времена, когда предполагали, что поверхность Земли приблизительно плоская. Тогда среди ученых царило следующее убеждение. В мире существует физически выделенное направление — вертикальное. В этом направлении падают все тела, не имеющие опоры. Отсюда следует заключить, что поверхность Земли в основном перпендикулярна этому направлению, т. е. стремится к форме плоскости. Ошибка состоит здесь в том, что одно направление необоснованно предпочитается другому (фиктивная причина) вместо того, чтобы просто считать Землю причиной падения; ошибка нашей физики в том, что в качестве фиктивных причин необоснованно вводятся привилегированные системы отсчета; в обоих случаях нарушается правило достаточного основания.

Поскольку не только классическая механика, но и теория относительности в узком смысле обладают этим фундаментальным недостатком, я и поставил своей целью обобщить теорию относительности таким образом, чтобы устранить его. Прежде всего я понял, что в такой теории наиболее фундаментальная роль должна принадлежать тяготению. Ибо из ранее сказанного уже вытекает, что всякий физический процесс, поскольку ему соответствует энергия, должен порождать и гравитационное поле. С другой стороны, опытный факт, что все тела падают в гравитационном поле одинаково быстро, приводит к предположению, что в гравитационном поле физические процессы протекают точно так же, как и в ускоренной системе отсчета (гипотеза эквивалентности). Исходя из этой гипотезы, я получил результат, что скорость света нельзя считать независящей от гравитационного потенциала. Следовательно, принцип постоянства скорости света несовместим с гипотезой эквивалентности; поэтому теорию относительности в узком смысле нельзя привести в согласие с этой гипотезой. Так я пришел к выводу, что теорию относительности в узком смысле следует считать достаточной только в областях, внутри которых не существует заметных изменений гравитационного потенциала. Теорию относительности (в узком смысле) следует заменить более общей теорией, в которую первая теория входила бы как предельный случай.

Путь к этой теории можно описать словами далеко не полностью [3]. Закон движения материальной точки в поле тяжести, следующий из гипотезы эквивалентности, можно без труда записать в такой форме, что этот закон совершенно не будет зависеть от выбора переменных, определяющих пространство и время. Тем самым, поскольку выбор этих переменных остается априори совершенно произвольным, т. е. не выделяются никакие определенные пространственно-временны́е системы, отпадает и отмеченное выше возражение гносеологического характера. В этот закон движения входит величина

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

являющаяся инвариантом, т. е. величиной, независящей от выбора системы отсчета (т. е. от выбора четырех пространственно-временны́х координат). Величины $g_{\mu\nu}$ — функции $x_1, \ldots, x_4$ — описывают гравитационное поле.

С помощью абсолютного дифференциального исчисления, развитого Риччи и Леви-Чивитой на основе математических исследований Кристоффеля, основываясь на существовании вышеупомянутого инварианта, удается заменить известные системы уравнений теоретической физики на такие эквивалентные (в случае постоянства всех $g_{\mu\nu}$) уравнения, которые выполняются абсолютно, независимо от выбора пространственно-временны́х координат x_ν. Все подобные системы уравнений содержат величины $g_{\mu\nu}$, т. е. величины, определяющие гравитационное поле. Поэтому последнее оказывает влияние на все физические процессы.

Однако и наоборот, физические процессы должны определять гравитационное поле, т. е. величины $g_{\mu\nu}$. Дифференциальные уравнения, определяющие эти величины, получаются благодаря гипотезе, что для вещества и гравитационного поля вместе должны выполняться законы сохранения энергии и импульса. Эта гипотеза ограничивает к тому же и выбор пространственно-временны́х переменных x_ν, однако не вызывая вновь отмеченных выше гносеологических сомнений. Ибо, согласно этой обобщенной теории относительности, уже не существует никаких физических свойств, присущих выделенным пространствам. Ход всех физических процессов определяется величинами $g_{\mu\nu}$, которые со своей стороны определяются

[3] См. A. Einstein, M. Grossman Z. Math. und Phys., 1914, 62, 225. (Статья 20).

физическими свойствами всей остальной Вселенной. В этой теории полностью удовлетворяются принципы инерции и тяжести энергии. Далее, законы движения тяжелых масс содержат не абсолютное ускорение (ускорение относительно «пространства»), которое представляется ответственным за появление инертного сопротивления, но, как должно следовать из приведенных выше соображений, ускорение относительно других тел.

Теория относительности в широком смысле означает не отбрасывание прежней теории относительности, а дальнейшее развитие последней, необходимое, по-моему, в связи с указанными гносеологическими соображениями.

О ПРИНЦИПЕ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Редакция газеты «Vossische Zeitung» обратилась ко мне с просьбой рассказать ее читателям что-нибудь о том, над чем я работаю. Охотно отзываюсь на эту просьбу. Ибо если более глубокое проникновение в теорию относительности и невозможно без значительных усилий, то для посторонних все же интересно узнать кое-что о методе и результатах этой новой отрасли теоретического исследования.

Уже поверхностный анализ процессов, называемых нами движением, учит нас, что можно воспринимать только относительные движения предметов. Сядем в железнодорожный вагон и будем смотреть на движущийся мимо нас (по соседнему пути) другой вагон. Если отвлечься от тряски вагона, то у нас сперва нет никакого способа решить, движутся ли «в действительности» оба вагона. Мы только констатируем, что относительное положение двух вагонов изменяется со временем. Даже если обратим внимание на стоящие рядом с дорогой телеграфные столбы, ситуация существенно не изменится. Ибо когда мы обычно называем телеграфные столбы (и поверхность земли) «покоящимися», а всякий находящийся в относительном движении к ним предмет «движущимся», то это только обычно удобный способ выражения и ничего больше. Наблюдатель, находящийся в «движущемся» железнодорожном вагоне, с совершенно таким же правом может сказать, что вагон покоится, а земля или же телеграфные столбы движутся.

С течением времени физики обнаружили, что этот чисто относительный характер движения следует объяснять не только примитивностью восприятий, но что каждый из предметов, движущихся относительно друг друга (равномерно), можно называть «покоящимся» с таким же правом,

---

* *Vom Relativitäts-Prinzip.* Vossische Zeitung, 1914, 26, April, 33, 34.

как и любой другой. Представим себе опять равномерно движущийся по прямолинейному пути вагон. Пусть его окна не пропускают воздух и свет; рельсы и колеса пусть будут абсолютно гладкими. Пусть в вагоне находится физик, вооруженный всеми мыслимыми приборами. Тогда мы знаем, что все опыты, проделываемые физиком, проходят точно так, как если бы вагон покоился или двигался с другой скоростью. Это и есть в сущности то утверждение, которое физики называют «принципом относительности». В несколько более общей форме этот принцип можно высказать и так: «Законы природы, которые замечает наблюдатель, оказываются независящими от его состояния движения».

Это утверждение звучит безобидно и естественно. Оно никогда не взволновало бы людей, если бы законы распространения света, к которым привело новейшее развитие электродинамики, не казались несовместимыми с этим принципом. Дело в том, что явления оптики движущихся сред привели к выводу, что свет распространяется в пустоте с постоянной скоростью, совершенно независимой от движения источника света. Однако этот результат выглядит противоречащим только что изложенному принципу относительности. Ибо, если луч света распространяется с постоянной скоростью относительно некоторого наблюдателя, то кажется, что относительно другого наблюдателя, который сам движется в направлении распространения света, скорость этого луча света должна быть меньше, чем относительно первого наблюдателя. Но если бы это было так, то в противоречии с изложенным выше принципом относительности закон распространения света в пустоте не был бы одинаковым для наблюдателей, равномерно движущихся относительно друг друга.

Здесь вступает в дело теория относительности. Она показывает, что закон постоянства скорости света в пустоте должен одновременно выполняться для движущихся относительно друг друга наблюдателей таким образом, что один и тот же луч света имеет одну и ту же скорость относительно всех этих наблюдателей.

Возможность такого на первый взгляд парадоксального утверждения показывается более тщательным анализом физического смысла высказываний о пространстве и времени. При этом особенно важным является вывод об относительности понятия одновременности. Ведь до создания теории относительности полагали, что утверждение о том, что два события в разных точках происходят одновременно, имеет определенный смысл, причем не требовалось особого определения понятия одновременности. Однако более глубокое исследование, которое не отказывается от определения одновременности, показало, что одновременность двух событий можно определить не абсолютно, а по отношению к наблюдателю с заданным состоянием движения. Оказывается, что два события, одновременные для одного наблюдателя, для другого, движущегося относительно первого, наблюдателя, вообще говоря, не будут одновременными. Это означает фундаментальное изменение нашего понятия времени.

Именно в этом заключается наиболее важный и вместе с тем наиболее оспариваемый вывод новой теории. Подробно объяснить теоретико-познавательные и натурфилософские предпосылки и следствия этого основного принципа здесь невозможно. Кто хочет познакомиться с его более глубоким обоснованием и оправданием без трудных математических выводов, тот найдет достаточный материал в статье Е. Зона «Физические заметки о пространстве и времени», а также в статье Иозефа Петцольдта «Теория относительности в физике» в последнем номере журнала «Zeitschrift für positivistische Philosophie».

Объединяя закон постоянства скорости света в пустоте и принцип относительности, приходят чисто дедуктивным путем к теории, называемой ныне «теорией относительности». Эта теория уже оправдала себя в качестве вспомогательного аппарата для теоретического вывода законов природы. Ее значение в том, что она дает условие, которому должен удовлетворять каждый общий закон природы. Ибо она учит, что природа устроена таким образом, что ее законы не зависят от состояния движения наблюдателя, к которому относятся события в пространстве и времени.

Из основных результатов теории относительности мы упомянем здесь два, которые должны интересовать и неспециалистов. Первый из них заключается в том, что от гипотезы о существовании среды, заполняющей пространство и служащей для распространения света, — эфира — надо отказаться. Свет, согласно этой теории, рассматривается уже не как движение неизвестного носителя, а как физическое явление, которому следует приписывать совершенно самостоятельное физическое существование. Во-вторых, теория показывает, что инерция тела не является абсолютно неизменной, она растет с его энергией. Важные законы сохранения массы и энергии сливаются таким образом в один единственный закон; энергия тела определяет и его массу.

Является ли очерченная выше теория относительности в основном законченной или же она представляет только первый шаг на пути дальнейшего развития? По этому вопросу даже физики, ценящие теорию относительности, еще не имеют единого мнения. Однако, во всяком случае, веские аргументы говорят в пользу последнего утверждения. Выше было сказано, что законы природы для «равномерно движущегося» и «покоящегося» наблюдателей в точности одинаковы. Это значит, что наблюдатель не может указать какие-либо критерии, согласно которым можно решить, находится он в состоянии равномерного движения или в покое; «покой» и «равномерное движение» физически равноценны. Тогда возникает вопрос, ограничивается ли этот принцип равномерным движением. Может быть, законы природы устроены так, что они одинаковы и для двух наблюдателей, движущихся относительно друг друга неравномерно? В последние годы выяснилось, что такое обобщение теории относительности возможно и что оно приводит к общей теории относительности, в качестве первого приближения содержащей теорию Ньютона. Согласно общей теории относительности, свет в гравитационном поле испытывает искривление, хотя и очень малое, но еще доступное астрономическим наблюдателям. Будущее покажет, соответствует ли действительности эта обобщенная теория относительности, являющаяся весьма удовлетворительной с теоретико-познавательной точки зрения.

КОВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ, ОСНОВАННОЙ НА ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

(Совместно с М. Гроссманом)

В работе, опубликованной в 1913 г.[1], на основе абсолютного дифференциального исчисления была изложена обобщенная теория относительности, которая охватывает также теорию тяготения. В этой теории имеются системы уравнений двух существенно различных типов. К первому типу относится система уравнений для материальных (например механических, электрических) явлений в заданном гравитационном поле; эти уравнения, которые можно рассматривать как обобщение соответствующих систем уравнений первоначальной теории относительности, ковариантны относительно произвольных преобразований пространственно-временных переменных («координат»). Ко второму типу относится система уравнений, которую следует рассматривать как обобщение уравнения Пуассона ньютоновой теории тяготения и которая определяет гравитационное поле, если только известны величины, определяющие материальные процессы. Для этой системы уравнений не существует аналога в первоначальной теории относительности. В противоположность упомянутым выше уравнениям мы не смогли доказать общей ковариантности этих «уравнений гравитации». При их выводе кроме законов сохранения требовалась только ковариантность по отношению к произвольным линейным преобразованиям и вопрос о том, существуют ли другие преобразования, переводящие уравнения в самих себя, остался открытым.

---

* *Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie.* Z. Math. und Phys., 1914, **63**, 215—225. (Mit M. Grossmann).

[1] A. Einstein, M. Grossmann. Z. Math. und Phys., 1913, **62**, 225. (Статья 21). В дальнейшем эта работа будет для краткости называться «Проект».

Решение этого вопроса имеет важное значение для теории по двум причинам. Во-первых, ответ на этот вопрос позволит выяснить, в какой мере можно развивать основную идею теории относительности, а это имеет большое значение для учения о пространстве и времени. Во-вторых, от ответа на этот вопрос, как показывает следующее рассуждение, в значительной степени зависит суждение о ценности теории с физической точки зрения.

Вся теория возникла на основе убеждения, что в гравитационном поле все физические процессы протекают совершенно так же, как и без гравитационного поля, но в соответствующим образом ускоренной (трехмерной) системе координат («гипотеза эквивалентности»). Эта гипотеза, основанная на опытном факте равенства тяжелой и инертной массы, приобретет особую убедительность в том случае, если окажется, что «фиктивное» гравитационное поле, существующее в ускоренной (трехмерной) системе координат, можно рассматривать как «истинное» гравитационное поле, т. е. если в теории допускаются преобразования ускорения (иначе говоря, нелинейные преобразования).

На первый взгляд кажется, что следовало бы искать уравнения гравитации, ковариантные при любых преобразованиях. Однако в § 2 настоящей работы мы покажем, что только при помощи общековариантных уравнений невозможно определить величины $g_{\mu\nu}$, характеризующие гравитационное поле [2].

Ниже приводится доказательство, что составленные нами уравнения гравитации являются общековариантными в пределах, допускаемых условием, чтобы фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$ *полностью определялся этими уравнениями; в частности, получается, что уравнения гравитации ковариантны относительно всех преобразований ускорения (т. е. нелинейных преобразований).*

§ 1. Основные уравнения теории

Энергетические свойства физической системы мы характеризовали ковариантным тензором $T_{\mu\nu}$ или обратным ему контравариантным тензором $\Theta_{\mu\nu}$. Этот тензор удовлетворяет уравнениям (10) «Проекта»

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g}\,\gamma_{\sigma\mu} T_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_{\mu\nu},$$

или

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \Theta_{\mu\nu},$$

[2] Ср. также примечания в приложении к работе «Проект». (Статья 21).

представляющим собой уравнения энергии-импульса материальной системы. Все уравнения принимают особенно наглядную форму, если ввести величины

$$\mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g}\, \gamma_{\sigma\mu} T_{\mu\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}, \tag{1}$$

которые отличаются от составляющих смешанного тензора [3] лишь множителем $\sqrt{-g}$ и которые мы будем называть *«комплексом плотности энергии»* физической системы. Тогда написанные выше соотношения принимают вид:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\rho} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \gamma_{\mu\rho} \mathfrak{T}_{\rho\nu}. \tag{I}$$

Если вместо тензора энергии гравитационного поля также ввести «комплекс плотности энергии гравитационного поля», а именно величины

$$\mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\sigma\mu} t_{\mu\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu} \vartheta_{\mu\nu}, \tag{2}$$

то из уравнений (14) или (13) «Проекта» следует

$$-2\varkappa \mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g} \left(\sum_{\beta\rho\tau} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \gamma_{\rho\tau}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\rho\tau} \delta_{\sigma\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\rho\tau}}{\partial x_\beta} \right), \tag{2a}$$

причем $\delta_{\sigma\nu} = 0$ при $\sigma \neq \nu$ и $\delta_{\sigma\nu} = 1$ при $\sigma = \nu$.

Вместо уравнения гравитационного поля (21) или (18) «Проекта» теперь получим уравнения

$$\sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sqrt{-g}\, \gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) = \varkappa \left(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu} \right). \tag{II}$$

Из уравнений (I) и (II), так же как в § 5 «Проекта», можно вывести общие законы сохранения, которые теперь принимают вид

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu} \right) = 0. \tag{III}$$

---

[3] Ср. § 1, часть II «Проекта».

§ 2. Замечания о выборе системы координат

Совершенно отвлекаясь пока от полученных нами уравнений гравитационного поля, покажем, что полное определение фундаментального тензора гравитационного поля $\gamma_{\mu\nu}$ посредством системы общековариантных уравнений при заданных $\Theta_{\mu\nu}$ невозможно.

Именно, мы можем показать, что если при заданных $\Theta_{\mu\nu}$ решение для $\gamma_{\mu\nu}$ уже известно, то из общей ковариантности уравнений можно сделать вывод о существовании других решений.

Возьмем в нашем четырехмерном многообразии область L, в которой не протекает никакого «материального процесса» и в которой, следовательно, составляющие $\Theta_{\mu\nu}$ обращаются в нуль. Пусть $\gamma_{\mu\nu}$ определяется всюду, в том числе и внутри L, величинами $\Theta_{\mu\nu}$, заданными вне L (предположение «а»).

Пусть вместо первоначальных координат x_ν введены новые координаты x'_ν следующим образом. Вне L всюду $x'_\nu = x_\nu$, а внутри L $x'_\nu \neq x_\nu$, по крайней мере в какой-то части L и хотя бы для одного значения ν. Ясно, что такой подстановкой без труда можно добиться, чтобы по меньшей мере для части L $\gamma'_{\mu\nu} \neq \gamma_{\mu\nu}$. С другой стороны, $\Theta'_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}$ всюду, как вне L, поскольку для этой области $x'_\nu = x_\nu$, так и внутри L, так как для этой области $\Theta_{\mu\nu} = 0 = \Theta'_{\mu\nu}$. Следовательно, если допустить самые общие преобразования, то одной и той же системе $\Theta_{\mu\nu}$ соответствовала бы больше чем одна система $\gamma_{\mu\nu}$, что противоречит предположению «а»[4].

После того, как мы убедились, что приемлемая теория гравитации с необходимостью требует специального выбора координатной системы, нетрудно также показать, что в основе наших уравнений гравитации и лежит специальная система координат. Именно, из уравнений (II) после дифференцирования по x_ν и суммирования по ν с учетом соотношений (III) получаются соотношения

$$\sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) = 0, \tag{IV}$$

т. е. четыре дифференциальных условия для величин $g_{\mu\nu}$; эти соотношения

---

[4] Это рассуждение уже содержится в примечаниях к «Проекту». Однако последующее утверждение об ограничении выбора координатной системы неправильно; оно вытекает из соотношения (III) лишь в том случае, если разрешаются только линейные преобразования, при которых величинам $t_{\mu\nu}/\sqrt{-g}$ приписывается тензорный характер, для чего, как оказалось, нет оснований.

мы запишем в сокращенном виде

$$B_\sigma = 0.$$

Эти величины B_σ, как будет показано в § 5, не образуют общековариантного вектора. Отсюда можно заключить, что соотношения $B_\sigma = 0$ в самом деле ограничивают выбор координатной системы [5].

§ 3. Уравнения гравитации в форме Гамильтона

В последующем доказательстве ковариантности уравнений гравитации используется то обстоятельство, что для этих уравнений можно сформулировать вариационный принцип [6].

Можно показать, что уравнения гравитации (II) эквивалентны соотношению

$$\int\Bigl(\delta H - 2\varkappa \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, T_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}\Bigr)d\tau = 0, \tag{V}$$

где

$$H = \frac{1}{2}\sqrt{-g} \sum_{\alpha\beta\tau\rho} \gamma_{\alpha\beta}\, \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\, \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} \tag{Va}$$

и $\gamma_{\mu\nu}$ варьируются независимо друг от друга таким образом, что их вариации обращаются в нуль на границе четырехмерной области, по которой производится интегрирование.

Принимая во внимание при вычислении δH очевидные формулы

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu},$$

$$\delta\left(\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\delta g_{\tau\rho}) = -\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g_{\tau\mu}g_{\rho\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}),$$

$$\delta\left(\frac{\partial x_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\delta\gamma_{\tau\rho}),$$

и учитывая равенство нулю вариаций поверхностных интегралов,

---

[5] Соотношения $B_\sigma = 0$ можно также получить, применяя к уравнениям гравитации операцию дивергенции в смысле абсолютного дифференциального исчисления и используя законы сохранения для материи.

[6] Мы благодарны Полю Бэрней, предложившему для упрощения этого доказательства использовать вариационный принцип.

находим

$$\int \delta H\,d\tau = \int \sum_{\mu\nu\alpha\beta\tau\rho} \Bigg[-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) + \sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\tau\rho}\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\beta} + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\cdot\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\Bigg]\delta\gamma_{\mu\nu}\cdot d\tau.$$

Если воспользоваться определениями (14) и (16) «Проекта», то условие (V) примет вид

$$\int \sum_{\mu\nu} [D_{\mu\nu}(g) + \varkappa(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})]\,\delta\gamma_{\mu\nu}\cdot\sqrt{-g}\,d\tau = 0.$$

Поскольку $\gamma_{\mu\nu}$ должны быть независимыми друг от друга, отсюда следуют уравнения (21) «Проекта», т. е. наши уравнения гравитации в ковариантной форме.

§ 4. Доказательство леммы. Соответственные системы координат

Теперь наша задача заключается в исследовании ковариантных свойств соотношения (V). Для этой цели сначала найдем трансформационные свойства интеграла

$$I = \int H\,d\tau = \int \sqrt{-g}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\cdot d\tau.$$

Пусть существует произвольное четырехмерное многообразие M, отнесенное к системе K с координатами x_ν. Можно отнести это многообразие M ко второй системе K' с координатами x'_ν по формулам преобразования

$$dx_\nu = \sum_\mu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\,dx'_\mu = \sum_\mu p_{\nu\mu}\,dx'_\mu.$$

Пусть I и I' представляют собой значения введенного выше интеграла соответственно в координатных системах K и K'. Тогда

$$I' = \int \sqrt{-g'}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma'_{\alpha\beta}\frac{\partial g'_{\tau\rho}}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial \gamma'_{\tau\rho}}{\partial x'_\beta}\,d\tau'.$$

Преобразуя I' к системе K и учитывая, что произведение $\sqrt{-g'}\cdot d\tau'$ есть скаляр, получаем

$$I' = \int \sqrt{-g}\sum_{\mu\nu mnik\rho\tau}\left[\gamma_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}(p_{m\tau}p_{n\rho}g_{mn})\frac{\partial}{\partial x_k}(\pi_{\mu\tau}\pi_{\nu\rho}\gamma_{\mu\nu})\right]d\tau.$$

Следовательно,

$$I' = \int \sqrt{-g} \sum_{\mu\nu mnik\rho\tau} \left[\gamma_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{m\tau} p_{n\rho} g_{mn}) \frac{\partial}{\partial x_k} (\pi_{\mu\tau} \pi_{\nu\rho} \gamma_{\mu\nu}) \right] d\tau.$$

Для дальнейших вычислений предположим, что системы K и K' лишь бесконечно мало отличаются друг от друга, т. е. преобразование является инфинитезимальным. Тогда можно положить

$$x_\nu = x'_\nu - \Delta x_\nu;$$

следовательно,

$$p_{\nu\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \delta_{\nu\mu} - \frac{\partial (\Delta x_\nu)}{\partial x'_\mu} = \delta_{\nu\mu} - \frac{\partial (\Delta x_\nu)}{\partial x_\mu}$$

и

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} = \delta_{\nu\mu} + \frac{\partial (\Delta x_\nu)}{\partial x_\mu},$$

причем Δx_ν следует рассматривать, как бесконечно малые величины, квадратами и произведениями которых можно пренебречь. Тогда получим

$$I' - I = -4 \int \sqrt{-g} \sum_{mnik\tau} \gamma_{ik} g_{mn} \frac{\partial \gamma_{\tau n}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 (\Delta x_m)}{\partial x_\tau \partial x_i} d\tau.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} I' - I = &-4 \int \sum_{mnik\tau} \frac{\partial}{\partial x_\tau} \left(\sqrt{-g}\, \gamma_{ik} g_{mn} \frac{\partial \gamma_{\tau n}}{\partial x_k} \frac{\partial (\Delta x_m)}{\partial x_i} \right) d\tau + \\ &+ 4 \int \sum_{mnik\tau} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{-g}\, \gamma_{ik} g_{mn} \frac{\partial \gamma_{\tau n}}{\partial x_k} \Delta x_m \right) d\tau - \\ &- 4 \int \sum_{mnik\tau} \frac{\partial^2}{\partial x_\tau \partial x_i} \left(\sqrt{-g}\, \gamma_{ik} g_{mn} \frac{\partial \gamma_{\tau n}}{\partial x_k} \right) \Delta x_m \cdot d\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что здесь первые два интеграла можно сразу записать в виде поверхностных интегралов, которые мы сокращенно обозначим через O_1 и O_2. Нетрудно видеть, что множитель при Δx_m в третьем интеграле есть величина B_m, введенная выше при рассмотрении соотношения (V). Таким образом, равенство (3) перепишется в виде

$$I' - I = O_1 + O_2 - 4 \int \sum_m B_m \Delta x_m \cdot d\tau. \tag{3a}$$

В § 2 мы изложили причины, по которым следует отдать предпочтение координатным системам, удовлетворяющим условию $B_m = 0$. Такие координатные системы мы назовем «соответственными» данному многообразию. Как вытекает из равенства (3а), *соответственная система координат выбирается так, что при заданных на границе значениях координат и их первых производных (в произвольной системе координат) интеграл I имеет экстремум.*

Преобразование, связывающее соответственные координатные системы, мы назовем *разрешенным.* Если преобразование $K \to K'$ разрешенное, то из равенства (3а) следует

$$I' - I = O_2 + O_2.$$

§ 5. Доказательство ковариантности уравнений гравитации

Рассмотрим теперь наряду с исследованным в § 4 многообразием M второе бесконечно близкое к нему многообразие $\overline{M}$, причем величины $g_{\mu\nu}$ и их первые производные на границе рассматриваемой области L для многообразий M и $\overline{M}$ совпадают. Введем в $\overline{M}$ координатные системы $\overline{K}$ и $\overline{K}'$ следующим образом:

а) обе координатные системы должны быть соответственными многообразию $\overline{M}$;

б) на границе области L должны совпадать координаты $\bar{x}_\nu$ и x_ν, $\bar{x}'_\nu$ и x'_ν;

в) это совпадение координатных систем с точностью до бесконечно малых величин первого порядка должно сохраняться не только на самой границе области, но и в ближайшей окрестности границы; это условие означает, что производные $\dfrac{\partial(\Delta x_\nu)}{\partial x_\sigma}$ и $\dfrac{\partial(\Delta \bar{x}_\nu)}{\partial x_\sigma}$ совпадают.

Непротиворечивость условий «б» и «в» можно показать следующим образом. Поскольку многообразие M отнесено к соответственной ему системе координат, то, согласно § 4, эта координатная система K выбрана так, что интеграл I имеет экстремум при заданных на границе значениях координат и их первых производных. Тогда и в измененном многообразии $\overline{M}$ можно ввести соответственную ему координатную систему $\overline{K}$, которая вне L совпадает с системой K, т. е. отклоняется от K только внутри L; но так как для измененного многообразия $\overline{M}$ при заданных граничных значениях должен существовать экстремум интеграла I, то отсюда для многообразия $\overline{M}$ следует справедливость соотношений $B_m = 0$.

Если мы предположим, что координатные системы K и K' являются соответственными многообразию M, то, согласно (3б), выполняются равенства

$$I' - I = O_1 + O_2,$$

$$\bar{I}' - \bar{I} = \bar{O}_1 + \bar{O}_2,$$

или равенство, получающееся в результате вычитания первого из этих равенств из второго,

$$(\bar{I}' - I') - (\bar{I} - I) = (\bar{O}_1 - O_1) + (\bar{O}_2 - O_2).$$

Из условий «б» и «в», а также из соотношений между M и $\overline{M}$ с учетом (3) следует, что $\bar{O}_1 - O_1$ и $\bar{O}_2 - O_2$ обращаются в нуль.

Многообразие $\overline{M}$ можно назвать многообразием, возникающим из M путем варьирования. В соответствии с этим введем обозначения

$$\bar{I} - I = \delta_a I,$$

$$\bar{I}' - I' = \delta_a I';$$

тогда получим

$$\delta_a I' = \delta_a I. \tag{4}$$

Здесь индекс a означает, что одновременно с многообразием варьируется координатная система, причем так, что варьируемая координатная система всегда будет соответственной варьируемому многообразию, но вместе с тем координатная система на границе не варьируется («соответственная вариация»).

Мы хотим доказать, что равенство

$$\delta I' = \delta I$$

выполняется для *произвольной* вариации многообразия, а не только для *соответственной* вариации, как утверждает уравнение (4). Оказывается, что произвольную вариацию $g_{\mu\nu}$ можно получить из соответственной, если в дополнение проварьировать и координатную систему. При этом для вариации $g_{\mu\nu}$, обусловленной одной только вариацией координатной системы, вариация I, которую мы обозначим $\delta_k I$, обращается в нуль, поскольку мы предполагаем, что вариации δx_ν и их первые производные на границе области равны нулю и что варьируемая координатная система является соответственной. Тогда из равенства (3a) непосредственно следует

$$\delta_k I = O_1 + O_2 - 4 \int \sum_m B_m \delta x_m \cdot d\tau = 0.$$

Поэтому наряду с равенством (4) можно написать следующее:

$$\delta_k I' = \delta_k I = 0. \tag{5}$$

В связи с тем, что произвольная вариация $\gamma_{\mu\nu}$ получается в результате суперпозиции соответственной вариации и чисто координатной вариации, из указанных двух равенств следует, что для произвольной вариации выполняется равенство:

$$\delta I' = \delta I. \tag{6}$$

Теперь можно очень просто доказать ковариантность соотношения (V); так как $\delta\gamma_{\mu\nu}$ образуют контравариантный, а $T_{\mu\nu}$ — ковариантный тензор, то $\sum T_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}$ есть скаляр, а последнее утверждение справедливо и для $\sqrt{-g}\cdot d\tau$. Следовательно,

$$\int \sqrt{-g}' \cdot \sum_{\mu\nu} T'_{\mu\nu}\delta\gamma'_{\mu\nu}\cdot d\tau' = \int \sqrt{-g} \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}\cdot d\tau. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что соотношение (V) ковариантно по отношению ко всем разрешенным преобразованиям координатной системы, поскольку вариации выбираются так, что $\delta\gamma_{\mu\nu}$ и их *первые производные* на границе области равны нулю. Теорема о вариациях, ковариантность которой таким образом доказана, является несколько менее общей, чем теорема, примененная в § 3 для вывода уравнений гравитации. Однако внимательное рассмотрение § 3 показывает, что это ограничивающее краевое условие не влияет на упомянутый вывод уравнений гравитации.

Тем самым доказано, *что уравнения гравитации* (II) *ковариантны относительно всех разрешенных преобразований координатной системы, т. е. относительно всех преобразований координатных систем, для которых выполняются условия*:

$$B_\sigma = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g} - \gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) = 0. \tag{IV}$$

В § 2 мы утверждали, что величины B_σ не образуют общековариантного вектора. Доказательство этого утверждения мы приводим только теперь, поскольку благодаря использованию полученных выше результатов оно оказывается особенно простым. Если бы величина B_σ была ковариантной, то все названные выше соответственными координатные системы были бы произвольными. Ни один этап доказательства вследствие этого обстоятельства не утратил бы силы. В этом случае величины

$$A_{\sigma\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) - \varkappa t_{\sigma\nu}\right] = \frac{\varkappa}{\sqrt{-g}} \cdot \mathfrak{T}_{\sigma\nu}$$

составили бы смешанный тензор; следовательно, сумма

$$\sum_\sigma A_{\sigma\sigma} = -\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \lg g}{\partial x_\beta}\right) - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\rho\tau}}{\partial x_\beta}\right]$$

была бы скаляром относительно произвольных преобразований. Но, как следует из теории дифференциальных уравнений, эта величина не совпадает с единственным дифференциальным инвариантом второго порядка[7]

$$\sum_{imk} \gamma_{im} \{ik, km\}.$$

Хотя соответственные системы координат и разрешенные преобразования и не становятся вполне наглядными в результате этой работы в силу такой далеко идущей ковариантности уравнений гравитации, новая теория гравитации приобретает большую убедительность. Поскольку условия $B_\sigma = 0$, ограничивающие выбор координатных систем, непосредственно следуют из уравнений гравитации, наше рассмотрение доказывает, что эти уравнения обладают наибольшей возможной ковариантностью.

В этой работе делаются дальнейшие попытки расширить класс допустимых преобразований. Теория все больше теряет наглядность и простоту, которые она вновь обретет лишь в работах 32—35, в которых устанавливаются уравнения гравитационного поля.

---

[7] См. § 4 части II «Проекта».

33

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

I. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Вряд ли можно выработать самостоятельное суждение о правильности теории относительности, не познакомившись хотя бы вкратце с опытами и идеями, предшествовавшими этой теории. Поэтому с них и надо здесь начать.

Явления интерференции и дифракции заставляли физиков рассматривать свет как волновой процесс. Почти до конца прошлого века считали, что свет представляет собой механические колебания гипотетической среды — эфира. Так как свет распространяется и в пустоте, то волновой процесс, образующий свет, не мог быть колебаниями весомой материи. Когда к концу прошлого века победила электромагнитная теория света, это представление о свете хотя и изменилось, но несущественно: свет теперь стал рассматриваться не как движение эфира, а как электромагнитный процесс в эфире. Все еще сохранялось убеждение, что наряду с весомой материей существует другая — эфир, который должен быть носителем света.

Это представление приводило к вопросу о том, какими механическими свойствами по отношению к веществу обладает этот эфир. В частности, возникает вопрос: участвует ли эфир в движении весомой материи? Этот вопрос побудил гениального физика Физо провести опыт фундаментального значения, который мы сейчас схематически рассмотрим.

Пусть луч света L падает на полупрозрачное зеркало S_1 и разделяется этим зеркалом на два (рис. 1). Первый луч, пройдя отрезки a и b и отра-

---

* *Die Relativitätstheorie*. В кн. «Die Physik». Unter Redaktion von E. Lechner. T. 3, Abt. 3, Bd. 1. Leipzig, Teubner, 1915, 703—713. (Перевод со 2-го издания 1925 года, стр. 783—797, в котором автором переработана ч. I и добавлена ч. II.— *Прим. ред.*)

зившись от зеркала s_2, попадает на полупрозрачное зеркало S_2, отражается от него и идет в направлении E. Второй луч, отражаясь от зеркал S_1 и s_1, идет по отрезкам c и d, проходит через S_2 в направлении E. В точке E оба луча интерферируют; возникают интерференционные полосы, расстояние между которыми зависит от юстировки аппарата. Положение этих интерференционных полос зависит от разности времен прохождения каждым лучом своего пути. Если относительная разность времен изменится даже на 10^{-8}, т. е. на одну стомиллионную часть времени прохождения

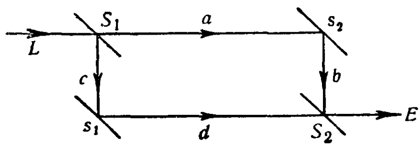

Рис. 1.

всего пути, то это уже приведет к заметному сдвигу интерференционных полос.

На отрезках a и d Физо поместил по трубе, наполненной водой, и каждый из лучей распространялся вдоль своей трубы. Концы каждой трубы были соединены так, что вода могла протекать вдоль осей труб. Цель опыта заключается в том, чтобы определить, какое влияние оказывает движение воды на положение интерференционных полос. Зная это влияние, можно вычислить, насколько изменяется скорость света в движущейся воде по сравнению с покоящейся водой.

В предположении, что световой эфир участвует в движении вещества, а следовательно, и в движении воды, для случая, когда вода на участке a течет со скоростью v в направлении распространения света, должна получаться следующая картина. Скорость света относительно воды всегда оставалась равной V_0, независимо от того, течет вода или нет. Но скорость света V относительно трубы должна увеличиться на скорость течения воды v. Итак, следовало бы ожидать, что

$$V - V_0 = v.$$

Так как $V - V_0$ можно определить по смещению интерференционных полос, а скорость воды v измерялась непосредственно, то опыт Физо позволял проверить эту формулу. Но опыт не подтвердил ее. Оказалось, что разность $V - V_0$ меньше v. Опыты с разными жидкостями показали, что эта разность зависит не только от v, но и от показателя преломления жидкости n[1] в соответствии с формулой

$$V - V_0 = v(1 - 1/n^2).$$

Из этого результата следует, что предположение, согласно которому световой эфир просто участвует в движении вещества, не подтверждается. Из только что приведенной формулы получается интересное следствие, что жидкость, не преломляющая свет ($n = 1$), не будет влиять на распространение света в ней даже тогда, когда она движется.

Другая простая гипотеза заключается в том, что световой эфир вообще не участвует в движении вещества (гипотеза «неподвижного» эфира). На этой гипотезе Г. А. Лоренц построил теорию электромагнитных и оптических явлений, которая не только объяснила совершенно естественным образом указанный результат опыта Физо, но и согласовывалась с результатами всех других опытов по электромагнетизму и оптике движущихся сред. Согласно этой теории, электромагнитные законы эфира не зависят от движения вещества. Вещество взаимодействует с эфиром только потому, что оно является носителем электрических зарядов, движения которых порождают электромагнитные процессы в эфире и влияют на них.

В том, что в теории Лоренца (теории неподвижного светового эфира) содержится значительная доля истины, никто из физиков не сомневался. Но одна сторона этой теории не могла не вызвать недоверия среди физиков. Поясним это ниже.

Давний опыт, не имеющий пока исключений, показывает, что физические явления зависят только от движений тел относительно друг друга, т. е. что с физической точки зрения абсолютного движения не существует. Уточним это высказывание о характере физического опыта. Там, где в физике играют роль пространственные соотношения, они всегда означают указание положения какого-нибудь предмета или признака по отношению к некоторому твердому телу. Мы описываем положение предмета по отношению к стеклянной трубке, к деревянной подставке, к стенам комнаты, к поверхности Земли и т. д. В теории место этого твердого тела занимает система координат. Она мыслится как воображаемая жесткая система, которую надо заменять реальным твердым телом во всех случаях, когда необходимо проверить правильность теоретического результата, содержащего высказывания о пространстве. Таким образом, система координат означает для физика некоторое реальное твердое тело, к которому следует относить явления, подлежащие изучению.

---

[1] Как известно, $n = \dfrac{\text{(Скорость света в пустоте)}}{\text{(Скорость света в среде)}}$.

Возьмем теперь какой-нибудь простой закон природы, содержащий высказывания о пространстве, например известный закон инерции Галилея: материальная точка, на которую внешние силы не действуют, движется равномерно и прямолинейно. Ясно, что этот закон не должен выполняться, если рассматривать движение в произвольно движущейся (например во вращающейся как угодно) системе координат. Поэтому основной закон Галилея следует формулировать так: можно выбрать систему координат K, движущуюся таким образом, что по отношению к ней всякая материальная точка, на которую не действуют никакие силы, движется прямолинейно и равномерно. Этот закон, конечно, выполняется и для всех других систем координат, покоящихся относительно K.

Если бы фундаментальный закон Галилея не выполнялся ни для одной системы координат, движущейся относительно K, то движение системы K оказалось бы выделенным из всех других движений. Это движение мы могли бы тогда считать абсолютным покоем. Однако простое рассуждение показывает, что основной закон Галилея выполняется для каждой материальной точки, на которую не действует сила не только в системе K, но и во всякой системе координат K', движущейся равномерно и прямолинейно относительно K. Законы механики выполняются относительно таких систем K' совершенно так же, как и относительно системы K. Существует множество равномерно движущихся относительно друг друга систем координат, строго равноправных с точки зрения законов механики. Это равноправие равномерно движущихся относительно друг друга систем координат K и K', однако, не ограничивается механикой. Как показывает опыт, оно является всеобщим. Постулат о равноправии всех таких систем K, K', в которых не существует состояний движения, предпочтительных по сравнению с другими, мы будем называть «специальным принципом относительности».

Теория Лоренца вызывает недоверие именно потому, что она, по-видимому, противоречит принципу относительности. Это показывает следующее рассуждение. Согласно теории Лоренца, движение вещества не сопровождается движением светового эфира. Напротив, все части эфира находятся в относительном покое. Если мы выберем систему координат K, покоящуюся относительно эфира, то эта система координат окажется выделенной из всех других систем координат K', движущихся относительно K. Таким образом, теория не удовлетворяет принципу относительности. Это рассмотрение можно провести и не обращаясь к понятию светового эфира. По теории Лоренца существует такая система координат K, относительно которой всякий луч света распространяется в пустоте с определенной постоянной скоростью c. Если мы будем относить этот световой луч к движущейся относительно K — например, в направлении распространения света — системе координат K', то, очевидно, мы обязаны предполагать, что рассматриваемый луч света относительно K' распространяется с какой-то другой скоростью. Таким образом — в противоречии с принципом относительности — пришлось бы заключить, что система координат K является предпочтительной по сравнению со всеми движущимися относительно нее системами координат K'.

Фундаментальное утверждение теории Лоренца о том, что всякий луч света в пустоте (по крайней мере относительно одной определенной системы координат K) всегда распространяется с определенной постоянной скоростью c, мы будем называть *принципом постоянства скорости света*. Указанная выше трудность в теории Лоренца состоит в том, что принцип постоянства скорости света кажется несовместимым с принципом относительности.

Успехи теории Лоренца были настолько большими, что физики, не задумываясь, отказались бы от принципа относительности, если бы не был получен один важный экспериментальный результат, о котором мы теперь должны сказать, а именно, результат опыта Майкельсона.

Считая, в соответствии с теорией Лоренца, что существует привилегированная система координат K, в которой скорость света в пустоте равна c, уже нельзя предполагать, что Земля относительно этой системы координат покоится. В самом деле, тогда уже нельзя предполагать, что неподвижный эфир участвует в движении Земли вокруг Солнца. Следовательно, по меньшей мере часть года мы должны были бы иметь по отношению к системе K скорость порядка 30 *км/сек*. Отсюда возникает задача обнаружить это движение наших лабораторий и приборов относительно K, т. е. относительно эфира. Чтобы обнаружить это относительное движение, было проделано много опытов. При этом принималось во внимание, что ориентация чувствительных оптических приборов относительно направления искомого относительного движения должна оказывать влияние на оптические процессы. Однако на опыте обнаружить какое-то выделенное направление никак не удавалось.

Все же бóльшая часть этих отрицательных результатов не говорила ничего против теории Лоренца. Г. А. Лоренц в высшей степени остроумном теоретическом исследовании показал, что относительное движение в первом приближении не влияет на ход лучей при любых оптических экспериментах. Оставался только один оптический эксперимент, в котором метод был настолько чувствительным, что отрицательный исход опыта оставался непонятным даже с точки зрения теоретического анализа Г. А. Лоренца. Это был уже упомянутый опыт Майкельсона, схема которого выглядела следующим образом.

Луч света L от источника света G сначала попадает на полупрозрачное зеркало S, где он разделяется на два (см. рис. 2). Первый из них идет к зеркалу s_1, отражается от него, снова возвращается к полупрозрачному зеркалу S и там (частично) отражается и идет в направлении E; второй луч идет к зеркалу s_2, отражается там и после прохождения через S также проходит в направлении E. В E оба указанных луча интерферируют. Все описанное устройство было смонтировано на каменной плите, которая плавала в ртути, так что установка как целое могла быть ориентирована по-разному относительно направления гипотетического движения Земли в световом эфире. Согласно теории, изменение ориентации каменной плиты

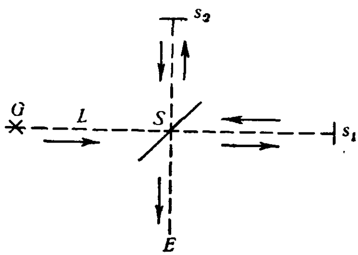

Рис. 2.

должно оказывать достаточно большое влияние на положение интерференциальных полос в E, чтобы его можно было обнаружить. Однако эксперимент давал отрицательный результат.

Чтобы привести отрицательный результат этого эксперимента в согласие с теорией, Г. А. Лоренц и Фицджеральд выдвинули гипотезу о том, что каменная плита со всеми смонтированными на ней приборами испытывает в направлении движения Земли небольшое сокращение, как раз такое, что ожидаемый эффект компенсируется противоположным эффектом вследствие сокращения.

Способ действия, когда добиваются согласия теории с отрицательным результатом эксперимента с помощью выдвинутой специально для этого гипотезы, выглядит крайне неестественным. Напрашивается утверждение, что этому относительному движению Земли в системе K не отвечает никакая реальность, т. е. что подобное относительное движение принципиально нельзя обнаружить. Иными словами, мы приходим к убеждению, что принцип относительности выполняется всегда и строго. С другой стороны, как уже отмечалось, фундамент теории Лоренца, а тем самым и принцип постоянства скорости света представляется несовместимым с принципом относительности. Однако каждый, кто попытался бы заменить теорию Лоренца какой-либо другой теорией, удовлетворяющей экспериментальным фактам, должен был бы признать, что это занятие при современном состоянии наших знаний является абсолютно бесперспективным.

При таком положении вещей следует еще раз задать вопрос, действительно ли теория Лоренца, или принцип постоянства скорости света, несовместима с принципом относительности. Точное исследование показывает, что оба принципа совместимы и что теория Лоренца не противоречит принципу относительности. Однако наши представления о времени и пространстве должны подвергнуться фундаментальным изменениям. Легко видеть далее, что мы должны отказаться от светового эфира. Действительно, если каждый луч света в пустоте распространяется со скоростью c относительно системы K, то световой эфир должен всюду покоиться относительно K. Но если законы распространения света в системе K' (движущейся относительно K) такие же, как и в системе K, то мы с тем же правом должны предположить, что эфир покоится и в системе K'. Так как предположение о том, что эфир покоится одновременно в двух системах, является абсурдным и так как не менее абсурдно было бы отдавать предпочтение одной из двух (или из бесконечно большого числа) физически равноценных систем, то следует отказаться от введения понятия эфира, который превратился лишь в бесполезный довесок к теории, как только было отвергнуто механистическое истолкование света.

Мы уже говорили, что система координат, как ее понимают в теоретической физике, представляет собой не что иное как жесткое измерительное устройство, на котором с помощью твердых линеек наносятся значения пространственных координат. Мы должны теперь еще задать вопрос, какой физический смысл имеют значения времени, которые в физике обычно всегда указываются вместе со значениями координат. Рассмотрим этот вопрос.

Обычно мы измеряем время с помощью часов. При этом часами мы называем систему, которая автоматически повторяет один и тот же процесс. Число уже повторившихся процессов такого рода, причем за первый можно принять любой процесс, и есть время, измеренное часами. Показания часов, одновременные с некоторым событием, мы называем временем события, измеренным этими часами.

Пусть теперь в начале нашей системы координат ($x = y = z = 0$) помещены часы U_0 и пусть совсем рядом с началом координат происходит какое-нибудь событие. Тогда в соответствии с опытом мы можем определить показание часов, одновременное событию, иначе говоря, определить время события (отнесенное к нашим часам). Однако, если место события будет удалено от места, где расположены часы, то мы не сможем непосредственно определить показания часов, одновременные с событием. В самом деле, наблюдатель, стоящий около часов, может воспринимать событие не непосредственно, а только с помощью какого-нибудь промежуточного процесса (сигнала), связанного с событием и дошедшего до наблюдателя (например с помощью лучей света). Наблюдатель определит только время прибытия сигнала, а не время события. Последнее он сможет определить, только зная промежуток времени, проведенный сигналом в пути. Однако определить этот промежуток времени с помощью часов U_0, установленных в начале координат, принципиально невозможно. С помощью часов можно непосредственно определять время только таких событий, которые происходят в непосредственной близости от часов.

Если бы на месте, где произошло событие, также находились часы U_1 — мы будем предполагать, что эти часы точно такой же конструкции, как и часы U_0,— и если бы там стоял наблюдатель, определяющий время события по указанным часам, то это тоже еще не помогло бы нам, ибо мы еще не могли бы сопоставить показаниям часов U_1 одновременные им показания часов U_0. Отсюда очевидно, что для определения времени необходимо еще физическое определение одновременности. Как только оно будет дано, искомое физическое определение времени будет полным.

Другими словами, требуется еще правило, по которому часы U_1 можно синхронизировать с часами U_0. Мы будем делать это следующим образом. Пусть мы имеем какое-нибудь средство, чтобы посылать сигналы из начала координат O системы K в точку E и обратно из E в O так, что сигналы $O - E$ и $E - O$ физически совершенно равноценны. Тогда мы можем и будем требовать, чтобы часы U_0 и U_1 были поставлены так, чтобы на прохождение обоими сигналами своих путей требовалось одно и то же время, измеренное этими часами. Пусть t_0 — время отправления сигнала $O - E$ (по часам U_0), t_1 — время прибытия сигнала $O - E$ (по часам U_1), t'_1 — время отправления сигнала $E - O$ (по часам U_1), t'_0 — время прибытия сигнала $E - O$ (по часам U_0). Тогда часы U_1 должны быть поставлены так, чтобы выполнялось условие

$$t_1 - t_0 = t'_0 - t'_1.$$

Теперь мы можем расположить в произвольных точках системы координат K такие часы и поставить их по часам U_0 в соответствии с указанным правилом. Тогда можно определять время событий во всех этих точках.

При указанном определении одновременности событий необходимо обратить особое внимание на следующее. Мы использовали для определения времени *систему часов, покоящихся относительно системы* K. Иначе говоря, это определение имеет смысл только по отношению к системе координат K в определенном состоянии движения. Если кроме системы координат K вводится другая система координат K', движущаяся равномерно и прямолинейно относительно K, то можно совершенно аналогично определить время относительно K'. Однако заранее не очевидно, что можно согласовать показания этих двух систем часов. Априори ниоткуда не следует, что два события, одновременные относительно K, должны быть одновременными относительно системы K'. В этом и заключается «относительность времени».

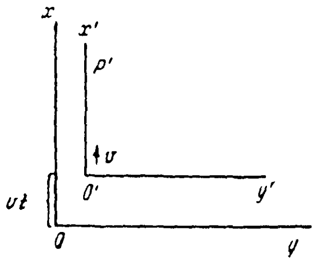

Рис. 3.

Оказывается, что принцип постоянства скорости света и принцип относительности противоречат один другому только до тех пор, пока сохраняется постулат абсолютного времени, т. е. абсолютный смысл одновременности. Если же допускается относительность времени, то оба принципа оказываются совместимыми; в этом случае, исходя из этих двух принципов, получается теория, называемая «теорией относительности».

Основная задача, связанная с этой системой понятий, заключается в следующем. Даны две системы координат K и K'. Система K' движется равномерно и прямолинейно относительно K со скоростью v. Даны место и время произвольного события (т. е. координаты x, y, z и время t) в системе K. Требуется найти место и время (x', y', z', t') в системе K'. При этом положения координатных осей этих двух систем для простоты выбраны так, как показано на рис. 3. Старая кинематика решала эту задачу следующими формулами:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned}$$

Последняя из этих формул выражает постулат о том, что значения времени имеют смысл, независимый от состояния движения (постулат «абсолютного времени»). Однако в этих уравнениях содержится еще одна неявная предпосылка, с которой мы теперь познакомимся. На фиг. 3 изображено положение и состояние движения двух систем K и K' с точки зрения системы K. Возьмем теперь точку P' на оси x', расстояние которой от O' равно l'. Это значит, что наблюдатель, движущийся вместе с системой K', должен приложить свою измерительную линейку вдоль оси x' l' раз, чтобы попасть из O' в P'. Наблюдатели же, находящиеся в покое относительно системы K, чтобы определить расстояние $O'P'$, должны поступать иначе. Они должны определить те пространственные точки в системе K, в которых находятся точки O' и P' в одно и то же время (системы K). Затем, прикладывая измерительную линейку вдоль оси x системы K, они получат искомое расстояние между этими точками. Очевидно, оба процесса абсолютно разные, так что и их численные результаты l и l' априори могут быть разными. Другими словами, априори нельзя отвергать возможность, что и понятие пространственного расстояния имеет только относительный смысл. Таким образом, наряду с «относительностью времени» мы должны допустить также «относительность длин».

Тем самым рушится основа написанных выше уравнений преобразования пространственных координат и времени. Вместо этих уравнений в теории относительности появляются преобразования, удовлетворяющие одновременно принципу относительности и принципу постоянства скорости света. Новые уравнения преобразования находят, математически формулируя требование, чтобы каждый луч света распространялся в обеих системах K и K' с одинаковой скоростью c. Так получаются уравнения преобразования

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},$$

$$y' = y.$$

$$z' = z,$$

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}.$$

Последнее из этих уравнений показывает, что в общем случае из равенства значений времени (одновременности) двух событий в системе K не следует равенство значений времени (одновременность) тех же событий в системе K'. Одновременность, таким образом, теряет абсолютный смысл.

Далее, возникает вопрос: чему равна в системе K длина l стержня, покоящегося в системе K', ориентированного параллельно оси x' и обладающего длиной l' в системе K'? Первое из указанных уравнений преобразования дает ответ[2]:

$$l = l'\sqrt{1-(v^2/c^2)}.$$

---

[2] Для обоих концов линейки, именно для их координат x, выполняются уравнения

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{1-(v^2/c^2)}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt}{1-(v^2/c^2)},$$

откуда после вычитания следует

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{1-(x^2/c^2)} \quad \text{или} \quad l = l'\sqrt{1-(v^2/c^2)}.$$

Это означает следующее. Если стержень в покое обладает длиной l', то при движении со скоростью v вдоль своей оси он будет обладать с точки зрения несопутствующего наблюдателя меньшей длиной $l = l'\sqrt{1-(v^2/c^2)}$, тогда как для сопутствующего наблюдателя длина стержня, как и прежде, равна l'. Длина тем меньше, чем больше скорость v движущегося стержня. Если v приближается к скорости света, то длина стержня стремится к нулю. Для значений v, превышающих скорость света, наш результат теряет смысл; движение с такими скоростями согласно теории относительности невозможно. Легко видеть, что упомянутая выше гипотеза Г. А. Лоренца и Фицджеральда, выдвинутая для объяснения опыта Майкельсона, получается как следствие теории относительности. С другой стороны, согласно этой теории, тело, покоящееся относительно K, с точки зрения K' испытывает точно такое же сокращение, как и тело, покоящееся в K', при наблюдении его из системы K.

Еще одно важное следствие из уравнений преобразования получается следующим образом. Пусть в начале координат системы K' находятся часы с секундной стрелкой. Для них всегда $x' = 0$, и они отсчитывают свои секунды в моменты времени $t' = 0, 1, 2, 3$ и т. д. Первое и четвертое уравнения преобразования дают для времен t этих секундных отсчетов значения

$$t = \frac{0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \quad \frac{2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

и т. д. Таким образом, в системе K время между отсчетами часов равно $1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$, т. е. больше секунды. Часы, движущиеся со скоростью v, идут — с точки зрения несопутствующей системы координат — медленнее, чем шли бы те же часы, если бы они покоились.

Обобщая, можно сделать вывод: всякий процесс в некоторой физической системе замедляется, если эта система приводится в поступательное движение. Однако это замедление происходит только с точки зрения несопутствующей системы координат.

Представляет ли теория относительности какую-либо ценность для дальнейшего развития физики, помимо того, что решает изложенную выше дилемму? На этот вопрос следует ответить утвердительно по следующей причине. Согласно теории относительности, системы K и K' являются равноправными, и координаты и значения времени в обеих системах взаимно связаны приведенными выше уравнениями преобразования. Если какая-нибудь общая физическая теория формулируется в системе K, то с помощью уравнений преобразования вместо величин x, y, z, t в уравнения можно ввести величины x', y', z', t'. Тогда получится система уравнений, отнесенная к системе K'. В соответствии с принципом относительности эта система уравнений должна точно совпадать с системой уравнений, отнесенной к системе K, с той лишь разницей, что вместо величин x, y, z, t войдут x', y', z', t'. Таким образом, теория относительности дает общий критерий допустимости любой физической теории.

Перечислим кратко отдельные результаты, полученные до настоящего времени благодаря теории относительности. Она дает простую теорию принципа Допплера, аберрации, опыта Физо. Она говорит о справедливости уравнений поля Максвелла — Лоренца и для электродинамики движущихся тел. Законы отклонения быстрых катодных лучей и одинаковых с ними по природе β-лучей радиоактивных веществ, вообще законы движения быстро движущихся материальных частиц выводятся с помощью теории относительности без привлечения особых дополнительных гипотез.

Однако важнейший результат, достигнутый пока теорией относительности,— это вывод соотношения между инертной массой физической системы и содержанием энергии в ней. Пусть тело обладает в некотором определенном состоянии инертной массой M. Если этому телу сообщается каким-то образом энергия E, то, согласно теории относительности, его инертная масса возрастает вследствие этого до значения $M + E/c^2$, где c — скорость света в пустоте. Поэтому закон сохранения массы, считавшийся до сих пор справедливым, видоизменяется и объединяется в один закон с законом сохранения энергии. Этот результат говорит о том, что инертную массу M тела следует понимать как содержание энергии Mc^2. Прямого экспериментального подтверждения этого важного результата у нас пока нет, однако мы знаем частные случаи, для которых справедливость «закона инерции энергии» можно доказать, не прибегая к теории относительности.

Развитие теории относительности было сильно ускорено благодаря математической формулировке ее основ, данной Г. Минковским. При этом Минковский исходил из того, что «временна́я координата» будет входить в основные уравнения теории относительности точно таким же образом, как и пространственные координаты, если вместо t ввести пропорциональную этой величине мнимую переменную $\sqrt{-1}\,ct$. Благодаря этому уравнения теории относительности становятся уравнениями в четырехмерном пространстве; при этом формальные свойства этого четырехмерного мира отличаются от формальных свойств пространства эвклидовой геометрии только числом измерений.

II. Общая теория относительности

Специальная теория относительности основана на идее, что определенные системы координат (инерциальные системы) являются равноправными для формулировки законов природы; к таким системам координат принадлежат те, в которых выполняется закон инерции и закон постоянства скорости света в пустоте. Но являются ли эти системы координат на самом деле выделенными в природе, или же эта привилегированность возникает вследствие несовершенного понимания законов природы? Конечно, закон Галилея на первый взгляд выделяет инерциальные системы из всех других движущихся систем координат. Но закон инерции обладает недостатком, который обесценивает этот аргумент.

Теперь представим себе часть пространства, свободную от действия сил в смысле классической механики, иными словами, достаточно удаленную от тяготеющих масс. Тогда в соответствии с механикой существует инерциальная система K, относительно которой масса M, предоставленная самой себе в рассматриваемой части пространства, движется прямолинейно и равномерно. Если теперь ввести систему координат K', равномерно ускоренную относительно системы K, то по отношению к системе K' масса M, предоставленная самой себе, будет двигаться не по прямой, а по параболе, подобно тому, как движется масса вблизи поверхности Земли под действием силы тяжести.

Можно ли отсюда заключить, что система K' (абсолютно) ускорена? Это заключение было бы неправомерным. Систему K' можно с таким же правом считать «покоящейся», предполагая лишь, что в системе K' существует однородное гравитационное поле, являющееся причиной ускоренного движения тел относительно K'.

Против такого утверждения можно было бы возразить, что не указаны массы, порождающие это гравитационное поле. Однако их можно считать бесконечно удаленными, не вступая в противоречие с основами механики Ньютона. Кроме того, мы не знаем, с какой точностью соответствует действительности закон тяготения Ньютона.

Одно обстоятельство говорит в пользу нашего утверждения. Относительно системы K' все массы, независимо от их конкретных физических и химических свойств, падают с одинаковым ускорением. Опыт показывает, что это справедливо и для гравитационного поля, причем с необычайной точностью. Примечательный факт, что мы знаем гравитационное поле как состояние пространства, в котором поведение тел такое же, как и в системе K', делает совершенно естественной гипотезу о том, что в системе K' существует гравитационное поле, по существу тождественное полям тяготения, порождаемым массами в соответствии с законом Ньютона.

При этом способе рассмотрения не существует никакого реального разделения на инерцию и гравитацию, поскольку ответ на вопрос о том, находится ли тело в определенный момент исключительно под действием инерции или под комбинированным воздействием инерции и гравитации, зависит от системы координат, т. е. от способа рассмотрения.

Итак, общеизвестные физические факты приводят нас к общему принципу относительности, т. е. к утверждению, что законы природы следует формулировать так, чтобы они выполнялись относительно произвольно движущихся систем координат.

Из сказанного выше непосредственно видно, что общий принцип относительности приводит к теории гравитационного поля. Именно, исходя из инерциальной системы K, в которой гравитационное поле отсутствует, и вводя движущуюся произвольным образом относительно K систему координат K', так что в системе K' существует точно известное гравитационное поле, мы можем определять общие свойства гравитационных полей по общим свойствам тех гравитационных полей, которые получаются при переходе к системе K'.

В то же время неверно обратное утверждение, что всякое гравитационное поле соответствующим выбором системы координат можно исключить, т. е. получить пространство, свободное от тяготения. Например, гравитационное поле Земли нельзя исключить никаким выбором системы координат. Для к о н е ч н о й области это возможно только в случае гравитационных полей весьма специфического вида. Но для бесконечно малой области координаты всегда можно выбрать таким образом, что гравитационное поле будет отсутствовать в ней. Тогда можно считать, что в такой бесконечно малой области выполняется специальная теория относительности. Тем самым общая теория относительности связывается со специальной теорией относительности, и результаты последней переносятся на первую.

Простое рассуждение показывает, что путь луча света, распространяющегося в инерциальной системе K прямолинейно и равномерно, в системе координат K', совершающей ускоренное поступательное движение, будет криволинейным. Отсюда мы заключаем, что лучи света искривляются гравитационным полем; в соответствии с принципом Гюйгенса это означает, что скорость света в гравитационных полях является функцией точки. Это следствие впервые было подтверждено во время солнечного затмения 1919 года.

Легко видеть далее, что, согласно общей теории относительности, гравитационное поле должно обладать значительно более сложной структурой, чем в теории Ньютона. Например, если система K' равномерно вращается относительно инерциальной системы K, то движение материальных точек относительно K' происходит таким образом, что ускорение зависит не только от их положения (центробежная сила), но и от скорости (сила Кориолиса).

Далее, исходя из лоренцовского сокращения, которое выше было получено как следствие специальной теории относительности, можно сделать вывод о том, что расположение практически жестких тел в системе K

описывается геометрией Эвклида неточно и что скорость хода одинаково устроенных часов является функцией точки. Другими словами, в общей теории относительности не существует геометрии и кинематики, независящих от физических процессов, так как свойства масштабов и часов определяются гравитационным полем.

С этим обстоятельством связано существенно более глубокое изменение, которое вносит в учение о пространстве и времени общая теория относительности, чем то, которое внесла специальная теория относительности. В последней, например, пространственные и временны́е координаты имеют непосредственный физический смысл: между двумя точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) данной системы координат можно уложить твердый масштаб, измеряющий длину

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

а разность времен $t_2 - t_1$ двух событий, происходящих в одной точке этой системы координат, непосредственно измеряется (одинаково устроенными для всех точек) часами, помещенными в этой точке (или в ее непосредственной окрестности). В общей теории относительности координатам уже нельзя приписывать такой непосредственный физический смысл. Хотя совокупность процессов, т. е. точечных событий, можно и здесь расположить в четырехмерном континууме (пространстве-времени), но свойства масштабов и часов (геометрия или вообще метрика) в этом континууме определяются гравитационным полем; последнее, таким образом, представляет собой физическое состояние пространства, одновременно определяющее тяготение, инерцию и метрику. В этом заключается углубление и объединение основ физики, достигнутое благодаря общей теории относительности.

В разительном контрасте с глубоким изменением, внесенным общей теорией относительности в основы физики, находится ничтожное различие между количественными предсказаниями новой и старой теорий. Кроме уже упомянутого искривления лучей света в гравитационном поле Солнца, обнаруживаемого только при полном солнечном затмении, следует назвать еще медленное вращение эллиптической орбиты планеты Меркурий (40 секунд за 100 лет), которое нашло объяснение в общей теории относительности, но не могло быть объяснено в теории тяготения Ньютона. Наконец, общая теория относительности предсказывает незначительный сдвиг спектральных линий света, испускаемого атомами на поверхности Солнца или неподвижных звезд, по сравнению со спектральными линиями света, испускаемого на поверхности Земли. Наблюдениями установлено, что существование этого эффекта является весьма вероятным, но пока еще не вполне достоверным.

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

В последние годы я старался построить общую теорию относительности исходя из относительности также и неравномерных движений. Я думал, что на самом деле нашел единственный закон гравитации, который соответствует понятному по смыслу общему постулату относительности, и пытался доказать необходимость именно этого решения в работе, появившейся в прошлом году в этом журнале[1].

Однако заново проведенный анализ показал, что, следуя по предложенному пути, совершенно невозможно ничего доказать; то, что это казалось все же сделанным, было основано на заблуждении. Постулат относительности в той мере, в какой я требовал, выполняется всегда, когда в основу кладется принцип Гамильтона; однако фактически он не дает возможности определить гамильтонову функцию H гравитационного поля. На самом деле ограничивающее выбор H соотношение (77) цит. соч. выражает не что иное, как то, что H должна быть инвариантна относительно линейных преобразований, а это требование не имеет ничего общего с относительностью ускорения. Кроме того, указанный соотношением (77) выбор нисколько не подтвержден уравнением (78) цит. соч.

По этим причинам я полностью потерял доверие к полученным мной уравнениям поля и стал искать путь, который бы ограничивал возможности естественным образом. Так я вернулся к требованию более общей ковариантности уравнений поля, от которой я отказался с тяжелым сердцем, когда работал вместе с моим другом Гроссманом. Мы подошли тогда фактически очень близко к излагаемому ниже решению задачи.

---

* *Zur allgemeinen Relativitätstheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786.

[1] «Формальные основы общей теории относительности». Sitzungsber. preuss. Acad. Wiss., 1914, 2, 1030, (Статья 29). В дальнейшем при ссылках на уравнения из этой работы последние будем отличать от уравнений настоящей работы добавкой «цит. соч.» («цитированного сочинения»).

Подобно тому, как частная теория относительности основана на постулате, что ее соотношения должны быть ковариантны относительно линейных ортогональных преобразований, излагаемая здесь теория основана на постулате ковариантности всех систем уравнений относительно преобразований с определителем 1.

Прелесть этой теории едва ли может скрыться от того, кто действительно понимает ее; она означает истинный триумф метода абсолютного дифференциального исчисления, развитого Гауссом, Риманом, Кристоффелем, Риччи и Леви-Чивитой.

§ 1. Законы образования ковариантов

Поскольку в наших работах последних лет дано подробное изложение методов абсолютного дифференциального исчисления, мы будем краткими при изложении используемых здесь законов образования ковариантов; нам нужно лишь исследовать, что меняется в теории ковариантов благодаря тому, что допускаются преобразования только с определителем 1.

Справедливое при любых преобразованиях соотношение

$$d\tau' = \frac{\partial (x_1', \ldots, x_4')}{\partial (x_1, \ldots, x_4)}\, d\tau$$

в соответствии с исходным предположением нашей теории

$$\frac{\partial (x_1', \ldots, x_4')}{\partial (x_1, \ldots, x_4)} = 1 \tag{1}$$

переходит в соотношение

$$d\tau' = d\tau; \tag{2}$$

таким образом, элемент четырехмерного объема является инвариантом. Далее, поскольку соотношение (17) цит. соч. является ковариантным относительно любых преобразований, то для интересующей нас группы и

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g}. \tag{3}$$

Следовательно, определитель, составленный из $g_{\mu\nu}$, также является инвариантом. В силу скалярного характера $\sqrt{-g}$ основные формулы образования ковариантов допускают по сравнению со случаем общей ковариантности упрощение, коротко говоря, основанное на том, что в основных формулах уже не появляются множители $\sqrt{-g}$ и $1/\sqrt{-g}$

и отпадает различие между тензорами и V-тензорами. В частности, получается следующее:

1. На месте тензоров

$$G_{iklm} = \sqrt{-g}\,\delta_{iklm}$$

и

$$G^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta_{iklm}$$

[см. формулы (19) и (21a) цит. соч.] стоят более просто построенные тензоры

$$G_{iklm} = G^{iklm} = \delta_{iklm}\,. \tag{4}$$

2. Основные формулы (29) и (30) цит. соч. для расширения тензоров нельзя заменить более простыми на основе наших исходных предположений, равно как и определяющую дивергенцию формулу, которая получается объединением формул (30) и (31) цит. соч. Ее можно записать в виде:

$$A^{\alpha_1\ldots\alpha_l} = \sum_s \frac{\partial A^{\alpha_1\ldots\alpha_l s}}{\partial x_s} + \sum_{s\tau}\left[\begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} A^{\tau\alpha_1\ldots\alpha_l s} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_l \end{Bmatrix} A^{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}\tau s}\right] + \sum_{s\tau}\begin{Bmatrix} s\tau \\ s \end{Bmatrix} A^{\alpha_1\ldots\alpha_l\tau}. \tag{5}$$

Однако теперь, согласно (24) и (24a) цит. соч.,

$$\sum_s \begin{Bmatrix} s\tau \\ s \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha s} g^{s\alpha}\left(\frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_s} - \frac{\partial g_{s\tau}}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{1}{2}\sum g^{s\alpha}\frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial(\lg\sqrt{-g})}{\partial x_\tau}\,. \tag{6}$$

Таким образом, эта величина в силу (3) имеет векторный характер. Следовательно, последний член в правой части равенства (5) сам является контравариантным тензором ранга l. Поэтому мы вправе принять вместо (5) более простое определение дивергенции

$$A^{\alpha_1\ldots\alpha_l} = \sum_s \frac{\partial A^{\alpha_1\ldots\alpha_l s}}{\partial x_s} + \sum_{s\tau}\left[\begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} A^{\tau\alpha_2\ldots\alpha_l s} + \cdots + \begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_l \end{Bmatrix} A^{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}\tau s}\right], \tag{5a}$$

что мы и будем делать в дальнейшем. Так, например, определение (37) цит. соч.

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{-g}\,A^\mu\right)$$

нужно было бы заменить более простым определением

$$\Phi = \sum_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu}\,; \tag{7}$$

формулу (40) цит. соч для дивергенции контравариантного 6-вектора также можно заменить более простой

$$A^{\mu} = \sum_{\nu} \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}. \tag{8}$$

По нашему определению, вместо формулы (41) цит. соч. имеем

$$A_{\sigma} = \sum_{\nu} \frac{\partial A_{\sigma}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} A_{\tau}^{\nu}. \tag{9}$$

Сравнение с формулой (41б) цит. соч. показывает, что при нашем определении закон для дивергенции такой же, как и закон для дивергенции V-тензора согласно абсолютному дифференциальному исчислению. Тот факт, что это замечание справедливо для дивергенций произвольных тензоров, можно легко доказать с помощью соотношений (5) и (5а).

5. Наше ограничение преобразованиями с определителем 1 приводит к наиболее сильному упрощению для тех ковариантов, которые могут быть образованы только из $g_{\mu\nu}$ и их производных. Математика учит, что все эти ковариантны могут быть получены из тензора Римана — Кристоффеля 4-го ранга, который (в своей ковариантной форме) имеет вид

$$(ik, lm) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_l \partial x_i}\right) + \\ + \sum_{l\sigma} g^{l\sigma}\left(\begin{bmatrix} im \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kl \\ \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} km \\ \sigma \end{bmatrix}\right). \tag{10}$$

Проблема гравитации заставляет нас особенно интересоваться тензорами 2-го ранга, которые могут быть образованы из этого тензора 4-го ранга и $g_{\mu\nu}$ путем внутреннего умножения. В силу свойств симметрии тензора Римана, вытекающих из равенства (10),

$$\begin{gathered} (ik, lm) = (lm, ik), \\ (ik, lm) = -(ki, lm), \end{gathered} \tag{11}$$

такая операция образования тензора 2-го ранга может быть выполнена только о д н и м способом; получается тензор

$$G_{im} = \sum_{kl} g^{kl} (ik, lm). \tag{12}$$

Однако для наших целей полезнее вывести этот тензор из второй формы тензора (10), указанной Кристоффелем, а именно[2],

[2] Простое доказательство тензорного характера этого выражения можно найти на стр. 1053 цит. соч. (статья 29, стр. 350, 351 .— *Ред.*).

$$\{ik,\, lm\} = \sum_\rho g^{k\rho}(i\rho,\, lm) = \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} im \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_\rho \left[\begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho m \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho l \\ k \end{Bmatrix} \right]. \qquad (13)$$

Тензор G_{im} получается отсюда путем умножения на тензор $\delta_k^l = \sum_\alpha g_{k\alpha} g^{\alpha l}$ (внутреннее умножение):

$$G_{im} = \{il,\, lm\} = R_{im} + S_{im}, \qquad (13)$$

$$R_{im} = -\frac{\partial \begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_\rho \begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho m \\ l \end{Bmatrix}, \qquad (13а)$$

$$S_{im} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho l \\ l \end{Bmatrix}. \qquad (13б)$$

Если ограничиться преобразованиями с определителем 1, то не только (G_{im}) является тензором, но и (R_{im}) и (S_{im}) также имеют тензорный характер. В самом деле, это следует из того обстоятельства, что $\sqrt{-g}$ является скаляром и в силу равенств (6) $\begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}$ — ковариантным 4-вектором. Однако (S_{im}) согласно формуле (29) цит. соч. есть не что иное, как расширение этого 4-вектора, т. е. также тензор. Из тензорного характера (G_{im}) и (S_{im}) [см. (13)] следует также тензорный характер (R_{im}). Этот последний тензор имеет наибольшее значение для теории гравитации.

§ 2. Замечания к дифференциальным законам «материальных процессов»

1. Теорема энергии-импульса для материи (включая электромагнитные процессы в вакууме).

