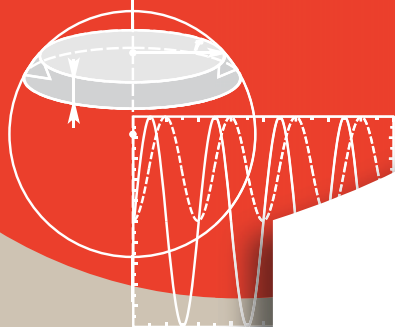


Н. П. Калашников  
М. А. Смондырев

# ОСНОВЫ ФИЗИКИ



УЧЕБНИК ДЛ Я В Ы С Ш Е Й Ш К О Л Ы

Н. П. Калашников, М. А. Смондырев

# ОСНОВЫ ФИЗИКИ

## Том 1

2-Е ИЗДАНИЕ, ЭЛЕКТРОННОЕ



Москва  
Лаборатория знаний  
2021

УДК 53(075.8)  
ББК 22.3я73  
К17

*Серия основана в 2009 г.*

**Калашников Н. П.**

К17 Основы физики : в 3 т. Т. 1 / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. — 2-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2021. — 545 с. — (Учебник для высшей школы). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-00101-073-9 (Т. 1)

ISBN 978-5-00101-072-2

Учебник соответствует программе дисциплины «Физика» для естественнонаучных и технических университетов. Два его тома входят в состав учебного комплекта, включающего также учебное пособие «Основы физики. Упражнения и задачи» тех же авторов.

Во многих отношениях данный учебник не имеет аналогов. Ряд оригинальных методических приемов и способов изложения материала, включение новых, зачастую неожиданных тем и ярких примеров, отсутствующих в традиционных курсах физики, позволяют учащимся приобрести навыки уверенного самостоятельного мышления, глубже понять физические основы самых различных природных явлений, делать практические, качественные оценки, оперируя размерностями и порядками величин.

Для студентов естественнонаучных и инженерно-технических специальностей.

**УДК 53(075.8)  
ББК 22.3я73**

**Деривативное издание на основе печатного аналога:** Основы физики : в 3 т. Т. 1 / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. — М. : Лаборатория знаний, 2017. — 542 с. : ил. — (Учебник для высшей школы). — ISBN 978-5-00101-004-3 (Т. 1); ISBN 978-5-00101-003-6.

**В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации**

ISBN 978-5-00101-073-9 (Т. 1)  
ISBN 978-5-00101-072-2

© Лаборатория знаний, 2017

# От издательства

- Зачем изволили пожеловать к Ивану Васильевичу?
- Леонтий Сергеевич, — отозвался Иван Васильевич, — пьесу мне принес.
- Чью пьесу? — спросила старушка, глядя на меня печальными глазами.
- Леонтий Сергеевич сам сочинили пьесу!
- А зачем? — тревожно спросила Настасья Ивановна.
- Как зачем?... Гм... гм...
- Разве уж и пьес не стало? — ласково-укоризненно спросила Настасья Ивановна. — Какие хорошие пьесы есть. И сколько их! Начнешь играть — в двадцать лет всех не переиграешь. Зачем же вам тревожиться сочинять?

---

Михаил Булгаков. «Театральный роман»

Тревожиться сочинять новый учебник авторы стали в 1990-е годы, когда научные книги в университетских библиотеках поистрепались, а из книжных магазинов их вытеснили издания по астрологии и «паранауке». Первый вариант данного учебника появился в 1995 г. в виде учебного пособия — семестровых выпусков лекций для одного из московских вузов.

В 2003–06 гг. вышло два издания учебника с грифом Министерства образования РФ: два тома теоретического материала, «причесанного» и переработанного для выпуска массовым тиражом, к которым присоединился и третий том — задачник. В 2015 г. трехтомник вошел в комплект учебных материалов, выдвинутых на соискание премии Правительства РФ в области образования.

Настоящее издание учебника «Основы физики» исправлено и существенно дополнено, но в нем сохранены и еще более развиты характерные особенности, отличающие его от других книг по физике. В теоретических томах появилось множество небольших, но важных вставок, добавлены даже новые разделы, отражающие современное развитие науки. Материал перегрупуширован для более логичного изложения предмета и в соответствии с современной программой изучения общей физики в вузах. Части текста, предназначенные для углубленного изучения предмета, набраны петитом. Иллюстрации существенно пополнены графиками, воспроизводящими реальные экспериментальные данные (вместо обычных для учебников качественных картинок). Теоретические кривые также имеют количественный характер и построены по выведенным в тексте формулам. Все это делает изложение более авторитетным и убедительным.

**Новизну и актуальность** включенного материала можно проиллюстрировать некоторыми примерами. Так, нам не известны другие учебники, где бы излагался принцип работы колеса — самого великого изобретения человечества. Успехи последних десятилетий в исследованиях космоса стимулировали включение раздела о гравитационном маневре, когда космический аппарат, направляемый в дальний космос, сначала огибает одну из ближних планет, которая ускоряет его за счет своей кинетической энергии без включения двигателей и расхода топлива. Рассмотрены различные модели земной атмосферы, где выведены приближенные к реальности законы изменения температуры и давления с высотой. Ведущиеся разработки электромагнитного оружия сделали актуальным рассказ о «рельсовой пушке». Включена глава об эволюции биологических популяций и колебаниях их численности в системе «жертва–хищник». Не имеет

аналогов последняя часть учебника — «Масштабы нашего мира», где на основе пройденного материала предложены простые качественные оценки параметров физических систем, свойств материалов, размеров самых разных объектов от мышек и слонов до гор, планет и звезд. Список новаций можно умножить, любознательный читатель сам найдет их в учебнике.

**Формирование научного мировоззрения** — побочный, но важный результат столь широкого охвата материала. Описывая фундаментальные закономерности природы, физика является не только конкретной наукой со своей «сферой ответственности», но и основой других естественных наук и нашего взгляда в целом на материальный мир. Авторы подчеркивают, что наука имеет дело с моделями и абстракциями разных уровней, у каждой из которых своя область применимости. Отсюда вытекает, что природа не знает «законов природы» — она просто существует, а «законы» придуманы людьми для описания наблюдаемых явлений. При этом новые теории не опровергают прежних, но включают их как составные части, устанавливая пределы справедливости ранее найденных закономерностей. И по мере расширения горизонта наших знаний увеличивается и граница соприкосновения с еще непознанным. Авторы ненавязчиво подводят читателя к мысли, что неприемлемы обе крайности общественного сознания: как наивная вера во всемогущество и всеведение науки, так и отрицание научного мировоззрения на том основании, что в науке всегда остаются «белые пятна». Сильной стороной данного учебника является то, что «основы физики» представлены в нем не застывшей схемой, а развивающимся живым организмом.

**Ничто не принимать на веру** — основной принцип построения учебника. Все сделанные утверждения доказываются, причем авторы не злоупотребляют математическим аппаратом, находя обходные пути, но избегая при этом профанации. Так, для угадывания и пояснения результатов здесь часто используются такие общие физические принципы, как симметрия системы и анализ размерностей. Переход от частного к общему и затем снова к частному применяется как методологический прием, позволяющий на основе рассмотрения конкретной (часто житейской) ситуации подвести читателя к теоретическим обобщениям, которые затем иллюстрируются на примерах и задачах.

**Включение задач с решениями в теоретические разделы** — принципиальная и последовательная позиция авторов, которые в этом следуют идее И. Ньютона, что «при изучении наук примеры полезнее правил».

**Важно не только что сказано, но и как сказано** — таково убеждение авторов учебника, известных ученых в области теоретической физики и опытных педагогов. Именно поэтому они постарались сделать свои книги не только полезными, но и интересными. Насколько это удалось — пусть оценят читатели.

\* \* \*

Основная работа по обогащению содержания учебника, внесению исправлений и дополнений, а также по технической подготовке рукописи к печати, проделана профессором М. А. Смондыревым, которому издательство выражает особую благодарность. Издательство также благодарит кандидата физ.-мат. наук доцента И. Я. Ицхоки за ценные советы и предложения, несомненно улучшившие учебник.

## Часть I

# Физические основы механики

*Когда кончился бензин,  
автомобиль вынужден был  
остановиться. Это я тоже  
сам вчера видел. А после этого  
еще болтают об инерции,  
господа! Не едет, стоит, с  
места не трогается! Нет  
бензина. Ну, не смешно ли?*

---

Ярослав Гашек. «Похождения  
бравого солдата Швейка»



# Глава 1

## Измерения физических величин

Предметом естествознания в широком смысле является познание окружающего нас мира. Задача естественных наук состоит в том, чтобы сформировать в нашем сознании такую модель физического мира, которая наиболее полно отражала бы его свойства и обеспечивала бы такие соотношения между элементами модели, какие существуют между элементами внешнего мира. Дж. Максвелл писал: «Точные науки стремятся к тому, чтобы свести загадки природы к определению некоторых величин путем операций над числами». Поэтому естественные науки «говорят» с природой на языке математики. Принцип *nulla scientia potest sciri sine mathematica* (никакую науку нельзя познать без математики) был сформулирован еще в средневековье. Но откуда взять эти числа, которыми оперирует математика, которые должны фигурировать в уравнениях, выражающих те или иные закономерности природы? Единственным источником их может служить сама природа.

### 1.1 О разнице вопросов «как?» и «почему?»

Учебники принято начинать с определения предмета исследования соответствующей науки. Трудно удержаться, чтобы не процитировать прелестное и наивное определение из первого учебника физики на русском языке<sup>1</sup>, изданного при Екатерине II: «Физика есть сколько приятная, столько и полезная наука, толкующая свойства тел или предметов, нас окружающих. Физика научает нас обо всем рассуждать здраво и основательно, а чрез то самое и необходимо нужна для всякого человека».

*Естествознание* — комплекс экспериментальных наук, в основе которых лежат наиболее общие закономерности, изучаемые физикой. Естественные науки начинаются с наблюдений и измерений, ими же проверяются и питаются в

---

<sup>1</sup>Иоганн Якоб Эберт. Краткое руководство к физике. СПб, 1787. Перевод этой книги с немецкого появился вследствие начала формирования государственной системы среднего образования и введения преподавания физики как самостоятельного предмета.



своем развитии. Конечно, новые идеи в науке появляются и благодаря умозрительным рассуждениям, но окончательный ответ на решающие вопросы может быть получен только в эксперименте. Да и сами эти идеи на пустом месте не возникают.

С помощью приборов мы задаем природе вопросы и получаем ответы, которые «обрабатываем» в нашем мозгу, на своих компьютерах. Понять явление — значит уметь его описать, знать условия, при которых оно происходит, предсказать его последствия. Важно лишь правильно сформулировать свои вопросы, и тогда мы получаем шанс, что природа на них ответит. Природа (и вместе с ней наука) не отвечает на вопросы «почему?» или «зачем?». Почему тело под действием силы приобретает ускорение? Почему электрическое поле действует на заряд? Разве кто-нибудь в состоянии ответить на эти вопросы? Мы можем лишь констатировать факты: а) если к телу приложена сила, то его движение будет подчиняться уравнению второго закона Ньютона; б) два заряда создают вокруг себя электрическое поле, которое описывается уравнениями Максвелла.

Иными словами, наука *в принципе* может ответить лишь на вопросы «что?» и «как?». Как устроен наш мир, какие законы им управляют, каков механизм тех или иных процессов, каковы их характерные времена и масштабы, какими уравнениями они описываются.

Физика изучает самые фундаментальные закономерности природы, самые простые ее составные части. Благодаря этой «простоте» физика (так же, как и химия, молекулярная биология и т. п.) имеет дело с воспроизводимыми ситуациями. Это означает, что мы можем повторить наши эксперименты, и если все условия в точности выполнены, то и результаты будут такими же. Подобное вряд ли возможно, например, в геологии, не говоря уже об общественных науках (экономике, истории и т. д.). Важно понимать также, что физический эксперимент никогда не бывает идеальным, любое измерение производится с определенной точностью. И когда мы говорим о том или ином законе природы, мы должны помнить, что этот закон был установлен в каких-то конкретных условиях и имеет, как правило, конкретные пределы применимости.

Строго говоря, природа не знает никаких законов — она просто существует. Законы природы придумывают люди, пытаясь описать наблюдаемые явления и предсказать поведение рассматриваемых систем в тех или иных условиях. Достоин удивления сам факт, что созданная людьми математика способна на такое. Хотя никто не может быть уверен, что используемый математический аппарат — это единственное средство познания окружающего мира. Вполне возможно, что маленькие зеленые человечки, проживающие в другой галактике, додумались до совершенно другой математики, которая столь же хорошо (а может, и еще лучше) способна описать те же природные явления. У нас же есть пример квантовой механики, в которой возможны разные эквивалентные формулировки, приводящие к одинаковым предсказаниям. А про интенсивно исследуемую сейчас теорию суперструн (М-теорию в десятимерном пространстве), претендующую на описание всех без исключения фундаментальных взаимодействий, включая квантовую гравитацию, один из ее создателей сказал, что это математика XXI века, случайно открытая в XX веке. Когда нынешние профессора были студентами, о такой математике они и не слышали.

Физические модели и теории предназначены для приведения в соответствие между собой тех сведений, которые мы получаем, исследуя явления природы. Ни

одна из теорий не может претендовать на звание истинной, она лишь дает наилучшее для данного времени описание той области, в которой она применяется. Мы называем теорию «хорошей», если она:

- исходит из небольшого числа фундаментальных положений;
- имеет достаточно общий характер (т. е. не создана для объяснения всего лишь одного или нескольких фактов);
- позволяет сделать ряд точных и четких предсказаний.

История науки показала, что, как правило, «хорошая» теория допускает возможность усовершенствования. Это не значит, что «хорошая» теория верна безусловно. Теория всегда может быть изменена (или же полностью отвергнута), если станут известны новые факты. Просто при более глубоком проникновении в суть вещей оказывается, что «хорошая» теория является частью более общей теории и имеет свою область применимости. Например, после открытия специальной теории относительности классическую механику Ньютона никто не отменял: в первом порядке по величине отношения  $v/c$  скорости объекта  $v$  к скорости света  $c$  результаты обеих теорий совпадают, но в членах второго порядка  $v^2/c^2$  уже проявляются различия.

Совершенно не исключено, что при усовершенствовании теории какие-то из вопросов «почему?» превратятся в вопросы «как?». **Почему** мы живем в трех пространственных измерениях и одном временном? Сейчас вряд ли кто сможет ответить на этот вопрос. Но, быть может, когда-нибудь мы поймем, **как** свернулись шесть измерений М-теории, оставив нам для проживания «всего лишь» четырехмерное пространство-время.

## 1.2 Единицы измерения

Результаты многочисленных опытных наблюдений обобщают в виде физических законов, которые представляют собой некоторые утверждения относительно связей между теми или иными физическими величинами. Для проверки на опыте этих утверждений необходимо независимыми способами измерить все те величины, которые связаны в данном физическом законе. Измерение любой физической величины проводится по отношению к определенному стандарту или *единице* этой величины. Эти единицы обязательно должны указываться вместе с численным значением результата. Метрическая система мер, созданная в эпоху Великой французской революции, по мысли ее авторов должна была служить «на все времена, для всех народов, для всех стран».

Из нескольких условно выбираемых основных единиц строятся производные единицы. Если, например, скорость определяется как отношение пройденного расстояния к затраченному времени, то единицей скорости будет отношение единицы длины к единице времени. Но можно было бы взять за основную единицу скорость и тогда выразить единицу расстояния как произведение скорости на время. Именно так и поступают, когда расстояния до звезд измеряют в световых годах (1 св. г. — расстояние, которое свет проходит за год). Можно использовать световые минуты и световые секунды. Так, среднее расстояние от Земли до Солнца равно 146,6 млн км, но с тем же успехом можно утверждать, что оно равно восьми с хвостиком световым минутам.

В Международной системе единиц (СИ — начальные буквы французского наименования *Système International*) в качестве основных выбраны следующие семь единиц:

- единица длины — м (метр) [L]
- единица времени — с (секунда) [T]
- единица массы — кг (килограмм) [M]
- единица электрического тока — А (ампер) [I]
- единица температуры — К (кельвин) [K]
- единица силы света — кд (кандела) [J]
- единица количества вещества — моль (моль) [ $\nu$ ]

В квадратных скобках указано общепринятое обозначение для размерностей: длину можно измерять в метрах, ярдах, мартышках или попугаях, но обозначение L (от англ. *length*) всегда подскажет нам, что мы имеем дело с длиной. Аналогично вводится обозначение размерности времени T (от англ. *time*).

Для простоты ученые стремятся выбрать минимальное число основных величин, которое позволяет дать полное описание физического мира. В выборе основных величин и их производных имеется некоторый произвол.

С двумя из этих единиц мы знакомимся уже с самого детства. Это естественно, так как все события происходят где-то и когда-то. Мы обитаем в пространстве, которое измеряем единицами длины. Мы живем во времени, и человечество научилось его измерять в глубокой древности. **Почему** наш мир существует во времени и в пространстве? Мы договорились таких вопросов не ставить, так как наука все равно на них не ответит. Но **каковы** свойства пространства и времени? — этот вопрос вполне закономерен. Изучая физические явления, мы узнаем свойства пространства и времени, и процесс этого познания еще далеко не завершен.

До недавнего времени международным эталоном метра считалось расстояние между двумя штрихами на стержне из платинового сплава, хранящемся в Международном бюро мер и весов в Париже. В последние годы эталон метра определялся числом длин световой волны конкретной (оранжевой) спектральной линии изотопа криптона  $^{86}_{36}\text{Kr}$ , соответствующей переходу электрона между квантовыми состояниями  $2p_{10}$  и  $5d_3$  (что это такое, мы узнаем в заключительных частях курса). Метр содержит 1 650 763,73 длины волны этой спектральной линии в вакууме. Вследствие возросших требований к точности эталона длины в 1983 г. было принято следующее определение метра: это расстояние, проходимое светом в вакууме за время  $t = 1/299\,792\,458$  секунд. Иными словами, постулировано, что скорость света **в точности** равна  $c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8$  м/с. В сущности это означает, что вместо длины в качестве фундаментальной единицы выбрана скорость, а длина стала производной единицей.

На рисунке 1.1 представлены пространственные расстояния, характерные для окружающего мира. Весь доступный нашим наблюдениям мир заключен в интервале от  $10^{26}$  м (радиус видимой части Вселенной) до  $10^{-18}$  м (расстояния, «прощупываемые» в современных экспериментах с элементарными частицами). Для удобства шкала расстояний  $r$  изображена в логарифмическом масштабе  $\lg(r/1\text{ м})$ . Это значит, что расстоянию 10 м на шкале соответствует число 1, а расстоянию 100 км = 100 000 м — число 5.

Если раньше время определяли по Солнцу, и секунда соответствовала  $1/86400$  средних солнечных суток, то теперь она равна продолжительности 9 192 631 770

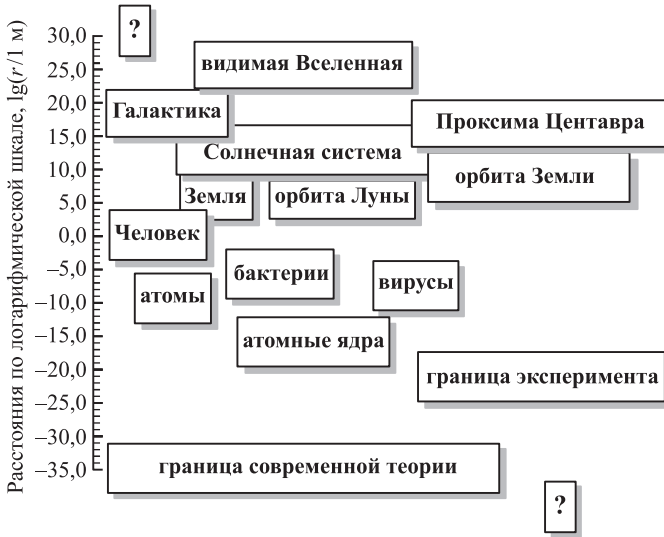


Рис. 1.1. Пространственные расстояния в природе

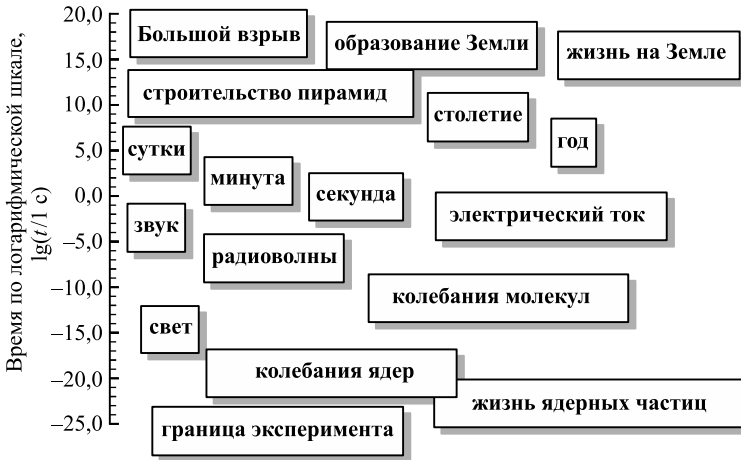


Рис. 1.2. Временные интервалы в природе

периодов колебаний световой волны, излученной при переходе между сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия  $^{133}_{55}\text{Cs}$ . Цезиевый стандарт очень точен: за 6000 лет двое цезиевых часов могут разойтись лишь на одну секунду. Существуют и более точные часы на водородном мазере: разница в секунду набегает здесь за 30 млн лет. Возможно, водородный мазер будет принят когда-нибудь в качестве нового эталона времени.