Вместо уравнения (42а) цит. соч., согласно общим методам предыдущего параграфа, мы будем иметь уравнение:

$$\sum_\nu \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} T_\sigma^\mu + K_\sigma; \qquad (14)$$

при этом T_σ^μ — обычный тензор, K_σ — обычный ковариантный 4-вектор (а не V-тензор или V-вектор). По поводу этого уравнения необходимо сделать следующее важное замечание. Это уравнение сохранения побуждало меня рассматривать величины

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu} g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

как естественное выражение для компонент гравитационного поля, хотя, принимая во внимание формулы абсолютного дифференциального исчисления, вместо этих величин лучше было бы ввести символы Кристоффеля

$$\left\{\begin{matrix}\nu\sigma\\ \tau\end{matrix}\right\}.$$

Это было роковым предубеждением. Предпочтение символам Кристоффеля оправдано в особенности благодаря симметрии относительно их обоих значков ковариантного характера (здесь ν и σ) и благодаря тому, что они же входят в фундаментальное уравнение геодезической линии (23б) цит. соч., которое с физической точки зрения представляет собой уравнение движения материальной точки в гравитационном поле. Вид уравнения (14) также не противоречит этому, так как первый член его правой части можно привести к виду

$$\sum_{\nu\tau}\left\{\begin{matrix}\sigma\nu\\ \tau\end{matrix}\right\} T^{\nu}_{\tau}.$$

Поэтому в дальнейшем мы будем считать компонентами гравитационного поля величины

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = -\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \sigma\end{matrix}\right\} = -\sum_{\alpha} g^{\tau\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha} g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \quad (15)$$

Если обозначить через T^{ν}_{σ} тензор энергии всей «материальной» системы, то K_ν обращается в нуль; закон сохранения (14) в этом случае принимает вид:

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial T^{\alpha}_{\tau}}{\partial x_\alpha} = -\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}T^{\beta}_{\alpha}. \quad (14а)$$

Заметим, что уравнения движения материальной точки (23б) цит. соч. принимают вид:

$$\frac{d^2x_\tau}{\partial s^2} = \sum_{\mu\nu}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}. \quad (15)$$

2. В рассуждениях §§ 10 и 11 цитированной работы ничего не меняется, и лишь величины, называвшиеся там V-скалярами и V-тензорами, имеют теперь характер обычных скаляров или тензоров.

§ 3. Уравнения гравитационного поля

Только что сказанное наводит на мысль придать уравнениям гравитационного поля вид

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{16}$$

поскольку мы уже знаем, что эти уравнения ковариантны относительно произвольных преобразований с определителем 1. Действительно, эти уравнения удовлетворяют всем требованиям, которые мы должны к ним предъявлять. В более подробной записи они в соответствии с формулами (13а) и (15) имеют вид

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha} = -\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{16a}$$

Покажем теперь, что эти уравнения поля можно привести к гамильтоновой форме:

$$\left.\begin{aligned} &\delta \left\{ \int \left(\mathfrak{L} - \varkappa \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right) d\tau \right\} = 0, \\ &\mathfrak{L} = \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} \Gamma^{\beta}_{\tau\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

причем $g^{\mu\nu}$ следует варьировать, а тензор $T_{\mu\nu}$ рассматривать как постоянный. Именно соотношение (17) равносильно уравнениям

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = \varkappa T_{\mu\nu}, \tag{18}$$

причем $\mathfrak{L}$ следует считать функцией $g^{\mu\nu}$ и $\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\tau}} = g^{\mu\nu}_{\tau}$.

С другой стороны, путем длинных, хотя и несложных, выкладок получаем соотношения

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\sum_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{19a}$$

Вместе с уравнениями (18) эти соотношения дают в результате уравнения поля (16а).

Теперь легко также показать, что выполняется закон сохранения энергии и импульса. Умножая уравнения (18) на $g_\sigma^{\mu\nu}$ и суммируя по значкам μ и ν, после несложных преобразований получаем

$$\sum_{\alpha\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_\sigma} = -\varkappa \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} g_\sigma^{\mu\nu}.$$

С другой стороны, согласно уравнению (14), полный тензор энергии-материи равен

$$\sum_\lambda \frac{\partial T_\sigma^\lambda}{\partial x_\lambda} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_{\mu\nu}.$$

Из последних уравнений следует

$$\sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda) = 0, \tag{20}$$

причем

$$t_\sigma^\lambda = \frac{1}{2\varkappa}\left(\mathfrak{L}\delta_\sigma^\lambda - \sum_{\mu\nu} g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_\lambda^{\mu\nu}}\right) \tag{20a}$$

означает «тензор энергии» гравитационного поля, который, впрочем, является тензором лишь по отношению к линейным преобразованиям. Из соотношений (20а) и (19а) после простого преобразования получаем

$$t_\sigma^\lambda = \frac{1}{2} \delta_\sigma^\lambda \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \sum_{\mu\nu\alpha} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda. \tag{20б}$$

Наконец, представляет еще интерес вывести два скалярных уравнения, которые получаются из уравнений поля. Умножая уравнение (16а) на $g^{\mu\nu}$ и суммируя по μ и ν, после простых преобразований получаем

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\alpha\beta\sigma\tau} g^{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \Gamma_{\tau\alpha}^\beta + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\beta}\right) = -\varkappa \sum_\sigma T_\sigma^\sigma. \tag{21}$$

С другой стороны, умножая (16а) на $g^{\nu\lambda}$ и суммируя по ν, находим

$$\sum_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \sum_{\alpha\beta\nu} g^{\nu\beta} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = -\varkappa T_\mu^\lambda,$$

или, принимая во внимание (20б),

$$\sum_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\varkappa (T_\mu^\lambda + t_\mu^\lambda).$$

Отсюда с учетом соотношений (20) после простого преобразования следует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}\right] = 0. \tag{22}$$

Однако мы требуем несколько большего:

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha} = 0, \tag{22a}$$

так что уравнение (21) принимает вид

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\beta}\right) = -\varkappa\sum_\sigma T^\sigma_\sigma. \tag{21a}$$

Из уравнения (21a) следует, что невозможно выбрать систему координат так, чтобы величина $\sqrt{-g}$ всюду стала равной 1, поскольку тогда след тензора энергии не может быть обращен в нуль.

Уравнение (22a) является соотношением, которому подчиняются только $g_{\mu\nu}$ и которое уже не должно оставаться справедливым в новой системе координат, получающейся из первоначальной системы координат путем применения неразрешенного преобразования. Следовательно, это уравнение указывает, как должна быть подобрана система координат для рассматриваемого многообразия.

§ 4. Некоторые замечания о физических следствиях теории

Уравнение (22a) в первом приближении дает

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$

Это еще не определяет координатную систему: для ее определения необходимо еще задать 4 уравнения. Поэтому мы можем в первом приближении положить произвольно

$$\sum_\beta \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \tag{22б}$$

Далее, для упрощения изложения введем мнимое время в качестве четвертой переменной. Тогда уравнения поля (16a) в первом приближении принимают вид

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = \varkappa T_{\mu\nu}. \tag{16б}$$

Отсюда нетрудно видеть, что они содержат в качестве приближения закон тяготения Ньютона.

Относительность движения в новой теории обеспечена тем, что среди разрешенных преобразований имеются как такие преобразования, которые соответствуют вращению новой системы относительно старой с произвольно меняющейся угловой скоростью, так и такие, при которых начало координат новой системы совершает в старой системе произвольно заданное движение.

Действительно, преобразования

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\tau + y\sin\tau, \\ y' &= -x\sin\tau + y\cos\tau, \\ z' &= z, \\ t' &= t \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x' &= x - \tau_1, \\ y' &= y - \tau_2, \\ z' &= z - \tau_3, \\ t' &= t, \end{aligned}$$

где τ или τ_1, τ_2, τ_3 — произвольные функции являются преобразованиями с определителем 1.

Поступила 11 ноября 1915 г.

В этой работе восстанавливается принцип ковариантности уравнений. Однако ковариантность ограничивается пока еще условием унимодулярности преобразования. Это последнее ограничение будет отброшено в статье 38.

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (ДОПОЛНЕНИЕ) *

В недавно появившемся исследовании[1] я показал, как можно построить теорию гравитационного поля на основе римановской ковариантной теории многомерных многообразий. Здесь будет показано, что путем введения довольно смелой дополнительной гипотезы о структуре материи может быть достигнуто еще более стройное логическое построение теории.

Гипотеза, которая еще должна быть оправдана, касается следующего: из тензора энергии «материи» T_μ^λ может быть составлен скаляр $\sum_\mu T_\mu^\mu$. Хорошо известно, что для электромагнитного поля этот скаляр обращается в нуль. Наоборот, для собственно материи он, по-видимому, отличен от нуля. Если мы рассмотрим в качестве частного случая, например, непрерывную жидкость, то обычно (пренебрегая давлением) полагают

$$T^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\,\rho_0 \frac{\partial x_\mu}{\partial s} \frac{\partial x_\nu}{\partial s},$$

так что

$$\sum_\mu T_\mu^\mu = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \rho_0 \sqrt{-g}.$$

Следовательно, в этом случае след тензора энергии не обращается в нуль.

Теперь вспомним, что, согласно нашим знаниям, «материю» не следует понимать как нечто изначально заданное, физически элементарное. Есть

---

* *Zur allgemeinen Relativitätstheorie.* (*Nachtrag*). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 46, 2, 799—801.

[1] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 788. (Статья 34.— *Ред.*).

еще немало людей, которые надеются, что можно будет свести материю к чисто электромагнитным процессам, однако эти процессы, во всяком случае, происходили бы в соответствии с усовершенствованной по сравнению с электродинамикой Максвелла теорией. Допустим на мгновение, что в усовершенствованной таким образом электродинамике скаляр тензора энергии также обращался бы в нуль! Доказывал ли бы тогда только что полученный результат, что в такой теории нельзя получить материю? Я думаю, на этот вопрос можно ответить отрицательно, ибо тогда было бы весьма возможно, что существенной составной частью «материи», к которой относится только что указанное выражение, являются гравитационные поля. В таком случае хотя и могло казаться, что величина $\sum\limits_{\mu} T_{\mu}^{\mu}$ для всей системы положительна, в действительности положительна лишь величина $\sum\limits_{\mu}(T_{\mu}^{\mu} + t_{\mu}^{\mu})$, а $\sum\limits_{\mu} T_{\mu}^{\mu}$ всюду обращается в нуль. В дальнейшем мы предположим, что условие $\sum\limits_{\mu} T_{\mu}^{\mu} = 0$ действительно выполняется всегда.

Тот, кто не отклоняет заранее гипотезу, что молекулярные гравитационные поля являются существенной составной частью материи, обнаружит здесь сильную поддержку своему убеждению[2].

Вывод уравнений поля

Наша гипотеза позволяет сделать последний шаг, который кажется желательным с точки зрения идеи общей относительности. Именно она дает возможность придать общековариантную форму также уравнениям гравитационного поля. В предыдущем сообщении я показал [см. уравнение (13)], что

$$G_{im} = \sum_{l} \{il, lm\} = R_{im} + S_{im} \tag{13}$$

является тензором, ковариантным относительно любых преобразований. При этом мы положили

$$R_{im} = -\sum_{l} \frac{\partial \left\{ {im \atop l} \right\}}{dx_l} + \sum_{\rho l} \left\{ {il \atop \rho} \right\} \left\{ {\rho m \atop l} \right\}, \tag{13a}$$

---

[2] При подписании в печать предыдущего сообщения до моего сознания еще не дошла принципиальная допустимость гипотезы $\sum\limits_{\mu} T_{\mu}^{\mu} = 0$.

$$S_{im}=\sum_{l}\frac{\partial\begin{Bmatrix}il\\ l\end{Bmatrix}}{\partial x_m}-\sum_{\rho l}\begin{Bmatrix}im\\ \rho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho l\\ l\end{Bmatrix}. \tag{13в}$$

Тензор G_{im} — единственный тензор, который имеется в нашем распоряжении для составления общековариантных уравнений гравитационного поля.

Если мы теперь примем, что уравнения гравитационного поля должны иметь вид

$$G_{\mu\nu}=-\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{16в}$$

то тем самым мы получим общековариантные уравнения поля. Вместе с общековариантными законами для «материального» процесса, которые нам дало абсолютное дифференциальное исчисление, они выражают причинные связи в природе таким образом, что даже при их формулировке не были выбраны никакие особые системы координат, которые не были бы логически связаны с описываемыми закономерностями.

Исходя из этой системы уравнений, можно с помощью дополнительного выбора координат легко возвратиться к системе уравнений, которые я получил в моем последнем сообщении. Ясно, что можно ввести новую систему координат, в которой всюду

$$\sqrt{-g}=1.$$

Тогда S_{im} обращается в нуль, так что снова получается система уравнений поля предыдущего сообщения:

$$R_{\mu\nu}=-\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{16}$$

При этом формулы абсолютного дифференциального исчисления вырождаются в том же смысле, как и в предыдущем сообщении. В частности, и теперь наш выбор координат допускает только преобразования с определителем 1.

Различие между содержанием уравнений поля, полученных из общековариантных уравнений, и содержанием уравнений поля предыдущего сообщения состоит лишь в том, что значение $\sqrt{-g}$ в предыдущем сообщении не могло быть произвольным. Это значение определялось уравнением

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\beta}\right)=-\varkappa\sum_{\sigma}T_\sigma^\sigma, \tag{21a}$$

из которого видно, что $\sqrt{-g}$ может быть постоянным только в том случае, если след тензора энергии обращается в нуль.

При новом выводе $\sqrt{-g}$ равен 1 в силу произвольного выбора координат. Поэтому теперь вместо уравнения (21а) из уравнений поля следует обращение в нуль тензора энергии «материи». Следовательно, исходные для теории общековариантные уравнения поля (16в) не ведут к противоречию лишь в том случае, если справедлива гипотеза, изложенная в начале. Тем самым мы получаем право подчинить прежние уравнения поля ограничивающему условию

$$\sqrt{-g} = 1. \tag{21б}$$

Поступила 18 ноября 1915 г.

В последних двух работах Эйнштейн делает последнюю (накануне правильного решения) попытку построитъ уввнения гравитационного поля $G_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}$, вводя дополнительное условие $T_\sigma^\sigma = 0$. Это условие нужно для того, чтобы из уравнения (21) получить закон сохранения энергии-импульса (для чего понадобится ввести еще дополнительное требование (22а)).

В работе 37 будет сделан простой (но гениальный!) шаг, решивший судьбу теории — замена тензора $T_{\mu\nu}$ на $T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T$ или, что то же, тензора $G_{\mu\nu}$ на $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, ковариантная дивергенция которого равна нулю *тождественно*.

ОБЪЯСНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПЕРИГЕЛИЯ МЕРКУРИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

В недавно появившейся в этом журнале работе[1] я установил уравнения гравитационного поля, ковариантные относительно произвольных преобразований с определителем, равным единице. В дополнении[2] к этой работе нами было показано, что этим уравнениям поля соответствуют общековариантные уравнения, если скаляр[3] тензора энергии «материи» обращается в нуль, и установлено, что никакие принципиальные соображения не противоречат введению этой гипотезы, благодаря которой пространство и время лишаются последнего следа объективной реальности[4].

В настоящей работе я нахожу важное подтверждение этой наиболее радикальной теории относительности; именно, оказывается, что она качественно и количественно объясняет открытое Леверрье вековое вращение орбиты Меркурия, составляющее около 45″ в столетие; при этом нет необходимости делать какие-либо особые предположения[5].

Далее, оказывается, что следствием теории является более сильное (в два раза большее) искривление светового луча гравитационным полем по сравнению с нашими прежними исследованиями.

* *Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839.

[1] Статья 34.— *Прим. ред.*

[2] Статья 35.— *Прим. ред.*

[3] Т. е. «след» этого тензора.— *Прим. ред.*

[4] В работе, которая вскоре будет опубликована, показано, что и эта гипотеза является излишней. Существенно лишь то, что возможен такой выбор системы отсчета, при котором определитель $|g_{\mu\nu}|$ принимает значение —1. Следующее ниже исследование не зависит и от этого. (См. статью 38.— *Прим. ред.*).

[5] О невозможности удовлетворительно объяснить аномалии движения Меркурия, на основе теории Ньютона недавно писал Фрейндлих (Freundlich E., Astron. Nachr., 1915, 201, Juni.).

§ 1. Гравитационное поле

Из моих двух последних работ вытекает, что в системе отсчета, выбранной соответствующим образом, гравитационное поле в вакууме должно удовлетворять уравнениям

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = 0, \tag{1}$$

где $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ определяется формулой

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = -\begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{Bmatrix} = -\sum_{\beta} g^{\alpha\beta} \begin{bmatrix}\mu\nu \\ \beta\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\sum_{\beta} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}\right). \tag{2}$$

Кроме того, если мы сделаем обоснованное в последней работе предположение, что скаляр тензора энергии «материи» всегда равен нулю, то добавится условие:

$$|g_{\mu\nu}| = -1. \tag{3}$$

Пусть в начале координатной системы находится материальная точка (Солнце). Гравитационное поле, создаваемое этой материальной точкой, можно вычислить из уравнений путем последовательных приближений.

Однако можно полагать, что при заданной массе Солнца $g_{\mu\nu}$ еще не полностью определяются уравнениями (1) и (3). Это следует из того, что эти уравнения ковариантны относительно любых преобразований с определителем 1. Тем не менее, мы, по-видимому, вправе предположить, что такими преобразованиями все эти решения можно перевести друг в друга и что, следовательно, (при заданных граничных условиях) они отличаются друг от друга лишь формально, а не физически. Следуя этому убеждению, я ограничусь сначала тем, что получу здесь о д н о из решений, не касаясь вопроса, является ли оно е д и н с т в е н н о возможным.

Поступим теперь следующим образом. Пусть в «нулевом приближении» величины $g_{\mu\nu}$ заданы следующей схемой, соответствующей первоначальной теории относительности:

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}, \tag{4}$$

или короче

$$\left.\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= -\delta_{\rho\sigma}, \\ g_{\rho 4} &= g_{4\rho} = 0, \\ g_{44} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

При этом индексы ρ и σ принимают значения 1, 2, 3; $\delta_{\rho\sigma}$ равно единице или нулю, если $\rho = \sigma$ или $\rho \neq \sigma$, соответственно.

В дальнейшем мы будем предполагать, что значения $g_{\mu\nu}$ отличаются от приведенных в (4а) значений лишь на величины, малые по сравнению с единицей. Эти отклонения мы будем рассматривать как малые величины «первого порядка», а функции n-й степени от этих отклонений — как величины «n-го порядка». Уравнения (1) и (3) дают возможность последовательно, начиная с (4а), вычислять гравитационное поле с точностью до величин n-го порядка. В этом смысле мы будем говорить об «n-ом приближении»; уравнения (4а) представляют собой «нулевое приближение».

Решение, изложенное ниже, имеет следующие свойства, определяющие систему координат.

1. Все компоненты не зависят от x_4.

2. Решение (пространственно) симметрично относительно начала координат в том смысле, что если совершить линейное ортогональное (пространственное) преобразование координат, то опять получится то же самое решение.

3. Значения $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ являются точными (для $\rho = 1, 2, 3$).

4. В бесконечности компоненты $g_{\mu\nu}$ принимают значения, указанные в (4а).

Первое приближение

Нетрудно убедиться в том, что с точностью до величин первого порядка уравнениям (1) и (3) и только что указанным четырем условиям удовлетворяют следующие выражения:

$$g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} + \alpha\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_\rho\, \partial x_\sigma} - \frac{\delta_{\rho\sigma}}{r}\right) = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha\frac{x_\sigma x_\rho}{r^3}, \tag{4б}$$

$$g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r}.$$

Здесь $g_{4\rho}$ и $g_{\rho 4}$ устанавливаются условием «3», r — значение $+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, α — постоянная, определяемая массой Солнца.

Тот факт, что уравнение (3) выполняется в первом приближении, очевиден. Чтобы простейшим путем удостовериться в справедливости первого приближения уравнений поля (1), нужно лишь принять во внимание, что левую часть уравнений (1) после пренебрежения величинами второго и более высокого порядков можно заменить на

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{bmatrix},$$

причем α пробегает лишь значения от 1 до 3.

Как видно из равенства (4б), следствием нашей теории является то, что в случае покоящейся массы компоненты g_{11} до g_{33} отличны от нуля уже в первом порядке. Позднее мы увидим, что благодаря этому не возникает противоречия с законом Ньютона (в первом приближении).

Вероятно, по этой же причине получается несколько иное влияние гравитационного поля на луч света, чем в наших прежних работах; дело в том, что скорость света определяется уравнением

$$\sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0. \tag{5}$$

Применив принцип Гюйгенса, простым вычислением находим из (5) и (4б), что световой луч, проходящий мимо Солнца на расстоянии Δ, испытывает угловое отклонение на величину $\frac{2\alpha}{\Delta}$, тогда как прежние вычисления, которые не были основаны на предположении $\Sigma T_\mu^\mu = 0$, давали значение $\frac{\alpha}{\Delta}$. Световой луч, проходящий вблизи поверхности Солнца, должен испытывать отклонение на угол 1,7″ (вместо 0,85″). Напротив, результат для сдвига спектральных линий в гравитационном поле, подтвержденный Фрейндлихом по порядку величины на неподвижных звездах, остается неизменным, поскольку он зависит только от g_{44}.

После того как мы в первом приближении получили $g_{\mu\nu}$, можно также вычислить в первом приближении компоненты гравитационного поля. Из формул (2) и (4б) имеем

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\tau = -\alpha\left(\delta_{\rho\sigma}\frac{x_\tau}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{x_\rho x_\sigma x_\tau}{r^5}\right), \tag{6а}$$

где ρ, σ, τ пробегают значения 1, 2, 3;

$$\Gamma_{44}^\sigma = \Gamma_{4\sigma}^4 = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_\sigma}{r^3}, \tag{6б}$$

причем σ пробегает значения 1, 2 и 3. Те компоненты, в которых индекс 4 появляется один или три раза, обращаются в нуль.

Второе приближение

Как мы увидим позднее, чтобы найти орбиты планет с соответствующей точностью, нам необходимо определить более точно, до величин второго порядка, лишь три компоненты Γ_{44}^σ. Для этого нам достаточно последнего уравнения поля вместе с общими условиями, наложенными на наше решение. Последнее уравнение поля

$$\sum_\sigma \frac{\partial \Gamma_{44}^\sigma}{\partial x_\sigma} + \sum_{\sigma\tau}\Gamma_{4\tau}^\sigma \Gamma_{4\sigma}^\tau = 0$$

с учетом равенств (4б) и после пренебрежения величинами третьего высшего порядков переходит в

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \Gamma_{44}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = \frac{\alpha^2}{2r^4}.$$

Отсюда с учетом равенств (6б) и свойств симметрии нашего решения следует

$$\Gamma_{44}^{\sigma} = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_{\sigma}}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right). \tag{6в}$$

§ 2. Движение планет

Уравнения движения материальной точки в поле тяжести, вытекающие из общей теории относительности, имеют вид

$$\frac{d^2x_{\nu}}{ds^2} = \sum_{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} \frac{dx_{\sigma}}{ds}\frac{dx_{\tau}}{ds}. \tag{7}$$

Из этих уравнений прежде всего следует, что в качестве первого приближения они содержат уравнения движения Ньютона. Именно, если движение точки происходит со скоростью, малой по сравнению со скоростью света, то dx_1, dx_2 и dx_3 малы по сравнению с dx_4. Следовательно, уравнения движения в первом приближении мы получим, сохранив в правой части только член, в котором $\sigma = \tau = 4$. Учитывая равенства (6б), получаем

$$\frac{d^2x_{\nu}}{ds^2} = \Gamma_{44}^{\nu} = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_{\nu}}{r^3} \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{7а}$$

$$\frac{d^2x^4}{ds^2} = 0.$$

Эти уравнения показывают, что в первом приближении можно считать $s = x_4$. Тогда первые три уравнения будут в точности ньютоновскими. Если ввести в плоскости орбиты полярные координаты r, φ, то сохранение энергии и момента количества движения дает известные уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}u^2 + \Phi &= A \\ r^2\frac{d\varphi}{ds} &= B \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

где A и B — постоянные законов сохранения энергии и момента количества движения; здесь, кроме того, использованы сокращенные обозначения

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{\alpha}{2r}, \\ u^2 &= \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{ds^2}. \end{aligned} \tag{8a}$$

Теперь нужно решить уравнения (7) с точностью до величин более высокого порядка. Последнее из уравнений (7) вместе с (6б) дает

$$\frac{d^2x_4}{ds^2} = 2\sum_\sigma \Gamma^4_{\sigma 4}\frac{dx_\sigma}{ds}\,\frac{dx_4}{ds} = -\frac{dg_{44}}{ds}\,\frac{dx_4}{ds}$$

или с точностью до величин первого порядка:

$$\frac{dx_4}{ds} = 1 + \frac{\alpha}{r}. \tag{9}$$

Обратимся теперь к первым трем уравнениям (7). В правой части этих уравнений получим:

а) для комбинации индексов $\sigma = \tau = 4$

$$\Gamma^\nu_{44}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2,$$

или, принимая во внимание (6в) и (9), с точностью до величин второго порядка,

$$-\frac{\alpha}{2}\,\frac{x_\nu}{r^3}\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right);$$

в) для комбинаций индексов $\sigma \neq 4$, $\tau \neq 4$ (которые только и следует принимать во внимание) с учетом того, что произведения $\frac{dx_\sigma}{ds}\cdot\frac{dx_\tau}{ds}$ на основании (8) следует рассматривать как величины первого порядка [6], также с точностью величин второго порядка:

$$-\frac{\alpha x_4}{r^3}\sum_{\sigma\tau}\left(\delta_{\sigma\tau} - \frac{3}{2}\,\frac{x_\sigma x_\tau}{r^2}\right)\frac{dx_\sigma}{ds}\,\frac{dx_\tau}{ds}.$$

Суммирование приводит к результату

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} = -\frac{\alpha x_\nu}{r^3}\left[u^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right].$$

---

[6] В соответствии с этим обстоятельством мы могли бы удовлетвориться первым приближением для компонент поля $\Gamma^\nu_{\sigma\tau}$ в уравнении (6а).

Учитывая это, получаем с точностью до величин второго порядка уравнения движения, которые вместе с (9) определяют движение материальной точки. Между прочим, надо заметить, что в случае кругового движения уравнения (7б) и (9) не дают отклонений от третьего закона Кеплера.

Из (7б) следует точная применимость уравнения

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = B, \tag{10}$$

где B — постоянная. Следовательно, теорема площадей остается точной при учете величин второго порядка, если для измерения времени применять «собственное время» планет. Чтобы определить теперь из (7б) вековое вращение эллиптической орбиты, лучше всего заменить члены первого порядка в скобках с помощью равенства (10) и первого из уравнений (8), благодаря чему члены второго порядка в правой части не изменятся. После этого скобка принимает вид

$$\left(1 - 2A + \frac{3B^2}{r^2}\right).$$

Наконец, если вместо времени мы выберем переменную $s\sqrt{1-2A}$ и назовем ее снова s, то при несколько измененном значении постоянной B получим

$$\begin{gathered} \frac{d^2x_\nu}{ds^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}, \\ \Phi = -\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{B^2}{r^2}\right). \end{gathered} \tag{7в}$$

При определении формы орбиты будем поступать теперь в точности также, как в случае теории Ньютона. Сначала из уравнений (8) и (8а) получим

$$\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{ds^2} = 2A - 2\Phi.$$

Исключив из этого уравнения ds с помощью (10) и обозначив через x величину $\frac{1}{r}$, получим:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3. \tag{11}$$

Это уравнение отличается от соответствующего уравнения теории Ньютона только последним членом в правой части.

В соответствии с этим угол, который описывает радиус-вектор, проведенный между перигелием и афелием, выражается через эллиптический интеграл

$$\varphi = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2} x - x^2 + \alpha x^3}},$$

где α_1 и α_2 — те корни уравнения

$$\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2} x - x^2 + \alpha x^3 = 0,$$

которые близки к корням уравнения, получающегося после отбрасывания последнего члена.

С достаточной для нас точностью это можно заменить на

$$\varphi = [1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)] \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(1 - \alpha x)}},$$

или после разложения $(1 - \alpha x)^{-1/2}$

$$\varphi = [1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)] \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2} x\right) dx}{\sqrt{-(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}}.$$

Интегрирование дает

$$\varphi = \pi \left[1 + \frac{3}{4} \alpha (\alpha_1 + \alpha_2)\right],$$

или, если заметить, что α_1 и α_2 означают обратные значения максимального или минимального расстояния от Солнца,

$$\varphi = \pi \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{a(1 - e^2)}\right]. \tag{12}$$

Следовательно, при целом обороте перигелий перемещается на угол

$$\varepsilon = 3\pi \frac{\alpha}{a(1 - e^2)}, \tag{13}$$

если через a обозначить большую полуось, а через e — эксцентриситет орбиты.

Если мы введем период оборота T (в *сек*), то получим, обозначив через c скорость света (в *см/сек*),

$$\varepsilon = 2\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}. \tag{14}$$

Вычисление дает для планеты Меркурий поворот перигелия на $43''$ в столетие, тогда как астрономы указывают $45'' \pm 5''$ в качестве необъяснимой разницы между наблюдениями и теорией Ньютона. Это означает полное согласие с наблюдениями.

Для Земли и Марса астрономы указывают соответственно на поворот 11″ и 9″ в столетие, тогда как наша формула дает только 4″ и 1″. Однако вследствие малого эксцентриситета орбит этих планет наблюдательные данные, по-видимому, недостаточно точны. Мерой надежности определения постоянной движения перигелия является ее произведение на эксцентриситет $\left(e\frac{d\pi}{dt}\right)$. Если рассмотреть значения этого произведения, указанные Ньюкомбом,

Меркурий	8,48″ ± 0,43″,
Венера	—0,05″ ± 0,25″,
Земля	0,10″ ± 0,13″,
Марс	0,75″ ± 0,35″,

за которые я благодарен д-ру Фрейндлиху, то создается впечатление, что вообще смещение перигелия в действительности доказано только для Меркурия. Однако окончательное суждение об этом мне хотелось бы предоставить специалистам-астрономам.

Результаты этой работы были доложены на заседании Прусской Академии наук в 1915 г. В ней Эйнштейн впервые использовал новые уравнения гравитационного поля для вычисления эффектов. Первый эффект, это отклонение луча около Солнца, для которого получено значение вдвое больше, чем получалось в прежних вариантах теории. Второй эффект — поворот перигелия Меркурия — впервые описан в этой работе. Как известно, отклонение луча света вблизи диска Солнца было подтверждено впервые в 1919 г. (см. статью 52). Обработка современных данных А. А. Михайловым (Астрон. ж., 1956, 33, 912) дает для отклонения величину 2″,03 вместо теоретических 1″,75. Расхождение пока лежит внутри интервала ошибок наблюдения и обработки.

Современные данные о повороте перигелия различных планет даны в таблице.

Таблица

Планета	Угол поворота, *сек*	
	теория	наблюдение
Меркурий	43,03	43,11±0,45
Венера	8,3	3,4±4,8
Земля	3,8	5,0±1,2

УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ*

В двух недавно появившихся заметках[1] я указал, как можно получить уравнения гравитационного поля, согласующиеся с постулатом общей теории относительности, т. е. ковариантные в общем виде по отношению к любой замене пространственно-временных переменных.

Ход изложения был при этом таков. Прежде всего я нашел уравнения, которые содержали теорию Ньютона как приближение и были ковариантны по отношению к произвольным преобразованиям с определителем, равным единице. Отсюда я нашел, что эти уравнения общековариантны, если скаляр (след) тензора энергии «материи» равен нулю. Система координат выбиралась затем с помощью простых правил так, чтобы $\sqrt{-g}$ обращался в единицу, благодаря чему уравнения теории значительно упрощались. Однако при этом, как отмечалось, необходимо было ввести гипотезу об обращении в нуль следа тензора энергии материи.

За последнее время я пришел к убеждению, что можно обойтись без предположений о тензоре энергии материи, если ввести его в уравнения поля несколько иным путем, чем это сделано в обеих моих недавних заметках. При этом уравнения поля для вакуума, на которых я основывал объяснение движения перигелия Меркурия, остаются неизменными. Приведу здесь весь вывод еще раз, чтобы не вынуждать читателя обращаться все время к ранним работам.

Из известного тензора Римана 4-го ранга можно получить следующий ковариант 2-го ранга:

$$G_{ik} = R_{im} + S_{im}, \tag{1}$$

---

* *Die Feldgleichungen der Gravitation.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 48, 2, 844—847.

[1] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 778; 1915, 46, 799. (Статьи 34 и 35.— *Ред.*).

$$R_{im} = -\sum_l \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_{l\rho} \begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m\rho \\ l \end{Bmatrix}, \tag{1а}$$

$$S_{im} = \sum_l \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \sum_{l\rho} \begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho l \\ l \end{Bmatrix}. \tag{1б}$$

Мы получим десять общековариантных уравнений гравитационного поля в пространстве, где нет «материи», если положим

$$G_{im} = 0. \tag{2}$$

Эти уравнения легко установить, если систему отсчета выбрать так [2], чтобы $\sqrt{-g} = 1$. Тогда в силу формулы (1б) S_{im} обращается в нуль и вместо (2) получаем

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma^l_{i\rho} \Gamma^\rho_{ml} = 0, \tag{3}$$

$$\sqrt{-g} = 1. \tag{3а}$$

Здесь мы положили

$$\Gamma^l_{im} = -\begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Эти величины мы рассматриваем как «компоненты» гравитационного поля.

Если в рассматриваемом пространстве имеется «материя», то справа в уравнениях (2) или (3) появляется тензор энергии.

Положим

$$G_{im} = -\varkappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \tag{2а}$$

где

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \sum_\sigma T^\sigma_\sigma = T. \tag{5}$$

Здесь T — след тензора энергии «материи»; правая часть равенства (2а) является тензором.

Снова обычным способом выберем систему координат; при этом вместо (2а) получим эквивалентные уравнения

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{dx_l} + \sum_{\rho l} \Gamma^l_{i\rho} \Gamma^\rho_{ml} = -\varkappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \tag{6}$$

$$\sqrt{-g} = 1. \tag{3а}$$

[2] Ср. замечания об этом условии на стр. 472 и 484. — *Прим. ред.*

Как всегда примем, что дивергенция тензора энергии материи (в смысле абсолютного дифференциального исчисления) обращается в нуль (закон сохранения импульса и энергии). При выборе координат, согласно (3а), отсюда следует, что T_{im} должен удовлетворять условиям

$$\sum_\lambda \frac{\partial T_\sigma^\lambda}{\partial x_\lambda} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_{\mu\nu}, \tag{7}$$

или

$$\sum_\lambda \frac{\partial T_\sigma^\lambda}{\partial x_\lambda} = -\sum_{\mu\nu}\Gamma_{\sigma\nu}^\mu T_\mu^\nu . \tag{7a}$$

Умножим уравнения (6) на $\partial g^{im}/\partial x_\sigma$ и просуммируем по i и по m. Тогда с учетом (7) и соотношения

$$\frac{1}{2}\sum_{im} g_{im}\frac{\partial g^{im}}{\partial x_\sigma} = -\frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = 0,$$

следующего из (3а), мы получаем совместный[3] закон сохранения для материи и гравитационного поля в виде

$$\sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda) = 0, \tag{8}$$

где t_σ^λ («тензор энергии» гравитационного поля) задается равенством

$$\varkappa t_\sigma^\lambda = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda \sum_{\mu\nu\alpha} g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \sum_{\mu\nu\alpha} g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda . \tag{8a}$$

Основания, побудившие меня ввести второй член в правые части уравнений (2а) и (6), впервые выявились из следующих соображений, полностью аналогичных приведенным в только что указанном месте (стр. 785).

Умножим уравнение (6) на g^{im} и просуммируем по индексам i и m. Тогда после простых выкладок получим

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \varkappa(T + t) = 0, \tag{9}$$

где, в соответствии с (5), для краткости мы положили

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} t_{\rho\sigma} = \sum_\sigma t_\sigma^\sigma = t. \tag{8б}$$

---

[3] Относительно вывода см. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 784, 785. Я прошу читателя для сравнения с дальнейшим учесть изложенное там на стр. (Статья 34, стр. 432, 433.— *Ред.*).

Как нетрудно видеть, наш добавочный член приводит к тому, что тензоры энергии гравитационного поля и материи входят в уравнение (9) одинаковым образом, чего нет в уравнении (21) упомянутой работы.

Далее, указанным в цитированной работе путем уравнение (22) той же работы с учетом закона сохранения энергии может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \varkappa\,(T + t)\right] = 0. \tag{10}$$

Наш добавочный член приводит к тому, что эти уравнения не содержат никаких новых условий по сравнению с уравнением (9), так что о тензоре энергии материи не делается никаких предположений, кроме тех, которые соответствуют закону сохранения энергии и импульса.

Тем самым, наконец, завершено построение общей теории относительности как логической схемы. Постулат относительности в его наиболее общей форме, которая лишает пространственно-временные координаты физического смысла, приводит с железной необходимостью к вполне определенной теории тяготения, объясняющей движение перигелия Меркурия. Вместе с тем общая теория относительности не может нам дать о сущности остальных явлений природы ничего, что не было бы уже известно в специальной теории относительности. Мое мнение, высказанное недавно в этой связи, было в этом отношении ошибочным. Каждую физическую теорию, совместимую с частной теорией относительности, можно при помощи абсолютного дифференциального исчисления включить в схему общей теории относительности, причем последняя не дает какого-либо критерия допустимости физической теории.

Поступила 2 декабря 1915 г.

В этой работе впервые появляется правильное уравнение тяготения с тензором $T_{\alpha\beta} - {}^1/_2 g_{\alpha\beta}T$. Введение второго члена освободило, наконец, Эйнштейна от необходимости накладывать на тензор $T_{\alpha\rho}$ условия $T = 0$. Этим завершилось создание общей теории относительности.

38

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Излагаемая здесь теория является наиболее радикальным обобщением общеизвестной в настоящее время «теории относительности»; последнюю в отличие от первой я буду называть «специальной теорией относительности», предполагая, что с нею читатель знаком. Обобщение теории относительности существенно облегчалось благодаря работам математика Минковского, который впервые вскрыл формальное равноправие пространственных координат и временной координаты в специальной теории относительности и использовал это равноправие для построения теории. Необходимый для общей теории относительности вспомогательный математический аппарат уже существовал в форме «абсолютного дифференциального исчисления», основы которого были заложены в исследованиях Гаусса, Римана и Кристоффеля, посвященных неэвклидовым пространствам; это исчисление, приведенное в систему Риччи и Леви-Чивитой, уже применялось для решения задач теоретической физики. В разделе Б настоящей работы изложен весь необходимый нам, но, очевидно, не известный физикам, вспомогательный математический аппарат по возможности самым простым и прозрачным способом, так что для понимания этой работы не требуется изучать математическую литературу. Наконец, хочу поблагодарить здесь своего друга, математика М. Гроссмана, который не только избавил меня от изучения специальной математической литературы, но и поддерживал при поисках уравнений гравитационного поля.

---

* *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* Ann. Phys., 1916, 49, 769—822. (Работа выходила в Германии несколько раз отдельным изданием; в 1929 г. вышло 5-е издание (Barth Verlag). Русский перевод был опубликован в сб. «Принцип относительности». (ГТТИ, 1935).— *Прим. ред.*)

А. ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О ПОСТУЛАТЕ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Замечания к специальной теории относительности

В основе специальной теории относительности лежит следующий постулат, которому удовлетворяет также и механика Галилея — Ньютона. Если координатная система K выбрана так, что физические законы в ней справедливы в своей простейшей форме, то *те же самые* законы справедливы во всякой другой координатной системе K', которая движется равномерно и прямолинейно относительно K. Мы называем этот постулат «специальным принципом относительности». Словом «специальный» подчеркивается то обстоятельство, что этот принцип ограничивается случаем, когда система K' совершает относительно системы K *равномерное и прямолинейное движение*, и что равноценность систем K' и K не распространяется на случай *неравномерного* движения системы K относительно K.

Итак, специальная теория относительности отличается от классической механики не только постулатом относительности, но и в основном постулатом постоянства скорости света в пустоте, из которого при объединении его со специальным принципом относительности известным образом вытекает относительность одновременности, преобразование Лоренца и связанные с последним законы, касающиеся поведения движущихся твердых тел и часов.

Хотя теория пространства и времени и испытала под влиянием специальной теории относительности весьма глубокое изменение, однако *один* важный пункт остался незатронутым. Согласно специальной теории относительности высказывания геометрии имеют значение законов, касающихся возможных относительных положений (покоящихся) твердых тел, а общие положения кинематики — значение законов, описывающих поведение измерительных приборов и часов. При этом двум выбранным материальным точкам покоящегося (твердого) тела всегда соответствует некоторый отрезок вполне определенной длины, независимо как от положения и ориентации тела, так и от времени. Двум отмеченным показаниям стрелки часов, покоящихся относительно некоторой (допустимой) координатной системы, всегда соответствует интервал времени определенной величины, независимо от места и времени. Вскоре мы увидим, что общая теория относительности не может придерживаться этого простого физического толкования пространства и времени.

ANNALEN DER PHYSIK.
VIERTE FOLGE. BAND 49.

1. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie;*
von A. Einstein.

Die im nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als „Relativitätstheorie" bezeichneten Theorie; die letztere nenne ich im folgenden zur Unterscheidung von der ersteren „spezielle Relativitätstheorie" und setze sie als bekannt voraus. Die Verallgemeinerung der Relativitätstheorie wurde sehr erleichtert durch die Gestalt, welche der speziellen Relativitätstheorie durch Minkowski gegeben wurde, welcher Mathematiker zuerst die formale Gleichwertigkeit der räumlichen Koordinaten und der Zeitkoordinate klar erkannte und für den Aufbau der Theorie nutzbar machte. Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem „absoluten Differentialkalkül", welcher auf den Forschungen von Gauss, Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten ruht und von Ricci und Levi-Civita in ein System gebracht und bereits auf Probleme der theoretischen Physik angewendet wurde. Ich habe im Abschnitt B der vorliegenden Abhandlung alle für uns nötigen, bei dem Physiker nicht als bekannt vorauszusetzenden mathematischen Hilfsmittel in möglichst einfacher und durchsichtiger Weise entwickelt, so daß ein Studium mathematischer Literatur für das Verständnis der vorliegenden Abhandlung nicht erforderlich ist. Endlich sei an dieser Stelle dankbar meines Freundes, des Mathematikers Grossmann, gedacht, der mir durch seine Hilfe nicht nur das Studium der einschlägigen mathematischen Literatur ersparte, sondern mich auch beim Suchen nach den Feldgleichungen der Gravitation unterstützte.

Первая страница статьи А. Эйнштейна «Основы общей теории относительности»

§ 2. Об основаниях, которые подсказывают расширение постулата относительности

Классической механике и в неменьшей степени специальной теории относительности присущ некоторый теоретико-познавательный недостаток, который, пожалуй, впервые был ясно отмечен Э. Махом. Мы поясним его на следующем примере. Пусть два жидких тела одинаковой величины и состава свободно парят в пространстве на таком большом расстоянии друг от друга (и от всех прочих масс), что должны приниматься во внимание только те гравитационные силы, с которыми действуют друг на друга части *одного и того же тела*. Пусть расстояние между этими телами остается неизменным. Пусть также не происходит перемещения друг относительно друга частей одного и того же тела. Но пусть каждая масса, рассматриваемая наблюдателем, покоящимся относительно другой массы, вращается вокруг линии, соединяющей массы с постоянной угловой скоростью (это относительное движение обеих масс всегда возможно установить). Теперь представим себе, что поверхности обоих тел (S_1 и S_2) измерены с помощью масштабов (покоящихся относительно этих тел); пусть в результате измерения оказалось, что поверхность S_1 представляет собой сферу, а поверхность S_2 — эллипсоид вращения.

Теперь возникает вопрос: по какой причине тела S_1 и S_2 ведут себя по-разному? Ответ на этот вопрос может быть только тогда признан удовлетворительным[1] с теоретико-познавательной точки зрения, когда обстоятельство, указанное в качестве причины, является *наблюдаемым опытным фактом*; ибо принцип причинности только тогда имеет смысл суждения о явлениях в мире опыта, когда в качестве причин и следствий в конечном итоге оказываются лишь *наблюдаемые факты*.

Механика Ньютона не дает удовлетворительного ответа на этот вопрос. Она говорит следующее. Законы механики справедливы для пространства R_1, относительно которого тело S_1 находится в покое, но несправедливы для пространства R_2, относительно которого находится в покое тело S_2. Однако галилеево пространство R_1 (и движение по отношению к нему), которое при этом вводится, является *фиктивной* причиной, а не наблюдаемым фактом. Таким образом, ясно, что механика Ньютона в рассматриваемом случае удовлетворяет требованию причинности не по существу, но лишь кажущимся образом, возлагая ответственность за наблюдаемое различное поведение тел S_1 и S_2 на фиктивную причину — пространство R_1.

[1] Удовлетворительный с теоретико-познавательной точки зрения ответ может, конечно, еще оказаться физически неверным в том случае, когда он не согласуется с другими опытными данными.

Удовлетворительным ответом на поставленный выше вопрос может быть только следующий: физическая система, состоящая из тел S_1 и S_2, сама по себе не дает возможности указать причину, с помощью которой можно было бы объяснить различное поведение тел S_1 и S_2. Причина должна, следовательно, лежать *вне* этой системы. Отсюда следует вывод, что общие законы движения, которые, в частности, определяют форму тел S_1 и S_2, должны быть таковы, чтобы механические свойства тел S_1 и S_2 в значительной степени обусловливались отдаленными массами, которые мы не включили в рассматриваемую систему. Эти отдаленные массы (и их относительные движения по отношению к рассматриваемым телам) должны тогда рассматриваться как носители принципиально наблюдаемых причин различного поведения рассматриваемых тел S_1 и S_2; они становятся на место фиктивной причины R_1. Из всех мыслимых пространств R_1, R_2 и т. д., движущихся любым образом относительно друг друга, ни одному из них априори не должно отдаваться предпочтение, если только мы хотим устранить указанный теоретико-познавательный недостаток. *Законы физики должны быть составлены так, чтобы они были справедливы для произвольно движущихся координатных систем.* Таким образом мы приходим к расширению постулата относительности.

Кроме этого весьма важного теоретико-познавательного аргумента, в пользу расширения теории относительности говорит еще один хорошо известный физический факт. Пусть K — галилеева координатная система, т. е. такая, относительно которой (по крайней мере, в рассматриваемой четырехмерной области) некоторая масса, достаточно удаленная от других, движется прямолинейно и равномерно. Пусть K' — вторая координатная система, которая относительно K движется *равномерно ускоренно*. Тогда достаточно изолированная от других масса совершает относительно K' ускоренное движение, причем ни ускорение, ни направление этого ускорения не зависят от химического состава и физического состояния этой массы.

Может ли наблюдатель, покоящийся относительно координатной системы K', отсюда заключить, что он находится в «действительно» ускоренной координатной системе? Ответ на этот вопрос должен быть отрицательным, ибо только что указанное поведение масс, свободно движущихся относительно K', может быть столь же хорошо объяснено следующим образом. Координатная система K' не имеет ускорения, но в рассматриваемой пространственно-временной области имеется гравитационное поле, вызывающее ускоренное движение тел относительно системы K'.

Такого рода объяснение становится возможным благодаря тому, что из опыта нам известно о существовании силового поля (а именно: гравитационного поля), обладающего замечательным свойством сообщать всем телам одно и то же ускорение[2]. Механическое поведение тел относительно координатной системы K' будет таким же, какое обнаруживается на опыте по отношению к системам, которые мы привыкли рассматривать как «покоящиеся» или как «законные»; поэтому и с физической точки зрения естественно считать, что обе системы K и K' с одинаковым правом могут рассматриваться как «покоящиеся»; иначе говоря, обе системы равноправны в качестве координатных систем для физического описания процессов.

Из этих соображений видно, что построение общей теории относительности должно одновременно привести и к теории тяготения, ибо гравитационное поле можно «создать» простым изменением координатной системы. Далее, сразу видно, что принцип постоянства скорости света в пустоте должен быть изменен, ибо легко убедиться в том, что траектория луча света относительно системы K' в общем случае должна быть кривой, если свет относительно системы K распространяется прямолинейно и с определенной постоянной скоростью.

§ 3. Пространственно-временной континуум. Требование общей ковариантности уравнений, выражающих общие законы природы

В классической механике, так же как и в специальной теории относительности, пространственные и временные координаты имеют непосредственный физический смысл. Когда мы говорим, что точечное событие имеет координату x_1, то это означает следующее: построенную по правилам эвклидовой геометрии при помощи твердых стержней проекцию точечного события на ось X_1, получают, откладывая определенную линейку — единичный масштаб — x_1 раз от начала координат по (положительной) оси X_1. Когда мы говорим, что точка имеет координату $x_4 = t$, то это означает следующее: по часам (эталону времени), покоящимся относительно координатной системы, пространственно (практически) совпадающим с точечным событием и выверенным по определенным правилам, прошло $x_4 = t$ периодов, когда наступило точечное событие[3].

Такое понимание пространства и времени всегда представлялось взору физиков, хотя быть может большей частью и бессознательно; это ясно видно из той роли, какую играют эти понятия в физических измерениях.

[2] Этвеш экспериментально доказал, что гравитационное поле обладает этим свойством с большой степенью точности.

[3] Мы допускаем возможность констатирования «одновременности» для пространственно смежных событий или, точнее выражаясь, для пространственно-временно́го соприкосновения (совпадения), не давая определения этому фундаментальному понятию.

Такое толкование читатель должен был положить также в основу второго рассуждения последнего параграфа для того, чтобы придать ему некоторый смысл. Однако мы покажем теперь, что это толкование нужно отбросить и заменить более общим, чтобы последовательно провести общий постулат относительности, при условии, что специальная теория относительности сохраняется в предельном случае отсутствия гравитационного поля.

Мы введем в пространстве, свободном от гравитационных полей, галилееву координатную систему $K(x, y, z, t)$ и, кроме того, координатную систему $K'(x', y', z', t')$, которая равномерно вращается относительно K. Пусть начала координат обеих систем, так же как и их оси Z, все время совпадают друг с другом. Покажем, что вышеприведенные определения, касающиеся физического смысла длин и времен, не пригодны для изучения пространства и времени в системе K'. На основании симметрии ясно, что окружность в координатной плоскости XY системы K с центром в начале координат может в то же время рассматриваться как окружность в координатной плоскости $X'Y'$ системы K'. Теперь представим себе, что длина и диаметр этой окружности измерены при помощи единичного масштаба (бесконечно малого по сравнению с радиусом) и затем взято отношение обоих результатов измерения. Если выполнить этот эксперимент с масштабом, покоящимся относительно галилеевой системы K, то в качестве частного получится число π. Результатом измерения, выполненного с масштабом, покоящимся относительно системы K', будет число, большее π. В этом легко убедиться, если судить о процессе измерения из «покоящейся» системы K и принять во внимание, что масштаб, приложенный по касательной к окружности, претерпевает лоренцово сокращение, а радиально приложенный масштаб не изменяется. Поэтому относительно системы K' оказывается несправедливой геометрия Эвклида; выше установленное представление о координатах, которое предполагает применимость эвклидовой геометрии, оказывается непригодным в системе K'. Столь же невозможным оказывается введение в K' удовлетворяющего физическим требованиям времени, которое показывали бы одинаковые часы, покоящиеся относительно K'. Чтобы в этом убедиться, представим себе, что в начале координат и где-нибудь на окружности установлено двое одинаковых часов, наблюдаемых из «покоящейся» системы K. Согласно известному выводу специальной теории относительности, наблюдение по часам в системе K дает, что часы, установленные на окружности, идут медленнее часов, помещенных в начале координат, поскольку первые движутся, а последние нет. Наблюдатель, который находится в общем начале координат и который способен, пользуясь светом, наблюдать часы, находящиеся на окружности, обнаружит тогда, что часы, установленные на окружности, идут медленнее, чем часы, установленные рядом с ним. Так как наблюдатель не решится считать скорость света на пройденном светом пути явной функцией времени, то он объяснит свое наблюдение тем, что часы на окружности «действительно» идут медленнее часов, установленных в начале координат. Таким образом, он будет вынужден дать времени такое определение, которое указывало бы, что скорость хода часов зависит от места.

Итак, мы приходим к следующему выводу: в общей теории относительности пространственные и временные величины не могут быть определены так, чтобы разности пространственных координат могли быть измерены непосредственно единичным масштабом, а разности временных — посредством стандартных часов.

Итак, прежний способ, заключавшийся в определенном построении системы координат в пространственно-временно́м континууме, оказывается неприменимым; представляется, что не существует пути, который позволил бы приспособить к четырехмерному миру такие координатные системы, чтобы с помощью их можно было бы ожидать особенно простой формулировки законов природы. Поэтому не остается ничего другого, как признать все мыслимые[4] координатные системы принципиально равноправными для описания природы. Это равносильно требованию:

Общие законы природы должны быть выражены через уравнения, справедливые во всех координатных системах, т. е. эти уравнения должны быть ковариантными относительно любых подстановок (общековариантными).

Ясно, что физика, удовлетворяющая этому постулату, удовлетворит и общему постулату относительности. Ибо в совокупности *всех* подстановок во всяком случае есть те подстановки, которые соответствуют всем относительным движениям (трехмерных) координатных систем. То, что это требование общей ковариантности, отнимающее у пространства и времени последний остаток физической предметности, является естественным, видно из следующего соображения. Все наши пространственно-временны́е констатации всегда сводятся к установлению пространственно-временны́х совпадений. Если бы, например, события состояли только в движении материальных точек, то в конце концов наблюдались бы только встречи двух или нескольких таких точек. Результаты наших измерений также являются не чем иным, как констатацией подобных встреч между материальными точками наших масштабов с другими материальными точками, и соответственно совпадений между часовыми стрелками, точками циферблата и рассматриваемыми точечными событиями, происходящими в том же месте и в то же время.

Введение координатной системы служит только для более простого описания совокупности совпадений. Четыре пространственно-временны́е

---

[4] Мы не будем здесь касаться некоторых ограничений, вытекающих из требования однозначности и непрерывности.

переменные x_1, x_2, x_3, x_4 сопоставляются с миром таким образом, чтобы каждому точечному событию соответствовала некоторая система значений переменных x_1, ..., x_4. Двум совпадающим точечным событиям соответствует одна и та же система значений переменных x_1, ..., x_4, т. е. совпадение характеризуется равенством координат. Если ввести вместо переменных x_1 ,..., x_4 любые четыре функции от x_1', ... x_4' как новую координатную систему так, чтобы эти системы значений однозначно соответствовали друг другу, то равенство соответствующих координат в новой системе тоже является выражением пространственно-временнóго совпадения двух точечных событий. Так как все наши физические опытные данные можно в конце концов свести к таким совпадениям, то заранее нет никакого основания отдавать предпочтение какой-либо одной координатной системе перед другими, т. е. мы приходим к требованию общей ковариантности.

§ 4. Связь четырех координат с результатами пространственных и временных измерений. Аналитическое выражение для гравитационного поля

В настоящей статье я не старался представить общую теорию относительности в виде наиболее простой логической системы при минимуме аксиом. Моя главная цель — изложить эту теорию так, чтобы читатель ощутил психологическую естественность выбранного пути и чтобы предпосылки, положенные в ее основу, представлялись бы как можно лучше согласованными с опытом. В этом смысле введем теперь следующую предпосылку.

Для бесконечно малых четырехмерных областей при подходящем выборе системы координат справедлива теория относительности в более узком смысле.

Ускоренное движение бесконечно малой («местной») координатной системы должно быть при этом выбрано так, чтобы отсутствовало гравитационное поле; для бесконечно малой области это возможно. Пусть X_1, X_2, X_3 — пространственные координаты; X_4 — координата времени, измеренная надлежащим масштабом[5]. Если представить себе, что дана твердая линейка небольших размеров в качестве единичного масштаба, то эти координаты при данной ориентации координатной системы имеют непосредственный физический смысл в рамках специальной теории относительности. В этом случае выражение

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{1}$$

[5] Единицу времени следует выбрать так, чтобы скорость света в пустоте, измеренная в «местной» координатной системе, равнялась единице.

имеет в специальной теории относительности некоторое численное значение, независимое от ориентации местной координатной системы и определяемое путем пространственно-временно́го измерения. Назовем величину ds линейным элементом, принадлежащим двум бесконечно близким друг к другу точкам четырехмерного пространства. Если величина ds^2, соответствующая элементу $(dX_1, \ldots, dX_4)$, положительна, то мы вместе с Минковским будем называть последний временноподобным, в противном случае — пространственноподобным.

Рассмотренному линейному элементу, или, соответственно, обоим бесконечно близким точечным событиям, соответствуют также дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_4$ четырехмерных координат некоторой выбранной системы. Если для рассматриваемого места выбрана такая система координат и «местная» система вышеуказанного типа, то величины dX_ν можно представить в виде некоторых выражений, линейных и однородных относительно dx_σ:

$$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} dx_\sigma. \tag{2}$$

Подставив эти выражения в равенство (1), получим

$$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau, \tag{3}$$

где величины $g_{\sigma\tau}$ — функции x_σ, которые уже не могут более зависеть от ориентации и состояния движения «местной» координатной системы, поскольку ds^2 является величиной, определенной независимо от того или иного выбора системы координат, относящейся к бесконечно близким в пространстве и во времени точечным событиям и получаемой посредством измерения, выполненного с масштабом и часами. При этом величины $g_{\sigma\tau}$ должны быть выбраны так, чтобы $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$; суммирование должно быть распространено на все значения σ и τ, так что сумма состоит из 4×4 слагаемых, из которых 12 попарно равны.

Обычная теория относительности получается как частный случай из рассмотренного здесь, когда в силу особого поведения $g_{\sigma\tau}$ в некоторой конечной области оказывается возможным выбрать в ней координатную систему так, чтобы $g_{\sigma\tau}$ приняли постоянные значения:

$$\left.\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Мы увидим ниже, что выбор таких координат для конечных областей в общем случае невозможен.

Из рассуждений § 2 и 3 следует, что величины $g_{\sigma\tau}$ с физической точки зрения должны рассматриваться как величины, описывающие гравитационное поле относительно выбранной системы координат. В самом деле, допустим сначала, что специальная теория относительности справедлива для определенной рассматриваемой четырехмерной области при подходящем выборе системы координат. Тогда величины $g_{\sigma\tau}$ имеют указанные в (4) значения. В этом случае свободная материальная точка движется относительно этой системы прямолинейно и равномерно. Если теперь ввести путем произвольного преобразования новые пространственно-временные координаты $x_1, \ldots, x_4$, то в этой новой системе величины $g_{\sigma\tau}$ будут уже не постоянными, но функциями пространственно-временных координат. В то же время движение свободной материальной точки в новой системе окажется криволинейным и неравномерным, причем закон движения не будет зависеть от природы движущейся материальной точки. Поэтому мы будем истолковывать это движение как движение, происходящее под влиянием гравитационного поля. Мы видим, что появление гравитационного поля связано с зависимостью $g_{\mu\nu}$ от пространственно-временных координат. Но и в общем случае, когда мы не сможем соответствующим выбором координат сделать специальную теорию относительности применимой в конечной области пространства, мы сохраним представление о том, что величины $g_{\sigma\tau}$ описывают гравитационные поля.

Таким образом, согласно общей теории относительности, гравитационные силы играют исключительную роль по сравнению с остальными силами, особенно, электромагнитными; 10 функций $g_{\sigma\tau}$, представляющих гравитационное поле, определяют в то же время метрические свойства четырехмерного пространства.

Б. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ВЫВОДА ОБЩЕКОВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Показав выше, что общий постулат относительности приводит к требованию ковариантности систем уравнений физики по отношению к любым преобразованиям координат $x_1, \ldots, x_4$, мы должны теперь подумать над тем, как можно получить подобные общековариантные уравнения. Обратимся теперь к этой чисто математической задаче; при этом выяснится, что заданный равенством (3) инвариант ds, названный нами в соответствии с гауссовской теорией поверхностей «линейным элементом», играет основную роль при решении этой задачи.

Основная мысль этой общей теории ковариантных величин заключается в следующем. Пусть некоторые объекты («тензоры») определены относительно координатной системы посредством некоторого числа пространственных функций, которые называются «компонентами» тензора. Тогда имеются определенные правила, по которым эти компоненты вычисляются для новой координатной системы, если они известны для первоначальной системы и если известно преобразование, связывающее обе системы. Эти объекты, названные ниже тензорами, характеризуются еще и тем, что уравнения преобразования для их компонент линейны и однородны. Поэтому все компоненты в новой системе обращаются в нуль, если они все равны нулю в первоначальной системе. В соответствии с этим, если какой-нибудь закон природы формулируется как равенство нулю всех компонент некоторого тензора, то он общековариантен; исследуя законы образования тензоров, мы тем самым получаем средство для установления общековариантных законов.

§ 5. Контравариантный и ковариантный четырехмерный вектор

Контравариантный четырехмерный вектор (4-вектор). Линейный элемент определяется с помощью четырех «компонент» dx_ν, закон преобразования которых имеет вид:

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu. \tag{5}$$

Величины dx'_σ выражаются линейно и однородно через dx_ν; поэтому мы можем рассматривать эти дифференциалы координат как компоненты «тензора», которому дадим специальное название контравариантного 4-вектора. Каждый объект, определяемый по отношению к координатной системе посредством четырех величин A^ν, которые преобразуются по тому же закону

$$A^{\sigma'} = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu, \tag{5a}$$

мы также называем контравариантным 4-вектором. Из соотношения (5a) непосредственно следует, что суммы $(A^\sigma \pm B^\sigma)$ будут компонентами 4-вектора, если A^σ и B^σ в отдельности являются таковыми. Аналогичное положение возникает для всех систем, введенных ниже в качестве «тензоров» (правило сложения и вычитания тензоров).

Ковариантный четырехмерный вектор. Мы называем четыре величины A_ν компонентами ковариантного 4-вектора, если для любого произвольно выбранного контравариантного 4-вектора B_ν:

$$\sum_\nu A_\nu B^\nu = \text{инвариант}. \tag{6}$$

Из этого определения следует закон преобразования ковариантного 4-вектора. Заменив в правой части равенства

$$\sum_{\sigma} A'_{\sigma} B^{\sigma'} = \sum_{\nu} A_{\nu} B^{\nu}$$

величину B^{ν} выражением

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} B^{\sigma'},$$

полученным из равенства (5а), найдем

$$\sum_{\sigma} B^{\sigma'} \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu} = \sum_{\sigma} B^{\sigma'} A'_{\sigma}.$$

Но отсюда, в силу того, что в этом равенстве каждый из 4-векторов $B^{\sigma'}$ может быть выбран произвольно и независимо от других, следует закон преобразования

$$A'_{\sigma} = \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu}. \tag{7}$$

Замечание об упрощении записи выражений. Рассматривая уравнения этого параграфа, мы сразу видим, что суммирование всегда производится по тем и *только* по тем значкам, которые дважды появляются под знаком суммы [например, значок ν в правой части равенства (5)]. Поэтому можно без ущерба для ясности отбросить знак суммы. Для этого мы введем следующее правило: если член некоторого выражения содержит какой-нибудь индекс дважды, то по этому значку должно быть произведено суммирование, если только специально не оговорено противное.

Различие между ковариантным и контравариантным 4-векторами заключается в законе преобразования [соотношения (7) и (5)]. Обе величины представляют собой тензоры в том смысле, в каком о них говорилось выше. Следуя Риччи и Леви-Чивите, будем отмечать контравариантный характер, помещая значок вверх, а ковариантный — вниз.

§ 6. Тензоры второго и более высоких рангов

Контравариантный тензор. Если мы составим все 16 произведений $A^{\mu\nu}$ компонент A^{μ} и B^{ν} двух контравариантных 4-векторов

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu}, \tag{8}$$

то, в силу соотношений (8) и (5а), компоненты $A^{\mu\nu}$ удовлетворяют закону преобразования

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu}. \tag{9}$$

Мы называем объект, который по отношению ко всякой координатной системе описывается посредством 16 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (9), контравариантным тензором второго ранга. Не все тензоры этого рода можно составить по формуле (8) из двух 4-векторов. Но легко доказать, что 16 произвольно заданных компонент $A^{\mu\nu}$ можно представить в виде суммы четырех слагаемых типа $A^\mu B^\nu$, составленных из компонент четырех пар надлежащим образом выбранных четырехмерных векторов. Поэтому почти все положения, справедливые для тензора второго ранга, определенного соотношением (9), можно проверить, доказывая их для специальных тензоров типа (8).

Контравариантный тензор любого ранга. Очевидно, что по аналогии с (8) и (9) можно определить также контравариантные тензоры третьего и высших рангов с 4^3 и т. д. компонентами. Из соотношений (8) и (9) вытекает также, что в этом смысле можно рассматривать контравариантный 4-вектор как контравариантный тензор первого ранга.

Ковариантный тензор. Если, с другой стороны, составить 16 произведений $A_{\mu\nu}$ из компонент двух *ковариантных* 4-векторов A_μ и B_ν

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu, \tag{10}$$

то для них справедлив закон преобразования

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} \cdot A_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Этим законом преобразования дается определение ковариантного тензора второго ранга. Все замечания, которые прежде были сделаны по поводу контравариантных тензоров, остаются в силе и для ковариантных тензоров.

Замечание. Скаляр (инвариант) удобно рассматривать как контравариантный или как ковариантный тензор нулевого ранга.

Смешанный тензор. Можно также составить тензор второго ранга типа

$$A_\mu^\nu = A_\mu B^\nu, \tag{12}$$

который ковариантен относительно индекса μ и контравариантен относительно индекса ν. Его закон преобразования имеет вид

$$A_\sigma^{\tau'} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} \cdot A_\alpha^\beta. \tag{13}$$

Имеются, конечно, смешанные тензоры с произвольным числом индексов ковариантного и произвольным числом индексов контравариантного характера. Ковариантный и контравариантный тензоры можно рассматривать как частные случаи смешанного тензора.

Симметричные тензоры. Контравариантный (или ковариантный) тензор второго или высшего ранга называется *симметричным*, если две компоненты, получающиеся друг из друга путем перестановки каких-нибудь двух значков, равны между собою. Тензор $A^{\mu\nu}$ (или $A_{\mu\nu}$) симметричен, если для любой комбинации значков имеем

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}, \tag{14}$$

или

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \tag{14a}$$

Докажем, что определенная таким образом симметрия представляет собой свойство, не зависящее от системы координат. В самом деле, на основании равенств (14) из (9) следует

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\tau'}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} = \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\tau'}{\partial x_\nu} A^{\nu\mu} = \frac{\partial x_\tau'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} = A^{\tau\sigma'}.$$

Предпоследнее из этих равенств основывается на перестановке значков суммирования μ и ν (т. е. на простом изменении способа обозначения).

Антисимметричные тензоры. Контравариантный или ковариантный тензор второго, третьего или четвертого ранга называется антисимметричным, если две компоненты, получающиеся друг из друга путем перестановки каких-нибудь двух значков, *равны по величине и противоположны по знаку*. Следовательно, тензор $A^{\mu\nu}$ (или $A_{\mu\nu}$) антисимметричен, если

$$A^{\mu\nu} = - A^{\nu\mu} \tag{15}$$

или

$$A_{\mu\nu} = - A_{\nu\mu}. \tag{15a}$$

Из 16 компонент $A^{\mu\nu}$ четыре компоненты $A^{\mu\mu}$ равны нулю; остальные компоненты попарно равны по величине и имеют противоположные знаки, так что имеются только 6 численно отличных компонент (6-вектор). Таким же образом можно убедиться в том, что антисимметричный тензор $A^{\mu\nu\sigma}$ (третьего ранга) имеет только четыре численно различных компоненты, антисимметричный тензор $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ — только одну. В четырехмерном континууме нет антисимметричных тензоров выше четвертого ранга.

§ 7. Умножение тензоров

Внешнее умножение тензоров. Из компонент двух тензоров рангов z и z' получаются компоненты тензора ранга $z + z'$, если все компоненты первого тензора попарно перемножить со всеми компонентами второго тензора. Так, например, из различного типа тензоров A и B получаются тензоры T:

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu} B_\sigma,$$

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta},$$

$$T_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = A_{\alpha\beta} B^{\gamma\delta}.$$

Доказательство тензорного характера T следует непосредственно из соотношений (8), (10), (12) или из формул преобразования (9), (11), (13). Равенства (8), (10), (12) сами служат примерами внешнего умножения (тензоров первого ранга).

«Свертывание» [6] *смешанного тензора.* Из каждого смешанного тензора можно образовать тензор, ранг которого на две единицы меньше, если один значок ковариантного характера приравнять одному значку контравариантного характера и по этому значку произвести суммирование («свертывание»). Таким образом, например, из смешанного тензора четвертого ранга $A_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ получают смешанный тензор второго ранга:

$$A_\beta^\delta = A_{\alpha\beta}^{\alpha\delta} \left(= \sum_\alpha A_{\alpha\beta}^{\alpha\delta} \right),$$

и из него повторным свертыванием получают тензор нулевого ранга:

$$A = A_\beta^\beta = A_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}.$$

Доказательство того, что результат свертки действительно обладает тензорным характером, следует из обобщения представления тензоров (12) вместе с соотношением (6) или из обобщения соотношения (13).

Внутреннее и смешанное умножение тензоров. Оно заключается в комбинации внешнего умножения со сверткой.

П р и м е р ы. Из ковариантного тензора второго ранга $A_{\mu\nu}$ и контравариантного тензора первого ранга B^σ образуем посредством внешнего умножения смешанный тензор

$$D_{\mu\nu}^\sigma = A_{\mu\nu} B^\sigma.$$

---

[6] В переводе употребляется современный термин «свертка». Эйнштейн писал «komposition» или «Verjüngung».— *Прим. ред.*

В результате свертки по индексам ν и σ возникает ковариантный четырехмерный вектор

$$D_{\mu} = D^{\nu}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}B^{\nu}.$$

Этот вектор будем называть внутренним произведением тензоров $A_{\mu\nu}$ и B^{σ}. Аналогичным образом из тензоров $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ посредством внешнего умножения и двукратной свертки можно образовать внутреннее произведение $A_{\mu\nu}\,B^{\mu\nu}$. Образовав внешнее произведение из $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ и выполнив свертку, получим смешанный тензор второго ранга $D^{\tau}_{\mu} = A_{\mu\nu}B^{\nu\tau}$. Эту операцию удобно назвать смешанной, ибо она является внешней по отношению к значкам μ и τ и внутренней по отношению к значкам ν и σ.

Теперь докажем утверждение, которое часто используется при установлении тензорного характера. На основании только что изложенного, $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ есть скаляр, если $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ тензоры. Но утверждается также, что если $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ для *произвольного тензора* $B^{\mu\nu}$ есть инвариант, то $A_{\mu\nu}$ имеет тензорный характер.

Доказательство. По предположению, при любом преобразовании координат должно быть

$$A'_{\sigma\tau}\,B^{\sigma\tau\,'} = A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}.$$

Но в результате обращения соотношения (9) имеем

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \cdot \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}\, B^{\sigma\tau\,'}.$$

Подставляя это выражение для $B^{\mu\nu}$ в верхнее соотношение, получаем:

$$\left(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \cdot \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}\, A_{\mu\nu}\right) B^{\sigma\tau\,'} = 0.$$

При любом выборе $B^{\sigma\tau\,'}$ это соотношение может выполняться только тогда, когда выражение в скобке равно нулю, откуда, в силу соотношения (11), и следует наше утверждение.

Эта теорема верна в соответствующей форме для тензоров любого ранга и типа; доказательство всегда проводится аналогичным путем.

Указанное утверждение можно также доказать и в такой форме: если B^{μ} и C^{ν} — произвольные векторы и если при любом их выборе внутреннее произведение

$$A_{\mu\nu}B^{\mu}C^{\nu}$$

является скаляром, то $A_{\mu\nu}$ есть ковариантный тензор. Последнее положение справедливо еще и в том более частном случае, когда утверждается лишь то, что при любом выборе 4-вектора B^{μ} скалярное произведение $A_{\mu\nu}B^{\mu}B^{\nu}$ является скаляром, и если, кроме того, еще известно, что $A_{\mu\nu}$ удовлетворяет условию симметрии $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. В самом деле, следуя вышеуказанным путем, сначала доказывают тензорный характер величины $(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$, откуда на основании свойства симметрии непосредственно следует тензорный характер $A_{\mu\nu}$. Это утверждение легко обобщить и на случай ковариантных и контравариантных тензоров любого ранга.

Наконец, из доказанного следует утверждение, которое также можно обобщить на любые тензоры: если величины $A_{\mu\nu}B^{\nu}$ при любом выборе 4-вектора B^{ν} образуют тензор первого ранга, то $A_{\mu\nu}$ представляет собой тензор второго ранга. В самом деле, если C^{μ} — произвольный 4-вектор, то, в силу тензорного характера $A_{\mu\nu}B^{\nu}$, внутреннее произведение $A_{\mu\nu}C^{\mu}B^{\nu}$ при любом выборе обоих 4-векторов C^{μ} и B^{ν} является скаляром, откуда и следует наше утверждение.

§ 8. Некоторые свойства фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$

Ковариантный фундаментальный тензор. В инвариантном выражении квадрата линейного элемента

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu}$$

величина dx_{μ} играет роль произвольного контравариантного вектора. Так как, кроме того, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, то на основании сказанного в последнем параграфе заключаем, что $g_{\mu\nu}$ есть ковариантный тензор второго ранга. Мы назовем его «фундаментальным тензором». Ниже мы выведем некоторые свойства этого тензора, которыми, правда, обладает каждый тензор второго ранга, но особый физический смысл фундаментального тензора в нашей теории, связанный с гравитационным действием, делает доказанные выше соотношения особенно интересными в приложении к фундаментальному тензору.

Контравариантный фундаментальный тензор. Если взять миноры, соответствующие элементам $g_{\mu\nu}$ в определителе, составленном из $g_{\mu\nu}$, и разделить каждый из них на определитель $g = |g_{\mu\nu}|$, то получаются некоторые величины $g^{\mu\nu}$ $(= g^{\nu\mu})$, относительно которых мы докажем, что они составляют контравариантный тензор.