Некоторые временные интервалы, встречающиеся в природе, иллюстрирует рис. 1.2. Самое большое время, о котором мы можем получить какие-то све-

дения, — это время существования видимой части Вселенной. Она родилась в результате так называемого Большого взрыва примерно 14 млрд лет тому назад ( $4 \cdot 10^{17}$  с). Наименьшие времена ( $\sim 10^{-26}$  с), с которыми мы сталкиваемся, по порядку величины соответствуют времени, за которое свет проходит самые малые расстояния, доступные сейчас для изучения.

### 1.3 Анализ размерностей

Физические величины бывают размерными и безразмерными. Величина называется *размерной*, если ее численное значение зависит от выбора системы единиц. Так, промежуток времени между двумя последовательными восходами Солнца мы можем выразить как 1 сутки, или как 24 часа, или как 1440 минут, или 86 400 секунд. Числа меняются, но мы говорим о том же самом интервале времени. Величина называется *безразмерной*, если ее значение сохраняется неизменным при любом выборе системы единиц. Например, высота Эвереста ( $h = 8,848$  км) и средний радиус Земли ( $R = 6371,0$  км) — размерные величины, но их отношение уже величина безразмерная: независимо от системы единиц  $h/R = 0,0014$ .

Размерные величины можно умножать и делить друг на друга. Так, отношение пройденного расстояния ко времени в пути дает нам новую физическую величину (скорость), размерность которой  $[LT^{-1}]$  (м/с, км/ч и т. п.). При определении размерности величины обычно пользуются размерностями основных, а не производных величин. Складывать и вычитать можно только величины одинаковой размерности (нельзя сложить, например, сантиметры и граммы).

Любой физический закон не должен зависеть от выбранной нами системы единиц. Это естественно, так как закон природы описывает соотношение между величинами, которое существовало до нас, существует независимо от нас и будет существовать после нас. А система единиц — дело произвольного соглашения между людьми. Отсюда вытекает очень важное правило: **обе части любого равенства должны иметь одинаковые размерности**. Написав некое соотношение, мы всегда можем проверить его правильность анализом размерности. Таким путем выявляются многие студенческие ошибки. Более того, подбор размерностей зачастую позволяет угадать результат до проведения детальных вычислений.

Приведем пример. Автомобиль трогается с места и движется при этом равноускоренно с ускорением  $a$ . Какую скорость  $v$  приобретет автомобиль, пройдя путь  $s$ ? Применение анализа размерностей позволяет найти вид искомого соотношения. Скорость является функцией  $a$  и  $s$ . Это значит, что она выражается как произведение некоторых степеней этих величин:  $v = Ca^p s^q$ , где  $C$  — безразмерная постоянная. Надо определить показатели степени  $p$  и  $q$ . Запишем формулу размерности для этого соотношения:

$$\left[ \frac{L}{T} \right] = \left[ \frac{L}{T^2} \right]^p [L]^q \quad \text{или} \quad [LT^{-1}] = [L^{p+q} T^{-2p}].$$

В силу того что все семь основных единиц являются независимыми, для согласования размерностей обеих частей равенства необходимо, чтобы  $p$  и  $q$  удовлетворяли системе уравнений:  $1 = p + q$ ,  $-1 = -2p$ , откуда следует:  $p = 1/2$ ,  $q = 1/2$ . Таким образом, анализ размерностей приводит нас к формуле  $v = C\sqrt{as}$ .

Значение безразмерной постоянной  $C$  не может быть определено таким способом; при точном решении оно оказывается равным  $C = \sqrt{2}$ . Как правило, значения безразмерных постоянных в физике (факторы типа  $\sqrt{2}$ ,  $1/2$ ,  $\pi$  и т. п.) не слишком велики и не слишком малы. Поэтому анализ размерностей позволяет оценить масштабы тех или иных физических величин.

Применение анализа размерностей требует осторожности и определенного искусства. Здесь могут встретиться два подводных камня. Первый из них — определение физических величин, от которых может зависеть результат. Для этого требуется понимание, какие физические законы и явления важны для рассматриваемой системы. Вторым подводным камнем — существование в данной задаче величин, которые могут образовать безразмерное отношение.

Рассмотрим пример. Используя анализ размерностей, найти силу сопротивления  $F_r$  среды движущемуся телу. В этой задаче важно с самого начала определить, от каких величин может зависеть искомая сила. Что нам подсказывает опыт? Чем больше скорость  $v$  движения тела, тем больше сила сопротивления среды. Значит, сила  $F_r$  должна зависеть от скорости движения. Далее, тела с большим поперечным сечением испытывают большее сопротивление, чем с меньшим. Поэтому в ответ должна войти площадь  $S$  поперечного сечения тела. Наконец, сила  $F_r$  должна зависеть от параметра, характеризующего свойства среды. Здесь и таится первый подводный камень. Какую характеристику среды выбрать?

Представляется естественным в качестве такого параметра взять плотность (воздуха, жидкости)  $\rho$ : чем плотнее среда, тем большее влияние она оказывает на движение тела. Исходя из сказанного, мы ищем силу сопротивления в виде  $F_r = C v^p S^q \rho^r / 2$  (множитель  $1/2$  можно включить в  $C$ , но мы его выделяем по историческим причинам). Сила имеет размерность произведения массы на ускорение, т. е.  $[F] = [L T^{-2} M]$ . Условие совпадения размерностей обеих частей равенства имеет вид:

$$[L T^{-2} M] = [L T^{-1}]^p [L^2]^q [L^{-3} M]^r = [L^{p+2q-3r} T^{-p} M^r],$$

откуда следует система уравнений:

$$\begin{aligned} 1 &= p + 2q - 3r, \\ -2 &= -p, \\ 1 &= r. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что ее решениями являются числа  $p = 2$ ,  $q = 1$ ,  $r = 1$ , откуда следует искомая формула:

$$F_r = C S \frac{\rho v^2}{2}. \quad (1.1)$$

Но почему мы выбрали плотность воздуха в качестве параметра, отвечающего за сопротивление среды? Почему бы в качестве такового не взять величину вязкости воздуха  $\eta$ , имеющую размерность  $[M L^{-1} T^{-1}]$ ? Позже мы еще познакомимся поближе с вязкостью, а пока достаточно интуитивного представления, что при той же плотности среда может быть более или менее вязкой (кисель и компот). Тогда искомая сила может быть представлена в виде  $F = C v^p S^q \eta^s$ . Напишем аналогичное условие равенства размерностей:

$$[L T^{-2} M] = [L T^{-1}]^p [L^2]^q [L^{-1} T^{-1} M]^s = [L^{p+2q-s} T^{-p-s} M^s],$$

откуда следует система уравнений:

$$\begin{aligned} 1 &= p + 2q - s, \\ -2 &= -p - s, \\ 1 &= s. \end{aligned}$$

Ее решением являются числа  $p = 1$ ,  $q = 1/2$ ,  $s = 1$ , т. е. искомая формула имеет вид:

$$F_r = C \eta \sqrt{S} v. \quad (1.2)$$

Формулы (1.1) и (1.2) совершенно различны: в одной из них сила зависит от скорости квадратично, в другой — линейно. Так какая же из них верна? Данный пример обнажил первый подводный камень: мы должны решить, какой из двух возможных процессов (лобовое сопротивление или вязкость среды) доминирует в конкретной рассматриваемой задаче.

Попробуем перехитрить уравнения, включив в анализ размерности и плотность среды, и ее вязкость:  $F_r = (C/2) v^p S^q \rho^r \eta^s$ . Соотношения размерностей принимают форму:

$$\begin{aligned} [\text{LT}^{-2}\text{M}] &= [\text{LT}^{-1}]^p [\text{L}^2]^q [\text{L}^{-3}\text{M}]^r [\text{L}^{-1}\text{T}^{-1}\text{M}]^s = \\ &= [\text{L}^{p+2q-3r-s} \text{T}^{-p-s} \text{M}^{r+s}], \end{aligned}$$

откуда получаем уравнения:

$$\begin{aligned} 1 &= p + 2q - 3r - s, \\ -2 &= -p - s, \\ 1 &= r + s. \end{aligned}$$

Сразу замечаем, что нас ожидает второй подводный камень: у нас всего три уравнения для определения четырех параметров. Стало быть, какой-то из них останется неизвестным. Попробуем разобраться, что бы это значило? Два последних уравнения позволяют выразить параметры  $p$  и  $r$  через  $s$ :

$$r = 1 - s, \quad p = 2 - s. \quad (1.3)$$

Подставляя их в первое уравнение, получаем

$$1 = -1 + s + 2q,$$

откуда находим

$$q = 1 - \frac{s}{2}. \quad (1.4)$$

Отсюда получаем силу сопротивления в виде:

$$F_r = \frac{C}{2} v^{2-s} S^{1-s/2} \rho^{1-s} \eta^s = C \frac{\rho S v^2}{2} \left( \frac{\sqrt{S} v \rho}{\eta} \right)^{-s}. \quad (1.5)$$

Произвольная степень комбинации в скобках указывает на то, что эта комбинация безразмерна. Раз так, она может быть включена в безразмерную величину

$C$ , которая в этом случае оказывается не постоянной величиной, а *неизвестной функцией безразмерного параметра*:

$$\begin{aligned} F_r &= C(\mathbf{Re}) S \frac{\rho v^2}{2}, \\ \mathbf{Re} &= \frac{\sqrt{S} v \rho}{\eta}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Этот безразмерный параметр (число Рейнольдса  $\mathbf{Re}$ ) играет важную роль в определении характера силы сопротивления. Функция  $C(\mathbf{Re})$  называется коэффициентом сопротивления. Детали мы обсудим позднее, но, забегая вперед, сразу скажем: при малых скоростях воспроизводится выражение (1.2), а при больших — формула (1.1). Данный пример демонстрирует, как обращаться с безразмерными комбинациями, если таковые возникают при анализе размерности.

В заключение приведем **экзотический пример** — использование так называемой векторной размерности. Решим задачу о дальности  $l_0$  полета тела, брошенного под углом к горизонту со скоростью  $v_0$ . На полет тела оказывает влияние притяжение Земли, т. е. в ответ, помимо начальной скорости, должно войти ускорение свободного падения  $g$ . Проведем сначала обычный анализ размерностей: ищем искомую дальность полета в виде  $l_0 = C v^p g^q$ , откуда получаем уравнения

$$[\mathbf{L}] = [\mathbf{L}\mathbf{T}^{-1}]^p [\mathbf{L}\mathbf{T}^{-2}]^q = [\mathbf{L}^{p+q}\mathbf{T}^{-p-2q}].$$

Вытекающая отсюда система уравнений

$$\begin{aligned} 1 &= p + q, \\ 0 &= -p - 2q \end{aligned}$$

имеет очевидное решение  $p = 2, q = -1$ , т. е. дальность полета дается формулой

$$l_0 = C \frac{v_0^2}{g}. \quad (1.7)$$

Зависимость от угла вылета тела мы потеряли, так как она вошла в безразмерную константу  $C$ . Но в данной задаче можно принять во внимание, что мы вправе использовать разные единицы для дальности полета тела и высоты его подъема. Например, рисуя параболу, соответствующую полету снаряда, мы используем разные масштабы по осям  $x$  и  $y$ , чтобы график поместился на странице, так как обычно дальность полета снаряда намного превосходит высоту его подъема. В соответствии со сказанным, при анализе размерностей мы используем «горизонтальные»  $L_{\rightarrow}$  и «вертикальные»  $L_{\uparrow}$  единицы длины. Это значит, что размерности вертикальной и горизонтальной составляющих начальной скорости различны, и мы должны искать выражение для дальности полета в виде  $l_0 = C v_{0\uparrow}^{p_1} v_{0\rightarrow}^{p_2} g^q$ . Дальность полета выражается в «горизонтальных» метрах, а ускорение свободного падения — в «вертикальных» метрах на секунду в квадрате, так что уравнения размерности имеют вид:

$$[\mathbf{L}_{\rightarrow}] = [\mathbf{L}_{\uparrow}\mathbf{T}^{-1}]^{p_1} [\mathbf{L}_{\rightarrow}\mathbf{T}^{-1}]^{p_2} [\mathbf{L}_{\uparrow}\mathbf{T}^{-2}]^q = [\mathbf{L}_{\uparrow}^{p_1+q}\mathbf{L}_{\rightarrow}^{p_2}\mathbf{T}^{-p_1-p_2-2q}].$$

Отсюда следует система уравнений:

$$\begin{aligned} 1 &= p_2, \\ 0 &= p_1 + q, \\ 0 &= -p_1 - p_2 - 2q. \end{aligned}$$



Ее решение  $p_1 = 1, p_2 = 1, q = -1$  ведет к формуле  $l_0 = C v_{0\uparrow} v_{0\rightarrow} g^{-1}$ . Если тело вылетает под углом  $\alpha$  к горизонту, то имеем  $v_{0\uparrow} = v_0 \sin \alpha, v_{0\rightarrow} = v_0 \cos \alpha$ , откуда находим окончательно

$$l_0 = \frac{C}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (1.8)$$

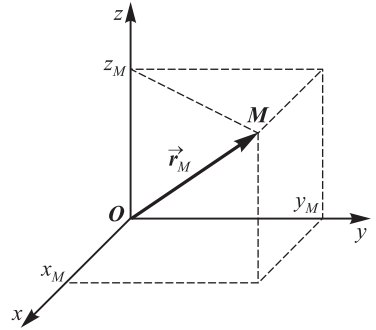
Точное решение получается отсюда при  $C = 2$ . Используя «векторную» размерность (разные единицы длины в различных направлениях), мы сумели уловить зависимость дальности полета тела от угла вылета.

## 1.4 Система отсчета

Коль скоро мы говорим об измерениях расстояний и времени и выбрали соответствующие единицы (метры, секунды), мы должны условиться, относительно чего мы определяем эти пространственные и временные дистанции. Положение объекта может быть определено только по отношению к каким-то другим телам. Говорить о движении объекта, т. е. об изменении его положения, мы можем, только если указываем тела, относительно которых это положение определено. Такие тела, которые выбраны для определения положений всех остальных объектов, называются *телами отсчета*. В повседневной практике естественным телом отсчета является наша Земля. Но этот выбор не является единственно возможным. Часто удобно пользоваться другими телами отсчета, например Солнцем или звездами. По отношению к разным телам отсчета одни и те же объекты совершают различные движения. Достаточно вспомнить спор относительно двух астрономических систем — Птолемея и Коперника. Они, в сущности, отличались лишь телами отсчета, и выбор Коперником Солнца вместо Земли упростил описание движения планет.

Далее, на теле отсчета выделяют точку, называемую *началом отсчета*, и выбирают единицы измерения расстояний (в СИ — метры). После этого положение какой-либо точки  $M$  в пространстве может быть задано с помощью направленного отрезка (радиуса-вектора  $\vec{r}_M$ ), соединяющего начало отсчета  $O$  с данной точкой  $M$ . Но вектор — абстрактно-математическое понятие, физическим смыслом оно наполняется, когда мы вводим *систему координат*. Это может быть декартова прямоугольная система — три взаимно перпендикулярных оси, точка пересечения которых совмещена с началом отсчета. В этом случае радиус-вектор задается тремя проекциями  $x_M, y_M, z_M$  данной точки  $M$  на оси (рис. 1.3), которые называются *компонентами* вектора  $\vec{r}_M$ . Это может быть сферическая, цилиндрическая или любая другая система координат, где тот же радиус-вектор  $\vec{r}_M$  будет задан тройкой других чисел. Число «три» — размерность нашего пространства, т. е. число независимых координат, необходимых для определения положения точки.

Для отсчета времени нам необходимы какие-то периодические процессы, происходящие в природе или устройствах, созданных человеком. Такие процессы мы будем называть *часами*. И здесь надо условиться о выборе *начала отсчета времени* (можно отсчитывать время от сотворения мира, или от основания Рима, или от Рождества Христова, или от бегства Магомета из Мекки в Медину и т. д.). В отличие от трехмерного пространства время одномерно, поэтому в дополнение к началу отсчета времени достаточно выбрать лишь единицы измерения (секунды).



**Рис. 1.3.** Положение точки  $M$  задается радиусом-вектором  $\vec{r}_M$ , имеющим компоненты  $x_M, y_M, z_M$

◆ Тело отсчета, снабженное системой координат и часами, называют **системой отсчета**. ◆

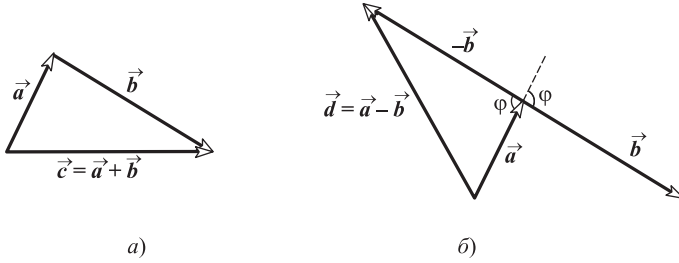
В классической механике, которую сформулировал в современном виде Исаак Ньютон, *предполагается* абсолютный характер пространства и времени. Иначе говоря, в классической механике считается, что измеряемые расстояния и интервалы времени не зависят от системы отсчета. Скажем, если в системе отсчета, связанной с Землей, расстояние от Москвы до Таллина составляет 860 км, то предполагается, что таким же будет результат измерений, проведенных по отношению к системе отсчета, связанной со звездами. Эти положения, кажущиеся столь естественными, вытекают, строго говоря, только из нашего практического опыта, ограниченного сравнительно небольшими расстояниями, временами и малыми скоростями. Впоследствии они были пересмотрены теорией относительности.

## 1.5 Алгебра векторов

Как известно, бывают величины *скалярные*, не имеющие направления, а бывают *векторные*, которым кроме величины приписывается некое направление. Время — величина скалярная, а положение в пространстве надо задавать векторами. Недостаточно сказать, что этот учебник пишется в 860 км от Таллина. Этой информации не хватит, чтобы узнать, где именно: в Москве или, скажем, в Копенгагене. Отсюда ясно, что векторы должны играть важную роль в физике, и недаром векторное исчисление получило современный вид именно благодаря работам физиков (Дж. Гиббс). Кроме длины и направления, для векторов определяются операция умножения вектора на действительное число и операция сложения векторов, т. е. задается *векторная алгебра*.

Использование векторного исчисления удобно тем, что многие соотношения получаются в общем компактном виде и без особого труда могут быть трансформированы в соответствующие соотношения для любой системы координат. Соотношения между векторами остаются неизменными при смене начала отсчета или выборе иной системы координат. В этом разделе мы напомним некоторые правила *векторной алгебры*. Занимаясь сейчас физикой, мы не стремимся к точным математическим определениям.

Итак, любой вектор  $\vec{a}$  характеризуется своей длиной (модулем)  $a$  и направлением. Пусть нам дана какая-то декартова прямоугольная система координат. Любой вектор  $\vec{a}$  можно задать тремя компонентами  $\{a_x, a_y, a_z\}$  — проекциями вектора на оси  $Ox, Oy, Oz$ .



**Рис. 1.4.** Сумма векторов  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  (а) и разность тех же векторов  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ , которая может быть представлена как сумма  $\vec{a}$  и  $-\vec{b}$  (б)

**Длина вектора.** Длиной (модулем) вектора  $\vec{a}$  называется число

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Длина вектора не меняется при поворотах системы координат.

**Умножение вектора на число.** Произведение вектора  $\vec{a}$  на число  $\alpha$  дает новый вектор  $\vec{b} = \alpha \vec{a}$  с компонентами  $b_x = \alpha a_x$ ,  $b_y = \alpha a_y$ ,  $b_z = \alpha a_z$ . Отсюда следует, во-первых, что длина вектора  $\vec{b}$  равна длине вектора  $\vec{a}$ , умноженной на абсолютное значение числа  $\alpha$ :  $|\alpha \vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}|$ . Во-вторых, векторы  $\vec{a}$  и  $\alpha \vec{a}$  параллельны (коллинеарны) и имеют одно направление, если  $\alpha > 0$ , и противоположное, если  $\alpha < 0$ .

**Единичный вектор.** Единичный вектор  $\vec{n}$  — вектор с длиной, равной единице:  $|\vec{n}| = 1$ . Единичный вектор  $\vec{n}_a$  в направлении вектора  $\vec{a}$  равен  $\vec{n}_a = \vec{a}/|\vec{a}|$ . Особую роль играют единичные векторы вдоль положительных направлений осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Их обозначают  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  и называют *ортами*. Иногда оси маркируются цифрами (1, 2, 3), а орты обозначают как  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ . В соответствии с этими определениями вектор  $\vec{a}$  можно представить в виде суммы по ортам:  $\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$ .

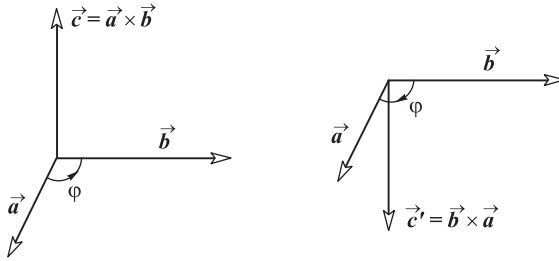
**Сложение векторов.** Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , компоненты которого равны сумме компонентов обоих слагаемых:  $c_x = a_x + b_x$ ,  $c_y = a_y + b_y$ ,  $c_z = a_z + b_z$ . Отсюда следует геометрическое представление суммы векторов — правило параллелограмма (рис. 1.4, а). Аналогично определяется разность векторов  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$  (рис. 1.4, б).

**Скалярное произведение.** Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — это число (обозначается  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ), равное сумме произведений компонентов:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ . Отсюда следует, что скалярное произведение вектора на себя  $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$  равно квадрату длины вектора:  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ . Второе следствие: скалярное произведение коммутативно:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ . Справедливо также соотношение  $\vec{a} \cdot (\alpha \vec{b} + \beta \vec{c}) = \alpha \vec{a} \cdot \vec{b} + \beta \vec{a} \cdot \vec{c}$ .

Скалярное произведение не зависит от поворота системы координат. Можно повернуть оси так, чтобы оба вектора лежали в плоскости  $xOy$  и ось  $Ox$  была направлена вдоль вектора  $\vec{a}$ . В этой повернутой системе координат векторы-сомножители имеют компоненты:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \{1, 0, 0\}, \quad \vec{b} = |\vec{b}| \{\cos \varphi, \sin \varphi, 0\}.$$

Поэтому скалярное произведение может быть представлено в виде  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ . Здесь  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Если векторы ортогональны ( $\varphi = \pi/2$ , т. е.  $\cos \varphi = 0$ ), то скалярное произведение равно нулю:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . Обратное: если скалярное произведение равно нулю, то либо один из сомножителей — вектор нулевой длины, либо они ортогональны.



**Рис. 1.5.** Векторное произведение двух векторов — смена порядка сомножителей меняет знак векторного произведения:  $\vec{c}' = -\vec{c}$

Приведем пример использования скалярного произведения. Возьмем разность двух векторов:  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ . Возведем в квадрат обе части этого равенства:  $d^2 = a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$ . Это теорема косинусов; в частном случае прямоугольного треугольника  $\varphi = \pi/2$  из нее следует теорема Пифагора.

**Векторное произведение.** Векторным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется *вектор*  $\vec{c}$  (обозначается как  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  или  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ ) с компонентами

$$c_x = a_y b_z - b_y a_z, \quad c_y = a_z b_x - b_z a_x, \quad c_z = a_x b_y - b_x a_y.$$

Отсюда следует, что разложение векторного произведения по ортам может быть представлено в виде определителя

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

В векторном произведении важен порядок сомножителей:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ . Справедливо соотношение:

$$\vec{a} \times (\beta \vec{b} + \gamma \vec{d}) = \beta \vec{a} \times \vec{b} + \gamma \vec{a} \times \vec{d}.$$

Чтобы понять, куда направлено векторное произведение и чему равна его длина, снова повернем систему координат так, чтобы плоскость осей  $xOy$  совпала с плоскостью векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  и ось  $Ox$  была направлена вдоль вектора  $\vec{a}$ . Тогда  $\vec{a} = |\vec{a}| \{1, 0, 0\}$ ,  $\vec{b} = |\vec{b}| \{\cos \varphi, \sin \varphi, 0\}$ . Подставляя эти значения в определитель для векторного произведения, получаем

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ |\vec{a}| & 0 & 0 \\ |\vec{b}| \cos \varphi & |\vec{b}| \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Это значит, что длина векторного произведения равна  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$  и оно ортогонально обоим сомножителям  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , причем направление его определяется по правилу буравчика (штопора): если ручка штопора вращается от первого сомножителя ко второму по кратчайшему пути, то штопор ввинчивается по направлению их векторного произведения (рис. 1.5).

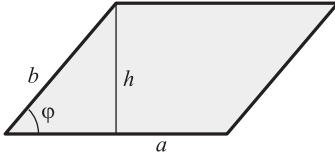


Рис. 1.6. Площадь параллелограмма

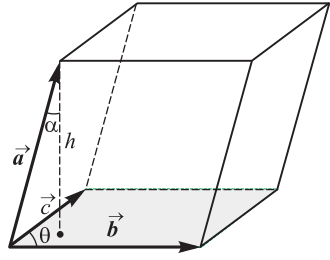


Рис. 1.7. Три вектора, определяющие параллелепед

Геометрический смысл векторного произведения: если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны, то абсолютная величина их векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

Если множители векторного произведения коллинеарны ( $\varphi = 0, \pi$ ), то векторное произведение равно нулю, так как  $\sin \varphi = 0$ . Обратное, из равенства  $\vec{a} \times \vec{b}$  вытекает, что  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , либо один из векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  равен нулю. Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  — равенство нулю их векторного произведения.

Высота  $h$  параллелограмма (рис. 1.6) равна  $h = b \sin \varphi$ , площадь параллелограмма  $S$  равна произведению основания  $a$  на высоту  $h$ :  $S = ah = ab \sin \varphi$ , что и доказывает утверждение.

**Производная вектора.** Производная вектора  $\vec{a}$  — это *вектор*, чьи компоненты равны производным от соответствующих компонент  $\vec{a}$ . Например, вектор  $\vec{a}$  зависит от времени  $t$ . Тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{i} \frac{da_x}{dt} + \vec{j} \frac{da_y}{dt} + \vec{k} \frac{da_z}{dt}.$$

Производные от скалярного и векторного произведений выглядят обычным образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}, \\ \frac{d}{dt} \vec{a} \times \vec{b} &= \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что порядок множителей важен только в векторном произведении.

**Смешанное произведение.** Смешанное произведение трех векторов — это скалярное произведение одного из них на векторное произведение двух других:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) = \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Смешанное произведение по абсолютной величине равно объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (рис. 1.7). Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Если какие-то два вектора коллинеарны, то смешанное произведение с любым третьим вектором равно нулю. Если три вектора компланарны (т. е. лежат в одной плоскости), то их смешанное произведение равно нулю.

**Двойное векторное произведение.** Двойное векторное произведение трех векторов — это векторное произведение одного из них на векторное произведение двух других:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (1.10)$$

Для двойного векторного произведения справедлива формула Лагранжа («бац минус цаб»):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (1.11)$$

Можно доказать, что для любых трех векторов выполняется тождество Якоби:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}. \quad (1.12)$$

## Контрольные вопросы

1. Как вы думаете, можно ли считать наукой астрологию с учетом ее подхода к вопросам «как» и «почему»?
2. Как сказано выше, единицу измерения времени (секунду) определяют сейчас по цезиевому стандарту. Скорость же света зафиксирована, так что метр определен как  $1/(2,997\,924\,58 \cdot 10^8)$  расстояния, проходимого лучом света за 1 с. Почему специалисты не могли зафиксировать какое-либо более удобное значение скорости света, например,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с?
3. Общий вопрос, связанный с предыдущим. Выбирая стандарт какой-то единицы измерения, мы делаем его по определению неизменяемым. В чем тогда смысл требования точности и стабильности, предъявляемого к любому эталону единицы измерения?
4. Тело массой  $m$  брошено под углом к горизонту с начальной скоростью  $v$ . Ускорение силы тяжести  $g$ . С помощью анализа размерностей получите выражение для максимальной высоты подъема тела и дальности его полета. Объясните результат.
5. В некоей задаче требовалось найти энергию тела, причем в условии фигурировали следующие параметры: масса  $m$ , скорость  $v$ , ускорение  $g$ , высота  $h$ , время  $t$ . Пять студентов представили пять разных ответов: 1)  $mg^2t^2$ , 2)  $mv^3/gh$ , 3)  $mg^2t$ , 4)  $\sqrt{gvt}$ , 5)  $mh^2$ . Какие из них заведомо неверны? Размерность энергии  $[E] = [ML^2T^{-2}]$ .
6. Тело массой  $m$  колеблется на конце пружины с амплитудой  $A$  (т. е. путь, проходимый телом за период колебаний, равный  $4A$ ). Используя анализ равномерностей, найти вид зависимости периода колебаний от величины  $m$ ,  $A$  и коэффициента жесткости пружины  $k$ . Последний входит в закон Гука  $F = -kx$ , где  $F$  — сила, необходимая для растяжения пружины на длину  $x$ .
7. Что такое система отсчета?
8. Почему говорят, что Солнце восходит и заходит? Что в данном случае является телом отсчета?
9. Пассажир идущего скорого поезда смотрит в окно на вагоны встречного поезда. В тот момент, когда мимо прошел последний вагон встречного поезда, пассажиру показалось, что его движение замедлилось. Почему?

10. Почему дождевые капли в безветренную погоду оставляют наклонные прямые полосы на стеклах равномерно движущегося железнодорожного вагона?
11. Каков результат скалярного произведения  $\vec{i} \cdot \vec{j}$  двух ортов  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ ? Их векторного произведения  $\vec{i} \times \vec{j}$ ?
12. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, равен абсолютному значению их смешанного произведения.
13. Доказать тождество Якоби.
14. Доказать тождество

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

## Глава 2

# Кинематика материальной точки

*Механика* (от гр. *μηχανή* — машина) изучает закономерности наиболее простых форм движения тел и причины, вызывающие эти движения. Типичная задача механики: зная состояние системы (координаты и скорости) в какой-то начальный момент времени  $t_0$ , а также законы, управляющие движением, определить состояние системы во все последующие моменты времени  $t$ . Для этого используются *уравнения движения* — математические соотношения, позволяющие определить положение материальной точки (системы) в пространстве в любой момент времени по известным начальным условиям. Опыт показывает, что знания начальных скоростей и координат системы достаточно для прослеживания ее дальнейшей судьбы. С математической точки зрения это означает, что уравнения движения не содержат более высоких производных по времени, нежели вторая (как говорят, это уравнения второго порядка). *Почему* это так — вопрос запрещенный. *Каковы* эти уравнения — мы увидим в дальнейшем.

*Кинематика* изучает движение тел, не вдаваясь в причины, его вызывающие. Кинематика оперирует такими величинами, как перемещение, путь, скорость, ускорение.

### 2.1 Абстракция в механике

Ни одна физическая задача не может быть решена абсолютно точно. Решая задачу приближенно, пренебрегают некоторыми факторами, которые в данном случае несущественны, т. е. *абстрагируются* от них. Одна из абстракций в механике — *материальная точка*.

◆ *Материальной точкой* в физике называют тело, размеры, форма и внутренняя структура которого в данной задаче несущественны. ◆

Механическая система — совокупность тел, выделенная для рассмотрения. Если линейные размеры тел малы по сравнению с расстояниями между ними, а вращением тел вокруг осей, проходящих через них, можно пренебречь, то такую систему можно считать состоящей из материальных точек. Например, вычисляя время автомобиля в пути, можно пренебречь его линейными размерами по сравнению с проходимым расстоянием, т. е. рассматривать его как материальную точку. Но, изучая вращение колеса автомобиля, мы должны учесть его форму,



массу, размеры. Такой уровень абстракции, как материальная точка, нас уже не удовлетворит, и мы переходим на следующий уровень.

Второй уровень абстракции включает понятие абсолютно твердого тела.

◆ **Абсолютно твердое тело** — тело, деформациями которого можно в условиях данной задачи пренебречь. ◆

Здесь мы не пренебрегаем размерами тела, но считаем неизменными расстояния между двумя его любыми точками. На этом уровне можно решать задачи о вращениях колес и блоков, о работе гироскопов и т. п. Иначе говоря, те задачи, где деформации тела малы по сравнению с его линейными размерами.

Но если нас интересует именно деформация тел, скажем, при расчетах мостов, поведения балок и арок, то мы уже не можем рассматривать тела как абсолютно твердые и из области классической механики попадаем в сферу действия других научных дисциплин — теоретической механики, теории упругости и т. п. В этой книге мы ограничимся первыми двумя уровнями абстракции.

◆ **Число степеней свободы механической системы** — это количество независимых скалярных величин, однозначно определяющих положение системы в пространстве в данный момент времени. ◆

Так как наше пространство трехмерно, число степеней свободы материальной точки равно трем. Для системы из  $N$  материальных точек, между которыми нет жестких связей, число степеней свободы равно, естественно,  $3N$ . При наличии жестких связей между точками число степеней свободы уменьшается. Так, для указания положения абсолютно твердого тела нам нужно задать 1) три координаты, фиксирующие положение какой-то точки этого тела в пространстве; 2) два угла для определения направления оси, проходящей через выделенную точку тела; 3) угол поворота тела относительно этой оси. Таким образом, **число степеней свободы для абсолютно твердого тела равняется шести**. Для каждой степени свободы системы должно быть написано свое уравнение движения, т. е. количество скалярных уравнений движения системы должно совпадать с числом ее степеней свободы.

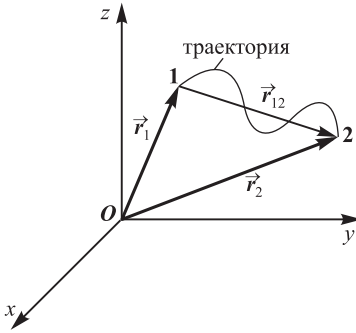
## 2.2 Перемещение

◆ **Траекторией** называется непрерывная линия, которую материальная точка описывает при своем движении. ◆

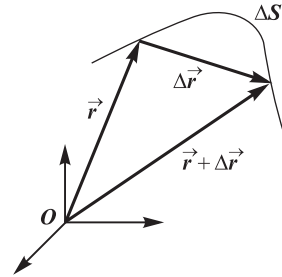
Понятие траектории является существенно классическим и теряет привычный смысл в квантовой механике. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение, движение по окружности и другие виды криволинейного движения.

Положение материальной точки  $M$  в пространстве задается радиус-вектором  $\vec{r}$  (см. раздел 1.4). Поскольку мы рассматриваем движущуюся точку, радиус-вектор зависит от времени:  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Если в какой-то момент времени  $t_1$  положение материальной точки в пространстве было  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ , а в момент времени  $t_2$  стало  $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ , то говорят о перемещении материальной точки из точки 1 в точку 2.

◆ **Перемещение** — это вектор  $\vec{r}_{12}$ , проведенный из положения точки в момент времени  $t_1$  в ее положение в момент  $t_2$ . ◆



**Рис. 2.1.** Вектор перемещения материальной точки из положения 1 в положение 2



**Рис. 2.2.** Длина вектора перемещения  $|\Delta \vec{r}|$  совпадает с пройденным путем  $\Delta s$  в общем случае только для бесконечно малых перемещений

Из рис. 2.1 очевидно, что

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1). \quad (2.1)$$

Перемещение как вектор характеризуется величиной  $|\vec{r}_{12}|$  и направлением, причем перемещения складываются по правилу параллелограмма.

От перемещения следует отличать пройденный материальной точкой путь.

♦ **Путь** — скалярная физическая величина, равная длине участка траектории, пройденного точкой за рассматриваемый промежуток времени. ♦

Путь — неотрицательная, неубывающая функция времени. Может случиться так, что перемещение равно нулю, а путь достигает значительной величины. Например, вы утром выезжаете из гаража, ездите целый день по городу и к вечеру ставите машину на прежнее место. Поскольку начальное и конечное положения совпали, перемещение равно нулю:  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 0$ , а пройденный путь отмечен на счетчике.

Чтобы вычислить пройденный путь, надо траекторию разбить на маленькие участки (рис. 2.2). Тогда длина вектора перемещения  $|\Delta \vec{r}|$  будет приблизительно равна пройденному пути  $\Delta s$ , причем совпадение будет тем точнее, чем мельче наше разбиение. При разбиении на *бесконечно малые участки*  $d\vec{r}$  имеем равенство

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \quad (2.2)$$

Для нахождения полного пути  $s$  надо просуммировать все эти бесконечно малые пути, т. е. вычислить интеграл

$$s = \int_1^2 ds = \int_1^2 |d\vec{r}|. \quad (2.3)$$

Здесь интегрирование ведется **вдоль** траектории от начальной точки  $\vec{r}_1$  до конечной  $\vec{r}_2$ .

### 2.3 Скорость

Скорость — векторная величина, характеризующая не только быстроту перемещения частицы по траектории, но и направление, в котором движется частица в каждый момент времени.

◆ **Скорость** определяется отношением перемещения  $\Delta\vec{r}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за которое это перемещение произошло. Точнее, скорость — это предел данного отношения для бесконечно малых промежутков времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad \blacklozenge \quad (2.4)$$

Здесь и далее мы часто для удобства будем использовать восходящее к Ньютону обозначение производной по времени в виде точки над соответствующей величиной:  $d\vec{r}/dt \equiv \dot{\vec{r}}$ . По геометрическому смыслу производной вектор скорости в каждой точке траектории направлен по касательной к траектории в этой точке (в сторону движения). Компоненты вектора скорости есть производные по времени от компонентов радиуса-вектора:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z, \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Модуль вектора скорости равен

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (2.6)$$

Его также можно определить через производную:

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Мы уже обсуждали, что при  $|\Delta\vec{r}| \rightarrow 0$  величина  $|\Delta\vec{r}|$  все меньше и меньше отличается от соответствующего пути  $\Delta s$  (см. рис. 2.2). Поэтому

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s} = 1$$

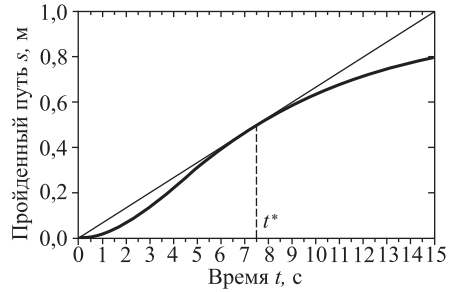
и в пределе

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (2.8)$$

Иными словами, модуль скорости — это производная пройденного пути по времени. Если нам известен пройденный путь  $\Delta s$  за какое-то конечное время  $\Delta t$ , то отношение

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.9)$$

называется *средней путевой скоростью*. Она может и не совпасть с модулем скорости  $v$ , но будет тем ближе к нему, чем меньше промежуток времени  $\Delta t$ .



**Рис. 2.3.** В точке  $t^* = 7,5$  с мгновенное значение скорости  $v$  совпадает со средней скоростью  $v_{\text{ср}}$  за период времени от  $t = 0$  до  $t = t^*$

От средней путевой скорости следует отличать *среднюю скорость* за какой-то промежуток времени

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.10)$$

хотя бы потому, что последняя является вектором. Рассмотрим пример. Пусть точка движется по прямой в одну сторону. На рис. 2.3 показан график пройденного ею пути в зависимости от времени  $t$ . Используя физический смысл скорости, найти с помощью этого графика момент времени  $t^*$ , в который мгновенная скорость равна средней путевой скорости за первые  $t^*$  секунд движения точки.

По геометрическому смыслу производной модуль скорости  $v = ds/dt$  равен тангенсу угла наклона (к горизонтальной оси) касательной к кривой  $s(t)$  в данной точке. Средняя же скорость  $v_{\text{ср}}$  за промежуток времени  $\Delta t$  есть тангенс угла наклона хорды, соединяющей точки того же графика, соответствующие началу и концу интервала  $\Delta t$ . Надо найти момент времени  $t^*$ , когда оба тангенса совпадают. Так как речь идет о средней скорости за период времени от  $t = 0$  до  $t = t^*$ , из начала координат проводим касательную к траектории. В нашем примере получается  $t^* = 7,5$  с.

**Задача 2.1.** Автомобильное движение в г. Глупове организовано так, что светофоры встречаются через каждый отрезок пути длиной  $l = 1$  км. Работа разных светофоров не скоординирована, так что водитель вынужден останавливаться на каждом светофоре, проводя в среднем время  $\tau = 1$  мин в ожидании зеленого сигнала. А) Какова средняя путевая скорость  $v_{\text{ср}}$  движения по городу, если между светофорами автомобиль едет со скоростью  $V = 60$  км/ч? Б) Как изменится  $v_{\text{ср}}$ , если скорость автомобиля  $V$  увеличится в два раза? В) Какова предельно возможная при данных условиях средняя путевая скорость  $\max v_{\text{ср}}$  движения автотранспорта в г. Глупове?

**Решение.** Пусть автомобиль проезжает путь  $S$ . Без светофоров на это понадобится время  $t_s = S/V$ . Но ему придется остановиться на  $S/l$  светофорах (для определенности будем считать, что  $S/l = n$  — целое число, много большее единицы), на что уйдет время  $t_l = \tau S/l$ . Полное время в пути равно  $t = t_s + t_l = S(1/V + \tau/l)$ . Средняя путевая скорость определяется как  $v_{\text{ср}} = S/t$ , откуда находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{V}{1 + V\tau/l}.$$

Теперь получаем ответы на вопросы задачи:

А)  $v_{\text{ср}} = 30$  км/ч; Б) при  $V = 120$  км/ч находим  $v_{\text{ср}} = 40$  км/ч, т. е. средняя путевая скорость увеличится всего на одну треть; В) максимальную среднюю путевую скорость получаем в пределе  $V \rightarrow \infty$ :  $\max v_{\text{ср}} = l/\tau = 60$  км/ч. ■

## 2.4 Вычисление пройденного пути и перемещения

Если путь  $s$ , пройденный материальной точкой за интервал времени  $t_2 - t_1$ , разбить на достаточно малые участки  $\Delta s_i$ , то для каждого  $i$ -го участка выполняется условие

$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i. \quad (2.11)$$

Тогда весь путь можно записать в виде суммы

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^N \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (2.12)$$

При стремлении всех  $\Delta t_i$  к нулю это приближенное равенство превращается в точное, т. е.

$$s = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (2.13)$$

Мы могли бы сразу проинтегрировать бесконечно малый путь  $ds = v dt$ , чтобы получить этот же результат.

Подчеркнем, что здесь речь идет о **модуле** скорости. Если зависимость модуля скорости от времени выразить графически, то путь, пройденный материальной точкой за время  $t_2 - t_1$ , численно равен площади фигуры, ограниченной кривой  $v(t)$ , осью времени и ординатами  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 2.4). При равномерном движении величина скорости  $v$  постоянна и может быть вынесена из-под знака интеграла:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt = v \int_{t_1}^{t_2} dt = v(t_2 - t_1). \quad (2.14)$$

Так как модуль скорости  $v \geq 0$ , пройденный телом путь с течением времени может только возрастать (или быть постоянным, когда тело покоится).