На основании известной теоремы из теории определителей имеем

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\nu}, \tag{16}$$

где δ_μ^ν равен 1, если $\mu = \nu$, и 0, если $\mu \neq \nu$. Вместо приведенного выражения для ds^2 можно также написать

$$g_{\mu\sigma}\delta_\nu^\sigma\, dx_\mu dx_\nu,$$

или в силу равенства (16)

$$g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}g^{\sigma\tau}dx_\mu dx_\nu.$$

Но, согласно правилам умножения, изложенным в предыдущем параграфе, величины

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma}dx_\mu$$

образуют ковариантный 4-вектор и притом (в силу возможности произвольного выбора dx_μ) произвольно выбранный 4-вектор. Подставив его в наше выражение, получим

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}d\xi_\sigma d\xi_\tau.$$

Так как это выражение при любом выборе вектора $d\xi_\sigma$ является скаляром и $g^{\sigma\tau}$, по определению, симметричен по индексам σ и τ, то на основании результатов предыдущего параграфа заключаем, что $g^{\sigma\tau}$ представляет собой контравариантный тензор. Из (16) следует еще, что δ_μ^ν есть тоже тензор, который можно назвать смешанным фундаментальным тензором.

Определитель фундаментального тензора. Согласно правилу умножения определителей, имеем

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}|\,|g^{\alpha\nu}|.$$

С другой стороны,

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |\delta_\mu^\nu| = 1.$$

Отсюда следует

$$|g_{\mu\nu}|\,|g^{\mu\nu}| = 1. \tag{17}$$

Инвариантный объем. Сначала найдем закон преобразования определителя $g = |g_{\mu\nu}|$. В силу соотношения (11) имеем

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} g_{\mu\nu} \right|.$$

Отсюда, после двукратного применения правила умножения определителей, следует

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma}\right| |g_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|^2 g,$$

или

$$\sqrt{g'} = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \sqrt{g}.$$

С другой стороны, закон преобразования элемента объема

$$d\tau' = \int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

по известной теореме Якоби имеет вид:

$$d\tau' = \left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| d\tau.$$

Перемножая последние равенства, получаем

$$\sqrt{g'}\, d\tau' = \sqrt{g}\, d\tau. \tag{18}$$

В дальнейшем вместо $\sqrt{g}$ вводится величина $\sqrt{-g}$, которая вследствие гиперболического характера пространственно-временно́го континуума всегда имеет вещественное значение. Инвариант $\sqrt{-g}\, d\tau$ равен величине элемента четырехмерного объема, измеренного в «местной координатной системе» посредством твердых масштабов и часов по принципам специальной теории относительности.

Замечание о характере пространственно-временно́го континуума. Наша предпосылка о справедливости в бесконечно малом специальной теории относительности приводит к тому, что ds^2 всегда можно выразить с помощью (1) через вещественные величины dX_1, ..., dX_4. Обозначив через $d\tau_0$ «естественный» элемент объема $dX_1 dX_2 dX_3 dX_4$, получим

$$d\tau_0 = \sqrt{-g} \cdot d\tau. \tag{18a}$$

Если окажется, что в каком-нибудь месте четырехмерного континуума $\sqrt{-g}$ обращается в нуль, то это будет означать, что в этом месте конечному координатному объему соответствует бесконечно малый «естественный» объем. Будем считать, что этого нигде нет. В таком случае g не может менять свой знак; мы примем, в соответствии со специальной теорией относительности, что g всегда имеет конечное и отрицательное значение. Это допущение является некоторой гипотезой о физической природе рассматриваемого континуума и в то же время правилом, касающимся выбора системы координат.

Но если $-g$ положительно и конечно, то естественно возникает мысль, что теперь следует выбрать координаты так, чтобы эта величина стала равной 1. Позже мы увидим, что посредством такого ограничения выбора системы координат может быть достигнуто значительное упрощение законов природы. В этом случае вместо равенства (18) имеем

$$d\tau' = d\tau,$$

откуда, приняв во внимание теорему Якоби, следует, что

$$\left|\frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\mu}\right| = 1. \tag{19}$$

Таким образом, при подобном выборе координатных систем допустимы преобразования координат только с определителем 1.

Но было бы ошибкой думать, что этот прием означает частичный отказ от общего принципа относительности. Мы не спрашиваем: «каковы будут законы природы, ковариантные по отношению ко всем преобразованиям с определителем 1?» Но мы задаем вопрос: «каковы будут *общековариантные* законы природы?» Лишь после того, как эти законы установлены, мы упрощаем их выражение посредством особого выбора координатной системы.

Образование новых тензоров с помощью фундаментального тензора. Путем внутреннего, внешнего и смешанного умножения какого-нибудь тензора на фундаментальный тензор возникают тензоры другого характера и ранга.

Примеры:

$$A^\mu = g^{\mu\sigma} A_\sigma,$$

$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}.$$

Особо отметим следующие комбинации:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta},$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta}$$

(«дополнения» к ковариантному и, соответственно, контравариантному тензору) и

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\ .$$

Мы называем $B_{\mu\nu}$ редуцированным по отношению к $A_{\mu\nu}$ тензором. Аналогично имеем

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}.$$

Заметим, что $g^{\mu\nu}$ — не что иное, как «дополнение» по отношению к $g_{\mu\nu}$, ибо

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta_\alpha^\nu = g^{\mu\nu}.$$

§ 9. Уравнение геодезической (уравнение движения точки)

Так как «линейный элемент» ds является величиной, определенной независимо от координатной системы, то и для линии, проведенной между двумя точками P_1 и P_2 четырехмерного континуума, величина $\int ds$ принимает экстремальное значение (геодезическая), независимое от выбора координат. Ее уравнение имеет вид

$$\delta\left\{\int\limits_{P_1}^{P_2} ds\right\} = 0. \tag{20}$$

Отсюда, выполняя вариацию, находят известным образом четыре обыкновенных дифференциальных уравнения, которые и определяют эту геодезическую линию. Ради полноты изложения мы приведем здесь этот вывод. Пусть λ — некоторая функция координат x_ν; эта функция определяет семейство поверхностей, пересекающих искомую геодезическую линию, равно как и все другие бесконечно близкие к ней кривые, проведенные через точки P_1 и P_2. В таком случае каждую из этих кривых можно себе представить заданной своими координатами x_ν, выраженными через λ. Пусть символ δ соответствует переходу из какой-нибудь точки искомой геодезической линии в ту точку соседней кривой, которой соответствует то же значение λ. В таком случае уравнение (20) можно заменить на

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w\, d\lambda = 0, \\ &w^2 = g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

Так как

$$\delta w = \frac{1}{w}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}\delta x_\sigma + g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right)\right\},$$

и

$$\delta\left(\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right) = \frac{d\delta x_\nu}{d\lambda},$$

то после подстановки этих значений в (20a) и интегрирования по частям получаем

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, \varkappa_\sigma \delta x_\sigma = 0, \\ &\varkappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{g_{\mu\sigma}}{w}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\right\} - \frac{1}{2w}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{20б}$$

Отсюда, вследствие произвольности выбора δx_σ, следует, что $\varkappa_\sigma$ равно нулю. Таким образом,

$$\varkappa_\sigma = 0 \tag{20в}$$

представляют собой уравнения геодезической линии. Если на рассматриваемой геодезической линии $ds \neq 0$, то в качестве параметра λ можно выбрать «длину дуги» s, измеренную вдоль геодезической линии. Тогда $w = 1$ и вместо (20в) получаем

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\sigma}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} = 0,$$

или, изменяя обозначения,

$$g_{\alpha\sigma} \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0, \tag{20г}$$

где, согласно Кристоффелю, мы положили

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right). \tag{21}$$

Наконец, умножив уравнение (20г) на $g^{\sigma\tau}$ (внешнее умножение относительно τ и внутреннее — относительно σ), получим уравнение геодезической линии в окончательном виде:

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0. \tag{22}$$

При этом, согласно Кристоффелю, введено обозначение

$$\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} = g^{\tau\alpha} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{23}$$

§ 10. Образование тензоров посредством дифференцирования

Используя уравнение геодезической линии, можно теперь легко вывести правила, по которым из тензоров путем дифференцирования могут быть образованы новые тензоры. Эти правила позволяют получить общековариантные дифференциальные уравнения. Мы достигаем этой цели повторным применением следующих простых операций.

Если в нашем континууме дана кривая, точки которой характеризуются длиной дуги s, отсчитываемой от некоторой определенной точки на кривой, и если далее φ — инвариантная функция координат, то и $\frac{d\varphi}{ds}$ является инвариантом. Доказательство заключается в том, что как $d\varphi$, так и ds представляют собой инварианты.

Так как

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds},$$

то и

$$\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

будет инвариантом и притом для всех кривых, которые выходят из одной точки континуума, т. е. для любого вектора dx_μ. Отсюда следует, что

$$A_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

есть ковариантный четырехмерный вектор (grad φ).

Согласно нашему правилу, инвариантом будет также и производная, взятая вдоль кривой:

$$\chi = \frac{d\psi}{ds}.$$

Подставляя значение ψ, получаем сначала

$$\chi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{d^2 x_\mu}{ds^2}.$$

Отсюда пока еще нельзя заключить о существовании какого-либо тензора. Но если мы теперь будем считать, что кривая, вдоль которой мы дифференцировали, является геодезической то, заменяя $\frac{d^2x_\nu}{ds^2}$ его выражением из формулы (22), получаем

$$\chi = \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,dx_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{dx_\tau}\right\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Из возможности изменения порядка дифференцирования по μ и ν, а также из симметрии, в силу (23) и (21), символа $\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}$ относительно μ и ν, следует, что выражение, стоящее в фигурных скобках, тоже симметрично относительно тех же индексов. Так как из любой точки континуума можно провести геодезическую линию в любом направлении, и, следовательно, $\frac{dx_\mu}{ds}$ представляет собой 4-вектор с компонентами, соотношения между которыми могут быть произвольными, то на основании выводов § 7 следует, что

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau} \qquad (25)$$

есть ковариантный тензор второго ранга. Таким образом, из ковариантного тензора первого ранга

$$A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu},$$

можно посредством дифференцирования образовать ковариантный тензор второго ранга

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}A_\tau. \qquad (26)$$

Назовем тензор $A_{\mu\nu}$ ковариантной производной [7] тензора A_μ. Прежде всего можно легко показать, что этот способ построения приводит к тензору даже в том случае, когда A_μ нельзя представить в виде градиента. Для того чтобы убедиться в этом, мы предварительно заметим, что

$$\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

представляет собой ковариантный 4-вектор, если ψ и φ — скаляры. То же самое справедливо в отношении суммы, состоящей из четырех таких членов:

$$S_\mu=\psi^{(1)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x_\mu}+\ldots+\psi^{(4)}\frac{\partial\varphi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

если $\psi^{(1)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \psi^{(4)}, \varphi^{(4)}$— скаляры. Но ясно, что каждый ковариантный 4-вектор может быть представлен в виде S_μ. Если A_μ является 4-вектором, компоненты которого представляют собой произвольно заданные функции от x_ν, то достаточно положить (относительно выбранной координатной системы)

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}&=A_1 & \varphi^{(1)}&=x_1,\\ \psi^{(2)}&=A_2, & \varphi^{(2)}&=x_2,\\ \psi^{(3)}&=A_3, & \varphi^{(3)}&=x_3,\\ \psi^{(4)}&=A_4, & \varphi^{(4)}&=x_4\end{aligned}$$

для того, чтобы S_μ стало равным A_μ.

---

[7] В переводе введен современный термин вместо используемого Эйнштейном термина «расширение».— *Прим. ред.*

Поэтому, для доказательства того, что $A_{\mu\nu}$ будет тензором, если в правую часть равенства (26) подставить вместо A_μ произвольный ковариантный 4-вектор, достаточно только показать, что это справедливо по отношению 4-вектора S_μ. Но из правой части равенства (26) сразу видно, что достаточно провести доказательство для случая

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

Правая часть равенства (25), умноженная на ψ, т. е.

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau},$$

имеет тензорный характер. Точно так же

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

есть тензор (внешнее произведение двух 4-векторов). Складывая, мы видим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}\right)$$

имеет тензорный характер. Тем самым дано, как видно из равенства (26), требуемое доказательство для 4-вектора

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

и, следовательно, по доказанному выше, для любого 4-вектора A_μ.

Пользуясь ковариантной производной 4-вектора, нетрудно дать определение ковариантной производной ковариантного тензора любого ранга; это определение представляет собой обобщение ковариантной производной 4-вектора. Мы ограничимся получением ковариантной производной тензора второго ранга, так как этого достаточно, чтобы составить себе отчетливое представление об этой операции.

Как уже указывалось выше, каждый ковариантный тензор второго ранга может быть представлен [8] в виде суммы тензоров типа $A_\mu B_\nu$.

---

[8] Посредством внешнего умножения векторов с (любыми) компонентами A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} и, соответственно, с компонентами 1, 0, 0, 0 получается тензор с компонентами

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Складывая четыре тензора этого рода, получаем тензор $A_{\mu\nu}$ с любыми наперед заданными компонентами.

Поэтому вполне достаточно ограничиться выводом формулы ковариантной производной для такого специального тензора. Выражения

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\mu \\ \tau \end{Bmatrix} A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\nu \\ \tau \end{Bmatrix} B_\tau$$

имеют, в силу (26), тензорный характер. Посредством внешнего умножения первого выражения на B_ν и второго на A_μ получаем по одному тензору третьего ранга; сумма полученных тензоров

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\mu \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\tau\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma\nu \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\mu\tau} \tag{27}$$

представляет собой тоже тензор третьего ранга, причем мы положили $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. Так как правая часть равенства (27) линейна и однородна относительно $A_{\mu\nu}$ и ее первых производных, то этот закон образования новых тензоров приводит к тензору не только в случае тензора типа $A_\mu B_\nu$, но и для суммы таких тензоров, т. е. любого ковариантного тензора второго ранга. Назовем $A_{\mu\nu\sigma}$ ковариантной производной тензора $A_{\mu\nu}$.

Ясно, что (26) и (24) являются только специальными случаями ковариантной производной (27) (ковариантными производными тензора первого и нулевого ранга). Вообще говоря, все специальные законы образования новых тензоров могут быть получены на основе соотношения (27) в соединении с умножением тензоров друг на друга.

§ 11. Некоторые частные случаи, имеющие особое значение

Некоторые леммы о фундаментальном тензоре. Выведем сначала некоторые полезные в дальнейшем вспомогательные соотношения. Согласно правилу дифференцирования определителей, имеем

$$dg = g^{\mu\nu} g\, dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g\, dg^{\mu\nu}. \tag{28}$$

Последнее выражение следует из предшествующего, если принять во внимание, что $g_{\mu\nu} g^{\mu'\nu} = \delta_\mu^{\mu'}$ и $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$ а, следовательно,

$$g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = 0.$$

Из соотношений (28) следует:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln(-g)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \tag{29}$$

Из равенства

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu$$

посредством дифференцирования получаем

$$g_{\mu\sigma} dg^{\nu\sigma} = - g^{\nu\sigma}\, dg_{\mu\sigma},$$

или

$$g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} = - g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}. \tag{30}$$

Отсюда, в результате смешанного умножения на $g^{\mu\tau}$ и соответственно на $g_{\nu\lambda}$ получаем (изменяя обозначения индексов)

$$\left.\begin{aligned} dg^{\mu\nu} &= - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} dg_{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

и соответственно

$$\left.\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} dg^{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Соотношение (31) можно преобразовать в другое, которым мы также часто будем пользоваться. В силу формулы (21),

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \begin{bmatrix} \alpha\sigma \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\sigma \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Подставляя это во вторую формулу (31) и принимая во внимание соотношение (23), получаем

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = - \left(g^{\mu\tau} \begin{Bmatrix} \tau\sigma \\ \nu \end{Bmatrix} + g^{\nu\tau} \begin{Bmatrix} \tau\sigma \\ \mu \end{Bmatrix} \right). \tag{34}$$

В результате подстановки правой части равенства (34) в (29) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \mu \end{Bmatrix}. \tag{29a}$$

Дивергенция контравариантного 4-вектора. Если умножить соотношение (26) на контравариантный фундаментальный тензор $g^{\mu\nu}$ (внутреннее умножение), то его правая часть после преобразования первого члена примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} (g^{\mu\nu} A_\mu) - A_\mu \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\tau\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) g^{\mu\nu} A_\tau.$$

Последний член этого выражения на основании равенств (31) и (29) можно привести к виду

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu}A_\tau+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu}A_\tau+\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}g^{\tau\alpha}A_\tau.$$

Так как обозначение индексов, по которым производится суммирование, не имеет значения, то первые два члена последнего выражения взаимно уничтожаются со вторым членом стоящего выше выражения; последний же член можно объединить с первым членом стоящего выше выражения. Полагая

$$g^{\mu\nu}A_\mu=A^\nu,$$

где A^ν, подобно A_μ,— произвольный вектор, получаем, наконец,

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\,A^\nu). \tag{35}$$

Этот скаляр и представляет собой *дивергенцию* контравариантного 4-вектора A^ν.

«Ротор» (ковариантного) 4-вектора. Второй член в формуле (26) симметричен по индексам μ и ν. Поэтому $A_{\mu\nu}-A_{\nu\mu}$ оказывается особенно простым по своей структуре (антисимметричным) тензором. Мы имеем

$$B_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{36}$$

Антисимметричная тензорная производная 6-вектора. Если применить (27) к некоторому антисимметричному тензору 2-го ранга $A_{\mu\nu}$, затем образовать из полученного равенства путем циклической перестановки индексов μ, ν, σ еще два аналогичных равенства и, наконец, сложить все эти три равенства, то получим тензор 3-го ранга

$$B_{\mu\nu\sigma}=A_{\mu\nu\sigma}+A_{\nu\sigma\mu}+A_{\sigma\mu\nu}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}; \tag{37}$$

легко доказать, что этот тензор антисимметричен.

Дивергенция 6-вектора. Если равенство (27) умножить на $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$ (смешанное умножение), то получим тоже тензор. Первый член правой части равенства (27) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu})-g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}-g^{\nu\beta}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}.$$

Если заменить $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu\sigma}$ через $A^{\alpha\beta}_\sigma$ и $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}$ через $A^{\alpha\beta}$ и подставить в преобразованный первый член вместо

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} \quad \text{и} \quad \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

соответствующие значения по формуле (34), то в правой части равенства (27) будет семь членов, из которых четыре члена взаимно уничтожаются. Остается только

$$A_\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \left\{ {\sigma \varkappa \atop \alpha} \right\} A^{\varkappa\beta} + \left\{ {\sigma \varkappa \atop \beta} \right\} A^{\alpha\varkappa}. \tag{38}$$

Это и есть выражение для ковариантной производной контравариантного тензора 2-го ранга. Оно может быть соответствующим образом составлено и для контравариантных тензоров более высокого и более низкого рангов.

Заметим, что аналогичным путем можно получить также ковариантную производную смешанного тензора A_μ^α:

$$A_{\mu\sigma}^\alpha = \frac{\partial A_\mu^\alpha}{\partial x_\sigma} - \left\{ {\sigma \mu \atop \tau} \right\} A_\tau^\alpha + \left\{ {\sigma \tau \atop \alpha} \right\} A_\mu^\tau. \tag{39}$$

Производя свертку в формуле (38) по индексам β и σ (внутреннее умножение на δ_β^σ), получаем контравариантный 4-вектор:

$$A^\alpha = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \left\{ {\beta \varkappa \atop \beta} \right\} A^{\alpha\varkappa} + \left\{ {\beta \varkappa \atop \alpha} \right\} A^{\varkappa\beta}.$$

Вследствие симметрии $\left\{ {\beta \varkappa \atop \alpha} \right\}$ относительно индексов β и $\varkappa$ третий член правой части обращается в нуль в том случае, когда $A^{\alpha\beta}$ есть антисимметричный тензор, что мы и будем считать в дальнейшем; второй член может быть преобразован на основании (29а). Таким образом, получается

$$A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, A^{\alpha\beta})}{\partial x_\beta}. \tag{40}$$

Это и есть выражение для дивергенции контравариантного 6-вектора.

Дивергенция смешанного тензора второго ранга. Если в выражении (39) произвести свертку по индексам α и σ и принять во внимание формулу (29а), то получим

$$\sqrt{-g}\, A_\mu = \frac{\partial (\sqrt{-g}\, A_\mu^\sigma)}{\partial x_\sigma} - \left\{ {\sigma \mu \atop \tau} \right\} \sqrt{-g}\, A_\tau^\sigma. \tag{41}$$

Если в последний член этого равенства ввести контравариантный тензор $A^{\rho\sigma} = g^{\rho\tau}A^{\sigma}_{\tau}$, то он примет вид

$$-\begin{bmatrix}\sigma\mu\\ \rho\end{bmatrix}\sqrt{-g}\,A^{\rho\sigma}.$$

Далее, если тензор $A^{\rho\sigma}$ симметричен, то последнее выражение переходит в

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\,A^{\rho\sigma}.$$

Равным образом, если бы мы вместо $A^{\rho\sigma}$ ввели симметричный ковариантный тензор $A_{\rho\sigma}=g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta}A^{\alpha\beta}$, то последний член в силу (31) принял бы вид

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\,A_{\rho\sigma}.$$

Итак, в рассмотренном случае симметричного тензора выражение (41) может быть заменено следующими двумя равенствами:

$$\sqrt{-g}\,A_{\mu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}\,A^{\rho\sigma} \tag{41a}$$

и

$$\sqrt{-g}\,A_{\mu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}\,A_{\rho\sigma}, \tag{41б}$$

которыми мы в дальнейшем воспользуемся.

§ 12. Тензор Римана — Кристоффеля

Рассмотрим теперь те тензоры, которые могут быть получены из фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ *одним лишь* его дифференцированием. На первый взгляд может показаться, что ответ очень прост: достаточно подставить в (27) вместо произвольно взятого тензора $A_{\mu\nu}$ фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$, чтобы таким образом получить новый тензор, а именно, ковариантную производную фундаментального тензора. Однако легко убедиться в том, что эта ковариантная производная тождественно обращается в нуль. Цель все же достигается следующим образом. Подставим в соотношение (27) выражение для $A_{\mu\nu}$

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \rho\end{Bmatrix} A_{\rho},$$

которое представляет собою тензорную производную 4-вектора A_μ. Тогда получается (при несколько измененном обозначении индексов) тензор третьего ранга:

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \rho \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \rho \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\tau \\ \rho \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} +$$

$$+ \left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau} \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \rho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\sigma \\ \rho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\mu \\ \rho \end{Bmatrix} \right] A .$$

Это выражение приводит к мысли о составлении тензора $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$. Действительно, при этом следующие члены выражения для $A_{\mu\sigma\tau}$ взаимно уничтожаются с соответствующими членами из $A_{\mu\tau\sigma}$: первый, четвертый член, а также последний член внутри квадратной скобки, ибо все эти члены симметричны по σ и τ. То же самое справедливо и для суммы второго и третьего членов. Таким образом, мы получаем:

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^\rho_{\mu\sigma\tau} A_\rho, \tag{42}$$

$$B^\rho_{\mu\sigma\tau} = -\frac{\partial}{\partial x_\tau} \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \rho \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \rho \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\tau \\ \rho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\sigma \\ \rho \end{Bmatrix} . \tag{43}$$

В этом результате важно то, что в правой части равенства (42) стоит только 4-вектор A_ρ и отсутствуют его производные. Из тензорного характера $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$, а также из того, что A_ρ представляет собой произвольный 4-вектор, в силу выводов § 7 следует, что $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ является тензором (тензор Римана — Кристоффеля).

Математический смысл этого тензора заключается в следующем. Если континуум обладает тем свойством, что существует такая координатная система, в которой $g_{\mu\nu}$ — постоянные величины, то все $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ обращаются в нуль. Если вместо первоначальной системы выбрать любую новую координатную систему, то $g_{\mu\nu}$ в этой последней уже не будут больше постоянными. Однако тензорный характер величин $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ влечет за собою обращение в нуль всех компонент в произвольно выбранной системе координат. Следовательно, обращение в нуль тензора Римана является необходимым условием того, чтобы посредством надлежащего выбора координатной системы можно было сделать $g_{\mu\nu}$ постоянным[9]. В нашей задаче это соответствует случаю, когда при соответствующем выборе координатной системы в конечных областях справедлива специальная теория относительности.

---

[9] Математики доказали, что это условие является также и *достаточным*.

Свертка по индексам τ и ρ в выражении (43) для $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ дает ковариантный тензор 2-го ранга

$$B_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu},$$

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}, \tag{44}$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}.$$

Замечание о выборе системы координат. Уже в § 8 в связи с соотношением (18а) было сделано замечание о том, что некоторые преимущества дает такой выбор координат, при котором $\sqrt{-g} = 1$. Взгляд на уравнения, полученные в двух последних параграфах, показывает, что благодаря такому выбору законы образования тензоров значительно упрощаются. В частности, это верно для только что выведенного тензора $B_{\mu\nu}$, который в излагаемой теории играет основную роль. Именно, указанный особый выбор координат влечет за собою обращение в нуль $S_{\mu\nu}$, так что тензор $B_{\mu\nu}$ сводится к $R_{\mu\nu}$.

Поэтому в дальнейшем я буду давать все соотношения в том упрощенном виде, который следует из указанного специального выбора координатной системы. *К общековариантным уравнениям* будет нетрудно вернуться, если в каком-нибудь частном случае это окажется желательным.

В. ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

§ 13. Уравнение движения материальной точки в гравитационном поле. Выражение для компонент гравитационного поля

Согласно специальной теории относительности, свободное тело, неподверженное действию внешних сил, движется прямолинейно и равномерно. С точки зрения общей теории относительности это верно лишь в той части четырехмерного пространства, в которой координатная система K_0 может быть выбрана так, что $g_{\mu\nu}$ принимают специальные постоянные значения, указанные в (4).

Если мы рассматриваем это же движение относительно произвольно выбранной координатной системы K_1, то это тело, на основании соображений § 2, будет двигаться с точки зрения системы K_1 в некотором поле тяготения. Закон движения относительно системы K_1 легко получается из следующего рассуждения. По отношению к системе K_0 закон движения представляет собой четырехмерную прямую, т. е. геодезическую. Но так как геодезическая определяется независимо от координатной системы, то ее уравнение будет также уравнением движения материальной точки относительно системы K_1. Положив

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix}\mu\,\nu\\ \tau\end{Bmatrix}, \tag{45}$$

найдем, что уравнение движения точки относительно K_1 запишется в виде

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}. \tag{46}$$

Сделаем теперь весьма естественное допущение, что эта общековариантная система уравнений определяет движение точки в гравитационном поле и в том случае, когда не существует системы K_0, относительно которой в конечных областях пространства справедлива специальная теория относительности. Мы тем более в праве делать такое допущение, что уравнение (46) содержит только первые производные от $g_{\mu\nu}$, между которыми — даже в частном случае существования системы K_0 — отсутствуют какие-либо соотношения [10].

Если все $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ равны нулю, то точка движется прямолинейно и равномерно; следовательно, эти величины обусловливают отклонение движения от прямолинейного и равномерного. Они являются компонентами гравитационного поля.

§ 14. Уравнения гравитационного поля в отсутствие материи

В дальнейшем мы будем различать «гравитационное поле» и «материю» в том смысле, что все, кроме гравитационного поля, обозначается как «материя»; это значит, что к последней относится не только «материя» в обычном смысле, но и электромагнитное поле.

Наша ближайшая задача заключается в отыскании уравнений гравитационного поля в отсутствие материи. Для этого опять воспользуемся тем же методом, какой применялся в предыдущем параграфе при выводе уравнения движения материальной точки. Первоначальная теория относительности, в которой $g_{\mu\nu}$ имеют известные постоянные значения, является тем частным случаем, для которого искомые уравнения заведомо

---

[10] Лишь между вторыми (вместе с первыми) производными, согласно § 12, существуют соотношения $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = 0$.

должны удовлетворяться. Пусть этот частный случай осуществляется в некоторой конечной области по отношению к определенной координатной системе K_0. В этой системе все компоненты $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ тензора Римана [формула (43)] обращаются в нуль. Но в таком случае они будут равны нулю и в любой другой системе координат в рассматриваемой области.

Таким образом, искомые уравнения свободного от материи гравитационного поля во всяком случае должны выполняться, если все $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ равны нулю. Но это условие заведомо требует слишком многого. В самом деле, гравитационное поле, создаваемое, например, материальной точкой, во всяком случае не может быть никаким выбором координатной системы «оттрансформировано», т. е. не может быть преобразовано к случаю постоянных $g_{\mu\nu}$.

Поэтому представляется естественным требование, чтобы в свободном от материи гравитационном поле обращался в нуль симметричный тензор $B_{\mu\nu}$, полученный из тензора $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$. Таким способом получаются 10 уравнений для 10 величин $g_{\mu\nu}$, которые выполняются в том частном случае, когда все $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ равны нулю. Эти уравнения для свободного от материи поля, в силу (44), при сделанном выборе координатной системы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} &= 0 \\ \sqrt{-g} &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Следует отметить, что с выбором этих уравнений связан минимум произвола. Ведь, кроме $B_{\mu\nu}$, нет другого тензора 2-го ранга, который был бы составлен из $g_{\mu\nu}$ и их производных, не содержал бы производных более высокого порядка, чем второго, и был бы линейным относительно последних [11].

Тот факт, что эти уравнения, вытекающие из общего принципа относительности чисто математическим путем, в соединении с уравнениями движения (46) дают в первом приближении ньютоновский закон тяготения, а во втором приближении — объяснение открытого Леверье движения перигелия Меркурия (остающегося после внесения поправок на возмущение), должен, по нашему мнению, убедить в физической правильности теории.

---

[11] Собственно говоря, это можно утверждать только о тензоре $B_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta})$, где λ — константа. Однако, приравняв его нулю, мы снова возвращаемся к уравнениям: $B_{\mu\nu} = 0$.

§ 15. Функция Гамильтона для гравитационного поля. Закон сохранения импульса и энергии

Чтобы показать соответствие уравнений поля законам сохранения импульса и энергии, удобнее всего написать их в следующей гамильтоновой форме:

$$\left.\begin{aligned} &\delta\left\{\int H\,d\tau\right\}=0,\\ &H=g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha},\\ &\sqrt{-g}=1. \end{aligned}\right\} \tag{47а}$$

При этом на границах рассматриваемой ограниченной четырехмерной области интегрирования вариации равны нулю.

Прежде всего, необходимо показать, что уравнения (47а) эквивалентны уравнениям (47). Для этой цели рассмотрим H как функцию от $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(\equiv\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)$. Сначала запишем

$$\delta H=\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+2g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+2\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right).$$

Но

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right)=-\frac{1}{2}\,\delta\left[g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

Выражения, получающиеся из двух последних членов в круглых скобках, имеют разные знаки и получаются друг из друга путем перестановки индексов μ и β (так как обозначение индексов суммирования не имеет значения). В выражении для δH они взаимно уничтожаются, будучи умножены на величину $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$, симметричную относительно индексов μ и β. Таким образом, следует учесть лишь первый член в круглых скобках, так что, принимая во внимание равенства (31), получаем

$$\delta H=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g^{\mu\beta}_{\alpha}.$$

Таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha},\\ &\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Выполнив вариации в (47а), получим сначала систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)-\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=0, \tag{47б}$$

которая, в силу уравнений (48), совпадает с (47), что и требовалось доказать. Умножая (47б) на $g^{\mu\nu}_{\sigma}$ и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\sigma}}$$

и, следовательно,

$$g^{\mu\nu}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(g^{\mu\nu}_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} \frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\sigma}},$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(g^{\mu\nu}_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial H}{\partial x_{\sigma}} = 0,$$

или [12]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial t^{\alpha}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} = 0, \\ -2\varkappa t^{\alpha}_{\sigma} &= g^{\mu\nu}_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} - \delta^{\alpha}_{\sigma} H, \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

причем, на основании уравнений (48), второго уравнения (47) и формулы (34), должно выполняться соотношение

$$\varkappa t^{\alpha}_{\sigma} = \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{\sigma} g^{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\lambda} - g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}. \qquad (50)$$

Следует помнить, что t^{α}_{σ} не является тензором; уравнение же (49) справедливо для всех координатных систем, для которых $\sqrt{-g} = 1$. Это уравнение выражает законы сохранения импульса и энергии для гравитационного поля. В самом деле, интегрирование этого уравнения по трехмерному объему V дает четыре уравнения:

$$\frac{d}{dx_4} \left\{ \int t^{4}_{\sigma} \, dV \right\} = \int (t^{1}_{\sigma} a_1 + t^{2}_{\sigma} a_2 + t^{3}_{\sigma} a_3) \, ds, \qquad (49а)$$

где a_1, a_2, a_3 — направляющие косинусы внутренней нормали к элементу граничной поверхности dS (в смысле эвклидовой геометрии). В этом соотношении, как нетрудно видеть, содержатся оба закона сохранения в их обычной форме записи. Мы назовем величины t^{α}_{σ} «компонентами энергии» [13] гравитационного поля.

---

[12] Причина введения множителя — $2\varkappa$ выяснится позже.
[13] Их называют теперь компонентами псевдотензора энергии-импульса.— *Прим. ред.*

Представим теперь уравнения (47) еще в одной форме, особенно полезной для наглядного усвоения рассматриваемого вопроса. Посредством умножения уравнений поля (47) на $g^{\nu\sigma}$ эти уравнения получаются в «смешанном» виде. Нужно принять во внимание, что

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)-\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}.$$

Эта величина, на основании (34), равна

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)-g^{\nu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}-g^{\sigma\beta}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu},$$

или (после изменения обозначения индексов суммирования)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\right)-g^{mn}\Gamma^{\sigma}_{m\beta}\Gamma^{\beta}_{n\mu}-g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}.$$

Третий член этого выражения взаимно уничтожается с членом, получающимся из второго члена уравнений поля (47); вместо второго члена этого выражения можно, пользуясь соотношением (50), подставить

$$\varkappa\left(t^{\sigma}_{\mu}-\frac{1}{2}\,\delta^{\sigma}_{\mu}t\right),$$

где $t=t^{\alpha}_{\alpha}$. Итак, вместо уравнений (47) получается

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\right)=-\varkappa\left(t^{\sigma}_{\mu}-\frac{1}{2}\,\delta^{\sigma}_{\mu}t\right),\\&\sqrt{-g}=1.\end{aligned}\right\}\tag{51}$$

§ 16. Уравнения гравитационного поля в общем виде

Уравнения поля для свободного от материи пространства, выведенные в предыдущем параграфе, нужно сравнить с уравнением поля

$$\Delta\varphi=0$$

теории Ньютона. Мы должны найти уравнение, которое соответствует уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi=4\pi\varkappa\rho,$$

где ρ — плотность материи.

Специальная теория относительности привела к тому выводу, что инертная масса есть не что иное, как энергия, полное математическое выражение которой дается симметричным тензором 2-го ранга, тензором энергии. Поэтому и в общую теорию относительности придется ввести некоторый тензор энергии материи T_σ^α, имеющий смешанный характер, как и компоненты t_σ^α [уравнения (49) и (50)] гравитационного поля, но в то же время соответствующий симметричному ковариантному тензору [14].

Система уравнений (51) показывает, как ввести этот тензор энергии (соответствующий плотности ρ в уравнении Пуассона) в уравнения гравитационного поля. Если рассматривать замкнутую систему (например, Солнечную систему), то общая масса системы и, следовательно, ее общее гравитирующее действие будут зависеть от всей энергии системы, т. е. от совокупности энергии весомой материи и энергии поля тяготения. Это можно выразить тем, что в уравнениях (51) вместо одних только компонент энергии t_μ^σ гравитационного поля мы подставим сумму $t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma$ компонент тензора энергии материи и гравитационного поля. Таким образом, вместо (51) получается тензорное уравнение

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha) = -\varkappa\left[(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma) - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma(t+T)\right], \\ &\sqrt{-g} = 1, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

где $T = T_\mu^\mu$ (скаляр Лауэ). Это и есть искомые общие уравнения гравитационного поля в смешанной форме. Отсюда обратно вместо (47) получается система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \\ &\sqrt{-g} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Нужно признать, что указанное введение тензора энергии материи не может быть обосновано одним только постулатом относительности; поэтому выше мы исходили из требования, что энергия гравитационного поля должна действовать в смысле тяготения точно так же, как всякая энергия другого рода. Но самым сильным аргументом в пользу указанных уравнений является то, что из них следуют уравнения сохранения импульса и энергии для компонент полной энергии, в точности соответствующие уравнениям (49) и (49а). Это будет доказано ниже.

§ 17. Законы сохранения в общем случае

Уравнение (52) нетрудно преобразовать так, чтобы второй член в правой части обратился в нуль. Для этого следует произвести свертку по индексам μ и σ и вычесть полученное таким образом уравнение, пред-

---

[14] $g_{\alpha\tau}T_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau}$ и $g^{\sigma\beta}T_\sigma^\alpha = T^{\alpha\beta}$ должны быть симметричными тензорами.

варительно умноженное на $^1/_2\delta_\mu^\sigma$, из уравнения (52). Тогда получается

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right) = -\varkappa\,(t^\sigma_\mu + T^\sigma_\mu). \tag{52a}$$

Применяя к этому уравнению операцию $\frac{\partial}{\partial x_\sigma}$, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

Первый и третий члены в круглых скобках приводят ко взаимно уничтожающимся слагаемым, в чем легко убедиться, если в третьем члене переставить, с одной стороны, индексы суммирования α и σ и, с другой стороны, индексы β и λ. Второй член можно преобразовать согласно (31), так что имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\mu}. \tag{54}$$

Второй член в левой части (52a) сначала дает

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\mu}(g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}),$$

или

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right].$$

Член, получающийся от последнего члена в круглых скобках, обращается в нуль при сделанном нами выборе координат в силу (29). Два других члена можно объединить; тогда на основании соотношений (31) получим

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\mu},$$

так что, принимая во внимание равенство (54), получаем тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right) \equiv 0. \tag{55}$$

Из (55) и (52a) следует

$$\frac{\partial\,(t^\sigma_\mu + T^\sigma_\mu)}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{56}$$

Таким образом, из наших уравнений гравитационного поля следует, что законы сохранения импульса и энергии выполняются. В этом проще всего убедиться при помощи рассуждения, которое ведет к уравнению (49а); нужно тôлько вместо компонент энергии t_μ^σ гравитационного поля ввести компоненты полной энергии материи и гравитационного поля.

§ 18. Закон сохранения импульса и энергии для материи как следствие уравнений поля

Умножая уравнение (53) на $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$, пользуясь приемом, примененным в § 15, и принимая во внимание, что $g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ равно нулю, получаем уравнение:

$$\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0,$$

или, в силу равенства (56),

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0. \tag{57}$$

Сравнение с (41б) показывает, что это уравнение при сделанном выборе координатной системы выражает не что иное, как обращение в нуль дивергенции тензора энергии материи. Наличие второго члена в левой части с физической точки зрения означает, что для одной лишь материи законы сохранения импульса и энергии в их подлинном смысле не выполняются; точнее говоря, они выполняются лишь тогда, когда $g^{\mu\nu}$ постоянны, т. е. когда компоненты напряженности гравитационного поля равны нулю. Этот второй член представляет собой выражение для импульса, и, соответственно, для энергии, которые в единицу времени и в единице объема передаются материи от гравитационного поля. Все это становится еще более ясным, если вместо (57) записать в духе соотношения (41):

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}=-\Gamma_{\sigma\alpha}^\beta T_\beta^\alpha. \tag{57a}$$

Правая часть этого уравнения выражает энергетическое воздействие гравитационного поля на материю.

Таким образом, уравнения гравитационного поля содержат четыре условия, которым должны удовлетворять материальные процессы. Эти условия и представляют собой уравнения материального процесса, если последний может быть описан четырьмя независимыми друг от друга дифференциальными уравнениями[15].

Г. «МАТЕРИАЛЬНЫЕ» ПРОЦЕССЫ

Математические вспомогательные средства, изложенные в разделе Б, дают нам возможность сразу обобщить физические законы (гидродинамику, электродинамику Максвелла), сформулированные в специальной теории относительности, так чтобы они удовлетворяли общей теории относительности. При этом общий принцип относительности, не налагая никаких новых ограничений, дает возможность точно описать влияние гравитационного поля на все процессы без привлечения каких-либо новых гипотез.

Из этого обстоятельства следует, что не нужно вводить никаких предположений относительно физической природы материи (в более узком смысле). В частности, может остаться открытым вопрос о том, смогут ли теория электромагнитного поля и теория гравитационного поля совместно служить базой для теории материи. Общий постулат относительности в принципе ничего не может сказать об этом. В процессе развития теории выяснится, смогут ли электродинамика и учение о тяготении вместе дать то, что не удавалось одной лишь первой теории.

§ 19. Уравнения Эйлера для адиабатических жидкостей в отсутствие трения

Пусть p и ρ — два скаляра, первый из которых назовем «давлением», а второй — «плотностью» жидкости; пусть они связаны некоторым уравнением. Пусть, далее, контравариантный симметричный тензор

$$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}p + \rho\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} \tag{58}$$

является контравариантным тензором энергии жидкости. Ему соответствует ковариантный тензор

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}p + g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}g_{\nu\beta}\frac{dx_\beta}{ds}\rho, \tag{58a}$$

---

[15] Cp. D. Hilbert. Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1915, 3.

а также смешанный тензор [16]

$$T_\sigma^\alpha = -\delta_\sigma^\alpha p + g_{\sigma\beta}\frac{dx_\beta}{ds}\frac{dx_\alpha}{ds}\rho. \tag{58б}$$

Подставив правую часть равенства (58б) в уравнение (57а), получим гидродинамические уравнения Эйлера в общей теории относительности. В принципе эти уравнения полностью решают проблему движения, ибо четыре уравнения (57а) вместе с заданной зависимостью между p и ρ и соотношением

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 1$$

достаточны при данных $g_{\alpha\beta}$ для определения 6 неизвестных:

$$p,\ \rho,\ \frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \frac{dx_3}{ds},\ \frac{dx_4}{ds}.$$

Если неизвестны также и $g_{\mu\nu}$, то к прежним уравнениям присоединяются еще уравнения (53). Таким образом, для определения 10 функций $g_{\mu\nu}$ имеем 11 уравнений. Может показаться, что неизвестные функции переопределены. Между тем следует заметить, что уравнения (57а) уже содержатся в уравнениях (53), так что последние представляют не больше 7 независимых уравнений. Причина этой неопределенности заключается в широкой свободе выбора координатной системы, вследствие которой задача в математическом смысле остается неопределенной в такой степени, что три из пространственных функций могут быть выбраны произвольно [17].

§ 20. Максвелловы уравнения электромагнитного поля для вакуума

Пусть φ_ν — компоненты ковариантного 4-вектора электромагнитного потенциала. Образуем из них, согласно (36), компоненты $F_{\rho\sigma}$ ковариантного 6-вектора электромагнитного поля

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

---

[16] Для наблюдателя, который движется вместе с жидкостью и пользуется в бесконечно малой области координатной системой в смысле специальной теории относительности, плотность энергии T_4^4 равна $\rho - p$. Это и есть определение плотности ρ. Таким образом, для несжимаемой жидкости ρ не является постоянной.

[17] При отказе от выбора координатной системы с $g = -1$ свободно выбираемыми остаются *четыре* пространственные функции, соответственно четырем произвольным функциям, которыми можно свободно распоряжаться при выборе координат.

Из соотношения (59) следует, что удовлетворяется следующая система уравнений:

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{60}$$

Левая часть этого равенства в силу (37) представляет собой антисимметричный тензор 3-го ранга. Таким образом, система (60) содержит по существу четыре уравнения, имеющие вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} &= 0,\\
\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} &= 0,\\
\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} &= 0,\\
\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{60a}$$

Эта система уравнений соответствует второй системе уравнений Максвелла. В этом можно немедленно убедиться, если подставить

$$\left.\begin{aligned}
F_{23} &= \mathfrak{h}_x, & F_{14} &= \mathfrak{e}_x\\
F_{31} &= \mathfrak{h}_y, & F_{24} &= \mathfrak{e}_y,\\
F_{12} &= \mathfrak{h}_z, & F_{34} &= \mathfrak{e}_z.
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Тогда можно вместо (60а) написать в обычных обозначениях трехмерного векторного анализа

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{e} &= 0,\\
\operatorname{div} \mathfrak{h} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{60б}$$

Первую систему уравнений Максвелла мы получим, обобщая уравнения Максвелла в форме, данной Минковским. Введем контравариантный 6-вектор

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}, \tag{62}$$

соответствующий ковариантному $F_{\alpha\beta}$, и контравариантный 4-вектор I_μ — плотности электрического тока в пустоте. В таком случае можно, приняв во внимание соотношение (40), написать следующую, инвариантную по отношению к любым преобразованиям с определителем, равным 1 (согласно сделанному нами выбору координат), систему уравнений:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = I^\mu. \tag{63}$$

Положим:

$$\left.\begin{array}{ll} F^{23} = \mathfrak{h}'_x, & F^{14} = -\mathfrak{e}'_x, \\ F^{31} = \mathfrak{h}'_y, & F^{24} = -\mathfrak{e}'_y, \\ F^{12} = \mathfrak{h}'_z, & F^{34} = -\mathfrak{e}'_z. \end{array}\right\} \tag{64}$$

Эти величины в частном случае специальной теории относительности равны соответственно величинам $\mathfrak{h}_x, \ldots, \mathfrak{e}_z$. Далее, положим:

$$I^1 = \mathfrak{i}_x, \quad I^2 = \mathfrak{i}_y, \quad I^3 = \mathfrak{i}_z, \quad I^4 = \rho.$$

Тогда вместо (63) получим

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{rot} \mathfrak{h}' - \dfrac{\partial \mathfrak{e}'}{\partial t} = \mathfrak{i}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{e}' = \rho. \end{array}\right\} \tag{63a}$$

Уравнения (60), (62), (63) представляют собой обобщение максвелловых уравнений поля в пустоте при сделанном допущении относительно выбора координат.

Компоненты тензора энергии электромагнитного поля. Образуем внутреннее произведение

$$\varkappa_\sigma = F_{\sigma\mu} I^\mu. \tag{65}$$

Его компоненты, написанные согласно (61) в трехмерных обозначениях имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa_1 = \rho \mathfrak{e}_x + [\mathfrak{i}, \mathfrak{h}]_x, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varkappa_4 = -(\mathfrak{i}, \mathfrak{e}). \end{array}\right\} \tag{65a}$$

Величина $\varkappa_\sigma$ представляет собой ковариантный 4-вектор, компоненты которого с обратным знаком равны импульсу, или, соответственно, энергии, которые переносятся с электрических зарядов на электромагнитное поле в единицу времени и в единице объема. Если электрические заряды свободны, т. е. если они находятся под влиянием одного только электромагнитного поля, то ковариантный 4-вектор $\varkappa_\sigma$ обращается в нуль.

Чтобы получить компоненты энергии T_σ^ν электромагнитного поля, достаточно уравнению $\varkappa_\sigma = 0$ придать вид уравнения (57). Тогда из (63) и (65) сначала получим

$$\varkappa_\sigma = F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu}) - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

Второй член в правой части, в силу (60), может быть преобразован следующим образом:

$$F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}.$$

Из соображений симметрии последнее выражение может быть записано также и в виде

$$-\frac{1}{4}\left[g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}F_{\mu\nu}\right].$$

Но вместо этого можно написать

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}) + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}).$$

Первый член этого выражения можно представить в виде

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}).$$

Второй член после выполнения дифференцирования и некоторого преобразования принимает форму

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\tau}F_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Объединяя все три вычисленные члена, получаем соотношение

$$\varkappa_\sigma = \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_\tau^\nu, \tag{66}$$

причем

$$T_\sigma^\nu = -F_{\sigma\alpha}F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{66a}$$

Равенство (66) при $\varkappa_\sigma$, равном нулю, в силу (30), эквивалентно (57) или, соответственно, (57а). Следовательно, T_σ^ν представляют собой компоненты энергии электромагнитного поля. При помощи равенств (61) и (64) легко показать, что эти компоненты энергии электромагнитного поля в случае специальной теории относительности составляют известные выражения Максвелла — Пойнтинга.

Итак, мы вывели самые общие законы, которым удовлетворяют гравитационное поле и материя, пользуясь при этом координатной системой, в которой $\sqrt{-g} = 1$. Благодаря этому мы значительно упростили формулы и расчеты, не отказываясь в то же время от требования общей ковариантности, ибо мы вывели наши уравнения из общековариантных уравнений, выбирая лишь специальным образом координатную систему.

Все же не лишен формального интереса вопрос, остаются ли в силе законы сохранения (импульса и энергии), а также уравнения гравитационного поля, представленные в виде уравнений (56) и, соответственно, (52) или (52а), в которых слева стоит дивергенция (в обычном смысле), а справа — сумма компонент энергии материи и гравитационного поля, в том случае, когда при соответственно обобщенном определении компонент энергии гравитационного поля и материи не делается специального выбора координатной системы. Я нашел, что это действительно так. Однако я полагаю, что изложение довольно длинных рассуждений по данному вопросу нецелесообразно, поскольку при этом ничего существенно нового не получается[18].

Д. § 21. Теория Ньютона как первое приближение

Как уже упоминалось много раз, специальная теория относительности, рассматриваемая как частный случай общей теории относительности, характеризуется тем, что $g_{\mu\nu}$ имеют постоянные значения (4). Согласно изложенному выше, это означает полное пренебрежение гравитационными действиями. Более близкое к действительности приближение мы получаем, рассматривая случай, когда все $g_{\mu\nu}$ отличаются от значений (4) лишь на малые (по сравнению с 1) величины; при этом мы пренебрегаем малыми величинами второго и более высоких порядков. (Первая предпосылка приближенного решения основных уравнений.)

Далее, допустим, что в рассматриваемой пространственно-временнóй области при надлежащем выборе системы координат величины $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности стремятся к значениям (4); это значит, что мы рассматриваем гравитационные поля, которые могут считаться созданными только материей, находящейся в конечной области пространства.

Можно было бы думать, что упомянутые пренебрежения должны привести к теории Ньютона. Однако для этого в основных уравнениях требуется сделать некоторые приближения еще и с другой точки зрения. Рассмотрим движение материальной точки, удовлетворяющее уравнениям (46). В случае специальной теории относительности компоненты

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

могут принимать любые значения; это означает, что могут встречаться любые скорости

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2},$$

[18] Ср. статью 51.— *Ред.*

меньшие скорости света в пустоте ($v < 1$). Если ограничиться случаем, который почти всегда встречается на опыте, когда v мало по сравнению со скоростью света, то это будет означать, что компоненты

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

должны рассматриваться как малые величины, в то время как $\frac{dx_4}{ds}$, с точностью до величин второго порядка, равно 1. (Вторая предпосылка приближенного решения основных уравнений.)

Теперь примем во внимание, что, согласно первой предпосылке нашего приближения, все $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ представляют собой малые величины по крайней мере первого порядка. Но отсюда следует, что в выражении (46), согласно второму предположению, должны быть учтены только члены с $\mu = \nu = 4$. Ограничиваясь членами низшего порядка, мы вместо (46) получаем сначала следующие уравнения:

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = \Gamma^{\tau}_{44},$$

причем $ds = dx_4 = dt$. Беря только члены первого порядка, получаем

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = \begin{bmatrix} 44 \\ \tau \end{bmatrix} \qquad (\tau = 1, 2, 3),$$

$$\frac{d^2 x_4}{dt^2} = -\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Если, кроме того, предположить, что гравитационное поле квазистатично, т. е. ограничиться тем случаем, когда материя, создающая гравитационное поле, движется медленно (по сравнению со скоростью распространения света), то в правой части можно пренебречь производными по времени по сравнению с производными по пространственным координатам; таким образом, получается

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, 3). \tag{67}$$

Это и есть уравнение движения материальной точки в теории Ньютона, причем $\frac{g_{44}}{2}$ играет роль гравитационного потенциала. Этот результат замечателен тем, что только одна компонента g_{44} фундаментального тензора определяет в первом приближении движение материальной точки.

Обратимся теперь к уравнению поля (53). При этом должно быть принято во внимание, что тензор энергии «материи» определяется почти исключительно плотностью материи ρ в более узком смысле этого слова, т. е. вторым членом правой части (58) [и, соответственно, (58а) или (58б)]. В интересующем нас приближении все компоненты, кроме $T_{44} = \rho = T$, обращаются в нуль. В левой части уравнения (53) второй член представляет собой величину второго порядка малости; первый же член в интересующем нас приближении принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ 1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ 2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ 3\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_4}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ 4\end{bmatrix}.$$

Это выражение при $\mu = \nu = 4$ и при отбрасывании производных по времени переходит в

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\Delta g_{44}.$$

Таким образом, последнее из уравнений (53) может быть записано в виде

$$\Delta g_{44} = \varkappa\rho. \tag{68}$$

Уравнения (67) и (68), вместе взятые, эквивалентны закону тяготения Ньютона.

Для гравитационного потенциала на основании уравнений (67) и (68) получается выражение

$$-\frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}, \tag{68a}$$

тогда как теория Ньютона при выбранной нами единице времени дает для этой величины выражение

$$-\frac{K}{c^2}\int\frac{\rho d\tau}{r},$$

где K — обычная гравитационная постоянная, равная $6{,}7\cdot 10^{-8}$. Из сравнения обоих выражений получается

$$\varkappa = \frac{8\pi K}{c^2} = 1{,}87\cdot 10^{-27}. \tag{69}$$

§ 22. Свойства масштабов и часов в статическом гравитационном поле. Искривление лучей света. Движение перигелия планетных орбит

Чтобы получить теорию Ньютона как первое приближение, нам пришлось из 10 компонент гравитационного потенциала $g_{\mu\nu}$ вычислить только g_{44}, так как только эта компонента входит в полученное в первом приближении уравнение движения (67) материальной точки в гравитационном поле. Но и другие компоненты $g_{\mu\nu}$ должны в первом приближении отличаться от значений, данных в (4), так как все они связаны условием $g = -1$.

Для материальной точки, создающей поле и находящейся в начале координат, получается в первом приближении радиально симметричное решение:

$$\left.\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= -\delta_{\rho\sigma} - \alpha\frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} && (\rho \text{ и } \sigma \text{ принимают значения от 1 до 3}),\\ g_{\rho 4} &= g_{4\rho} = 0 && (\rho \text{ принимает значения от 1 до 3}),\\ g_{44} &= 1 - \frac{\alpha}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

где $\delta_{\rho\sigma}$ равно соответственно 1 или 0, в зависимости от того, будет ли $\rho = \sigma$ или $\rho \neq \sigma$, а

$$r = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

При этом, в силу выражения (68a), имеем

$$\alpha = \frac{\varkappa M}{4\pi}, \tag{70a}$$

где через M обозначена масса, создающая поле. Легко проверить, что это решение удовлетворяет уравнениям поля (вне массы) в первом приближении.

Исследуем теперь воздействие, которое испытывают метрические свойства пространства от поля массы M. Между «локально» измеренными (см. § 4) длинами и промежутками времени ds, с одной стороны, и приращениями координат dx_ν — с другой, всегда имеется соотношение:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu.$$

Так, например, для единицы масштаба, расположенной «параллельно» оси x, следует написать:

$$ds^2 = -1, \qquad dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

т. е.

$$-1 = g_{11}dx_1^2.$$

Если единица масштаба, кроме того, лежит на самой оси x, то первое из уравнений (70) дает

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

Из обоих последних соотношений следует в первом приближении

$$dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}. \tag{71}$$

Итак, если единичный масштаб приложен в радиальном направлении, то в рассматриваемой координатной системе, благодаря наличию гравитационного поля, он представляется сокращенным в найденном отношении.

Аналогичным путем мы получим координатные длины масштаба в случае поперечного направления, если положим, например,

$$ds^2 = -1, \quad dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

$$x_1 = r, \quad x_2 = x_3 = 0.$$

В таком случае имеем

$$-1 = g_{22}\, dx_2^2 = -dx_2^2. \tag{71a}$$

Итак, при поперечном положении масштаба гравитационное поле материальной точки не оказывает никакого влияния на длину стержня.

Следовательно, в гравитационном поле эвклидова геометрия не справедлива даже в первом приближении, если в качестве реализации одного и того же отрезка мы используем один и тот же стержень в разных местах и в разных положениях. Но соотношения (70a) и (69) все же показывают, что ожидаемые отклонения от геометрии Эвклида слишком незначительны, чтобы их можно было заметить при измерении поверхности Земли.

Пусть, далее, исследуется скорость хода эталонных часов, которые установлены неподвижно в статическом гравитационном поле. Для единичного интервала времени в этом случае имеем:

$$ds = 1, \quad dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0.$$

Следовательно,

$$1 = g_{44} dx_4^2,$$

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_{44} - 1)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2},$$

или

$$dx_4 = 1 + \frac{\varkappa}{8\pi} \int \frac{\rho d\tau}{r}. \tag{72}$$

Итак, часы идут медленнее, если они установлены вблизи весомых масс. Отсюда следует, что спектральные линии света, попадающего к нам с поверхности больших звезд, должны сместиться к красному концу спектра [19].

---

[19] В пользу существования подобного эффекта говорят, согласно Э. Фройндлиху, спектральные наблюдения над звездами определенных типов. Однако окончательная проверка этого следствия не была еще предпринята.

Далее исследуем ход лучей света в статическом гравитационном поле. Согласно специальной теории относительности, распространение света описывается уравнением

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0.$$

Следовательно, в общей теории относительности эта скорость определяется из уравнения

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0. \tag{73}$$

Если дано направление луча, т. е. отношения $dx_1 : dx_2 : dx_3$, то из уравнения (73) можно вычислить величины

$$\frac{dx_1}{dx_4}, \quad \frac{dx_2}{dx_4}, \quad \frac{dx_3}{dx_4}$$

и, таким образом, скорость

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma,$$

определяемую в смысле эвклидовой геометрии. Легко видеть, что лучи света должны искривляться относительно координатной системы в случае, если $g_{\mu\nu}$ не постоянны. Если n — направление, перпендикулярное к направлению распространения света, то на основании принципа Гюйгенса следует, что луч света [рассматриваемый в плоскости (γ, n)] обладает кривизной $-\frac{\partial\gamma}{\partial n}$.

Исследуем искривление, которое испытывает луч света, проходящий на некотором расстоянии Δ от массы M (рис. 1). Если выбрать координатную систему так, как показано на рисунке, то общее искривление B луча света (положительное, если траектория луча обращена к началу координат своей вогнутой стороной) в достаточно хорошем приближении дается следующим выражением

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\gamma}{\partial x_1}\, dx_2,$$

причем из (73) и (70) получается

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Вычисление дает

$$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\varkappa M}{2\pi\Delta}. \tag{74}$$

Согласно этой формуле, луч света, проходящий мимо Солнца, испытывает отклонение в 1″,7, а луч света, проходящий мимо планеты Юпитер, отклоняется приблизительно на 0″,02.

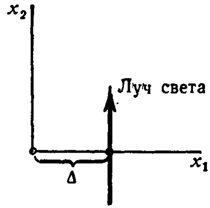

Рис. 1.

Если вычислить поле тяготения с точностью до величин более высокого порядка и с соответствующей точностью вычислить движение по орбите материальной точки с бесконечно малой массой, то получается следующее отклонение от законов движения планет Кеплера — Ньютона. Эллиптическая орбита планеты испытывает в направлении движения планеты медленное вращение, равное

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)}, \tag{75}$$

за время одного полного обращения планеты. В этой формуле a означает большую полуось, c — скорость света в обычных единицах, e — эксцентриситет орбиты, T — период обращения планеты в секундах[20].

Для планеты Меркурий получается вращение орбиты, составляющее 43″ в столетие, что точно соответствует величине, установленной астрономами (Леверье). Астрономы на самом деле нашли, что некоторая часть общего движения перигелия этой планеты не объясняется возмущающим действием других планет и равняется указанной величине.

Поступила 20 марта 1916 г.

В этой статье наиболее подробно изложена общая теория относительности. Во введении Эйнштейн впервые вводит в употребление термин «специальная теория относительности». В статье впервые появились эйнштейновское условие суммирования по дважды встречающимся индексам.

---

[20] Интересующихся вычислениями отсылаем к оригинальным работам: A. Einstein. Sitzungsber. preuss.-Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831. (Статья 36) K. Schwarzschild. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 189.

О СТАТЬЕ Ф. КОТТЛЕРА „ГИПОТЕЗА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА И ГРАВИТАЦИЯ“ *

Среди работ, в которых критически обсуждается общая теория относительности, работа Коттлера особенно замечательна, так как этот ученый действительно проник в сущность теории. Здесь я хочу вступить с ним в полемику о понимании сущности теории относительности.

Коттлер утверждает, будто бы я в своих позднейших работах снова отказываюсь от установленного мною «принципа эквивалентности», с помощью которого я стремился соединить понятия «тяжелой» и «инертной» масс.

Эта точка зрения основывается на том, что Коттлер и я подразумеваем под «принципом эквивалентности» не одно и то же, так как, по моему разумению моя теория покоится исключительно на этом принципе. Поэтому я считаю необходимым повторить следующее.

1. *Предельный случай специальной теории относительности.* Пусть имеется конечная пространственно-временна́я область, в которой гравитационное поле отсутствует, т. е. можно найти такую систему отсчета K (галилееву систему), в которой для рассматриваемой области можно непосредственно измерить координаты и время единичным масштабом и эталонными часами, как это принято в специальной теории относительности. Относительно этой системы изолированная материальная точка движется прямолинейно и равномерно, как это предположено Галилеем.

2. *Принцип эквивалентности.* Выходя за рамки предельного случая специальной теории относительности, можно спросить себя, должен ли наблюдатель, движущийся в рассматриваемой области равномерно ускоренно относительно системы K, воспринимать свое состояние как движение с ускорением или же вследствие известных (приближенных)

---

* *Über Fr. Kottlers Abhandlung: Einsteins Aquivaleuzhypotese und die Gravitation.* Ann. Phys., 1916, 51, 639—642. (Русский перевод статьи опубликован в кн.: «Принцип относительности». ГТТИ, 1935, 381.— *Прим. ред.*)

законов природы его восприятие будет таким, что свое состояние он может толковать как «покой». Точнее говоря: разрешают ли известные нам в определенном приближении законы природы рассматривать систему отсчета K', равноускоренную относительно системы K, как покоящуюся? Или, несколько более обще: можно ли распространить принцип относительности на системы, движущиеся (равномерно) ускоренно друг относительно друга? Ответ гласит: в той мере, в какой нам действительно известны законы природы, ничто не препятствует рассматривать систему K' как покоящуюся, если предположить существование в ней (однородного в первом приближении) гравитационного поля, так как и в однородном гравитационном поле и в системе K' все свободные тела движутся с одинаковым ускорением, независимо от их физической природы. Предположение о том, что с системой K' можно вполне строго обращаться как с покоящейся (причем в ней не будут выполняться все законы природы), я назвал «принципом эквивалентности».

3. *Поле тяжести обусловливается не только движением.* Предыдущие рассуждения можно обратить. Пусть система K, в которой существует однородное поле тяжести, будет исходной. Тогда можно ввести систему отсчета K, движущуюся с ускорением относительно K, в которой (изолированная) масса будет двигаться прямолинейно и равномерно (в рассматриваемой области). Однако *нельзя* распространять эти рассуждения на любые гравитационные поля. Нельзя утверждать, что, если в системе K' существует *произвольное* гравитационное поле, то всегда найдется такая система K, по отношению к которой изолированная масса движется прямолинейно и равномерно, т. е. в которой нет никакого поля тяжести. Абсурдность такого утверждения очевидна. Например, если поле тяжести в системе K создается покоящейся материальной точкой, то это поле для всей области вокруг материальной точки невозможно исключить никакими преобразованиями системы координат. Никоим образом нельзя также утверждать, что поле тяжести в какой-либо мере объясняется чисто кинематически: «кинематическое, нединамическое понимание гравитации» невозможно. Мы не можем получить *любое* гравитационное поле посредством простого ускорения одной галилеевой системы координат относительно другой, поскольку таким путем возможно получать поля только определенной структуры, которые, однако, должны подчиняться тем же законам, что и все другие гравитационные поля. Это еще одна формулировка принципа эквивалентности (специально для применения этого принципа к гравитации).

Таким образом, теория гравитации нарушает принцип эквивалентности, в том смысле, как я его понимаю, только тогда, когда уравнения гравитации не справедливы *во всех* системах K', движущихся неравномерно относительно галилеевой системы. Очевидно, такой упрек нельзя сделать моей теории, где используются *общековариантные* уравнения, так как в этом случае уравнения справедливы в любой системе координат. *Требование общей ковариантности уравнений включает, таким образом, принцип эквивалентности как частный случай.*

4. *Являются ли силы в гравитационном поле «реальными» силами?* Коттлер упрекает меня за то, что я в уравнении движения

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2}+\sum_{\alpha\beta}\left\{\begin{matrix}\alpha\ \beta\\ \nu\end{matrix}\right\}\frac{dx_\alpha}{ds}\,\frac{dx_\beta}{ds}=0$$

интерпретирую второй член как выражение воздействия поля тяжести на материальную точку, а первый член — как некоторое отражение галилеевской инерции. Это значит, что вводятся «истинные силы поля тяжести», что не соответствует духу принципа эквивалентности. На это можно ответить, что уравнение движения в целом общековариантно; поэтому принцип эквивалентности выполняется. Названия этих членов, введенные мною, в принципе несущественны и введены исключительно в силу нашей привычки мыслить физически. Это относится в особенности к величинам

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}=-\left\{\begin{matrix}\alpha\ \beta\\ \nu\end{matrix}\right\}$$

(компоненты гравитационного поля) и t^ν_σ (компоненты энергии гравитационного поля). Введение этих величин не является принципиально необходимым, однако мне кажется, что, по крайней мере, временно оно имеет смысл ради поддержания преемственности в мышлении; поэтому я ввел эти величины, хотя они не имеют тензорного характера. Тем не менее, принцип эквивалентности всегда выполняется точно, пока уравнения ковариантны.

5. Правда, общую ковариантность уравнений приходится покупать дорогой ценой, отказываясь от обычного измерения времени и эвклидовой меры пространства. Коттлер считает, что можно обойтись без таких жертв. Однако даже в рассмотренном им случае, когда система K' движется ускоренно в смысле Борна относительно галилеевской системы, приходится отказываться от обычного измерения времени. Отсюда с точки зрения теории относительности уже недалеко и до отказа от привычных пространственных измерений. В необходимости этого, наверное, убедится и сам Коттлер, если он попытается реализовать задуманный им теоретический план.

Поступила 19 октября 1916 г.

Статья Фридриха Коттлера напечатана в Ann. Phys., 1916, IV Folge, 50, 955. Суть его возражений понятна из ответа Эйнштейна. Коттлер замечает в своей статье, что из-за военной службы он не может продолжить своих исследований. Дискуссия, по-видимому, по этой причине оборвалась.

НОВОЕ ФОРМАЛЬНОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА *

Используемая до сих пор теоретико-ковариантная трактовка уравнений электродинамики восходит к Минковскому. Она может быть охарактеризована следующим образом. Компоненты электромагнитного поля образуют 6-вектор (антисимметричный тензор 2-го ранга). Ему сопоставляется второй 6-вектор, дуальный первому, который в случае специальной теории относительности отличается от первого не значениями компонент, а лишь тем, как эти компоненты сопоставляются четырем координатным осям. Обе системы уравнений Максвелла можно получить, если положить дивергенцию одного из этих 6-векторов равной нулю, а дивергенцию второго положить равной 4-вектору электрического тока.

Введение дуального 6-вектора приводит к тому, что это ковариантное представление теории является несколько менее наглядным. Более сложную форму принимает вывод законов сохранения энергии и импульса, в особенности, в случае общей теории относительности, которая учитывает влияние гравитационного поля на электромагнитное поле. Ниже будет дана формулировка, в которой, избегая понятия дуального 6-вектора, достигается значительное упрощение системы. В дальнейшем будет обсуждаться случай общей теории относительности [1].

---

* *Eine neue formale Deutung der Maxwellschen Feldgleichungen der Elektrodynamik*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 184—188.

[1] Наша работа «Формальные основы общей теории относительности» [Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1914, 41, 1030 (Статья 29.— *Ред.*)] в дальнейшем будет предполагаться известной и при ссылках на нее будет обозначаться как «Ф. о.»).

§ 1. Уравнения поля

Пусть Φ_ν — компоненты ковариантного 4-вектора электромагнитного потенциала. Образуем из них компоненты $F_{\rho\sigma}$ ковариантного 6-вектора электромагнитного поля с помощью соотношений:

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial \Phi_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{1}$$

То, что $F_{\rho\sigma}$ в действительности является ковариантным тензором, следует из (28a) Ф. о. Из соотношения (1) следует, что справедлива система уравнений:

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} = 0, \tag{2}$$

которая представляет собой наиболее естественную формулировку второй системы уравнений Максвелла (закон электромагнитной индукции Фарадея). Отметим прежде всего, что система уравнений (2) является общековариантной системой уравнений и получается как следствие общековариантного соотношения (1).

Далее, после трехкратного применения операции (29) Ф. о. к $F_{\rho\sigma}$, $F_{\sigma\tau}$, $F_{\tau\rho}$, составляя ковариантные производные со значками τ, ρ или σ, складывая три полученных таким образом выражения и принимая во внимание антисимметричный характер $F_{\rho\sigma}$, можно показать, что левая часть уравнения (2) представляет собой ковариантный тензор третьего ранга. Этот тензор третьего ранга является антисимметричным; действительно, из антисимметричного характера $F_{\rho\sigma}$ получается, что при перестановке двух индексов левая часть уравнения (2) меняет только знак без изменения своей абсолютной величины. Поэтому систему (2) можно представить четырьмя уравнениями:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} &= 0,\\
\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} &= 0,\\
\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} &= 0,\\
\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} &= 0,
\end{aligned} \tag{2a}$$

которые получаются, если индексы ρ, σ, τ принимают значения 2, 3, 4; 3, 4, 1; 4 или 1, 2; 1, 2, 3 соответственно. В наиболее знакомом частном случае отсутствия гравитационного поля можно положить

$$\left.\begin{aligned} F_{23} &= \mathfrak{h}_x, & F_{14} &= \mathfrak{e}_x, \\ F_{31} &= \mathfrak{h}_y, & F_{24} &= \mathfrak{e}_y, \\ F_{12} &= \mathfrak{h}_z, & F_{34} &= \mathfrak{e}_z. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Тогда уравнения (2а) дают уравнения поля:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{e} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{h} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2в}$$

Последние уравнения можно сохранить и в общей теории относительности, если придерживаться определений (3), т. е. если с 6-вектором $(\mathfrak{e}, \mathfrak{b})$ обращаться как с ковариантным 6-вектором.

Что касается первой системы уравнений Максвелла, то мы остаемся при том же обобщении схемы Минковского, которое изложено в § 11 цитированной работы. Мы вводим контравариантный V-шестивектор

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \sum_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \tag{4}$$

и требуем, чтобы дивергенция этого контравариантного 6-вектора была равна контравариантному V-четырехвектору $\mathfrak{J}$ плотности электрического тока в вакууме

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mathfrak{J}^\mu. \tag{5}$$

В том, что эта система уравнений в действительности эквивалентна первой системе Максвелла, можно убедиться, вычисляя $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$, согласно (4), в случае специальной теории относительности, в которой $g_{\mu\nu}$ принимает значения:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}.$$

Для этого частного случая из соотношений (3) и (4) получаем

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}^{23} &= \mathfrak{h}_x, & \mathfrak{F}^{14} &= -\mathfrak{e}_x, \\ \mathfrak{F}^{31} &= \mathfrak{h}_y, & \mathfrak{F}^{24} &= -\mathfrak{e}_y, \\ \mathfrak{F}^{12} &= \mathfrak{h}_z, & \mathfrak{F}^{34} &= -\mathfrak{e}_z. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если, кроме того,

$$\mathfrak{I}^1 = \mathfrak{i}_x, \quad \mathfrak{I}^2 = \mathfrak{i}_y, \quad \mathfrak{I}^3 = \mathfrak{i}_z, \quad \mathfrak{I}^4 = \varphi, \tag{7}$$

то уравнение (5) принимает обычный вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{h} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} &= \mathfrak{i}, \\ \operatorname{div}\mathfrak{e} &= \rho \end{aligned}\right\} \tag{5б}$$

В случае общей теории относительности уравнения равным образом сохраняют форму (5б). Однако векторы $\mathfrak{e}$ и $\mathfrak{h}$ (трехмерные) уже не равны соответствующим векторам в (2в). Скорее следует ввести два новых вектора $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{h}'$, которые связаны с $\mathfrak{e}$ и $\mathfrak{h}$, вообще говоря, довольно сложным образом, что определяется уравнением (4).

В заключение заметим, что новое обобщение системы уравнений Максвелла, которое отличается от более ранних только формой, а не содержанием, полностью определяется уравнениями (2), (4) и (5).

§ 2. Пондеромоторная сила и теорема энергии и импульса[1]

Образуем посредством внутреннего умножения ковариантного 6-вектора $F_{\sigma\mu}$ электромагнитного поля и V-четырехвектора $\mathfrak{I}^{\mu}$ плотности электрического тока ковариантный V-четырехвектор

$$\mathfrak{K}_{\sigma} = \sum_{\mu} F_{\sigma\mu}\mathfrak{I}^{\mu}. \tag{8}$$

Его компоненты, согласно равенствам (3), в обычной трехмерной записи имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1 &= \rho\mathfrak{e}_x + [\mathfrak{i},\ \mathfrak{h}]_x, \\ \mathfrak{K}_2 &= \rho\mathfrak{e}_y + [\mathfrak{i},\ \mathfrak{h}]_y, \\ \mathfrak{K}_3 &= \rho\mathfrak{e}_z + [\mathfrak{i},\ \mathfrak{h}]_z, \\ \mathfrak{K}_4 &= -(\mathfrak{i},\ \mathfrak{e}). \end{aligned}$$

При этом вектор $\mathfrak{K}_{\sigma}$ для электромагнитного поля является как раз тем самым V-вектором, который в уравнении (42а) Ф. о. вводился как 4-вектор плотности силы. Компоненты $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ представляют собой взятые с обратным знаком компоненты импульса, передаваемого за единицу

---

[1] Другой трактовкой этого же вопроса мы обязаны Г. А. Лоренцу [Koninkl. Akad. van Wetensch., 1915, 23, 1085].

времени в единице объема от заряженной массы электромагнитному полю; компонента $\mathfrak{K}_4$ является энергией, передаваемой полю за единицу времени в единице объема.