Если нас интересует *перемещение* материальной точки за то же время, мы таким же образом разбиваем траекторию на малые участки, но суммируем теперь *векторы* перемещения:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \int_1^2 d\vec{r}. \quad (2.15)$$

Учитывая связь перемещения с вектором скорости

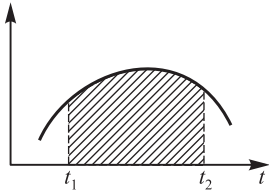
$$d\vec{r} = \vec{v} dt, \quad (2.16)$$

получаем из (2.15)

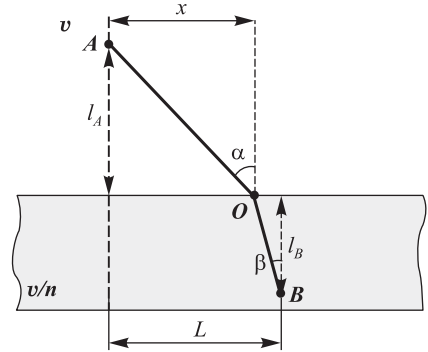
$$\vec{r}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt. \quad (2.17)$$

В отличие от (2.13) под интегралом здесь стоит не модуль, а вектор скорости. Точно так же при равномерном прямолинейном движении, когда  $\vec{v} = \text{const}$ , мы можем вынести скорость из-под знака интеграла:

$$\vec{r}_{12} = \vec{v} \int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{v}(t_2 - t_1). \quad (2.18)$$



**Рис. 2.4.** График зависимости модуля скорости от времени: площадь заштрихованной части равна пути, пройденному за период времени от  $t = t_1$  до  $t = t_2$



**Рис. 2.5.** Оптимальный маршрут из пункта  $A$  в пункт  $B$  (к задаче 2.2)

Чтобы практически найти перемещение, интеграл, представленный в векторной форме, необходимо записать в виде интегралов для проекций:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)dt; \quad y_2 - y_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_y(t)dt; \quad z_2 - z_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_z(t)dt. \quad (2.19)$$

Тогда величина перемещения есть

$$|\vec{r}_{12}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (2.20)$$

а направление вектора перемещения определяется соотношением

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1). \quad (2.21)$$

**Задача 2.2.** Пункт  $A$  находится на бетонированном аэродроме, пункт  $B$  — на примыкающем к нему поле, на котором скорость машины в  $n$  раз меньше. Для того чтобы за кратчайшее время добраться из  $A$  в  $B$ , был выбран оптимальный маршрут, показанный на рис. 2.5. Найти соотношение между синусами углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

**Решение.** Все расстояния указаны на рисунке. Время  $t_1$ , затрачиваемое на путь  $AO$ , равно

$$t_1 = \frac{\sqrt{l_A^2 + x^2}}{v}.$$

Время  $t_2$ , затрачиваемое на путь  $OB$ , преодолеваемый со скоростью  $v/n$ , равно

$$t_2 = \frac{n\sqrt{l_B^2 + (L - x)^2}}{v}.$$

Полное время в пути

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{v} \left( \sqrt{l_A^2 + x^2} + n\sqrt{l_B^2 + (L - x)^2} \right).$$

Поскольку точка  $O$  была выбрана так, чтобы на путь затрачивалось минимальное время, должна быть равна нулю производная от времени  $t$  по расстоянию  $x$ :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \left( \frac{x}{\sqrt{l_A^2 + x^2}} - n \frac{L-x}{\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}} \right) = 0.$$

Поскольку

$$\frac{x}{\sqrt{l_A^2 + x^2}} = \sin \alpha, \quad \frac{L-x}{\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}} = \sin \beta,$$

находим  $\sin \alpha - n \sin \beta = 0$ , т. е.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Сходство с известным законом преломления света на границе двух сред не случайно: природа устроила так, что свет выбирает оптимальный путь. ■

## 2.5 Ускорение

Скорость частицы  $\vec{v}$  может изменяться со временем как по величине, так и по направлению.

◆ **Ускорением** называется быстрота изменения вектора скорости. ◆

Быстрота изменения во времени любой функции определяется производной этой функции по времени. Поэтому ускорение есть производная вектора  $\vec{v}$  по  $t$ , т. е. вторая производная радиуса-вектора  $\vec{r}$ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (2.22)$$

Если известны функция  $\vec{a} = \vec{a}(t)$  и начальная скорость  $\vec{v}_0$  (при  $t = t_0$ ), то значение скорости в любой момент времени  $t$  равно

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'. \quad (2.23)$$

Если известно также положение  $r_0$  тела в начальный момент  $t = t_0$ , то мы можем найти его траекторию:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'') dt''. \quad (2.24)$$

При равноускоренном движении ( $\vec{a} = \text{const}$ ) эти формулы упрощаются:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0) \quad (2.25)$$

и

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \vec{a} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' = \\ &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \vec{a} \int_{t_0}^t (t' - t_0) dt' = \\ &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{\vec{a} (t - t_0)^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

При прямолинейном движении векторы перемещения, скорости и ускорения направлены вдоль одной и той же прямой, совпадающей с траекторией. Поэтому направление прямой можно принять за ось  $x$  и действовать с ускорением и скоростью как с проекциями векторов на эту ось, т. е. как с алгебраическими величинами. Тогда индекс, обозначающий проекцию вектора на ось, опускают.

**Задача 2.3.** Тело прошло 1 м за первую секунду после начала отсчета времени, 2 м — за вторую, 3 м — за третью и т. д. Можно ли считать это движение равноускоренным?

**Решение.** Обычно первое желание студента — дать отрицательный ответ. Логика рассуждений прозрачна: при равноускоренном движении расстояние зависит от квадрата времени, и если за первую секунду тело пройдет расстояние 1 м, то за две секунды оно пройдет расстояние 4 м, т. е. за вторую секунду преодолит путь 3 м, что противоречит условию задачи.

Однако первое желание следует подавить, так как это рассуждение верно лишь для движения без начальной скорости. Пусть за время  $t_0$  с начала отсчета времени тело прошло путь  $s_0$ . Тогда условие нашей задачи можно записать в виде:

$$\begin{aligned} s(kt_0) &= ks_0 + s((k-1)t_0), \\ s(0) &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

Теперь просуммируем обе части равенства (2.28) по  $k$  от единицы до некоторого числа  $n$ . Множество одинаковых членов суммы слева и справа взаимно сократятся и мы получим в итоге

$$s(nt_0) = s_0 \sum_{k=1}^n k = s_0 \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2.28)$$

Вводя теперь текущее время  $t = nt_0$ , получаем закон движения в виде

$$s(t) = s_0 \frac{t^2 + tt_0}{2t_0^2} = \frac{at^2}{2} + v_0 t, \quad (2.29)$$

$$a = \frac{s_0}{t_0^2}, \quad v_0 = \frac{s_0}{2t_0}. \quad (2.30)$$

По условиям задачи  $s_0 = 1$  м,  $t_0 = 1$  с. Значит мы действительно имеем дело с равноускоренным движением с ускорением  $a = 1$  м/с<sup>2</sup> и начальной скоростью  $v_0 = 0,5$  м/с. ■

## 2.6 Ускорение при криволинейном движении

Представим себе материальную точку, движущуюся по какой-то криволинейной траектории  $\vec{r}(t)$ . Запишем скорость в виде

$$\vec{v} = v \frac{\vec{v}}{v} = v \vec{\tau} \quad (2.31)$$

и заметим, что вектор  $\vec{\tau} = \vec{v}/v$  — это единичный вектор, касательный к траектории и совпадающий по направлению с вектором скорости. Продифференцируем вектор скорости, записанный в представлении (2.31):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \vec{\tau} \frac{dv}{dt}. \quad (2.32)$$



Мы представили ускорение в виде двух слагаемых. Заметим прежде всего, что слагаемые ортогональны друг другу. Действительно,  $\vec{\tau}^2 = 1$ , поскольку вектор  $\vec{\tau}$  — единичный. Дифференцируя это скалярное произведение, получаем

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0,$$

т. е.  $\vec{\tau} \perp d\vec{\tau}/dt$  по свойству скалярного произведения. Мы разложили ускорение на сумму двух взаимно ортогональных составляющих:  $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ . Обсудим физический смысл каждого слагаемого.

Вектор  $\vec{a}_\tau = \vec{\tau}(dv/dt) = \vec{\tau}\dot{v}$  — это *тангенциальное ускорение*, которое характеризует быстроту изменения модуля скорости. Эта часть полного ускорения  $\vec{a}$  направлена параллельно скорости. Если скорость меняется лишь по направлению, но не по величине (например, при равномерном движении по окружности), то  $\vec{a}_\tau = 0$ .

Первое слагаемое  $\vec{a}_n = v(d\vec{\tau}/dt)$  ортогонально траектории, оно называется *нормальным ускорением* и связано с *радиусом кривизны* траектории. Радиус кривизны является обобщением обычного радиуса окружности на произвольные криволинейные траектории. Идея обобщения состоит в том, чтобы заменить бесконечно малый кусочек траектории в данной точке на окружность, которая почти слилась бы с траекторией. Тогда радиус окружности можно назвать радиусом кривизны траектории, а центр окружности — центром кривизны. Для произвольной траектории (в отличие от окружностей) радиус кривизны и положение центра кривизны могут меняться от точки к точке.

Что же означает слово «сливается» в контексте задачи о нахождении радиуса кривизны произвольной кривой? Мы хотим найти радиус и центр кривизны в точке 1 (рис. 2.6). Под «сливается» мы будем понимать следующее. Искомая окружность должна:

- проходить через точку 1;
- касаться траектории в этой точке;
- включать в себя точки траектории, бесконечно близкие к 1.

Иначе говоря, функции, описывающие траекторию и окружность, совпадают в точке 1 вместе со своими двумя первыми производными.

Возьмем неподалеку от точки 1 точку 2. Построим в этих точках касательные единичные векторы  $\vec{\tau}_1$  и  $\vec{\tau}_2$ . Перпендикуляры к этим касательным пересекутся в некоторой точке  $O'$ . Заметим, что для кривой, не являющейся окружностью, расстояния  $R_1$  и  $R_2$  будут немного отличаться друг от друга. Если теперь точку 2 приближать к точке 1, пересечение перпендикуляров  $O'$  будет перемещаться вдоль прямой  $O'1$  и в пределе окажется в некоторой точке  $O$ . Расстояния  $R_1$  и  $R_2$  будут стремиться к общему пределу  $R$ , равному радиусу кривизны, а точка  $O$  и будет центром кривизны кривой в точке 1. Действительно, окружность радиусом  $R$  с центром в  $O$  проходит через точку 1 и касается траектории (так как радиус ортогонален орту  $\vec{\tau}_1$ ). Кроме того, по построению бесконечно близкая точка 2 также лежит на этой окружности. Таким образом, построенная окружность действительно «сливается» с траекторией в точке 1.

Поскольку бесконечно близкие точки 1 и 2 лежат на окружности радиусом  $R$ , можно написать соотношение  $ds = R d\varphi$ , связывающее длину  $ds$  дуги  $\widehat{12}$  и угол  $d\varphi$  между касательными ортами. Длина дуги связана со скоростью материальной

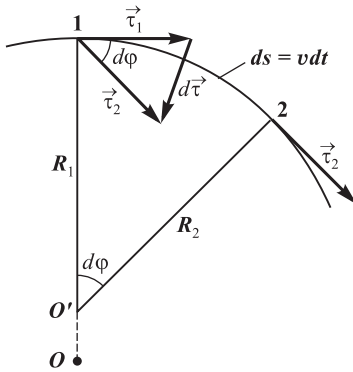


Рис. 2.6. Графическое определение радиуса кривизны траектории

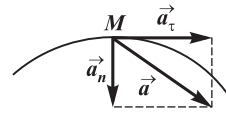


Рис. 2.7. Нормальная  $\vec{a}_n$  и тангенциальная  $\vec{a}_\tau$  составляющие полного ускорения  $\vec{a}$

точки  $ds = v dt$ . А угол  $d\varphi$ , как видно из рисунка, можно выразить через длину вектора  $d\vec{\tau} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1$ . Именно,  $|d\vec{\tau}| = |\vec{\tau}| d\varphi = d\varphi$  (так как  $|\vec{\tau}| = 1$ ). Поэтому

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}.$$

Отсюда получаем для нормального ускорения формулу

$$\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{n} \cdot \frac{v^2}{R},$$

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{|d\vec{\tau}|} = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}.$$

Итак, в общем случае ускорение имеет две составляющие — тангенциальную

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \frac{dv}{dt}}, \tag{2.33}$$

направленную вдоль  $\vec{v}$  и изменяющую модуль скорости  $|\vec{v}|$ , и нормальную

$$\boxed{\vec{a}_n = \vec{n} \frac{v^2}{R}}, \tag{2.34}$$

которая перпендикулярна скорости  $\vec{v}$ , направлена к центру кривизны траектории (рис. 2.7) и изменяет направление скорости. Полное ускорение определяется по правилу параллелограмма. Модуль полного ускорения в соответствии с теоремой Пифагора равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

## 2.7 Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Рассмотрим в качестве примера применения выведенных формул движение тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту в отсутствие сопротивления воздуха. Скажем, на горе на высоте  $h$  над уровнем моря стоит пушка, охраняющая прибрежные воды. Пусть снаряд выпускается под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $\vec{v}_0$  из точки  $M$ , положение которой определяется радиусом-вектором  $\vec{r}_0$  (рис. 2.8).

Снаряд движется с ускорением силы тяжести  $\vec{g}$ . Так как  $\vec{g} = \text{const}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{g}t, \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2},\end{aligned}\quad (2.35)$$

т. е. радиус-вектор является суммой трех векторов, складывающихся по обычным правилам, что наглядно показано на рис. 2.9. Эти векторы представляют собой: 1) начальное положение  $\vec{r}_0$  снаряда, 2) перемещение  $\vec{v}_0 t$  (т. е. как если бы сила тяжести отсутствовала) и 3) перемещение  $\vec{g}t^2/2$  под действием силы тяжести (свободное падение в отсутствие начальной скорости). Здесь отчетливо проявляется принцип независимости движений, известный в других областях физики как *принцип суперпозиции* (наложения). Обобщая, можно сказать, что, согласно принципу суперпозиции, результирующий эффект нескольких воздействий представляет собой сумму эффектов от каждого воздействия в отдельности. Этот принцип является следствием линейности уравнений движения.

Выберем систему координат таким образом, чтобы  $\vec{r}_0 = 0$ , ось  $Ox$  была горизонтальной, ось  $Oy$  — вертикальной, а начальная скорость  $\vec{v}_0$  лежала в плоскости  $xOy$  (рис. 2.10). Спроектируем  $\vec{r}$  на оси координат:

$$\begin{aligned}r_x(t) = x(t) &= v_{0x} t + \frac{g_x t^2}{2} = v_0 t \cos \alpha, \\ r_y(t) = y(t) &= v_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2} = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Видно, что в любой момент времени снаряд остается в той же плоскости  $xOy$ .

**Траектория полета.** Если из системы полученных уравнений исключить время  $t$ , то получим уравнение траектории — параболу:

$$\begin{aligned}y(x) &= Ax - Bx^2, \\ A &= \text{tg } \alpha, \quad B = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

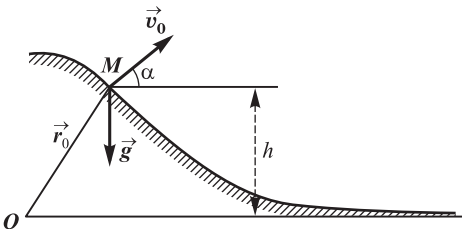
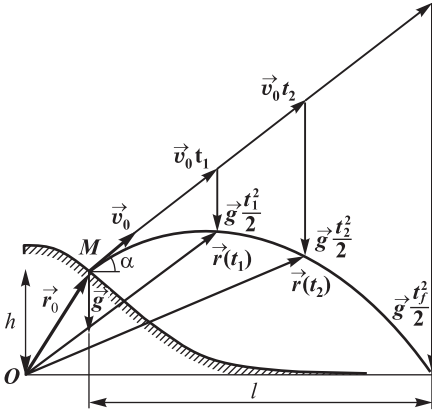
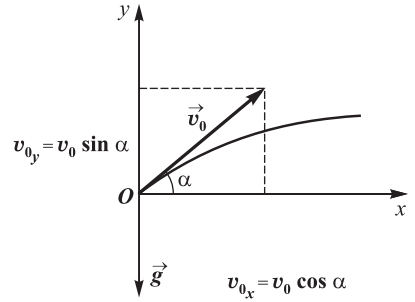


Рис. 2.8. Движение тела, брошенного под углом к горизонту



**Рис. 2.9.** Представление радиуса-вектора  $\vec{r}(t)$  в любой момент времени  $t$  в виде суммы трех векторов:  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g} t^2 / 2$ . Для упрощения вычислений в дальнейшем точки  $O$  и  $M$  выбраны совпадающими ( $\vec{r}_0 = 0$ )



**Рис. 2.10.** Проекции начальной скорости на координатные оси

**Дальность полета.** В момент падения тела  $y = -h$  (снаряд попадает в цель, находящуюся на поверхности моря). Расстояние по горизонтали от пушки до цели равно при этом  $l$ . Подставляя  $y = -h, x = l$  в уравнение траектории, получаем квадратное уравнение для дальности полета  $l$ :

$$l^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - l \operatorname{tg} \alpha - h = 0. \quad (2.38)$$

У квадратного уравнения имеется два решения (в данном случае — положительное и отрицательное). Нам нужно положительное решение. Стандартное выражение для корня квадратного уравнения нашей задачи может быть приведено к виду:

$$l = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} \right). \quad (2.39)$$

При  $h = 0$  отсюда получается известная формула школьного курса физики

$$l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (2.40)$$

Из нее следует, в частности, что максимальная дальность полета  $l_{\max,0} = v_0^2/g$  достигается при  $\alpha = 45^\circ$ .

**Максимальная дальность полета.** При выстреле с горы высотой  $h$  это уже не так. Найдем угол  $\alpha$ , при котором достигается максимальная дальность полета. Зависимость (2.39)  $l$  от  $\alpha$  достаточно сложна, и вместо дифференцирования для нахождения максимума мы поступим следующим образом. Представим себе, что мы увеличиваем начальный угол  $\alpha$ . Сначала дальность полета растет, достигает максимального значения  $l_{\max}$  и снова начинает уменьшаться (до нуля

при выстреле вертикально вверх). Таким образом, для каждой дальности полета, кроме максимальной, имеется два разных угла.

Обратимся снова к уравнению (2.38) и рассмотрим его как уравнение для угла  $\alpha$ . Учитывая, что  $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ , перепишем это уравнение в виде:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \frac{gl^2}{2v_0^2} - l \operatorname{tg} \alpha + \left( \frac{gl^2}{2v_0^2} - h \right) = 0. \quad (2.41)$$

Мы снова получили квадратное уравнение, на этот раз — для неизвестной величины  $\operatorname{tg} \alpha$ . Уравнение имеет два корня, что соответствует двум углам, при которых дальность полета равна  $l$ . Но когда  $l = l_{\max}$ , оба корня должны совпасть. Это означает, что равен нулю дискриминант квадратного уравнения:

$$l_{\max}^2 - 4 \frac{gl_{\max}^2}{2v_0^2} \left( \frac{gl_{\max}^2}{2v_0^2} - h \right) = 0,$$

откуда следует результат

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}. \quad (2.42)$$

При  $h = 0$  воспроизводится формула  $l_{\max,0} = v_0^2/g$ . Обычно высота  $h$  много меньше дальности полета  $l_{\max,0}$  на равнине. При  $h \ll l_{\max,0}$  квадратный корень может быть аппроксимирован первыми членами разложения в ряд Тейлора, и мы получаем приближенное выражение

$$l_{\max} \approx \frac{v_0^2}{g} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2gh}{v_0^2} \right) = \frac{v_0^2}{g} + h = l_{\max,0} + h, \quad (2.43)$$

т. е. дальность выстрела увеличивается примерно на высоту подъема пушки.

Когда дискриминант квадратного уравнения равен нулю, его решение имеет вид:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l_{\max}}{(gl_{\max}^2/v_0^2)} = \frac{v_0^2}{gl_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2gh/v_0^2}}. \quad (2.44)$$

Поскольку в (2.44)  $\operatorname{tg} \alpha < 1$ , угол  $\alpha$ , при котором достигается максимальная дальность полета, меньше  $45^\circ$ .

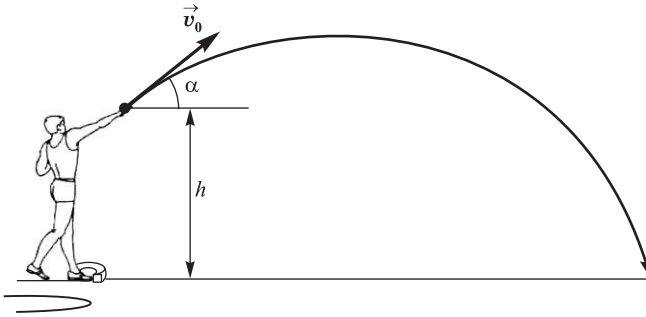
**Задача 2.4.** Пусть легкоатлет толкает ядро с высоты  $h = 2,0$  м с начальной скоростью  $v_0 = 14$  м/с (рис. 2.11). Под каким углом к горизонту он должен послать снаряд, чтобы дальность полета ядра была максимальной?

**Решение.** Подставляем численные данные в полученную нами формулу (2.44):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2gh/v_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \times 9,81 \times 2,0/14^2}} = 0,9128.$$

Отсюда следует, что  $\alpha = 42,4^\circ$ , т. е. меньше угла  $\alpha = 45^\circ$ , при котором достигается максимальная дальность полета снаряда, выпущенного с земли. На практике, как показывает киносъемка спортивных состязаний, угол вылета ядра действительно составляет  $\alpha = 42^\circ - 43^\circ$ . С использованием (2.42) найдем теперь максимальную дальность броска:

$$l_{\max} = \frac{14^2}{9,81} \sqrt{1 + \frac{2 \times 9,81 \times 2,0}{14^2}} = 21,9 \text{ м.}$$



**Рис. 2.11.** Параметры, влияющие на результат в толкании ядра, — начальная скорость  $v_0$ , угол  $\alpha$  вылета снаряда и рост  $h$  спортсмена

При толчке ядра с уровня земли максимальная дальность полета равнялась бы  $l_{\max} = = 14^2/9,81 = 20,0$  м, т. е. меньше примерно на рост спортсмена. Мировой рекорд, установленный в 1990 г., составляет 23,13 м. Согласно нашим расчетам, при том же росте спортсмена этот результат достигается при начальной скорости ядра  $v_0 = 14,43$  м/с. ■

**Максимальная высота полета.** Эта величина может быть определена из равенства нулю вертикальной составляющей скорости  $v_y(t) = dy/dt$  в верхней точке полета:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 0. \quad (2.45)$$

При этом горизонтальная составляющая скорости  $dx/dt$  не равна нулю, поэтому  $dy/dx = 0$ .

Дифференцируя уравнение траектории (2.37), приходим к соотношению

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - x \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (2.46)$$

Отсюда

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha, \quad (2.47)$$

что при подстановке в уравнение (2.37) приводит к формуле

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (2.48)$$

**Продолжительность полета.** Поскольку горизонтальная составляющая скорости не меняется, продолжительность полета  $t_f$  определяется как отношение дальности полета к  $v_{0x}$ , т. е.

$$t_f = \frac{l}{v_0 \cos \alpha} = \frac{v_0}{g} \left( \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gh}{v_0^2}} \right). \quad (2.49)$$

При  $h = 0$  получаем  $t_{f,0} = (2v_0/g) \sin \alpha$ . При  $\alpha = 0$  (пушка стреляет в горизонтальном направлении) время полета  $t_{f,\rightarrow} = \sqrt{2h/g}$  равно времени падения тела с высоты  $h$ . Дальность горизонтального полета  $l_{\rightarrow}$  равна при этом

$l_{\rightarrow} = v_0 t_{f,\rightarrow} = v_0 \sqrt{2h/g}$ . Такой же результат получается из формулы (2.39) при  $\alpha \rightarrow 0$ .

**Путь, пройденный телом.** За время  $t$  тело проходит путь

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t v(t') dt' = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt' = \\ &= \int_0^t \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t' \sin \alpha + g^2 t'^2} dt'. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Интеграл берется в элементарных функциях, но из-за громоздкого ответа для расчетов предпочтительнее использование компьютера.

**Расстояние от места старта.** К моменту времени  $t$  расстояние от места старта определяется модулем радиуса-вектора:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = t \sqrt{v_0(v_0 - gt \sin \alpha) + \frac{g^2 t^2}{4}}. \quad (2.51)$$

**Радиус кривизны траектории в заданной точке.** В отсутствие сопротивления воздуха тело движется с постоянным ускорением силы тяжести  $\vec{g}$ , которое и является полным ускорением. Тангенциальный компонент ускорения, характеризующий быстроту изменения модуля скорости, равен

$$\begin{aligned} a_\tau &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} = \\ &= -g \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Нормальный компонент ускорения, изменяющий направление скорости тела, определяется соотношением

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = g \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}}. \quad (2.53)$$

Используя связь (2.34) нормального компонента ускорения с радиусом кривизны, находим  $R$ :

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{[v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2]^{3/2}}{g v_0 \cos \alpha}. \quad (2.54)$$

От текущего времени  $t$  зависит лишь квадрат вертикального компонента скорости  $v_0 \sin \alpha - gt$  в числителе (2.54). Поэтому мы сразу можем ответить на вопрос, в какой точке траектории кривизна максимальна. Радиус кривизны достигает минимума в верхней точке траектории, где отсутствует вертикальный компонент скорости, т. е.  $v_0 \sin \alpha - gt = 0$  (горизонтальный компонент, еще раз напомним, всюду имеет одно и то же значение). В этой точке

$$R_{\min} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}. \quad (2.55)$$

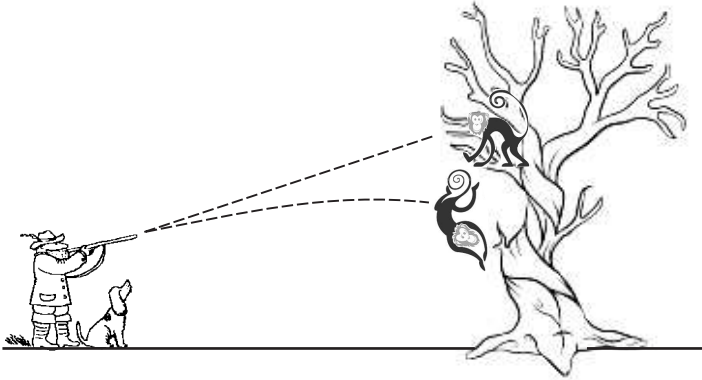


Рис. 2.12. К задаче о падающей обезьяне

Для сравнения: радиус кривизны  $R_0$  в начальный момент  $t = 0$  равен

$$R_0 = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}.$$

**Положение центра кривизны (для высшей точки траектории).** По определению радиуса кривизны центр кривизны для высшей точки траектории находится прямо под этой точкой на высоте

$$y_R = y_{\max} - R_{\min} = \frac{v_0^2}{2g} (3 \sin^2 \alpha - 2)$$

(напомним, что мы отсчитываем вертикальные расстояния от уровня пушки, а не от уровня моря). При  $\alpha < \arcsin \sqrt{2/3} = 0,9553 \text{ рад} = 54,7^\circ$  эта координата отрицательна, т. е. центр кривизны находится ниже пушки. Максимально высокое положение центр кривизны занимает при  $\alpha = \pi/2$ :  $y_{R,\max} = v_0^2/(2g)$ , что совпадает с верхней точкой траектории. Тогда радиус кривизны равен нулю, как это следует также из (2.55). Это значит, что кривизна в этой точке бесконечна, в чем легко убедиться, представив себе траекторию при вертикальном движении снаряда.

Для иллюстрации решим знаменитую задачу об охотнике и обезьяне, сидящей на дереве. Чтобы не волновать любителей животных, будем считать, что охотник стреляет транквилизирующим шприцем, так что обезьяна в нашей задаче не пострадает.

**Задача 2.5.** Предположим, что в момент выстрела обезьяна начинает падать с дерева вертикально вниз без начальной скорости (рис. 2.12). Под каким углом должно быть направлено ружье, чтобы попасть в обезьяну во время ее свободного падения?

Какое расстояние успеет пролететь обезьяна, если начальная скорость шприца  $v_0 = 50 \text{ м/с}$ , обезьяна сидит на высоте  $10 \text{ м}$ , а расстояние от дерева до человека  $l = 20 \text{ м}$ ?

Что произойдет, если человек попытается попасть в обезьяну камнем, брошенным со скоростью  $v_0 = 15 \text{ м/с}$ ?

При расчетах пренебречь сопротивлением воздуха.



**Решение.** За начало координат выбираем положение дула ружья в момент выстрела. Уравнения движения обезьяны имеют вид:

$$\begin{aligned} y_m &= h - \frac{gt^2}{2}, \\ x_m &= l. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Уравнения движения пули:

$$\begin{aligned} y_b &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \\ x_b &= v_0 t \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.57)$$

В момент  $t_0$  поражения цели координаты пули совпадут с координатами обезьяны. Отсюда следуют соотношения:

$$\begin{aligned} v_0 t_0 \sin \alpha &= h, \\ v_0 t_0 \cos \alpha &= l. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Разделив первое уравнение из (2.58) на второе, находим результат для угла наклона ружья:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l}, \quad (2.59)$$

т. е. ружье должно быть направлено прямо на обезьяну. Заметим, что этот вывод не зависит от начальной скорости пули.

Возводя уравнения (2.57) в квадрат и складывая, мы избавляемся от зависимости от угла и находим время поражения цели:

$$t_0 = \frac{\sqrt{h^2 + l^2}}{v_0}. \quad (2.60)$$

За это время обезьяна пролетела расстояние

$$s = \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g(h^2 + l^2)}{2v_0^2}. \quad (2.61)$$

Подставляя в (2.61) численные значения, находим, что обезьяна успеет пролететь лишь около одного метра:

$$s = \frac{9,81(10^2 + 20^2)}{2 \times 50^2} = 0,98 \text{ м.}$$

При попытке попасть в обезьяну камнем наши формулы говорят, что обезьяна пролетит в свободном падении расстояние

$$s = \frac{9,81(10^2 + 20^2)}{2 \times 15^2} = 10,9 \text{ м.}$$

Это больше высоты дерева, т. е. обезьяна достигнет земли и убежит раньше, чем в нее попадет камень. ■

## 2.8 Вращение абсолютно твердого тела

В этом разделе мы рассмотрим кинематику в том случае, когда нельзя пренебречь размерами тела. Мы принимаем второй уровень абстракции и будем считать тело абсолютно твердым.

◆ Движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе, называется **поступательным**. ◆

Поступательное движение абсолютно твердого тела можно охарактеризовать движением какой-либо точки этого тела, так как при поступательном движении все точки тела движутся с одними и теми же скоростями и ускорениями, а траектории их движения конгруэнтны. Определив движение какой-нибудь из точек твердого тела, мы вместе с тем определим движение всех остальных его точек. Поэтому при описании поступательного движения не возникает новых проблем по сравнению с кинематикой материальной точки.

Другой важный частный случай движения твердого тела — это движение, при котором две точки тела остаются неподвижными. Прямая, соединяющая эти точки, также неподвижна и называется **осью вращения**. Само движение этого типа называется **вращением вокруг неподвижной оси**. При таком движении все точки тела движутся по окружностям, расположенным в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Центры окружностей лежат на оси вращения. При этом ось вращения может находиться и вне тела.

## Угловая скорость, угловое ускорение

При вращении тела вокруг какой-либо оси все его точки описывают окружности различного радиуса и, следовательно, имеют различные перемещения, скорости и ускорения. Тем не менее можно описать вращательное движение всех точек тела одинаковым образом. Для этого используют иные (по сравнению с материальной точкой) кинематические характеристики движения — угол поворота  $\Delta\vec{\varphi}$ , угловую скорость  $\vec{\omega}$ , угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}$ .

Роль перемещения  $\Delta\vec{\varphi}$  при вращательном движении играет **вектор малого поворота**  $\Delta\vec{\varphi}$  вокруг оси вращения  $OO'$  (рис. 2.13). Он будет одинаков для любой точки **абсолютно твердого тела** (например, точек 1, 2, 3), в чем, в сущности,

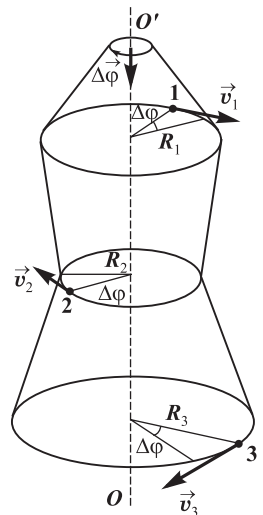


Рис. 2.13. Вращение абсолютно твердого тела

и заключается используемая абстракция. Модуль вектора поворота равен величине угла поворота  $\Delta\varphi$  (угол измеряется в радианах). Направление вращения задается по правилу буравчика (штопора): вектор  $\Delta\vec{\varphi}$  параллелен оси вращения и направлен туда же, куда ввинчивается штопор, вращение ручки которого совпадает с направлением вращения твердого тела. Векторы, направления которых связаны с правилом буравчика, называют *аксиальными* (от англ. *axis* — ось) в отличие от *полярных* векторов, которыми мы пользовались ранее. Для очень малых углов поворота  $d\vec{\varphi}$  путь, проходимый любой точкой, можно считать прямолинейным, т. е. совпадающим с перемещением. Поэтому сложение очень малых углов происходит как сложение векторов. Уравнение вращательного движения устанавливает аналитическую связь между углом поворота и временем:  $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$ .

Векторная величина

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (2.62)$$

называется **угловой скоростью вращения**. Угловая скорость всегда является аксиальным вектором, поскольку построена из малых поворотов  $d\vec{\varphi}$ . При вращении вокруг неподвижной оси угловая скорость направлена по оси вращения и не меняет своего направления. При равномерном вращении постоянна и ее величина ( $\vec{\omega} = \text{const}$ ). В этом случае вращение можно охарактеризовать его периодом  $T$ :

$$\boxed{\omega = |\vec{\omega}| = \frac{2\pi}{T}} \quad (2.63)$$

◆ **Период вращения** — это время, за которое тело совершает один оборот (поворот на угол  $2\pi$ ). ◆

Часто используют также число оборотов в единицу времени

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}, \quad (2.64)$$

откуда  $\omega = 2\pi\nu$ .

Для вращений с переменной угловой скоростью отлично от нуля угловое ускорение.

◆ **Угловое ускорение**  $\vec{\varepsilon}$  — аксиальный вектор, определяемый как производная по времени от угловой скорости:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}} \quad \blacklozenge \quad (2.65)$$

Вектор углового ускорения, как и вектор угловой скорости, направлен параллельно оси вращения. При возрастании угловой скорости  $\omega$  ускорение совпадает с вектором угловой скорости по направлению, при убывании — направлено в противоположную сторону.

### Связь угловых и линейных скоростей и ускорений

Каждая из точек вращающегося тела движется с определенной линейной скоростью  $\vec{v}$ , направленной по касательной к соответствующей окружности (см. рис. 2.13). Пусть материальная точка вращается вокруг оси  $OO'$  по окружности радиусом  $R$ . За малый промежуток времени  $\Delta t$  она пройдет путь  $\Delta s$ , соответствующий углу поворота  $\Delta\varphi$ . Тогда  $\Delta s = R\Delta\varphi$  и скорость материальной точки

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

следовательно,

$$\boxed{v = \omega R.} \quad (2.66)$$

Так как нормальное ускорение  $a_n = v^2/R$ , с учетом (2.66)

$$\boxed{a_n = \omega^2 R.} \quad (2.67)$$

Нормальное ускорение точек вращающегося твердого тела часто называют *центростремительным ускорением*.

Дифференцируя по времени выражение для  $v$ , находим

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R,} \quad (2.68)$$

где  $a_\tau$  — тангенциальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом  $R$ .

Таким образом, как тангенциальное, так и нормальное ускорения растут линейно с ростом радиуса  $R$  — расстояния от оси вращения. Полное ускорение также линейно зависит от  $R$ :

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (2.69)$$

**Задача 2.6.** Определить линейную скорость  $v$  и центростремительное ускорение  $a_n$  точек, лежащих на земной поверхности: 1) на экваторе и 2) на широте Москвы  $\varphi = 56^\circ$ .

**Решение.** Мы знаем период вращения Земли вокруг собственной оси:

$T = 24 \text{ ч} = 24 \times 60 \times 60 = 86400 \text{ с}$ . Отсюда находим угловую скорость вращения  $\omega = 2\pi/T = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ . Радиус Земли  $R_\oplus = 6370 \text{ км} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$ . Расстояние до оси вращения на широте  $\varphi$  равно  $R = R_\oplus \cos \varphi$ . Отсюда получаем линейную скорость

$$v = \omega R = \omega R_\oplus \cos \varphi = (463 \text{ м/с}) \cos \varphi$$

и центростремительное ускорение

$$a_n = \omega^2 R = \omega^2 R_\oplus \cos \varphi = (3,37 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2) \cos \varphi = (3,37 \text{ см/с}^2) \cos \varphi.$$

На экваторе  $\varphi = 0, \cos \varphi = 1$ , следовательно, ответы уже выписаны выше в скобках. На широте Москвы  $\cos \varphi = \cos 56^\circ = 0,559$ , так что  $v = 259 \text{ м/с}$ ,  $a_n = 1,88 \text{ см/с}^2$ . Влияние вращения Земли не столь велико: отношение центростремительного ускорения на экваторе к ускорению свободного падения  $a_n/g = 3,37 \cdot 10^{-2}/9,81 = 3,4 \cdot 10^{-3}$ . Тем не менее, как мы убедимся в дальнейшем, эффекты вращения Земли вполне наблюдаемы. ■

### Связь между векторами $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$

Полученные в предыдущем параграфе соотношения записаны для модулей векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{\omega}$ . Чтобы записать эти соотношения в векторном виде, используем понятие векторного произведения.

Пусть  $Oz$  — ось вращения абсолютно твердого тела. Точка  $A$  вращается по окружности радиусом  $R$ . Примем точку  $O$  за начало координат (рис. 2.14). Тогда  $v = \omega R = \omega r \sin \alpha$  и так как  $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ ,  $\vec{v} \perp \vec{r}$ , по определению векторного произведения

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.70)$$

Но  $\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{R}$  и

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_c + \vec{R}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_c + \vec{\omega} \times \vec{R}.$$

Первое слагаемое равно нулю как векторное произведение коллинеарных векторов. Следовательно,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}}, \quad (2.71)$$

где вектор  $\vec{R}$  перпендикулярен оси вращения и направлен от нее, а его модуль равен радиусу окружности, по которой движется материальная точка.

Нормальное (центростремительное) ускорение (2.67) также можно записать в векторной форме:

$$\boxed{\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}}, \quad (2.72)$$

причем знак « $-$ » показывает, что оно направлено к оси вращения. Дифференцируя соотношение (2.71) по времени, находим полное ускорение

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \\ &= \vec{\varepsilon} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Первое слагаемое направлено по касательной к траектории точки на вращающемся теле, и его модуль равен  $\varepsilon R$  (поскольку  $\vec{\varepsilon} \perp \vec{R}$ ). Сравнивая с (2.68), приходим

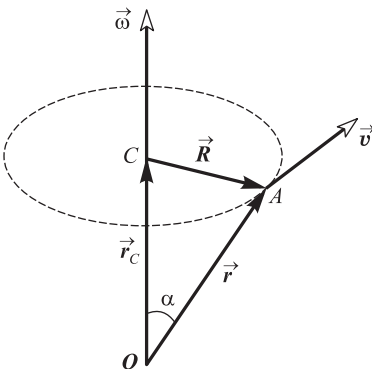


Рис. 2.14. Связь между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{\omega}$

к выводу, что это — вектор тангенциального ускорения

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}. \quad (2.74)$$

Следовательно, второе слагаемое представляет собой нормальное ускорение этой же точки:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (2.75)$$

Действительно, оно направлено к оси вращения и так как  $\vec{\omega} \perp \vec{v}$ , его модуль равен  $a_n = \omega v = \omega^2 R$ . Поэтому соотношение (2.75) — другая форма записи (2.72).

## Контрольные вопросы

1. Приведите примеры, когда Землю можно представить как материальную точку и когда этого нельзя сделать.
2. Что такое мгновенная скорость и как она ориентирована относительно траектории?
3. Может ли случиться так, что средняя скорость  $\langle \vec{v} \rangle$  за какой-то промежуток времени окажется равной нулю, а средняя путевая скорость  $v_{\text{ср}}$  будет отлична от нуля? А может ли быть  $v_{\text{ср}} = 0$  и  $\langle \vec{v} \rangle \neq 0$ ?
4. Во время езды на автомобиле через каждую минуту снимались показания счетчика километража. Можно ли по этим данным определить скорость движения автомобиля? Какая именно скорость будет найдена таким образом?
5. Какую скорость показывает спидометр автомобиля?
6. На улицах городов вывешиваются особые знаки, запрещающие движение со скоростями, превышающими указанную на знаке. О какой скорости здесь идет речь?
7. В каком случае мгновенная и средняя скорости равны между собой?
8. Под некоторым углом к горизонту из шланга бьет струя воды. Почему восходящая ветвь струи сплошная, а нисходящая рассыпается на отдельные капли?
9. Автомобиль врезается со скоростью 100 км/ч в твердую стену. Падению с какой высоты эквивалентен этот удар?
10. Человек, находящийся в комнате на пятом этаже, видит, как мимо его окна пролетает сверху цветочный горшок. Расстояние, равное высоте окна 2 м, горшок пролетел за 0,1 с. Высота одного этажа 4 м. Считая  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , определить, с какого этажа вышал цветочный горшок.
11. Из автомата АК-47 произвели одиночный выстрел в горизонтальном направлении. Что раньше упадет на Землю: пуля или стреляная гильза, если считать, что пуля и гильза вылетают одновременно и в горизонтальном направлении? Сопротивлением воздуха пренебречь.
12. На рисунке 2.15 приведен график ускорения частицы, движущейся вдоль оси  $x$ . Начертите график зависимости ее скорости и координаты от времени, полагая  $x = 0, v = 0$  при  $t = 0$ .

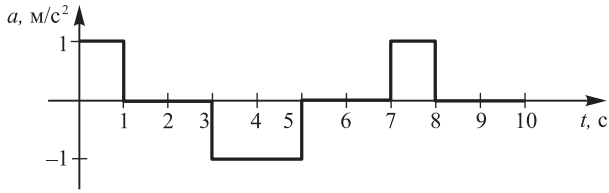


Рис. 2.15. График ускорения частицы (к вопросу 12)

13. Барон Мюнхгаузен, летя на пушечном ядре в лагерь противника, передумал делать карьеру разведчика и перескочил со своего ядра на встречное, чтобы вернуться назад. Оба ядра в этот момент имели одинаковые по величине и противоположно направленные скорости  $v = 100$  м/с. Оценить испытанное бароном ускорение. Недостающие числовые данные возьмите «из жизни». Указание: перескочить можно, пока ядра находятся друг от друга на расстоянии  $L$  прыжка человека, т. е. максимальное время «перескока»  $\tau \approx 2L/2v = L/v$ .
14. Куда направлен вектор угловой скорости суточного вращения Земли: от северного полюса к южному или от южного к северному?
15. Во сколько раз угловая скорость часовой стрелки больше скорости суточного вращения Земли?
16. Автомобиль начинает сбрасывать скорость. Куда (налево или направо по отношению к движению) направлены угловая скорость и угловое ускорение его колес?

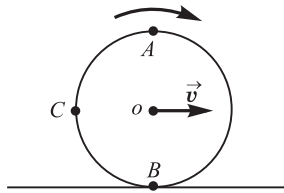


Рис. 2.16. Движение колеса (к вопросу 17)

17. Все ли точки окружности катящегося колеса имеют одинаковые линейные скорости относительно Земли? Автомобиль движется со скоростью 60 км/ч, колеса вращаются без проскальзывания. Чему равны линейные скорости точек  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 2.16)?
18. Почему верхние спицы катящегося колеса иногда сливаются для глаз, в то время как нижние видны раздельно?