Чтобы теперь получить компоненты $\mathfrak{T}_\nu$ тензора энергии электромагнитного поля, нам нужно с помощью равенств (7) и уравнений поля составить для нашего случая уравнение, соответствующее уравнению (42а) Ф. о. Из равенств (7) и уравнения (5) получим сначала

$$\mathfrak{K}_\sigma = \sum_{\mu\nu} F_{\sigma\mu} \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sum \frac{\partial}{\partial x_\nu}(F_{\sigma\mu}\mathfrak{F}^{\mu\nu}) - \sum \mathfrak{F}^{\mu\nu} \partial \frac{F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

Второй член правой части, вследствие уравнения (2), можно преобразовать следующим образом:

$$\sum \mathfrak{F}^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2}\sum \mathfrak{F}^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2}\sum \sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

где последнее выражение из соображений симметрии может быть записано также в форме

$$-\frac{1}{4}\sum\left[\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} F_{\mu\nu}\right].$$

Но это выражение можно записать в виде

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sum \sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{4}\sum F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}).$$

Первый из этих двух членов можно более кратко записать следующим образом:

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sum \mathfrak{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right).$$

Второй же после выполнения дифференцирования и некоторых преобразований будет

$$-\frac{1}{2}\sum \mathfrak{F}^{\mu\alpha} F_{\mu\nu} g^{\nu\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{8}\sum \mathfrak{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\rho\tau} \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Наконец, объединяя все четыре вычисленных члена, получаем соотношение

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x} \mathfrak{T}_\tau^\nu = \mathfrak{K}_\sigma, \tag{8a}$$

где мы полагаем

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = \sum_{\alpha\beta}\left(-\mathfrak{F}^{\nu\alpha} F_{\sigma\alpha} + \frac{1}{4}\mathfrak{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \delta_\sigma^\nu\right). \tag{9}$$

Здесь δ_σ^ν — смешанный тензор, компоненты которого равны соответственно 1 или 0, в зависимости от того, $\sigma = \nu$ или $\sigma \neq \nu$. Сравнение уравнения (8a) с уравнением (42a) Ф. о. показывает, что (8a) является уравнением сохранения энергии-импульса электромагнитного поля, причем компоненты тензора энергии определены формулой (9). С помощью равенств (3) и (6) легко показать, что найденный таким образом тензор энергии электромагнитного поля совпадает с результатом предшествующей, более ранней теории; однако найденная теперь формулировка более наглядна, чем предыдущие.

В этом же журнале (Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, ч. I, 423) напечатано сообщение о докладе Эйнштейна «Некоторые наглядные соображения из области теории относительности», посвященном анализу поведения часов и маятника Фуко. Работа не была опубликована.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ*

При рассмотрении большинства задач теории гравитационного поля можно довольствоваться вычислением величин $g_{\mu\nu}$ в первом приближении. При этом удобно пользоваться мнимой временно́й переменной $x_4 = it$ по тем же самым причинам, что и в специальной теории относительности. При этом под «первым приближением» следует понимать то, что величины $\gamma_{\mu\nu}$, определяемые равенством

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$$

и обладающие тензорным характером относительно линейных ортогональных преобразований, считаются малыми по сравнению с единицей, так что их квадратами и более высокими степенями можно пренебречь по сравнению с первой степенью. При этом

$$\delta_{\mu\nu} = 1, \quad \text{если } \mu = \nu, \quad \text{и } \delta_{\mu\nu} = 0, \quad \text{если } \mu \neq \nu.$$

Мы покажем, что эти величины $\gamma_{\mu\nu}$ могут быть вычислены тем же способом, что и запаздывающий потенциал в электродинамике. Отсюда прежде всего следует, что гравитационные поля распространяются со скоростью света. В связи с этим общим заключением мы исследуем гравитационные волны и механизм их возникновения. Оказывается, что предложенный мной выбор системы отсчета, соответствующий условию $g = |g_{\mu\nu}| = -1$, для вычисления полей в первом приближении неудобен. Я обратил на это внимание благодаря письменному сообщению астронома де Ситтера, который нашел, что при ином выборе системы отсчета можно получить для гравитационного поля покоящейся точечной массы выражение более простое, чем полученное мною ранее [1]. Поэтому ниже я буду исходить из общековариантных уравнений поля.

---

* *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696.

[1] Sitzungsber preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831 (статья 36).

§ 1. Интегрирование приближенных уравнений гравитационного поля

Уравнения поля в их ковариантной форме имеют вид:

$$R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right),$$

$$R_{\mu\nu} = -\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} + \sum_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \mu\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \alpha \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \sum_{\alpha} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_\alpha}.$$

При этом фигурные скобки означают известные символы Кристоффеля, $T_{\mu\nu}$ — ковариантный тензор энергии материи, T — его скаляр. Уравнение (1) в интересующем нас приближении дает путем непосредственного разложения в ряд следующее уравнение:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(\sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha}\right) = -2\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha}\right). \tag{2}$$

Здесь последний член в левой части получается из величины $S_{\mu\nu}$, которая исчезает при предложенном мною выборе координат. Уравнение (2) можно решить, сделав подстановку

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} + \psi\,\delta_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где величина $\gamma'_{\mu\nu}$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{4}$$

Подставляя выражение (3) для $\gamma_{\mu\nu}$ в уравнение (2), получаем для левой части уравнения выражение:

$$-\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(\sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha}\right) + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} - 4\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Второй, третий и пятый члены обращаются в нуль, если величину ψ выбрать согласно уравнению

$$\sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha} + 2\psi = 0, \tag{5}$$

что мы и сделаем. Принимая это во внимание, вместо уравнения (2) получаем

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \left(\gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha}\right) = 2\varkappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha}\right)$$

или

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\,\gamma'_{\mu\nu} = 2\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Здесь следует заметить, что уравнение (6) согласуется с уравнением (4). Легко доказать, что при требуемой нами точности закон сохранения энергии-импульса для материи выражается уравнением:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{7}$$

Если к уравнению (6) применить оператор $\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, то обращается в нуль не только левая часть уравнения (6) в силу условия (4), но и правая часть в силу уравнения (7), как это и должно быть. Заметим, что из равенств (3) и (5) получаются уравнения:

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha}, \tag{8}$$

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha}. \tag{8a}$$

Поскольку величины $\gamma'_{\mu\nu}$ могут быть вычислены в виде запаздывающего потенциала, наша задача решена. Получаем

$$\gamma'_{\mu\nu} = -\frac{\varkappa}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t - r)}{r}\, dV_0. \tag{9}$$

При этом величины x, y, z, t — вещественные координаты x_1, x_2, x_3, $\frac{x_4}{i}$; без индекса они означают координаты точки наблюдения, а с индексом «0» — координаты элемента интегрирования. Величина dV_0 представляет собой трехмерный элемент объема пространства интегрирования, величина r — пространственное расстояние, $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Для дальнейшего нам понадобятся компоненты энергии гравитационного поля. Проще всего их можно получить из уравнения (6). Умножая производную в левой части на $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ и суммируя по индексам μ и ν, после простых преобразований в левой части мы получаем [2]

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\sum_{\mu\nu}\frac{\partial\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{2}\delta_{\sigma\alpha}\sum_{\mu\nu\beta}\left(\frac{\partial\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)^2\right].$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой, очевидно, с точностью до постоянного множителя компоненту энергии $t_{\sigma\alpha}$; множитель же легко определить путем вычисления правой части. Точный закон сохранения энергии-импульса материи имеет вид:

$$\sum_\sigma\frac{\partial\sqrt{-g}T^\sigma_\mu}{\partial x_\sigma}+\frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\sqrt{-g}\,T_{\rho\sigma}=0.$$

С нужной нам степенью точности можно записать

$$\sum_\sigma\frac{\partial T_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma}+\frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}T_{\rho\sigma}=0. \tag{7a}$$

Это выражение и представляет собой уточненное на одну степень уравнение (7). Отсюда следует, что правая часть уравнения (6) после вышеуказанного преобразования принимает вид

$$-4\varkappa\sum\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}.$$

Таким образом, закон сохранения гласит:

$$\sum\frac{\partial(T_{\mu\nu}+t_{\mu\nu})}{\partial x_\nu}=0, \tag{10}$$

причем величины

$$t_{\mu\nu}=\frac{1}{4\varkappa}\left[\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha\beta\tau}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\tau}\right)^2\right] \tag{11}$$

представляют собой компоненты энергии гравитационного поля.

В качестве примера простейшего приложения вычислим гравитационное поле покоящейся в начале координат материальной точки с массой M. Тензор энергии материи при пренебрежении поверхностным силами будет:

$$T_{\mu\nu}=\rho\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}, \tag{12}$$

[2] Здесь Эйнштейн допускает ошибку, которую он исправил в работе 49.— *Прим. ред.*

если принять во внимание, что в первом приближении ковариантный тензор энергии может быть заменен контравариантным. Скаляр представляет собой (естественно измеренную) плотность массы. Из равенств (9) и (12) следует, что все величины $\gamma'_{\mu\nu}$ обращаются в нуль, за исключением величины γ'_{44}, для которой получается

$$\gamma'_{44} = -\frac{\varkappa}{2\pi}\frac{M}{r}. \tag{13}$$

Отсюда с помощью уравнений (8) и (1) для величин $g_{\mu\nu}$ получаем значения

$$\begin{matrix} -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r}. \end{matrix} \tag{14}$$

Эти значения, отличающиеся от полученных нами ранее только в силу выбора системы отсчета, были сообщены мне в письме де Ситтером. Они и натолкнули меня на вышеприведенное простое приближенное решение. Следует, однако, иметь в виду, что использованный здесь выбор координат неприменим в общем случае, поскольку величины $\gamma_{\mu\nu}$ и $\gamma'_{\mu\nu}$ обладают тензорным характером не относительно произвольных, а только относительно линейных ортогональных преобразований.

§ 2. Плоские гравитационные волны

Из уравнений (6) и (9) следует, что гравитационные поля всегда распространяются со скоростью 1, т. е. со скоростью света. Плоские гравитационные волны, бегущие в положительном направлении оси x, следует поэтому искать в виде:

$$\gamma'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} f(x_1 + ix_4) = \alpha_{\mu\nu} f(x - t). \tag{15}$$

Здесь $\alpha_{\mu\nu}$ — постоянные, а f — функция аргумента $x - t$. Если рассматриваемое пространство свободно от материи, т. е. тензор $T_{\mu\nu}$ обращается в нуль, то эта формула удовлетворяет уравнению (6). Уравнения (4) дают следующие соотношения между постоянными $\alpha_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + i\alpha_{14} &= 0, \\ \alpha_{12} + i\alpha_{24} &= 0, \\ \alpha_{13} + i\alpha_{34} &= 0, \\ \alpha_{14} + i\alpha_{44} &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, из 10 постоянных $\alpha_{\mu\nu}$ свободно выбираемыми являются только шесть. Следовательно, волна наиболее общего вида может быть получена путем суперпозиции волн следующих шести типов:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{array}{l} \alpha_{11} + i\alpha_{14} = 0 \\ \alpha_{14} + i\alpha_{44} = 0 \end{array} & \begin{array}{l} \text{б)}\ \alpha_{12} + i\alpha_{24} = 0 \\ \text{в)}\ \alpha_{13} + i\alpha_{34} = 0 \end{array} & \begin{array}{l} \text{г)}\ \alpha_{22} \neq 0 \\ \text{д)}\ \alpha_{23} \neq 0 \\ \text{е)}\ \alpha_{33} \neq 0. \end{array} \end{array} \tag{17}$$

Эти формулы следует понимать так, что не приведенные здесь для каждого типа волн постоянные $\alpha_{\mu\nu}$ равны нулю; т. е. в типе «а» отличны от нуля *только* величины α_{11}, α_{14}, α_{44} и т. д. По свойствам симметрии тип «а» соответствует продольным волнам, типы «б» и «в» — поперечным волнам, а типы «г», «д», «е» имеют характер симметрии нового вида. Типы «б» и «в» отличаются в сущности друг от друга только их ориентацией относительно осей y и z, так же как и типы «г», «д», «е» между собой, так что по сути дела существует три совершенно различных типа волн.

Нас в первую очередь интересует переносимая этими волнами энергия, измеряемая потоком энергии $\mathfrak{S}_x = \frac{1}{i} t_{41}$. Для различных типов волн этот поток получается из выражения (11):

$$\text{а)}\ \frac{1}{i} t_{41} = \frac{f'^2}{4\varkappa} (\alpha_{11}^2 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{41}^2 + \alpha_{44}^2) = 0,$$

$$\text{б)}\ \frac{1}{i} t_{41} = \frac{f'^2}{4\varkappa} (\alpha_{12}^2 + \alpha_{24}^2) = 0,$$

$$\text{в)}\ \frac{1}{i} t_{41} = \frac{f'^2}{4\varkappa} (\alpha_{13}^2 + \alpha_{34}^2) = 0,$$

$$\text{г)}\ \frac{1}{i} t_{22} = \frac{f'^2}{4\varkappa} \alpha_{22}^2 = \frac{1}{4\varkappa} \left(\frac{\partial \gamma'_{22}}{\partial t}\right)^2,$$

$$\text{д)}\ \frac{1}{i} t_{23} = \frac{f'^2}{4\varkappa} \alpha_{23}^2 = \frac{1}{4\varkappa} \left(\frac{\partial \gamma'_{23}}{\partial t}\right)^2,$$

$$\text{е)}\ \frac{1}{i} t_{33} = \frac{f'^2}{4\varkappa} \alpha_{33}^2 = \frac{1}{4\varkappa} \left(\frac{\partial \gamma'_{33}}{\partial t}\right)^2.$$

Таким образом, получается, что энергию переносят только волны последнего типа; при этом энергия, переносимая некоторой плоской волной, равна

$$\mathfrak{S}_x = \frac{1}{i} t_{41} = \frac{1}{4\varkappa}\left[\left(\frac{\partial\gamma'_{22}}{\partial t}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\gamma'_{23}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'_{33}}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{18}$$

§ 3. Потери энергии системой тел путем излучения гравитационных волн

Пусть система, излучение которой должно быть исследовано, на протяжении длительного времени находится в окрестности начала координат. Рассмотрим создаваемое системой гравитационное поле в точке, расстояние R которой от начала координат велико по сравнению с размерами системы. Пусть точка наблюдения расположена на положительной оси x, т. е. пусть

$$x_1 = R, \qquad x_2 = x_3 = 0.$$

Вопрос заключается в том, существуют ли в точке наблюдения волны, распространяющиеся в положительном направлении по оси x и переносящие энергию. Рассуждения § 2 показывают, что такое излучение может быть обусловлено в точке наблюдения только компонентами γ'_{22}, γ'_{23}, γ_{33}'. Следовательно, нужно вычислить только их. Из уравнения (9) получаем:

$$\gamma'_{22} = -\frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{T_{22}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r}\, dV_0.$$

Если система имеет малые размеры, а компоненты энергии ее меняются не очень быстро, то при интегрировании можно без особой ошибки заменить аргумент $t - r$ постоянной величиной $t - R$. Заменяя, кроме того, величину $\frac{1}{r}$ постоянной $\frac{1}{R}$, получаем удовлетворительное в большинстве случаев приближенное выражение

$$\gamma'_{22} = -\frac{\varkappa}{2\pi R}\int T_{22}\, dV_0, \tag{19}$$

причем интегрирование следует понимать в обычном смысле, т. е. при постоянном значении времени. Используя уравнение (7), можно привести это выражение к виду, более удобному для расчетов материальных систем. Из соотношения

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial T_{24}}{\partial x_4}=0$$

после умножения на координату x_2 и интегрирования по всей системе, получаем для интеграла от второго члена выражение

$$-\int T_{22}dV+\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\int T_{24}x_2\,dV\right)=0. \tag{20}$$

Далее, из соотношения

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{43}}{\partial x_3}+\frac{\partial T_{44}}{\partial x_4}=0$$

после умножения на величину $x_2^2/2$ аналогичным образом получаем

$$-\int T_{24}x_2\,dV+\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\int T_{44}\frac{x_2^2}{2}\,dV\right)=0. \tag{21}$$

Из выражений (20) и (21) следует

$$\int T_{22}\,dV=-\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\left(\int T_{44}\frac{x_2^2}{2}\,dV\right),$$

или, вводя вещественные координаты и полагая приближенно, что плотность энергии ($-T_{44}$) произвольно движущейся массы равна плотности материи ρ, получаем:

$$\int T_{22}\,dV=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\rho y^2\,dV\right). \tag{22}$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\gamma'_{22}=-\frac{\varkappa}{4\pi R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\rho y^2\,dV\right). \tag{23}$$

Аналогичным образом находим:

$$\gamma'_{33}=-\frac{\varkappa}{4\pi R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\rho z^2\,dV\right), \tag{23а}$$

$$\gamma'_{23}=-\frac{\varkappa}{4\pi R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\rho yz\,dV\right). \tag{23б}$$

Входящие в формулы (23), (23а) и (23б) интегралы, которые представляют собой не что иное, как зависящие от времени моменты инерции, будем обозначать в дальнейшем для краткости символами J_{22}, J_{23}, J_{33}.

Тогда для интенсивности $\mathfrak{S}_x$ излучения энергии из равенства (18) получим

$$\mathfrak{S}_x = \frac{\varkappa}{64\pi^2 R^2}\left[\left(\frac{\partial^3 J_{22}}{\partial t^3}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^3 J_{23}}{\partial t^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 J_{33}}{\partial t^3}\right)^2\right]. \qquad (20)$$

Отсюда следует, далее, что усредненное по всем направлениям излучение энергии равно [3]

$$\frac{\varkappa}{64\pi^2 R^2}\cdot\frac{2}{3}\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3}\right)^2,$$

где должно быть проведено суммирование по всем 9 комбинациям индексов 1, 2, 3, ибо это выражение, с одной стороны, инвариантно относительно пространственных вращений системы координат, как это легко получить из (трехмерного) тензорного характера интегралов $J_{\alpha\beta}$, а с другой, в случае осевой симметрии ($J_{11} = J_{22} = J_{33}$; $J_{23} = J_{31} = J_{12} = 0$), оно совпадает с выражением (20). Умножая последнее выражение на $4\pi R^2$, получаем для энергии A, излучаемой системой в единицу времени,

$$A = \frac{\varkappa}{24\pi}\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3}\right)^2. \qquad (21)$$

Если измерять время в секундах, энергию в эргах, то перед этим выражением появляется числовой коэффициент $1/c^4$. Кроме того, принимая во внимание, что $\varkappa = 1{,}87\cdot 10^{-27}$, мы видим, что излучаемая энергия A должна практически почти исчезать во всех мыслимых случаях.

Однако при всем этом атом, вследствие внутриатомного движения электронов, должен излучать не только электромагнитную, но и гравитационную энергию, хотя и в ничтожном количестве. Поскольку в природе в действительности ничего подобного не должно быть, то, по-видимому, квантовая теория должна модифицировать не только максвелловскую электродинамику, но также и новую теорию гравитации.

Дополнение. Странный результат, что должны существовать гравитационные волны, не переносящие энергии (типы а, б, в), объясняется просто. Речь при этом идет не о «реальных» волнах, а о «кажущихся», возникающих только от того, что в качестве системы отсчета используется колеблющаяся система координат. Это можно просто увидеть из следующего. Если с самого начала выбрать систему координат обычным образом так, чтобы $\sqrt{g} = 1$, то вместо уравнения (2) в качестве уравнения поля в

---

[3] Окончательные формулы в работе неверны. См. формулу (30) и последующие замечания в работе 49.— *Прим. ред.*

отсутствие материи получим:

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha} + \sum_\alpha \frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha} - \sum_\alpha \frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 0.$$

Если в этом уравнении сделать подстановку

$$\gamma_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} f\,(x_1 + ix_4),$$

то для постоянных $\alpha_{\mu\nu}$ получим 10 уравнений, из которых следует, что могут быть отличными от нуля *только* α_{22}, α_{32}, α_{33} (причем $\alpha_{22} + \alpha_{33} \doteq 0$). При таком выборе системы отсчета существуют, следовательно, только те типы волн (г, д, е), которые переносят энергию. Все остальные типы волн при таком выборе системы координат исчезают, и в этом смысле они не являются «реальными» волнами.

Таким образом, хотя в этом исследовании и было удобно сначала не накладывать на выбор координатной системы никаких ограничений, когда речь шла о вычислении первого приближения, но последний результат показывает, что выбор координатной системы, согласно условию $\sqrt{-g} = 1$, имеет глубокое физическое оправдание.

Поступила 29 июня 1916 г.

В этой работе впервые изложена теория гравитационных волн и вычислены потери энергии системой, связанные с излучением. Следует отметить замечание о возможных квантовых изменениях в теории. В работе содержится расчетная ошибка, которая исправлена в работе 49.

ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ* [1]

В последнее время Г. А. Лоренцу и Д. Гильберту [2] удалось придать общей теории относительности особенно наглядную форму тем, что они вывели ее уравнения из одного единственного вариационного принципа. То же самое будет сделано и в этой статье.

Цель будет заключаться в том, чтобы сделать основные соотношения возможно более ясными и настолько общими, насколько это допускает точка зрения общей относительности. В противоположность изложению, главным образом Гильберта, будет сделано по возможности меньше специальных допущений о свойствах материи.

В то же время, в противовес моему последнему изложению предмета, выбор координатной системы останется теперь совершенно свободным.

§ 1. Вариационный принцип и уравнения гравитационного поля и материи

Пусть гравитационное поле, как обычно, описывается тензором [3] $g_{\mu\nu}$ (или соответственно, $g^{\mu\nu}$), а материя (включая электромагнитное поле) — любым числом пространственно-временны́х функций $q_{(\rho)}$, инвариантные свойства которых нам безразличны.

---

* *Das hamiltonisches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, **2**, 1111—1116.

[1] Русский перевод помещен в сб. «Принцип относительности», М. — Л. 1935. —*Ред.*

[2] Четыре статьи Г. А. Лоренца в «Publicationen d. Königl. Akad. van Wetensch. te Amsterdam», за 1915 и 1916 годы; D. Hilbert. Gött. Nachr., 1915, H. 3.

[3] Вначале мы не используем тензорный характер $g_{\mu\nu}$.

Пусть далее $\mathfrak{H}$ есть функция от

$$g^{\mu\nu},\ g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right),\qquad g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}\left(=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma\,\partial x_\tau}\right),\qquad q_\rho \text{ и } q_{(\rho)\alpha}\left(=\frac{\partial q_{(\rho)}}{\partial x_\alpha}\right).$$

В таком случае вариационный принцип

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\,d\tau\right\}=0 \tag{1}$$

дает столько дифференциальных уравнений, сколько имеется подлежащих определению функций $g_{\mu\nu}$ и $q_{(\rho)}$, если только мы при этом установим, что $g^{\mu\nu}$ и $q_{(\rho)}$ должны варьироваться независимо друг от друга и так, чтобы на границах интегрирования все $\delta q_{(\rho)}$, $\delta g^{\mu\nu}$ и $\dfrac{\partial\delta g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ обращались в нуль.

Допустим теперь, что функция $\mathfrak{H}$ по отношению ко всем $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ линейна и притом такова, что коэффициенты при $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ зависят только от $g^{\mu\nu}$. В таком случае вариационный принцип (1) можно заменить другим, более удобным для нас вариационным принципом. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \mathfrak{H}\,d\tau=\int \mathfrak{H}^*\,d\tau+F, \tag{2}$$

где F — некоторый интеграл, взятый по границе рассматриваемой области, а величина $\mathfrak{H}^*$ зависит только от $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$, но не зависит больше от $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$.

Из равенства (2) для интересующих нас вариаций получаем

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\,d\tau\right\}=\delta\left\{\int \mathfrak{H}^*\,d\tau\right\}; \tag{3}$$

поэтому мы в праве заменить вариационный принцип (1) следующим более удобным:

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}^*\,d\tau\right\}=0. \tag{1a}$$

Выполнив вариации по $g^{\mu\nu}$ и $q_{(\rho)}$, получим следующие уравнения гравитационного поля [4] и материи:

---

[4] Ради краткости в формулах пропущен знак суммы Σ. Необходимо всегда иметь в виду, что суммирование выполняется по тем индексам, которые встречаются дважды в том или ином члене. Следовательно, в уравнении (4), например, $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)$ означает $\sum\limits_\alpha \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)$.

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{5}$$

§ 2. Независимое существование гравитационного поля

Если не делать никаких специальных допущений о том, каким образом $\mathfrak{H}$ зависит от $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\sigma$, $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$, то нельзя разделить компоненты энергии на две части, из которых одна относится к гравитационному полю, а другая — к материи. Чтобы теория допускала подобное деление, мы принимаем, что

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \mathfrak{M}, \tag{6}$$

где $\mathfrak{G}$ зависит только от $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\sigma$, $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, а $\mathfrak{M}$ — только от $g^{\mu\nu}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$. Тогда уравнения (4) и (5) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{8}$$

При этом $\mathfrak{G}^*$ связано с $\mathfrak{G}$ так же, как $\mathfrak{H}^*$ с $\mathfrak{H}$. Однако следует заметить, что уравнения (8) и (5) пришлось бы заменить другими, если бы мы приняли, что $\mathfrak{M}$ и соответственно $\mathfrak{H}$ зависят не только от первых, но и от высших производных от $q_{(\rho)}$. Равным образом возможно, что $q_{(\rho)}$ следовало бы рассматривать не независимыми друг от друга, но как величины, связанные друг с другом некоторыми условиями. Все это не имеет значения для дальнейшего изложения, так как последнее основано исключительно на уравнениях (7), которые получены посредством варьирования интеграла по $g^{\mu\nu}$.

§ 3. Свойства уравнений гравитационного поля, вытекающие из теории инвариантов

Введем теперь допущение, что

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \tag{9}$$

представляет собой инвариант. Тем самым установлен характер преобразования $g_{\mu\nu}$. О характере преобразования величин $q_{(\rho)}$, описывающих материю, мы не делаем никаких допущений. Напротив, пусть функции

$$H = \frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{-g}}, \quad G = \frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}} \text{ и } M = \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-g}}$$

будут инвариантами по отношению к любым преобразованиям пространственно-временны́х координат. Из этих предпосылок вытекает общая ковариантность уравнений (7) и (8), выведенных из (1). Далее следует, что G (с точностью до постоянного множителя) должно равняться скаляру римановского тензора кривизны, ибо другого инварианта со свойствами, которыми должен обладать G, не существует [5].

Тем самым вполне определены $\mathfrak{G}^*$ и вместе с ним левая часть уравнения поля (7) [6].

Из общего принципа относительности вытекают определенные свойства функции $\mathfrak{G}^*$, которые мы теперь и выведем. С этой целью произведем бесконечно малое преобразование координат, полагая

$$x'_\nu = x_\nu + \Delta x_\nu; \tag{10}$$

здесь Δx_ν представляют собой любые бесконечно малые функции координат, x'_ν — координаты мировой точки в новой системе, x_ν — координаты той же точки в старой системе. Как для координат, так и для всякой другой величины ψ справедлив закон преобразования вида

$$\psi' = \psi + \Delta\psi,$$

причем $\Delta\psi$ всегда может быть выражено через Δx_ν. Из ковариантных свойств $g^{\mu\nu}$ легко выводятся законы преобразования для $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_\sigma$:

$$\Delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha}, \tag{11}$$

$$\Delta g^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial (\Delta g^{\mu\nu})}{\partial x_\sigma} - g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial \Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma}. \tag{12}$$

Так как $\mathfrak{G}^*$ зависит только от $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_\sigma$, то, пользуясь соотношениями

---

[5] Этим объясняется, почему требования общей теории относительности приводят к вполне определенной теории тяготения.

[6] Интегрируя по частям, получаем

$$\mathfrak{G}^* = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left[\begin{Bmatrix} \mu\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \beta \end{Bmatrix} \right].$$

(13) и (14), можно вычислить $\Delta\mathfrak{G}^*$. Таким образом, получается

$$\sqrt{-g}\,\Delta\left(\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}\right) = S_\sigma^\nu \frac{\partial \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu} + 2\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}, \tag{13}$$

где

$$S_\sigma^\nu = 2\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} + 2\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g_\alpha^{\mu\nu} + \mathfrak{G}^* \delta_\sigma^\nu - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\nu^{\mu\sigma}} g_\sigma^{\mu\alpha}. \tag{14}$$

Из этих двух уравнений мы выводим два следствия, которые будут важны для дальнейшего. Мы знаем, что $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ инвариантно по отношению к любым преобразованиям, но $\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}$ этим свойством не обладает. Однако легко доказать, что последняя величина инвариантна по отношению к л и н е й н ы м преобразованиям координат. Отсюда следует, что правая часть равенства (13) всегда обращается в нуль, когда все $\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}$ равны нулю. Отсюда следует, что $\mathfrak{G}^*$ должно удовлетворять тождеству

$$S_\sigma^\nu \equiv 0. \tag{15}$$

Далее, если мы будем брать такие Δx_ν, которые отличны от нуля только внутри рассматриваемой области, но обращаются в нуль на бесконечно близком расстоянии от границы области, то, при выбранном нами преобразовании, значение интеграла, входящего в уравнение (2) и взятого по границе области, не изменится; следовательно,

$$\Delta(F) = 0,$$

и поэтому [7]

$$\Delta\left\{\int \mathfrak{G}\, d\tau\right\} = \Delta\left\{\int \mathfrak{G}^*\, d\tau\right\}.$$

Однако левая часть уравнения должна обратиться в нуль, так как и $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ и $\sqrt{-g}\,d\tau$ — инварианты. Следовательно, правая часть тоже равна нулю. На основании (14) и (15) сначала получаем

$$\int \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} d\tau = 0. \tag{16}$$

Если преобразовать это равенство путем двукратного интегрирования по частям и принять во внимание свободный выбор Δx_σ, то получим

[7] Если ввести $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ вместо $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}^*$.

тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \, \partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}\right) \equiv 0. \tag{17}$$

Из двух тождеств (16) и (17), вытекающих из инвариантности $\mathfrak{D}/\sqrt{-g}$ и, следовательно, из общего принципа относительности, сделаем некоторые выводы. Для этого преобразуем сначала уравнения гравитационного поля путем смешанного умножения на $g^{\mu\nu}$. Тогда получим (при перестановке индексов σ и ν) уравнения, эквивалентные уравнениям поля (7),

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}\right) = -(\mathfrak{T}^\nu_\sigma + \mathfrak{t}^\nu_\sigma), \tag{18}$$

где

$$\mathfrak{T}^\nu_\sigma = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}, \tag{19}$$

$$\mathfrak{t}^\nu_\sigma = -\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}_\alpha + \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^*\delta^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\alpha}_\nu} g^{\mu\alpha}_\sigma\right). \tag{20}$$

Последнее выражение для $\mathfrak{t}^\nu_\sigma$ следует из равенств (14) и (15). Дифференцируя (18) по x_ν и суммируя по ν, на основании (17) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}^\nu_\sigma + \mathfrak{t}^\nu_\sigma) = 0. \tag{21}$$

Формула (21) выражает закон сохранения импульса и энергии. Назовем $\mathfrak{T}^\nu_\sigma$ компонентами энергии материи и $\mathfrak{t}^\nu_\sigma$ — компонентами энергии гравитационного поля.

Умножив уравнения (7) гравитационного поля на $g^{\mu\nu}_\sigma$ и просуммировав их по μ и ν, получим, в силу (20),

$$\frac{\partial \mathfrak{t}^\nu_\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_\sigma \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

или, в силу (19) и (21),

$$\frac{\partial \mathfrak{T}^\nu_\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_\sigma \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0, \tag{22}$$

где $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ означает $g_{\nu\sigma}\mathfrak{T}^\sigma_\mu$. Мы имеем здесь четыре уравнения, которым должны удовлетворять компоненты энергии материи.

Следует отметить, что общековариантные законы сохранения импульса и энергии (21) и (22) получены из одних лишь уравнений (7) гравитационного поля в соединении с постулатом общей ковариантности (относительности) без использования уравнений поля (8) для материи.

Поступила 2 ноября 1916 г.

43

О СПЕЦИАЛЬНОЙ И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(общедоступное изложение) *[1]

Предисловие

Настоящая книга имеет целью дать возможно точное представление о теории относительности читателям, интересующимся этой теорией с общенаучной, философской точки зрения, но не владеющим математическим аппаратом теоретической физики[2]. Предполагается, что читатель имеет общеобразовательную подготовку, а также достаточно терпения и силы воли. Автор приложил много усилий для того, чтобы достигнуть по возможности более ясного и простого изложения основных мыслей в той последовательности и связи, в какой они фактически возникли. В интересах ясности оказались неизбежными повторения; пришлось отказаться от стремления к изящности изложения; я твердо придерживался рецепта гениального теоретика Больцмана — оставить изящество портным

---

* *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie* (*Gemeinverständlich*). Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1920.

[1] Первое издание вышло в 1917 г. Перевод этой книги вместе с приложениями I и II выполнен с 8-го немецкого издания 1920 года. Приложения III и IV переведены по 15-му английскому изданию. Приложение V, написанное к 15-му, английскому изданию, включено во II том (статья 139). — *Прим. ред.*

[2] Математические основания специальной теории относительности можно найти в работах Г. А. Лоренца, А. Эйнштейна, Г. Минковского, вошедших в сб. «Принцип относительности», который входит в Собрание монографий, издаваемых Тойбнером (B. G. Teubner), а также в прекрасной книге М. Лауэ «Принцип относительности» (Vieweg, Braunschweig). Общая теория относительности вместе с необходимой для нее математической теорией инвариантов изложена в брошюре автора «Основы общей теории относительности» (J. A. Barth, 1916) (статья 38.— *Ред.*); эта брошюра предполагает некоторое знакомство читателя со специальной теорией относительности (см. также сб. «Принцип относительности». — *Ред.*)

и сапожникам. Я, по-видимому, не утаил от читателя трудности, лежащие в основах теории. Эмпирические физические основы теории намеренно изложены очень кратко, чтобы читатель, близко не соприкасающийся с физикой, не оказался в положении путника, который из-за деревьев не видит леса. Пусть чтение этой книги доставит читателю несколько радостных часов.

А. Эйнштейн

Декабрь 1916 г.

Добавление к третьему изданию

В этом (1918) году в издании Шпрингера появилась обстоятельная монография по общей теории относительности, написанная Г. Вейлем: «Пространство. Время. Материя» («Raum. Zeit. Materie»), которую я рекомендую математикам и физикам.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

О СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Физическое содержание геометрических теорем

Вероятно и ты, дорогой читатель, еще в юности познакомился со стройным зданием геометрии Эвклида и, быть может, скорее с уважением, чем с любовью вспоминаешь об этом величественном сооружении, по ступеням которого многие часы водили тебя добросовестные учителя. По-видимому, вспоминая об этом прошлом, ты с презрением отнесешься ко всякому, кто посмел бы объявить неверным хотя бы самое незначительное положение этой науки. Но, быть может, это чувство гордой уверенности и покинет тебя, если тебя спросят: «Что понимаешь ты под утверждением, что эти положения истинны?» Коротко остановимся на этом вопросе.

Геометрия исходит, во-первых, из определенных основных понятий: плоскости, точки, прямой, с которыми мы связываем более или менее ясные представления, и, во-вторых, из определенных простейших положений (аксиом), которые мы склонны считать «истинными», основываясь на указанных представлениях. Все остальные положения сводятся к этим аксиомам, т. е. доказываются на основе логического метода, справедливость которого мы чувствуем себя вынужденными признать. Предложение считается правильным или «истинным», если оно выводится из аксиом привычным путем. Таким образом, вопрос об «истинности» отдельных геометрических положений сводится к вопросу об «истинности» аксиом. Однако давно известно, что последний вопрос не только не может быть решен с помощью методов геометрии, но вообще сам по себе не имеет смысла. Нельзя ставить вопрос об истинности того, что через две точки проходит только одна прямая. Можно лишь сказать, что эвклидова геометрия имеет дело с объектами, которые называются «прямыми» и которые она наделяет свойством однозначно определяться двумя своими точками. Понятие «истины» неприменимо к заключениям чистой геометрии, поскольку под словом «истина» в последнем счете мы всегда подразумеваем соответствие «реальному» предмету; однако геометрия занимается не отношением ее понятий к предметам опыта, а лишь логической связью этих понятий между собой.

Нетрудно объяснить, почему тем не менее мы считаем положения геометрии «истинными». Геометрическим понятиям более или менее точно соответствуют предметы природы; при этом последние несомненно являются единственной причиной возникновения указанных понятий. Хотя геометрия и отвлекается от этого, чтобы придать своим построениям возможно бо́льшую логическую законченность, все же, например, привычка считать за отрезок кратчайшее расстояние между двумя заданными точками на практически твердом теле глубоко коренится в навыках нашего мышления. Далее, мы привыкли считать три точки находящимися на одной прямой, если при подходящем выборе пункта наблюдения одним глазом кажущиеся места этих точек могут быть приведены в совпадение.

Если теперь, следуя навыкам мышления, присоединим к теоремам эвклидовой геометрии одно единственное утверждение, а именно, что двум точкам практически твердого тела всегда соответствует одно и то же расстояние (отрезок), какие бы изменения положения тела не происходили, то теоремы эвклидовой геометрии превращаются в теоремы о возможных относительных положениях практически твердых тел [1].

Дополненную таким образом геометрию следует рассматривать как область физики. Теперь уже с полным правом можно поставить вопрос об «истинности» геометрических теорем, интерпретируемых указанным образом; в самом деле, можно спросить, справедливы ли теоремы для тех реальных предметов, которые мы связали с геометрическими понятиями. Выражаясь несколько неточно, мы можем также сказать, что под «истинностью» некоторого положения геометрии в этом смысле мы понимаем его справедливость при построении с помощью циркуля и линейки.

---

[1] Этим понятие прямой связывается с реальным предметом природы. Три точки A, B и C неизменяемого тела лежат на одной прямой, если при заданных точках A и C точка B избрана так, что сумма расстояний $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ становится возможно меньшей. Этого дополнительного указания в данном случае достаточно.

Убеждение в «истинности» положений геометрии в этом смысле основывается, конечно, исключительно на весьма несовершенном опыте. Мы допустим сначала такую истинность положений геометрии, чтобы в последней части наших рассуждений (при рассмотрении общей теории относительности) установить, как и насколько эта истинность должна быть ограничена.

§ 2. Система координат

На основании указанной физической интерпретации расстояния мы получаем также возможность установить путем измерений расстояние между двумя точками твердого тела. Для этого нам необходима раз навсегда определенная длина (линейка S), которая будет применяться в качестве единичного масштаба. Пусть A и B — две точки твердого тела; тогда соединяющая их прямая может быть построена по законам геометрии. Далее на этой прямой будем откладывать длины S, начиная от точки A, до тех пор, пока не достигнем B. Число укладывающихся на этом отрезке длин и будет числом, измеряющим длину отрезка $\overline{AB}$. На этом основано всякое измерение длины [2].

Всякое пространственное описание места какого-либо события или предмета основано на том, что указывается точка некоторого твердого тела (тела отсчета), с которой совпадает данное событие, причем это относится не только к научному описанию, но и к повседневной жизни. Например, анализируя задание места: «в Берлине, на Потсдамской площади», мы находим, что это означает следующее. Твердым телом, к которому относится указанное место, является Земля, а «Потсдамская площадь в Берлине»,— отмеченная на этом теле точка с данным названием, с которой пространственно совпадает рассматриваемое событие [3].

Подобный примитивный способ задания места пригоден лишь для мест на поверхности твердых тел и связан с наличием различных точек на этой поверхности. Проследим, как человеческое мышление освобождается от обоих этих ограничений, не меняя сущности способа задания места! Если, например, над Потсдамской площадью проплывает облако, то его положение по отношению к земной поверхности может быть определено

---

[2] При этом предполагается, что измерительная линейка укладывается целое число раз, т. е. в результате получается целое число. В общем случае это затруднение можно преодолеть, пользуясь разделенным масштабом, введение которого не вносит ничего нового.

[3] Здесь нет нужды в дальнейшем исследовании того, что означает «пространственное совпадение»; это понятие настолько ясно, что в каждом отдельном частном случае вряд ли могут возникнуть сомнения в его применимости.

следующим образом: на площади отвесно ставят шест, который достает до облака. Измеренная масштабом длина шеста вместе с указанием положения основания шеста полностью определяет в этом случае местонахождение облака. На этом примере мы видим, каким путем развивалось понятие места.

а) Неподвижное твердое тело, к которому относится указание места, будучи увеличено в размерах так, чтобы оно достигало предмета, местоположение которого надлежит определить.

б) Для характеристики положения, вместо отметки с названием, пользуются числом (в данном случае измеренной масштабом длиной шеста).

в) О высоте облака говорят и тогда, когда шеста, достигающего до облака, в действительности и нет. В нашем случае длину шеста можно найти, оптически определяя положение облака с различных точек земной поверхности, принимая во внимание законы распространения света.

Из изложенного выше ясно, что для описания места удобно отказаться от использования отметок на неподвижных твердых телах с особыми названиями и пользоваться числами. В физических измерениях это достигается применением декартовой системы координат.

Последняя состоит из трех взаимно перпендикулярных неподвижных плоскостей, связанных твердым телом. Место какого-либо события относительно системы координат определяется (в основных чертах) длиной трех перпендикуляров (или координат x, y, z), которые могут быть опущены из этого места на указанные три плоскости. Длины этих трех перпендикуляров можно определить путем ряда манипуляций с твердыми масштабами, пользуясь теоремами и методами эвклидовой геометрии.

На практике эти три плоскости, образующие систему координат, обычно не применяются, а сами координаты определяются без построений с твердыми масштабами. Однако, во избежание неясности в результатах и выводах физики и астрономии, всегда следует искать физический смысл определения места [4].

Таким образом, мы приходим к следующему выводу. Всякое пространственное описание событий предполагает наличие твердого тела, с которым события связаны пространственно. Эта связь предполагает, что «расстояния» подчиняются законам эвклидовой геометрии, причем сами «расстояния» определяются физически двумя отметками на твердом теле.

[4] Уточнение и видоизменение этих представлений потребуется нам лишь в связи с общей теорией относительности, которая рассматривается во второй части этой книги.

§ 3. Пространство и время в классической механике

Если я без долгих размышлений и подробных разъяснений сформулирую задачу механики следующим образом: «механика описывает изменение положения тел в пространстве с течением времени», то этим я приму на свою совесть не один тяжкий грех; в этих грехах я и покаюсь прежде всего.

Неясно, что следует понимать здесь под словами «место» и «пространство». Я стою у окна равномерно движущегося железнодорожного вагона и выпускаю из рук на полотно дороги камень, не сообщая ему скорости. Тогда я увижу (отвлекаясь от сопротивления воздуха), что камень падает прямолинейно вниз. Прохожий, находящийся вблизи полотна железной дороги и наблюдающий одновременно со мной за падением камня, видит, что камень падает по параболе. Тогда я задаю вопрос: где «в действительности» находятся «места», через которые проходит камень при падении, — на прямой линии или на параболе? Далее, что означает при этом движение «в пространстве»? Ответ очевиден из соображений, высказанных в § 2. Прежде всего оставим в стороне неясное слово «пространство», под которым, признаемся, мы ничего определенного не подразумеваем; вместо этого мы рассмотрим «движение по отношению к практически твердому телу отсчета». В предыдущем параграфе мы дали определение понятия места относительно тела отсчета (железнодорожный вагон или поверхность Земли). Заменяя понятие «тело отсчета» понятием «система координат», полезным для математического описания, мы можем сказать: камень описывает прямую линию относительно системы координат, жестко связанной с вагоном, и параболу относительно системы координат, жестко связанной с поверхностью Земли. Из этого примера следует, что не существует траектории [5] самой по себе; всякая траектория относится к определенному телу отсчета.

Однако *полное* описание движения может быть дано лишь в том случае, если будет указано, как меняется положение тела со временем; иначе говоря, для каждой точки траектории должен быть указан момент времени, когда тело находится в этой точке. К этим указаниям должно быть добавлено такое определение времени, чтобы соответствующие промежутки времени можно было рассматривать как величины, принципиально доступные наблюдению (результаты измерений). В рассмотренном примере мы можем удовлетворить этому условию, оставаясь на почве классической механики, следующим образом. Представим себе двое

[5] Т. е. кривой, по которой движется тело.

совершенно одинаковых часов; одни часы находятся у человека в железнодорожном вагоне, другие — у прохожего, находящегося у полотна железной дороги. Каждый наблюдатель точно устанавливает, в каком месте по отношению к соответствующему телу отсчета находится камень в момент тикания часов, которые каждый из них держит в руке. При этом мы не принимаем во внимание неточность, возникающую вследствие конечной величины скорости распространения света. Об этой и о другой возникающей здесь трудности мы будем говорить позднее.

§ 4. Галилеева система координат

Основной закон механики Галилея — Ньютона, известный под названием закона инерции, гласит: «Тело, достаточно удаленное от других тел, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения». В этом законе говорится не только о движении тел, но также и о телах отсчета или системах координат, которыми пользуются при механическом описании. Телами отсчета, к которым в хорошем приближении применим закон инерции, являются, очевидно, неподвижные звезды. Но если мы пользуемся системой координат, которая жестко связана с Землей, то относительно такой системы каждая неподвижная звезда описывает в течение одних (астрономическх) суток круг огромного радиуса в противоречии с буквальным смыслом закона инерции. Если, таким образом, строго придерживаться этого закона, то движение следует относить лишь к таким системам координат, по отношению к которым неподвижные звезды не совершают никаких круговых движений. Систему координат, состояние движения которой таково, что относительно нее выполняется закон инерции, мы называем «галилеевой системой координат». Законы механики Галилея — Ньютона применимы только для галилеевой системы координат.

§ 5. Принцип относительности (в узком смысле)

Для возможно большей наглядности мы снова будем исходить из нашего примера равномерно движущегося железнодорожного вагона. Назовем его движение равномерной трансляцией («равномерной» — так как оно имеет постоянные скорость и направление, и «трансляцией» —так как вагон, меняя свое положение относительно железнодорожного полотна, не испытывает никаких вращений). Пусть в воздухе летит ворона, прямолинейно и равномерно, если наблюдать с полотна железной дороги. Тогда с точки зрения наблюдателя, находящегося в движущемся вагоне, скорость этой вороны будет иметь другую величину и направление, но движение также будет прямолинейным и равномерным. Или в абстрактной форме: если масса m движется прямолинейно и равномерно относительно системы координат K, то она движется прямолинейно и равномерно также и по отношению к другой системе координат K', в случае, если последняя движется равномерно и прямолинейно относительно K. Отсюда, с учетом рассуждений предшествующих параграфов, вытекает следующее.

Если K — галилеева система координат, то и всякая другая система координат K', движущаяся относительно K равномерно и прямолинейно, также является галилеевой системой. В системе K', так же как и в системе K, выполняются законы механики Галилея — Ньютона.

Сделаем еще один шаг в сторону обобщения, высказав следующее утверждение. Если K' — система координат, движущаяся равномерно и без вращения относительно системы K, то явления природы протекают относительно системы K' по тем же общим законам, что и относительно системы K. Это положение мы называем «принципом относительности» (в узком смысле).

Пока существовало убеждение, что все явления природы могут быть описаны с помощью классической механики, можно было не сомневаться в справедливости этого принципа относительности. Однако с новейшим развитием электродинамики и оптики становилось все более очевидным, что одной классической механики недостаточно для полного описания физических явлений. Тем самым вопрос о справедливости принципа относительности стал весьма спорным, причем не исключалась возможность отрицательного ответа на этот вопрос.

Тем не менее имеются два общих факта, которые говорят в пользу справедливости принципа относительности. Если классическая механика и не дает достаточно широкой базы для описания всех физических явлений, то в ней все же содержится весьма значительная доля истины; достаточно вспомнить, что она с поразительной отчетливостью описывает реальные движения небесных тел. Поэтому принцип относительности в области механики должен выполняться также с большой точностью. Однако априори маловероятно, чтобы столь общий принцип, выполняющийся с такой точностью в одной области явлений, был неприменим в другой области явлений.

Второй аргумент, к которому мы позднее вернемся, состоит в следующем. Если принцип относительности (в узком смысле) не выполняется, то равномерно движущиеся относительно друг друга галилеевы системы координат K, K', K'' и т. д. неравноценны для описания явлений природы. Тогда единственным мыслимым предположением было бы то, что законы природы могут быть особенно просто и естественно сформулированы только тогда, когда из всех галилеевых систем координат выбрана в качестве исходной одна система K_0, имеющая определенное состояние движения. Тогда мы вправе были бы (ввиду преимуществ в описании природы) считать эту систему «абсолютно покоящейся», а другие галилеевы системы — «движущимися». Если бы, например, железнодорожное полотно было системой K_0, то наш вагон был бы системой K, относительно которой были бы справедливы более сложные законы, чем относительно системы K_0. Эта бо́льшая сложность объяснялась бы тем, что вагон K («действительно») движется относительно K_0. В этих общих законах природы, сформулированных относительно системы K, должны были бы играть роль величина и направление скорости движения вагона. Можно было бы, например, ожидать, что высота звука органной трубы была бы иной, если бы ось последней была параллельна направлению движения, чем в случае, если бы она была перпендикулярна этому направлению. Но наша Земля, ввиду ее движения по орбите вокруг Солнца, может сравниваться с вагоном, движущимся со скоростью около 30 *км/сек*. Поэтому, в случае неприменимости принципа относительности, следовало бы ожидать, что в законы природы должно войти направление движения Земли в каждый данный момент, т. е. поведение физических систем должно зависеть от их пространственной ориентации относительно Земли. В самом деле, вследствие изменения в течение года направления скорости орбитального движения Земли, последняя не может в течение всего года оставаться в покое относительно гипотетической системы. Но при всей тщательности наблюдений до сих пор не удалось обнаружить подобную анизотропию земного физического пространства, т. е. физическую неравноценность различных направлений. Этот аргумент в пользу принципа относительности является особенно веским.

§ 6. Теорема сложения скоростей в классической механике

Пусть железнодорожный вагон, с которым мы уже не раз имели дело, движется по рельсам с постоянной скоростью v. Человек, находящийся в вагоне, идет вдоль вагона со скоростью w в направлении движения вагона. С какой скоростью W передвигается этот человек относительно полотна железной дороги? Единственный возможный ответ может быть дан, по-видимому, из следующего рассуждения. Если бы человек остановился на одну секунду, то он переместился бы вперед относительно полотна дороги на отрезок v, равный скорости движения вагона. Но в действительности человек в течение этой секунды, кроме того, перемещается и относительно вагона, а следовательно, и относительно полотна дороги, на отрезок w, равный скорости его движения по вагону. Таким образом, в течение рассматриваемой секунды он перемещается относительно полотна дороги всего на расстояние

$$W = v + w.$$

В дальнейшем мы увидим, что все это рассуждение, выражающее теорему сложения скоростей в классической механике, неверно и, следовательно, только что записанный закон не соответствует действительности. Однако временно мы будем считать его верным.

§ 7. Кажущаяся несовместимость закона распространения света с принципом относительности

Вряд ли имеется в физике более простой закон, чем тот, согласно которому распространяется свет в пустом пространстве. Всякий школьник знает, или по крайней мере думает, будто он знает, что свет распространяется прямолинейно со скоростью 300 000 *км/сек*. Мы знаем, во всяком случае с большой точностью, что эта скорость одинакова для всех цветов спектра, ибо если бы это было не так, то при закрытии звезды ее темным спутником мы наблюдали бы минимум излучения для разных цветов неодновременно. Подобные же рассуждения, основанные на наблюдении двойных звезд, позволили голландскому астроному де Ситтеру показать, что скорость распространения света не может зависеть от скорости движения тела, испускающего свет. Предположение о зависимости скорости света от направления «в пространстве» является само по себе крайне маловероятным.

Короче говоря, предположим, что школьник, доверяющий простому закону постоянной скорости света c (в пустоте), прав. Кто бы мог подумать, что этот простой закон приводит добросовестно мыслящего физика к огромным логическим затруднениям? Эти затруднения заключаются в следующем.

Мы должны относить процесс распространения света, как и всякий другой процесс, к некоторому твердому телу отсчета (системе координат). Снова выберем в качестве такового железнодорожное полотно. Представим, что воздух над этим последним удален. Пусть вдоль полотна дороги распространяется луч света, который, согласно сказанному выше, движется относительно полотна со скоростью c. Пусть по рельсам снова движется со скоростью v наш вагон, притом в том же направлении, в котором распространяется световой луч, но, конечно, гораздо медленнее. Возникает вопрос, какова скорость распространения света относительно вагона? Нетрудно видеть, что здесь можно применить соображения предыдущего параграфа. Теперь роль человека, движущегося относительно вагона, выполняет световой луч. Вместо скорости W человека относительно полотна дороги здесь выступает скорость света по отношению к последнему. Пусть w — искомая скорость света относительно вагона, для которой, следовательно, имеем

$$w = c - v.$$

Таким образом, скорость распространения светового луча относительно вагона оказывается меньше c.

Но этот результат противоречит изложенному в § 5 принципу относительности. В самом деле, согласно принципу относительности, закон распространения света в пустоте, как и всякий другой закон природы, должен бы быть одинаковым как для полотна железной дороги, принимаемого в качестве тела отсчета, так и для вагона. Но, согласно нашим рассуждениям, это кажется невозможным. Если всякий световой луч распространяется относительно полотна дороги со скоростью c, то, казалось бы, поэтому скорость распространения света относительно вагона должна быть иной — в противоречии с принципом относительности.

В связи с этой дилеммой кажется неизбежным отказаться либо от принципа относительности, либо от простого закона распространения света в пустоте. Читатель, внимательно следивший за изложенными выше рассуждениями, несомненно, считает, что принцип относительности, являющийся почти неоспоримым в силу своей естественности и простоты, должен быть сохранен, тогда как закон распространения света в пустоте следует заменить более сложным законом, совместимым с принципом относительности. Однако развитие теоретической физики показало, что этот путь неприемлем. Глубокие теоретические исследования электродинамических и оптических процессов в движущихся телах, выполненные Г. А. Лоренцом, показали, что опыты в этих областях приводят к необходимости такой теории электромагнитных явлений, неизбежным следствием которой является закон постоянства скорости света в пустоте. Поэтому ведущие теоретики были скорее склонны отказаться от принципа относительности, хотя и не удавалось найти ни одного экспериментального факта, противоречащего этому принципу.

Здесь и выступила на сцену теория относительности. В результате анализа физических понятий времени и пространства было показано, что в действительности принцип относительности и закон распространения света совместимы и что, систематически придерживаясь обоих этих законов, можно построить логически безупречную теорию. Основные положения этой теории, которую, в отличие от ее обобщения, мы называем «специальной теорией относительности», будут изложены ниже.

§ 8. О понятии времени в физике

В двух весьма удаленных друг от друга местах A и B нашего железнодорожного полотна в рельсы ударила молния. Кроме того, я утверждаю, что оба эти удара произошли одновременно. Если теперь я спрошу тебя, читатель, имеет ли какой-либо смысл это последнее утверждение, то ты уверенно ответишь мне: «Да». Однако, если я попрошу тебя более точно объяснить мне смысл этого моего утверждения, то после некоторого размышления ты заметишь, что ответ на этот вопрос не так прост, как это кажется на первый взгляд.

Через некоторое время тебе, быть может, придет в голову следующий ответ: «Смысл этого утверждения ясен сам по себе и не нуждается в дальнейших объяснениях; однако я должен несколько подумать, получив предложение определить путем наблюдений, происходят ли в данном конкретном случае оба явления одновременно». Но я не могу удовлетвориться этим ответом по следующим основаниям. Предположим, что некоторый искусный метеоролог установил путем остроумных исследований, что в местах A и B удар молнии должен происходить всегда одновременно; тогда возникает задача проверить, соответствует ли действительности этот теоретический результат. Аналогично обстоит дело со всеми физическими утверждениями, в которых играет роль понятие «одновременности». Это понятие существует для физика лишь в том случае, если имеется возможность найти в конкретном случае, соответствует ли действительности это понятие. Следовательно, необходимо такое определение одновременности, которое дало бы метод, позволяющий в каждом данном случае решить на основании экспериментов, вспыхивают ли обе молнии одновременно. Пока это требование не выполнено, я как физик (так же как и нефизик), впадаю в самообман, связывая какой-то смысл с утверждением одновременности. (Не читай дальше, любезный читатель, прежде чем ты не согласишься с этим вполне).

После некоторых размышлений ты предлагаешь следующий способ констатировать одновременность. Отрезок AB измеряется вдоль рельсового пути и в середине M отрезка находится наблюдатель, снабженный устройством (например, двумя зеркалами, расположенными под углом 90° друг к другу), которое позволяет ему наблюдать одновременно оба места A и B. Если наблюдатель воспринимает обе молнии одновременно, то они произошли одновременно.

Я очень доволен этим предложением, однако считаю вопрос не вполне выясненным и вынужден выдвинуть следующее возражение: «Твое определение было бы безусловно правильным, если бы я уже знал, что свет от удара молнии, воспринимаемый наблюдателем в точке M, распространяется с одинаковой скоростью на отрезках AM и BM. Однако доказательство этой предпосылки было бы возможно лишь в том случае, если бы мы имели способ измерения времени. Таким образом, здесь получается замкнутый логический круг».

После некоторого дальнейшего размышления ты не без основания бросишь на меня несколько презрительный взгляд и скажешь: «Я все же считаю свое первоначальное определение справедливым, так как в нем не содержится никаких предположений о свете. К определению одновременности можно предъявлять лишь о д н о требование, а именно, чтобы в каждом реальном случае можно было опытным путем решить вопрос о справедливости введенного понятия. Мое определение бесспорно удовлетворяет этому требованию. Утверждение, что свет проходит расстояния AM и BM в одно и то же время, в действительности не является п р е д п о с ы л к о й или г и п о т е з о й о физической природе света, а у т в е р ж д е н и е м, которое можно сделать на основании свободного выбора, чтобы прийти к определению одновременности».

Ясно, что этим определением можно воспользоваться для того, чтобы придать точный смысл понятию одновременности не только д в у х, но и сколь угодно большого числа событий, независимо от того, как расположены места этих событий относительно тела отсчета (в нашем примере — относительно железнодорожного полотна)[6]. Это приводит нас к определению «времени» в физике. Именно, представим себе, что в точках A, B, C рельсового пути (систем координат) помещены одинаковые часы, стрелки которых одновременно (в вышеупомянутом смысле) показывают одинаковое время. Тогда под «временем» некоторого события подразумевается показание (положение стрелок) тех из часов, которые находятся в непосредственной близости к месту события. Следовательно, каждое событие связывается с таким значением времени, которое принципиально наблюдаемо.

Это утверждение содержит еще одну физическую гипотезу, в справедливости которой вряд ли можно сомневаться, если только эмпирические данные не будут ей противоречить. Именно, предполагается, что ход всех этих часов «одинаков», если они имеют одинаковую конструкцию. Точнее говоря, если двое покоящихся часов, помещенных в различных местах тела отсчета, поставлены так, что н е к о т о р о е показание стрелок одних из этих часов о д н о в р е м е н н о (в вышеупомянутом смы-

[6] Мы принимаем в дальнейшем, что если три события A, B, C происходят в различных местах таким образом, что A одновременно с B и B одновременно с C (одновременно в смысле данного выше определения), то критерий одновременности соблюден также и для пары событий A — C. Это допущение представляет собой физическую гипотезу о законе распространения света; она должна, безусловно, выполняться, если только закон постоянства скорости света в пустоте твердо установлен.

сле) с таким же показанием других часов, то одинаковые показания стрелок обоих часов одновременны всегда (в смысле приведенного выше определения).

§ 9. Относительность одновременности

До сих пор мы относили наши рассуждения к определенному телу отсчета, роль которого выполняло «железнодорожное полотно». Пусть очень длинный поезд идет с постоянной скоростью v по рельсовому пути в направлении, указанном на рис. 1. Людям, находящимся в этом поезде, более удобно принять поезд за твердое тело отсчета (систему координат);

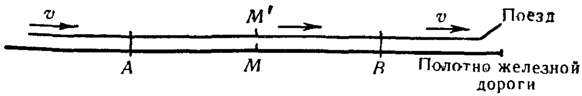

Рис. 1.

все события они относят к поезду. Всякое событие, происходящее на протяжении железнодорожного пути, происходит также и в определенной точке поезда. Определение одновременности для поезда может быть дано точно таким же способом, что и для рельсового пути. Однако естественно возникает следующий вопрос.

Являются ли два события (например, удары молнии в A и B), происходящие одновременно относительно полотна дороги, также одновременными и относительно поезда? Сейчас мы покажем, что ответ может быть только отрицательным.

Когда мы говорим об ударах молнии в A и B, одновременных относительно полотна дороги, то это означает, что световые лучи, исходящие из A и B, встречаются в средней точке M участка полотна AB. Но событиям A и B соответствуют также места A и B на поезде. Пусть M' — средняя точка отрезка AB движущегося поезда. Хотя эта точка в момент ударов молнии[7] и совпадает с точкой M, она движется со скоростью v поезда вправо (см. рис. 1). Если бы находящийся в поезде в точке M' наблюдатель не обладал этой скоростью, то он продолжал бы оставаться в точке M и тогда световые лучи от ударов молнии в A и B достигли бы его одновременно, т. е. оба эти луча встретились бы в том месте, где он находится. Однако в действительности он движется (если наблюдать с полотна дороги) навстречу световому лучу, идущему из точки B, и в то же время

[7] Если наблюдать с полотна дороги.

движется по световому лучу, идущему из точки A. Следовательно, наблюдатель увидит световой луч из B ранее, чем луч из A. Наблюдатели, пользующиеся поездом в качестве тела отсчета, должны, таким образом, прийти к выводу, что удар молнии в B произошел ранее, чем удар молнии в A. Следовательно, мы приходим к важному результату.

События, одновременные относительно полотна железной дороги, не являются одновременными по отношению к поезду и наоборот (относительность одновременности). Всякое тело отсчета (система координат) имеет свое особое время; указание времени имеет смысл лишь тогда, когда указывается тело отсчета, к которому оно относится.

До появления теории относительности физика молчаливо принимала, что указания времени абсолютны, т. е. не зависят от состояния движения тела отсчета. Но мы только что видели, что это предположение несовместимо с наиболее естественным определением одновременности; если же отказаться от этого предположения, то исчезает и описанный в § 7 конфликт между законом распространения света в пустоте и принципом относительности.

Именно к этому конфликту приводит рассуждение в § 6, которое теперь уже неприемлемо. Там мы полагали, что человек в вагоне, проходящий относительно вагона з а о д н у с е к у н д у отрезок w, проходит этот же отрезок по отношению к полотну дороги также з а о д н у с е к у н д у. Но, согласно только что изложенным соображениям, время, необходимое для определенного процесса относительно вагона, не может быть равно длительности этого же процесса относительно полотна железной дороги как тела отсчета; следовательно, нельзя утверждать, что человек, который проходит некоторый отрезок w, проходит его относительно полотна дороги в промежуток времени, равный — при наблюдении с полотна дороги — одной секунде.

Рассуждение в § 6 основывается еще на другой предпосылке, которая после внимательного рассмотрения оказывается произвольной, хотя до появления теории относительности она всегда (молчаливо) предполагалась.

§ 10. Об относительном понятии пространственного расстояния

Рассмотрим два определенных места поезда [8], движущегося по железной дороге со скоростью v, и выясним, каково расстояние между этими местами. Мы уже знаем, что для измерения расстояния необходимо тело отсчета, относительно которого измеряется расстояние. Проще всего

[8] Например, середины первого и сотого вагонов.

принять за тело отсчета (систему координат) сам поезд. Находящийся в поезде наблюдатель измеряет расстояние, откладывая свой масштаб по прямой линии, например, вдоль пола вагона, пока не достигнет от одной отмеченной точки до другой. Число, показывающее, сколько раз должен быть отложен масштаб, и есть искомое расстояние.

Иначе обстоит дело, если расстояние должно измеряться по полотну железной дороги. Тогда можно воспользоваться следующим методом. Пусть A' и B' — две точки поезда, расстояние между которыми требуется определить; пусть обе эти точки движутся вдоль железнодорожного полотна со скоростью v. Сначала мы найдем точки A и B полотна железной дороги, с которыми совпадают точки поезда A' и B' в определенный момент времени t при наблюдении с полотна дороги. Эти точки A и B полотна дороги можно найти с помощью определения времени, данного в § 8. Затем измеряется расстояние между этими точками A и B путем откладывания единичного масштаба вдоль полотна дороги.

Априори не исключено, что результат этого последнего измерения не совпадает с результатом первого. Следовательно, при измерении с полотна железной дороги длина поезда может оказаться иной, чем при измерении в самом поезде. Это обстоятельство является вторым возражением против, на первый взгляд очевидного, вывода § 6. Именно, если человек в вагоне проходит в единицу времени, *измеряемого в поезде*, отрезок w, то *при измерении с полотна дороги* этот отрезок не обязательно должен равняться w.

§ 11. Преобразование Лоренца

Выводы последних трех параграфов показывают, что кажущаяся несовместимость закона распространения света с принципом относительности, отмеченная в § 7, выведена на основе двух ничем не оправдываемых гипотез классической механики; эти гипотезы гласят:

1. Промежуток времени между двумя событиями не зависит от состояния движения тела отсчета.
2. Расстояние между двумя точками твердого тела не зависит от состояния движения тела отсчета.

Если отказаться от этих гипотез, то исчезает дилемма § 7, поскольку выведенная в § 6 теорема сложения скоростей будет уже неприменима. Появляется возможность согласовать закон распространения света в пустоте с принципом относительности. Мы приходим к вопросу: какие изменения надо внести в рассуждения § 6, чтобы устранить кажущееся противоречие между обоими этими фундаментальными эмпирическими фактами. Этот вопрос приводит к более общему вопросу. В § 6 мы встречаемся с понятиями места и времени относительно поезда и относительно полотна дороги. Как найти место и время какого-либо события относительно поезда, если известны место и время события относительно полотна железной дороги? Мыслим ли такой ответ на этот вопрос, чтобы закон распространения света в пустоте не противоречил принципу относительности? Иными словами, мыслимо ли такое соотношение между временем и местом отдельных событий относительно двух тел отсчета, чтобы любой световой луч обладал одной и той же скоростью c относительно полотна дороги и относительно поезда? Этот вопрос приводит к вполне определенному утвердительному ответу, к вполне определенному закону преобразования пространственно-временны́х величин некоторого события при переходе от одного тела отсчета к другому.

Прежде чем перейти к этому, сделаем несколько предварительных замечаний. До сих пор мы рассматривали лишь события, происходившие вдоль полотна железной дороги, которое формально играло роль прямой линии. Однако указанным в § 2 способом это тело отсчета можно представить себе продолженным как было при помощи системы стержней в стороны и вверх таким образом, что любое событие может быть локализовано по отношению к этой системе. Аналогично можно представить себе поезд, идущий со скоростью v и заполняющий все пространство так, что любое сколь угодно удаленное событие могло бы быть локализовано и относительно этого второго тела отсчета. Не делая принципиальной ошибки, можно отвлечься от того обстоятельства, что в действительности такая система не может существовать вследствие непроницаемости твердых тел.

В каждой подобной системе представим себе три взаимно перпендикулярные плоские стенки, которые назовем «координатными плоскостями» («система координат»). Тогда полотну железной дороги соответствует система координат K, а поезду — система координат K'. Всякое событие фиксируется в пространстве тремя перпендикулярами x, y, z, опускаемыми на координатные плоскости, и во времени — указанием некоторого момента времени t. То же событие — относительно координатной системы K' фиксируется в пространстве и времени соответствующими значениями x', y', z', t', очевидно, не совпадающими с x, y, z, t. Выше мы подробно изложили, как надо интерпретировать эти величины в терминах физических измерений.

Наша задача в точной формулировке сводится к следующему. Каковы значения x', y', z', t' некоторого события относительно системы K', если заданы значения x, y, z, t того же события относительно системы K? Соотношения должны быть выбраны так, чтобы для одного и того же светового луча (причем для любого) относительно K и K' выполнялся закон распространения света в пустоте. Эта задача для приведенного на рис. 2

пространственного расположения систем координат решается следующими уравнениями:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

Эта система уравнений носит название «преобразования Лоренца»[9].

Но если бы вместо закона распространения света мы молчаливо исходили из представлений старой механики об абсолютном характере времени и протяженности, то вместо этих уравнений преобразования мы получили бы уравнения

$$x' = x - vt,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = t.$$

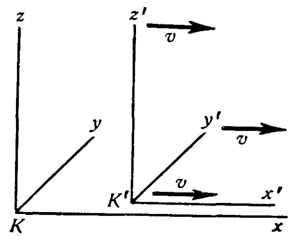

Рис. 2.

Последнюю систему уравнений часто называют «преобразованием Галилея». Преобразование Галилея выводится из преобразования Лоренца, если в последнем скорость света c положить равной бесконечно большому значению.

Справедливость закона распространения света в пустоте как для тела отсчета K, так и для тела отсчета K' при преобразовании Лоренца легко видеть из следующего примера. Пусть в положительном направлении оси x посылается некоторый световой сигнал, который распространяется согласно уравнению

$$x = ct,$$

т. е. со скоростью c. Согласно уравнениям преобразования Лоренца, это простое соотношение между x и t обусловливает соотношение между x' и t'. В самом деле, если в первое и четвертое уравнения преобразования

[9] Простой вывод преобразования Лоренца дан в Приложении 1.

Лоренца подставить ct вместо x, то получаем

$$x' = \frac{(c - v)\, t}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

$$t' = \frac{(1 - v/c)\, t}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

откуда путем деления получаем

$$x' = ct'.$$

Это уравнение описывает распространение света, когда оно отнесено к системе K'. Таким образом, скорость света равна c также и относительно тела отсчета K. Аналогичный результат может быть получен и для световых лучей, распространяющихся в любом другом направлении. Это и не удивительно, так как уравнения преобразования Лоренца выведены именно в предположении этого результата.

§ 12. Свойства движущихся масштабов и часов

Я кладу метровую линейку вдоль оси x' системы K' так, чтобы ее начало находилось в точке $x' = 0$, а конец — в точке $x' = 1$. Какова длина этой линейки относительно системы K? Чтобы узнать это, достаточно спросить лишь, где находятся ее начало и конец относительно K в определенный момент t в системе K. Для начала и конца линейки из первого уравнения преобразования Лоренца при $t = 0$ находим

$$x\,(\text{начало линейки}) = 0 \cdot \sqrt{1 - (v^2/c^2)},$$

$$x\,(\text{конец линейки}) = 1 \cdot \sqrt{1 - (v^2/c^2)}.$$

Таким образом, расстояние между обеими этими точками равно $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$. Но относительно K метровая линейка движется со скоростью v. Отсюда следует, что длина твердой метровой линейки, движущейся в направлении своей длины со скоростью v, составляет $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ Таким образом, движущаяся твердая линейка короче, чем та же линейка, находящаяся в покое, причем тем короче, чем быстрее она движется. При скорости $v = c$ получаем $\sqrt{1 - (v^2/c^2)} = 0$; при еще бо́льших скоростях корень становится мнимым. Из этого мы заключаем, что в теории относительности c играет роль предельной скорости, которой нельзя достигнуть и которую тем более не может превзойти скорость какого-либо реального тела.

Эта роль c как предельной скорости вытекает уже из самых уравнений преобразования Лоренца, поскольку эти уравнения теряют смысл, когда v превышает c.

Наоборот, если бы мы рассматривали метровую линейку, расположенную вдоль оси x и покоящуюся относительно K, то нашли бы, что относительно K' ее длина равна $\sqrt{1-(v^2/c^2)}$; это заключено уже в самом смысле принципа относительности, положенного в основу наших рассуждений.

Априори ясно, что из уравнений преобразования можно получить некоторые данные о физических свойствах масштабов и часов. В самом деле величины x, y, z, t представляют собой не что иное, как результаты измерений с помощью масштабов и часов. Если бы мы положили в основу преобразования Галилея, то мы не имели бы сокращения масштабов вследствие движения.

Рассмотрим теперь секундомер, покоящийся длительное время в начале координат ($x' = 0$) системы K'. Тогда $t = 0$ и $t = 1$ соответствуют двум последовательным ударам этих часов. Для этих моментов времени первое и четвертое уравнения преобразования Лоренца дают:

$$t = 0$$

и

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}.$$

Относительно системы K часы движутся со скоростью v; при наблюдении из этой системы отсчета между двумя ударами этих часов проходит не секунда, а $1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ секунд, т. е. несколько большее время. Часы, вследствие своего движения, идут медленнее, чем в состоянии покоя.Здесь скорость c также играет роль недостижимой предельной скорости.

§ 13. Теорема сложения скоростей. Опыт Физо

Так как на практике мы можем сообщать масштабам и часам лишь скорости, незначительные по сравнению со скоростью света c, то выводы предыдущего параграфа вряд ли можно непосредственно сравнить с опытом. Но так как эти выводы покажутся читателю весьма странными, то можно привести еще одно следствие теории, которое легко выводится из вышеизложенного и блестяще подтверждается опытом.

В § 6 мы вывели теорему сложения скоростей, имеющих одинаковое направление, в таком виде, как она следует из гипотез классической механики. Это же можно легко получить и из преобразования Галилея (§ 11).

Вместо идущего по вагону человека мы рассматриваем точку, движущуюся относительно системы координат K' в соответствии с уравнением

$$x' = wt'.$$

Из первого и четвертого уравнений преобразования Галилея x' и t' можно выразить через x и t; тогда получим

$$x = (v + w)\ t.$$

Это уравнение выражает не что иное, как закон движения точки относительно системы K (движение человека относительно полотна железной дороги); обозначая скорость этого движения через W, как и в § 6, получаем

$$W = v + w. \tag{А}$$

Но подобное рассуждение можно с таким же успехом провести на основе теории относительности. В уравнении

$$x' = wt'$$

выразим x' и t' через x и t, применяя первое и четвертое уравнения преобразования Лоренца. Тогда вместо уравнения (А) получим уравнение

$$W = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}, \tag{Б}$$

которое соответствует теореме сложения одинаково направленных скоростей в теории относительности. Теперь возникает вопрос, какая из этих двух теорем подтверждается на опыте. Ответ на этот вопрос дает исключительно важный эксперимент, поставленный более половины столетия назад гениальным физиком Физо и повторенный с того времени некоторыми лучшими физиками-экспериментаторами, так что его результат является бесспорным. Этот эксперимент решает следующий вопрос. В покоящейся жидкости распространяется свет с определенной скоростью w. С какой скоростью распространяется он в трубе R (см. рис. 3) по направлению, указанному стрелкой, если упомянутая жидкость течет по этой трубе со скоростью v?