## Глава 3

# Динамика материальной точки

*Динамика* исследует законы и причины, вызывающие движение тел, т. е. изучает движение материальных тел под действием приложенных к ним сил. Механика — одна из древнейших наук, развитие которой стимулировалось практикой, нуждами общества. К первым теоретическим трактатам по механике относятся «Физика» и «Механика» Аристотеля (IV в. до н. э.). Научные основы статики (теория рычага, учение о центре тяжести, начала гидростатики) разработал Архимед (III в. до н. э.). Дальнейшее развитие механики (сложение сил по правилу параллелограмма, учение о моменте силы) связано с именами итальянца Леонардо да Винчи (XV в.), фламандца Симона Стевина (XVI в.) и других ученых. Основу современной классической механики составляют три закона Ньютона. Механика Ньютона базируется на основополагающих принципах Галилея.

### 3.1 Принцип инерции Галилея и первый закон Ньютона

Галилео Галилей (1564–1642) справедливо считается основателем физики как науки. Ему мы обязаны развитием современного метода исследований, кратко выражающегося в цепочке: *эксперимент*  $\Rightarrow$  *модель* (выделение в явлении главных особенностей, т. е. применение абстракции)  $\Rightarrow$  *математическое описание*  $\Rightarrow$  *следствия модели*  $\Rightarrow$  *новый эксперимент* для их проверки.

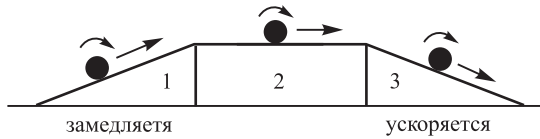
Среди прочих научных достижений, в механике им были введены два основополагающих принципа: *принцип инерции* и *принцип относительности*. Принцип инерции Галилея был повторен И. Ньютоном (1643–1727) в качестве первого закона механики. *Первый закон Ньютона* гласит:

◆ *всякая материальная точка будет находиться в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения до тех пор, пока это состояние не будет изменено воздействием со стороны других тел.* ◆

Свойство тела сохранять состояние покоя или прямолинейного равномерного движения называется *инерцией*.

До Галилея думали, что для движения нужна какая-то причина, ее называли импетусом, «движущей силой». Даже великий Леонардо да Винчи писал: «Всякое движение стремится к своему сохранению, или же каждое движущееся тело движется постоянно, пока в нем сохраняется действие его двигателя». Удивительно,





**Рис. 3.1.** К рассуждению Г. Галилея о сохранении телом состояния прямолинейного равномерного движения: если при движении шарика вверх по наклонной плоскости он замедляется, а при движении вниз ускоряется, то по горизонтальной плоскости он может двигаться лишь равномерно

но туповатый полковник фон Циллергут (см. эпитаф к этой части) мыслил похоже: нет бензина, не работает двигатель, автомобиль останавливается.

Галилей пришел к своим выводам логически, рассуждая «от противного». В своей книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки» (1638), он писал:

*«При этом необходимо отметить, что степень скорости, обнаруживаемая телом, ненарушимо лежит в самой его природе, в то время как причины ускорения или замедления являются внешними; это можно заметить лишь на горизонтальной плоскости, ибо при движении по наклонной плоскости вниз наблюдается ускорение, а при движении вверх — замедление. Отсюда следует, что движение по горизонтали является неизменным, ибо если оно остается всегда себе равным, то оно ничем не ослабляется, не замедляется и не ускоряется».*

После Галилея стала возможной чеканная латинская формулировка Рене Декарта (1596–1650): «*Quod in vacuo movetur, semper movetur*» (что движется в пустоте, будет двигаться вечно).

**Принцип инерции Галилея** (или первый закон Ньютона) далеко не столь очевиден. Дело в том, что в природе действительно никогда не наблюдаются тела, вечно сохраняющие состояние покоя или прямолинейного равномерного движения. Нужно было проявить ту самую способность строить модели (как, например, на рис. 3.1), отбрасывать несущественное, абстрагироваться, чтобы открыть принцип инерции. Изучая основные законы механики, мы идеализируем систему: пренебрегаем силами трения, считаем, что поблизости нет других тел и т. д. И тогда принцип инерции проявляет себя во всей своей красе и силе:

◆ для движения не нужно двигателя, воздействие нужно для **изменения** состояния движения тела. ◆

## 3.2 Второй и третий законы Ньютона

Для описания воздействия вводят понятие силы. Под действием сил тела либо изменяют скорость движения, т. е. приобретают ускорения (динамическое проявление сил), либо деформируются, т. е. изменяют свою форму и размеры (статическое проявление сил). В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения.

◆ **Сила** — это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело получает ускорение или изменяет свою форму или размеры. ◆

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела неодинаково изменяют скорость своего движения, т. е., иными словами, приобретают различные ускорения. В то же время, ученые всегда стремятся к стройности описания природы. Поэтому вполне естественно ввести некую характеристику движения, которая менялась бы одинаково для всех тел при одном и том же воздействии на них. Эта характеристика называется *импульсом* и обозначается  $\vec{p}$ . То, что импульс является вектором, не должно удивлять, так как движение всегда происходит в каком-то направлении. Если на тело (материальную точку) в течение промежутка времени  $dt$  действует какая-то сила  $\vec{F}$ , то изменение импульса должно быть пропорционально 1) времени действия силы и 2) самой этой силе:  $d\vec{p} = \vec{F} dt$ . Отсюда получаем уравнение

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad (3.1)$$

От этого уравнения мало пользы до тех пор, пока не известно, как измерять входящие в него величины. С силами мы более или менее знакомы, их можно измерить динамометрами или любыми другими аналогичными приборами по величине деформации пружины или иного рабочего тела. А что можно сказать про импульс, если мы пока дали весьма общее и расплывчатое его определение как некой характеристики движения материальной точки? Однако посмотрим, что можно извлечь даже из самых общих идей и экспериментальных фактов.

Изменения импульса определяются действующей силой, а сам импульс, характеризующий движение тела, должен зависеть от кинематических характеристик движения. Поэтому можно использовать очередную абстракцию, а именно рассмотреть случай, когда в пространстве имеется всего лишь одна материальная точка (т. е. пренебречь воздействием на нее всех остальных тел). Тогда на точку не действуют никакие силы ( $\vec{F} = 0$ ) и ее импульс должен сохраняться, как следует из (3.1):  $\vec{p} = \text{const}$ . Будучи характеристикой движения, импульс может в принципе зависеть от радиуса-вектора  $\vec{r}$  точки и его производных — скорости  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ , ускорения  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$  и т. д.

Однако эксперименты и весь наш опыт говорят, что знания начального положения и скорости достаточно для определения движения точки во все последующие моменты времени. Математически это означает, что в уравнениях движения не должно быть производных по времени выше второй. Поскольку в (3.1) импульс уже дифференцируется один раз по времени, то само выражение для  $\vec{p}$  не должно содержать производных выше первой.

Итак, наш первый вывод: ***импульс зависит только от  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$*** .

Далее принимаем, что пространство, в котором происходит движение, подчиняется законам *евклидовой геометрии*. Это сильное предположение, но оно естественно для классической механики хотя бы потому, что к моменту ее создания о других возможных геометриях не подозревали. Это значит, что евклидова геометрия если и не является геометрией нашего мира, то, по крайней мере, весьма к ней близка (иначе неевклидовы геометрии были бы открыты в глубокой древности).

Как следствие считаем, что пространство само по себе *однородно*: в нем нет выделенных точек, и если сдвинуть какую-то физическую систему в другую

точку пространства, то законы физики от этого не изменятся. Это еще одна абстракция, потому что мы живем на Земле, Земля вместе с другими планетами вращается вокруг Солнца, и в этих масштабах однородности, разумеется, нет. Но будем считать, что это локальные неоднородности, возникшие из-за присутствия физических тел, а не связанные с самими свойствами пространства. Раз пространство однородно, то материальная точка, перенесенная в другое место в том же самом состоянии движения, будет иметь тот же импульс.

Отсюда второй вывод: **импульс не зависит от радиуса-вектора точки**. Вместе с первым выводом это означает, что **импульс зависит только от скорости точки**:  $\vec{p} = \vec{p}(\vec{v})$ .

Далее, евклидово пространство *изотропно*: все направления в нем равноправны. Иначе говоря, законы физики не зависят от того, в каком направлении ориентирован прибор. Это тоже, конечно, абстракция: из одного места неба нам светит Солнце, а совсем из другого — Полярная звезда. Но будем считать, что в удаленной от всех тел части пространства не существует выделенных направлений, все они равноправны. Если бы такое выделенное направление существовало, имелся бы некий вектор, его определяющий, и этот вектор мог бы повлиять на направление импульса частицы. А так в нашем распоряжении имеется только вектор скорости, так что у импульса нет выбора: он может быть направлен только вдоль  $\vec{v}$ .

Вывод третий (и последний): **выражение для импульса материальной точки имеет вид**

$$\boxed{\vec{p} = \vec{v} m(v)}, \quad (3.2)$$

где  $m(v)$  — некая (пока неизвестная) функция модуля скорости точки.

Вид функции  $m(v)$  узнаем позже. Но классическая механика была сформулирована для мира, в котором мы живем. В этом мире скорости тел достаточно малы. Тут надо бы написать, что  $v \ll \dots?$ , но что подставить вместо знака вопроса, по сравнению с чем именно малы скорости? Ответ также получим позже, а пока удовлетворимся просто обещанием не применять классическую механику к миру больших скоростей. Тогда функцию  $m(v)$  можно заменить на ее значение в нуле ( $v = 0$ ), для которого существует специальное обозначение  $m$  и название — масса. Итак, для малых скоростей

$$m(v) = m(0) = m,$$

что приводит к обычному (классическому) выражению для импульса частицы

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Уравнение движения (3.1) принимает тогда вид

$$\boxed{\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}}. \quad (3.3)$$

Таким образом, уравнение (3.1), а следовательно и (3.3), есть не что иное, как **уравнение второго закона Ньютона**, из которого вытекает, что ускорения зависят не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела — от его *массы*.

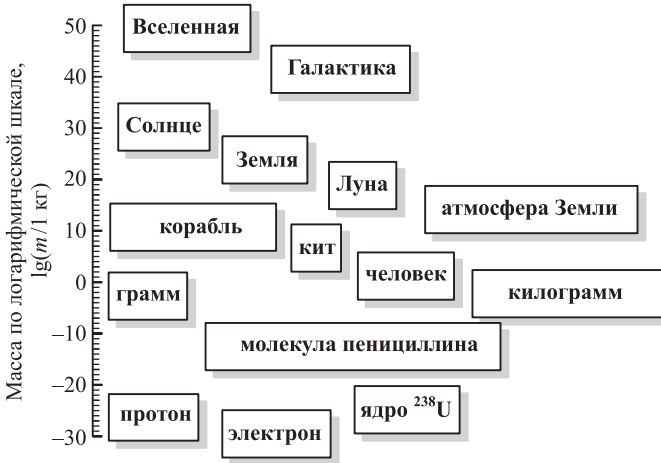


Рис. 3.2. Характерные массы в природе

♦ **Масса тела** — физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (*инертная масса*) и гравитационные (*гравитационная масса*) свойства. ♦

С помощью точных экспериментов установлено, что

♦ *инертная и гравитационная массы равны друг другу.* ♦

Масса — одно из фундаментальнейших понятий физики, формировавшееся на протяжении почти двух тысячелетий: помимо Галилея и Ньютона, этими вопросами занимались Аристотель, Герон, Коперник, Кеплер, Декарт, Гюйгенс и др. Ньютон определил массу как меру количества вещества, пропорциональную его плотности и объему. Но тут получается порочный логический круг, поскольку в свою очередь плотность есть масса единицы объема. Дело в том, что масса — первичное понятие, не сводимое к другим, и потому вместо ответа на вопрос «что такое масса?» мы отвечаем на другие — «как измерить массу?», «как она проявляется в движении тел?». Иначе говоря, мы познаем свойства массы на опыте, описывая результаты уравнениями движения.

Можно, однако, задаться другим вопросом: казалось бы, гораздо большее значение имеет та самая функция  $m(v)$ , которую мы пока не знаем, а не ее частное значение  $m$  в нуле. Почему же именно последнее столь важно для физики? В главе 9 мы увидим, что значение  $m = m(0)$  полностью определяет всю функцию  $m(v)$ .

Теперь можно сформулировать **второй закон Ньютона** (основной закон динамики поступательного движения):

♦ *ускорение, приобретаемое материальной точкой, совпадает по направлению с действующей на нее силой и равно отношению этой силы к массе материальной точки:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad \blacklozenge \quad (3.4)$$

Как известно, масса в СИ измеряется в килограммах:  $[M] = \text{кг}$ . На рисунке 3.2 показаны значения масс некоторых объектов. Второй закон Ньютона устанавливает единицу измерения силы  $[F] = [MLT^{-2}]$ . В СИ единица силы носит название ньютон: 1 Н — это сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение  $1 \text{ м/с}^2$  в направлении действия силы:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \times 1 \text{ м/с}^2 = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}. \quad (3.5)$$

Сила может зависеть от времени, от положения тела в пространстве, от его скорости. Поэтому решение уравнения движения в общем случае — достаточно непростое дело. Приведем пример решения такой задачи.

**Задача 3.7.** На тело массой  $m$  в момент времени  $t = 0$  начинает действовать периодическая сила  $F(t) = F_{\max} \sin(2\pi t/T)$ , направленная вдоль оси  $Ox$  ( $T$  — период изменения силы). Найти зависимость от времени скорости частицы и ее положения на оси  $Ox$ .

**Решение.** Поскольку максимальное значение силы равно  $F_{\max}$ , введем обозначение для максимального ускорения  $a_{\max} = F_{\max}/m$ . Тогда уравнение движения примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = a_{\max} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

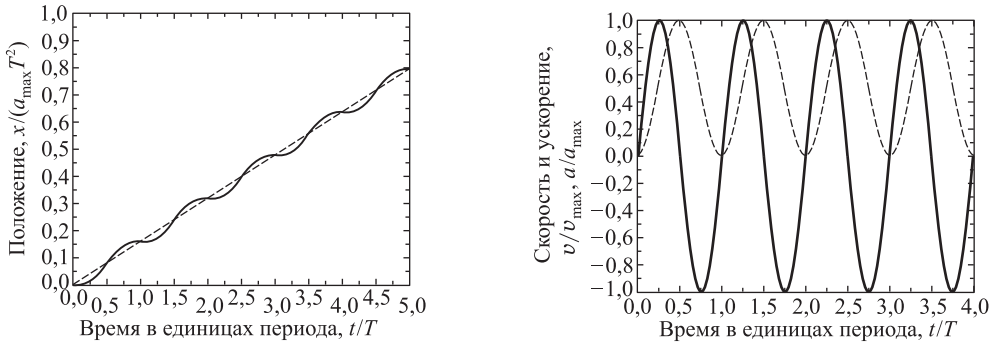
Отсюда скорость в момент времени  $t$  равна

$$\begin{aligned} v(t) &= a_{\max} \int_0^t \sin\left(2\pi \frac{t'}{T}\right) dt' = -\frac{a_{\max} T}{2\pi} \cos\left(2\pi \frac{t'}{T}\right) \Bigg|_{t'=0}^{t'=t} = \\ &= \frac{a_{\max} T}{2\pi} \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Положение тела на оси  $Ox$  также определяется интегрированием (начало координат выбрано в точке, где покоилось тело в момент  $t = 0$ ):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(t') dt' = \frac{a_{\max} T}{2\pi} \int_0^t \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{t'}{T}\right)\right] dt' = \\ &= \frac{a_{\max} T}{2\pi} \left[ t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t'}{T}\right) \Bigg|_{t'=0}^{t'=t} \right] = \\ &= \frac{a_{\max} T^2}{2\pi} \left[ \frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Графики положения (в единицах  $a_{\max} T^2$ ), ускорения (в единицах  $a_{\max}$ ) и скорости (в единицах  $v_{\max} = a_{\max} T/\pi$ ) показаны на рис. 3.3. График ускорения, естественно, повторяет изменение силы. Скорость также изменяется с тем же периодом, но, в отличие от ускорения, нигде не меняет знака: скорость, набранная за время полупериода положительной силы, снижается до нуля за время действия отрицательной силы. Соответственно, удаление от начального положения не осциллирует, как можно было бы подумать. Координата  $x$  растет в целом линейно. Поскольку среднее значение косинуса в (3.6) равно нулю, среднее значение скорости есть  $\langle v \rangle = a_{\max} T/(2\pi) = v_{\max}/2$ . Именно этот коэффициент имеет линейно зависящий от времени  $t$  член в (3.7). На линейную функцию времени в выражении для  $x(t)$  накладываются осцилляции (колебания), связанные с осцилляциями скорости вокруг значения  $\langle v \rangle$ . ■



**Рис. 3.3.** К задаче 3.7: временные зависимости положения тела (слева), его скорости и ускорения (справа). На графике положения пунктиром показан линейный член  $\langle v \rangle t$  в выражении (3.7). На правом графике скорость тела показана пунктиром, ускорение — сплошной линией. Средняя скорость, как видно из рисунка справа, равна  $\langle v \rangle = v_{\max}/2 = a_{\max}T/(2\pi)$

Как быть, если на точку действует не одна сила  $\vec{F}$ , а несколько:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ? В механике большое значение имеет **принцип независимости действия сил**:

♦ *если на материальную точку действуют одновременно несколько сил, то каждая из них сообщает ей, согласно второму закону Ньютона, ускорение, которое не зависит от других сил.* ♦

Полное же ускорение тела равно сумме этих «частичных» ускорений. Согласно этому принципу, силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач:

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} &= \vec{F}, \\
 \text{где } \vec{F} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i, \\
 \text{и } \vec{a}_i &= \vec{F}_i/m.
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Сумму сил  $\vec{F}$  называют **равнодействующей** (или результирующей) силой, приложенной к телу.

**Третий закон Ньютона** утверждает, что

♦ *при взаимодействии двух тел сила  $\vec{F}_{2,1}$ , действующая на второе тело со стороны первого, равна по величине и противоположна по направлению силе  $\vec{F}_{1,2}$ , действующей на первое тело со стороны второго:*

$$\boxed{\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}} \quad \blacklozenge \tag{3.9}$$

Уже из формулировки ясно, что уровень фундаментальности этого закона совсем не тот, как у двух предыдущих. Здесь мы не имеем дело со свойствами пространства, а лишь с условиями прямого контакта двух тел. Например, обе силы должны измеряться в один и тот же момент времени. Поскольку для

передачи взаимодействия всегда требуется какое-то конечное время, этот закон заведомо не может быть справедливым в электродинамике, где взаимодействие переносится электромагнитными волнами. Но в классической механике третий закон выполняется с хорошей точностью.

### 3.3 Механические силы

В этом разделе мы приведем примеры сил, действующих в механических системах. Это сила тяжести и вес тела, силы упругости и трения. Происхождение силы тяжести связано с одним из *фундаментальных взаимодействий* — *гравитационным*. (С этим взаимодействием мы познакомимся подробнее в гл. 6 при изучении закона всемирного тяготения.) Другое фундаментальное взаимодействие — *электромагнитное*, т. е. взаимодействие между электрическими зарядами и токами, — лежит в основе сил, связанных с деформацией тел. Это прежде всего силы упругости, а также силы трения, возникающие за счет деформации при соприкосновении шероховатых поверхностей. При деформации нарушается равновесное распределение зарядов внутри атомов и молекул, из которых состоят тела, что приводит к появлению электрических сил между этими зарядами.

#### Сила тяжести и вес

Под действием силы притяжения все тела падают на Землю с одинаковым ускорением  $\vec{g}$ . Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой  $m$  действует сила тяжести<sup>1</sup>

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

◆ Сила, с которой тело действует на подвес или опору, называется **весом тела**. ◆

Когда тело покоится, сила тяжести уравновешивается реакцией опоры или подвеса  $\vec{F}_r$ , т. е.  $\vec{F}_r + \vec{P} = 0$ . По третьему закону Ньютона вес тела  $\vec{G}$  в этом случае равен силе тяжести:

$$\vec{G} = -\vec{F}_r = \vec{P} = m\vec{g}. \quad (3.10)$$

Если же тело вместе с опорой или подвесом движется с ускорением, то вес тела будет отличаться от силы тяжести.

Пусть подвес в виде укрепленной на раме пружины движется с ускорением  $\vec{a}$  (рис. 3.4). Тогда уравнение движения тела будет иметь вид

$$\vec{P} + \vec{F}_r = m\vec{a}, \quad (3.11)$$

---

<sup>1</sup>Впредь, если не оговорено иное, будем считать силу тяжести совпадающей с силой тяготения (гравитации). Строго говоря, сила тяжести есть равнодействующая силы гравитационного взаимодействия тела с Землей (см. разд. 6.2) и центробежной силы инерции, действующей на тело во вращающейся системе отсчета (в частности, связанной с Землей — см. разд. 7.3). Но поскольку центробежные силы гораздо меньше гравитационных, во многих задачах их можно не учитывать.

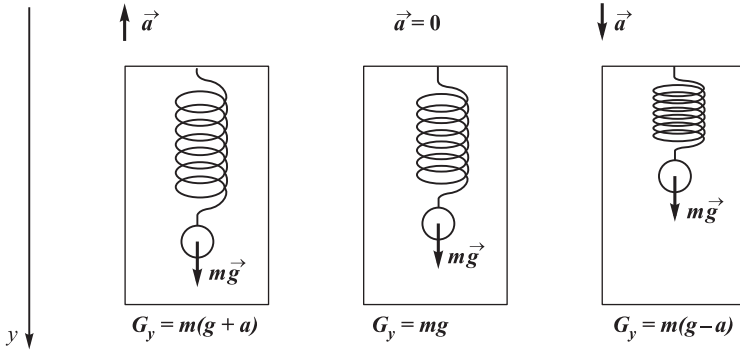


Рис. 3.4. Вес движущегося тела зависит от ускорения опоры

где  $\vec{F}_r$  — реакция подвеса, т. е. сила, с которой пружина действует на тело. По третьему закону Ньютона тело действует на пружину с силой, равной  $-\vec{F}_r$ , которая по определению представляет собой вес тела  $\vec{G}$ .

Подставив в уравнение движения  $\vec{F}_r = -\vec{G}$  и  $\vec{P} = m\vec{g}$ , получим:

$$\vec{G} = m(\vec{g} - \vec{a}). \quad (3.12)$$

Спроецируем полученное соотношение на вертикальную ось  $y$ :

$$G_y = m(g - a_y). \quad (3.13)$$

Отсюда вытекает, что по модулю вес  $G$  может быть как больше, так и меньше, чем сила тяжести  $P$  (см. рис. 3.4). При свободном падении рамы с подвесом  $\vec{a} \equiv \vec{g}$  и сила  $G$ , с которой тело действует на подвес, равна нулю: наступает состояние невесомости. «Исчезновение» веса тела, т. е. силы давления на опору, не означает исчезновения инерционных свойств тела (его массы).

В фантастической повести А. Р. Беляева «Звезда КЭЦ» описывается первое пребывание героя в состоянии невесомости. Он оттолкнулся и летит вдоль коридора космической станции:

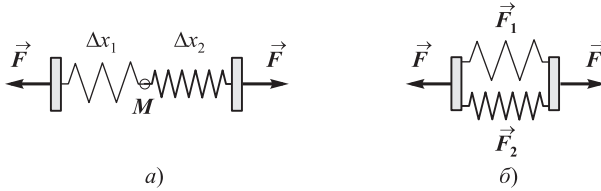
— Хватайтесь за ремешок! — крикнул Крамер. Эти ремешки, вроде ручек портплекда, были всюду: на стенах, на полу, на потолке. Я ухватился за ручку, ожидая, что меня рванет при остановке, но в тот же миг с удивлением почувствовал, что в руке не ощущается напряжения.

В этом описании содержится, конечно, грубая физическая ошибка: исчезновение **веса** героя вовсе не означает исчезновения его **импульса**  $m\vec{v}$ . Для изменения импульса (остановки) нужна сила, так что космонавт должно было «рвануть» точно так же, как и на Земле.

### Сила упругости

При деформации тела возникают силы упругости, препятствующие этой деформации (поэтому мы не проваливаемся сквозь пол). При небольших деформациях возникающие силы пропорциональны величине деформации. Если пружина





**Рис. 3.5.** Последовательное и параллельное соединение пружин: к задаче 3.8 об определении коэффициента жесткости составных пружин

в нормальном (ненагруженном) состоянии имеет длину  $x_0$  и мы деформируем ее (растягиваем или сжимаем) до длины  $x$ , то на нашу руку действует сила упругости

$$F = -k(x - x_0). \quad (3.14)$$

Коэффициент  $k$  называется *коэффициентом жесткости пружины*, знак минус указывает, что сила упругости препятствует деформации пружины. Уравнение (3.14) — простейший случай закона Гука.

**Задача 3.8.** Каков эффективный коэффициент жесткости  $k$  для пружины, составленной из двух других пружин с коэффициентами жесткости  $k_1$  и  $k_2$ , если пружины соединены: а) последовательно, б) параллельно (рис. 3.5).

**Решение.** Если растягивать последовательно соединенные пружины, то возникающие в каждой из них упругие силы одинаковы и равны растягивающей силе  $F$  (рис. 3.5,а): точка соединения  $M$  находится в равновесии. Следовательно, удлинения пружин равны  $\Delta x_1 = F/k_1$ ,  $\Delta x_2 = F/k_2$ . Полное удлинение составной пружины равно  $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = F(1/k_1 + 1/k_2)$ . Эффективная жесткость последовательно соединенных пружин определяется из соотношения:

$$\frac{1}{k} = \frac{\Delta x}{F} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{или} \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

При растягивании параллельно соединенных пружин одинаковы их удлинения  $\Delta x$ , так что в каждой из них возникает своя упругая сила:  $F_1 = k_1 \Delta x$ ,  $F_2 = k_2 \Delta x$ . Сумма этих сил  $F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \Delta x$  равна растягивающей силе (см. рис. 3.5,б), так что коэффициент жесткости параллельно соединенных пружин равен

$$k = F/\Delta x = k_1 + k_2. \quad \blacksquare$$

Заметим, что закон сложения коэффициентов жесткости при параллельном (последовательном) соединении пружин аналогичен закону сложения сопротивлений последовательно (параллельно) соединенных проводников. Подобная «инверсия» правил сложения связана с тем, что токи в проводниках складываются при их параллельном соединении, а удлинения пружин — при последовательном.

В ряде задач, когда коэффициент жесткости велик, пренебрегают *величиной* деформации, но не ее *последствиями* — возникающими силами упругости. Это тоже пример физической абстракции, модели.

## Сила трения

При соприкосновении поверхностей твердых тел между ними возникают силы, называемые силами *сухого трения*. Их характерная черта: эти силы не обращаются в нуль при отсутствии относительного движения соприкасающихся тел.

◆ Трение, которое может существовать между телами, не движущимися друг относительно друга, называется **трением покоя**. Сила трения покоя всегда равна по величине и противоположна по направлению внешней силе, которая в отсутствие трения должна была бы вызвать относительное скольжение тел. ◆

Однако сила трения покоя не может превосходить некоторой максимальной величины  $f_{\max}$ . Пока внешняя сила меньше  $f_{\max}$ , относительное скольжение тел не возникает, так как сила трения покоя «автоматически» принимает значение, компенсирующее действие внешней силы.

◆ Силы сухого трения между объектами, движущимися друг относительно друга, называются **силами трения скольжения**. ◆

Они довольно сложным образом зависят от скорости относительного движения, но для широкого класса явлений и соприкасающихся материалов их можно считать постоянными и равными максимальному значению силы трения покоя. Они направлены так, чтобы препятствовать относительному проскальзыванию соприкасающихся тел.

Для максимального значения силы трения покоя экспериментально установлено соотношение: **закон Амонтона—Кулона**:

$$f_{\max} = \mu N. \quad (3.15)$$

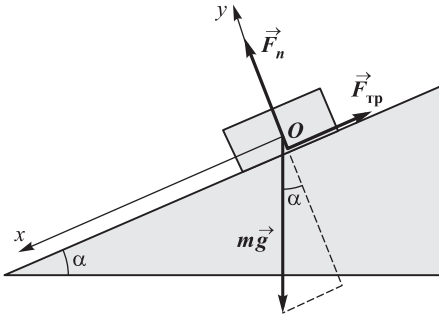
Здесь  $N$  — сила нормального давления, прижимающая тела, а  $\mu$  — коэффициент трения покоя, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей. Характерные значения  $\mu$  приведены в табл. 3.1. Следует иметь в виду, что коэффициент трения покоя сильно зависит не только от материалов соприкасающихся тел, но и от состояния (обработки) их поверхностей и наличия между ними той или иной смазки.

При контакте твердых тел между ними действуют не только силы сухого трения (покоя или скольжения). Из-за деформации тел могут возникать также силы *трения качения*. Они гораздо меньше сил трения покоя, и ими обычно пренебрегают.

Следующий пример демонстрирует случай, когда сила реакции опоры не параллельна силе тяжести. Пусть тело массой  $m$ , скользит по наклонной плоскости, которая составляет угол  $\alpha$  с горизонтом (рис. 3.6). Для того чтобы составить уравнение движения, необходимо установить, какие силы действуют на

**Таблица 3.1.** Коэффициент трения покоя для ряда соприкасающихся материалов

1-й материал	сталь	сталь	сталь	металл	резина	дерево
2-й материал	лед	сталь	пластмасса	дерево	асфальт	дерево
$\mu$	0,015	0,15	0,3	0,5	0,55	0,65



**Рис. 3.6.** Движение тела по наклонной плоскости

рассматриваемое тело. При этом необходимо вначале выяснить, действие каких других тел на данное тело следует принять во внимание.

Для тела, скользящего по наклонной плоскости, существенно воздействие со стороны Земли (оно характеризуется силой тяжести  $m\vec{g}$ ) и воздействие со стороны плоскости (оно характеризуется силой реакции опоры  $\vec{F}_n$  и силой трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ ). Определив силы, действующие на тело, составляют уравнение второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_n + \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (3.16)$$

Чтобы найти ускорение тела, необходимо перейти от векторов к их проекциям на соответствующим образом выбранные направления. (Обычно целесообразно в качестве одной из координатных осей выбрать ось вдоль направления движения.) Спроецируем векторы, входящие в уравнение, на направления  $Ox$  и  $Oy$  (см. рис. 3.6):

$$\begin{cases} ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \\ 0 = F_n - mg \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.17)$$

Учитывая, что сила трения скольжения  $F_{\text{тр}} = \mu F_n$ , находим

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha. \quad (3.18)$$

Следовательно, мы приходим к уравнению для ускорения скользящего тела:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \quad (3.19)$$

Из этого выражения следует, что при  $\text{tg } \alpha = \mu$  ускорение  $a$  равно нулю, и тело покоится. При еще меньших углах наклона ( $\alpha \leq \text{arctg } \mu$ ) тело, очевидно, тоже покоится и, как вытекает из (3.17) при  $a = 0$ , сила трения равна скатывающей силе:

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha.$$

Поскольку в этом случае  $F_{\text{тр}}$  — сила трения покоя — не достигает своего максимального значения, равного силе трения скольжения, формула (3.18) не работает.

### Сила сопротивления среды

При движении тела в жидкой или газообразной среде на него действует сила сопротивления среды, зависящая от скорости тела. При малых скоростях движения сила сопротивления пропорциональна скорости  $\vec{F}_{\text{соп}} = -k_1 \vec{v}$ , при увеличении

скорости тела сила сопротивления зависит от скорости по квадратичному закону  $\vec{F}_{\text{соп}} = -k_2 v \vec{v}$ . В обоих случаях сила сопротивления направлена против вектора скорости тела.

Зависимость силы от скорости тела приводит к существованию так называемой установившейся скорости движения, когда сила сопротивления достигает величины движущей силы.

**Задача 3.9.** *Парашютист, масса которого  $m = 80$  кг, совершает затяжной прыжок. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости парашютиста  $F_{\text{соп}} = kv^2$ , где коэффициент сопротивления равен  $k = 0,6$  кг/м. Начальная скорость парашютиста равна нулю. Определить, через какой промежуток времени  $t$  скорость падения парашютиста будет составлять 90% от скорости  $v_c$  установившегося движения.*

**Решение.** Направление вдоль ускорения свободного падения (вертикально вниз) выбираем за положительное направление оси. Уравнение второго закона Ньютона записываем в виде:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2. \quad (3.20)$$

Определим сначала установившуюся скорость движения. Раз скорость перестает меняться, производная в левой части равна нулю. Отсюда  $mg = kv^2$  (сила тяжести уравновешивается силой сопротивления) и

$$v_c = \sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{80 \times 9,8}{0,6}} \approx 36 \text{ м/с}. \quad (3.21)$$

Далее из (3.20) находим:

$$\frac{dv}{g - (k/m)v^2} = dt, \quad \text{откуда} \quad \int \frac{dv}{g - (k/m)v^2} = \int dt. \quad (3.22)$$

Интеграл в левой части уравнения берется, если использовать разложение

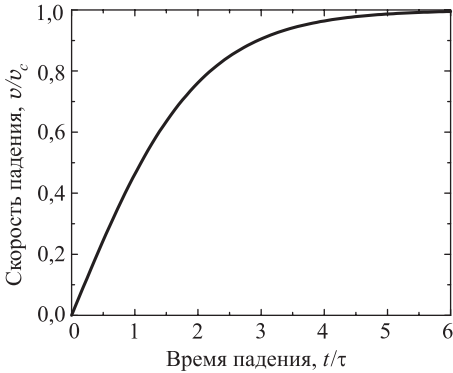
$$\begin{aligned} \frac{1}{g - (k/m)v^2} &= \frac{1}{(\sqrt{g} - \sqrt{k/m}v)(\sqrt{g} + \sqrt{k/m}v)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \left( \frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{k/m}v} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{k/m}v} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

и учесть, что

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{\sqrt{g} - \sqrt{k/m}v} &= -\sqrt{\frac{m}{k}} \ln(\sqrt{g} - \sqrt{k/m}v), \\ \int \frac{dv}{\sqrt{g} + \sqrt{k/m}v} &= \sqrt{\frac{m}{k}} \ln(\sqrt{g} + \sqrt{k/m}v). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из (3.23), (3.24) следует, что

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{g - (k/m)v^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{kg}} \left[ \ln(\sqrt{g} + \sqrt{k/m}v) - \ln(\sqrt{g} - \sqrt{k/m}v) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{kg}} \ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{k/m}v}{\sqrt{g} - \sqrt{k/m}v}. \end{aligned} \quad (3.25)$$



**Рис. 3.7.** График зависимости скорости парашютиста (в единицах  $v_c$ ) от времени (в единицах  $\tau$ ) — к задаче 3.9

Интеграл в правой части (3.22) равен  $t + C$ , где  $C$  — постоянная интегрирования. Получаем тогда равенство

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{kg}} \ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{k/m} v}{\sqrt{g} - \sqrt{k/m} v} = t + C. \quad (3.26)$$

В начальный момент  $t = 0$  скорость равна нулю. Подставляя  $t = 0, v = 0$ , находим  $C = 0$ . Далее мы подставим значение  $v = 0,9v_c = 0,9\sqrt{mg/k}$ . Находим тогда:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{kg}} \ln \frac{\sqrt{g} + 0,9\sqrt{g}}{\sqrt{g} - 0,9\sqrt{g}} = \frac{\ln 19}{2} \sqrt{\frac{m}{kg}} = \\ &= \frac{\ln 19}{2} \sqrt{\frac{80}{0,6 \times 9,8}} = 5,43 \text{ с.} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Задача решена, но мы пойдем несколько дальше. Найдем зависимость скорости падения от времени. Из (3.26) следует ( $C = 0$ ):

$$\frac{\sqrt{g} + \sqrt{k/m} v}{\sqrt{g} - \sqrt{k/m} v} = e^{2t\sqrt{kg/m}}, \quad (3.28)$$

откуда

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{\exp(2t\sqrt{kg/m}) - 1}{\exp(2t\sqrt{kg/m}) + 1} = \\ &= \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{1 - \exp(-2t\sqrt{kg/m})}{1 + \exp(-2t\sqrt{kg/m})}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Первое представление скорости удобно при малых временах, второе — при больших. Характерное время установления скорости дается комбинацией

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{gk}} = 1,84 \text{ с.} \quad (3.30)$$

Тогда экспоненты в (3.29) записываются как  $\exp(\pm t/\tau)$ . При  $t = \tau$  имеем  $v \approx 0,46v_c$ . Мы видим из (3.27), что скорость  $0,9v_c$  достигается за промежуток времени, примерно равный трем ( $\ln 19 = 2,94$ ) характерным временам  $\tau$ .

При малых временах  $t \ll \tau$  можно разложить экспоненты ( $e^\delta \approx 1 + \delta$ ) и получить

$$v \approx \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{2\sqrt{kg/mt}}{2} = gt,$$

т. е. сначала скорость падения мала, сопротивления воздуха не чувствуется и парашютист ускоряется, как если бы падал в вакууме. По мере роста скорости растет сопротивление, ускорение падает, а скорость стремится к установившемуся значению  $v_c$ , как это показано на рис. 3.7. ■

**Задача 3.10.** Тело падает в воздухе с достаточно большой высоты. С каким ускорением оно будет двигаться сразу после упругого столкновения с плоской поверхностью?

**Решение.** Для ответа на этот вопрос нам не нужны сведения о зависимости силы сопротивления от скорости тела, но достаточно знать, что при длительном падении в воздухе тело движется с установившейся скоростью. Это значит, что сила сопротивления воздуха  $F_{\text{соп}}$  равна силе тяжести  $mg$ , так что полная сила, действующая на тело, равна нулю:  $F = F_{\text{соп}} - mg = 0$ . После упругого столкновения с плоской поверхностью тело движется с той же скоростью, но в противоположном направлении — вверх. Соответственно, сила сопротивления воздуха тоже остается прежней по величине, но направлена она теперь вниз, т. е. туда же, куда и сила тяжести. Поэтому полная сила равна теперь  $F = -F_{\text{соп}} - mg = -2mg$ , а ускорение тела равно  $a = -2g$  и направлено оно вниз, против скорости тела. ■

### 3.4 Движение тела, брошенного под углом к горизонту в среде с сопротивлением

Пусть снаряд выпущен из пушки с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, и пусть сила сопротивления воздуха зависит линейно от скорости снаряда:  $\vec{F}_{\text{соп}} = -m\beta\vec{v}$ . Найдем траекторию снаряда.

Запишем уравнения движения для проекций радиуса-вектора снаряда:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\beta \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\beta \frac{dy}{dt} - g. \end{aligned} \quad (3.31)$$

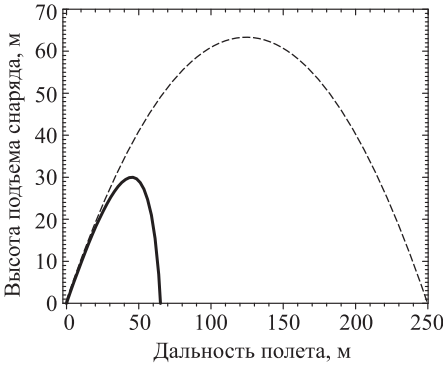
Начальные условия в нашей задаче имеют вид:

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) &= v_0 \cos \alpha, \\ \dot{y}(0) &= v_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Первое из уравнений (3.31) легко интегрируется, и с учетом начальных условий мы находим сначала скорость снаряда, а затем и его положение по горизонтали:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_0 \cos \alpha e^{-\beta t}, \\ x(t) &= \frac{v_0}{\beta} \cos \alpha \left(1 - e^{-\beta t}\right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Не представляет трудностей и решение второго уравнения из (3.31), если догадаться сделать замену  $y(t) = \hat{y}(t) - (g/\beta)t$ , которая сведет это уравнение к предыдущему.



**Рис. 3.8.** Слева: траектории снаряда при сильном сопротивлении воздуха (толстая сплошная линия) и в его отсутствие (тонкий пунктир). Справа: средневековая гравюра, где траектория снаряда показана в виде треугольника

Получаем тогда для скорости снаряда и его положения по вертикали:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \left( v_0 \sin \alpha + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}, \\ y(t) &= \frac{1}{\beta} \left( v_0 \sin \alpha + \frac{g}{\beta} \right) \left( 1 - e^{-\beta t} \right) - \frac{g}{\beta} t. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Уравнение траектории  $y(x)$  у нас получилось заданным параметрически. Чтобы найти его явный вид, надо выразить время  $t$  через координату  $x$ :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\beta t} &= -\frac{\beta x}{v_0 \cos \alpha}, \\ t &= -\frac{1}{\beta} \ln \left( 1 - \frac{\beta x}{v_0 \cos \alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Теперь из (3.34) и (3.35) получаем искомую траекторию, с виду мало похожую на параболу (рис. 3.8 слева):

$$y = \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{\beta v_0 \cos \alpha} \right) x + \frac{g}{\beta^2} \ln \left( 1 - \frac{\beta x}{v_0 \cos \alpha} \right). \quad (3.36)$$

Однако при малом сопротивлении воздуха  $\beta \ll g/v_0$  мы можем разложить логарифм в степенной ряд с точностью до слагаемых второго порядка. Тогда члены порядка  $1/\beta^2$  и  $1/\beta$ , растущие при малых  $\beta$ , сокращаются и мы получаем обычную параболу:

$$\begin{aligned} y &= \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{\beta v_0 \cos \alpha} \right) x + \frac{g}{\beta^2} \left( -\frac{\beta x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{\beta^2 x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \dots \right) = \\ &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

В обратном случае большого сопротивления воздуха  $\beta \gg g/v_0$

$$y \approx x \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{\beta^2} \ln \left( 1 - \frac{\beta x}{v_0 \cos \alpha} \right). \quad (3.38)$$

Коэффициент при логарифме мал, и на большей части траектории снаряд летит по прямой  $y = x \operatorname{tg} \alpha$ . Но вблизи точки  $l_{\max} = v_0 \cos \alpha / \beta$  логарифм стремится к отрицательной бесконечности. Стало быть, эту точку снаряд перелететь никогда не сможет и вблизи от нее упадет почти вертикально на землю — его траектория будет больше похожа на треугольник. На рис. 3.8 слева сплошной кривой изображена траектория снаряда в среде с сопротивлением при начальных условиях  $\alpha = 45^\circ$  и  $v_0 = 50 \text{ м/с}$ . Для ускорения свободного падения принято значение  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . При этих условиях  $g/v_0 = 0,2 \text{ с}^{-1}$ . Для коэффициента  $\beta$ , характеризующего сопротивление воздуха, мы взяли значение  $\beta = 0,5 \text{ с}^{-1}$ , тогда предельное значение дальности полета составляет  $l_{\max} = 71 \text{ м}$ . Время полета снаряда  $t_f = l_{\max}/(v_0 \cos \alpha) = 1/\beta$  (в нашем примере — 2 с). Длина «гипотенузы» (восходящего участка траектории) равна  $s = l_{\max}/\cos \alpha = v_0/\beta$  и не зависит от угла наклона орудия.