Во всяком случае мы можем предположить в смысле принципа относительности, что относительно жидкости свет распространяется всегда с одной и той же скоростью w, независимо от того, движется ли жидкость относительно других тел или она неподвижна. Следовательно, известны скорость света относительно жидкости и скорость последней относительно трубы; требуется найти скорость света относительно трубы.

Ясно, что мы снова имеем задачу § 6. Труба играет роль полотна железной дороги, т. е. системы координат K, а жидкость — роль вагона, т. е. системы координат K', и, наконец, свет — роль бегущего в вагоне человека или роль движущейся точки в настоящем параграфе. Таким образом, обозначая через W скорость света относительно трубы, можно ожидать, что она выразится либо уравнением (А), либо уравнением (Б), в зависимости от того, соответствует ли действительности преобразование Галилея или преобразование Лоренца.

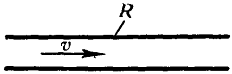

Рис. 3.

Эксперимент[10] решает вопрос в пользу уравнения (Б), полученного из теории относительности, и притом с большой точностью. Влияние скорости течения жидкости v на распространение света, согласно последним превосходным измерениям Зеемана, выражается формулой (Б) с ошибкой, меньшей 1%.

Правда, следует отметить, что задолго до появления теории относительности Г. А. Лоренц дал теорию этого явления и обосновал чисто электродинамическим путем при помощи определенных гипотез об электромагнитной структуре материи. Однако это обстоятельство нисколько не уменьшает доказательную силу эксперимента Физо, как experimentum crucis в пользу теории относительности, поскольку электродинамика Максвелла — Лоренца, на которой базировалась первоначальная теория, нисколько не противоречит теории относительности. Можно сказать, что теория относительности выросла из электродинамики как поразительно простое обобщение и объединение ряда независимых друг от друга гипотез, на которых была основана электродинамика.

§ 14. Эвристическое значение теории относительности

Изложенный здесь ход мыслей можно кратко резюмировать следующим образом. Опыт привел к убеждению, с одной стороны, в справедливости принципа относительности (в узком смысле), и с другой стороны, в

---

[10] Физо нашел, что $W = w + v(1-1/n^2)$, где $n = c/w$ — показатель преломления жидкости. С другой стороны, вследствие того, что величина vw/c^2 мала по сравнению с 1, из уравнения (Б) получаем: $W = (w + v)(1 - vw/c^2)$ или, с одинаковой степенью точности, $w + v(1-1/n^2)$, что совпадает с результатом эксперимента Физо.

том, что скорость распространения света в вакууме равна постоянному значению c. В результате объединения обоих постулатов получился закон преобразования прямоугольных координат x, y, z и времени t событий, составляющих явление природы; при этом получилось не преобразование Галилея, но (в противоречие с классической механикой) преобразование Лоренца.

Важную роль в этих рассуждениях играл закон распространения света, который подтверждается нашими фактическими знаниями. Однако, имея в своем распоряжении преобразование Лоренца, мы можем соединить этот закон с принципом относительности и выразить теорию следующим образом.

Всякий общий закон природы должен быть таким, чтобы он сохранял свой вид при замене пространственно-временных переменных x, y, z, t первоначальной системы координат K новыми пространственно-временными переменными x', y', z', t' другой системы кординат K'; при этом математическая связь между штрихованными и нештрихованными величинами определяется преобразованием Лоренца. Сформулируем это кратко: общие законы природы ковариантны относительно преобразований Лоренца.

Таково определенное математическое условие, которое накладывает на законы природы теория относительности; вследствие этого теория относительности становится ценным эвристическим вспомогательным средством для отыскания общих законов природы. Если бы был найден некоторый общий закон природы, не удовлетворяющий указанному условию, то тем самым было бы опровергнуто по меньшей мере одно из двух основных положений теории. Посмотрим теперь, к каким общим результатам привела до настоящего времени эта теория.

§ 15. Общие результаты теории

Из изложенного выше видно, что (специальная) теория относительности выросла из электродинамики и оптики. Она мало изменила положения этих теорий, но значительно упростила теоретические построения, т. е. вывод законов, и — что несравненно важнее — заметно уменьшила число не зависящих друг от друга гипотез, лежащих в основе теории. Теория относительности придала теории Максвелла — Лоренца такую степень очевидности, что физики были бы полностью убеждены в ее справедливости даже в том случае, если бы эксперимент говорил бы в ее пользу не столь убедительно.

Классическая механика нуждается в некоторой модификации, чтобы быть в согласии с требованиями специальной теории относительности. Однако эта модификация касается по существу лишь законов быстрых движений, когда скорость движения материи v не очень мала по сравнению со скоростью света. Такие быстрые движения мы встречаем лишь для электронов и ионов; в других движениях отклонения от законов классической механики слишком малы, чтобы их можно было заметить практически. О движениях звезд мы будем говорить лишь в связи с общей теорией относительности. Согласно теории относительности, кинетическая энергия материальной точки с массой m дается уже не общеизвестным выражением

$$m\frac{v^2}{2},$$

а выражением

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}.$$

Это выражение становится бесконечным, когда скорость v приближается к скорости света c. Следовательно, скорость всегда должна оставаться меньшей c, как бы ни была велика энергия, затраченная на ускорение. Разлагая приведенное выше выражение для кинетической энергии в ряд, получаем

$$mc^2+m\frac{v^2}{2}+\frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}+\ldots.$$

Третий член этого разложения всегда мал по сравнению со вторым (который только и принимается во внимание в классической механике), если величина v^2/c^2 значительно меньше единицы. Первый член mc^2 не содержит скорости v и, следовательно, не интересен в тех случаях, когда в задаче существенна лишь зависимость энергии материальной точки от скорости. О принципиальном значении этого слагаемого будет сказано ниже.

Важнейший результат общего характера, к которому привела специальная теория относительности, относится к понятию массы. Дорелятивистская физика знала два фундаментальных закона сохранения, а именно: закон сохранения энергии и закон сохранения массы; оба этих фундаментальных закона считались совершенно независимыми друг от друга. Теория относительности слила их в один. Расскажем кратко, как это произошло и как следует понимать это слияние.

Принцип относительности требует, чтобы закон сохранения энергии был справедлив не только относительно о д н о й системы координат K, но и относительно всякой другой системы координат K', движущейся относительно K (короче говоря, относительно всякой «галилеевой» системы координат) равномерно и прямолинейно. Переход от одной такой системы к другой, в отличие от классической механики, определяется преобразованием Лоренца.

Из этих предпосылок вместе с основными уравнениями электродинамики Максвелла можно путем сравнительно простых рассуждений с необходимостью придти к следующему выводу. Некоторое тело, движущееся со скоростью v и получающее энергию E_0 в форме излучения [11] без изменения своей скорости, увеличивает при этом свою энергию на величину

$$\frac{E_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}.$$

Тогда, искомая энергия тела с учетом приведенного выше выражения для кинетической энергии будет

$$\frac{(m+E_0/c^2)\,c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}.$$

Следовательно, тело обладает такой же энергией, как и тело, движущееся со скоростью v и имеющее массу $m+\frac{E_0}{c^2}$. Таким образом, можно сказать: если тело получает энергию E_0, то его инертная масса возрастает на E_0/c^2; инертная масса тела не является постоянной, но изменяется с энергией тела. Инертная масса системы тел может рассматриваться как мера энергии этой системы. Закон сохранения массы системы совпадает с законом сохранения энергии и выполняется потому, что система не получает и не отдает энергию. Записав выражение для энергии в виде

$$\frac{mc^2+E_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},$$

увидим, что член mc^2, уже встречавшийся ранее, есть не что иное, как энергия, которую имело тело [12] до получения энергии E_0.

Непосредственное сравнение этого заключения с опытом пока что невозможно потому, что изменения энергии E_0, которые мы можем сообщить телу, недостаточно велики, чтобы их можно было заметить как изменения инертной массы системы. Величина E_0/c^2 слишком мала по сравнению с массой m, которую имело тело до изменения энергии. Этим обстоятельством объясняется тот факт, что закон сохранения массы с успехом мог иметь самостоятельное значение.

Сделаем еще одно принципиальное замечание. Успех объяснения Фарадеем и Максвеллом электромагнитного дальнодействия с помощью промежуточных процессов, имеющих конечную скорость распространения, привел физиков к убеждению, что непосредственные, мгновенные дальнодействия типа ньютоновского закона тяготения в действительности не

---

[11] Здесь E_0 — полученная телом энергия при наблюдении из системы координат, движущейся вместе с телом.

[12] С точки зрения системы координат, движущейся вместе с телом.

существуют. Согласно теории относительности, вместо мгновенного действия на расстоянии, или дальнодействия с бесконечной скоростью распространения, должно существовать дальнодействие со скоростью света. Это обстоятельство связано с той принципиальной ролью, которую скорость c играет в этой теории. Во второй части настоящей работы будет показано, каким образом этот результат видоизменяется в общей теории относительности.

§ 16. Специальная теория относительности и опыт

Ответ на вопрос, в какой мере специальная теория относительности подтверждается опытом, невозможно дать по одной причине, о которой мы уже упоминали в связи с фундаментальным опытом Физо. Специальная теория относительности выкристаллизовалась из теории Максвелла — Лоренца электромагнитных явлений. Тем самым, все опытные данные, подтверждающие эту теорию электромагнитных явлений, подтверждают и теорию относительности. Упомяну здесь в качестве особенно важного факта, что теория относительности чрезвычайно просто и в согласии с опытом объясняет влияние движения Земли, относительно неподвижных звезд, на свет, испускаемый этими звездами. Этими эффектами являются: годичное перемещение кажущегося положения неподвижных звезд вследствие движения Земли вокруг Солнца (аберрация) и влияние радиальной составляющей относительного движения неподвижных звезд по отношению к Земле на цвет посылаемого звездами света; последний эффект проявляется в небольшом смещении спектральных линий доходящего до нас света неподвижной звезды по сравнению с положением тех же спектральных линий, получаемых от земных источников света (принцип Допплера). Экспериментальные аргументы в пользу теории Максвелла — Лоренца, являющиеся вместе с тем и аргументами в пользу теории относительности, слишком многочисленны, чтобы излагать их здесь. В действительности они настолько суживают возможности теории, что нельзя отстаивать никакую другую теорию, кроме теории Максвелла — Лоренца, не входя в противоречие с опытом.

Однако имеется два класса экспериментальных данных, которые могут быть объяснены теорией Максвелла — Лоренца лишь с помощью вспомогательной гипотезы; причем эта гипотеза сама по себе, т. е. без привлечения теории относительности, выглядит странной.

Известно, что катодные лучи и так называемые β-лучи, испускаемые радиоактивными веществами, состоят из отрицательно заряженных частиц (электронов), обладающих весьма незначительной инертной массой и большими скоростями. Исследуя отклонение этих лучей в электрическом и магнитном полях, можно очень точно изучить закон движения этих частиц.

При теоретическом изучении этих электронов встречаются затруднения, заключающиеся в том, что одна электродинамика ничего не может сказать об их природе. В самом деле, поскольку электрические заряды одного знака отталкиваются, то образующие электрон отрицательные электрические заряды должны бы были разлетаться вследствие взаимодействия, если бы между ними не существовали еще силы другого рода, природа которых нам до сих пор неизвестна[13]. Если теперь предположить, что относительные расстояния электрических зарядов, образующих электрон, остаются неизменными при движениях электрона (жесткая связь в смысле классической механики), то мы прийдем к закону движения электрона, не согласующемуся с опытом. Г. А. Лоренц с чисто формальной точки зрения впервые выдвинул гипотезу, согласно которой части электрона при движении испытывают сокращение в направлении движения, пропорциональное величине $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Эта гипотеза, ничем не оправдываемая с электродинамической точки зрения, приводит к закону движения, с большой точностью подтвержденному опытом в последние годы.

Теория относительности выводит этот же закон движения, не прибегая к какой-либо специальной гипотезе о строении и поведении электрона. Как мы видели в § 13, аналогично обстоит дело и с опытом Физо, результаты которого были объяснены теорией относительности без каких-либо гипотез о физической природе жидкости.

Второй класс фактов, на которые было указано выше, касается вопроса о том, можно ли в опытах, производимых на Земле, обнаружить движение последней в мировом пространстве. В § 5 уже было отмечено, что все такие усилия дали отрицательный результат. До установления теории относительности это отрицательное обстоятельство ставило науку в затруднительное положение: а именно, ситуация была следующей. Предубеждения о пространстве и времени, унаследованные от механики Галилея — Ньютона, не позволяли сомневаться в том, что переход от одного тела отсчета к другому определяется преобразованием Галилея. Если предположить, что уравнения Максвелла — Лоренца справедливы для некоторого тела отсчета K, то мы найдем, что они не выполняются для тела отсчета K', равномерно движущегося относительно K, если принять, что координаты в системе K связаны с координатами в системе K' преобразованием Галилея. Отсюда, по-видимому, следует, что из всех гали-

[13] С точки зрения общей теории относительности можно предположить, что электрические заряды электрона удерживаются силами тяготения.

леевых систем координат физически выделена одна система (K), движущаяся определенным образом. Физическая интерпретация этого результата состоит в том, что система K рассматривается как покоящаяся относительно гипотетического светового эфира. Напротив, все движущиеся относительно K системы координат K' должны быть движущимися относительно эфира. Этому движению K' относительно эфира («эфирному ветру» в системе K') приписывали более сложные законы, которые должны были бы выполняться относительно K'. Приходилось предполагать, что такой эфирный ветер должен существовать и относительно Земли, и физики стремились обнаружить этот ветер.

Майкельсон нашел для этого путь, который, казалось, должен был привести к цели. Представим себе, что на твердом теле прикреплены два зеркала, отражающие поверхности которых направлены друг к другу. Луч света проходит от одного зеркала к другому и обратно за определенный промежуток времени T, если вся эта система покоится относительно светового эфира. Но вычисления дают другое время T', если тело вместе с зеркалами движется относительно эфира. Более того, вычисления показывают, что это время T' при данной скорости v относительно эфира будет иным в том случае, когда тело движется перпендикулярно к плоскостям зеркал, чем в случае, когда оно движется параллельно этим плоскостям. Несмотря на то, что вычисленная разность этих промежутков времени исключительно мала, Майкельсон и Морли выполнили интерференционный эксперимент, в котором эта разность должна была отчетливо обнаруживаться. К большому смущению физиков, эксперимент дал отрицательный результат. Лоренц и Фицджеральд вывели теорию из этого затруднительного положения, предположив, что движение тела относительно эфира вызывает сокращение тела в направлении движения, и следствием этого сокращения является исчезновение указанной разности промежутков времени. Такой выход из затруднения, как показывает сравнение с рассуждениями § 12, правилен и с точки зрения теории относительности. Но истолкование, предлагаемое теорией относительности, несравненно более удовлетворительно. Согласно этой теории не существует никакой привилегированной системы координат, которая давала бы повод для введения концепции эфира, а следовательно, и эфирного ветра, а также эксперимента, способного доказать его существование. Сокращение движущихся тел следует здесь без особых гипотез из обоих основных принципов теории, причем это сокращение определяется не движением самим по себе, которое для нас не имеет никакого смысла, а движением относительно избранного в данном случае тела отсчета. Следовательно, тело с зеркалами Майкельсона и Морли не сокращается в системе отсчета, движущейся вместе с Землей; но сокращение происходит относительно системы, покоящейся относительно Солнца.

§ 17. Четырехмерное пространство Минковского

Когда нематематик слышит о «четырехмерном», его охватывает мистическое чувство, подобное чувству, возбуждаемому театральными привидениями. Тем не менее нет более банального утверждения, что окружающий нас мир представляет собой четырехмерный пространственно-временнóй континуум.

Пространство представляет собой трехмерный континуум. Это значит, что положение (покоящейся) точки можно описать тремя числами (координатами) x, y, z и что около каждой точки имеются сколь угодно близкие «соседние» точки, положение которых может быть описано такими значениями координат (координатами) x_1, y_1, z_1, которые могут быть сколь угодно близки к координатам x, y, z исходной точки. Благодаря последнему свойству мы говорим о «континууме» (непрерывности), а ввиду того, что число координат равно трем — о его «трехмерности».

Аналогично, мир физических явлений, названный Минковским просто «миром», естественно, является четырехмерным в пространственно-временнóм смысле. В самом деле, он складывается из отдельных событий, каждое из которых описывается четырьмя числами, а именно: тремя пространственными координатами x, y, z и временнóй координатой — значением времени t. «Мир» в этом смысле является также непрерывным (континуумом); для каждого события имеются сколь угодно близкие «соседние» (происходящие или мыслимые) события, координаты которых x_1, y_1, z_1, t_1 сколь угодно мало отличаются от координат первоначально наблюдавшегося события x, y, z, t. Тот факт, что мы обычно не рассматриваем мир в этом смысле как четырехмерный континуум, объясняется тем, что время в дорелятивистской физике играет иную, более самостоятельную по сравнению с пространственными координатами роль. Поэтому и выработалась привычка рассматривать время как самостоятельный континуум. В самом деле, в классической физике время абсолютно, т. е. не зависит от положения и состояния движения системы отсчета. Это находит свое выражение в последнем уравнении преобразования Галилея ($t = t'$).

Благодаря теории относительности появляется возможность четырехмерной трактовки «мира», так как в этой теории время утрачивает свою самостоятельность, как показывает четвертое уравнение преобразования Лоренца:

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

Действительно, согласно этому уравнению, разность $\Delta t'$ времен двух событий относительно K', вообще говоря, не обращается в нуль, и тогда, когда разность времен Δt этих событий относительно K исчезает. Чисто пространственному расстоянию двух событий относительно системы отсчета K соответствует расстояние во времени этих же событий относительно K'. Однако и не в этом заключается открытие Минковского, важное для формального развития теории относительности. Оно состоит скорее в осознании того, что четырехмерный пространственно-временно́й континуум теории относительности по своим основным формальным свойствам глубоко родствен трехмерному континууму эвклидовой геометрии[14]. Для полного выявления этого родства необходимо вместо обычной време́нно́й координаты t ввести пропорциональную ей мнимую величину $\sqrt{-1}\,ct$. Но тогда законы природы, удовлетворяющие требованиям (специальной) теории относительности, принимают такую математическую форму, в которой временна́я координата играет точно такую же роль, как и три пространственные координаты. Формально эти четыре координаты совершенно точно соответствуют трем пространственным координатам эвклидовой геометрии. Даже нематематику должно быть ясно, что благодаря этому чисто формальному положению теория относительности чрезвычайно выиграла в наглядности и стройности.

Эти краткие указания дают читателю лишь смутное представление о важных мыслях Минковского, без которых общая теория относительности, основные положения которой излагаются ниже, быть может, оставалась бы в зачаточном состоянии. Но более глубокое усвоение этого материала, несомненно, трудного для читателя без математической подготовки, не является необходимым для понимания как специальной, так и общей теории относительности; поэтому мы оставим здесь изложение этого вопроса и снова вернемся к нему лишь на последних страницах этой работы.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 18. Специальный и общий принцип относительности

Основным тезисом, вокруг которого развивалось все предшествующее изложение, был специальный принцип относительности, т. е. принцип физической относительности всякого равномерного движения. Тщательно проанализируем еще раз его содержание.

Всегда признавалось, что всякое движение по определению должно мыслиться как относительное движение. В неоднократно исполь-

[14] Ср. несколько более подробное изложение этого вопроса в Приложении II.

зовавшемся нами примере с полотном железной дороги и вагоном можно, например, с одинаковым правом говорить о движении в двух формах:

а) вагон движется относительно полотна железной дороги;

б) полотно железной дороги движется относительно вагона.

В случае «а» телом отсчета служит полотно дороги, а в случае «б» — вагон. При простом констатировании или описании движения принципиально безразлично, к какому телу отсчета относится движение. Это утверждение, как мы уже говорили, очевидно само собой и его не следует смешивать с более глубоким утверждением, которое мы назвали «принципом относительности» и положили в основу наших исследований.

Примененный нами принцип утверждает не только то, что для описания любого события в качестве тела отсчета можно выбрать как вагон, так и полотно дороги (это также очевидно). Он утверждает значительно большее: если общие законы природы формулировать в том виде, как они получаются из опыта, пользуясь в качестве тела отсчета: а) полотном железной дороги, б) вагоном, то эти общие законы природы (например, законы механики или закон распространения света в пустоте) будут совершенно одинаковыми в обоих случаях. Это можно выразить также следующим образом: для *физического* описания процессов природы ни одно из тел отсчета K, K' не выделено среди других. Это последнее положение не обязано быть справедливым априори; оно не содержится в понятиях «движение» и «тело отсчета» и не выводится из них; вопрос о его справедливости может быть решен только *опытом*.

Однако до сих пор мы не утверждали равноценности *всех* тел отсчета K в отношении формулирования законов природы. Наш путь был следующим. Мы исходили прежде всего из предположения о существовании тела отсчета K, движущегося таким образом, что по отношению к K применим основной закон Галилея: материальная точка, предоставленная самой себе и достаточно удаленная от других материальных точек, движется равномерно и прямолинейно. По отношению к K (*галилеево* тело отсчета) законы природы должны выражаться возможно проще. Но кроме K, все тела отсчета K', которые движутся относительно K *прямолинейно, равномерно и без вращения*, совершенно эквивалентны K при формулировании законов природы; все эти тела отсчета можно рассматривать как *галилеевы*. Справедливость принципа относительности предполагалась только для этих, но не для других (иначе движущихся) тел отсчета. В этом смысле мы говорим о *специальном* принципе относительности или о специальной теории относительности.

В противоположность этому под «общим принципом относительности» мы подразумеваем утверждение, что все тела отсчета K, K' и т. д. эквивалентны в отношении описания природы (формулирования общих законов природы), каким бы ни было их состояние движения. Заметим здесь же, что эта формулировка должна быть позднее заменена другой, более абстрактной, по причинам, которые выяснятся позже.

После того как введенный специальный принцип относительности нашел оправдание на опыте, всякому, кто стремится к обобщению, может показаться заманчивым сделать шаг и к общему принципу относительности. Но одно простое и, на первый взгляд, совершенно бесспорное соображение как будто обрекает подобную попытку на неудачу. Пусть читатель представит себе, что он находится в столь часто упоминавшемся нами равномерно движущемся вагоне железной дороги. Пока вагон движется равномерно, пассажир совершенно не замечает движения. Отсюда следует, что пассажир может без особого труда интерпретировать это событие таким образом, будто вагон покоится, а движется полотно дороги. Впрочем, с точки зрения специального принципа относительности эта интерпретация полностью оправдывается и с физической точки зрения.

Однако, если движение вагона становится неравномерным, например при сильном торможении вагона, то пассажир испытывает сильный толчок вперед. Ускорение вагона проявляется в механическом движении тел по отношению к нему; механическая картина здесь иная, чем в предшествующем случае, и поэтому представляется невозможным, чтобы одинаковые механические законы были справедливы как относительно неравномерно движущегося вагона, так и по отношению к покоящемуся или равномерно движущемуся вагону. Во всяком случае ясно, что в отношении неравномерно движущегося вагона основной закон Галилея не выполняется. Поэтому сначала мы чувствуем себя вынужденными, вопреки общему принципу относительности, приписать неравномерному движению некоторого рода абсолютную физическую реальность. Однако мы скоро увидим, что этот вывод неосновательлен.

§ 19. Поле тяготения

На вопрос: «Почему камень, который мы поднимаем и затем выпускаем из рук, падает на землю?» — обычно отвечают: «Потому что его притягивает Земля». Современная физика формулирует ответ несколько иначе по следующей причине. Более точное исследование электромагнитных явлений показало, что непосредственное действие на расстоянии не имеет места. Например, в случае притяжения магнитом куска железа нельзя удовлетворяться представлением, что магнит действует на железо непосредственно через пустое пространство между ними; согласно Фарадею, магнит вызывает появление в окружающем пространстве некоторой физической реальности, называемой «магнитным полем». В свою очередь это магнитное поле воздействует на кусок железа, так, что он стремится двигаться к магниту. Мы не будем обсуждать здесь законность этого, несколько произвольного, вспомогательного представления. Заметим лишь, что с его помощью можно дать значительно более удовлетворительное теоретическое описание электромагнитных явлений и в особенности распространения электромагнитных волн, чем без этого представления. Аналогичным образом истолковывается и действие тяготения.

Воздействие Земли на камень происходит не непосредственно. Земля создает в окружающем пространстве поле тяготения. Последнее действует на камень и вызывает его падение. Как показывает опыт, действующая на камень сила уменьшается с расстоянием от Земли по вполне определенному закону. Согласно нашему толкованию, это означает: закон, управляющий пространственными свойствами поля тяготения, должен быть вполне определенным, чтобы правильно описывать убывание силы тяготения с увеличением расстояния между взаимодействующими телами. Представим себе, что тело (например, Земля) в непосредственной близости от себя создает поле; величина и направление поля на большем растоянии определяются отсюда законом, регулирующим пространственные свойства полей тяготения.

В противоположность электрическому и магнитному полю, поле тяготения обладает одним в высшей степени замечательным свойством, имеющим фундаментальное значение для дальнейшего. Тела, которые движутся исключительно под действием поля тяжести, испытывают ускорение, *не зависящее ни от материала, ни от физического состояния тела*. Например, кусок свинца и кусок дерева падают в поле тяжести (в безвоздушном пространстве) в точности одинаково, если они имеют одинаковую, в частности равную нулю, начальную скорость. Этот исключительно точно выполняющийся закон можно также формулировать иначе на основе следующих соображений.

Согласно закону движения Ньютона,

$$(\text{Сила}) = (\text{Инертная масса}) \times (\text{Ускорение}),$$

где «инертная масса» представляет собой характерную постоянную ускоряемого тела. С другой стороны, если силой, вызывающей ускорение, является тяжесть, то

$$(\text{Сила}) = (\text{Тяжелая масса}) \times (\text{Напряженность поля тяжести}),$$

где «тяжелая масса» также представляет собой постоянную, характеризующую тело. Из этих соотношений следует:

$$(\text{Ускорение}) = \frac{(\text{Тяжелая масса})}{(\text{Инертная масса})} \times (\text{Напряженность поля тяжести}).$$

Если, как показывает опыт, в заданном поле тяжести ускорение не зависит от природы и состояния тела, то и отношение тяжелой массы к инертной, равным образом, должно быть одинаковым для всех тел. Следовательно, это отношение при надлежащем выборе единиц можно положить равным единице. Тогда можно выдвинуть следующее положение: тяжелая и инертная массы тела равны.

До настоящего времени механика констатировала, но не истолковывала это важное положение. Удовлетворительное истолкование можно дать в следующей форме: в зависимости от обстоятельств одно и то же качество тела проявляется либо как «инерция», либо как «тяжесть». В какой мере это оправдывается в действительности и как связан этот вопрос с общим постулатом относительности, будет показано в последующих параграфах.

§ 20. Равенство инертной и тяжелой массы как аргумент в пользу общего постулата относительности

Представим себе обширную область пустого мирового пространства, настолько удаленную от звезд и значительных масс, что со значительной степенью точности осуществляется случай, предусмотренный основным законом Галилея. Тогда для этой части мира можно выбрать галилеевское тело отсчета, относительно которого покоящиеся точки остаются в покое, а движущиеся — в состоянии прямолинейного и равномерного движения. В качестве тела отсчета представим себе обширный ящик в виде комнаты; в нем находится наблюдатель, снабженный необходимыми приборами. Для него, естественно, тяжесть не существует. Он должен прикрепить себя к полу веревками, чтобы от малейшего удара о пол не всплывать медленно к потолку комнаты.

Пусть в центре крышки ящика с наружной стороны прикреплен трос, за который какое-то существо начинает тянуть ящик с постоянной силой. Тогда ящик с наблюдателем будет двигаться равномерно ускоренно «вверх». Его скорость с течением времени будет возрастать до фантастической величины, если наблюдать с другого тела отсчета, которое уже никто не тянет.

Как же судит об этом явлении человек, находящийся в ящике? Ускорение ящика передается ему давлением со стороны пола. Следовательно, он будет воспринимать это давление своими ногами, если только не захочет прийти в соприкосновение с полом всем своим телом. При этом он стоит в ящике совершенно так же, как и в комнате своего дома на Земле. Если он выпускает из рук некоторое тело, то этому телу уже не будет передаваться ускорение ящика; поэтому оно будет приближаться к полу ящика с ускорением относительно последнего. Далее наблюдатель убедится, что *ускорение тела относительно пола ящика всегда одинаково, с каким бы телом ни производился опыт.*

Итак, человек в ящике, основываясь на своих сведениях о поле тяжести в том виде, как мы изложили их в последнем параграфе, придет к выводу, что он вместе с ящиком находится в постоянном во времени поле тяжести. Правда, какое-то время он будет удивлен тем, что сам ящик не падает в этом поле тяжести. Но затем он обнаружит в центре крышки крюк с прикрепленным к последнему натянутым тросом и придет к выводу, что ящик подвешен и покоится в поле тяжести.

Можем ли мы посмеяться над этим человеком и сказать, что его предположение ошибочно? Думаю, что мы не вправе поступить так, если хотим оставаться последовательными; мы должны также признать, что его предположение не содержит ни логических противоречий, ни противоречий с известными законами механики. Мы можем рассматривать ящик покоящимся, если даже он движется ускоренно относительно упомянутого выше «*галилеевского* пространства». Следовательно, мы имеем достаточное основание распространить принцип относительности на тела отсчета, движущиеся ускоренно одно относительно другого; таким путем мы получаем сильный аргумент в пользу обобщенного постулата относительности.

Следует учесть, что возможность такого понимания основывается на фундаментальном свойстве поля тяжести сообщать всем телам одно и то же ускорение или, иными словами, на равенство инертной и тяжелой масс. Если бы этот закон природы не существовал, человек в движущемся с ускорением ящике не мог бы объяснить поведение окружающих его тел с помощью предположения о существовании поля тяжести и никакой опыт не давал бы ему основания считать, что его тело отсчета «находится в состоянии покоя».

Пусть человек в ящике прикрепил внутри ящика к его крышке веревку и к свободному концу ее привязал какое-либо тело. Под действием последнего веревка будет натянута в «вертикальном» направлении. Мы ставим вопрос о причине натяжения веревки. Человек в ящике скажет: «Подвешенное тело испытывает действие силы тяжести, направленной вниз и уравновешиваемой натяжением веревки; то, чем определяется натяжение веревки, это *тяжелая масса* подвешенного тела». Но, с другой стороны, наблюдатель, который свободно парит в пространстве, так объяснит натяжение веревки: «Веревка ускоренно движется вместе с ящиком и передает это ускорение прикрепленному к нему телу. Величина натяжения веревки такова, что она сообщает данное ускорение телу. Величина натяжения веревки определяется инертной массой тела». Из этого примера видно, что из нашего обобщения принципа относительности с необходимостью следует положение о равенстве инертной и весомой масс. Тем самым мы получаем физическую интерпретацию этого положения.

Рассмотрение явлений в ускоренно движущемся ящике показывает, что общая теория относительности должна привести к важным выводам о законах тяготения. Фактически последовательное проведение идеи общего принципа относительности привело к законам, которым удовлетворяет поле тяготения. Однако я здесь же должен предостеречь читателя от одного недоразумения, которое легко может возникнуть при этих рассуждениях. Для человека в ящике существует поле тяготения, в то время как для первоначально выбранной системы координат таковое не существует. В связи с этим можно подумать, что существование поля тяготения всегда является лишь кажущимся. Можно также подумать, что в любом поле тяготения всегда можно выбрать такое другое тело отсчета, относительно которого никакого поля тяготения не существует. Однако это возможно отнюдь не для всех полей тяготения, но лишь для полей весьма специальной структуры. Так, например, невозможно выбрать такое тело отсчета, чтобы при наблюдении с него поле тяготения Земли (на всем его протяжении) исчезало.

Теперь мы видим, почему неубедителен аргумент против общего принципа относительности, приведенный в конце § 18. Конечно, совершенно правильно, что наблюдатель, находящийся в заторможенном железнодорожном вагоне, вследствие торможения испытывает толчок вперед и тем самым замечает неравномерность движения (ускорение) вагона. Но ничто не заставляет его объяснять этот толчок «истинным» ускорением вагона. Свое ощущение он может интерпретировать иначе: «Мое тело отсчета (вагон) продолжительное время остается в состоянии покоя. Но в вагоне (в течение времени торможения) действует поле тяжести, направленное вперед по движению и меняющееся во времени. Под влиянием этого поля железнодорожное полотно вместе с Землей движется неравномерно, так что его первоначальная, направленная назад скорость постоянно уменьшается. Именно это поле тяжести и дает толчок, который испытывает наблюдатель».

§ 21. Насколько неполны основы классической механики и специальной теории относительности?

Уже неоднократно упоминалось, что классическая механика исходит из следующего положения: материальные точки, достаточно удаленные от других материальных точек, движутся прямолинейно и равномерно или же находятся в состоянии покоя. Мы также неоднократно указывали, что этот основной закон выполняется лишь для тел отсчета K, находящихся в определенном состоянии движения, а именно движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга. По отношению к другим телам отсчета это положение несправедливо. Как в классической механике, так и в специальной теории относительности различают тела отсчета K, относительно которых законы природы выполняются, и тела отсчета K, относительно которых законы природы не выполняются.

Но такое положение вещей не может удовлетворить последовательно мыслящего человека. Он задает вопрос: «Каким образом возможно такое положение, что определенные тела отсчета (или их состояния движения) отличаются от других тел отсчета (или их состояний движения)? Какое основание для такого предпочтения?». Чтобы ясно показать, что я подразумеваю под этим вопросом, воспользуюсь таким сравнением.

Я стою перед газовой плитой. На ней поставлены рядом два совершенно одинаковых чайника. Оба они до половины наполнены водой. Я замечаю, что из одного непрерывно поднимается пар, а из другого нет. Я удивлен этим больше, чем зрелищем газовой плиты и чайников, хотя бы ранее мне никогда не приходилось их видеть. Но если я замечаю, что под первым чайником светится нечто голубое, а под другим нет, то мое удивление исчезает, если даже я никогда не видел газового пламени. Я могу лишь сказать, что это нечто голубоватое вызывает (или, по крайней мере, может быть вызывает) возникновение пара. Однако, если я не замечаю этого нечто голубоватого ни под одним из чайников, и в то же время вижу, что в одном из них вода непрерывно кипит, а в другом нет, то я останусь удивленным и неудовлетворенным до тех пор, пока не открою какого-либо обстоятельства, на которое я могу возложить ответственность за различное поведение обоих чайников.

Аналогично, тщетно было бы искать в классической механике (а также в специальной теории относительности) то реальное нечто, к которому можно было бы свести различное поведение тел относительно систем отсчета K и K'[15]. Это возражение предвидел уже Ньютон, который тщетно стремился ослабить его. Однако яснее всего его понял Э. Мах, который выдвинул требование, чтобы механика была построена на новом основании. Этого возражения может избежать только физика, основанная на общем принципе относительности. Уравнения такой теории справедливы для любого тела отсчета, в каком бы состоянии движения оно ни находилось.

---

[15] Это возражение приобретает особое значение в том случае, когда состояние движения тела отсчета таково, что для своего сохранения оно не нуждается во внешнем воздействии, например, в случае равномерного вращения тела отсчета.

§ 22. Некоторые выводы из общего принципа относительности

Рассуждения в § 20 показывают, что общий принцип относительности дает нам возможность вывести чисто теоретическим путем свойства гравитационного поля. Именно, пусть нам известно пространственно-временно́е развитие какого-либо естественного процесса, происходящего в галилеевом пространстве относительно галилеева тела отсчета K. Тогда посредством чисто теоретических операций, т. е. лишь с помощью вычислений, можно найти, как будет протекать этот процесс относительно тела отсчета K', движущегося с ускорением относительно K. Но так как относительно этого нового тела отсчета K' существует гравитационное поле, то таким путем мы найдем, как влияет гравитационное поле на изучаемый процесс.

Мы узнаем, например, что тело, движущееся относительно K прямолинейно и равномерно (в соответствии с законом Галилея), относительно ускоренно движущегося тела отсчета K' (ящика) совершает ускоренное, вообще говоря, криволинейное движение. Это ускорение и кривизна соответствуют влиянию на движущееся тело гравитационного поля, существующего относительно K'. Такое влияние гравитационного поля на движение тел известно, так что эти рассуждения не вносят ничего принципиально нового.

Однако получается новый фундаментальный результат, если провести соответствующее рассуждение применительно к световому лучу. Свет распространяется относительно галилеевского тела отсчета K по прямой линии со скоростью c. Относительно же движущегося с ускорением ящика (тело отсчета K') путь того же светового луча, как легко показать, уже не будет представлять собой прямую линию. Отсюда следует заключить, что *в гравитационных полях световые лучи распространяются, вообще говоря, по криволинейному пути*. Этот вывод важен в двух отношениях.

Во-первых, этот вывод можно проверить экспериментально. Хотя при ближайшем рассмотрении оказывается, что искривление световых лучей, согласно общей теории относительности, крайне незначительно для гравитационных полей, доступных нашему опыту, тем не менее для световых лучей, проходящих вблизи Солнца, искривление должно составлять 1,7 угловых секунд. Это должно было бы проявляться в том, что неподвижные звезды, видимые вблизи Солнца при полных солнечных затмениях, казались бы смещенными на указанную величину по сравнению с тем положением, которое они занимают в том случае, когда Солнце находится в другом месте неба. Проверка правильности этого вывода представляет собой задачу чрезвычайной важности и мы надеемся на скорое решение ее астрономами[16].

Во-вторых, этот вывод показывает, что закон постоянства скорости света в пустоте, представляющий собой одну из двух основных предпосылок специальной теории относительности, не может, согласно общей теории относительности, претендовать на неограниченную применимость. Изменение направления световых лучей может появиться лишь в том случае, если скорость распространения света меняется в зависимости от места. Можно было бы думать, что вследствие этого вывода становится несостоятельной специальная теория относительности, а вместе с ней и теория относительности вообще. На самом же деле это не так. Можно лишь заключить, что специальная теория относительности не может претендовать на неограниченную применимость; ее результаты применимы лишь до тех пор, пока можно не учитывать влияние гравитационного поля на физические явления (например, световые).

Поскольку противники теории относительности часто утверждали, что общая теория относительности опровергает специальную теорию относительности, для разъяснения действительного положения вещей обратимся к сравнению. До установления электродинамики законы электростатики считались просто законами электрических явлений. Теперь мы знаем, что электростатика может дать правильное описание электрического поля лишь в том никогда строго не реализующемся случае, когда электрические массы покоятся относительно друг друга и относительно системы координат. Опровергается ли тогда электростатика электродинамическими уравнениями Максвелла? Никоим образом! Электростатика содержится в электродинамике в качестве предельного случая; законы электродинамики приводят непосредственно к электростатике в случае полей, не зависящих от времени. Лучший удел физической теории состоит в том, чтобы указывать путь создания новой более общей теории, в рамках которой она сама остается предельным случаем.

В только что приведенном примере распространения света мы видели, что общий принцип относительности дает нам возможность теоретически определить влияние поля тяготения на течение процессов, законы которых в отсутствие поля тяготения уже известны. Однако наиболее увлекательной задачей, ключ к решению которой дает общий принцип относительности, является отыскание закона, которому подчиняется само гравитационное поле. Здесь дело заключается в следующем.

---

[16] Существование требуемого теорией отклонения света было экспериментально установлено во время солнечного затмения 29 мая 1919 г. двумя английскими экспедициями Королевского и Королевского астрономического обществ под руководством астрономов Эддингтона и Кроммелина. (См. Приложение III.)

Мы знаем пространственно-временны́е области, которые при соответствующем выборе тела отсчета обладают (приблизительно) «галилеевскими» свойствами, т. е. области, в которых гравитационные поля отсутствуют. Если такую область мы отнесем теперь к любому движущемуся телу отсчета K', то относительно K' будем иметь переменное во времени и пространстве гравитационное поле[17]. Свойства этого поля зависят, очевидно, от того, каким мы выберем движение тела отсчета K'. Общий закон гравитационного поля должен, согласно общей теории относительности, выполняться для всех получаемых таким образом гравитационных полей. Хотя отнюдь не все гравитационные поля могут быть созданы таким путем, все же можно надеяться вывести из этих специального типа гравитационных полей общий закон гравитации. Эта надежда блестяще оправдалась! Но между ясным пониманием этой цели и ее действительным осуществлением остается преодолеть еще одну серьезную трудность, о которой я не могу умолчать перед читателем, так как она связана с существом вопроса. Нам необходимо еще раз углубить понятие пространственно-временно́го континуума.

§ 23. Поведение часов и масштабов на вращающихся телах отсчета

До сих пор я умышленно не говорил о физической интерпретации пространственных и временны́х отсчетов в случае общей теории относительности. Тем самым я допустил некоторую небрежность, которая, как мы знаем из специальной теории относительности, никоим образом не является несущественной и простительной. Теперь весьма своевременно восполнить этот пробел; однако замечу, что это потребует от читателя терпения и способности к абстрактному мышлению.

Мы опять исходим из много раз использованных, но весьма частных примеров. Рассмотрим пространственно-временну́ю область, в которой относительно тела отсчета K, движущегося соответствующим образом, не существует никакого гравитационного поля; тогда K в отношении данной области является галилеевым телом отсчета, и к нему применимы выводы специальной теории относительности. Отнесем ту же область ко второму телу отсчета K', равномерно вращающемуся относительно K. Для того чтобы картину сделать наглядной, представим себе K' в виде плоского диска, равномерно вращающегося вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр. Наблюдатель, который сидит не в самом центре диска K', подвергается действию силы,

[17] Это следует из обобщения рассуждений в § 20.

направленной радиально от центра; наблюдатель, находящийся в покое относительно первого тела отсчета K, будет считать эту силу действием инерции (центробежной силой). Пусть, однако, наблюдатель, находящийся на диске, рассматривает этот диск как «покоящееся» тело отсчета; он вправе это сделать на основании общего принципа относительности. Силу, которая действует на него и вообще на тела, покоящиеся относительно диска K', он считает действием гравитационного поля. Правда, пространственное распределение этого поля тяжести не может быть согласовано с законом тяготения Ньютона[18]. Но наблюдатель убежден в справедливости общего принципа относительности и это его не смущает; он справедливо надеется, что можно установить такой общий закон тяготения, который правильно объяснит не только движение созвездий, но и наблюдаемое им силовое поле.

Наблюдатель, находясь на диске, производит эксперименты с часами и измерительными стержнями, стремясь на основании своих наблюдений дать точное определение временны́м и пространственным отсчетам относительно диска K'. Какие при этом эксперименты он будет производить?

Прежде всего наблюдатель поместит двое одинаковых часов: одни — в центре диска, другие — на его периферии, так что и те и другие покоятся относительно диска. Сначала мы спросим, одинаково ли будут идти эти двое часов с точки зрения невращающегося галилеева тела отсчета K. Относительно этого тела часы, находящиеся в центре, покоятся, тогда как часы, расположенные на периферии, движутся вследствие вращения относительно K. Поэтому, согласно одному из выводов § 12, часы на периферии, с точки зрения тела отсчета K, будут идти медленнее, чем часы в центре диска. То же самое, очевидно, должен был бы констатировать и человек на диске, если мы представим его сидящим почти в центре диска, вблизи соответствующих часов. Следовательно, на таком диске и вообще во всяком гравитационном поле часы будут идти быстрее или медленнее, в зависимости от места, где они расположены (покоятся). Таким образом, разумное определение времени с помощью часов, неподвижных относительно тела отсчета, невозможно. Подобная же трудность возникает и при попытке применить здесь ранее данное нами определение одновременности, но я не буду подробно останавливаться на этом.

Но в данном случае и определение пространственных координат с самого начала встречает непреодолимые трудности. Именно, если наблюдатель, движущийся вместе с диском, приложит свой единичный масштаб (линейку, длина которой очень мала, по сравнению с радиусом диска) по касательной к внешнему краю и диска, то этот масштаб, с точки

[18] Поле обращается в нуль в центре диска и растет к периферии пропорционально расстоянию от центра.

зрения галилеевой, системы будет короче единицы длины, так как, согласно § 12, движущиеся тела испытывают сокращение в направлении движения. Если же масштаб приложить в направлении радиуса диска, то он, с точки зрения K, не сокращается. Следовательно, если наблюдатель измерит своим масштабом сначала длину окружности диска, а затем его диаметр, и разделит первый результат измерения на второй, то получит для отношения не общеизвестное число $\pi = 3{,}14\ldots$, а большее число[19]; в то же время, если сам диск покоится относительно K, то мы должны при этой операции получить в точности число π. Тем самым доказано, что положения геометрии Эвклида не могут точно выполняться на вращающемся диске и, таким образом, вообще в гравитационном поле по крайней мере в случае, когда масштабу во всех точках и при всех ориентациях приписывается длина, равная единице. При этом понятие прямой также теряет свой смысл. Поэтому мы не можем точно определить координаты x, y, z относительно диска с помощью метода, использованного в специальной теории относительности. Но если не определены ни координаты, ни времена событий, то не имеют точного смысла и законы природы, в которые входят эти координаты.

Все это ставит под сомнение правильность изложенных выше рассуждений об общей относительности. На самом деле для точного применения общего принципа относительности требуется тонкий обходной путь. Последующим изложением читатель должен быть подготовлен к нему.

§ 24. Эвклидов и неэвклидов континуум

Пусть передо мной поверхность мраморного стола. Я могу перейти от какой-либо точки поверхности к любой другой точке, переходя большое число раз к «соседним» точкам, или, другими словами, переходя от точки к точке без «скачков». Читатель, по-видимому, достаточно ясно понимает (если только он не очень придирчив), что означает здесь понятие «соседний» и «скачки». Эту же мысль мы выражаем, утверждая, что поверхность представляет собою континуум.

Теперь представим себе большое количество небольших по сравнению с размерами стола линеек одинаковой длины; это значит, что концы любой пары линеек совпадают при наложении. Расположим на поверхности стола четыре линейки таким образом, чтобы они образовали четырехугольник, диагонали которого равны между собой (квадрат). Чтобы обеспечить

---

[19] Во всех этих рассуждениях в качестве тела отсчета следует применять галилееву (невращающуюся) систему K, так как выводы специальной теории относительности справедливы лишь относительно K (относительно же K' существует гравитационное поле).

равенство диагоналей, мы пользуемся контрольной линейкой. К этому квадрату мы подстраиваем такие же квадраты, имеющие одну общую сторону с первым; таким же образом рядом с этими последними квадратами строим новые и т. д. В конце концов вся поверхность стола будет покрыта квадратами, причем каждая сторона является общей для двух квадратов и каждая вершина — для четырех квадратов.

То, что это можно сделать без больших трудностей,— истинное чудо! Достаточно только подумать о следующем. Если в некоторой вершине уже сходятся три квадрата, то тем самым уже имеются две стороны четвертого квадрата. Этим уже полностью определено, как должны быть уложены остальные две стороны. Но теперь я уже не могу составить четырехугольник так, чтобы его диагонали были равны. Если они уже равны сами по себе, то это объясняется особо благоприятными свойствами стола и линеек, которым я могу только удивляться! С подобным чудом мы должны были сталкиваться неоднократно, если это построение нам удалось довести до конца.

Если все это удалось действительно гладко, то можно утверждать, что точки поверхности стола образуют эвклидов континуум относительно использованных линеек в качестве отрезков. Взяв вершину одного из квадратов за «начальную точку», я могу охарактеризовать любую другую вершину одного из квадратов по отношению к начальной точке двумя числами. Чтобы достигнуть рассматриваемой вершины квадрата, я должен указать, сколько линеек я должен отложить «вправо» и сколько — «вверх» от начальной точки. Тогда эти два числа и будут представлять собой «декартовы координаты» указанной вершины относительно определяемой уложенными линейками «декартовой системе координат».

То, что существуют случаи, когда подобный эксперимент не удается, можно увидеть, несколько изменив этот мысленный эксперимент. Как известно, линейки должны «удлинняться» в зависимости от температуры. Пусть крышка стола нагрета в середине, а по краям остается ненагретой, причем любые две наши линейки по-прежнему могут быть совмещены друг с другом в любом месте стола. Но при этом наша конструкция из квадратов неизбежно должна расстроиться, так как линейки в середине стола удлинились, а линейки у краев стола — нет.

По отношению к нашим линейкам, определенным в качестве единиц длины, поверхность стола уже не будет эвклидовым континуумом, и мы уже не в состоянии непосредственно определить с ее помощью декартовы координаты, так как вышеописанное построение более невыполнимо. Однако имеются другие предметы, на которые температура стола влияет иначе, чем на наши линейки (или вовсе не влияет), и, следовательно, можно естественным путем сохранить представление о поверхности стола как об «эвклидовом континууме»; это может быть достигнуто удовлетворительным образом более тонким определением понятия измерения, т. е. сравнения отрезков.

Но если бы длина линеек любого рода, т. е. из любых материалов, одинаковым образом зависела от температуры на неодинаково нагретой поверхности стола, и если бы у нас не было другого средства установить влияние температуры, кроме геометрических свойств линеек при опытах, аналогичных описанному выше, то было бы целесообразно принять за единицу расстояние между двумя точками на поверхности стола, если концы одной из наших линеек совпадают с этими точками. В самом деле, как можно было бы иначе определить отрезок без явного произвола? Однако в таком случае мы должны отказаться от метода декартовых координат и заменить его другим методом, который не предполагал бы применимости эвклидовой геометрии к твердым телам[20]. Читатель замечает, что описанное здесь положение соответствует тому, которое привело к общему принципу относительности (см. § 23).

§ 25. Гауссовы координаты

Аналитико-геометрический метод рассмотрения может быть, согласно Гауссу, описан следующим образом. Представим себе, что на поверхность стола нанесена система некоторых кривых (см. рис. 4), которые мы назовем u- кривыми и пронумеруем их какими-либо числами. На рис. 4 изображены кривые $u = 1$, $u = 2$ и $u = 3$. Но между кривыми $u = 1$ и $u = 2$ следует представить себе бесконечно много кривых, которые соответствуют всем вещественным числам между 1 и 2. Тогда получается система u-кривых, которые бесконечно плотно покрывают всю поверхность стола. Ни одна кривая u не должна пересекать другую; через каждую точку поверхности стола проходит одна и только одна кривая. Тогда каждой точке поверхно-

---

[20] Математики формулируют нашу задачу следующим образом. Если в трехмерном эвклидовом метрическом пространстве дана некоторая поверхность, например эллипсоид, то на этой поверхности, так же как на плоскости, выполняется двумерная геометрия. Гаусс поставил перед собой задачу исследовать эту двумерную геометрию, не предполагая, что поверхность принадлежит эвклидову континууму трех измерений. Если на этой поверхности осуществляются построения из жестких линеек (аналогичные описанному выше построению на поверхности стола), то для этих построений выполняются уже иные законы, отличные от законов эвклидовой геометрии на плоскости. Поверхность не будет эвклидовым континуумом в отношении линеек, и на поверхности нельзя определить декартовы координаты. Гаусс показал, на каких принципах может быть основана трактовка геометрических соотношений на поверхности, и тем самым указал путь к риманову методу исследования многомерных неэвклидовых континуумов. Таким образом, математиками уже давно решены формальные проблемы, к которым приводит общий принцип относительности.

сти стола соответствует совершенно определенное значение u. Начертим на той же поверхности систему v-кривых, которые удовлетворяют тем же условиям и обозначены соответствующим образом числами, но также могут иметь произвольную форму. Тогда каждой точке поверхности стола соответствует одно значение u и одно значение v; эти два числа мы назовем координатами поверхности стола (гауссовы координаты). Например,

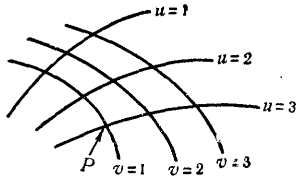

Рис. 4.

точка P на рис. 3 имеет гауссовы координаты $u = 3$; $v = 1$. Тогда две соседние точки P и P' на поверхности соответственно имеют координаты

$$u, \ v$$

и

$$u + du, \quad v + dv,$$

где du и dv означают весьма малые числа. Расстояние между P и P', измеренное линейкой, также является весьма малым числом ds. Тогда согласно Гауссу, мы имеем

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2,$$

где g_{11}, g_{12}, g_{22} — величины, которые вполне определенным образом зависят от u и v. Величины g_{11}, g_{12} и g_{22} определяют поведение линеек по отношению к u-кривым и v-кривым, а следовательно, по отношению к поверхности стола. Только в том случае, когда точки рассматриваемой поверхности образуют эвклидов континуум (по отношению к измерительным линейкам), можно начертить u-кривые и v-кривые и приписать им числа таким образом, что

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

В этом случае u-кривые и v-кривые становятся прямыми линиями в смысле эвклидовой геометрии, причем перпендикулярными друг другу. Здесь гауссовы координаты являются просто декартовыми координатами. Гауссовы координаты, очевидно, и есть сопоставление точке рассматриваемой поверхности пары чисел, причем такое, что очень мало различающимся численным значениям однозначно соответствуют соседние точки в пространстве.

Это рассуждение применимо прежде всего к двумерному континууму. Но метод Гаусса может быть применен также к континууму трех, четырех и более измерений. Если, например, имеется четырехмерный континуум, мы можем представить его следующим образом. Каждой точке континуума мы произвольно ставим в соответствие четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4, которые называются «координатами». Соседние точки соответствуют соседним значениям координат. Если соседним точкам P и P' сопоставлено расстояние ds, измеренное и вполне определенное с физической точки зрения, то выполняется следующая формула:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + \cdots + g_{44}dx_4^2,$$

где величины g_{11} и т. д. имеют значения, которые изменяются от точки к точке в континууме. Лишь в том случае, когда континуум является эвклидовым, координаты x_1, x_2, x_3, x_4 можно связать с точками континуума так, что мы получаем формулу

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Тогда в четырехмерном континууме выполняются соотношения, которые аналогичны соотношениям, справедливым для измерений в трехмерном пространстве.

Правда, приведенная выше гауссовская трактовка ds^2 не всегда возможна; она возможна лишь в том случае, когда достаточно малые области рассматриваемого континуума можно считать эвклидовыми континуумами. Например, это осуществляется, очевидно, в случае неравномерно нагретой доски стола, температура которой изменяется в зависимости от места. Температура малой части доски стола практически постоянна, и таким образом геометрические свойства линеек п о ч т и такие, какими они должны быть в соответствии с правилами эвклидовой геометрии. Следовательно, указанные в предыдущем параграфе затруднения в построении квадратов не проявятся четко до тех пор, пока это построение не распространено на значительную часть поверхности стола.

Резюмируя, мы можем сказать следующее: Гаусс предложил метод математического описания любого континуума, в котором определены метрические соотношения («расстояния» между соседними точками). Каждой точке континуума приписывается столько чисел (гауссовых координат), сколько измерений имеет континуум. Способ приписания выбран таким, чтобы он был однозначным и чтобы соседним точкам соответствовали числа (гауссовы координаты), отличающиеся на бесконечно малую величину. Гауссова система координат является логическим обобщением декартовой. Она применима также и к неэвклидовым континуумам, но лишь тогда, когда малые по отношению к определенному размеру («расстоянию») части рассматриваемого континуума тем более похожи на эвклидов континуум, чем меньше рассматриваемая часть континуума.

§ 26. Пространственно-временной континуум специальной теории относительности как эвклидов континуум

Теперь мы можем несколько точнее сформулировать мысль Минковского, которая лишь в общих чертах намечена в § 17. Согласно специальной теории относительности, преимущества для описания четырехмерного пространственно-временно́го континуума дают определенные системы координат. Мы назвали их «галилеевыми системами координат». Для этих систем четыре координаты x, y, z, t, которые определяют некоторое событие, или, иначе говоря, точку четырехмерного континуума, физически определяются простым путем, подробно описанным в первой части настоящей работы. Для перехода от одной галилеевой системы к другой, движущейся равномерно относительно первой, применимы уравнения преобразования Лоренца. Последние служат основой для вывода следствий специальной теории относительности и представляют собой не что иное как выражение универсальной применимости закона распространения света для всех галилеевых систем отсчета.

Минковский нашел, что преобразования Лоренца удовлетворяют следующим простым условиям. Рассмотрим два соседних события, взаимное положение которых в четырехмерном континууме по отношению к галилеевому телу отсчета K определяется разностями dx, dy, dz пространственных координат и разностью dt времени. По отношению ко второй галилеевой системе отсчета мы будем предполагать, что соответствующие разности для этих двух событий есть dx', dy', dz', dt'. Тогда для этих величин всегда выполняется следующее условие[21]:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2dt'^2.$$

Из этого условия следует справедливость преобразования Лоренца. Это можно выразить следующим образом. Величина

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2,$$

которая относится к двум соседним точкам четырехмерного пространственно-временного континуума, имеет одно и то же значение для всех

---

[21] См. Приложения I и II. Выведенные там соотношения (11a) и (12) для самих координат справедливы также для разностей координат, а следовательно и для дифференциалов координат (бесконечно малых разностей).

выбранных (галилеевых) тел отсчета. Если мы заменим x, y, z, $\sqrt{-1}\, ct$ соответственно на x_1, x_2, x_3, x_4, то в результате получим, что выражение

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

не зависит от выбора тела отсчета. Величину ds мы называем «расстоянием» между двумя событиями или точками четырехмерного континуума.

Итак, если мы выбрали в качестве временнóй переменной мнимую величину $\sqrt{-1}\, ct$ вместо вещественной величины t, мы можем рассматривать пространственно-временнóй континуум — согласно специальной теории относительности — как «эвклидов» четырехмерный континуум; этот результат следует из последнего параграфа.

§ 27. Пространственно-временнóй континуум общей теории относительности не является эвклидовым

В первой части этой работы мы имели возможность пользоваться пространственно-временны́ми координатами, которые допускали непосредственную простую физическую интерпретацию и которые могли, согласно § 26, рассматриваться как четырехмерные декартовы координаты. Эта возможность следовала из закона постоянства скорости света. Но, согласно § 21, в общей теории относительности этот закон уже не справедлив. Наоборот, мы пришли к выводу, что, согласно последней, скорость света всегда должна зависеть от координат, если присутствует гравитационное поле. В связи со специальным примером в § 23 мы нашли, что гравитационное поле делает невозможным то определение координат и времени, которое привело нас к цели в специальной теории относительности.

Из этих соображений мы приходим к убеждению, что, согласно общему принципу относительности, пространственно-временнóй континуум не может рассматриваться как эвклидов и что здесь мы встречаемся с общим случаем, с которым мы познакомились на примере двумерного континуума неравномерно нагретой доски стола. Так же, как в указанном примере было невозможно построить декартову систему координат из одинаковых линеек, здесь невозможно построить из твердых тел и часов такую систему (тело отсчета), чтобы линейки и часы, закрепленные жестко по отношению друг к другу, непосредственно указывали бы положение и время. В этом состоит сущность той трудности, с которой мы встретились в § 23.

Однако соображения, изложенные в § 25 и 26, указывают нам путь преодоления этой трудности. Отнесем четырехмерный пространственно-временно́й континуум произвольным образом к гауссовым координатам. Припишем каждой точке континуума (событию) четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 (координаты), которые не имеют никакого непосредственного физического смысла, но служат лишь для определенной, хотя и произвольной нумерации точек континуума. При этом нумерация вовсе не должна быть такой, чтобы x_1, x_2, x_3 рассматривались обязательно как «пространственные» координаты, а x_4 — как «временна́я» координата.

Читатель может подумать, что подобное описание мира было бы совершенно неадэкватным; какой смысл в том, что я приписываю некоторому событию определенные координаты x_1, x_2, x_3, x_4, если сами эти координаты лишены смысла? Однако более внимательное рассмотрение показывает, что это беспокойство неосновательно. Рассмотрим, например, любую движущуюся материальную точку. Если бы эта точка существовала лишь мгновение, а не продолжительное время, то она описывалась бы в пространстве-времени единственной системой значений x_1, x_2, x_3, x_4. Длительное же существование материальной точки характеризуется бесконечно большим числом таких систем значений, которые примыкают друг к другу, образуя континуум. Таким образом, материальной точке соответствует (одномерная) линия в четырехмерном континууме. Другим движущимся материальным точкам соответствует столько же линий нашего континуума. Только те из утверждений относительно этих точек могут претендовать на физическую реальность, которые касаются встреч этих точек. В нашей математической формулировке такая встреча описывается тем, что обе линии, представляющие соответствующие движения рассматриваемых материальных точек, имеют одну определенную общую систему значений координат x_1, x_2, x_3, x_4. После тщательного размышления читатель, несомненно, согласится с тем, что единственное реальное утверждение пространственно-временно́го характера, которое содержится в наших физических высказываниях, относится только к таким встречам.

Описывая движение материальной точки относительно некоторого тела отсчета, мы констатировали лишь встречи этой точки с определенными точками тела отсчета. Соответствующие значения времени мы можем также определить путем констатации встреч тела с часами вместе с констатацией встреч стрелок часов с определенными точками циферблатов. После некоторого размышления мы видим, что точно так же обстоит дело с пространственными измерениями с помощью масштабов.

Вообще, всякое физическое описание сводится к некоторому числу констатаций, каждое из которых относится к пространственно-временно́му совпадению двух событий A и B. В гауссовых координатах всякая такая констатация выражается через совпадения четырех координат x_1, x_2, x_3, x_4 этих событий. Таким образом, в действительности описание пространственно-временно́го континуума в гауссовых координатах вполне заменяет описание с помощью тела отсчета, не страдая при этом недостатками последнего метода описания; оно не связано с эвклидовым характером описываемого континуума.

§ 28. Точная формулировка общего принципа относительности

Теперь мы в состоянии заменить предварительную формулировку общего принципа относительности, данную в § 18, более точной. Первоначально мы формулировали общий принцип следующим образом: «Все тела отсчета K, K' и т. д. эквивалентны для описания природы (формулировки общих законов природы), каково бы ни было состояние движения этих тел отсчета». Эта формулировка не может быть сохранена, поскольку невозможно пользоваться твердыми телами отсчета в том смысле, в каком это делалось в специальной теории относительности, при пространственно-временно́м описании. Место тела отсчета занимает гауссова система координат. Основной идее общего принципа относительности соответствует следующее утверждение: «*Все гауссовы системы координат в принципе эквивалентны для формулирования общих законов природы*».

Этот общий принцип относительности можно выразить еще и в другой форме, из которой еще отчетливее видно, что он является естественным обобщением специального принципа относительности. Согласно специальной теории относительности, уравнения, которые выражают общие законы природы, сохраняют свою форму, если вместо пространственно-временны́х переменных x, y, z, t относительно (галилеева) тела отсчета K ввести с помощью преобразования Лоренца переменные x', y', z', t' относительно нового тела отсчета K'. Согласно же общей теории относительности, эти уравнения при любом преобразовании гауссовых переменных x_1, x_2, x_3, x_4 должны переходить в уравнения того же вида поскольку всякое преобразование (не только преобразование Лоренца) отвечает переходу от одной гауссовой системы координат к другой.

Тот, кто не желает отказываться от обычного трехмерного представления, может охарактеризовать развитие основной идеи общей теории относительности следующим образом: специальная теория относительности относится к галилеевым областям, т. е. к таким, в которых не существует гравитационного поля. При этом телом отсчета служит галилеево тело отсчета, т. е. твердое тело, находящееся в таком состоянии движения, что для него выполняется галилеев закон равномерного и прямолинейного движения «изолированных» материальных точек.

Некоторые соображения позволяют распространить те же галилеевы области и на негалилеевы тела отсчета. Тогда относительно последних существует гравитационное поле специального вида (см. § 20 и 23).

Но в полях тяготения не существует твердых тел с эвклидовыми свойствами; поэтому понятие твердого тела отсчета не применимо в общей теории относительности. Гравитационные поля влияют и на ход часов, так что физическое определение времени непосредственно с помощью часов совершенно не обладает той степенью очевидности, какой оно обладает в специальной теории относительности.

Поэтому используются нежесткие тела отсчета, которые могут не только двигаться произвольным образом как целое, но и претерпевать изменения формы при своем движении. Для определения времени служат часы со сколь угодно нерегулярным ходом. Мы должны представить себе, что эти часы помещены в какой-либо точке нежесткого тела отсчета; они удовлетворяют лишь одному условию, которое заключается в том, что одновременно воспринимаемые показания часов, находящихся в соседних пространственных точках, различаются бесконечно мало. Это деформируемое тело отсчета, которое не без основания можно назвать «моллюском отсчета», по существу равноценно любой четырехмерной гауссовой системе координат. По сравнению с гауссовой системой «моллюск» имеет известную наглядность, благодаря формальному сохранению (собственно говоря, без оснований) самостоятельного существования пространственных координат по отношению к временно́й координате. Каждая точка моллюска рассматривается как пространственная точка, и каждая покоящаяся относительно моллюска материальная точка считается просто покоящейся, пока сам моллюск рассматривается как тело отсчета. Общий принцип относительности требует, чтобы все эти моллюски могли быть использованы в качестве тел отсчета с одинаковым успехом при формулировании общих законов природы; эти законы совершенно не должны зависеть от выбора моллюска. Именно в далеко идущих ограничениях, которые налагаются на законы природы, и лежит истинная сила общего принципа относительности.

§ 29. Решение проблемы гравитации на основе общего принципа относительности

Если читатель внимательно следил за всеми предыдущими рассуждениями, то он без труда поймет и методы, ведущие к решению проблемы гравитации.

Мы исходим из рассмотрения галилеевой области, т. е. области, в которой не существует поле тяготения относительно галилеева тела отсчета K.

Поведение масштабов и часов так же, как и поведение «изолированных» материальных точек относительно K, известно из специальной теории относительности; последние движутся прямолинейно и равномерно.

Теперь отнесем эту область к любой системе гауссовых координат или к «моллюску» как телу отсчета K'. Тогда по отношению к K' существует гравитационное поле G (особого вида). Поведение измерительных линеек, часов, а также свободно движущихся материальных точек относительно K' мы изучаем просто путем математических расчетов. Это поведение мы интерпретируем как поведение измерительных линеек, часов и материальных точек под влиянием гравитационного поля G. Затем мы вводим следующую гипотезу: гравитационное поле воздействует на измерительные линейки, часы и свободно движущиеся материальные точки согласно тем же законам и в том случае, когда существующее гравитационное поле *не* может быть выведено путем простого преобразования координат из галилеева специального случая.

Следующим шагом является исследование пространственно-временнóго поведения гравитационного поля G, которое было выведено из галилеева специального случая только путем преобразования координат. Это поведение формулируется в виде закона, который справедлив всегда, независимо от выбора тела отсчета (моллюска).

Этот закон еще не является о б щ и м законом гравитационного поля, поскольку изученное поле представляет собой поле специального вида. Для нахождения общего закона гравитационного поля необходимо обобщить полученный закон, что и может быть сделано без какого-либо произвола при учете следующих требований:

а) искомое обобщение должно также удовлетворять общему принципу относительности;

б) если в рассматриваемой области имеется материя, то создаваемое ею гравитационное поле определяется только ее инертной массой, и, следовательно, согласно § 15, только ее энергией;

в) гравитационное поле и материя вместе должны удовлетворять закону сохранения энергии (и импульса).

Наконец, общий принцип относительности дает возможность выяснить влияние гравитационного поля на все те процессы, законы которых в отсутствие поля известны, т. е. уже включены в рамки специальной теории относительности. При этом пользуются в принципе тем же методом, который был изложен выше применительно к масштабам, часам и свободно движущимся материальным точкам.

Выведенная таким образом из общего принципа относительности теория гравитации не только отличается своим изяществом, не только устраняет присущие классической механике недостатки, отмеченные в § 21, не только интерпретирует эмпирический закон равенства инертной и тяжелой масс. Но она также объяснила уже два существенно различных результата астрономических наблюдений, которые не могла объяснить классическая механика. Мы уже упоминали о втором из этих результатов, а именно: об искривлении световых лучей в поле тяготения Солнца; первый же касается орбиты планеты Меркурия.

Если уравнения общей теории относительности применить к случаю, когда гравитационные поля можно считать слабыми и когда все массы движутся относительно системы координат со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, то как первое приближение получается прежде всего теория Ньютона. Последняя получается здесь без особых предположений, тогда как Ньютон вынужден был ввести в качестве гипотезы силу притяжения, обратно пропорциональную квадрату расстояния между двумя взаимодействующими материальными точками. При повышении точности вычислений выявляются отклонения от теории Ньютона, которые, правда, настолько незначительны, что почти все ускользают от наблюдения.

Одно из этих отклонений мы должны здесь рассмотреть специально. Согласно теории Ньютона, планета движется вокруг Солнца по эллипсу, который вечно сохраняет свое положение относительно неподвижных звезд, если можно было бы отвлечься от воздействия других планет на рассматриваемую планету и от собственного движения «неподвижных» звезд. После введения поправок в наблюдаемое движение планет на оба эти эффекта орбита планеты по отношению к неподвижным звездам должна представлять собою неизменный эллипс, если теория Ньютона верна в точности. Для всех планет, за исключением ближайшей к Солнцу планеты Меркурий, был подтвержден этот вывод теории, который может быть проверен с высокой точностью, какая только достижима при современных методах наблюдения. Со времен Леверье о планете Меркурий известно, что эллипс ее орбиты с учетом указанных выше поправок не остается в неизменном положении относительно неподвижных звезд, но вращается, хотя и чрезвычайно медленно, в плоскости орбиты и в направлении орбитального движения планеты. Это вращение эллипса орбиты составляет 43 угловых секунды в столетие, причем это значение установлено с точностью до нескольких секунд. В классической механике это явление удается объяснить лишь ценой введения маловероятных гипотез, придуманных только для данного случая.

Согласно общей теории относительности получается, что эллипс орбиты каждой планеты должен вращаться вокруг Солнца вышеуказанным образом и что это вращение для всех планет, кроме Меркурия, слишком мало, чтобы его можно было заметить при современной точности наблюдений; для Меркурия же вращение должно составлять именно 43 угловых секунды в столетие, в точном согласии с наблюдаемым.

Кроме этого, из теории до сих пор можно было вывести еще два следствия, доступных проверке наблюдением: искривление световых лучей гравитационным полем Солнца[22] и смещение спектральных линий света, посылаемого к нам большими звездами, по сравнению со спектральными линиями света, испускаемого теми же самыми атомами на Земле. Я не сомневаюсь в том, что и это последнее следствие теории скоро найдет свое подтверждение.

О МИРЕ КАК ЦЕЛОМ

§ 30. Космологические затруднения теории Ньютона

Кроме изложенного в § 21 затруднения, классическая небесная механика встречается со вторым принципиальным затруднением, которое, насколько мне известно, было впервые подробно рассмотрено астрономом Зеелигером. Если подумать над вопросом, как следует представлять себе мир в целом, то прежде всего напрашивается следующий ответ. Мир бесконечен в пространстве (и времени). Всюду существуют звезды, так что хотя плотность материи в отдельных случаях весьма различна, в среднем она всюду одинакова. Иными словами: как бы далеко ни проникать в мировое пространство, всюду мы найдем рассеянные скопления неподвижных звезд примерно одного типа и одинаковой плотности.

Это представление несовместимо с теорией Ньютона. Больше того, последняя требует, чтобы мир имел нечто вроде центра, где плотность числа звезд была бы максимальной и чтобы эта плотность убывала с расстоянием от центра так, что на бесконечности мир был бы совсем пустым. Звездный мир должен представлять собой конечный остров в бесконечном океане пространства[23].

Это представление не очень удовлетворительно само по себе. Оно неудовлетворительно еще и потому, что приводит к следствию, что свет, излучаемый звездами, а также отдельные звезды звездной системы должны

---

[22] Впервые наблюдалось А. Эддингтоном и другими в 1919 г. (см. Приложение III).

[23] Обоснование. Согласно теории Ньютона, на некоторой массе m оканчивается определенное число «силовых линий», которые приходят из бесконечности, причем это число пропорционально массе m. Если плотность ρ_0 массы в мире в среднем постоянна, то в шаре объемом V заключается в среднем масса $\rho_0 V$. Таким образом, число силовых линий, входящих внутрь шара через его поверхность F, пропорционально величине $\rho_0 V$. Через единицу поверхности шара проходят силовые линии, число которых пропорционально величине $\rho_0 (V/F)$, или $\rho_0 R$. Следовательно, напряженность поля на поверхности возрастала бы до бесконечности с увеличением радиуса шара R, что невозможно.

непрерывно удаляться в бесконечность, никогда не возвращаясь и не вступая во взаимодействие с другими объектами природы. Такой мир, материя которого сконцентрирована в конечном пространстве, должен был бы медленно, но систематически опустошаться.

Чтобы избежать этих следствий, Зеелигер изменил закон Ньютона, предположив, что притяжение двух масс на больших расстояниях убывает быстрее, чем по закону $1/r^2$. Тогда плотность может оставаться постоянной всюду в бесконечной Вселенной, не приводя к бесконечно большим полям тяготения. Так можно освободиться от неприятного представления о том, что материальный мир обладает каким-то центром. Правда, это освобождение от описанных выше принципиальных трудностей достигается ценой изменения и усложнения закона Ньютона, которые не имеют ни экспериментального, ни теоретического обоснования.

Можно указать сколько угодно законов, приводящих к тому же результату, причем нет оснований предпочесть один другому; каждый из этих законов, как и закон Ньютона, не обоснован общими теоретическими принципами.

§ 31. Возможность конечного и все же неограниченного мира

Предположения о структуре Вселенной развивались еще и в совершенно ином направлении. А именно: развитие неэвклидовой геометрии привело к осознанию того факта, что можно сомневаться в бесконечности нашего пространства, не вступая в противоречие с законами мышления и с опытом (Риман, Гельмгольц). Эти соображения уже детально выяснены с исключительной отчетливостью Гельмгольцем и Пуанкаре; здесь же я могу лишь кратко коснуться этого вопроса.

Сначала представим себе некоторое двумерное пространство. Пусть в плоскости свободно передвигаются плоские существа с плоскими инструментами, в частности с плоскими жесткими масштабами. Для них ничего не существует вне этой плоскости, тогда как все происходящее в их плоскости и наблюдаемое ими самими или при помощи их плоских инструментов является каузально замкнутым. В частности, для них осуществимы построения плоской эвклидовой геометрии с помощью линеек, например, рассмотренное в § 24 построение сетки. Мир этих существ, в отличие от нашего, является пространственно-двумерным, но, как и наш мир, простирается в бесконечность. В их мире умещается бесконечно много одинаковых квадратов, построенных из линеек, т. е. объем (поверхность) этого двумерного мира бесконечен. Утверждение существ этого мира, что их мир является «плоским», имеет тот смысл, что при помощи имеющихся у них линеек можно выполнить построения из квадратов в плоской эвклидовой геометрии, причем каждая линейка, независимо от своего положения, всегда представляет один и тот же отрезок.

Теперь снова представим себе двумерное существо, но не на плоскости, а на сферической поверхности. Плоские существа со своими масштабами и другими предметами лежат точно на этой поверхности и не могут покинуть ее; весь воспринимаемый ими мир простирается исключительно на сферическую поверхность. Могут ли эти существа рассматривать геометрию своего мира как двумерную геометрию Эвклида и при этом рассматривать свои линейки как осуществление понятия «расстояния»? Они не могут поступить так, поскольку при попытке провести прямую они получат кривую, которую мы, трехмерные существа, называем дугой большого круга, т. е. замкнутую линию определенно конечной длины, которую можно измерить с помощью линейки. Площадь поверхности этого мира также конечна и ее можно сравнить с площадью одного из квадратов, построенного из линеек. Прелесть такого рассуждения заключается в том, что мы увидели *мир этих существ конечным и все же не имеющим границ*.

Но существам, обитающим на поверхности шара, не требуется совершать кругосветного путешествия, чтобы заметить неэвклидовость мира, в котором они живут. Они могут убедиться на всяком участке своего мира, если этот участок не слишком мал. Они проводят из некоторой точки во всех направлениях «прямые отрезки» (дуги окружностей, с точки зрения трехмерного пространства) одинаковой длины. Линию, соединяющую свободные концы этих линий, они будут называть «окружностью». Согласно эвклидовой геометрии на плоскости, отношение длины окружности, измеренной некоторой линейкой, к длине диаметра, измеренной той же линейкой, равно постоянной величине π, не зависящей от диаметра окружности. Наши плоские существа на своей сферической поверхности нашли бы для этого отношения следующую величину:

$$\pi \frac{\sin(r/R)}{(r/R)},$$

т. е. величину, меньшую π, причем отличающуюся от π тем значительнее, чем больше радиус окружности по сравнению с радиусом R этого мира (сферы). Из этого соотношения существа, обитающие на сфере, могут определить радиус R своего мира, если даже их измерениям доступна лишь сравнительно небольшая часть их мира-сферы. Но если эта часть слишком мала, то они уже не в состоянии установить: находятся ли они на сферической поверхности или на эвклидовой плоскости; небольшой участок сферической поверхности очень мало отличается от участка части плоскости такой же величины.

Таким образом, если сферически-поверхностные существа обитают на планете, солнечная система которой составляет лишь ничтожно малую часть сферического мира, то они не могли бы решить, живут ли они в конечном или бесконечном мире, поскольку часть мира, доступная их опыту, в обоих случаях является практически плоской, т. е. эвклидовой. Непосредственно видно, что для обитающих на сфере существ длина окружности сначала возрастает с радиусом до «окружности мира» и затем, при дальнейшем возрастании радиуса, постепенно уменьшается до нуля. При этом площадь круга постоянно возрастает, пока она наконец не станет равной полной площади всего сферического мира.

Читатель, быть может, удивится тому, что мы поместили наши существа именно на сферу, а не на какую-либо иную замкнутую поверхность. Но это имеет свое оправдание, поскольку сфера отличается от всех других замкнутых поверхностей тем свойством, что все ее точки равноценны. Отношение длины окружности u к своему радиусу r хотя и зависит от r, но при данном r оно одинаково для всех точек сферического мира; иными словами, этот мир-сфера есть «поверхность постоянной кривизны».

Имеется трехмерный аналог двумерного сферического мира, а именно: трехмерное сферическое пространство, открытое Риманом. Все его точки также равноценны. Оно обладает конечным объемом, который определяется его «радиусом» R и равен $2\pi^2R^3$. Можно ли представить себе сферическое пространство? Представить себе какое-либо пространство означает не что иное, как представить себе сущность «пространственных» опытов, т. е. опытов, которые можно производить при движении «твердых» тел. В этом смысле сферическое пространство можно себе представить.

Пусть из некоторой точки проведены прямые (или натянуты шнуры) во всех направлениях и на каждой из них отложена при помощи масштаба длина r. Все свободные концы этих отрезков лежат на сфере. Эту поверхность F мы можем измерить масштабным квадратом. Для эвклидова мира $F = 4\pi r^2$; если же мир сферический, то F всегда меньше $4\pi r^2$. С возрастанием r площадь поверхности F растет от нуля до некоторого максимума, определяемого «радиусом мира», а при дальнейшем возрастании r величина F снова постепенно уменьшается до нуля. Выходящие из начальной точки радиальные прямые сначала все более удаляются друг от друга, а затем снова сближаются и в конце концов вновь сходятся в точке, «противолежащей» начальной точке; таким образом, они промеряют все сферическое пространство. Легко убедиться, что трехмерное сферическое пространство вполне аналогично двумерному (поверхности сферы). Оно конечно (т. е. имеет конечный объем), но не имеет границ.

Заметим, что существует еще одна разновидность сферического пространства, а именно, «эллиптическое пространство». Его можно представить себе как сферическое пространство, в котором «противолежащие точки» совпадают. Таким образом, эллиптический мир можно рассматривать до некоторой степени как центрально-симметричный сферический мир.

Из сказанного следует, что мыслимы замкнутые пространства, не имеющие границ. Среди них выделяется своей простотой сферическое (и соответственно, эллиптическое) пространство, все точки которого равноценны. Отсюда перед астрономами и физиками возникает чрезвычайно интересный вопрос: является ли мир, в котором мы живем, бесконечным или же он, подобно сферическому миру, конечен? Наш опыт далеко не достаточен для ответа на этот вопрос Однако общая теория относительности дает возможность ответить на этот вопрос со значительной достоверностью; при этом разрешается также затруднение, изложенное в § 30.

32. Структура пространства, согласно общей теории относительности[24]

Согласно общей теории относительности, геометрические свойства пространства не самостоятельны: они обусловлены материей. Отсюда можно сделать какое-либо заключение о геометрической структуре мира, лишь положив в основу рассмотрение предположения о том, что состояние материи является известным. Из опыта известно, что, при соответствующем выборе системы координат, скорости звезд малы по сравнению со скоростью распространения света. Поэтому мы можем в грубом приближении выяснить свойства мира в целом, считая материю покоящейся.

Из предшествующих рассуждений мы уже знаем, что поля тяготения, т. е. распределение материи, влияют на поведение часов и масштабов. Отсюда уже ясно, что не может быть и речи о точной применимости эвклидовой геометрии в нашем мире. Однако мыслимо, что наш мир мало отклоняется от эвклидова; это предположение допустимо, поскольку, согласно расчету, даже массы порядка массы нашего Солнца лишь совершенно незначительно влияют на метрику окружающего нас пространства. Можно представить себе, что наш мир по своим геометрическим свойствам подобен поверхности, неравномерно искривленной в некоторых частях, нигде, однако, не отклоняющейся значительно от плоскости, и похож на поверхность слабо волнующегося моря. Такого рода мир можно назвать квазиэвклидовым. Он был бы пространственно бесконечным. Однако вычисления показывают, что в квазиэвклидовом мире средняя плотность материи должна равняться нулю. Следовательно, такой мир не может всюду быть заполнен материей; он приводит к той неудовлетворительной картине, которую мы набросали в § 30.

---

[24] См. Приложение IV (стр. 599).— *Прим. ред.*

Но если средняя плотность материи в мире даже очень мало отличается от нуля, то мир не может быть квазиэвклидовым. Больше того, вычисления показывают, что при равномерно распределенной материи мир с необходимостью должен быть сферическим (или эллиптическим). Так как в действительности в отдельных областях материя распределена неравномерно, то реальный мир в отдельных частях будет отклоняться от сферического; он будет квазисферическим. Однако он должен быть конечным. Теория дает простое соотношение [25] между пространственной протяженностью мира и средней плотностью материи в нем.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Простой вывод преобразования Лоренца

(Дополнение к § 11)

При расположении систем координат, изображенном на рис. 2, оси X обеих систем постоянно совпадают. Мы можем здесь разделить задачу на две части и сначала рассматривать лишь события, локализированные на оси X. Такое событие определяется относительно системы координат K абсциссой x и временем t, а относительно K' — абсциссой x' и временем t'. Требуется найти x' и t', если даны x и t.

Световой сигнал, распространяющийся в положительном направлении оси X, движется в соответствии с уравнением

$$x = ct,$$

или

$$x - ct = 0. \tag{1}$$

Так как этот же световой сигнал распространяется и относительно K' с той же скоростью c, то его движение относительно системы K' будет описываться уравнением

$$x' - ct' = 0. \tag{2}$$

Пространственно-временные точки (события), удовлетворяющие уравнению (1), должны удовлетворять также уравнению (2). Это, очевидно, будет иметь место в том случае, если вообще выполняется соотношение

$$x' - ct' = \lambda(x - ct), \tag{3}$$

где λ — некоторая постоянная. В самом деле, согласно соотношению (3),

[25] А именно, для «радиуса мира» R получается соотношение

$$R^2 = \frac{2}{\varkappa\rho}.$$

При этом в системе СГС $2/\varkappa = 1{,}08 \cdot 10^{27}$, а ρ — средняя плотность материи.

обращение в нуль выражения $x - ct$ означает обращение в нуль и $x' - ct'$.

Совершенно аналогичное рассуждение, примененное к световым лучам, распространяющимся в отрицательном направлении оси X, приводит к условию

$$x' + ct' = \mu (x + ct). \tag{4}$$

Складывая и вычитая соотношения (3) и (4) и при этом вводя для удобства вместо постоянных λ и μ новые постоянные

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2},$$

$$b = \frac{\lambda - \mu}{2},$$

получаем

$$\begin{aligned} x' &= ax + bct, \\ ct' &= act - bx. \end{aligned} \tag{5}$$

Наша задача была бы решена, если бы были известны постоянные a и b; последние определяются из следующих соображений.

Для начала координат системы K' все время $x' = 0$, следовательно, согласно первому уравнению (5), имеем

$$x = \frac{bc}{a} t.$$

Обозначая через v скорость, с которой начало координат системы K' движется относительно K, находим

$$v = \frac{bc}{a}. \tag{6}$$

То же самое значение v получается из уравнений (5), если вычислять скорость какой-либо другой точки системы K' относительно K или скорость некоторой точки системы K (направленную в сторону отрицательных значений x) относительно K'. Итак, величину v кратко можно назвать относительной скоростью обеих систем.

Далее, из принципа относительности ясно, что с точки зрения системы K длина некоторого единичного масштаба, покоящегося относительно K', должна быть точно такой же, как и длина такого же масштаба, покоящегося относительно K, с точки зрения K'. Чтобы знать, как ведут себя точки оси X', с точки зрения системы K, нам надо лишь сделать «моментальный снимок» системы K' из системы K; это значит, что вместо t (время системы K) мы должны подставить некоторое определенное значение его, например, $t = 0$. Тогда из первого уравнения (5) получим

$$x' = ax.$$

Следовательно, две точки оси X', расстояние между которыми при измерении в системе K' равно 1 ($\Delta x' = 1$), на нашей моментальной фотографии находятся на расстоянии

$$\Delta x = \frac{1}{a}. \tag{7}$$

Но если моментальный снимок делается из системы K' ($t' = 0$), то, исключая t из уравнений (5) при помощи равенства (6), получаем

$$x' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x.$$

Отсюда заключаем, что две точки на оси X, находящиеся на расстоянии, равном единице (относительно K), на нашей моментальной фотографии разделены расстоянием

$$\Delta x' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{7а}$$

Так как, согласно сказанному выше, обе моментальные фотографии должны быть идентичны, то Δx в соотношении (7) должно быть равно $\Delta x'$ в соотношении (7а), так что получаем

$$a^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)}. \tag{7б}$$

Равенства (6) и (7б) определяют постоянные a и b. Подставляя выражения для a и b в уравнения (5), получаем первое и четвертое уравнения, приведенные в § 11:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \\ t' &= \frac{t - (v/c^2)\,x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Итак, мы получили преобразование Лоренца для событий на оси X. Оно удовлетворяет условию

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2. \tag{8а}$$

Распространение этого результата на события, происходящие вне оси X, достигается сохранением уравнений (8) и добавлением уравнений

$$\left.\begin{aligned} y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

При этом постулат постоянства скорости света в пустоте остается в силе для световых лучей любого направления как для системы K, так и для системы K'. Это можно показать следующим образом.

Пусть в момент времени $t = 0$ из начала координат системы K посылается световой сигнал. Он будет распространяться согласно уравнению

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct,$$

или, после возведения этого уравнения в квадрат,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \tag{10}$$

Закон распространения света в соединении с постулатом относительности требует, чтобы упомянутый сигнал — при наблюдении из системы K' — распространялся согласно формуле

$$r' = ct',$$

или

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0. \tag{10a}$$

Чтобы уравнение (10а) было следствием уравнения (10), должно выполняться соотношение:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \sigma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2). \tag{11}$$

Так как для точек на оси X должно выполняться уравнение (8а), то $\sigma = 1$. Легко убедиться, что преобразование действительно удовлетворяет соотношению (11) при $\sigma = 1$; именно, соотношение (11) является следствием соотношения (8а) и уравнений (9), а следовательно, и уравнений (8) и (9). Тем самым преобразование Лоренца выведено.

Преобразование Лоренца, выраженное уравнениями (8) и (9), еще должно быть обобщено. Очевидно, несущественно, что координатные оси системы K были выбраны пространственно параллельными осям системы K'. Несущественно также, что скорость равномерного и прямолинейного движения системы K' относительно K имела направление оси X. Из простого рассуждения следует, что в этом общем случае преобразование Лоренца можно составить из двух преобразований, а именно: из преобразований Лоренца для частного случая и из чисто пространственных преобразований, которые соответствуют переходу от одной прямоугольной системы координат к другой, с иным направлением осей.

Обобщенное преобразование Лоренца характеризуется математически таким образом.

Оно выражает переменные x', y', z', t' как такие однородные линейные функции переменных x, y, z, t, что тождественно выполняется соотношение

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{11a}$$

Это означает: если в левую часть последнего равенства вместо x', y', z', t' подставить их выражения через x, y, z, t, то левая часть равенства (11а) совпадет с правой.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Четырехмерный мир Минковского

(Дополнение к § 17)

Обобщенное преобразование Лоренца может быть охарактеризовано еще проще, если вместо t как переменной времени ввести мнимую величину $\sqrt{-1}\,ct$. Если в соответствии с этим положить

$$x_1 = x,$$
$$x_2 = y,$$
$$x_3 = z,$$
$$x_4 = \sqrt{-1}\,ct,$$

и аналогично для системы K', то условие, которому преобразование тождественно удовлетворяет, будет иметь вид

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \tag{12}$$

Именно в это соотношение переходит соотношение (11а) при указанном выборе «координат».

Из соотношения (12) видно, что мнимая временна́я координата x_4 и пространственные координаты x_1, x_2, x_3 входят в него симметрично. На этом основании, согласно теории относительности, «время» x_4 входит в выражение законов природы в такой же форме, что и пространственные координаты x_1, x_2, x_3.

Четырехмерный континуум, описываемый «координатами» x_1, x_2, x_3, x_4, Минковский назвал «миром», а событие в данной точке — «мировой точкой». Из изучающей «происходящее» в трехмерном пространстве физика становится в известном смысле изучающей «существующее» в четырехмерном «мире».

Этот четырехмерный «мир» имеет глубокое сходство с трехмерным «пространством» (эвклидовой) аналитической геометрии. Именно, если в последней ввести новую декартову систему координат (x_1', x_2', x_3') с тем же началом, то x_1', x_2', x_3' будут однородными линейными функциями x_1,

x_2, x_3, которые тождественно удовлетворяют соотношению

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Аналогия с соотношением (12) полная. Мир Минковского формально можно рассматривать как четырехмерное эвклидово пространство (с мнимой временнóй координатой); преобразование Лоренца соответствует «вращению» системы координат в четырехмерном «мире».

ПРИЛОЖЕНИЕ III[26]

Экспериментальное подтверждение общей теории относительности

С точки зрения теории познания эволюцию опытной науки можно представить себе как непрерывный процесс индукции. Теории развиваются и выражаются как объединения большого числа отдельных опытных фактов в форме эмпирических законов, из которых путем сравнения устанавливаются общие законы. С этой точки зрения развитие науки имеет сходство с составлением каталога и является чисто эмпирическим делом.

Но эта точка зрения никоим образом не охватывает весь действительный процесс. Она умалчивает о важной роли интуиции и дедуктивного мышления в развитии точной науки. Как только какая-нибудь наука выходит из начальной стадии своего развития, прогресс теории достигается уже не просто в процессе упорядочения. Исследователь, отталкиваясь от опытных фактов, старается развивать систему понятий, которая, вообще говоря, логически опиралась бы на небольшое число основных предположений, так называемых аксиом. Такую систему понятий мы называем т е о р и е й. Теория черпает свое подтверждение в том, что она связывает большое число отдельных эмпирических фактов и в этом состоит ее «справедливость».

Для одного и того же комплекса опытных фактов может существовать несколько теорий, значительно различающихся друг от друга. Но в отношении выводов из теорий, которые доступны для опытной проверки, согласие между теориями может быть настолько полным, что трудно найти такие следствия, в которых эти теории отличаются друг от друга. Широко известным примером такого рода в области биологии служит дарвиновская теория развития видов путем естественного отбора в процессе борьбы за существование и теория эволюции, основывающаяся на гипотезе наследственности приобретенных свойств.

---

[26] Перевод приложений III и IV выполнен по 15-му английскому изданию книжки.— *Прим. ред.*

Другой случай далеко идущего совпадения следствий двух теорий встречается в механике Ньютона, с одной стороны, и в общей теории относительности — с другой. Это совпадение идет настолько далеко, что до настоящего времени мы смогли найти лишь немного допускающих опытную проверку следствий общей теории относительности, к которым не приводила дорелятивистская физика; и это несмотря на глубокое различие основных предпосылок обеих теорий. Здесь мы еще раз рассмотрим эти важные следствия, а также обсудим относящиеся к ним опытные данные, которые получены.

а. Движение перигелия планеты Меркурий

Согласно ньютоновой механике и ньютонову закону тяготения, некоторая планета, вращающаяся вокруг Солнца, должна описывать эллипс вокруг последнего, точнее, вокруг общего центра тяжести Солнца и планеты. При этом Солнце, или общий центр тяжести, находится в одном из фокусов эллиптической орбиты, так что в течение планетного года расстояние между Солнцем и планетой растет от минимума к максимуму и затем снова уменьшается до минимума. Если вместо закона Ньютона мы примем несколько иной закон притяжения, то найдем, что и при этом новом законе движение по-прежнему будет происходить так, что расстояние между Солнцем и планетой будет испытывать периодические колебания; но в этом случае угол, описываемый линией, соединяющей Солнце и планету, за время такого периода (от перигелия — ближайшего положения к Солнцу — до перигелия) отличался бы от угла 360°. Траектория не была бы тогда замкнутой, но заполняла бы с течением времени кольцеобразную область в плоскости орбиты, т. е. между окружностями с радиусами, равными наименьшему и наибольшему расстояниям планеты от Солнца.

Согласно общей теории относительности, которая, конечно, отличается от теории Ньютона, должно также иметь место небольшое отклонение от движения планеты по орбите в соответствии с законами Кеплера — Ньютона, так что угол, описываемый радиусом, соединяющим Солнце и планету, от одного перигелия до другого должен превосходить угол, соответствующий полному обороту, на величину, определяемую выражением

$$+\ \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}\,.$$

(Один полный оборот соответствует углу 2π в абсолютной угловой мере, как это обычно принято в физике.) Здесь a — большая полуось эллипса, e — его эксцентриситет, c — скорость света, T — период обращения планеты. Этот результат можно представить также и в следующем виде: согласно общей теории относительности, большая ось эллипса вращается вокруг Солнца в направлении вращения планеты. Согласно теории, это вращение должно составлять для планеты Меркурий 43 угловых секунды в столетие, а у других планет нашей солнечной системы оно должно быть настолько незначительным, что недоступно наблюдению[27].

В самом деле, астрономы нашли, что теория Ньютона недостаточна для того, чтобы рассчитать наблюдаемое движение Меркурия с точностью, которая может быть достигнута при наблюдениях в настоящее время. После того как были приняты в расчет все возмущающие влияния остальных планет на движение Меркурия, было найдено (Леверье, 1859; Ньюкомб, 1895), что остается необъясненным движение перигелия орбиты Меркурия, скорость которого не отличается заметно от упомянутых выше +43 угловых секунд в столетие. Ошибка этого эмпирического результата составляет лишь несколько секунд.

б. Отклонение луча света гравитационным полем

В § 22 уже было упомянуто, что согласно общей теории относительности луч света, проходя через гравитационное поле, должен искривляться подобно тому, как искривляется траектория тела, движущегося в гравитационном поле. Согласно этой теории можно ожидать, что луч света, проходящий мимо какого-либо небесного тела, должен отклониться в направлении последнего. Для луча света, проходящего мимо Солнца на расстоянии Δ радиусов Солнца от его центра, угол отклонения α будет составлять

$$\alpha = \frac{1{,}7 \text{ секунды}}{\Delta}.$$

Можно добавить, что половина этого отклонения вызывается, согласно этой теории, ньютоновским полем тяготения Солнца, а другая половина — геометрическим искажением («искривлением») пространства, обусловленным Солнцем.

Этот результат допускает экспериментальную проверку путем фотографирования звезд во время полного солнечного затмения. Единственной причиной, почему мы должны выбирать такой момент, является то, что во всякое другое время земная атмосфера, освещенная Солнцем, светит настолько сильно, что делает невидимыми звезды, расположенные вблизи диска Солнца. Предсказываемый эффект можно ясно видеть из рис. 5. Если бы Солнца (S) не было, то практически бесконечно удаленную звезду

[27] Особенно, если учесть, что орбита следующей планеты, Венеры, представляет собой почти точный круг, а это затрудняет точное определение положения перигелия (Ср. примечание редактора на стр. 447 .— *Ред.*).

при наблюдении с Земли мы увидели бы в направлении D_1. Но вследствие отклонения Солнцем луча света от звезды мы будем видеть звезду в направлении D_2, т. е. на несколько большем расстоянии от центра диска Солнца, чем ее реальное положение.

На практике это проверяется следующим образом. Звезды, находящиеся вблизи Солнца, фотографируются во время солнечного затмения. Затем делается вторая фотография тех же звезд, когда Солнце находится в другой части неба, т. е. на несколько месяцев раньше или позже. При сравнении фотографии, сделанной во время солнечного затмения, с этой контрольной фотографией положения звезд должны оказаться смещенными в радиальном направлении (от центра солнечного диска) на величину, соответствующую углу α.

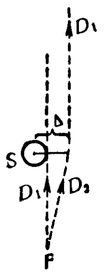

Рис. 5.

Исследованием этого важного вывода мы обязаны Королевскому обществу и Королевскому астрономическому обществу. Несмотря на войну и вызванные ею трудности материального и психологического характера, эти общества снарядили две экспедиции — в Собраль (Бразилия) и на о. Принсипи (у побережья Западной Африки) — и послали нескольких знаменитых английских астрономов (Эддингтона, Коттингэма, Кроммелина и Дэвидсона) для фотографирования солнечного затмения 29 мая 1919 г. Ожидавшиеся относительные смещения положений звезд на снимках солнечного затмения по сравнению с контрольными снимками достигали лишь нескольких сотых долей миллиметра. Таким образом, при фотографировании и в последующих измерениях была необходима высокая точность.

Результаты измерений весьма удовлетворительно подтвердили теорию Две прямоугольные координаты наблюдавшихся и вычисленных отклонений звезд (в угловых секундах) приведены в таблице.

Таблица

Номер звезды	Первая координата		Вторая координата	
	наблюдаемое значение	вычисленное значение	наблюдаемое значение	вычисленное значение
11	−0,19	−0,22	+0,16	+0,02
5	+0,29	+0,31	−0,46	−0,43
4	+0,11	+0,10	+0,83	+0,74
3	+0,20	+0,12	+1,00	+0,87
6	+0,10	+0,04	+0,57	+0,40
10	−0,08	+0,09	+0,35	+0,32
2	+0,95	+0,85	−0,27	−0,09

в. Смещение спектральных линий к красному концу спектра

В § 23 было показано, что в системе K', вращающейся относительно галилеевой системы K, скорость хода покоящихся относительно K' часов одинаковой конструкции зависит от их места. Исследуем теперь эту зависимость количественно. Часы, находящиеся на расстоянии r от центра диска, имеют относительно системы K скорость

$$v = \omega r,$$

где ω — угловая скорость вращения диска K' относительно K.

Если ν_0 есть число тиканий часов в единицу времени («скорость» хода часов) относительно K, в случае, когда часы неподвижны, то «скорость» хода ν часов, движущихся относительно K со скоростью v, но покоящихся относительно диска, в соответствии с § 12 будет равна

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)},$$

или, с достаточной точностью,

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Это соотношение может быть записано также в форме

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{\omega^2 r^2}{2}\right).$$

Обозначим через φ разность потенциалов центробежной силы между местом расположения часов и центром диска, т. е. взятую со знаком минус работу, которую необходимо совершить против центробежной силы для перемещения единицы массы из места расположения часов на вращающемся диске в центр диска. Тогда будем иметь

$$\varphi = - \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right).$$

Из этой формулы прежде всего видно, что двое часов одинаковой конструкции идут с различной «скоростью», если они расположены на различных расстояниях от центра диска. Этот вывод справедлив также с точки зрения наблюдателя, вращающегося вместе с диском.

Теперь, с точки зрения наблюдателя на диске, часы на диске находятся в гравитационном поле с потенциалом φ; следовательно, полученный результат будет справедлив и для любого гравитационного поля. Больше того, мы можем рассматривать атом, который испускает излучение, соответствующее определенным спектральным линиям, как часы, так что справедливо следующее утверждение.

Атом поглощает или испускает свет, частота которого зависит от потенциала гравитационного поля, в котором находится атом.

Частота излучения атома, находящегося на поверхности небесного тела, будет несколько меньше частоты излучения атома такого же элемента, находящегося в свободном пространстве (или атома на поверхности меньшего небесного тела). Так как $\varphi = -K \frac{M}{r}$, где K — ньютоновская постоянная тяготения, M — масса небесного тела и r — его радиус, то должно происходить смещение спектральных линий излучения атомов, находящихся на поверхности звезд, к красному концу спектра, по сравнению со спектральными линиями атомов того же элемента, находящихся на земной поверхности. При этом величина этого смещения будет равна

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{KM}{c^2 r}.$$

Для Солнца ожидаемое смещение спектральных линий к красному концу спектра составляет около двух миллионных длины волны. Надежный расчет смещения для неподвижных звезд невозможен, поскольку ни масса M, ни радиус r вообще говоря неизвестны.

Вопрос о том, существует ли этот эффект, остается открытым; в настоящее время астрономы с большим упорством работают над его решением. Вследствие того, что этот эффект в случае Солнца весьма мал, трудно судить о его существовании. В то время как Гребе и Бахем (Бонн), на основе своих собственных измерений и измерений Эвершеда и Шварцшильда для полос циана, считают существование этого эффекта почти не вызывающим сомнений, другие исследователи, в частности С. Джон, приходят на основании своих измерений к противоположному выводу.

Средние смещения спектральных линий в сторону длинноволновой части спектра определенно обнаружены при статистических исследованиях неподвижных звезд; но до настоящего времени состояние обработки имеющегося материала не позволяло прийти к определенному выводу о том, можно ли эти смещения действительно объяснить влиянием тяготения. Результаты наблюдений собраны вместе и подробно обсуждаются с точки зрения рассматриваемого здесь вопроса в работе Э. Фройндлиха «К проверке общей теории относительности»[28].

Во всяком случае, в ближайшие годы будет получено определенное решение проблемы. Если смещение спектральных линий к красному концу

[28] Naturwiss., 1919, № 35, 520.

спектра под действием гравитационного поля не существует, то общая теория относительности несостоятельна. С другой стороны, если будет определенно установлена связь смещения спектральных линий с гравитационным потенциалом, то изучение этого смещения может дать нам важную информацию о массах небесных тел [29].

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Структура пространства, согласно общей теории относительности

(Дополнение к § 32)

Со времени публикации первого издания этой работы наши знания о структуре пространства в больших областях («космологическая проблема») получили важное развитие, о котором необходимо упомянуть даже в популярном изложении данного вопроса.

Раньше мы рассуждали, исходя из следующих предположений.

1. Существует некоторая средняя плотность материи во всем пространстве, которая всюду одна и та же и отлична от нуля.

2. Размеры («радиус») пространства не зависят от времени.

Оба эти предположения могут быть согласованы с общей теорией относительности лишь после добавления в уравнения поля гипотетического члена, который не следует из теории и не представляется естественным с теоретической точки зрения («космологический член в уравнениях гравитационного поля»).

В то время предположение (2) представлялось мне неизбежным, поскольку я считал, что в случае отказа от него открываются безграничные возможности для всевозможных спекуляций.

Однако уже в двадцатых годах русский математик Фридман показал, что с чисто теоретической точки зрения более естественным является иное предположение. Он показал, что, опуская предположение (2), можно сохранить предположение (1), не вводя довольно неестественный космологический член в уравнения гравитационного поля. Именно, первоначальные

---

[29] Гравитационное красное смещение впервые наблюдалось в 1924 году Адамсом в спектре спутника Сириуса — белого карлика Сириус-В; при этом величина смещения оказалась эквивалентной допплеровскому смещению при скорости удаления источника около 20 *км/сек*. Наблюдаемое красное смещение спектральных линий в гравитационном поле Солнца соответствует 0,6 *км/сек*. В 1960 году Паунд и Ребка с помощью эффекта Мессбауэра впервые наблюдали красное смещение спектральных линий в гравитационном поле Земли. Это смещение у поверхности Земли при разности высот в 21 *м* составляет $7{,}5\cdot10^{-5}$ *см/сек*. — *Прим. ред.*

уравнения поля допускают решение, в котором «радиус мира» зависит от времени (расширяющееся пространство). В этом смысле, согласно Фридману, можно сказать, что теория требует расширения пространства.

Несколькими годами позже Хэббл в специальных исследованиях внегалактических туманностей показал, что спектральные линии обнаруживают красное смещение, которое непрерывно возрастает с увеличением расстояния до туманности. В соответствии с нашими современными знаниями, это можно интерпретировать только в смысле принципа Допплера как всестороннее расширение системы звезд, требуемое согласно Фридману, уравнениями гравитационного поля. Поэтому открытие Хэббла можно рассматривать до некоторой степени как подтверждение теории.

Однако возникает странная трудность. Интерпретация галактического смещения спектральных линий, открытого Хэбблом, как расширения (в котором трудно сомневаться с теоретической точки зрения) приводит к заключению, что существовало начало расширения «всего лишь» около 10^9 лет назад, тогда как, по данным физической астрономии, развитие отдельных звезд и звездных систем продолжалось значительно большее время. Пока неизвестно, как преодолеть это противоречие [30].

Далее, я хотел бы заметить, что теория расширяющейся Вселенной вместе с наблюдательными данными астрономии не позволяет решить вопрос о том, является (трехмерное) пространство конечным или бесконечным, в то время как первоначальная модель «статической» Вселенной приводила к замкнутому (конечному) пространству.

Популярная книжка Эйнштейна «О специальной и общей теории относительности», сыгравшая большую роль в пропаганде идей теории относительности, издавалась много раз в Германии. Первый раз она вышла в серии «Sammlung Vieweg» (H. 38. Braunschweig, Vieweg, 1917). В третьем издании к ней были добавлены два приложения: «Простой вывод преобразования Лоренца» и «Четырехмерный мир Минковского». Начиная с 10-го издания, в нее включалось третье приложение: «Экспериментальная проверка общей теории относительности», написанное специально для английского издания 1920 г В 14-м издании добавлено еще Приложение IV, касающееся космологических проблем. В 15-м издании 1952 г. добавлено Приложение V «Относительность и проблема пространства» (статья 139, том II).

На русском языке книжка выходила четыре раза: в Государственном издательстве (Петроград, 1922) и в Научном книгоиздательстве (Петроград, 1922); второе русское издание включало и перевод «Диалога» (статья 43). Книжка вышла также двумя русскими изданиями в переводе Г. Б. Идельсона в Берлине в издательстве «Слово» (1921 и 1922).

Известны издания: американское (Нью-Йорк, 1921, 1931, 1933, 1946, 1948, 1954), испанское (Толедо, 1921), итальянское (Болонья, 1921), французское (Париж, 1921), венгерское (Будапешт, 1922), еврейское (Варшава, 1923) и иврит (древнееврейское) (Тель-Авив, 1928).

....

[30] После более точного определения шкалы расстояний «возраст» возрос до $\sim 13 \cdot 10^9$ лет. — *Прим. ред.*

ВОПРОСЫ КОСМОЛОГИИ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Известно, что дифференциальное уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi K\rho \tag{1}$$

в совокупности с уравнением движения материальной точки не может вполне заменить теорию дальнодействия Ньютона. Необходимо добавить условие, что потенциал φ в пространственной бесконечности стремится к определенному пределу. Аналогично обстоит дело и в теории тяготения, следующей из общего принципа относительности; здесь также к дифференциальным уравнениям должны быть добавлены граничные условия для пространственной бесконечности, если мы на самом деле рассматриваем мир бесконечно протяженным в пространстве.

При рассмотрении задач, связанных с планетной системой, мы выбрали эти граничные условия, допустив, что можно выбрать такую координатную систему, в которой все потенциалы тяготения $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности становятся постоянными. Но априори отнюдь не очевидно, что при рассмотрении более значительных частей Вселенной можно пользоваться теми же самыми граничными условиями. Ниже будут изложены соображения, которые мы получили до настоящего времени по этому принципиально важному вопросу.

§ 1. Теория Ньютона

Как известно, граничное условие Ньютона в форме существования постоянного предела для φ в пространственной бесконечности ведет к представлению о том, что плотность материи в бесконечности обращается в

---

* *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152. (Русский перевод опубликован в сб. «Принцип относительности». — *Ред.*).

нуль. В самом деле, представим себе, что во Вселенной можно найти место, вокруг которого гравитационное поле материи, рассматриваемое в целом, обладает сферической симметрией (центр). Тогда из уравнения Пуассона следует, что средняя плотность ρ с увеличением расстояния r от центра должна стремиться к нулю быстрее, чем $1/r^2$, для того чтобы φ в бесконечности стремилось к некоторому пределу [1]. В этом смысле мир по Ньютону конечен, хотя и может обладать бесконечно большой общей массой.

Отсюда прежде всего следует, что излучение, испускаемое небесными телами, частично покинет мир Ньютона по радиальному от центра направлению с тем, чтобы бесследно затеряться в бесконечности. Не может ли произойти то же с целым небесным телом? Едва ли можно отрицать этот факт, поскольку из предположения о существовании конечного предела для φ в пространственной бесконечности следует, что обладающее конечной кинетической энергией небесное тело может достичь пространственной бесконечности, преодолев ньютоновские силы притяжения. Согласно статистической механике, такие события должны происходить до тех пор, пока общая энергия звездной системы достаточно велика, чтобы — при переносе ее на одно небесное тело — последнее могло совершить путешествие в бесконечность, откуда оно никогда не сможет вернуться.

Можно было бы попытаться обойти эту своеобразную трудность, допустив, что указанный граничный потенциал имеет в бесконечности очень большое значение. Это было бы приемлемо, если бы изменение потенциала тяготения не обусловливалось самим небесным телом. В действительности мы с неизбежностью приходим к заключению, что наличие значительных разностей потенциалов гравитационного поля противоречит фактам. Напротив, разности потенциалов должны быть столь малого порядка, чтобы определяемые ими скорости звезд не превосходили фактически наблюдаемых скоростей.

Если больцмановский закон распределения молекул газа применить к звездам, рассматривая звездную систему как газ, находящийся в стационарном тепловом движении, то получается, что ньютоновская Вселенная вообще не могла бы существовать, так как конечной разности потенциалов между центром и бесконечностью соответствует конечное отношение плотностей. Следовательно, нулевая плотность на бесконечности влечет за собой нулевую плотность в центре.

Эти трудности, по-видимому, нельзя преодолеть, оставаясь в рамках теории Ньютона. Возникает вопрос, нельзя ли преодолеть их путем

---

[1] Здесь ρ — средняя плотность материи, определенная для области пространства, большой по сравнению с расстоянием между соседними неподвижными звездами, но малой по сравнению с размерами всей звездной системы.

Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

Es ist wohlbekannt, daß die Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta\phi = 4\pi K\rho \tag{1}$$

in Verbindung mit der Bewegungsgleichung des materiellen Punktes die Newtonsche Fernwirkungstheorie noch nicht vollständig ersetzt. Es muß noch die Bedingung hinzutreten, daß im räumlich Unendlichen das Potential ϕ einem festen Grenzwerte zustrebt. Analog verhält es sich bei der Gravitationstheorie der allgemeinen Relativität; auch hier müssen zu den Differentialgleichungen Grenzbedingungen hinzutreten für das räumlich Unendliche, falls man die Welt wirklich als räumlich unendlich ausgedehnt anzusehen hat.

Bei der Behandlung des Planetenproblems habe ich diese Grenzbedingungen in Gestalt folgender Annahme gewählt: Es ist möglich, ein Bezugssystem so zu wählen, daß sämtliche Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ im räumlich Unendlichen konstant werden. Es ist aber a priori durchaus nicht evident, daß man dieselben Grenzbedingungen ansetzen darf, wenn man größere Partien der Körperwelt ins Auge fassen will. Im folgenden sollen die Überlegungen angegeben werden, welche ich bisher über diese prinzipiell wichtige Frage angestellt habe.

§ 1. Die Newtonsche Theorie.

Es ist wohlbekannt, daß die Newtonsche Grenzbedingung des konstanten Limes für ϕ im räumlich Unendlichen zu der Auffassung hinführt, daß die Dichte der Materie im Unendlichen zu null wird. Wir denken uns nämlich, es lasse sich ein Ort im Weltraum finden, um den herum das Gravitationsfeld der Materie, im großen betrachtet, Kugelsymmetrie besitzt (Mittelpunkt). Dann folgt aus der Poissonschen Gleichung, daß die mittlere Dichte ρ rascher als $\frac{1}{r^2}$ mit wachsender Entfernung r vom Mittelpunkt zu null herabsinken muß, damit ϕ im

Первая страница статьи А. Эйнштейна «Вопросы космологии и общая теория относительности» модификации теории Ньютона. Для этого прежде всего укажем путь, который не следует принимать слишком серьезно, так как он служит только для того, чтобы лучше уяснить последующие рассуждения. Вместо уравнения Пуассона напишем

$$\Delta\varphi - \lambda\varphi = 4\pi K\rho, \tag{2}$$

где λ представляет собой некоторую универсальную постоянную.

Если ρ_0 есть постоянная плотность распределения массы, то

$$\varphi = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0 \tag{3}$$

является решением уравнения (2). Это решение соответствует случаю равномерного пространственного распределения неподвижных звезд, причем плотность ρ_0 может равняться действительной средней плотности материи в мировом пространстве Это решение соответствует бесконечно протяженному пространству, в среднем равномерно заполненному материей.

Если теперь предположить, что имеются местные неравномерности в распределении материи, не изменяющие среднего значения плотности распределения, то к постоянному значению (3) потенциала φ придется добавить дополнительную величину φ, которая вблизи более плотных масс будет тем более похожа на поле Ньютона, чем меньше $\lambda\varphi$ по сравнению с $4\pi K\rho$.

Такой мир не имел бы центра по отношению к гравитационному полю и не было бы надобности допускать, что плотность уменьшается на бесконечности; наоборот, и средний потенциал и средняя плотность были бы постоянны вплоть до бесконечности. При этом конфликт, отмеченный между теорией Ньютона и статистической механикой, здесь отсутствует. При постоянной (крайне малой) плотности материя находится в равновесии, не требуя внутренних сил (давления) для поддержания этого равновесия.

§ 2. Граничные условия, требуемые общей теорией относительности

В дальнейшем я предлагаю читателю последовать по пройденному мной самим извилистому и неровному пути, поскольку, как мне кажется, только так будет интересен конечный результат. Я пришел к убеждению, что уравнения гравитационного поля, которых я до сих пор придерживался, нуждаются еще в некоторой модификации, чтобы можно было на базе общей теории относительности избежать тех принципиальных трудностей, которые в предыдущем параграфе были указаны для теории Ньютона. Эта модификация полностью соответствует переходу от уравнения Пуассона (1) к уравнению (2) предыдущего параграфа. Тогда, наконец, получается, что граничные условия в пространственной бесконечности вообще отпадают, так как мировой континуум должен в отношении своих пространственных размеров рассматриваться как замкнутый континуум, имеющий конечный пространственный (трехмерный) объем.

Высказанное мной недавно мнение относительно граничных условий на пространственной бесконечности основано на следующих соображениях. В последовательной теории относительности нельзя определять инерцию по отношению к «пространству», но можно определять инерцию масс относительно друг друга. Поэтому, если я удаляю какую-нибудь массу на достаточно большое расстояние от всех других масс Вселенной, то инерция этой массы должна стремиться к нулю. Попытаемся сформулировать это условие математически.

Согласно общей теории относительности, импульс (с обратным знаком) определяется первыми тремя компонентами, а энергия — последней компонентой умноженного на $\sqrt{-g}$ ковариантного тензора

$$m\sqrt{-g}\, g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}, \tag{4}$$

причем, как всегда,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{5}$$

В особенно наглядном случае, когда координатную систему можно выбрать так, чтобы гравитационное поле в каждой точке было пространственно изотропно, эта величина принимает более простой вид

$$ds^2 = -A\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + B dx_4^2.$$

Если одновременно

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3 B},$$

то в случае малых скоростей из выражения (4) для компонент импульса в первом приближении имеем

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4}, \qquad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4}, \qquad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4},$$

и для энергии (в случае покоя)

$$m\sqrt{B}.$$

Из выражений для импульса следует, что $m\frac{A}{\sqrt{B}}$ играет роль инертной массы. Так как m — константа, связанная с точечной массой и независящая от положения этой массы, то при соблюдении условия, установленного для определителя, это выражение в пространственной бесконечности только тогда обращается в нуль, когда A стремится к нулю, а B — к бесконечности. Таким образом, подобное поведение коэффициентов $g_{\mu\nu}$ представляется нам как бы следствием относительности всякой инерции. Отсюда следует также и то, что потенциальная энергия $m\sqrt{B}$ точки в бесконечности становится бесконечно большой. Таким образом, точечная масса никогда не может покинуть систему; более подробное исследование показывает, что то же самое справедливо и для лучей света. Вселенная при таком поведении потенциала гравитационного поля в бесконечности не подвергалась бы, следовательно, опасности стать пустой, на что указывалось при обсуждении ньютоновской теории.

Заметим, что упрощенные допущения о гравитационном потенциале, положенные в основу этих рассуждений, сделаны только ради большей наглядности. Для описания поведения $g_{\mu\nu}$ на бесконечности можно найти общую формулировку, которая выразит суть дела без каких-либо ограничивающих допущений.

Пользуясь дружеской помощью математика Громмера, я исследовал центрально-симметричное статическое гравитационное поле, которое выражается на бесконечности указанным образом. Из заданного потенциала гравитационного поля $g_{\mu\nu}$ на основе уравнений гравитационного поля был вычислен тензор $T_{\mu\nu}$ энергии материи. Но при этом оказалось, что для звездной системы подобного рода граничные условия никак не могут быть приняты, как недавно вполне справедливо было отмечено также астрономом де Ситтером.

В самом деле, контравариантный тензор $T^{\mu\nu}$ энергии весомой материи имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds},$$

где ρ означает естественно измеренную плотность материи.

При надлежащем выборе координатной системы скорости звезд очень малы по сравнению со скоростью света. Поэтому ds можно заменить через $\sqrt{g_{44}}\, dx_4$. Отсюда видно, что все компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ очень малы по сравнению с последней его компонентой, T^{44}. Но это условие никак нельзя было совместить с выбранными граничными условиями. После всего изложенного этот результат не вызывает удивления. Факт незначительности скоростей звезд позволяет сделать заключение, что всюду, где имеются неподвижные звезды, потенциал гравитационного поля (в нашем случае $\sqrt{B}$) не может быть существенно больше, чем у нас; это следует из статистических соображений так же, как и в теории Ньютона. Во всяком случае наши вычисления привели меня к убеждению, что подобные условия вырождения для $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности не могут быть постулированы.

После неудачи этой попытки прежде всего возникают две возможности: а) требовать, как в случае планетной проблемы, чтобы на пространственной бесконечности $g_{\mu\nu}$ при надлежащем выборе системы координат стремились к значениям

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

или б) не устанавливать для пространственной бесконечности никаких всегда справедливых граничных условий; в каждом отдельном случае следует особо задавать $g_{\mu\nu}$ на пространственной границе рассматриваемой области так же, как мы привыкли это делать до сих пор, задавая начальные условия.

Возможность «б» не соответствует какому-либо решению проблемы и означает отказ от ее решения. Правомерность этой точки зрения нельзя отрицать; в настоящее время ее придерживается де Ситтер[2]. Но я должен признаться, что мне трудно было бы пойти на столь большие уступки в этом принципиальном вопросе. С этим я соглашусь только в том случае, если все усилия найти удовлетворительные граничные условия окажутся тщетными.

Возможность «а» неудовлетворительна во многих отношениях. Во-первых, такие граничные условия предполагают определенный выбор системы отсчета, что несовместимо с духом принципа относительности. Во-вторых, при таком рассмотрении приходится отказаться от требования относительности инерции. В самом деле, инерция материальной точки с естественно измеренной массой m зависит от $g_{\mu\nu}$, но последние лишь очень мало отличаются от постулированных значений на пространственной бесконечности. Благодаря этому, хотя материя (находящаяся на конечном расстоянии) и *влияет* на инерцию, но все-таки не *обусловливает* последнюю. Если бы существовала только одна материальная точка, то она, согласно этому представлению, обладала бы почти такой же инерцией, как и в том случае, когда она окружена всеми прочими массами нашего реального мира. Наконец, против этого представления нужно выдвинуть те же статистические возражения, которые выше были указаны для теории Ньютона.

Из сказанного до сих пор следует, что мне не удалось установить граничных условий для пространственной бесконечности. Тем не менее существует еще одна возможность, позволяющая обойтись без отказа, упо-

---

[2] D. Sitter. Akad. van Wetensch te Amsterdam, 8 ноября 1916.

мянутого в «б». Именно, если бы можно было рассматривать мир в его пространственной протяженности как замкнутый континуум, то вообще отпала бы необходимость в подобного рода граничных условиях. Из дальнейшего будет видно, что и требование общего принципа относительности и факт незначительности скоростей звезд совместимы с гипотезой пространственной замкнутости Вселенной; правда, для осуществления этого необходимо некоторое обобщение уравнений гравитационного поля.

§ 3. Пространственно замкнутый мир с равномерно распределенной материей

Согласно общей теории относительности, метрический характер (кривизна) четырехмерного пространственно-временного континуума определяется в каждой точке находящейся в ней материей и состоянием последней. Поэтому вследствие неравномерности распределения материи метрическая структура этого континуума должна быть крайне запутанной. Но если говорить о структуре пространства в целом, то мы можем представить материю как бы равномерно распределенной по очень большой области пространства, так что ее плотность распределения становится чрезвычайно медленно меняющейся функцией. В данном случае мы поступаем так же, как геодезисты, которые крайне сложную в деталях поверхность Земли заменяют приближенно эллипсоидом.

Самое важное из всего, что нам известно из опыта о распределении материи, заключается в том, что относительные скорости звезд очень малы по сравнению со скоростью света. Поэтому я полагаю, что на первых порах в основу наших рассуждений можно положить следующее приближенное допущение: имеется координатная система, относительно которой материю можно рассматривать находящейся в течение продолжительного времени в покое. По отношению к этой координатной системе контравариантный тензор материи $T^{\mu\nu}$, в силу (5), имеет следующий простой вид:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix}. \qquad (6)$$

Скаляр ρ (средней) плотности распределения априори может быть функцией пространственных координат. Однако если мы предполагаем, что мир пространственно замкнут, то естественно сделать гипотезу, что ρ не зависит от места; эту гипотезу мы и положим в основу дальнейших рассуждений.

Что касается гравитационного поля, то из уравнения движения материальной точки

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\alpha\ \beta\\ \nu\end{Bmatrix}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}=0.$$

следует, что материальная точка в статическом гравитационном поле может находиться в покое только тогда, когда g_{44} не зависит от места. Так как, кроме того, мы для всех величин предполагаем независимость от временно́й координаты x_4, то для искомого решения можем потребовать, чтобы для всех x_ν

$$g_{44}=1. \tag{7}$$

Далее, как это обычно делается в статических задачах, нужно положить, что

$$g_{14}=g_{24}=g_{34}=0. \tag{8}$$

Теперь остается еще определить те компоненты потенциала гравитационного поля, которые характеризуют чисто пространственно-геометрические свойства нашего континуума ($g_{11}, g_{12},\ldots, g_{33}$). Из нашего допущения о равномерности распределения масс, создающих поле, следует, что и кривизна искомого метрического пространства должна быть постоянной. Таким образом, при заданном распределении масс искомый замкнутый континуум (x_1, x_2, x_3 при постоянном x_4) должен быть сферическим пространством.

К такому пространству мы приходим, например, следующим образом. Будем исходить из эвклидова пространства (ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4) четырех измерений с линейным элементом $d\sigma$; пусть тогда

$$d\sigma^2=d\xi_1^2+d\xi_2^2+d\xi_3^2+d\xi_4^2. \tag{9}$$

Рассмотрим в этом пространстве гиперповерхность

$$R^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2, \tag{10}$$

где R — постоянная. Точки этой гиперповерхности образуют трехмерный континуум — сферический объем с радиусом кривизны R.

Четырехмерное эвклидово пространство, из которого мы исходили, служит только для удобного определения нашей гиперповерхности. Нас интересуют только точки этой поверхности, метрические свойства которой должны совпадать со свойствами физического пространства с равномерным распределением материи. Для описания этого трехмерного континуума можно пользоваться координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 (проекции на гиперплоскость $\xi_4=0$), так как, в силу (10), можно ξ_4 выразить через ξ_1, ξ_2, ξ_3. Исключая ξ_4 из (9), получаем следующее выражение для линейного элемента сферического пространства:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu} d\xi_\mu d\xi_\nu, \\ \gamma_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $\delta_{\mu\nu} = 1$, если $\mu = \nu$, и $\delta_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$, а $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Выбранные координаты удобны, когда речь идет об исследовании окрестности точки $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Итак, нам дан теперь также и линейный элемент искомого четырехмерного пространственно-временнóго мира. Очевидно, для потенциалов $g_{\mu\nu}$, у которых оба индекса отличаются от 4, мы должны написать

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right). \tag{12}$$

Это равенство вместе с (7) и (8) вполне определяет свойства масштабов, часов и лучей света в рассматриваемом четырехмерном мире.

§ 4. О дополнительном члене, который необходимо ввести в уравнения гравитационного поля

Уравнения гравитационного поля, предложенные мной для произвольно выбранной системы координат, имеют следующий вид:

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right), \tag{13}$$

где

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu & \nu \\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu & \alpha \\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu & \beta \\ \alpha\end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu & \nu \\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}.$$

Система уравнения (13) никогда не будет удовлетворена, если вместо $g_{\mu\nu}$ подставить их значения из (7), (8) и (12), а вместо (контравариантного) тензора материи энергии — значения (6). В следующем параграфе будет показано, как удобнее всего произвести подобный расчет. Таким образом, если бы была уверенность в том, что только уравнения поля (13), которые я пока не использовал, согласуются с общим принципом относительности, следовало, конечно, заключить, что теория относительности несовместима с гипотезой пространственной замкнутости мира.

Однако система уравнений (13) допускает одно весьма простое обобщение, совместимое с постулатом относительности и полностью аналогичное данному выше в виде уравнения (2) обобщению уравнения Пуассона. В самом деле, к левой части уравнения поля (13) мы можем прибавить фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$, умноженный на неизвестную пока универсальную константу — λ, не нарушая этим общей ковариантности, т. е. вместо уравнения поля (13) положить

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \tag{13a}$$

Это уравнение поля при достаточно малом значении λ во всяком случае тоже совместимо с результатами наблюдений над солнечной системой. Оно удовлетворяет также законам сохранения импульса и энергии; в самом деле, вместо уравнения (13) можно получить уравнение (13а), если в принцип Гамильтона, гарантирующий правильность этих законов, вместо скаляра тензора Римана подставить этот же скаляр, умноженный на универсальную постоянную. Ниже будет показано, что уравнение поля (13а) совместимо с нашими предположениями относительно поля и материи.

§ 5. Вычисления. Результат

Так как все точки нашего континуума равноценны, то достаточно выполнить вычисление для *одной* точки, например, для точки с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

При этом для $g_{\mu\nu}$ в уравнении (13а) всюду, где $g_{\mu\nu}$ не дифференцированы или же продифференцированы только один раз, должны быть подставлены значения

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Таким образом, получается сначала

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\ \nu \\ 1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\ \nu \\ 2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\ \nu \\ 3\end{bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Приняв во внимание (7), (8) и (13), легко найдем, что все уравнения (13а) удовлетворяются, если выполнены следующие два соотношения:

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\varkappa\rho}{2}, \qquad -\lambda = -\frac{\varkappa\rho}{2},$$

или

$$\lambda = \frac{\varkappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2}. \tag{14}$$

Итак, вновь введенная универсальная константа λ определяется, если известны средняя плотность распределения ρ, сохраняющаяся в состоянии равновесия, радиус R сферического пространства и его объем $2\pi^2R^3$. Полная масса M Вселенной, по нашему представлению, конечна и равняется

$$M = \rho\cdot 2\pi^2R^3 = 4\pi^2\frac{R}{\varkappa} = \frac{\sqrt{32}\pi^2}{\sqrt{\varkappa^3\cdot\rho}}. \tag{15}$$

Теоретическое представление о реальном мире, согласно нашим рассуждениям, было бы следующим. Характер кривизны пространства в соответствии с распределением материи зависит от места и времени; однако это пространство в целом можно приближенно представить в виде сферического пространства. Во всяком случае это представление логически непротиворечиво и с точки зрения общей теории относительности является наиболее естественным. Мы не будем здесь рассматривать вопрос о том, приемлемо ли это представление с точки зрения современных астрономических знаний. Правда, для того, чтобы прийти к этому непротиворечивому представлению, мы должны были все же ввести новое обобщение уравнений гравитационного поля, неоправдываемое нашими действительными знаниями о тяготении. Необходимо, однако, отметить, что положительная кривизна пространства, обусловленная находящейся в нем материей, получается и в том случае, когда указанный дополнительный член не вводится; последний нам необходим для того, чтобы обеспечить возможность квазистатического распределения материи, соответствующего фактическим малым скоростям звезд.

Поступила 15 февраля 1917 г.

В этой работе сделан следующий шаг в развитии общей теории относительности, положивший начало новой науке — релятивистской космологии.

Однако в этой работе Эйнштейн считал, что решение уравнений космологии должно быть, во-первых, статическим, а, во-вторых, приводить к замкнутой модели Вселенной. Первое условие потребовало введения космологической постоянной.

Оба эти условия были в дальнейшем отброшены А. А. Фридманом, работы которого привели теорию к согласию с опытом (эффект Хэббла — разбегание галактик). Эйнштейн после неправильных возражений признал правильность идей Фридмана (см. статью 69, том II).

1918

45

ПРИНЦИПИАЛЬНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Ряд опубликованных в последнее время работ, особенно появившаяся недавно в этом журнале (т. 53, № 16) остроумная работа Кречмана, побудили меня вновь вернуться к основам общей теории относительности. При этом я хочу выделить лишь основные идеи, предполагая теорию известной.

Теория, как мне кажется сегодня, покоится на трех основных положениях, которые ни в какой степени не зависят друг от друга. Ниже они будут коротко сформулированы, а в дальнейшем освещены с некоторых сторон.

а) *Принцип относительности*: законы природы являются лишь высказываниями о пространственно-временных совпадениях; поэтому они находят свое естественное выражение в общековариантных уравнениях.

б) *Принцип эквивалентности*: инерция и тяжесть тождественны; отсюда и из результатов специальной теории относительности неизбежно следует, что симметричный «фундаментальный тензор» ($g_{\mu\nu}$) определяет метрические свойства пространства, движение тел по инерции в нем, а также и действие гравитации. Описываемое фундаментальным тензором состояние пространства мы будем обозначать как «G-поле».

в) *Принцип Маха*[1]: G-поле *полностью* определено массами тел. Масса и энергия, согласно следствиям специальной теории относительности, представляют собой одно и то же; формально энергия описывается симметричным тензором энергии; это означает, что G-поле обусловливается и определяется тензором энергии материи.

---

* *Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Ann. Phys., 1918, 55, 241—244.

[1] До сих пор я не разделял принципа «а» и «в», но это приводило к путанице. Название «принцип Маха» выбрано потому, что этот принцип является обобщением требования Маха, что инерция должна сводиться к взаимодействию тел.

Относительно «а» Кречман замечает, что так сформулированный принцип относительности ничего не говорил бы о физической реальности, т. е. о *внутреннем содержании* законов природы, а касался бы лишь требований к математической *формулировке*. Так как физический опыт вообще имеет дело лишь с совпадениями, то всегда возможно представить сведения о закономерных связях между этими совпадениями в виде общековариантных уравнений. Поэтому он считает необходимым придать другой смысл требованию относительности. Я считаю аргументы Кречмана правильными, но предлагаемые им нововведения не могу поддержать. Именно, если справедливо, что каждый эмпирический закон может быть записан в общековариантной форме, принцип «а» приобретает значительную эвристическую силу, которая проявилась при решении гравитационных проблем и основана на следующем: из двух согласующихся с опытом теоретических систем предпочтение должно быть отдано той, которая проще и прозрачнее с точки зрения абсолютного дифференциального исчисления. Если гравитационной механике Ньютона придать форму ковариантных (четырехмерных) уравнений, то легко убедиться, что принцип «а» практически (хотя и не вполне строго, исключает эту теорию!

Принцип «б» является исходным пунктом всей теории и прежде всего приводит к установлению принципа «а»; он, несомненно, не может быть отброшен, если придерживаться основных идей теоретической системы.

Иначе обстоит дело с «принципом Маха» «в»; необходимость придерживаться его отнюдь не разделяется другими авторами, но я и сам считаю, что выполнение его необязательно. По принципу Маха, согласно уравнениям гравитационного поля, не может существовать никакого G-поля без материи. Очевидно, что постулат «в» тесно связан с вопросом пространственно-временно́й структуры мира как целого, так как в порождении G-поля принимают участие все массы.

В качестве общековариантных уравнений гравитационного поля я предлагал сначала

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} T\right), \tag{1}$$

где введено сокращение

$$G_{\mu\nu} = \sum_{\sigma,\tau} g^{\sigma\tau}\,(\mu\sigma,\ \tau\nu).$$

Однако эти уравнения поля не удовлетворяют постулату «в», так как они допускают решение

$$g_{\mu\nu} = \text{const} \qquad (\text{для всех } \mu \text{ и } \nu),$$
$$T_{\mu\nu} = 0 \qquad (\text{для всех } \mu \text{ и } \nu).$$

Итак, из уравнений (1) следует, что может быть G-поле без какой бы то ни было материи, вопреки постулату Маха.

Постулат «в» будет выполняться, насколько я понимаю, для уравнений поля [2], полученных из уравнений (1), путем введения λ-члена

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \tag{2}$$

Уравнения (2) не могут привести к свободному от сингулярностей пространственно-временнóму континууму с тензором энергии материи, всюду равным нулю. Простейшим мыслимым решением уравнения (2) является статический сферический или эллиптический, по отношению к пространственным координатам, мир с равномерно распределенной покоящейся материей. Но нужно не только *мысленно сконструировать* мир, отвечающий принципу Маха; важнее представить себе, что наш реальный мир может быть апроксимирован только что упомянутым сферическим миром. В реальном мире материя не распределена равномерно, а сконцентрирована в отдельные небесные тела; не покоится, а находится в состоянии относительного движения (со скоростью, малой по сравнению со скоростью света). Однако вполне возможно, что средняя («естественно измеренная») пространственная плотность материи, полученная для области пространства, охватывающей очень много неподвижных звезд, будет близка к постоянному значению для всего мира. В этом случае мы *обязаны* дополнить уравнения (1) добавочными членами, имеющими характер λ-членов; тогда мир будет замкнутым, и его геометрия будет отклоняться от геометрии сферического и соответственного эллиптического пространства лишь слегка и лишь в отдельных областях, подобно тому, как форма земной поверхности отклоняется от эллипсоида.

Поступила 6 марта 1918 г.

Работа Э. Кречмана [Erich K r e t s c h m a n n. Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate. A. Einstein neue und ursprüngliche Relativitätstheorie. Ann. Phys. (4. Folge), 1917, 53, 575] содержит обзор результатов Эйнштейна и некоторые критические замечания. Главным замечанием является сомнение автора в том, что общая ковариантность уравнений не заключает в себе какого-либо физического результата, ибо всякое уравнение, заданное в одной системе координат, можно записать в ковариантной форме. Ответ Эйнштейна разъясняет эту сторону дела.

Кроме этого, Эйнштейн подчеркивает здесь, что принцип Маха (а с ним и гипотеза о пространственной замкнутости модели) не является необходимым.

[2] «Вопросы космологии и общая теория относительности», Sitzungsberpreuss. Akad. Wiss., 1917, 142 (Статья 44.— *Ред.*).

ДИАЛОГ ПО ПОВОДУ ВОЗРАЖЕНИЙ ПРОТИВ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Критик: Уже не раз в различных журналах высказывались сомнения по поводу теории относительности, но релятивисты отвечали на них весьма редко[1]. Не будем уточнять, высокомерие ли, слабость или лень лежат в основе этого упущения; возможно даже, что здесь действует смесь этих психологических моментов; возможно также, что критические замечания нередко делают очевидной слишком малую компетентность критика. Об этом, повторяю, не стоит говорить. Но сегодня я зашел к тебе для того, чтобы ты не мог уклониться как обычно. Уверяю тебя, что я не отступлюсь, пока ты не ответишь мне на все вопросы.

Однако, чтобы ты не очень пугался и даже получил некоторое удовольствие от нашей беседы, я скажу тебе и нечто утешительное. В отличие от некоторых моих коллег, я не столь высоко мню о себе, чтобы выступать как сверхразумное существо, обладающее нечеловеческой проницательностью и уверенностью (подобно газетному рецензенту научной литературы или даже театральному критику). Я говорю как простой смертный, сознавая, что критик нередко испытывает недостаток в собственных мыслях.

Не хочу я так же, как это недавно сделал один мой коллега, низвергая гром и молнию, подобно прокурору, обвинять тебя в краже духовных ценностей и иных бесчестных действиях. Мои возражения вызваны лишь необходимостью выяснить некоторые вопросы, мнения по которым сильно расходятся. Во всяком случае я прошу тебя разрешить мне опубликовать

---

* *Eine Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie. Naturwiss.*, 1918, 6, 697—702. [Русский перевод включен во второе издание книги Эйнштейна «О специальной и общей теории относительности». (Статья 43).— *Прим. ред.*]

[1] Под «релятивистом» здесь следует понимать сторонника физической теории относительности, а не философа-релятивиста.

нашу беседу, зная, что заботы о том, как достать бумагу, не единственные заботы, которые не дают спать моему другу, редактору Беролинензису [2].

Будучи заранее уверенным в твоем согласии, перехожу немедля к сути дела. С тех пор как была создана специальная теория относительности, ее вывод о замедляющем влиянии движения на ход часов вызывал возражения и, как мне кажется, весьма основательные. В самом деле этот вывод обязательно приводит к противоречию с основами теории. Чтобы лучше понимать друг друга, приведем его прежде всего с достаточной четкостью.

Пусть K — галилеева система координат в смысле специальной теории относительности; это означает, что есть тело, по отношению к которому изолированные материальные точки движутся прямолинейно и равномерно. Пусть, далее, U^1 и U^2 — двое совершенно одинаковых часов, не испытывающих никаких влияний извне. Они будут идти с одинаковой скоростью, если их сверить в непосредственной близости друг около друга или на любом расстоянии друг от друга, при условии, что они покоятся относительно K. Но если одни из часов, например U^2, движутся по отношению к системе K равномерно и прямолинейно, то, согласно специальной теории относительности, они с точки зрения системы K должны идти медленнее, чем установленные неподвижные по отношению к K часы U^1. Этот вывод уже сам по себе является странным. Он тем более вызывает серьезные сомнения, когда представляешь себе следующие хорошо известные мысленные эксперименты.

Пусть A и B — две удаленные друг от друга точки системы K. Чтобы определить положения, примем точку A за начало координат системы K. Пусть B — некоторая точка на положительной оси x. Будем считать, что сначала и те и другие часы покоятся в точке A. Там они идут одинаково быстро; пусть положения их стрелок совпадают. Сообщим теперь часам U^2 некоторую постоянную скорость в положительном направлении оси x, чтобы они двигались к точке B. Представим себе, что в точке B скорость меняется на обратную, так что часы U^2 опять начнут двигаться к точке A. Когда часы достигнут точки A, их затормозят, так что по отношению к K они опять будут покоиться. Так как наблюдаемое из K изменение положения стрелок часов U^2, которое возможно при перемене направления скорости U^2, не может превзойти некоторой величины и так как часы U^2 во время равномерного движения вдоль отрезка AB идут медленнее, чем U^1 (если наблюдать из системы K), то при достаточной длине отрезка AB

[2] Вероятно, шутливо искаженная фамилия издателя «Naturwissenschaften» А. Берлинера.—*Прим. ред.*

часы U^2 должны, после своего возвращения, отставать от часов U^1. Согласен ли ты с этим заключением?

Релятивист. Безусловно, согласен. Я с сожалением наблюдал, как некоторые авторы, в других случаях твердо стоявшие на точке зрения теории относительности, пытаются уклониться от этого неизбежного вывода.

Критик. Здесь-то и возникает трудность. Согласно принципу относительности, весь процесс должен протекать совершенно одинаково, если его представить в системе K', которая движется вместе с часами U^2. По отношению к системе K' движутся взад и вперед часы U^1, тогда как часы U^2 все время остаются в покое. Но отсюда следует, что по окончании движения часы U^1 должны отставать от часов U^2, в противоположность сделанному выше выводу. Даже самые рьяные приверженцы теории не станут утверждать, что из двух покоящихся и расположенных друг возле друга часов каждые отстают друг от друга.

Релятивист. Твое последнее утверждение безусловно верно, однако метод вывода несправедлив, потому что, согласно специальной теории относительности, системы координат K и K' никоим образом не являются равноправными. В самом деле, эта теория утверждает равноценность только всех галилеевых (неускоренных) систем координат, т. е. таких систем координат, по отношению к которым в достаточной мере изолированные материальные точки движутся прямолинейно и равномерно. Такой системой координат является, конечно, система K, но не ускоряемая время от времени система K'. Поэтому нельзя выдвинуть никаких возражений против основ теории относительности, исходя из того результата, что часы U^2 после передвижения туда и обратно отстают от часов U^1.

Критик. Признаюсь, что ты начисто отверг мое возражение, но должен сказать, что чувствую себя скорее изобличенным, чем убежденным твоими аргументами. Впрочем, мое возражение остается в силе, если встать на точку зрения общей теории относительности. В этом случае системы координат могут двигаться *произвольно*; следовательно, рассмотренный процесс может быть отнесен к системе координат K', постоянно связанной с часами U^2, точно так же, как и к системе координат K.

Релятивист. Несомненно справедливо, что с точки зрения общей теории относительности мы можем в равной мере пользоваться как системой K', так и системой K. Однако легко заметить, что по отношению к рассматриваемому процессу системы K и K' никоим образом неравноценны. Этот процесс в системе K выглядит совершенно иначе (см. рис. 1), чем в том случае, если рассматривать его в системе K' (рис. 2), как показывает следующее сопоставление:

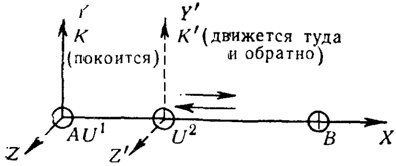

Рис. 1. Часы U^2 движутся относительно системы K

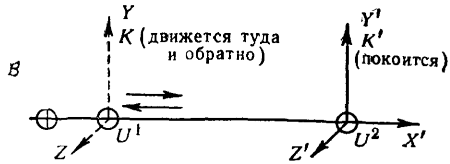

Рис. 2. Часы U^1 движутся относительно системы K'

1. Часы U^2 ускоряются внешними силами в положительном направлении оси X до тех пор, пока не приобретут скорость v. Часы U^1 покоятся.	1. В отрицательном направлении оси X возникает гравитационное поле, в котором часы U^1 ускоренно падают до тех пор, пока не приобретут скорость v. Удерживающие часы U^2 внешние силы, действующие в положительном направлении оси X, не дают этим часам прийти в движение в гравитационном поле. Когда часы U^1 приобретают скорость v, гравитационное поле исчезает.
2. Часы U^2 движутся с постоянной скоростью v до точки B на положительной оси X. Часы U^1 покоятся.	2. Часы U^1 движутся с постоянной скоростью v до точки B' на отрицательной оси X. Часы U^2 покоятся.
3. Часы U^2 ускоряются внешними силами, действующими в отрицательном направлении оси X до тех пор, пока не приобретут скорость v в отрицательном направлении оси X.	3. Появляется однородное поле тяжести, направленное по положительной оси X, под действием которого часы U^1 ускоряются в положительном направлении оси X до тех пор, пока не достигнут скорости v в этом направлении; затем поле тяжести исчезает. Удерживающие часы U^2 внешние силы, действующие в отрицательном направлении оси X, предотвращают при этом движение часов U^2 в появлявшемся поле тяжести.
4. Часы U^2 движутся с постоянной скоростью v назад, в отрицательном направлении оси X до тех пор, пока не приблизятся к часам U^1. Часы U^1 остаются в покое.	4. Часы U^1 движутся с постоянной скоростью v в положительном направлении оси X до тех пор, пока не приблизятся к часам U^2. Часы U^2 остаются в покое.
5. Часы U^2 останавливаются внешними силами.	5. Возникает поле тяжести, направленное по отрицательной оси X, которое останавливает часы U^1. После этого поле тяжести снова исчезает. Часы U^2 при этом удерживаются внешними силами в состоянии покоя.

Нужно, конечно, иметь в виду, что в левом и правом столбцах описан один и тот же процесс, только описание слева относится к координатной системе K, а описание справа — к координатной системе K'. Согласно обоим описаниям, часы U^2 в конце описываемого процесса отстанут в результате от часов U^1 на определенную величину. Если относить все к координатной системе K', то это явление объясняется следующим образом: в течение второго и четвертого этапов рассматриваемого процесса часы U^1, движущиеся со скоростью v, идут медленнее покоящихся часов U^2. Но это отставание будет с избытком компенсировано быстрым ходом часов U^1 во время третьего этапа процесса. В самом деле согласно общей теории относительности, часы идут тем быстрее, чем больше гравитационный потенциал в том месте, где они находятся; часы же U^1 на третьем этапе процесса действительно находятся в области большего гравитационного потенциала, чем часы U^2. Расчет показывает, что это опережение в два раза больше отставания на втором и четвертом этапах процесса. Это рассуждение полностью объясняет приведенный тобой парадокс.

Критик. Ты, я вижу, искусно выбрался из западни, но я солгу, если скажу, что полностью удовлетворен. Камень преткновения не убран с дороги, а лишь передвинут на другое место. Твои соображения показали мне связь между приведенными мной возражениями и другими трудностями, также уже не раз отмечавшимися. Ты разрешил парадокс, используя влияние на часы действующего в системе K' гравитационного поля. Но разве не является это гравитационное поле чем-то чисто фиктивным? Ведь это существование вызвано только выбором системы координат. Истинные же гравитационные поля всегда создаются массами и не могут быть устранены подходящим выбором системы координат. Как же можно поверить, что некоторое явно фиктивное поле оказывает влияние на ход часов?

Релятивист: На это я прежде всего должен заметить, что различать реальное и нереальное для нас не имеет смысла. По отношению к системе K' гравитационное поле «существует» в том же самом смысле, как и всякая другая физическая величина, которая может быть определена в некоторой системе координат, несмотря на то, что ее не существует в системе K. Здесь нет ничего странного, и это легко доказать следующим примером, заимствованным из классической механики. Никто не сомневается в «реальности» кинетической энергии, так как иначе пришлось бы отрицать энергию вообще. Однако ясно, что кинетическая энергия тел зависит от состояния движения координатной системы: подходящим выбором последней можно, очевидно, сделать так, что в некоторый определенный момент кинетическая энергия поступательного движения одного тела примет наперед заданное положительное или нулевое значение. В специальном случае, при одинаково направленных и равных по величине скоростях всех масс, можно подходящим выбором координатной системы сделать общую кинетическую энергию равной нулю. Аналогия, на мой взгляд, полная.

Вместо того чтобы различать реальное и нереальное, мы четко различаем величины, принадлежащие физической системе (независимо от выбора координатной системы), и величины, которые зависят от координатной системы. Далее следовало бы потребовать, чтобы физика вводила в свои законы лишь величины первого рода. На деле же выяснилось, что этот путь практически нереален, как ясно показало развитие классической механики. Можно было бы, например, подумать (да так, собственно, и попытались сделать) о введении в законы классической механики вместо координат лишь расстояний материальных точек друг от друга; можно было бы априори ожидать, что таким путем проще всего достичь той цели, которую поставила теория относительности. Но развитие науки не подтвердило этой догадки. Обойтись без координатной системы оказалось невозможно; необходимо было использовать значения координат, которые не связаны прямо с процессом измерения. Более того, в общей теории относительности четыре координаты пространственно-временного континуума являются совершенно произвольно выбранными параметрами, каждый из которых имеет самостоятельный физический смысл. Частично этот произвол переносится и на те величины (компоненты поля), с помощью которых описывается физическая реальность. Только некоторые в общем довольно сложные выражения, образованные из компонент поля и координат, соответствуют величинам, измеряемым независимо от координатной системы (т. е. реальным величинам). Так, например, компонентам гравитационного поля в некоторой пространственно-временной точке вовсе не соответствует величина, независящая от выбора координат. Таким образом, «физическая реальность» соответствует вовсе не гравитационному полю, *взятому самому по себе*, но только этому же полю вместе с другими явлениями. Поэтому нельзя сказать ни того, что гравитационное поле само по себе есть нечто «реальное», ни того, что оно «чисто фиктивно».

В том обстоятельстве, что в общей теории относительности связь между *входящими в уравнения* и *измеряемыми* величинами гораздо менее непосредственна, чем в обычных теориях, лежит, вероятно, основная трудность, появляющаяся при изучении общей теории относительности. Твое последнее возражение является следствием того, что ты забываешь об этом обстоятельстве.

Ты счел фиктивным использованное в примере с часами поле еще и потому, что силовые линии *истинного* гравитационного поля обязательно должны порождаться массами, а в рассматриваемом примере нет никаких масс, которые могли бы породить это поле. Возразить на это можно двояко. С одной стороны, априори не является обязательным требование, чтобы свойственный теории Ньютона взгляд, согласно которому любое гравитационное поле нужно рассматривать как порождаемое массами, был перенесен неизменным в общую теорию относительности. Этот вопрос опять тесно связан с упомянутым выше обстоятельством, что значение компонент поля определено не столь непосредственно, как в теории Ньютона. Но, с другой стороны, нельзя утверждать, что не существует масс, которым можно было бы приписать возникновение поля. Конечно, ускоренные координатные системы не могут рассматриваться как реальные источники поля, хотя это мнение и приписывал мне один остроумный критик. Однако все существующие во Вселенной звезды следует считать участвующими в создании гравитационного поля, поскольку в процессе ускорения координатной системы K' они ускоряются по отношению к последней и могут индуцировать гравитационное поле подобно тому, как ускоренно движущиеся электрические заряды индуцируют электрическое поле. Приближенное интегрирование уравнений гравитационного поля показало, что подобного рода индуктивное действие со стороны ускоренно движущейся массы действительно должно проявляться. Из этих соображений очевидно, что полная ясность по выдвинутому тобой вопросу может быть достигнута лишь путем создания такого представления о геометрическо-механическом строении Вселенной, которое совпадало бы с теорией. Я пытался проделать это в прошлом году и пришел, как мне кажется, к удовлетворительному результату; однако разбор его завел бы нас слишком далеко.

Критик. В самом деле, после твоего изложения мне кажется, что из парадокса с часами нельзя вывести внутренней противоречивости теории относительности. Возможно даже, как мне кажется, что теория эта вообще не имеет внутренних противоречий, но отсюда еще не следует, что ее нужно серьезно принимать во внимание. *Я не понимаю, почему ради абстрактного преимущества, а именно, ради идеи относительности, нужно все так усложнять и вносить такие вычислительные трудности.* А их значительность ты сам достаточно ясно показал в последнем ответе. Да станет ли кто-нибудь пользоваться теорией относительности, например, для того, чтобы рассмотреть движение небесных тел солнечной системы в геоцентрической системе координат, которая к тому же принимает участие во вращательном движении Земли? Действительно ли можно рассматривать эту координатную систему, относительно которой неподвижные звезды вращаются с громадными скоростями, «покоящейся» и равноправной? Не грешит ли такой подход против здравого смысла и принципа экономии мышления? Не могу не повторить здесь меткого замечания Ленарда по затронутой теме. После того как он изложил теорию относительности, представив для наглядности «движущуюся» координатную систему идущим железнодорожным поездом, он заметил: «Предположим теперь, что воображаемый железнодорожный поезд совершает явно неравномерное движение. Если при этом под влиянием сил инерции все в поезде превратилось в обломки, в то время как все снаружи осталось в целости, то, полагаю я, *здравый смысл* приведет к выводу, что это поезд, а не окружающая его среда, внезапно изменил свое движение. Обобщенный принцип относительности, в его простейшем понимании, требует, чтобы мы и в этом случае допустили, что изменила свою скорость окружающая среда и что катастрофа поезда является лишь следствием этого толчка внешнего мира, переданного посредством «гравитационного действия» из внешнего мира внутрь поезда. При этом возникают вопросы: почему колокольня возле поезда не обрушилась, хотя *она* испытала толчок вместе с окружением, почему следствие толчка проявляется *так односторонне*, лишь в поезде, в то время как нельзя сделать вывода о том, где произошло изменение движения; принцип относительности не дает на них ни одного ответа, удовлетворительного для неискушенного ума.

Релятивист: По многим причинам мы охотно миримся с трудностями, к которым нас приводит теория. Во-первых, всякий последовательно мыслящий человек будет удовлетворен тем, что понятие абсолютного движения, которому нельзя приписать никакого кинетического смысла, не должно использоваться в физике; нельзя отрицать, что основы физики выигрывают в логичности, избавляясь от этого понятия. Далее, факт тождественности инертной и тяжелой массы настойчиво требует разъяснения, не говоря уже о том, что физика нуждается в методе, который бы позволил осуществить идею близкодействия в применении к гравитации. Без действенного ограничительного принципа физики едва ли могут заниматься этой проблемой, так как можно предложить *очень много теорий*, удовлетворяющих довольно ограниченным знаниям в этой области. Embarras de richesse [3]— один из злейших врагов, отравляющий существование физикам. Постулат относительности настолько ограничивает возможности, что он заранее определил путь, по которому *должна* идти теория. Наконец, должно быть объяснено вековое движение перигелия планеты Меркурий, существование которого окончательно установлено астрономами, но не может быть удовлетворительно объяснено теорией Ньютона.

Утверждение *принципиальной* эквивалентности координатных систем не означает, что каждая координатная система в равной мере *удобна* для исследования заданной физической системы точно так же, как в классической механике. Строго говоря, нельзя, например, утверждать, что

[3] «Embarras de richesse» или «embarras de choix» — французское выражение: «Больше альтернатив, чем можно справиться»; буквально: «затруднение от избытка» —*Прим. ред.*

Земля движется по эллипсу вокруг Солнца, так как подобное высказывание предполагает координатную систему, в которой Солнце покоится, в то время как классическая механика допускает также и системы, по отношению к которым Солнце *движется* прямолинейно и равномерно. Однако маловероятно, что кому-либо придет в голову для исследования движения Земли использовать одну из координатных систем последнего рода; столь же маловероятно, что, анализируя эту задачу, он придет к выводу, что координатная система, начало координат которой все время находится в центре тяжести, принципиально предпочтительнее рассматриваемой системы. То же имеет место и в твоем примере. Для изучения солнечной системы никто не станет использовать координатную систему, покоящуюся относительно Земли, поскольку это непрактично. *В принципе же* такая система, согласно общей теории относительности, совершенно равноправна со всеми другими. Тот факт, что неподвижные звезды будут двигаться с громадными скоростями, если в основу исследования положить такую систему координат, равно как и сложная структура существующего в этой системе гравитационного поля, имеющего, например, соответствующие центробежным силам компоненты, представляет собой возражение не против *допустимости*, а только против целесообразности такого выбора координат. Так же обстоит дело и с примером господина Ленарда. Исходя из теории относительности, нельзя понимать этот случай в том смысле, что «*возможно*, окружение (поезда) изменило свою скорость». Дело идет не о двух исключающих друг друга гипотезах о месте, в котором происходит движение, а скорее о двух принципиально равноценных способах описания положения вещей [4]. Вопрос о том, какое описание выбрать, может решаться лишь исходя из целесообразности, но не из принципиальных соображений. Следующий встречный пример показывает, как мало сулит нам в подобных вещах так называемый «здравый смысл», призванный в качестве третейского судьи. Сам Ленард говорит, что до сих пор против *специальной* теории относительности (т. е. принципа относительности для равномерно и прямолинейно движущихся координатных систем) не было выдвинуто ни одного действенного возражения. Движущийся с постоянной скоростью поезд можно считать с тем же правом «покоящимся», как рельсы вместе с окружающей местностью — «равномерно движущимися». Допускает ли это «здравый смысл» машиниста? Он будет возражать, что непрерывно топит и смазывает не *окрестности*, а паровоз

[4] Тот факт, что колокольня не обрушилась, объясняется во втором способе описания тем, что она вместе со всеми телами и Землей *свободно падала* в гравитационном поле (во все время движения), в то время как поезд удерживался от свободного падения внешними силами (силами торможения). Свободно падающее тело ведет себя относительно внутренних изменений как изолированное от всех внешних воздействий свободно движущееся тело.

и что соответственно в движении этого последнего проявляются результаты его работы.

Критик. После нашей беседы я должен признать, что опровергнуть положения теории относительности не так просто, как мне казалось раньше. Правда, у меня есть еще кое-какие возражения, но не хочу надоедать тебе до тех пор, пока не продумаю до конца наш разговор. Прежде чем расстаться, задам еще один вопрос, не относящийся к возражениям; я задаю его из чистого любопытства. Как обстоит дело с «нашим бедным больным» из теоретической физики, с эфиром, который многие из вас окончательно объявили умершим?

Релятивист. У него изменчивая судьба, и нельзя сказать окончательно, что он уже мертв. До Лоренца он существовал как все пронизывающая жидкость, газоподобная жидкость, и в других формах, разных в зависимости от автора. Лоренц сделал его неподвижным, олицетворяющим «покоящуюся» систему координат, т. е. предпочтительное состояние движения во Вселенной. Согласно специальной теории относительности, больше не существует предпочтительных состояний движения; это означает отрицание эфира в смысле предыдущих теорий. В самом деле, если бы эфир все-таки существовал, то он должен был бы находиться в каждой пространственно-временнóй точке в определенном состоянии движения, которое должно было бы сказываться в оптических явлениях. Никакого предпочтительного состояния движения нет, как учит специальная теория относительности, поэтому нет никакого эфира в старом смысле. Общая теория относительности также не знает предпочтительного состояния движения в точке, которое можно было бы интерпретировать как скорость эфира. Однако в то время как в специальной теории относительности область пространства без материи и без электрического поля представляется совершенно пустой, т. е. ее нельзя охарактеризовать никакими физическими величинами, в общей теории относительности даже пустое в этом смысле пространство имеет физические свойства. Последние характеризуются математически компонентами гравитационного потенциала, которые определяют как гравитационное поле, так и метрические свойства этой области пространства. Это положение удобно понимать в том смысле, что речь идет о некотором эфире, состояние которого непрерывно изменяется от точки к точке. Нужно только остерегаться приписывать этому «эфиру» материальные свойства (например определенную скорость в каждой точке).

В несколько шутливой форме в этой работе разобран с исчерпывающей подробностью так называемый «парадокс часов».

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ Э. ШРЕДИНГЕРА „КОМПОНЕНТЫ ЭНЕРГИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ"*

Э. Шредингер[1] показал, что при соответствующем выборе системы координат все компоненты t_σ^α энергии гравитационного поля шара (вне его) обращаются в нуль[2]. Шредингер был, конечно, удивлен этим результатом, который сначала показался удивительным и нам. Особенно его заинтересовал вопрос о том, следует ли в действительности трактовать t_σ^α как компоненты энергии. К приведенным Шредингером соображениям я хочу добавить еще два.

1. В то время как компоненты энергии материи T_σ^α образуют тензор, величины t_σ^α, понимаемые как «компоненты энергии» гравитационного поля, тензора не образуют.

2. Величины $T_{\sigma\tau} = \sum\limits_\alpha T_\sigma^\alpha g_{\alpha\tau}$ симметричны относительно индексов σ и τ, а аналогичные величины $t_{\sigma\tau} = \sum\limits_\alpha t_\sigma^\alpha g_{\alpha\tau}$ не симметричны.

Г. А. Лоренц и Леви-Чивита вследствие первой причины тоже не решились трактовать величины t_σ^α как компоненты энергии гравитационного поля.

Хотя я и разделяю эти соображения, однако убежден, что более целесообразное определение компонент энергии гравитационного поля невозможно. Убедительнейшее, на мой взгляд, формальное обоснование такого выбора дано в работе «Принцип Гамильтона и общая теория относительности»[3].

---

* *Notiz zu E. Schrödingers Arbeit «Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes».* Phys. Z., 1918, 19, 115, 116.

[1] Phys. Z., 1918, 19, 4.

[2] Уже несколько месяцев назад Г. Нордстрем обратил мое внимание на обращение в нуль компоненты t_4^4 для рассматриваемого здесь случая.

[3] Sizungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 42, 1111 (Статья 42).

Что же касается соображений Шредингера, то их убедительность заключается в аналогии с электродинамикой, в которой напряжения и плотность энергии любого поля отличны от нуля. Однако я не могу найти причину, почему также должно обстоять дело и для гравитационных полей. Гравитационные поля можно задавать, не вводя напряжений и плотности энергии. Роль величин t_σ^α заключается в том, что они вместе с тензором T_σ^α материи дают уравнение

$$\sum_\alpha \frac{\partial (T_\sigma^\alpha + t_\sigma^\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{1}$$

принимающее после интегрирования по трехмерному объему V вид закона сохранения импульса и энергии,

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int (T_\sigma^4 + t_\sigma^4)\, dV\right\} = \int [(T_\sigma^1 + t_\sigma^1)\cos(nx_1) + \\ + (T_\sigma^2 + t_\sigma^2)\cos(nx_2) + (T_\sigma^3 + t_\sigma^3)\cos(nx_3)]\, dS, \tag{1a}$$

а именно, t_μ^α являются единственными величинами, содержащими только *первые* производные $g_{\mu\nu}$ по координатам.

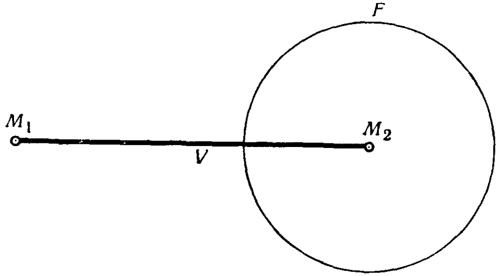

Рис. 1.

Далее следует указать на то, что напряжения t_σ^α тех гравитационных полей, через которые осуществляется взаимодействие многих тел, никоим образом не могут обращаться в нуль. Это видно из следующего рассуждения. Пусть имеются два длительно покоящихся тела M_1 и M_2, связанных друг с другом жестким стержнем V (рис. 1). Пусть F — некоторая поверхность, которая охватывает M_2 и не охватывает M_1 и, следовательно пересекает стержень V. Вследствие гравитационного воздействия обоих тел друг на друга этот стержень находится в напряженном состоянии.

Если стержень прямой и параллелен оси X_1 координатной системы, то первое уравнение (1a) дает

$$0 = \int T_1^1 dS + \int [t_1^1 \cos(nx_1) + t_1^2 \cos(nx_2) + t_1^3 \cos(nx_3)]\, dS.$$

Так как в нашем случае первый из этих интегралов не обращается в нуль, то отличен от нуля и второй. Таким образом, величины t_1^1, t_1^2, t_1^3 не могут быть равны нулю всюду на поверхности S. Это рассуждение применимо во всех случаях, когда рассматриваемое поле реализует взаимодействие между телами. Рассмотренное Шредингером поле не относится к этому типу.

Формальные соображения «1» и «2», по моему мнению, не могут привести к отклонению предложенной мной формы закона сохранения энергии-импульса. Выражающее же этот закон уравнение справедливо в произвольно выбранной системе отсчета; по-видимому, нет оснований для того, чтобы выдвигать дальнейшие формальные требования. Соображения «1» я коснусь в работе, которая будет опубликована в ближайшем номере этого журнала.

Поступила 5 февраля 1918 г.

Заметкой Шредингера началась дискуссия о свойствах псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля. В журнале «Physikalische Zeitschrift» не было больше работ Эйнштейна на эту тему. По-видимому, речь идет о статье 51, опубликованной в другом месте.

ЗАМЕЧАНИЕ К ЗАМЕТКЕ Э. ШРЕДИНГЕРА „О СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ОБЩЕКОВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИИ“ *

Вариант моего представления космического гравитационного поля, данный Э. Шредингером [1], я, конечно, принимал во внимание при написании работы в качестве близкой возможности. Однако я должен признаться, что это возможное понимание не показалось мне достойным упоминания.

На языке теории Ньютона подлежащая решению задача может быть сформулирована примерно следующим образом. Пространственно замкнутый мир мыслим только тогда, когда силовые линии гравитационного поля, которые оканчиваются на материальных телах (звездах), начинаются в пустом пространстве, т. е. возможна такая модификация теории, в которой «пустое пространство» играет роль распределенной в межзвездном пространстве отрицательной гравитирующей массы. Э. Шредингер допускает существование материи с отрицательной массой и характеризует ее скаляром p. Этот скаляр p не имеет никакого отношения к имеющемуся внутри материальной массы давлению «реальной», т. е. наблюдаемой, конденсированной в звезды материи с плотностью ϱ; в межзвездном пространстве ϱ обращается в нуль, а p отличен от нуля.

О законе, по которому должен определяться p как функция координат, автор умалчивает. Укажем на две очевидные возможности.

1. p — универсальная постоянная. В этом случае формула Шредингера точно совпадает с нашими формулами. В этом нетрудно убедиться, заме-

---

* *Die Bemerkung zu Schrödingers Notiz über das Losungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen.* Phys. Z., 1918, 19, 165, 166.

[1] Phys. Z., 1918, 19, 20.

нив p на λ и добавив соответствующий член в левую часть уравнений поля. Следовательно, автор не мог иметь в виду этот случай.

2. p — переменная величина. Тогда необходимо дифференциальное уравнение, определяющее p как функцию $x_1,\ldots, x_4$. При этом в основу приходится положить не только гипотезу о существовании ненаблюдаемой материи с отрицательной массой в межзвездном пространстве; необходимо еще постулировать гипотетический закон пространственно-временнóго распределения этой материи.

Прокладываемый Э. Шредингером путь представляется мне непроходимым, потому что он слишком далеко заводит в густые дебри гипотез.

Поступила 3 марта 1918 г.

О ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ*

Важный вопрос о том, как распространяются гравитационные поля, был рассмотрен мной уже полтора года назад в одной из моих работ [1]. Однако, поскольку изложение этого вопроса было недостаточно ясным и, кроме того, искажено досадной расчетной ошибкой, мы должны здесь вновь вернуться к его рассмотрению.

Как и ранее, я ограничусь здесь случаем, когда рассматриваемый пространственно-временнóй континуум лишь незначительно отличается от «галилеевского». Чтобы для всех значений индексов можно было положить

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{1}$$

выберем, как это принято в специальной теории относительности, временнýю переменную x_4 чисто мнимой, полагая $x_4 = it$, где t означает «световое время».

В равенстве (1) $\delta_{\mu\nu} = 1$ при $\mu = \nu$ и $\delta_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$. Величины $\gamma_{\mu\nu}$ малы по сравнению с 1 и описывают отклонение континуума от такового в отсутствие поля; они образуют тензор 2-го ранга относительно преобразований Лоренца.

§ 1. Решение приближенных уравнений гравитационного поля с помощью запаздывающих потенциалов

Мы исходим из уравнений поля, справедливых [2] для любой системы координат:

$$-\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix} + \sum_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} - \sum_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \tag{2}$$

---

* *Über Gravitationwellen.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.

[1] A. Einstein. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 688 (Статья 41).

[2] При этом не вводится «λ-член» [ср. A. Einstein. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 142 (Статья 44)].

Здесь $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии материи, T — соответствующий скаляр $\sum\limits_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$. Принимая в качестве малых величин n-го порядка величины n-й степени относительно $\gamma_{\mu\nu}$ и ограничиваясь в обеих частях уравнения (2) членами наинизшего порядка, получаем систему приближенных уравнений

$$\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}+\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha}-\frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha}\right)=2\varkappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha}T_{\alpha\alpha}\right). \quad (2a)$$

Умножая это уравнение на $-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}$ и суммируя по μ и ν, получаем прежде всего (с измененным обозначением индексов) скалярное уравнение

$$\sum_{\alpha\beta}\left(-\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta^2}+\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right)=\varkappa\sum_{a}T_{\alpha\alpha}.$$

При сложении этого уравнения, умноженного на $\delta_{\mu\nu}$, с уравнением (2а) прежде всего сокращается второй член правой части уравнения (2а). Левую часть удобно записать, вводя вместо $\gamma_{\mu\nu}$ функции

$$\gamma'_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha\alpha}. \quad (3)$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}-\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha}+\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=2\varkappa T_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Но эти уравнения можно значительно упростить, потребовав, чтобы величины $\gamma'_{\mu\nu}$ удовлетворяли, кроме уравнения (4), также и соотношениям

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial\gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}=0. \quad (5)$$

На первый взгляд кажется странным, что к десяти уравнениям (4) для десяти функций $\gamma'_{\mu\nu}$ можно произвольно добавить еще четыре уравнения без того, чтобы получилась переопределенная система. Однако эта процедура оправдана, как это видно из следующего рассуждения. Уравнения (2) ковариантны относительно любых преобразований, т. е. они удовлетворяются при любом выборе системы координат. Если ввести новую систему координат, то величины $g_{\mu\nu}$ новой системы будут зависеть от четырех произвольных функций, определяющих преобразование координат.

Но эти четыре функции можно выбрать так, чтобы величины $g_{\mu\nu}$ новой системы удовлетворяли четырем произвольно заданным соотношениям. Пусть эти соотношения выбраны так, что они в интересующем нас приближении переходят в уравнения (5). Последние означают, следовательно, задаваемое нами условие выбора системы координат. Согласно уравнению (5), получаем вместо (4) простые уравнения

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 2\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Из последних уравнений видно, что гравитационные поля распространяются со скоростью света. Величины $\gamma_{\mu\nu}$ можно вычислить по заданным $T_{\mu\nu}$ с помощью запаздывающих потенциалов. Если x, y, z, t — вещественные координаты точки наблюдения, x_1, x_2, x_3, $\frac{x_4}{i}$, в которой должны быть вычислены величины $\gamma'_{\mu\nu}$, а x_0, y_0, z_0 — пространственные координаты элемента объема dV_0 и r — пространственное расстояние между dV_0 и точкой наблюдения, то

$$\gamma'_{\mu\nu} = -\frac{\varkappa}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r} dV_0. \tag{7}$$

§ 2. Компоненты энергии гравитационного поля

Ранее [3] я приводил в явном виде компоненты энергии гравитационного поля для случая, когда выбор координат соответствует условию

$$g = |g_{\mu\nu}| = 1,$$

которое в рассматриваемом здесь приближении имело бы вид

$$\gamma = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha} = 0.$$

Однако при новом выборе координат это условие, вообще говоря, не выполняется. Поэтому проще всего определить здесь компоненты энергии, отдельно рассматривая каждую из них.

При этом, однако, надо иметь в виду следующую трудность. Наши уравнения поля (6) справедливы лишь до величин первого порядка включительно, в то время как уравнения энергии, как легко убедиться,— до величин второго порядка малости. Тем не менее, мы легко достигаем цели

[3] См. формулу (50) в статье: A. Einstein. Ann. Phys., 1916, 49, 769 (Статья 38)

с помощью следующего рассуждения. Согласно общей теории, компоненты энергии $\mathfrak{T}_\mu^\sigma$ (материи) и $\mathfrak{t}_\mu^\sigma$ (гравитационного поля) удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_\sigma \frac{\partial \mathfrak{T}_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \mathfrak{T}_{\rho\sigma} = 0,$$

$$\sum_\sigma \frac{\partial (\mathfrak{T}_\mu^\sigma + \mathfrak{t}_\mu^\sigma)}{\partial x_\sigma} = 0.$$

Отсюда следует

$$\sum_\sigma \frac{\partial \mathfrak{t}_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \mathfrak{T}_{\rho\sigma}.$$

Если правую часть последнего равенства привести к форме, которую имеет левая часть, исключая $\mathfrak{T}_{\rho\sigma}$ с помощью уравнений поля, то получим компоненты $\mathfrak{t}_\mu^\sigma$. В правой части этого равенства в случае рассматриваемого нами приближения оба сомножителя являются величинами первого порядка малости. Следовательно, для получения компонент $\mathfrak{t}_\mu^\sigma$ с точностью до величин второго порядка малости достаточно подставить вместо обоих сомножителей правой части равенства их значения с точностью лишь до величин первого порядка малости. Итак, можно заменить

$$\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \quad \text{на} \quad -\frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}$$

и

$$\mathfrak{T}_{\rho\sigma} \quad \text{на} \quad T_{\rho\sigma}.$$

Далее, введем вместо $\mathfrak{t}_\mu^\sigma$ аналогичные по характеру индексов величинам $T_{\rho\sigma}$ величины $t_{\rho\sigma}$, значения которых при требуемой здесь степени приближения отличаются от $\mathfrak{t}_\rho^\sigma$ только знаком.

Таким образом, нужно определить величины $t_{\mu\sigma}$ из уравнения

$$\sum_\sigma \frac{\partial t_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma} \frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} T_{\rho\sigma}. \tag{8}$$

Преобразуем правую часть этого уравнения, учитывая, что, согласно (3), следует подставить

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_\alpha \gamma'_{\alpha\alpha} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma' \tag{3a}$$

и выразить $T_{\rho\sigma}$ через $\gamma'_{\rho\sigma}$ согласно (6). После простого преобразования получаем [4]

$$\sum_\sigma \frac{\partial t_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\frac{1}{4\varkappa}\left(\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\sigma}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8\varkappa}\delta_{\mu\sigma}\left(\sum_{\alpha\beta\lambda}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\lambda}\right)^2\right)\right].$$

Отсюда следует, что закону сохранения энергии можно удовлетворить, положив

$$4\varkappa t_{\mu\sigma} = \left(\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{1}{2}\delta_{\mu\sigma}\left(\sum_{\alpha\beta\lambda}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_\lambda\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\lambda}\right)^2\right). \quad (9)$$

Физический смысл величины $t_{\mu\sigma}$ проще всего уяснить путем следующего рассуждения. Величины $t_{\mu\sigma}$ играют для гравитационного поля ту же роль, какую $T_{\mu\sigma}$ играют для материи. Но для несвязанной весомой материи, если ограничиться величинами первого порядка малости, имеем

$$T_{\mu\sigma} = T^{\mu\sigma} = \rho\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\sigma}{ds} \qquad \left(ds^2 = -\sum_\nu dx_\nu^2\right), \quad (10)$$

где скаляр ρ представляет собой плотность материи. Величины $T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{33}$, следовательно, соответствуют компонентам давления; T_{14}, T_{24}, T_{34} или T_{41}, T_{42}, T_{43} представляют собой умноженный на $\sqrt{-1}$ вектор плотности импульса или плотности потока энергии, а T_{44} — взятую с обратным знаком плотность энергии. Аналогичный смысл имеют компоненты $t_{\mu\sigma}$, связанные с гравитационным полем.

В качестве примера рассмотрим сначала поле покоящейся точечной массы M. Из равенств (7) и (10) непосредственно следует, что

$$\gamma'_{44} = \frac{\varkappa}{2\pi}\frac{M}{r}, \quad (11)$$

тогда как все остальные компоненты $\gamma'_{\mu\nu}$ обращаются в нуль. Для ком-

---

[4] Упомянутая в начале статьи ошибка в нашей прежней работе состоит в том, что мы подставили в правую часть уравнения (8) $\frac{\partial\gamma'_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}$ вместо $\frac{\partial\gamma_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}$. Эта ошибка требует также переработки § 2 и 3 упомянутой работы.

понент $g_{\mu\nu}$ получаются, согласно (11), (3а) и (1), значения, впервые приведенные де Ситтером:

$$\left.\begin{matrix} -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} \end{matrix}\right\}. \qquad (11a)$$

Скорость света c, определенная в общем виде уравнением

$$0 = ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

получается здесь из соотношения

$$\left(1+\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r}\right)(dx^2+dy^2+dz^2)-\left(1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r}\right)dt^2 = 0.$$

Таким образом, при нашем выборе системы координат, скорость света

$$c = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}} = 1-\frac{\varkappa M}{4\pi r} \qquad (12)$$

хотя и зависит от места (координат), но не зависит от направления. Из (11а) следует также, что малые твердые тела при перемещении остаются подобными самим себе, причем их линейные размеры меняются как $\left(1-\frac{\varkappa M}{8\pi r}\right)$. Уравнение (9) дает в нашем случае для компонент $t_{\mu\sigma}$:

$$\left.\begin{aligned} t_{\mu\sigma} &= \frac{\varkappa M^2}{32\pi^2}\left(\frac{x_\mu x_\sigma}{r^6}-\frac{1}{2}\,\delta_{\mu\sigma}\frac{1}{r^4}\right) \qquad \text{(для индексов 1, 2, 3)}, \\ t_{14} &= t_{24} = t_{34} = 0, \\ t_{44} &= \frac{\varkappa M^2}{64\pi^2}\cdot\frac{1}{r^4}. \end{aligned}\right. \qquad (13)$$

Значения компонент $t_{\mu\sigma}$ существенно зависят от выбора системы координат; на это обстоятельство уже давно обратил мое внимание в своем письме Г. Нордстрем [5]. При выборе системы координат в соответствии

[5] Ср. также работу Шредингера (Schrödinger. Phys. Zeitschr., 1918, 1, 4) и ответ Эйнштейна (Статья 47).— *Прим. ред.*

с условием $|g| = 1$, при котором для случая материальной точки мы приводили раньше для компонент $g_{\mu\sigma}$ выражения:

$$g_{\mu\sigma} = -\delta_{\mu\sigma} - \frac{\varkappa M}{4\pi}\frac{x_\mu x_\sigma}{r^3}, \qquad \text{(индексы 1, 2, 3)},$$

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0,$$

$$g_{44} = 1 - \frac{\varkappa M}{4\pi} \cdot \frac{1}{r},$$

все компоненты энергии гравитационного поля обращаются в нуль, если их вычислять с помощью формулы

$$\varkappa t_\sigma^\alpha = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\alpha \sum_{\mu\nu\lambda\beta} g^{\mu\nu}\begin{Bmatrix}\mu\lambda\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \lambda\end{Bmatrix} - \sum_{\mu\nu\lambda} g^{\mu\nu}\begin{Bmatrix}\mu\lambda\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\sigma\\ \lambda\end{Bmatrix}$$

с точностью до величин второго порядка малости.

Можно было бы предположить, что посредством соответствующего выбора системы отсчета всегда можно добиться обращения в нуль всех компонент энергии гравитационного поля, что было бы в высшей степени интересно. Однако легко показать, что это, вообще говоря, не так.

§ 3. Плоская гравитационная волна

Для нахождения плоских гравитационных волн будем исходить из выражения, удовлетворяющего уравнениям поля (6):

$$\gamma'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} f(x_1 + ix_4). \tag{14}$$

Здесь α — вещественные постоянные, а f — вещественная функция от $(x_1 + ix_4)$. Из уравнений (5) получаем соотношения

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} + i\alpha_{14} &= 0,\\ \alpha_{21} + i\alpha_{24} &= 0,\\ \alpha_{31} + i\alpha_{34} &= 0,\\ \alpha_{41} + i\alpha_{44} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Если условия (15) выполнены, то (14) представляет собой гравитационную волну. Для более точного выяснения ее физической природы вычислим соответствующую ей плотность потока энергии t_{41}/i.

Подставляя в уравнение (9) выражение для $\gamma'_{\mu\nu}$, задаваемое (14) и (15), получаем

$$\frac{t_{41}}{i} = \frac{1}{4\varkappa} f'^2 \left[\left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{33}}{2} \right)^2 + \alpha_{23}^2 \right]. \tag{16}$$

Этот результат замечателен тем, что из шести произвольных постоянных, входящих в (14) [с учетом равенств (15)], в выражение (16) для плотности потока энергии входят лишь д в е. Волна, для которой $(\alpha_{22} - \alpha_{33})$ и α_{23} равны нулю, не переносит энергии. Следовательно, такая волна в известном смысле реально не существует, в чем проще всего убедиться следующим образом.

Прежде всего заметим, что с учетом равенств (15) матрица, составленная из коэффициентов $\alpha_{\mu\nu}$, для волны, не переносящей энергии, имеет вид:

$$(\alpha_{\mu\nu} =) \left. \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & i\alpha \\ \beta & \delta & 0 & i\beta \\ \gamma & 0 & \delta & i\gamma \\ i\alpha & i\beta & i\gamma & -\alpha \end{matrix} \right\}, \tag{17}$$

где α, β, γ, δ представляют собой четыре произвольно и независимо друг от друга выбранных числа.

Рассмотрим теперь свободное от поля пространство, линейный элемент которого ds может быть выражен через соответствующим образом выбранные координаты (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) в виде

$$-ds'^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2. \tag{18}$$

Введем теперь новые координаты x_1, x_2, x_3, x_4 с помощью соотношений

$$x'_\nu = x_\nu - \lambda_\nu \varphi (x_1 + i x_4). \tag{19}$$

Здесь λ_ν — четыре вещественные бесконечно малые постоянные, φ — вещественная функция аргумента $(x_1 + i x_4)$. Из соотношений (18) и (19) следует, что если в них пренебречь величинами второго порядка относительно λ, то

$$ds^2 = -\sum_\nu dx_\nu'^2 = -\sum_\nu dx_\nu^2 + 2\varphi' (dx_1 + i dx_4) \sum_\nu \lambda_\nu dx_\nu.$$

Отсюда для соответствующих компонент $\gamma_{\mu\nu}$ получаются следующие значения:

$$\left(\frac{1}{\varphi'}\gamma_{\mu\nu}=\right)\begin{matrix} 2\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & i\lambda_1+\lambda_4 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & i\lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & i\lambda_3 \\ i\lambda_1+\lambda_4 & i\lambda_2 & i\lambda_3 & 2i\lambda_4 \end{matrix},$$

откуда для компонент $\gamma'_{\mu\nu}$ имеем

$$\left(\frac{1}{\varphi'}\gamma'_{\mu\nu}=\right)\left.\begin{matrix} \lambda_1-i\lambda_4 & \lambda_2 & \lambda_3 & i\lambda_1+\lambda_4 \\ \lambda_2 & -\lambda_1-i\lambda_4 & 0 & i\lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1-i\lambda_4 & i\lambda_3 \\ i\lambda_1+\lambda_4 & i\lambda_2 & i\lambda_3 & -\lambda_1+i\lambda_4 \end{matrix}\right\}. \tag{20}$$

Если теперь положить, что функция φ из формулы (19) связана с функцией f из формулы (14) соотношением

$$\varphi' = f, \tag{21}$$

то оказывается, что с точностью до обозначений постоянных, компоненты $\gamma'_{\mu\nu}$ из (20) совпадают с компонентами $\gamma'_{\mu\nu}$ из (14) — (17).

Таким образом, те гравитационные волны, которые не переносят энергии, могут быть получены посредством простого преобразования координат из системы, свободной от поля; их существование является (в этом смысле) лишь *кажущимся*. Реальными в собственном смысле этого слова являются, следовательно, только такие бегущие вдоль оси x волны, которые соответствуют распространению величин $\frac{\gamma'_{22}-\gamma'_{33}}{2}$ и γ'_{23} (или величин $\frac{\gamma_{22}-\gamma_{33}}{2}$ и γ_{23}). Эти два типа волн отличаются друг от друга не по существу, а только по своей ориентации. Волновое поле изменяет углы в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Плотности потока энергии, импульса и энергии определяются формулой (16).

§ 4. Излучение гравитационных волн механическими системами

Рассмотрим изолированную механическую систему, центр тяжести которой в течение продолжительного времени совпадает с началом координат. Пусть происходящие в системе изменения настолько медленны, а их пространственная протяженность настолько мала, что световое время, соответствующее расстоянию между двумя материальными точками системы, можно рассматривать как бесконечно малое. Требуется определить гравитационные волны, испускаемые системой в направлении положительной оси x.

Принятое ограничение позволяет для достаточно большого расстояния R точки наблюдения от начала координат заменить (7) равенством

$$\gamma'_{\mu\nu} = -\frac{\varkappa}{2\pi R}\int T_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t-R)\, dV_0 \tag{7a}$$

Мы можем ограничиться рассмотрением волн, переносящих энергию; тогда, в соответствии с результатами § 3, мы должны образовать только компоненты γ'_{23} и $^1/_2(\gamma'_{22}-\gamma'_{33})$. Входящие в правую часть равенства (7a) объемные интегралы можно преобразовать по способу, предложенному М. Лауэ. Проведем здесь подробно только вычисление интеграла $\int T_{23} dV_0$.

Умножая оба уравнения сохранения импульса

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{24}}{\partial x_4} = \sigma,$$

$$\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{34}}{\partial x_4} = \sigma$$

соответственно на $\frac{1}{2}x_3$ и $\frac{1}{2}x_2$, интегрируя их по всей материальной системе и затем складывая друг с другом, получаем после простого преобразования с помощью интегрирования по частям

$$-\int T_{23} dV_0 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_4}\left\{\int (x_3 T_{24} + x_2 T_{34})\, dV_0\right\} = 0. \tag{*}$$

Второй интеграл можно преобразовать с помощью уравнения сохранения энергии

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = 0,$$

умножая последнее на $\frac{1}{2}x_2 x_3$, интегрируя и преобразуя результат с помощью интегрирования по частям. При этом получаем

$$-\frac{1}{2}\int (x_3 T_{42} + x_2 T_{43})\, dV_0 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_4}\left\{\int x_2 x_3 T_{44} dV_0\right\} = 0.$$

Подставляя это в соотношение (*), находим

$$\int T_{23} dV_0 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx_4^2}\left\{\int x_2 x_3 T_{44} dV_0\right\},$$

или, заменяя $\frac{d^2}{dx_4^2}$ на $-\frac{d^2}{dt^2}$, а T_{44} — на взятую с обратным знаком плотность материи $(-\rho)$,

$$\int T_{23} dV_0 = \frac{1}{2}\ddot{\mathfrak{J}}_{23}. \tag{22}$$

Здесь введено обозначение

$$\mathfrak{J}_{\mu\nu} = \int x_\mu x_\nu \rho dV_0; \tag{23}$$

величины $\mathfrak{J}$ представляют собой компоненты (переменного во времени) момента инерции материальной системы.

Аналогично получаем

$$\int (T_{22} - T_{33})\, dV_0 = \frac{1}{2}(\ddot{\mathfrak{J}}_{22} - \ddot{\mathfrak{J}}_{33}). \tag{24}$$

Из равенства (7а) на основании соотношений (22) и (24) получается

$$\gamma'_{23} = -\frac{\varkappa}{2\pi R}\ddot{\mathfrak{J}}_{23}, \tag{25}$$

$$\frac{\gamma'_{22} - \gamma'_{33}}{2} = -\frac{\varkappa}{4\pi R}\left(\frac{\ddot{\mathfrak{J}}_{22} - \ddot{\mathfrak{J}}_{33}}{2}\right). \tag{26}$$

Компоненты $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ следует брать, согласно равенствам (7а), (22) и (24), для момента времени $t - R$, т. е. они являются функциями $t - R$ или также, при больших R вблизи оси, функциями $t - x$. Таким образом, выражения (25) и (26) описывают гравитационные волны, плотность потока энергии которых в направлении оси x, согласно формуле (16), равна

$$\frac{t_{41}}{i} = \frac{\varkappa}{64\pi^2 R^2}\left[\left(\frac{\dddot{\mathfrak{J}}_{22} - \dddot{\mathfrak{J}}_{33}}{2}\right)^2 + \dddot{\mathfrak{J}}_{23}^2\right]. \tag{27}$$

Поставим себе еще задачу — вычислить полное излучение гравитационных волн системой. Для решения этой задачи найдем прежде всего излучение энергии рассматриваемой механической системой в направлении, определяемом направляющими косинусами α_ν. Этот вопрос можно решить путем преобразования координат или, проще, сводя его к следующей формальной задаче.

Пусть $A_{\mu\nu}$ — симметричный тензор (в трехмерном пространстве), а α_ν — вектор. Будем искать скаляр S, являющийся функцией $A_{\mu\nu}$ и α_ν, представляющей собой целую и однородную функцию второй степени относительно $A_{\mu\nu}$, и при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, переходящий в

$$\left(\frac{A_{22} - A_{33}}{2}\right)^2 + A_{23}^2 .$$

Искомый скаляр будет представлять собой функцию скаляров $\sum\limits_{\mu} A_{\mu\mu}$, $\sum\limits_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^2$, $\sum\limits_{\mu\nu} A_{\mu\nu}\alpha_\mu\alpha_\nu$, $\sum\limits_{\mu\sigma\tau} A_{\mu\sigma}A_{\mu\tau}\alpha_\sigma\alpha_\tau$. С учетом того, что оба последних скаляра при $\alpha_\nu = (1, 0, 0)$ переходят соответственно в A_{11} и $\sum\limits_{\mu} A_{1\mu}^2$, находим, что искомый скаляр имеет вид

$$S = -\frac{1}{4}\left(\sum_{\mu} A_{\mu\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{\mu} A_{\mu\mu}\sum_{\rho\sigma} A_{\rho\sigma}\alpha_\rho\alpha_\sigma + \frac{1}{4}\left(\sum_{\rho\sigma} A_{\rho\sigma}\alpha_\rho\alpha_\sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^2 - \sum_{\mu\sigma\tau} A_{\mu\sigma}A_{\mu\tau}\alpha_\sigma\alpha_\tau. \qquad (28)$$

Ясно, что S будет представлять собой плотность гравитационного излучения, распространяющегося радиально от механической системы в направлении $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, если положить

$$A_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{8\pi R}\dddot{\mathfrak{J}}_{\mu\nu} . \qquad (29)$$

Усредняя S, при фиксированных $A_{\mu\nu}$, по всем направлениям в пространстве, получаем среднюю плотность излучения $\bar{S}$. Наконец, величина $\bar{S}$, умноженная на $4\pi R^2$, дает отнесенную к единице времени потерю энергии механической системой, обусловленную излучением гравитационных волн. Вычисление дает

$$4\pi R^2 \bar{S} = \frac{\varkappa}{80\pi}\left[\sum_{\mu\nu}\dddot{\mathfrak{J}}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{3}\left(\sum_{\mu}\dddot{\mathfrak{J}}_{\mu\mu}\right)^2\right]. \qquad (30)$$

Этот результат, в противоположность результату прежней работы, содержащей ошибку в вычислениях, показывает, что механическая система, постоянно сохраняющая сферическую симметрию, не может излучать.

Из формулы (27) видно, что интенсивность излучения ни в одном направлении не может стать отрицательной, тем более не может быть отрицательной и полная интенсивность излучения. Уже в прежней работе подчеркивалось, что окончательный результат, согласно которому должна происходить потеря энергии телами вследствие теплового возбуждения, вызывает сомнение во всеобщей справедливости теории. Нам кажется, что построение усовершенствованной квантовой теории должно повлечь за собой и видоизменение теории тяготения.

§ 5. Действие гравитационных волн на механические системы

Для полноты рассмотрим также вопрос о том, в какой мере энергия гравитационных волн может передаваться механическим системам. Пусть по-прежнему имеется механическая система типа рассмотренной в § 4. Пусть она подвергается воздействию гравитационной волны, причем длина волны велика по сравнению с размерами системы. Для определения энергии, получаемой системой, будем исходить из уравнения энергии-импульса для материи

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}} \mathfrak{T}_{\rho\sigma} = 0.$$

Интегрируя это уравнение при постоянном x_4 по всей системе, получаем для $\mu = 4$ (закон сохранения энергии)

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int \mathfrak{T}_4^4 \, dV\right\} = -\frac{1}{2}\int dV \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_4} \mathfrak{T}_{\rho\sigma}.$$

Интеграл в левой части этого уравнения представляет собой энергию E всей материальной системы. Таким образом, слева стоит приращение этой энергии со временем. Переходя к дифференцированию по вещественному времени и оставляя в правой части члены до второго порядка малости включительно, получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\int dV \sum_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial t} T_{\rho\sigma}\right). \qquad (31)$$

Далее, можно разложить компоненты $\gamma_{\rho\sigma}$, описывающие гравитационное поле, на часть $(\gamma_{\rho\sigma})_w$, соответствующую падающей волне, и на остающуюся часть $(\gamma_{\rho\sigma})_v$, согласно равенству

$$\gamma_{\rho\sigma} = (\gamma_{\rho\sigma})_w + (\gamma_{\rho\sigma})_v. \qquad (32)$$

В соответствии с этим интеграл в правой части уравнения (31) распадается на сумму двух интегралов, из которых первый выражает приращение энергии за счет волны. Нас интересует только эта последняя величина; поэтому, чтобы не усложнять запись, мы интерпретируем (31) так, чтобы $\frac{dE}{dt}$ означала приращение энергии только за счет волны, а $\gamma_{\rho\sigma}$ совпадала бы с функцией, ранее обозначенной через $(\gamma_{\rho\sigma})_w$. Тогда $\gamma_{\rho\sigma}$ будет медленно меняющейся функцией пространственных координат, так что мы можем положить

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \frac{d\gamma_{\rho\sigma}}{dt} \cdot \int T_{\rho\sigma} dV. \tag{33}$$

Пусть действующая волна является волной, переносящей энергию, у которой отлична от нуля только компонента γ_{23} $(= \gamma'_{23})$ гравитационного поля. Тогда, в силу соотношения (22), имеем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial\gamma_{23}}{\partial t} \frac{d^2\mathfrak{J}_{23}}{dt^2}. \tag{34}$$

Таким образом, при заданной волне и заданном механическом процессе поглощенная из волны энергия может быть определена путем интегрирования.

§ 6. Ответ на возражение Леви-Чивиты

В ряде интересных исследований, опубликованных в последнее время, Леви-Чивита внес существенный вклад в выяснение проблем общей теории относительности. В одной из этих работ [5] он становится на отличную от нашей точку зрения в отношении законов сохранения и, исходя из этой своей концепции, оспаривает правомерность моих выводов, касающихся излучения энергии в виде гравитационных волн. Хотя мы за это время путем переписки нашли решение этого вопроса, удовлетворяющее нас обоих, в интересах дела полезно сделать несколько общих замечаний о законах сохранения.

Общепризнано, что, согласно основам общей теории относительности, существует справедливое при любом выборе системы отсчета четырехмерное уравнение вида

$$\sum_{\nu} \frac{\partial (\mathfrak{T}_\sigma^\nu + t_\sigma^\nu)}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4), \tag{35}$$

где $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ — компоненты энергии материи, а t_σ^ν — функции компонент $g_{\mu\nu}$ и их первых производных.

Однако имеются различия во мнениях по вопросу о том, следует ли рассматривать величины t_σ^ν как компоненты энергии гравитационного поля. Это различие во мнениях я считаю несущественным, не более чем терминологическим вопросом. Однако я утверждаю, что приведенное уравнение,

---

[5] Levi-Civita. Accademia dei Lincei, XXVI, Seduta des 1° aprile 1917.

которое никем не оспаривается, влечет за собой легкость обозрения, составляющую ценность законов сохранения. Поясним это на примере четвертого уравнения ($\sigma = 4$), которое я обычно называю уравнением энергии.

Пусть имеется пространственно ограниченная материальная система, вне которой плотность материи и напряженность электромагнитного поля равны нулю. Представим себе покоящуюся поверхность S, охватывающую всю материальную систему. Тогда, интегрируя четвертое уравнение по объему, заключенному внутри S, получаем

$$-\frac{d}{dx_4}\left\{\int (\mathfrak{T}_4^4 + \mathfrak{t}_4^4)\, dV\right\} = \int\limits_S \left(\mathfrak{t}_4^1 \cos(nx_1) + \mathfrak{t}_4^2 \cos(nx_2) + \mathfrak{t}_{43}^3 \cos(nx_3)\right) d\sigma. \quad (36)$$

Нет никаких оснований заставить понимать под $\mathfrak{t}_4^4$ плотность энергии гравитационного поля, а под ($\mathfrak{t}_4^1$, $\mathfrak{t}_4^2$, $\mathfrak{t}_4^3$) — компоненты плотности потока гравитационной энергии. Можно, однако, утверждать следующее: если объемный интеграл от $\mathfrak{t}_4^4$ мал по сравнению с объемным интегралом от плотности «материальной» энергии $\mathfrak{T}_4^4$, то правая часть наверняка представляет собой потерю энергии материальной системой. Только это и использовалось в настоящей и прежней моих работах о гравитационных волнах.

Леви-Чивита и несколько ранее, хотя и менее убедительно, Г. А. Лоренц предложили отличную от (35) формулировку законов сохранения. Он, а также другие авторы возражают против особой роли уравнений (35) и против изложенной выше интерпретации, поскольку величины $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ не образуют т е н з о р а. С последним можно согласиться, однако мне неясно, почему физический смысл должен приписываться только тем величинам, которые обладают трансформационными свойствами компонент тензора. Необходимо лишь, чтобы системы уравнений были справедливы при любом выборе системы отсчета, что выполняется в случае системы уравнений (35). Леви-Чивита предлагает другую формулировку закона сохранения энергии-импульса. Он записывает уравнения гравитационного поля в виде

$$T_{im} + A_{im} = 0, \quad (37)$$

где T_{im} — тензор энергии материи, а A_{im} — ковариантный тензор, зависящий от компонент $g_{\mu\nu}$ и от их первых двух производных по координатам. Величины A_{im} интерпретируются как компоненты тензора энергии гравитационного поля.

Конечно, нельзя выдвинуть л о г и ч е с к о г о возражения против такого рода наименования. Однако я нахожу, что из уравнения (37) нельзя вывести таких следствий, какие мы привыкли делать из законов сохранения. Это связано с тем, что, согласно (37), компоненты тензора *полной энергии* всюду обращаются в нуль. Уравнения (37), в противоположность уравнениям (35), не исключают, например, того, что материальная система может полностью раствориться, не оставив никакого следа. В самом деле, согласно уравнению (37) [но не уравнению (35)], ее полная энергия с самого начала равна нулю; сохранение этого значения энергии не требует дальнейшего существования системы в каком-либо виде.

Поступила 31 января 1918 г.

КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К РЕШЕНИЮ ДЕ СИТТЕРА УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ*

Недавно де Ситтер, которому мы обязаны глубокими исследованиями в области общей теории относительности, дал решение уравнений гравитационного поля[1], которое, по его мнению, могло бы описывать метрическую структуру мирового пространства. Однако нам кажется, что против допустимости такого решения имеется веское возражение, которое и будет изложено ниже.

Данное де Ситтером решение уравнений поля

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varkappa T \tag{1}$$

имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &T_{\mu\nu} = 0 \text{ (для всех значений индексов)}, \\ &ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \left[d\psi^2 + \sin^2\psi \, d\theta^2 \right] + \cos^2 \frac{r}{R} c^2 dt^2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где под r, ψ, θ, t следует понимать координаты ($x_1, \ldots, x_4$).

Примем как требование теории справедливость уравнений (1) для **всех** точек в **конечной** области пространства. Это может быть лишь в том случае, если компоненты $g_{\mu\nu}$, как и соответствующие контравариантные компоненты $g^{\mu\nu}$ (вместе с их первыми производными), непрерывны и дифференцируемы; в частности, нигде в конечной области не должен обращаться в нуль определитель $g = |g_{\mu\nu}|$. Это утверждение требует, однако, еще дальнейшего уточнения. Точка P называется «точкой, рас-

---

* *Kritisches zu einer von Herrn du Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 270—272.

[1] De Sitter. Proc. Acad. Amsterdam, XX, 30 Juni 1917; Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc., LXXVIII, N 1.

положенной в конечной области» тогда, когда она может быть соединена кривой с раз навсегда выбранной исходной точкой P_0 так, чтобы взятый вдоль этой кривой интеграл

$$\int_{P_0}^{P} ds$$

имел конечное значение. Далее, условие непрерывности компонент $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ не следует понимать как требование существования такого выбора координат, при котором это условие удовлетворялось бы во всем пространстве. Очевидно, надо потребовать лишь, чтобы для окрестности каждой точки существовал выбор координат, при котором для этой окрестности выполнялось бы условие непрерывности; это ограничение требования непрерывности естественно следует из общей ковариантности уравнений (1).

Для решения де Ситтера, согласно (2), имеем

$$g = -R^4 \sin^4 \frac{r}{R} \sin^2 \psi \cos^2 \frac{r}{R} .$$

Следовательно, g обращается в нуль прежде всего при $r = 0$ и при $\psi = 0$. Однако такое поведение означает, как легко можно доказать с помощью соответствующего изменения выбора системы координат, лишь кажущееся нарушение условия непрерывности. Но, кроме того, g обращается в нуль также и при $r = \frac{\pi}{2} R$, причем здесь уже речь идет, по-видимому, о разрыве непрерывности, который нельзя устранить никаким выбором координат. Точки поверхности $r = \frac{\pi}{2} R$, очевидно, следует считать точками, расположенными в конечной области, если в качестве точки P_0 выбрать точку $r = t = 0$, поскольку интеграл

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2} R} dr,$$

взятый при постоянных ψ, θ и t, конечен. Если не будет доказано противное, то следует допустить, что решение де Ситтера имеет истинную особенность на поверхности $r = \frac{\pi}{2} R$, расположенной в конечной области пространства, т. е., что оно ни при каком выборе координат не соответствует уравнениям поля (1).

Если бы решение де Ситтера было справедливо всюду, то тем самым было бы показано, что введение «λ-члена» не достигает намеченной мной цели. Дело в том, что, по моему мнению, общая теория относительности только в том случае представляет собой удовлетворительную схему, если на ее основе физические свойства пространства полностью определяются одной лишь материей. Таким образом, никакое $g_{\mu\nu}$-поле, т. е. никакой пространственно-временнóй континуум, не может существовать без порождающей его материи.

В действительности решение (2) де Ситтера удовлетворяет уравнениям (1) всюду, кроме поверхности $r = \frac{\pi}{2} R$. На этой поверхности, как и в непосредственной близости от гравитирующей материальной точки, компонента g_{44} гравитационного потенциала обращается в нуль. Таким образом, решение де Ситтера ни в коей мере не соответствует случаю мира без материи, а скорее соответствует миру, в котором вся материя сосредоточена на поверхности $r = \frac{\pi}{2} R$; это, вероятно, можно было бы доказать путем предельного перехода от объемного распределения материи к поверхностному.

Поступила 21 марта 1918 г.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Хотя общая теория относительности и нашла признание у большинства физиков-теоретиков и математиков, почти все коллеги возражают против моей формулировки закона сохранения импульса-энергии [1]. Однако я убежден в правильности моей формулировки и хочу в настоящей работе защитить со всей обстоятельностью свою точку зрения по этому вопросу [2].

§ 1. Формулировка закона и выдвинутые против нее возражения

Согласно закону сохранения энергии, для каждой изолированной системы существует соответствующим образом определенная, просуммированная по всем ее частям величина — энергия, которая не изменяет своего значения с течением времени, какой бы характер ни носили процессы, происходящие в системе. Таким образом, в своей первоначальной формулировке закон сохранения энергии, так же как и образованный из трех аналогичных уравнений сохранения закон сохранения импульса, являлся интегральным. Специальная теория относительности объединила четыре перечисленных закона сохранения в единый дифференциальный закон,

---

* *Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, T. 1, 448—459.

[1] См., например, Schrödinger E. Phys. Z., 1918, 19, 4; Bauer H. Phys. Z., 1918, 19, 163. Напротив, Г. Нордстрем разделяет мое понимание закона сохранения энергии; см. его недавно опубликованную статью [Amsterdamer Akademie-Ber., 1917, XXVI, 1093].

[2] Чтобы избежать повторения известного материала, мы будем основываться на результатах изложения основ теории в том виде, как это сделано в моей работе: A. Einstein. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 42, 1111. (Статья 42). Уравнения из упомянутой работы будут обозначаться здесь путем добавления «цит. соч.».

выражающий обращение в нуль дивергенции «тензора энергии». Этот дифференциальный закон эквивалентен интегральным законам, сформулированным в результате анализа всей совокупности опытных данных; только в этом и состоит его значение.

Разумным, с формальной точки зрения, перенесением этого закона на общую теорию относительности является уравнение

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0,$$

левая часть которого представляет собой дивергенцию в смысле абсолютного дифференциального исчисления. Величина $\frac{1}{\sqrt{-g}} \mathfrak{T}_\sigma^\nu$ является тензором, а именно: тензором энергии «материи». С физической точки зрения это уравнение не может рассматриваться как полноценный эквивалент законов сохранения импульса и энергии, поскольку ему не соответствуют интегральные соотношения, которые могли бы быть истолкованы как законы сохранения импульса и энергии. Например, в применении к планетной системе из этих уравнений никак нельзя заключить, что планеты не могут неограниченно удаляться от Солнца и что центр тяжести всей системы должен сохранять состояние покоя (или равномерного прямолинейного движения) относительно неподвижных звезд. Опыт вынуждает нас искать такой дифференциальный закон, который был бы эквивалентен *интегральным* законам сохранения импульса и энергии. Это приводит, как подробнее будет показано ниже, к доказанному нами уравнению (21) цит. соч.

$$\frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} = 0, \tag{1}$$

где $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ вычисляется из полной функции Гамильтона по формулам (19) и (20) цит. соч.

$$\mathfrak{U}_\sigma^\nu = \mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu = -\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g_\alpha^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right). \tag{2}$$

Эта формулировка встречает возражения коллег по той причине, что $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ и $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ не являются тензорами, тогда как, по их мнению, все величины, имеющие физический смысл, должны быть скалярами или компонентами тензоров. Далее, они подчеркивают [3], что в некоторых случаях путем соответствующего выбора системы координат можно добиться обращения в нуль всех $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ или задать им отличные от нуля значения. Поэтому почти все сомневаются в уравнении (1).

---

[3] См., например, H. Bauer. Phys. Z., 1918, 19, 163.

Для опровержения этого я хочу показать здесь, что с помощью уравнения (1) понятия энергии и импульса устанавливаются столь же четко, как и в классической механике. Энергия и импульс замкнутой системы полностью определяются независимо от выбора системы координат, если только задано состояние движения системы (рассматриваемой как целое) относительно системы координат; так, например, «энергия покоя» любой замкнутой системы не зависит от выбора системы координат. Данное ниже доказательство в существе своем основывается лишь на том, что уравнение (1) справедливо для произвольного выбора системы координат.

§ 2. В какой мере энергия и импульс независимы от выбора системы координат?

Выберем систему координат так, чтобы все линейные элементы (0, 0, 0, dx_4) были временно-подобны, а все линейные элементы (dx_1, dx_2, dx_3, 0) — пространственно-подобны; тогда четвертую координату мы можем в известном смысле назвать «временем».

Чтобы можно было говорить об энергии или импульсе системы, плотности энергии и импульса должны обращаться в нуль вне некоторой области B. Это будет только тогда, когда вне области B компоненты $g_{\mu\nu}$ постоянны, т. е., когда рассматриваемая система как бы погружена в «галилеевское пространство», и мы пользуемся «галилеевскими координатами» для описания окружения системы. Область B имеет бесконечную протяженность в направлении оси времени, т. е. она пересекает любую гиперплоскость $x_4 = \text{const}$. Ее сечение с некоторой гиперплоскостью $x_4 = \text{const}$ всегда ограничено со всех сторон. Внутри области B не существует «галилеевской системы координат»; выбор координат внутри B ограничен единственным условием, а именно: они должны непрерывно переходить в координаты вне B. Ниже мы рассмотрим несколько таких систем координат, которые вне B совпадают друг с другом.

Интегральные законы сохранения импульса и энергии получаются из уравнения (1) путем интегрирования последнего по x_1, x_2, x_3 по области B. Поскольку на границах этой области все $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ равны нулю, то

$$\frac{d}{dx_4}\left[\int \mathfrak{U}_\sigma^4 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3\right] = 0. \tag{3}$$

Эти четыре уравнения и выражают, по моему мнению, законы сохранения импульса ($\sigma = 1, 2, 3$) и энергии ($\sigma = 4$). Обозначим входящий в уравнение (3) интеграл через J_σ. Я утверждаю теперь, что величины J_σ не зависят от выбора координат для любой системы координат, совпадающей вне области B с одной и той же галилеевской системой.

Интегрируя (3) в пределах от $x_4 = t_1$ до $x_4 = t_2$, получаем сначала для системы координат K

$$(J_\sigma)_1 = (J_\sigma)_2. \tag{4}$$

Если ввести, кроме того, вторую (штрихованную) систему координат K', совпадающую вне области B с K, то мы точно так же получим для сечений $x'_4 = t'_1$ и $x'_4 = t'_2$

$$(J'_\sigma)_1 = (J'_\sigma)_2.$$

Введем теперь третью систему координат K'', подобную рассмотренным, которая, не нарушая непрерывности, совпадает в окрестности сечения $x_4 = t_1$ с системой K, а в окрестности сечения $x'_4 = t'_2$ — с системой K'. Интегрирование уравнения (3) между этими сечениями дает

$$(J_\sigma)_1 = (J'_\sigma)_2. \tag{5}$$

Из этих трех соотношений следует, что J_σ не зависит от выбора координат внутри области B. Таким образом, величины J_σ изменяются только в зависимости от выбора галилеевской системы координат вне области B. Следовательно, мы исчерпаем все возможности, если поступим так: прежде всего, мы установим систему координат, которая вне B выбирается галилеевской, а внутри B — произвольной, а затем будем пользоваться только такими системами координат, которые связаны с выбранной нами системой преобразованиями Лоренца. Относительно этой группы преобразований величины $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ имеют тензорный характер, и методами специальной теории относительности можно показать, что (J_σ) является 4-вектором. Следовательно, так же как в специальной теории относительности, можно положить

$$J_\sigma = E_0 \frac{dx_\sigma}{ds}, \tag{6}$$

где E_0 — «энергия покоя», $\frac{dx_\sigma}{ds}$ — скорость (4-вектор) системы (как целого). Величина E_0 равна компоненте J_4, если выбрать систему координат так, чтобы $J_1 = J_2 = J_3 = 0$.

Таким образом, несмотря на свободный выбор координат внутри B, энергия покоя или масса системы является точно определенной величиной, не зависящей от выбора системы координат. Это тем более замечательно, что вследствие нетензорного характера $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ нельзя дать инвариантной интерпретации компонентам плотности энергии.

Если представить себе, например, пространство внутри области B также пустым, то определенная таким образом система имеет равную нулю полную энергию, но с помощью выбора координат внутри B

нетрудно получить самые различные распределения энергии, которые, впрочем, все приводят к нулевому значению интеграла. Так, вопреки нашему привычному мышлению, мы приходим к тому, чтобы приписывать интегралу бо́льшую реальность, чем его дифференциалам.

§ 3. Интегральный закон для замкнутого мира

Чтобы вообще можно было говорить об изолированной системе, мы выше должны были принять, что метрический континуум при достаточном удалении от системы является галилеевским; это предположение в весьма хорошем приближении выполняется для областей с размерами порядка размеров планетной системы. Однако в опубликованной в прошлом году работе [4] мне удалось показать, что с точки зрения общей теории относительности понимание мира в целом как приближенно галилеевского (или эвклидовского) вызывает существенные сомнения. Дело в том, что в этом случае мир должен был бы быть по существу пустым: чем бо́льшие области мы стали бы рассматривать, тем менее могла бы отличаться от нуля средняя плотность находящейся в них весомой материи. Представляется вероятным, что мир в целом в пространственном отношении является квазисферическим (или квазиэллиптическим). Эта концепция требует добавления еще одного члена («λ-члена») в уравнения гравитационного поля. Согласно дополненным таким членом уравнениям, лишенная материи часть мира не может иметь галилеевского характера. Следовательно, тогда невозможно будет выбирать координаты так, как это требуется в § 2, и притом в тем большей степени, чем больше размеры рассматриваемой системы [5].

В этом случае конечного мира возникает интересный вопрос о том, справедливы ли законы сохранения для мира как целого, который с необходимостью должен рассматриваться как «изолированная система». При этом мы можем ограничиться пониманием мира как квазисферического, поскольку из последнего при добавлении соответствующего условия симметрии вытекает квазиэллиптический мир.

В квазисферическом мире также справедлив закон сохранения, выражаемый соотношениями (1) и (2). Однако не существует системы координат, которая была бы всюду регулярна. В строго сферическом мире квадрат инвариантного элемента в полярных координатах имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - R^2\,[d\vartheta_1^2 + \sin^2\vartheta_1\,d\vartheta_2^2 + \sin^2\vartheta_1\sin^2\vartheta_2\,d\vartheta_3^2]. \tag{7}$$

[4] A. Einstein. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, VI, 142. (Статья 44).

[5] Впрочем, для объемов, рассматриваемых в астрономии, изложенное в § 2 понимание должно быть достаточным, так что следующее ниже рассуждение представляется чисто умозрительным.

При этом переменные пробегают значения:

$$\begin{aligned} x_1 &= \vartheta_1 \quad &&\text{от} \quad 0 \quad \text{до} \quad \pi, \\ x_2 &= \vartheta_2 \quad &&\text{»} \quad 0 \quad \text{»} \quad \pi, \\ x_3 &= \vartheta_3 \quad &&\text{»} \quad 0 \quad \text{»} \quad 2\pi, \\ x_4 &= t \quad &&\text{»} \; -\infty \; \text{»} \; +\infty. \end{aligned} \tag{8}$$

На концах интервала изменений ϑ_1 и ϑ_2 система координат имеет особенности, поскольку в таких точках пересекается более четырех (бесконечное число) координатных линий, и обращается в нуль определитель $|g_{\mu\nu}|$. Аналогичный выбор координат будет возможен (при соответствующим образом измененном выражении для ds^2) также и в случае квазисферического мира; и здесь мы должны обратить внимание на сингулярности системы координат. Во всех точках вне сингулярностей координатной системы справедливы уравнения (1). Равным образом возможен переход к интегральным законам (3), если интеграл от

$$\frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^3}{\partial x_3}$$

обращается в нуль («граничное условие»). Это будет иметь место, например, в том случае, если

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{U}_1^1, \mathfrak{U}_2^1, \mathfrak{U}_3^1, \mathfrak{U}_4^1 \;\text{ при }\; \vartheta_1 = 0 \text{ и } \vartheta_1 = \pi, \\ &\mathfrak{U}_1^2, \mathfrak{U}_2^2, \mathfrak{U}_3^2, \mathfrak{U}_4^2 \;\text{ при }\; \vartheta_2 = 0 \text{ и } \vartheta_2 = \pi \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

обращаются в нуль [6]. В самом деле, в этом случае при интегрировании (1) по x_1, x_2, x_3 по всему замкнутому пространству все слагаемые левой части, кроме тех, которые происходят от члена $\frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^4}{\partial x_4}$, дают нулевой вклад.

Как и выше, здесь можно доказать, что величины J_σ имеют одно и то же значение для всех систем координат, получающихся из использованной вначале системы путем непрерывной деформации. Доказательство этого аналогично приведенному выше с той лишь разницей, что условие для выбора координат вне области B не имеет здесь аналога. Для замкнутого мира сферического типа величи́ны J_σ не зависят от конкретного выбора координат, если только соблюдается «граничное условие» [7].

---

[6] Подробнее об этом см. в § 4.

[7] Точнее говоря, рассуждение, проведенное в § 2, дает в этом случае следующий результат. Если K и K' — две системы координат, $x_4 = \text{const}$ и $x_4' = \text{const}$ — два соответствующих им пространственных сечения, J_σ и J_σ' — соответствую-

Тогда можно доказать, что «компоненты импульса» J_1, J_2, J_3 для такого замкнутого мира с необходимостью равны нулю. Сначала проведем доказательство для J_1 и J_2. Ниже доказывается, что путем непрерывного изменения можно перейти от системы координат K к новой системе K', связанной с K преобразованием

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1' &= \pi - \vartheta_1, \\ \vartheta_2' &= \pi - \vartheta_2, \\ \vartheta_3' &= \vartheta_3, \\ t' &= t. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Это преобразование является линейным. Поскольку величины $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ для линейных преобразований имеют тензорный характер, из равенств (10) следует, что всюду справедливы соотношения

$$\mathfrak{U}_1^{4'} = -\mathfrak{U}_1^4,$$
$$\mathfrak{U}_2^{4'} = -\mathfrak{U}_2^4.$$

Отсюда следует также, что

$$\left.\begin{aligned} J_1' &= -J_1, \\ J_2' &= -J_2. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

С другой стороны, поскольку система K может быть переведена в систему K' путем непрерывного изменения, на основании нашей общей теоремы инвариантности для J_σ справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} J_1' &= J_1, \\ J_2' &= J_2. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Из равенств (11) и (12) следует, что J_1 и J_2 обращаются в нуль.

Аналогично можно доказать обращение в нуль J_1 и J_3, пользуясь тем, что непрерывным изменением координат может быть введена система K', связанная с K преобразованиями

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1' &= \pi - \vartheta_1, \\ \vartheta_2' &= \vartheta_2, \\ \vartheta_3' &= 2\pi - \vartheta_3, \\ t' &= t. \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

щие значения J_σ, то величины J_σ и J_σ' всегда равны между собой, если существует непрерывный переход между K и K', обеспечивающий соблюдение «граничного условия».

Теперь мы должны только привести доказательство того, что преобразования (10) и (10а) могут быть получены путем непрерывного преобразования системы координат. При этом мы можем ограничиться рассмотрением трехмерной сферы, оставляя в стороне координату t.

Пусть в четырехмерном эвклидовом пространстве (с координатами u_ν) рассматриваемая сфера удовлетворяет уравнению

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^3 + u_4^2 = R^2.$$

Эти декартовы координаты в четырехмерном эвклидовом пространстве связаны со сферическими координатами формулами

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R\cos\vartheta_1, \\ u_2 &= R\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2, \\ u_3 &= R\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3, \\ u_4 &= R\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

При повороте системы координат u_ν вокруг центра сферы вместе с ней поворачивается также система координат ϑ_ν и соотношения (13) остаются справедливыми также для обеих систем в повернутом положении.

В эвклидовом пространстве всегда могут быть произведены такие повороты декартовой системы координат, при которых из всех осей поворачиваются только две, а остальные остаются неподвижными. Среди этих поворотов выделены повороты на угол π, которым отвечает преобразование типа

$$\begin{aligned} u_1' &= -u_1. \\ u_2' &= -u_2, \\ u_3' &= -u_3, \\ u_4' &= -u_4. \end{aligned} \tag{14}$$

Таким же является и преобразование

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= -u_1, \\ u_2' &= u_2, \\ u_3' &= u_3, \\ u_4' &= -u_4. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Соотношения (14) или (15) с учетом формул (13) и соответствующих формул для штрихованной системы непосредственно дают преобразования

(10) или (10а), которые тем самым могут быть получены путем непрерывных преобразований системы координат ϑ_ν.

Тем самым наше утверждение доказано (кроме подтверждения выполнимости «граничного условия»). Для замкнутого мира как целого импульс равен нулю, а значение полной энергии не зависит от времени и от выбора системы координат.

§ 4. Энергия сферического мира

Вычислим значения величин $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ для сферического мира с равномерно распределенной несвязанной материей главным образом для проверки того, выполняется ли, по крайней мере в этом простейшем случае, условие (9), с которым связаны результаты предыдущего параграфа. Мы должны положить

$$\mathfrak{U}_\sigma^\nu = \mathfrak{T}_\sigma^\nu + (\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_1 + (\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_2, \tag{16}$$

где величины $(\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_1$ соответствуют λ-члену, а величины $(\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_2$ являются функциями компонент $g_\sigma^{\mu\nu}$. Формула

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = \sqrt{-g}g_{\sigma\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\rho_0$$

дает в нашем случае для $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ следующие значения компонент:

$$\mathfrak{T}_0^\nu = \left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0\sqrt{-g} \end{matrix}\right]. \tag{17}$$

Далее, из уравнений гравитационного поля с учетом λ-члена нетрудно получить значения компонент $(\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_1$:

$$(\varkappa(\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_1 =) \quad \begin{matrix} \lambda\sqrt{-g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\sqrt{-g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\sqrt{-g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{-g} \end{matrix}\;. \tag{18}$$

Значительно более трудным является вычисление компонент $(\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_2$. В основу его лучше всего положить уравнение (20) цит. соч. Однако оказывается практически удобным ввести вместо $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_{\sigma}$ величины $g^{\mu\nu}\sqrt{-g}=\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})=\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\sigma}$, как это иногда делал Г. А. Лоренц. Тогда будут справедливы соотношения

$$\mathfrak{t}^{\alpha}_{\sigma}=\frac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^{*}\delta^{\alpha}_{\sigma}-\frac{\partial\mathfrak{G}^{*}}{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha}}\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\sigma}\right), \tag{19}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{G}^{*}}{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha}}=\frac{1}{2\varkappa}\left(\begin{Bmatrix}\mu & \beta\\ & \beta\end{Bmatrix}\delta^{\alpha}_{\nu}+\begin{Bmatrix}\nu & \beta\\ & \beta\end{Bmatrix}\delta^{\alpha}_{\mu}\right)-\frac{1}{\varkappa}\begin{Bmatrix}\mu & \nu\\ & \alpha\end{Bmatrix}, \tag{19a}$$

последнее из которых легко вывести из формул Г. Вейля в § 28 его книги «Пространство, время, материя» (в ближайшее время выходит в свет) [8]. Из (18), (18a) и (7) следуют выражения для $(\mathfrak{t}^{\nu}_{\sigma})_2$:

$$\frac{\varkappa}{R}(\mathfrak{t}^{\nu}_{\sigma})_2=\begin{pmatrix}\cos^2\vartheta_1\sin\vartheta_2 & 0 & 0 & 0\\ \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 & -\cos^2\vartheta_1\sin\vartheta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\cos^2\vartheta_1\sin\vartheta_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\cos^2\vartheta_1\sin\vartheta_2\end{pmatrix}; \tag{20}$$

здесь каждый столбец отвечает некоторому значению ν, а каждая строка — некоторому значению σ. Из (17), (18) и (20) с учетом (16) получаются компоненты энергии $\mathfrak{U}^{\nu}_{\sigma}$.

Условия (9) выполняются для всех компонент, кроме компоненты $\mathfrak{U}^{1}_{1}$; это исключение связано с тем, что компонента $(\mathfrak{t}^{1}_{1})_2$ при $\vartheta_1=0$ и $\vartheta_1=\pi$ не равна нулю. Тем не менее интеграл

$$\int\limits_{\vartheta_1=0}^{\vartheta_1=\pi}\frac{\partial\mathfrak{U}^{1}_{1}}{\partial\vartheta_1}\,d\vartheta_1$$

обращается в нуль, так как величина $\cos^2\vartheta_1\sin\vartheta_2$ имеет одно и то же значение при $\vartheta_1=0$ и $\vartheta_1=\pi$. Таким образом, в рассматриваемом нами частном случае интегралы

$$\int\left(\frac{\partial\mathfrak{U}^{1}_{\sigma}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathfrak{U}^{2}_{\sigma}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mathfrak{U}^{3}_{\sigma}}{\partial x_3}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3$$

действительно обращаются в нуль, как мы и предположили в предыдущем параграфе. Весьма вероятно, хотя это и потребовало бы еще отдельного доказательства, что все сказанное справедливо для любого замкнутого

[8] H. Weyl. Raum, Zeit, Materie. 5. Aufl. Berlin, Springer Verlag, 1923.— *Прим. ред.*

мира сферического типа при использовании полярных координат, подобных применявшимся здесь.

Полная энергия J_4 рассмотренного нами статического мира равна

$$J_4 = \int \left(\rho_0 \sqrt{-g} + \frac{\lambda}{\varkappa} \sqrt{-g} - \frac{R}{\varkappa} \cos^2 \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \right) d\vartheta_1 \, d\vartheta_2 \, d\vartheta_3.$$

При этом

$$\sqrt{-g} = R^3 \sin^2 \vartheta_1 \sin \vartheta_2$$

и [9]

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{\rho_0}{2} = \frac{1}{R^2 \varkappa}.$$

Если $V = 2\pi^2 R^3$ — объем сферического мира, то

$$J_4 = \rho_0 V. \tag{21}$$

Следовательно, в этом случае тяготение не дает вклада в полную энергию.

§ 5. Тяжелая масса замкнутой системы

Обратимся еще раз к рассмотрению того случая, когда система погружена в «галилеевское пространство», т. е. вновь пренебрежем «λ-членом» в уравнениях поля. В § 3 мы доказали, что интеграл J_σ свободно «парящей» в галилеевском пространстве системы преобразуется как 4-вектор. Это означает, что величина, которую мы интерпретировали как энергию, играет также роль и н е р т н о й массы, в соответствии со специальной теорией относительности.

Теперь покажем также, что и т я ж е л а я масса всей рассмотренной системы совпадает с той величиной, которую мы считаем энергией системы. Пусть в окрестности начала координат находится произвольная физическая система, покоящаяся как целое относительно системы координат. Эта система создает гравитационное поле, которое на пространственной бесконечности может быть заменено с любой степенью точности гравитационным полем материальной точки. Таким образом, на бесконечности имеем

$$g_{44} = 1 - \frac{\varkappa}{4\pi} \frac{M}{r}, \tag{22}$$

где M — постоянная, которую следует назвать тяжелой массой системы; эту постоянную и требуется определить

---

[9] См. формулу (14) работы, цитированной в начале § 3.

Во всем пространстве строго выполняется уравнение поля

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g^{\mu 4}_\alpha} g^{\mu 4}\right) = -\mathfrak{U}_4^4. \tag{23}$$

Обозначая величину в скобках в левой части через $\mathfrak{F}_\alpha$ и интегрируя по объему внутри поверхности S, расположенной в пространственной бесконечности и охватывающей систему, получаем

$$\int (\mathfrak{F}_1 \cos nx_1 + \mathfrak{F}_2 \cos nx_2 + \mathfrak{F}_3 \cos nx_3)\, dS + \frac{d}{dx_4}\int \mathfrak{F}_4\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \\ = -\int \mathfrak{U}_4^4\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{24}$$

Поскольку как первый интеграл в левой части, так и правая часть, выражающая взятую с обратным знаком энергию всей системы, не изменяются со временем, то же должно выполняться и для второго члена левой части; следовательно, он должен быть равен нулю, так как интеграл не может все время расти или все время уменьшаться. Вычисление поверхностного интеграла в левой части не представляет трудности, так как в пространственной бесконечности можно ограничиться первым приближением; оно дает, с учетом формулы (22), значение $-M$. Таким образом,

$$M = \int \mathfrak{U}_4^4\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = J_4 = E_0. \tag{25}$$

Этот результат подкрепляет наше понимание закона сохранения энергии, поскольку данное выше определение M не зависело от определения энергии. Тяжелая масса системы равна величине, которую мы раньше определили как энергию системы.

Дополнение при корректуре. Дальнейшие размышления по рассмотренному вопросу привели меня к тому мнению, что для формулировки закона сохранения импульса-энергии квазисферического (но не квазиэллиптического) мира следует предпочесть координаты, получающиеся посредством стереографического проектирования сферы на (трехмерную) гиперплоскость. В случае равномерного распределения материи имеем

$$ds^2 = dx_4^2 - \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\left[1 + \frac{1}{4R^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right]^2}.$$

Кажущаяся сингулярность, связанная с выбором координат, при этом удаляется в пространственную бесконечность [10]. Эта формулировка

[10] Случай квазисферического мира, т. е. случай неравномерно распределенной, некоторым образом движущейся материи, допускает аналогичный выбор коор-

представляется более естественной вследствие симметрии относительно трех пространственных координат. Доказательство равенства нулю полного импульса еще проще, чем приведенное в тексте, так как непосредственно видно, что пространственные преобразования

$$\begin{array}{lcl} x_1' = -x_1 & & x_1' = x_1 \\ x_2' = -x_2 & \text{и} & x_2' = -x_2 \\ x_3' = x_3 & & x_3' = -x_3 \end{array}$$

можно получить непрерывным изменением координат (поворотом системы координат), откуда, как и в основном тексте, следуют равенства:

$$J_1' = -J_1,$$

$$J_2' = -J_2,$$

$$J_3' = -J_3.$$

Путем вычисления величин $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ я убедился, что интеграл по поверхности «бесконечно большой» сферы [11], охватывающей начало координат, который появляется при интегрировании по объему первых трех членов выражения

$$\frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^3}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^4}{\partial x_4},$$

равен нулю (по крайней мере, в частном случае равномерно распределенной материи). При этом выборе координат гравитационное поле также не дает вклада в энергию мира.

Поступила 30 мая 1918 г.

динат в той мере, в какой соответствующая выбору координат кажущаяся сингулярность поля смещается в $x_1 = x_2 = x_3 = \pm\infty$ и имеет такой же характер, как и в случае равномерно распределенной покоящейся материи.

[11] Т. е. по поверхности $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ с бесконечно большим R.

52

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Согласно телеграмме, посланной проф. Лоренцом автору этих строк, английская экспедиция под руководством Эддингтона, направленная для наблюдения за солнечным затмением 29 мая, обнаружила отклонение света на краю солнечного диска, требуемое общей теорией относительности. По предварительной оценке, наблюденное значение лежит между 0,9 и 1,8 дуговой секунды. Теория требует 1,7 секунды.

Берлин, 9 октября 1919 г.

Телеграмма Г. А. Лоренца была послана Эйнштейну 22 сентября 1919 г. В ней было сказано: «Эддингтон обнаружил смещение звезд у края Солнца, предварительные измерения между девятью десятыми секунды и вдвое бóльшим значением, привет». В письме к матери Эйнштейн писал 27 сентября 1919 г.: «Сегодня хорошие новости! Лоренц телеграфировал мне, что британская экспедиция действительно доказала смещение света вблизи Солнца».

Экспедиция под руководством А. Эддингтона наблюдала затмение Солнца 29 мая 1919 г. Результаты измерений были доложены на совместном заседании Королевского общества и Королевского астрономического общества 6 ноября 1919 г.

---

* *Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie.* Naturwiss., 1919, VII, 776.

ИГРАЮТ ЛИ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ СУЩЕСТВЕННУЮ РОЛЬ В ПОСТРОЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ МАТЕРИИ? *

Ни ньютонова, ни релятивистская теория тяготения до сих пор не продвинули вперед вопроса о структуре материи. В противоположность этому ниже будут указаны соображения, позволяющие думать, что элементарные электрические образования, представляющие собой кирпичи атомов, удерживаются вместе благодаря силам тяготения.

§ 1. Недостатки современных представлений

Теоретики много потрудились над тем, чтобы придумать теорию, которая объяснила бы равновесие электричества, образующего электрон. Особенно глубокие исследования посвятил этому вопросу Ми. Его теория, не раз встречавшая одобрение специалистов, основывается в существенных чертах на том, что в тензор энергии наряду с членами, соответствующими теории электромагнитного поля Максвелла—Лоренца, вводятся еще добавочные слагаемые. Последние зависят от компонент электродинамического потенциала и характеризуются тем, что они не особенно заметны в пустоте, но внутри электрических элементарных частиц обусловливают наличие сил, уравновешивающих электрические силы отталкивания. Как ни стройна с формальной точки зрения эта теория, развитая Ми, Гильбертом и Вейлем, все же физические результаты не могут до сих пор нас удовлетворить. С одной стороны, удручает разнообразие возможностей,

---

* *Spielen die Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle*? Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1919, T. 1, 349—356. (Реферат практически идентичного доклада под названием «Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie vom Standpunkte des kosmologischen Problems und des Problems der Konstitution der Materie» напечатан во втором томе того же журнала за 1919 г., стр. 463. Русский перевод опубликован в сб. «Принцип относительности». — *Прим. ред.*).

а с другой стороны, до сих пор не удалось представить указанные добавочные члены в таком простом виде, чтобы решение могло казаться разумным.

Общая теория относительности до сих пор ничего не изменила в этом вопросе.

Если с самого начала отказаться от добавочного космологического члена, то уравнения поля будут иметь следующий вид:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=-\varkappa T_{ik}, \tag{1}$$

где R_{ik} — риманов тензор кривизны, свернутый один раз, R — скаляр «кривизны, образованный повторной сверткой, T_{ik} — тензор энергии материи».

При этом развитие теории привело к допущению, что T_{ik} *не зависят* от производных $g_{\mu\nu}$. Ибо эти величины являются компонентами энергии в духе специальной теории относительности, в которой не рассматриваются переменные по величине $g_{\mu\nu}$. Второй член в левой части уравнения выбран так, чтобы дивергенция левой части (1) тождественно обращалась в нуль, вследствие чего из (1) посредством образования дивергенции получается уравнение

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^\sigma}{\partial x_\sigma}+\frac{1}{2}g_i^{\sigma\tau}\mathfrak{T}_{\sigma\tau}=0, \tag{2}$$

которое в предельном случае специальной теории относительности переходит в уравнение сохранения импульса и энергии

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0.$$

В этом и заключается физическое обоснование второго члена левой части уравнения (1). Нельзя априори утверждать, что указанный переход к пределу постоянных $g_{\mu\nu}$ может быть сделан разумно. В самом деле, если бы гравитационные поля играли существенную роль в структуре материальных частиц, то для них переход к постоянным $g_{\mu\nu}$ потерял бы всякий смысл, ибо при постоянных $g_{\mu\nu}$ не было бы материальных частиц. Поэтому, если мы желаем принять во внимание возможность участия гравитации в формировании полей, из которых образованы корпускулы, мы не можем считать уравнение (1) безусловно правильным.

Подставив в уравнение (1) компоненты $\varphi_{\mu\nu}$ энергии электромагнитного поля Максвелла — Лоренца

$$T_{ik}=\frac{1}{4}g_{ik}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta}-\varphi_{i\alpha}\varphi_{k\beta}g^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

получим из (2) посредством образования дивергенции после некоторого вычисления [2]

$$\varphi_{i\alpha}\mathfrak{J}^{\alpha} = 0, \tag{4}$$

где для краткости обозначено

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\varphi_{\sigma\tau}g^{\sigma\alpha}g^{\tau\beta}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = \mathfrak{J}^{\alpha}. \tag{5}$$

При этом использована вторая система уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_{\rho}} + \frac{\partial \varphi_{\nu\rho}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial \varphi_{\rho\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \tag{6}$$

Из соотношения (4) видно, что плотность тока ($\mathfrak{J}^{\alpha}$) всюду должна равняться нулю. Поэтому, как уже давно известно, нельзя на основании уравнения (1), ограничиваясь компонентами энергии электромагнитного поля в теории Максвелла — Лоренца, построить теорию электрона. Следовательно, если придерживаться уравнения (1), то придется стать на путь теории Ми [3].

Не только проблема материи, но и космологическая проблема заставляют сомневаться в уравнении (1). Как показано мной в одной из прежних работ, общая теория относительности приводит к выводу, что мир пространственно замкнут. Но это представление привело к обобщению уравнения (1), причем пришлось ввести новую универсальную константу λ, которая находится в определенном соотношении с общей массой мира (или с равновесной плотностью материи). В этом заключается особенно существенный дефект, нарушающий стройность теории.

§ 2. Уравнения поля, не содержащие скалярных величин

Указанные трудности устраняются тем, что вместо уравнения (1) вводятся следующие уравнения поля

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik}R = -\varkappa T_{ik}, \tag{1a}$$

где T_{ik} означает тензор энергии электромагнитного поля, выраженный формулой (3).

---

[2] См., например, A. Einstein. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, T. 1, 184. (Статья 37).

[3] См. D. Hilbert. Göttinger Nachr., 20 Nov. 1915.

Формальное обоснование множителя $\left(-\frac{1}{4}\right)$ во втором члене этого равенства заключается в том, что благодаря ему след левой части

$$g^{ik}\left(R_{ik}-\frac{1}{4}g_{ik}R\right)$$

тождественно обращается в нуль, как и след правой части $g^{ik}T_{ik}$, согласно формуле (3).

Если вместо уравнения (1а) считать основным уравнение (1), то мы получили бы для $g_{\mu\nu}$ условие $R=0$, которое должно было бы всюду выполняться, независимо от электрического поля. Ясно, что из системы уравнений (1), (3) вытекает система уравнений (1а), (3), но не наоборот.

В первый момент можно усомниться в том, определяют ли в достаточной мере уравнения (1а) и (6) все поле в целом. В общей теории относительности для определения n зависимых переменных требуется $n-4$ независимых друг от друга дифференциальных уравнений, так как в решении их должны стоять четыре совершенно произвольные функции всех координат вследствие свободного выбора последних. Следовательно, для определения 16 зависимых переменных $g_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ требуется 12 независимых друг от друга уравнений. Действительно, девять из уравнений (1а) и три из уравнений (6) независимы друг от друга.

Если образовать дивергенцию уравнений (1а) и принять во внимание, что дивергенция от $R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R$ равна нулю, то получим

$$\varphi_{\sigma\alpha}J^{\alpha}+\frac{1}{4\varkappa}\frac{\partial R}{\partial x_{\sigma}}=0. \tag{4a}$$

Отсюда сразу видно, что в четырехмерных областях, в которых плотность электрического заряда равна нулю, скалярная кривизна R является величиной постоянной. Если допустить, что все эти части пространства связаны друг с другом и что, следовательно, плотность электрического заряда отлична от нуля только на отдельных мировых линиях, то мы придем к выводу, что скалярная кривизна вне этих мировых линий всюду имеет постоянное значение R_0. Но формула (4а) позволяет, кроме того, сделать еще одно важное заключение о свойствах R внутри области, в которой плотность электрического заряда не равна нулю. Если, согласно принятым воззрениям, рассматривать электрический ток как плотность движущихся масс и положить

$$J^{\sigma}=\frac{\mathfrak{J}^{\sigma}}{\sqrt{-g}}=\rho\frac{dx_{\sigma}}{ds}, \tag{7}$$

то, производя внутреннее умножение (4а) на J^{σ}, получаем на основании антисимметричности $\varphi_{\mu\nu}$ соотношение

$$\frac{\partial R}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}=0. \tag{8}$$

Следовательно, вдоль каждой мировой линии движения электрического заряда скалярная кривизна постоянна. Уравнение (4а) может быть наглядно интерпретировано следующим образом: скалярная кривизна R играет роль отрицательного давления, которое вне электрических корпускул имеет постоянное значение R_0. Внутри каждой корпускулы существует отрицательное давление (положительное $R - R_0$), градиент которого уравновешивает электродинамическую силу. Минимум давления или, соответственно, максимум скалярной кривизны внутри корпускулы не изменяется с течением времени.

Запишем теперь уравнения поля (1а) в следующем виде:

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\frac{1}{4}g_{ik}R_0=-\varkappa\left[T_{ik}+\frac{1}{4\varkappa}g_{ik}(R-R_0)\right]. \tag{9}$$

Далее, преобразуем прежние уравнения поля, включающие космологический член

$$R_{ik}-\lambda g_{ik}=-\varkappa\left(T_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}T\right).$$

Вычитая скалярное уравнение, умноженное на $^1/_2$, получаем сначала

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\lambda g_{ik}=-\varkappa T_{ik}.$$

Правая часть этого уравнения обращается в нуль в тех областях, в которых имеются только электрические и гравитационные поля. Образуя скаляр, получим для таких областей

$$-R+4\lambda=0.$$

В этих областях скалярная кривизна постоянна; поэтому λ можно заменить на $\frac{R_0}{4}$. Прежнее уравнение поля (1) мы можем написать в следующем виде:

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R_0\right)+\frac{1}{4}g_{ik}R_0=-\varkappa T_{ik}. \tag{10}$$

Из сравнения уравнений (9) и (10) видно, что новые уравнения поля отличаются от прежних только тем, что в качестве тензора «тяготеющей массы» стоит

$$T_{ik}+\frac{1}{4\varkappa}g_{ik}(R-R_0)$$

вместо T_{ik}, причем первое выражение зависит от скалярной кривизны.

Новая формулировка имеет то большое преимущество перед прежней, что величина λ по отношению к основным уравнениям теории представляет собой постоянную интегрирования и более не является некоторой универсальной постоянной, связанной с фундаментальными законами.

§ 3. К космологической проблеме

Последний результат заставляет уже предполагать, что на основе нашей новой формулировки можно рассматривать мир как пространственно замкнутый, не прибегая к дополнительной гипотезе. Как в предшествующей работе, так и теперь мы снова покажем, что при равномерном распределении материи сферический мир совместим с уравнениями.

Положим сначала

$$ds^2 = -\sum \gamma_{ik} dx_i\, dx_k + dx_4^2 \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Если P_{ik} и P представляют собой соответственно тензор кривизны второго ранга и скалярную кривизну трехмерного пространства, то

$$R_{ik} = P_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$R_{i4} = R_{4i} = R_{44} = 0,$$

$$R = -P,$$

$$-g = \gamma.$$

Таким образом, для нашего случая получается

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = P_{ik} - \frac{1}{2} \gamma_{ik} P \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R = \frac{1}{2} P.$$

Последующие рассуждения мы проведем двумя разными способами. Сначала мы будем основываться на уравнении (1а). В нем T_{ik} означает тензор энергии электромагнитного поля, которое вызывается электрически заряженными частицами, образующими материю. Для этого поля справедливо соотношение

$$\mathfrak{T}_1^1 + \mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{T}_3^3 + \mathfrak{T}_4^4 = 0.$$

Хотя отдельные компоненты $\mathfrak{T}_i^k$ сильно меняются в пространстве, но и для нашей задачи их вполне можно заменить средними значениями.

Поэтому мы должны выбрать

$$\mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{T}_2^2 = \mathfrak{T}_3^3 = -\frac{1}{3}\mathfrak{T}_4^4 = \text{const}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{T}_i^k = 0 \qquad (\text{для } i \neq k).$$

Следовательно,

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}\gamma_{ik}, \qquad T_{44} = \frac{\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}.$$

Принимая во внимание сказанное выше, вместо (1a) получаем

$$P_{ik} - \frac{1}{4}\gamma_{ik}P = -\frac{1}{3}\gamma_{ik}\frac{\varkappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{4}P = -\frac{\varkappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}. \tag{14}$$

Скалярное уравнение (13) совпадает с (14). Тот факт, что сферический мир не противоречит нашим основным уравнениям, основывается на этом результате. В самом деле, из (13) и (14) следует

$$P_{ik} + \frac{4}{3}\frac{\varkappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}\gamma_{ik} = 0, \tag{15}$$

а эта система, как известно [4], имеет своим решением (трехмерный) сферический мир.

Но мы можем также построить наше рассуждение и на уравнениях (9). В правой части (9) стоят те члены, которые при феноменологическом способе рассуждения должны быть заменены тензором энергии материи; следовательно, они должны быть заменены тензором энергии материи, т. е. на

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho, \end{matrix}$$

где ρ — средняя плотность материи, находящейся, по предположению, в покое.

---

[4] См. H. Weyl. Raum, Zeit, Materie, § 33.

Таким путем получаются уравнения

$$P_{ik} - \frac{1}{2}\gamma_{ik}P = \frac{1}{4}\gamma_{ik}R_0 = 0, \tag{16}$$

$$\frac{1}{2}P + \frac{1}{4}R_0 = -\varkappa\rho. \tag{17}$$

Из скалярного уравнения (16) и из (17) получается

$$R_0 = -\frac{2}{3}P = 2\varkappa\rho. \tag{18}$$

Поэтому (16) можно переписать в виде

$$P_{ik} = \varkappa\rho\gamma_{ik} = 0. \tag{19}$$

Это уравнение совпадает с (15), отличаясь от последнего только коэффициентом. Приравнивая их друг другу, получаем

$$\mathfrak{I}_4^4 = \frac{3}{4}\rho\sqrt{\gamma}. \tag{20}$$

Это равенство означает, что три четверти энергии материи приходится на электромагнитное поле и одна четверть — на гравитационное поле.

§ 4. Заключительные замечания

Изложенные выше рассуждения показывают, что теоретически можно построить материю исключительно из гравитационного и электромагнитного полей без введения гипотетических дополнительных членов в духе теории Ми. Эта возможность представляется особенно содержательной потому, что она освобождает нас от необходимости введения особой постоянной λ для решения космологической проблемы. Но, с другой стороны, имеется своеобразная трудность. Если применить уравнение (1) к случаю статического сферически симметричного поля, мы получаем одним уравнением меньше, чем нужно для определения $g_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, вследствие чего оказывается, что *всякое распределение* электричества, *совместимое со сферической симметрией*, может оставаться в равновесии. Таким образом, в настоящий момент проблему построения элементарных частиц нельзя решить на основе указанных уравнений поля.

ЗАМЕЧАНИЯ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЯХ ДЛИНЫ ЛУННОГО МЕСЯЦА, ДО СИХ ПОР КАЗАВШИХСЯ НЕОБЪЯСНИМЫМИ МЕХАНИКОЙ НЬЮТОНА*

Как известно, наблюдаются небольшие систематические изменения длины лунного месяца, достоверных причин которых пока не найдено. Из этих изменений можно сначала выделить эллипсоидальный периодический член с периодом 273 года. Остающиеся изменения, по-видимому, также имеют периодический характер, причем период близок к 20 годам и амплитуда по порядку величины составляет около одной дуговой секунды. Эти последние изменения и будут рассматриваться ниже.

К. Ф. Боттлингер в своей работе [1], удостоенной премии Мюнхенского университета, пытался объяснить эти изменения, выдвинув сразу после важного космологического исследования Зеелигера [2] гипотезу о том, что силовые линии гравитационного поля, проходя через весомые массы, поглощаются.

Однако нам кажется, что эти изменения можно объяснить очень просто, не прибегая к новым гипотезам. По-нашему мнению, дело заключается здесь не в периодических изменениях в движении Луны, но в колебаниях вращательного движения Земли, задающего нам масштаб времени.

Именно, прилив, создаваемый Луной, увеличивает момент инерции Земли относительно земной оси на величину, которая зависит от угла, образуе-

---

* *Bemerkungen über periodische Schwankungen der Mondlänge, welche bisher nach der Newtonschen Mechanik nicht erklärbar schienen.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1919, 433—436.

[1] C. F. B o t t l i n g e r. Die Gravitationstheorie und die Bewegung des Mondes. Freiburg i. Br., 1912. C. Troemers Universitätsbuchhandlung.

[2] S e e l i g e r. Über die Anwendung der Naturgesetze auf das Universum. Ber. Bayer. Akademie, 1909, 9. Эту работу следовало бы цитировать в моей статье «Вопросы космологии и общая теория относительности» (Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1, 1917, 142) (статья 44); то, что изложено там в § 1, составляет идею Зеелигера, работа которого тогда, к сожалению, была мне неизвестна.

мого линией Земля — Луна с экваториальной плоскостью Земли. В соответствии с этим момент инерции Земли, а вместе с ним и скорость вращения проходят ежемесячно через два максимума и два минимума. Если бы наклон плоскости орбиты Луны к экватору Земли был постоянным, то усредненная за месяц скорость вращения Земли также была бы постоянной. Однако этот угол периодически меняется вследствие прецессионного движения лунной орбиты (относительно плоскости эклиптики), обусловленного притяжением Солнца, причем период составляет около 18,9 лет (время одного обращения лунного узла). Поэтому средняя скорость вращения Земли периодически изменяется. Следовательно, предполагая, как это делается в астрономии, что вращение Земли является в точности равномерным, мы получаем кажущееся периодическое изменение длины лунного месяца с периодом 18,9 лет.

Теперь вычислим приближенно этот эффект, только что объясненный качественно. Будем рассматривать приливную волну как деформацию водной оболочки Земли, описываемую эллипсоидом вращения с большой осью, проходящей через Луну. Тогда для момента инерции Земли относительно ее оси вращения получим простым вычислением следующее выражение

$$J = J_0\left(1 + \frac{1}{3}\frac{h}{\rho R_0} - \frac{h}{\rho R_0}\sin^2\varphi\right). \tag{1}$$

Здесь J_0 — момент инерции в отсутствие приливного действия, h — разница уровней между приливом и отливом, R_0 — радиус Земли, ρ — плотность Земли (предполагаемая постоянной), φ — угол между линией Земля — Луна и плоскостью экватора. Поскольку мы интересуемся только зависимостью от угла φ, эту формулу можно заменить на следующую:

$$J = J_0\left(1 - \frac{h}{\rho R_0}\sin^2\varphi\right). \tag{2}$$

Обозначая скорость вращения Земли через ω, а ту же скорость при $\varphi = 0$ через ω_0 и используя закон сохранения момента импульса, запишем

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{h}{\rho R_0}\sin^2\varphi\right). \tag{3}$$

Для среднего за месяц значения скорости вращения получим

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{h}{2\rho R_0}\sin^2 i\right), \tag{4}$$

где i означает наклон лунной орбиты к земному экватору. В сферическом треугольнике, образованном полюсом эклиптики, северным полюсом и полюсом лунной орбиты, стороны равны: углу i между лунной орбитой и экватором Земли, наклону β лунной орбиты к эклиптике (около 5°), наклону α экватора к эклиптике (около 20°).

В этом треугольнике угол, противолежащий стороне i, равен уменьшенной на 180° долготе l восходящего узла лунной орбиты. Поэтому с достаточной точностью можно положить

$$i = \alpha + \beta \cos l, \tag{5}$$

причем α и β следует считать постоянными, тогда как l возрастает пропорционально времени. Отсюда с достаточной точностью получается

$$\sin^2 i = \sin^2\alpha + \beta \sin 2\alpha \cos l.$$

При несколько измененном значении ω_0 отсюда получим

$$\overline{\omega} - \omega_0 = \frac{\omega_0 h\beta}{2\rho R_0} \sin 2\alpha \cos l. \tag{6}$$

Интегрируя это выражение по времени, находим угол опережения Земли Δ по сравнению с положением, которое она занимала бы при равномерном вращении. Этот угол, взятый с обратным знаком, выражает кажущееся опережение Луны. Итак, получаем

$$(-\Delta) = -\frac{h}{2\rho R_0} \frac{T_m}{T_e} \beta \sin 2\alpha \sin l, \tag{7}$$

где T_m — период обращения лунного узла, T_e — период обращения Земли. Полагая $h = 1{,}5$ *м*, что, конечно, сопряжено со значительным произволом, получаем для амплитуды значение 1″, т. е. правильный порядок величины. Мы должны еще сравнить с опытом фазу эффекта. Для долготы лунного узла, отнесенной к 1900 г., имеем достаточно точную формулу

$$l = 259° - 19{,}35°\, t.$$

Отсюда и из формулы (7) получаются годы, на которые должны приходиться максимумы и минимумы опережения. Сравним их с результатами наблюдений Боттлингера, которые приведены в следующей таблице:

Таблица

Максимумы		Минимумы	
по формуле (7)	наблюдения	по формуле (7)	наблюдения
1843	1843	1834	1830
1862	1861	1853	1852
1880	1880	1895	1892

Ввиду малости рассматриваемых отклонений это согласие следует признать вполне удовлетворительным. Было бы желательно более обстоятельно исследовать согласие амплитуды эффекта с эмпирическими амплитудами приливов, однако уже наши результаты с большой вероятностью говорят о том, что это явление можно полностью объяснить указанным способом.

P. S. Наше вычисление дает заниженное значение амплитуды эффекта. Это можно связать с тем, что мы предполагали плотность Земли постоянной в пространстве, т. е. завышали момент инерции Земли.

Поступила 8 мая 1919 г.

ЗАМЕЧАНИЕ К ПРЕДЫДУЩЕЙ СТАТЬЕ*

Критика г-на фон Брунна[1] вполне обоснованна. Так как объективно моя ошибка представляет определенный интерес, я хочу все же ее еще раз кратко сформулировать. Мои рассуждения были бы правильными, если бы астрономы использовали Землю как пространственное тело отсчета, связанное с некоторыми особыми часами для измерения времени. В действительности координатной системой для пространственных измерений астрономам служит сфера неподвижных звезд, а часами — движение Земли по отношению к неподвижным звездам. Поэтому неравномерность вращения Земли может внести лишь ошибку при измерении времени, как правильно указал г-н Брунн.

Поступила 31 июля 1919 г.

* *Bemerkung zur vorstehender Notiz.* Sitzungsber preuss. Akad. Wiss., 1923, Halbbd 2, 711.

[1] Von Brunn. Тот же выпуск журнала, стр. 710.— *Прим. ред.*

ЧТО ТАКОЕ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ?*

Я с радостью согласился с предложением написать для «Таймс» что-нибудь о теории относительности. После печального периода, когда разорвалось активное общение между учеными, я охотно воспользовался возможностью выразить мое чувство радости и благодарности английским астрономам и физикам. С великими и гордыми традициями науки в вашей стране полностью согласуется то, что выдающиеся ученые должны были отдать много времени и сил и ваши научные учреждения не останавливались перед большими затратами, чтобы проверить смысл теории, которая была усовершенствована и опубликована во время войны в стране ваших врагов. Хотя исследование влияния гравитационного поля Солнца на лучи света является совершенно объективным делом, я не могу удержаться от того, чтобы не выразить мою личную благодарность моим английским коллегам за их работу; без них мне трудно было бы увидеть подтверждение наиболее важного вывода моей теории.

В физике различают несколько типов теорий. Большинство из них являются конструктивными, т. е. их задачей является построение картины сложных явлений на основе некоторых относительно простых предположений. Так, кинетическая теория газов ставит перед собой цель свести к движениям молекул механические, тепловые и кинетические свойства газов. Когда мы говорим, что понимаем какую-либо группу явлений природы, то это означает, что мы построили конструктивную теорию, охватывающую эту группу явлений.

Помимо этого важнейшего класса теорий существуют другие теории, которые будем называть фундаментальными. В них используется не

---

* *What is the theory of relativity?* (Написана по просьбе лондонской газеты «Таймс». Впервые опубликована 28 ноября 1919 г. Перевод выполнен по сборнику статей Эйнштейна «Ideas and Opinions». N. Y., Grown Publishers Inc., 1954.— *Прим. ред.*)

синтетический, а аналитический метод. Исходным пунктом и основой этих теорий являются не гипотетические положения, а эмпирически найденные общие свойства явлений, принципы, из которых следуют математически сформулированные критерии, имеющие всеобщую применимость. Термодинамика, например, исходит из эмпирического факта, что вечный двигатель невозможен, и отсюда пытается вывести аналитическим путем необходимые условия, которые удовлетворяются во всех случаях. К достоинствам конструктивных теорий относятся их законченность, гибкость и ясность; достоинством фундаментальных теорий является их логическое совершенство, надежность исходных положений.

Теория относительности принадлежит к классу фундаментальных теорий. Чтобы понять ее, нужно ознакомиться с принципами, на которых она основана. Но прежде чем излагать эти принципы, нужно указать, что теория относительности подобна дому с двумя этажами: специальной теорией относительности и общей теорией относительности.

С античных времен известно, что для описания движения тела требуется другое тело, к которому должно быть отнесено движение первого. Движение железнодорожного поезда описывается по отношению к поверхности земли, движение планет — по отношению ко всей совокупности видимых неподвижных звезд. Тела, к которым относят движения в физике, называются системами отсчета (координатными системами). Законы механики Галилея и Ньютона, например, можно сформулировать, только используя некоторую систему отсчета.

Однако состояние движения координатной системы нельзя выбрать произвольно, если предположить выполнимость законов механики (система не должна вращаться и ускоряться). Системы координат, допускаемые в механике, называются «инерциальными системами». Однако, согласно механике, природа не определяет однозначно состояние движения инерциальной системы. Наоборот, хорошо выполняется следующее утверждение: координатная система, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы, сама является инерциальной. Специальный принцип относительности представляет собой обобщение этого утверждения на все процессы природы: «каждый универсальный закон природы, который выполняется по отношению к некоторой системе отсчета C, должен также выполняться в любой другой системе C', которая движется равномерно и прямолинейно относительно C.

Другим принципом, на котором основана специальная теория относительности, является принцип постоянства скорости света в пустоте. Согласно этому принципу, свет в пустоте всегда распространяется с определенной постоянной скоростью (не зависящей от состояния движения наблюдателя и источника света). Свое убеждение в справедливости этого принципа физики черпают из успехов электродинамики Максвелла — Лоренца.

Оба упомянутые выше принципа убедительно подтверждены экспериментом, но представляются логически непримиримыми. Специальная теория относительности сумела их примирить ценой видоизменения кинематики, иначе говоря, ценой изменения физических представлений о пространстве и времени. Стало очевидным, что говорить об одновременности двух событий имеет смысл не иначе как по отношению к некоторой данной координатной системе, и что масштабы, а также ход часов должны зависеть от их состояния движения по отношению к координатной системе.

Но старая физика, включая законы движения Галилея и Ньютона, не совпадает с релятивистской кинематикой. Последняя приводила к некоторым общим математическим условиям, которым должны были бы удовлетворять законы природы, если потребовать выполнение двух указанных выше принципов. К ним нужно было приспособить физику. Наиболее важным результатом было введение нового закона движения для (очень быстро) движущихся материальных точек, который вскоре удалось проверить с электрически заряженными частицами. Наиболее важный результат специальной теории относительности касался инертной массы материальной системы. Оказалось, что инертная масса системы должна зависеть от содержащейся в ней энергии; это привело к представлению о том, что инертная масса является не чем иным, как скрытой энергией. Закон сохранения массы потерял свою независимость и слился с законом сохранения энергии.

Специальная теория относительности, которая явилась просто развитием электродинамики Максвелла — Лоренца, имела последствия, выходящие далеко за ее рамки. Должна ли зависимость физических законов от состояния движения системы отсчета ограничиваться только системами отсчета, движущимися относительно друг друга прямолинейно и равномерно? Какое отношение имеет природа к вводимым нами системам координат и их движению? Если для описания природы может оказаться необходимым использование систем координат, выбранных нами произвольно, то выбор систем не должен быть ничем ограничен; физические законы должны быть полностью независимы от этого выбора (общий принцип относительности).

Установление этого общего принципа относительности было облегчено тем давно известным экспериментальным фактом, согласно которому вес и инерция тела зависят от одних и тех же констант (равенство инертной и тяжелой масс). Представим себе систему координат, которая равномерно вращается по отношению к инерциальной (в ньютоновском смысле) системе. Центробежные силы, которые проявляются относительно этой системы, должны быть по Ньютону приписаны инерции. Но эти центробежные силы, подобно гравитационным, пропорциональны массам тел. Нельзя ли в таком случае рассматривать нашу систему координат как покоящуюся и центробежные силы как гравитационные? Такая точка зрения кажется очевидной, но классическая механика не допускает ее.

Это беглое рассмотрение наводит на мысль, что общая теория относительности должна давать законы тяготения, и действительное развитие этой идеи оправдало наши надежды.

Однако путь оказался труднее, чем можно было предполагать сначала, поскольку потребовалось отказаться от эвклидовой геометрии. Иными словами, законы расположения материальных тел в пространстве не совпадают в точности с законами пространства, предписываемыми твердый телам эвклидовой геометрией. Именно эта ситуация имеется в виду, когда мы говорим о «кривизне пространства». Тем самым теряют свой точным смысл в физике фундаментальные понятия «прямой», «плоскости» и т. д.

В общей теории относительности представления о пространстве и времени, или кинематика, перестают быть фундаментальными, независимыми ни от чего понятиями физики. Геометрические характеристики тел, их поведение и ход часов зависят прежде всего от гравитационных полей, которые в свою очередь создаются материальными телами.

Таким образом новая теория гравитации существенно отличается в своих основных положениях от ньютоновской. Но ее практические результаты совпадают с результатами теории Ньютона столь близко, что трудно было найти хотя бы несколько случаев, в которых различие между теориями было бы доступно опытной проверке. До сих пор были предложены только следующие возможности.

1. Вращение эллиптических орбит планет около Солнца (подтверждено в случае Меркурия).

2. Искривление световых лучей под действием гравитационных полей (было подтверждено фотографиями полного затмения Солнца, сделанными английской астрономической экспедицией).

3. Смещение спектральных линий к красному концу спектра для света, приходящего от звезд, обладающих большой массой (еще не подтверждено опытом)[2].

Привлекательной стороной этой теории является ее логическая завершенность. Если какой-либо ее вывод окажется неверным, то она должна быть отброшена; какая-либо модификация ее, не нарушающая всей структуры, представляется невозможной.

Однако не следует думать, что великое творение Ньютона можно реально ниспровергнуть этой или какой-либо другой теорией. Его ясные и всеобъемлющие идеи навсегда сохранят свое уникальное значение, как фундамента, на котором построено здание современной физики.

---

[2] Теперь это явление подтверждено наблюдениями. (Прим. авт. к англ. изд. — *Ред.*)

Замечание. Некоторые утверждения в вашей газете, касающиеся моей жизни и моей личности, обязаны своим происхождением живому воображению журналистов. Вот еще один пример относительности для развлечения читателей. Сейчас в Германии меня называют «немецким ученым», а в Англии я представлен как «швейцарский еврей». Но если бы мне было уготовано судьбой стать ненавистным [3], то произошло бы обратное: я оказался бы «швейцарским евреем» для немцев и «немецким ученым» для англичан.

Работа впервые опубликована под названием «Моя теория» в газете «Times» (Лондон). Под настоящим названием она опубликована в «The British Optical Journal» (58, 187, 188) и в книге «Out of My Later Years» (N. Y., 1950). Немецкий текст под названием «Что такое теория относительности?» опубликован в книге «Mein Weltbild» (Berlin, 1934, 220—228). В немецком тексте первый абзац и замечание в конце отсутствуют (они приведены в примечаниях к то́му).

Статья написана в связи с состоявшимся в ноябре 1919 г. в Лондоне совместным заседанием «Royal Society» и «Royal Astronomical Society», посвященным наблюдению английской экспедицией отклонения световых лучей около Солнца во время солнечного затмения 29 мая 1919 г. На этом заседании Дж. Дж. Томсон (1856—1940) назвал в своей вступительной речи теорию Эйнштейна «одним из величайших творений человеческой мысли».

[3] Эйнштейн использует здесь французское выражение bête noire.— *Прим. ред.*

57

ЭФИР И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Каким образом у физиков наряду с представлением о весомой материи, возникшим в результате абстрагирования повседневного опыта, создалось представление о существовании некоторой другой материи—эфира? Конечно, в ее основу легли явления, которые породили теорию дальнодействия, и свойства света, которые привели к волновой теории света. Остановимся несколько более подробно на обоих этих вопросах.

За пределами физики мы ничего не знаем о силах, действующих на расстоянии. Желая установить причинную связь между наблюдаемыми нами явлениями, мы, по-видимому, встречаемся только с взаимодействиями, обнаруживающимися при непосредственном соприкосновении (например, передача движения толчком, давлением или тягой, нагревание или воспламенение и т. д.). Однако в повседневной жизни тяжесть, т. е сила, действующая на расстоянии, играет одну из главных ролей. Но так как тяжесть тел является для нас чем-то постоянным, не меняющимся ни в пространстве, ни во времени, то мы не задумываемся над причиной тяжести тел, и поэтому для нас остается неосознанной и природа сил, действующих на расстоянии. Лишь теория тяготения Ньютона впервые поставила вопрос о причине силы тяжести, определив ее как силу, действующую на расстоянии и зависящую от масс. Действительно, теория Ньютона сделала самый большой шаг, который когда-либо был сделан на пути попыток установить причинную связь явлений природы; тем не менее, современники Ньютона встретили эту теорию весьма скептически. Им казалось, что она противоречит вытекавшему из всех других опытов принципу действия тел друг на друга через прикосновение.

---

* *Äther und Relativitätstheorie*. Verlag von Julius Springer. Berlin, 1920. (Речь, произнесенная 5 мая 1920 г. в Лейденском университете по поводу избрания Эйнштейна почетным профессором этого университета. Перевод со 2-го немецкого издания.— *Прим. ред.*)

Стремление человека к познанию весьма неохотно мирится с такой двойственностью. Как можно сохранить единообразие в понимании сил природы? Можно, например, попытаться представить себе, что силы контактного типа действуют на расстоянии, но они становятся заметными лишь на очень малых расстояниях; такой путь избрали последователи Ньютона, всецело ставшие под знамена его учения. Но можно сделать и другое предположение, а именно, что ньютоновская сила лишь представляется нам силой, действующей на расстоянии, а что в действительности она передается или посредством движений или путем деформации в среде, заполняющей пространство. Таким образом, стремление к единообразию в понимании природы сил приводит к гипотезе об эфире. Впрочем, непосредственно эта гипотеза не имела влияния на развитие теории тяготения и физики вообще, так что на закон тяготения Ньютона привыкли смотреть как на некоторую аксиому, не требующую дальнейшего изучения. Но в представлениях физиков гипотеза об эфире все время играла некоторую роль, хотя первое время, быть может, и в скрытой форме.

Гипотеза об эфире приобрела новую поддержку в первой половине XIX столетия, когда стало очевидным глубокое сходство между свойствами света и свойствами упругих волн в материальных телах. Стало несомненным, что свет можно представить себе как колебательный процесс в упругой среде, обладающей инертной массой и заполняющей Вселенную. Далее, из явления поляризации света с необходимостью вытекало, что эта среда — эфир — должна быть подобна твердому телу, поскольку только в твердом теле, но не в жидкости, возможны поперечные колебания. Таким образом пришли к теории «квазиупругого» светового эфира, частицы которого могут совершать лишь небольшие деформационные движения, соответствующие световым волнам.

Эта теория, называемая также теорией неподвижного эфира, в дальнейшем нашла сильную поддержку в опыте Физо, из которого можно было заключить, что эфир не принимает участия в движении тел. Опыт Физо является фундаментальным и для специальной теории относительности. Явление аберрации света точно так же говорило в пользу теории квазитвердого эфира.

Развитие теории электричества по пути, указанному Максвеллом и Лоренцом, привело к своеобразному и неожиданному повороту в развитии наших представлений об эфире. Правда, для самого Максвелла эфир все еще обладал чисто механическими, хотя и более сложными, чем у твердого тела, свойствами. Но ни самому Максвеллу, ни его последователям не удалось построить такую механическую модель эфира, которая давала бы удовлетворительное истолкование максвелловских законов электромагнитного поля. Законы эти — ясны и просты; механистическое истолкование их — неуклюже и непоследовательно. Почти незаметно для себя физики-теоретики примирились с таким запутанным с точки зрения их механистической программы положением дела; особенно способствовали этому электродинамические исследования Г. Герца. Действительно, вначале они требовали от всякой законченной теории, чтобы она исходила исключительно из механических понятий (например, плотность, скорость, деформация, давление), а затем постепенно привыкли наряду с механическими понятиями допускать в качестве основных понятий напряженности электрических и магнитных полей, не требуя механистического истолкования. Таким образом, физики постепенно отказались от чисто механического воззрения на природу. Однако такой поворот привел к невыносимому дуализму в основных положениях. Желая избежать этого, делали попытки свести основные механические понятия к электрическим; в частности, опыты с β-лучами и быстрыми катодными лучами поколебали веру в непреложную справедливость уравнений механики Ньютона.

Еще у Герца этот дуализм ничем не был смягчен. У него материя выступала носителем не только скоростей, кинетической энергии и давлений, но и электромагнитных полей. Так как эти поля могут существовать также и в пустоте, т. е. в свободном эфире, то и эфир считался также носителем электромагнитных полей, совершенно подобным и родственным весомой материи. Эфир, находящийся внутри материальных тел, принимает участие в их движении; эфир в пустоте всюду имеет такую скорость, что она во всем пространстве распределена непрерывно. Эфир Герца ничем существенно не отличается от весомой материи (частично состоящей из эфира).

Теория Герца не только страдала тем недостатком, что приписывала материи и эфиру, с одной стороны, механические, а с другой — электрические состояния, которые немыслимо связать между собой; она, кроме того, противоречила результату важного опыта Физо относительно скорости распространения света в движущихся жидкостях, а также и другим не вызывавшим сомнения опытным данным.

Таково было положение дела, когда выступил Г. А. Лоренц. Он привел теорию к согласию с опытом, начав с удивительного упрощения основных теоретических положений. Он достиг этого важнейшего со времени Максвелла успеха тем, что лишил эфир его механических, а материю — ее электрических свойств. Как в пустоте, так и внутри материальных тел носителем электромагнитных полей является только эфир, но не материя, которую мы представляем раздробленной на атомы. По теории Лоренца, движутся одни только элементарные частицы материи; их электромагнитное действие обусловлено лишь тем, что они несут электрические заряды. Таким образом, Лоренцу удалось описать все электромагнитные явления на основе уравнений поля, установленных Максвеллом для пустоты.

Что касается механической природы лоренцова эфира, то в шутку можно сказать, что Г. А. Лоренц оставил ему лишь одно механическое свойство — неподвижность. К этому можно добавить, что все изменение, которое внесла специальная теория относительности в концепцию эфира, состояло в лишении эфира и последнего его механического свойства. Сейчас мы поясним, как это следует понимать.

Теория электромагнитного поля Максвелла — Лоренца послужила моделью для теории пространства и времени и кинематики специальной теории относительности. Таким образом, теория Максвелла — Лоренца удовлетворяет условиям специальной теории относительности; но с точки зрения последней она приобретает новый вид. Пусть K — некоторая координатная система, относительно которой эфир Лоренца покоится; тогда уравнения Максвелла — Лоренца будут справедливы прежде всего относительно K. Но, согласно специальной теории относительности, те же самые уравнения в совершенно неизменном виде будут справедливы и относительно всякой другой координатной системы K', движущейся равномерно и прямолинейно относительно системы K. Теперь невольно возникает вопрос: почему мы должны приписывать системе K, в отличие от физически совершенно подобной ей системы K', то свойство, что эфир относительно K неподвижен? Такая асимметрия теоретического построения, совершенно не опирающаяся ни на какую асимметрию опытных данных, недопустима. Мне кажется неприемлемой (хотя логически и не вполне ложной) физическая равноценность систем K и K' при одновременном допущении, что эфир покоится относительно системы K и движется относительно системы K'.

В этом вопросе можно встать на следующую точку зрения. Эфира вообще не существует. Электромагнитные поля представляют собой не состояния некоторой среды, а самостоятельно существующие реальности, которые нельзя свести к чему-либо другому и которые, подобно атомам весомой материи, не связаны ни с какими носителями. Такая концепция является тем более естественной, что, согласно теории Лоренца, электромагнитное излучение, подобно весомой материи, обладает импульсом и энергией, и что материя и излучение, согласно специальной теории относительности, являются только особыми формами энергии, распределенной в пространстве; таким образом, весомая масса теряет свое особое положение и является лишь особой формой энергии.

Между тем ближайшее рассмотрение показывает, что специальная теория относительности не требует безусловного отрицания эфира. Можно принять существование эфира; не следует только заботиться о том, чтобы приписывать ему определенное состояние движения; иначе говоря, абстрагируясь, нужно отнять у него последний механический признак, который ему еще оставил Лоренц. Позднее мы увидим, что общая теория относительности оправдывает такое представление; мыслимость же этого представления мы выясним сейчас на одном, правда, не совсем удачном примере.

Представим себе волны на поверхности воды. В этом явлении можно различать две стороны. Прежде всего можно исследовать, как с течением времени меняется волнистая поверхность, разделяющая воду и воздух. Но можно также — например, при помощи маленьких плавающих тел — исследовать, как изменяется с течением времени положение отдельных частиц воды. Однако предположим, что мы принципиально отказываемся от применения таких плавающих тел для исследования движения частиц воды; тогда мы сможем во всем явлении заметить только изменение во времени пространственного положения поверхности воды; в таком случае у нас нет никаких оснований предполагать, что вода состоит из подвижных частиц. Но мы все же можем спокойно считать воду непрерывной средой.

Нечто подобное существует и в электромагнитном поле. Именно, поле можно представить себе состоящим из силовых линий. Если смотреть на эти силовые линии как на нечто материальное в обычном смысле слова, то можно попытаться представить себе динамические явления как явления движения этих силовых линий, исследовать, таким образом, поведение каждой силовой линии с течением времени. Но, как известно, такой способ рассмотрения приводит к противоречиям.

Обобщая, мы можем сказать: путем расширения понятия физического объекта можно представить себе такие объекты, к которым нельзя применить понятие движения. Эти объекты нельзя мыслить состоящими из частиц, поведение каждой из которых поддается исследованию во времени. На языке Минковского надо сказать так: не всякое образование, заполняющее четырехмерное пространство, можно представить себе состоящим из мировых линий. Специальная теория относительности запрещает считать эфир состоящим из частиц, поведение которых во времени можно наблюдать, но гипотеза о существовании эфира не противоречит специальной теории относительности. Не следует только приписывать эфиру состояние движения.

Очевидно, с точки зрения специальной теории относительности гипотеза об эфире лишена содержания. В уравнения электромагнитного поля входят, кроме плотности электрических зарядов, только напряженности поля. Электромагнитные явления в пустоте вполне определяются содержащимися в этих уравнениях законами, независимо от других физических величин. Электромагнитное поле является первичной, ни к чему не сводимой реальностью, и поэтому совершенно излишне постулировать еще и существование однородного изотропного эфира и представлять себе поле как состояние этого эфира.

С другой стороны, можно привести некоторый важный аргумент в пользу гипотезы об эфире. Отрицать эфир — это в конечном счете значит принимать, что пустое пространство не имеет никаких физических свойств. С таким воззрением не согласуются основные факты механики. В самом деле, механическое поведение некоторой свободно движущейся в пустом пространстве системы тел зависит не только от относительных положений (расстояний) и относительных скоростей этих тел, но и от состояний вращения, которое невозможно охарактеризовать каким-либо признаком, относящимся к системе. Чтобы можно было рассматривать вращение системы, по крайней мере формально, как нечто реальное, Ньютон объективизирует пространство. Тем, что он причисляет свое абсолютное пространство к реальным вещам, он принимает и вращение относительно абсолютного пространства как нечто реальное. Ньютон мог бы с полным правом назвать свое абсолютное пространство «эфиром»; ведь для того, чтобы смотреть на ускорение или вращение как на нечто реальное, существенно только наряду с наблюдаемыми объектами считать еще реальной некоторую другую чувственно невоспринимаемую вещь.

Правда, Мах пытался избежать необходимости принимать за реально существующее нечто недоступное наблюдению, когда в механике вместо ускорения относительно абсолютного пространства вводилось среднее ускорение относительно всей совокупности масс в мире. Но инерция в случае ускорения относительно далеких масс предполагает прямое действие на расстоянии. Так как современный физик уверен в возможности обойтись без него, то он при подобном способе рассмотрения вновь приходит к эфиру, который должен явиться средой, передающей инерцию. Но такое представление об эфире, приводящее к маховскому способу рассмотрения, существенно отличается от представлений об эфире Ньютона, Френеля и Г. А. Лоренца. Эфир Маха не только обусловливает поведение инертных масс; состояние самого эфира зависит от инертных масс.

Мысль Маха находит свое полное развитие в эфире общей теории относительности. Согласно этой теории, метрические свойства пространственно-временно́го континуума в окрестности отдельных пространственно-временны́х точек различны и зависят от распределения материи вне рассматриваемой области. Представление о физически пустом пространстве окончательно устраняется такой пространственно-временно́й изменяемостью масштабов и часов; соответственно, признание того факта, что «пустое пространство» в физическом отношении не является однородным и изотропным, вынуждает нас описывать его состояние с помощью десяти функций — гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$. Но, таким образом, и понятие эфира снова приобретает определенное содержание, которое совершенно отлично от содержания понятия эфира механической теории света. Эфир общей теории относительности есть среда, сама по себе лишенная всех механических и кинематических свойств, но в то же время определяющая механические (и электромагнитные) процессы.

Эфир общей теории относительности принципиально отличается от эфира Лоренца тем, что его состояние в любом месте динамически определяется с помощью дифференциальных уравнений материей и состоянием эфира в соседних точках, в то время как состояние эфира Лоренца в случае отсутствия электромагнитных полей ни от чего, кроме самого эфира, не зависит и всюду одно и то же. Мысленно можно превратить эфир общей теории относительности в эфир Лоренца, если заменить все описывающие его функции пространственных координат постоянными и не обращать внимания на причины, обусловливающие его состояние. Можно сказать еще и так: эфир общей теории относительности мы получаем из эфира Лоренца, релятивируя последний.

Нам пока еще не ясно, какую роль новый эфир призван играть в картине мира будущего. Мы знаем, что он определяет метрические соотношения в пространственно-временно́м континууме, например, возможные конфигурации твердых тел или различные гравитационные поля, но мы не знаем, участвует ли он в построении элементарных электрических частиц, образующих материю. Мы не знаем также, отличается ли его структура от структуры эфира Лоренца только вблизи весомых масс, применима ли эвклидова геометрия к пространственным областям космических размеров. Но мы можем, основываясь на уравнениях тяготения теории относительности, утверждать, что в пространственных областях космических размеров только тогда могут быть отклонения от эвклидовой геометрии, когда во Вселенной будет существовать хотя бы весьма малая положительная средняя плотность материи. В этом случае мир с необходимостью должен быть пространственно замкнутым и конечным, определяемым величиной упомянутой выше средней плотности.

Если мы будем с точки зрения гипотезы о существовании эфира рассматривать гравитационное и электромагнитное поля, то мы заметим замечательную принципиальную разницу между ними. Не может быть пространства, а также и части пространства без потенциалов тяготения; последние сообщают ему метрические свойства — без них оно вообще немыслимо. Существование гравитационного поля непосредственно связано с существованием пространства. Напротив, очень легко представить себе любую часть пространства без электромагнитного поля; в противоположность гравитационному полю поле электромагнитное каким-то образом лишь вторично связано с эфиром, причем природа электромагнитного поля вовсе не определяется природой эфира поля тяготения. При современном состоянии теории кажется, что электромагнитное поле в отличие от гравитационного поля определяется совершенно другой формальной причиной; как будто бы природа могла наделить гравитационный эфир вместо полей типа электромагнитного поля, также и полями совершенно другого типа, например скалярными.

Так как, по нашим современным воззрениям, и элементарные частицы материи по своей природе представляют собой не что иное, как сгущения электромагнитного поля, то, следовательно, в нашей современной картине мира существуют две совершенно различные по содержанию реальности, хотя и связанные между собой причинно, а именно, гравитационный эфир и электромагнитное поле; их можно назвать пространством и материей.

Естественно, что большим шагом вперед было бы объединение в одну общую картину гравитационного и электромагнитного полей. Тогда была бы достойно завершена эпоха теоретической физики, начатая Фарадеем и Максвеллом; сгладилась бы противоположность между эфиром и материей, и вся физика стала бы замкнутой теорией, подобной общей теории относительности, охватывающей геометрию, кинематику и теорию тяготения. Исключительно остроумная попытка в этом направлении сделана математиком Г. Вейлем, однако я не думаю, что его теория может выдержать сравнение с опытом. Размышляя о ближайшем будущем теоретической физики, мы, безусловно, не можем отрицать возможности встретиться с непреодолимыми границами для теории поля, которые могут поставить факты, охватываемые квантовой теорией.

Резюмируя, можно сказать, что общая теория относительности наделяет пространство физическими свойствами; таким образом, в этом смысле эфир существует. Согласно общей теории относительности, пространство немыслимо без эфира; действительно, в таком пространстве не только было бы невозможно распространение света, но не могли бы существовать масштабы и часы и не было бы никаких пространственно-временных расстояний в физическом смысле слова. Однако этот эфир нельзя представить себе состоящим из прослеживаемых во времени частей; таким свойством обладает только весомая материя; точно так же к нему нельзя применять понятие движения.

Доклад «Эфир и принцип относительности» издавался совместно с докладом «Геометрия и опыт» (см. примечание к статье 55); отдельным изданием он выходил на польском и французском языках. Русский перевод был издан «Научным книгоиздательством» в 1921 году, а также в сборнике «О физической природе пространства» (Берлин, 1922 г.), в котором, кроме того, напечатана работа «Геометрия и опыт» (статья 61, том II).

ОТВЕТ НА СТАТЬЮ РЕЙХЕНБЕХЕРА *[1]

На вопрос, можно ли построить теорию гравитации, не основываясь на принципе относительности, следует ответить: без сомнения, да. Для чего же тогда нужен принцип относительности? Я отвечу сперва сравнением. Термодинамика, конечно, может развиваться без второго начала; зачем же тогда пользоваться вторым началом?

Ответ очевиден. Из двух теорий, объясняющих совокупность достоверных опытных фактов в некоторой области, предпочтение следует отдать той, которая требует меньше независимых предположений. С этой точки зрения принцип относительности представляет для электродинамики и теории гравитации такую же ценность, как второе начало для термодинамики, так как потребовалось бы выдвинуть значительно больше независимых гипотез для того, чтобы получить следствия теории относительности, не прибегая к принципу относительности. Это показали все прежние попытки обойтись без принципа относительности.

Кроме того, введение общего принципа относительности оправдано также с точки зрения теории познания. Ведь система координат представляет собой всего лишь средство описания и сама по себе не имеет ничего общего с описываемыми предметами. Этой ситуации вполне соответствует только общековариантный способ формулирования законов природы, ибо при всяком другом способе высказывания о средстве описания смешиваются с высказываниями об описываемом предмете. В качестве примера приведу закон инерции Галилея. В подробной формулировке он должен выглядеть так: материальные точки, достаточно удаленные одна от другой, движутся прямолинейно и равномерно *при условии, что движение рассматривается в системе координат, движущейся надлежащим образом, и что время определяется соответствующим образом.* Кто же не чувствует, что такая формулировка педантична? Однако опустить сделанную оговорку было бы недобросовестно.

---

* *Antwort auf vorstehende Betrachtung.* Naturwiss., 1920, 8, 1010, 1011.

[1] E. Reichenbächer. Naturwiss., 1920, 8, 1008—1010. (Название статьи Рейхенбехера составляет вопрос, с которого Эйнштейн начинает данную статью.— *Прим. ред.*)

Перейду к возражениям против релятивистской теории поля тяжести. Здесь Рейхенбехер сначала забывает решающий аргумент, а именно: численное равенство инертной и тяжелой массы должно быть следствием их тождественности [2]. Как известно, это выражается принципом эквивалентности. Против этого принципа он (как и Коттлер[3]) выдвигает возражение, что для конечных областей пространства-времени гравитационные поля в общем случае не исчезают в результате преобразования координат. При этом он не замечает, что дело совсем в другом. Ведь существенно лишь то, что механические свойства материальной точки в любой момент можно по желанию (выбирая систему отсчета) сводить либо к тяготению, либо к инерции. Большего и не требуется; из тождественности инерции и тяжести вовсе не следует, что, выбирая *одну* систему координат, можно объяснить одним только действием инерции механические свойства *двух или большего* числа масс. Никто же не упрекает, например, специальную теорию относительности за то, что она, правильно отражая относительность равномерного движения, не позволяет привести в состояние покоя все неускоренные тела, *выбрав какую-то одну систему координат.*

Пример гравитационных полей, исчезающих при преобразовании координат, имеет значение только как известный нам частный случай, в котором искомые законы природы заведомо выполняются.

Второе возражение заключается в том, что поля, существующие в системе координат, вращающейся относительно инерциальной системы (центробежные и кориолисовы поля), будто бы являются «фиктивными», а не «реальными» полями. Это правильно для теории Ньютона, поскольку эти поля не удовлетворяют дифференциальному уравнению Пуассона. Однако в общей теории относительности эти поля удовлетворяют дифференциальным уравнениям поля и потому так же «реальны» в выбранной системе отсчета, как и поля вблизи тяжелого тела.

В вопросе о том, должны ли эти поля неявно сводиться к действию масс, среди сторонников теории относительности нет полного единодушия. Сам я полагаю, что гравитационные поля в каждой точке определяются всеми сколь угодно отдаленными массами во Вселенной. Здесь нет необходимости подробно останавливаться на этом вопросе, тесно связанном с космологической проблемой, хотя он и имеет фундаментальное значение. Ибо нельзя судить о подтверждении или превосходстве теории относительности, не решив этого вопроса; окончательно же решить его может только звездная астрономия.

---

2 Вместо слов «Так как действие тяжести... проявляется в ускорении» Рейхенбехеру следовало бы сказать: «Так как ускорение тяжести не зависит от материала и состояния тел, испытывающих действие силы тяжести». Ведь только этим свойством и отличается поле тяжести от всех других силовых полей.

3 См. статью 39. — *Прим. ред.*

Рейхенбехер неправильно понял мое рассуждение о двух небесных телах, вращающихся одно вокруг другого. Лишь одно из этих тел следует рассматривать как вращающееся в смысле механики Ньютона и потому сплющенное действием центробежных сил. Это устанавливают обитатели этих тел, пользуясь твердыми масштабами, связываются друг с другом и спрашивают: в чем реальная причина разного поведения этих небесных тел. (Это обсуждение никак не связано с лоренцовым сокращением.) Ньютон ответил бы на этот вопрос, назвав «реальным» абсолютное пространство, в котором одно тело вращается, а другое нет. Я придерживаюсь мнения Маха, которое на языке теории относительности формулируется так: все массы во Вселенной, вместе взятые, определяют поле $g_{\mu\nu}$, и в системе отсчета, связанной с первым телом, это поле другое, чем в системе второго тела, потому что движения всякой из порождающих поле $g_{\mu\nu}$ масс, описываемые в этих двух системах, будут совершенно разными. На мой взгляд, инерция представляет собой (усредненное) взаимодействие между массами Вселенной в том же смысле, в каком теория Ньютона рассматривает гравитационное взаимодействие. Поэтому то, что Рейхенбехер говорит о проблеме двух тел, совершенно неверно. То обстоятельство, что действие всех остальных (кроме двух рассматриваемых) тел во Вселенной можно приближенно представить как квазипостоянное поле $g_{\mu\nu}$, нельзя подменять утверждением, что эти тела во Вселенной не оказывают влияния на два рассматриваемых тела.

Я совсем не понимаю, каким образом в заключение своих рассуждений, в абзаце, начинающемся словами «Если мы правильно понимаем положение вещей», после всего сказанного перед этим, Рейхенбехер приходит к выводу, что законы природы необходимо выражать в общековариантном виде. Ведь если ускорение имеет абсолютный смысл, то неускоренные системы координат будут выделены природой; иначе говоря, тогда законы природы в этих системах должны быть другими (и более простыми), чем в ускоренных системах координат. Тогда нет никакого смысла усложнять формулировку законов, выражая их в общековариантной форме.

Наоборот, если законы природы таковы, что ни при каком выборе системы координат с каким-либо особым состоянием движения они не принимают особенно простого вида, то требование общей ковариантности становится средством исследования. Если, кроме того, предполагается, что для бесконечно малой области выполняется специальная теория относительности и что вытекающие из этой предпосылки величины $g_{\mu\nu}$ описывают гравитационное поле, то мы окажемся на почве общей теории относительности. Происходит ли это у Рейхенбехера или нет, я не смог установить из его рассуждений.

Берлин, 20 ноября 1920 г.

МОЙ ОТВЕТ.
По поводу антирелятивистского акционерного общества *

Под претенциозным названием «Рабочее объединение немецких естествоиспытателей» собралось пестрое общество, ближайшая цель которого заключается в том, чтобы развенчать теорию относительности в глазах нефизиков, а вместе с ней и меня как ее основателя. Недавно господа Вейланд и Герке выступили с этой целью в филармонии с первыми лекциями, на которых был и я. Я отлично понимаю, что оба оратора не заслуживают письменного ответа: ведь у меня имеются все основания считать, что в основе этой затеи лежит отнюдь не стремление к истине. (Будь я по национальности немцем со свастикой или без нее, а не евреем со свободными, интернациональными взглядами, то...). Отвечаю я только потому, что мои друзья не раз настойчиво просили меня высказать свою точку зрения.

Прежде всего замечу, что, насколько мне известно, сегодня вряд ли можно найти ученого из тех, кто внес заметный вклад в теоретическую физику, который не признавал бы, что теория относительности является логически вполне замкнутой и что она согласуется со всеми твердо установленными данными опыта. Наиболее выдающиеся физики-теоретики — я назову Г. А. Лоренца, М. Планка, А. Зоммерфельда, М. Лауэ, М. Борна, Лармора, А. Эддингтона, П. Дебая, П. Ланжевена, Т. Леви-Чивиту — стоят на почве теории относительности и сами активно работают над ней. Среди физиков, заслуживших мировое признание, к открытым противникам теории относительности можно причислить лишь одного Ленарда. Я восхищаюсь Ленардом как искусным физиком-экспериментатором; однако в теоретической физике он пока ничего не совершил, и его возражения против общей теории относительности настолько поверхностны, что до сих пор я не считал нужным подробно отвечать на них. Придется наверстать это упущение.

---

* *Meine Antwort. Über die antirelativitätstheoretische G. m. b. H.* Berliner Tageblatt, 27 August 1920, 1, 2.

Меня упрекают в том, что я занимаюсь пошлой рекламой теории относительности. Могу лишь заявить, что всю жизнь я любил хорошо обдуманные, трезвые фразы и лаконичный стиль. Высокопарные фразы и слова, будь они о теории относительности или о чем-либо другом, бросают меня в дрожь. Я часто смеялся, читая излияния, которые теперь относят на мой счет. Впрочем, я охотно предоставляю это удовольствие господам из Акционерного общества.

Теперь о лекциях. Г-н Вейланд — по-видимому, совсем неспециалист (Врач? Инженер? Политик? Мне не удалось это выяснить.)— не сообщил ничего существенного. Он разразился неуклюжими грубостями и низкими обвинениями. Второй оратор, г-н Герке, частично высказывал просто неправильные утверждения, частично пытался создать неверное впечатление у несведущих людей, односторонне отбирая и излагая материал. Это можно доказать следующими примерами.

Г-н Герке утверждает, будто теория относительности ведет к солипсизму; подобное утверждение каждый знаток сочтет за шутку. При этом он опирается на известный пример двух часов (или близнецов), из которых одни проделывают замкнутый путь относительно инерциальной системы, а другие покоятся. Он утверждает, хотя лучшие знатоки теории уже неоднократно опровергали это устно и письменно, будто теория ведет в этом случае к действительно бессмысленному результату: каждые из двух покоящихся рядом часов отстают относительно других. Я могу это рассматривать только как попытку намеренно ввести в заблуждение слушателей из неспециалистов.

Г-н Герке далее намекает на возражения Ленарда, многие из которых относятся к примерам механики из повседневной жизни. Они не имеют силы уже вследствие моего общего доказательства, что высказывания общей теории относительности в первом приближении совпадают с высказываниями классической механики.

Однако то, что г-н Герке сказал об экспериментальном подтверждении теории, для меня является самым убедительным доказательством, что ему не было никакого дела до выяснения истинного положения вещей.

Г-н Герке хочет заставить поверить, что движение перигелия Меркурия можно объяснить и без теории относительности. Тогда существуют две возможности. Либо изобретают особые межпланетные массы такой величины и с таким распределением, чтобы обеспечить наблюдаемую величину смещения перигелия; это, конечно, в высшей степени неудовлетворительный выход по сравнению с результатом теории относительности, объясняющей движение перигелия Меркурия без каких-либо специальных предположений. Либо же обращаются к работе Гербера, который указал правильную формулу для движения перигелия Меркурия еще до меня. Однако специалисты единодушно считают, что не только вывод Гербера абсолютно неправилен, но и что эту формулу вообще нельзя вывести из основных предположений, принятых Гербером. Поэтому работа Гербера не представляет никакой ценности и является неудачной и ошибочной теоретической попыткой. Я констатирую, что общая теория относительности дала первое истинное объяснение движения перигелия Меркурия. Я не упомянул сперва работу Гербера уже потому, что не читал ее, когда писал свою работу о движении перигелия Меркурия; однако у меня не было бы повода упоминать ее, если бы она и была мне известна. Настоящие специалисты считают непорядочными личные выпады против меня господ Герке и Ленарда, использующих подобные аргументы.

Г-н Герке в своем докладе пытался поставить под сомнение надежность мастерски выполненных английскими учеными измерений отклонения световых лучей Солнцем: из т р е х независимых серий снимков он упоминает лишь об одной, которая должна была привести к ошибочным результатам вследствие искажения зеркала гелиостата. Он умолчал о том, что в своем официальном сообщении английские астрономы сами объявили свои результаты блестящим подтверждением общей теории относительности.

В вопросе о красном смещении спектральных линий г-н Герке умолчал о том, что выполненные до сих пор измерения противоречивы и что окончательного решения этого вопроса еще не существует. Он привел только аргументы, свидетельствующие п р о т и в существования предсказанного общей теорией относительности смещения спектральных линий, но умолчал о том, что благодаря новейшим исследованиям Гребе и Бухема, а также Перо все прежние результаты лишились доказательной силы.

Наконец, замечу, что по моей инициативе в Нойгейме на собрании естествоиспытателей состоится дискуссия о теории относительности. Каждый, кто захочет, сможет высказать там свои возражения перед форумом ученых.

За границей, особенно на моих коллег по науке Г. А. Лоренца и А. Эддингтона, которые обстоятельно занимались теорией относительности и многократно выступали с лекциями об этой теории, произведет странное впечатление, когда они увидят, что теория и ее основатель подвергаются таким нападкам в самой Германии.

С 1919 г. в Германии началась жестокая кампания против Эйнштейна. В августе 1920 г. в зале Берлинской филармонии собралось «Рабочее объединение немецких естествоиспытателей для поощрения чистой науки» (Arbeitsgemeinschaft deutsches Naturforscher für Ethaltung reiner Wissenschaft), одним из вдохновителей которого был Филипп Ленард. Последний выступил в 1918 г. с нападками на теорию относительности в своей книжке «О теории относительности, эфире и тяготении». В марте 1918 г. она вышла вторым, а в октябре 1920 г. и третьим изданием. К третьему изданию приложен обзор дискуссии в Нойгеме, о которой говорится в статье Эйнштейна. Это издание было переведено на русский язык в 1922 г.

Теория Гербера была изложена в докладе «Скорость распространения тяготения» в 1902 г. Этот доклад был перепечатан в 1917 г. (Ann. d. Phys. 52, 415). Дискуссия, связанная с этими работами, описана в книге В. Паули «Теория относительности» (М., 1947) на стр. 245.

Один из участников выступлений Е. Герке опубликовал в 1918 г. (Verhandl. Deutsch. Phys. Gesellsch., 20, 165—169) статью «Об эфире», в которой оспаривал теорию аберрации в движущейся жидкости.

Приведем ответ Эйнштейна, напечатанный в том же томе этого журнала (стр. 261).

Замечания к работе Е. Герке «Об эфире»

В рассматриваемой работе высказывается утверждение, что аберрацию можно объяснить в рамках теории эфира, увлекаемого материей. Это утверждение основывается на теории Стокса, которая изложена в третьем издании «Оптики» Друде. Учитывая важность вопроса и высокий авторитет Стокса, я считаю необходимым заметить по этому поводу, что эта теория неосновательна, поскольку она покоится на противоречивых предположениях. Действительно, если эфир увлекается телами, то вектор его скорости не может быть всюду безвихревым (и непрерывным), как это предполагается при выводе Стоксом закона аберрации: это следует из известных теорем теории потенциала. На самом деле гипотеза эфира, увлекаемого небесными телами, несовместима с теорией аберрации.

Поступила 29 ноября 1918 г.

После собрания в Филармонии в Берлине распространился слух об отъезде Эйнштейна из Германии. Действительно, он был приглашен занять кафедру в Лейдене. Однако Эйнштейн не смог покинуть своих друзей — Макса фон Лауэ, Нернста, Рубенса — самоотверженно боровшихся на его стороне. Он уехал из Германии лишь через 14 лет, когда угроза его жизни стала весьма реальной. (Ср. F. Herneck. Albert Einstein, Berlin, 1963)

СОДЕРЖАНИЕ

1915 г.

1916 г.

1917 г.

1918 г.

1919 г.

1920 г.

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

Собрание научных трудов

Том 1

Утверждено к печати редколлегией серии «Классики науки»

Редактор ***С. И. Ларин***

Редактор издательства ***Е. М. Кляус***

Художник ***А. Я. Михайлов***

Технический редактор ***Н. Д. Новичкова***

Сдано в набор 29/I 1965 г. Подписано к печати 27/VII 1965 г.
Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Печ. л. 43,75 + 1 вкл. = 51,33 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 37,4 л. Тираж 32000. Изд. № 1641.
Тип. зак. № 1900

Цена 3 р.

Издательство «Наука»
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
215	7 сн.	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial c}{\partial c}$
273	3 сн.	Ärt	Ärz
298	2 св.	$\mathfrak{v}$	o
302	15 св.	(есть смешанный) но	) есть смешанный (но
381	13 св.	$+\frac{dx_2^2}{dt^2}$	$-\frac{dx_2^2}{dt^2}$
419	1 сн.	$1-(x^2/c^2)$	$\sqrt{1-(v^2/c^2)}$
419	3 сн.	$1-(v^2\ c^2)$	$\sqrt{(1-v^2/c^2)}$
438	4 св.	(16в)	(16б)
509	1 сн.	4 или 1, 2;	4, 1, 2 или
510	9 св.	$(\mathfrak{e},\ \mathfrak{b})$	$(\mathfrak{e},\ \mathfrak{h})$
614	18 св.	строго,	строго)
689	5 сн.	55	61