Это могло бы рассматриваться как подтверждение древней гипотезы «движущей силы» (импетуса), о которой говорилось в начале этой главы. Согласно этой гипотезе, снаряд, получив «движущую силу» при воспламенении порохового заряда, летит по прямой, пока не исчерпает ее запас, после чего останавливается и падает на землю. Ясно, что ни количество полученной «движущей силы», ни скорость ее расходования не должны зависеть от угла наклона дула пушки к горизонту, но лишь от скорости вылета и пройденного пути. Средневековая гравюра, помещенная на рис. 3.8 справа, изображает «движущую силу» в виде вырывающегося из дула языка пламени, длина которого как раз равна «гипотенузе». Однако наблюдения за дальностью полета снарядов все же выявили зависимость от угла наклона пушки, а многочисленные целенаправленные эксперименты позволили установить правильные законы движения. Само понятие импетуса как особого качества движущегося тела, отличающего его от покоящегося, в конце концов изжило себя и переросло в понятие импульса.

### 3.5 Закон сохранения импульса

Мы видели, что импульс материальной точки, на которую не действуют силы, сохраняется. Рассмотрим теперь систему  $N$  материальных точек  $M_1, \dots, M_N$ , положения которых задаются радиусами-векторами  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ , а импульсы равны  $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ , соответственно. Среди сил, действующих на эти материальные точки, будем различать *внутренние* силы между телами, входящими в систему, и *внешние* силы, действующие на систему со стороны тел, в нее не включенных. Внутренние силы будем обозначать как  $\vec{F}_{i,j}$ , где индексы показывают, что сила действует на тело с номером  $i$  со стороны тела с номером  $j$ . Кроме того, на тело с номером  $i$  действует какая-то внешняя сила  $\vec{F}_i$ .

Напишем уравнение второго закона Ньютона (скорость изменения импульса тела равна сумме всех действующих на тело сил) для всех  $N$  материальных точек системы:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \dots + \vec{F}_{1,N} + \vec{F}_1, \\
 \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \dots + \vec{F}_{2,N} + \vec{F}_2, \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \frac{d\vec{p}_N}{dt} &= \vec{F}_{N,1} + \vec{F}_{N,2} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_N.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$



Сложим вместе эти  $N$  уравнений. Сумма всех внутренних сил в правой части получится равной нулю. Действительно, она состоит из парных слагаемых типа  $\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1}$  и т. д. По третьему закону Ньютона силы взаимодействия двух материальных точек  $i$  и  $j$  равны по величине и противоположно направлены (действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки):  $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$ . Поэтому в правой части у нас останется только сумма всех внешних сил:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \dots + \vec{p}_N) = (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_N). \quad (3.40)$$

Сумма  $\vec{p} = \sum_i^N \vec{p}_i$  импульсов частиц, образующих механическую систему, называется *импульсом системы*. Импульс системы удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (3.41)$$

◆ Система тел, взаимодействующих только между собой и не взаимодействующих с другими телами, называется **замкнутой**. ◆

Иными словами, на замкнутую систему не действуют внешние силы. При отсутствии внешних сил  $d\vec{p}/dt = 0$ ,  $\vec{p} = \text{const}$ .

◆ Суммарный импульс  $\vec{p} = \sum_i^N \vec{p}_i$  замкнутой системы постоянен. ◆

Это утверждение, известное как **закон сохранения импульса**, связано с фундаментальными свойствами природы (однородностью пространства) и потому справедливо не только для классической механики, но и для ее возможных обобщений.

Бывают ситуации, когда внешние силы не равны нулю, но равна нулю проекция их равнодействующей на какое-то направление. Тогда, как следует из векторного соотношения (3.41), будет сохраняться проекция импульса системы на это же направление. Примером может служить движение тела, брошенного под углом к горизонту в отсутствие сопротивления среды. На тело действует сила тяжести, направленная вертикально вниз. Ее проекция на горизонтальную ось равна нулю, и потому горизонтальная проекция импульса сохраняется (постоянна горизонтальная проекция скорости).

Применение закона сохранения импульса позволяет решить многие задачи, когда неизвестны точные значения сил, действующих в системе.

**Задача 3.11.** Стреляя из автомата АК-47, солдат испытывает отдачу: на него действует средняя сила  $F_{\text{ср}}$ , эквивалентная весу массы  $M = 6,5$  кг. Учитывая, что масса пули  $m = 7$  г и вылетает она с начальной скоростью  $v = 850$  м/с, определить скорострельность  $n$  автомата.

**Решение.** За время  $\Delta t$  выпускается  $\Delta N = n\Delta t$  пуль. Уносимый ими импульс равен  $\Delta p = mv\Delta N = mvn\Delta t$ . По закону сохранения такой же импульс передается автомату. Поэтому по второму закону Ньютона средняя сила отдачи равна

$$F_{\text{ср}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mvn.$$

По условию  $F_{\text{ср}} = Mg$ . Отсюда находим скорострельность оружия:

$$n = \frac{F_{\text{ср}}}{mv} = \frac{Mg}{mv} = \frac{6,5 \times 9,8}{7 \cdot 10^{-3} \times 850} = 10,7 \text{ с}^{-1} \approx 642 \text{ мин}^{-1}.$$

Естественно, при стрельбе очередями и, тем более, одиночными выстрелами число выстрелов в минуту будет меньшим. ■

### 3.6 Центр масс

Снова рассмотрим ту же систему материальных точек. Построим радиус-вектор  $\vec{R}_c$  по следующему правилу:

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \quad (3.42)$$

где  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -й материальной точки системы, а  $m_i$  — ее масса. Радиус-вектор  $\vec{R}_c$  определяет положение в пространстве *центра инерции (центра масс) системы*. Вовсе не обязательно, что в центре масс системы окажется какая-то материальная точка.

Определим, с какой скоростью  $\vec{V}_c = d\vec{R}_c/dt$  движется центр инерции системы. Дифференцируем по времени обе части (3.42):

$$\vec{V}_c = \dot{\vec{R}}_c = \frac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}. \quad (3.43)$$

В числителе выражения в правой части (3.43) стоит сумма импульсов всех точек, т. е. импульс  $\vec{p}$  системы. В знаменателе стоит полная масса системы

$$M = \sum_i m_i. \quad (3.44)$$

Мы получили, что скорость центра инерции связана с импульсом системы и ее полной массой таким же соотношением, какое справедливо для материальной точки:

$$\vec{p} = M\vec{V}_c. \quad (3.45)$$

Таким образом, можно считать, что скорость  $\vec{V}_c$  является скоростью системы как целого. Она, разумеется, может отличаться от скоростей каждого из тел, входящих в систему.

Центр масс замкнутой системы всегда движется с постоянной скоростью, поскольку импульс такой системы сохраняется.

Если продифференцировать теперь соотношение (3.45) по времени и учесть, что производная импульса системы есть равнодействующая внешних сил, то получим **уравнение движения центра масс системы** в общем случае:

$$M \frac{d^2 \vec{R}_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (3.46)$$

Видно, что

◆ *центр масс системы движется точно так же, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе всех частиц системы, под действием суммы всех внешних сил, приложенных к системе.* ◆

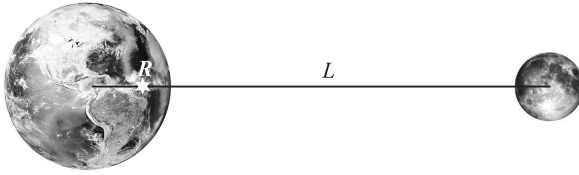


Рис. 3.9. К задаче 3.12

Если имеется система материальных точек, внутреннее расположение и движение которых нас не интересует, мы вправе считать ее материальной точкой с координатами радиуса-вектора центра инерции и массой, равной сумме масс материальных точек системы.

Если связать с центром масс замкнутой системы материальных точек (частиц) систему отсчета (ее называют *системой центра масс*), то полный импульс всех частиц в такой системе окажется равным нулю. Таким образом, в системе центра масс замкнутая система частиц **как целое** покоится и существует только движение частиц относительно центра масс. Поэтому ясно выявляются свойства внутренних процессов, протекающих в замкнутой системе.

В случае, когда системой является тело с непрерывным распределением масс, определение центра масс остается по существу тем же. Окружаем произвольную точку  $\vec{r}$  в нашем теле небольшим объемом  $dV$ . Масса, заключенная в этом объеме, равна  $dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV$ , где  $\rho$  — плотность вещества тела, которая может и не быть постоянной по его объему. Сумма по всем таким элементарным массам заменяется теперь на интеграл по всему объему  $V$  тела, так что для положения центра масс тела получается выражение

$$\vec{R}_c = \frac{\int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV}. \quad (3.47)$$

Если вещество тела однородно, плотность его постоянна и ее можно вынести из-под знака интеграла, то она сократится в числителе и знаменателе. Тогда

$$\vec{R}_c = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV, \quad (3.48)$$

где  $V$  — объем тела. И в случае непрерывного распределения масс справедливо утверждение, что

◆ *центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу внешних сил.* ◆

**Задача 3.12.** Найти положение центра масс системы Земля—Луна (рис. 3.9).

**Решение.** Среднее расстояние между центрами Земли и Луны  $L = 384\,400$  км, массы Луны и Земли  $M_{\text{Л}} = 7,35 \cdot 10^{22}$  кг и  $M_{\text{З}} = 5,97 \cdot 10^{24}$  кг соответственно. Пусть  $R$  — расстояние от центра Земли до центра масс системы. Выбирая начало координат в

центре Земли, находим в соответствии с полученными выше формулами:

$$R = \frac{M_{\oplus} \times 0 + M_{\zeta} \times L}{M_{\oplus} + M_{\zeta}} = \frac{L}{M_{\oplus}/M_{\zeta} + 1} \approx 4670 \text{ км.}$$

Радиус Земли равен 6370 км, т. е. центр масс системы Земля—Луна лежит внутри Земли на глубине 1700 км. ■

### 3.7 Инерциальные системы отсчета и принцип относительности Галилея

Зададим себе вопрос: почему мы, следуя Ньютону, сформулировали принцип инерции Галилея в виде отдельного (первого) закона движения? Ведь он следует из второго закона при равенстве нулю всех действующих на тело сил. Действительно, это так. Но по отношению к какой системе отсчета мы формулируем законы динамики?

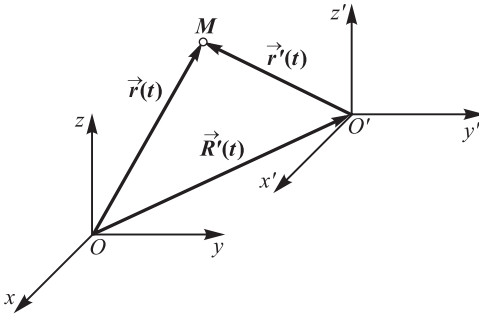
Среди всех мыслимых систем отсчета эти законы наиболее просто выглядят в так называемых *инерциальных системах отсчета*. Рассмотрим тело, находящееся настолько далеко от других тел, что оно не испытывает никаких воздействий со стороны последних. Такое тело назовем *свободно движущимся*. Если теперь с таким телом связать систему отсчета, то в ней свободное движение другого тела выглядит наиболее просто: оно будет равномерным и прямолинейным. Это и есть **закон инерции**, открытый Галилеем. Смысл закона заключается именно в том, что **существует такая система отсчета, в которой свободная материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно**.

◆ Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется **инерциальной**. ◆

Именно для инерциальной системы отсчета мы сформулировали второй закон Ньютона.

Инерциальная система отсчета — тоже определенная абстракция, используемая в науке. На практике свободно движущееся тело, равно как и инерциальная система отсчета, могут существовать лишь с большей или меньшей точностью. В огромном большинстве случаев нашу планету можно выбирать в качестве инерциальной системы отсчета (геоцентрическая система). В других случаях, например, для описания движения планет, в качестве таковой выбирается система, связанная с Солнцем (гелиоцентрическая система). Иногда и этого недостаточно, и тогда пользуются системой, связанной со звездами.

Итак, первый закон Ньютона постулирует, что существует такая система отсчета, в которой свободная материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Но если существует хотя бы одна инерциальная система, то любая другая система отсчета, движущаяся относительно нее равномерно и прямолинейно, также будет инерциальной. Действительно, установим связь в описании движения одной и той же материальной точки, рассматриваемой относительно двух разных систем отсчета. Пусть дана система отсчета с началом координат в точке  $O$ , и пусть дана другая система отсчета с началом



**Рис. 3.10.** Положение точки  $M$  в двух инерциальных системах отсчета: к выводу преобразований Галилея

координат в точке  $O'$  (рис. 3.10). Все величины, относящиеся к этой системе отсчета, мы будем снабжать знаком штриха ( $x', y', z'$  и т. п.). Положение начала отсчета  $O'$ , относительно системы  $O$  характеризуется радиусом-вектором  $\vec{R}(t)$ . Рассмотрим движение материальной точки  $M$ . Ее положение относительно системы  $O$  задается радиусом-вектором  $\vec{r}(t)$ , а относительно  $O'$  — радиусом-вектором  $\vec{r}'(t)$ . Исходя из правил сложения векторов, можем написать:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t). \quad (3.49)$$

Дифференцируем соотношение (3.49) по времени:

$$\vec{v}(t) = \vec{V} + \vec{v}'(t). \quad (3.50)$$

Здесь  $\vec{v}$  и  $\vec{v}'$  — скорости материальной точки  $M$  относительно систем  $O$  и  $O'$ , соответственно. Вектор  $\vec{V}$  — это скорость «штрихованной» системы отсчета относительно «нештрихованной». Мы получили **закон сложения скоростей классической механики**:

♦ *скорость  $\vec{v}$  точки относительно системы  $O$  может быть представлена как векторная сумма ее скорости  $\vec{v}'$  относительно системы  $O'$  и скорости  $\vec{V}$  системы  $O'$  относительно системы  $O$ .* ♦

Если система  $O'$  движется относительно  $O$  прямолинейно и равномерно, то  $\vec{V}$  не зависит от времени. Дифференцируя равенство (3.50) по времени, находим, что ускорения точки  $M$  относительно обеих систем отсчета одинаковы:  $\dot{\vec{v}}(t) = \dot{\vec{v}}'(t)$ . Согласно второму закону Ньютона, одинаковы и силы, действующие на точку. Если эти силы равны нулю, то скорости точки в обеих системах неодинаковы, но обе не зависят от времени, т. е. в обеих системах выполняется закон инерции Галилея. Стало быть, если система  $O$  инерциальная, то инерциальной будет и система  $O'$ .

Наличие множества инерциальных систем отсчета не позволяет выбрать из них одну основную. Все инерциальные системы равноправны. Поэтому естественно, что законы механики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета, которые являются физически эквивалентными (не отличимыми друг от друга). Это и составляет **принцип относительности Галилея**:

♦ *уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.* ♦

Связь координат точки в разных системах отсчета дается уравнением (3.49). Его можно записать в виде уравнений для компонентов вдоль осей координат. Для упрощения формул часто поступают следующим образом. Во-первых, оси систем выбираются параллельными, причем ось  $x$  указывает направление движения системы  $O'$  относительно системы  $O$ . Во-вторых, за начало отсчета времени выбирают момент, когда совпадали начала координат обеих систем. Тогда  $R_x = Vt$ ,  $R_y = R_z = 0$  и мы получаем **преобразования Галилея**:

$$\boxed{x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'}. \quad (3.51)$$

Мы дополнили преобразования пространственных координат равенством времени  $t = t'$  в обеих системах отсчета, чтобы подчеркнуть, что в классической механике время предполагается абсолютным, оно одно и то же в обеих системах отсчета.

Переход в другую систему отсчета — один из методов решения ряда физических задач. Приведем пример.

**Задача 3.13.** *Вниз по течению реки идет с постоянной скоростью катер. С пассажирки падает в воду соломенная шляпка. Пропажу заметили через время  $t_1 = 15$  мин, и катер повернул обратно. Через какое время  $t_2$  после поворота катер доберется до шляпки?*

**Решение.** Решим задачу в системе отсчета, связанной с текущей водой. В этой системе шляпка неподвижна, а скорость катера постоянна независимо от направления движения. Поэтому приближаться к шляпке катер будет такое же время, в течение которого он удалялся от нее:  $t_2 = t_1 = 15$  мин.

Приведем для сравнения решение этой задачи в системе отсчета, связанной с берегом. Направим ось  $x$  по течению реки, место падения шляпки в воду выберем за начало координат, а момент падения  $t = 0$  за начало отсчета времени. Положение шляпки меняется тогда по закону  $x_r(t) = v_r t$ , где  $v_r$  — скорость течения. Положение катера до его поворота определяется уравнением  $x(t) = (v + v_r)t$ , где  $t < t_1$ ;  $v$  — скорость катера. Координата катера в момент поворота равна  $x(t_1) = (v + v_r)t_1$ . Поэтому закон его движения после поворота ( $t > t_1$ ) выглядит как

$$x(t) = (v + v_r)t_1 - (v - v_r)(t - t_1) = 2vt_1 - (v - v_r)t.$$

Момент встречи со шляпкой находится из равенства

$$x_r(t) = x(t), \quad \text{откуда} \quad v_r t = 2vt_1 - (v - v_r)t \quad \text{или} \quad t = 2t_1.$$

После поворота прошло время  $t_2 = t - t_1 = t_1$ . Естественно, получен тот же самый результат, но гораздо более сложным путем. ■

### 3.8 Уравнение Мещерского

В 1897 г. И. В. Мещерский исследовал различные случаи движения тела с переменной массой. Например, реактивная тяга ракеты создается выбрасываемыми газами, образующимися при сгорании топлива. Из-за этого масса ракеты непрерывно уменьшается. Сначала мы ограничимся простейшим случаем полета ракеты по прямой в безвоздушном пространстве. Пусть в момент времени  $t$  ракета имеет скорость  $v(t)$  относительно лабораторной системы отсчета. Рассмотрим

ее движение в так называемой «сопутствующей» инерциальной системе отсчета, т. е. с точки зрения наблюдателя, летящего параллельно ракете с *постоянной* скоростью, равной скорости ракеты в *данный момент времени*:  $V = v(t)$ . Пусть заданы скорость  $u$  истечения газов из сопла двигателя ракеты и расход топлива  $\mu$  (масса газа, выбрасываемая в единицу времени). Тогда за бесконечно малый интервал времени  $dt$  ракета приобретет скорость  $dv$ , определяемую из закона сохранения импульса (импульс  $u\mu dt$ , уносимый газами, должен передаваться ракете, увеличивая ее скорость):

$$u\mu dt = M(t)dv. \quad (3.52)$$

Скорость ракеты относительно лабораторной системы отсчета в момент  $t + dt$  определится по закону сложения скоростей (3.50) классической механики:

$$v(t + dt) = V + dv = v(t) + \frac{u\mu}{M(t)}dt. \quad (3.53)$$

В результате получаем уравнение движения тела с переменной массой для этого простейшего случая (уравнение Мещерского):

$$M(t)\frac{dv}{dt} = u\mu. \quad (3.54)$$

Изменение массы ракеты за время  $dt$  можно записать в виде

$$M(t + dt) = M(t) - \mu dt. \quad (3.55)$$

Тогда уравнение (3.53) переписывается как

$$dv = -u\frac{dM}{M}. \quad (3.56)$$

Интегрируем это уравнение от момента старта до отсечки двигателя:

$$\int_0^{v_f} dv = -u \int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M}. \quad (3.57)$$

Здесь  $M_0$  — начальная масса ракеты, а  $M_f$  и  $v_f$  — ее масса и скорость в момент прекращения работы двигателя. Интегрирование выполняется элементарно, и мы приходим к формуле Циолковского (1897) для конечной скорости ракеты:

$$\boxed{v_f = u \ln \frac{M_0}{M_f}}. \quad (3.58)$$

Эта формула позволяет рассчитать количество необходимого топлива при заданной полезной нагрузке и известных параметрах двигателя:

$$M_0 = M_f e^{v_f/u}. \quad (3.59)$$



Рис. 3.11. Немецкая крылатая ракета «Фау-2»

Например, при скорости истечения газов  $u = 2$  км/с и необходимости достичь *первой космической скорости* (7,9 км/с, см. разд. 6.6) стартовая масса должна в 52 раза превышать конечную.

При наличии других сил (притяжение Земли, сопротивление воздуха) и несовпадении направления газовой струи и скорости ракеты (при маневрах) уравнение Мещерского записывается в векторном виде:

$$M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \vec{u} + \vec{F}. \quad (3.60)$$

В ситуации, когда масса объекта не только уменьшается за счет расхода топлива, но и увеличивается из-за засасывания воздуха в турбореактивный двигатель, уравнение Мещерского модифицируется очевидным образом:

$$M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \vec{u} + \mu_1 \vec{u}_1 + \vec{F}. \quad (3.61)$$

Здесь  $\vec{u}_1$  — скорость присоединяющихся частиц, а  $\mu_1$  — скорость увеличения их суммарной массы.

В качестве примера рассмотрим вертикальный старт немецкой ракеты V2 («Фау-2») времен Второй мировой войны (рис. 3.11). Ее технические параметры легко найти в Википедии (<http://tinyurl.com/hude6c9>):

- стартовая масса  $M_0 = 12900$  кг;
- масса без топлива  $M_f = 4000$  кг;
- расход топлива  $\mu = 127$  кг/с;
- скорость истечения топлива  $u = 2050$  м/с.

В своих расчетах мы пренебрегаем сопротивлением воздуха, уменьшением с высотой ускорения свободного падения, изменением скорости истечения газов и расхода топлива из-за уменьшения на высоте атмосферного давления... И все же полученные теоретические результаты удивительно близки к реальным значениям. Так, расчетная тяга двигателя  $u\mu/g = 26,6$  т всего на 6% отличается от реальной (25 т). Продолжительность активной стадии полета до отсечки двигателя можно найти как

$$t_f = \frac{M_0 - M_f}{\mu} = 70 \text{ с}. \quad (3.62)$$

На практике это время составило 65 с.



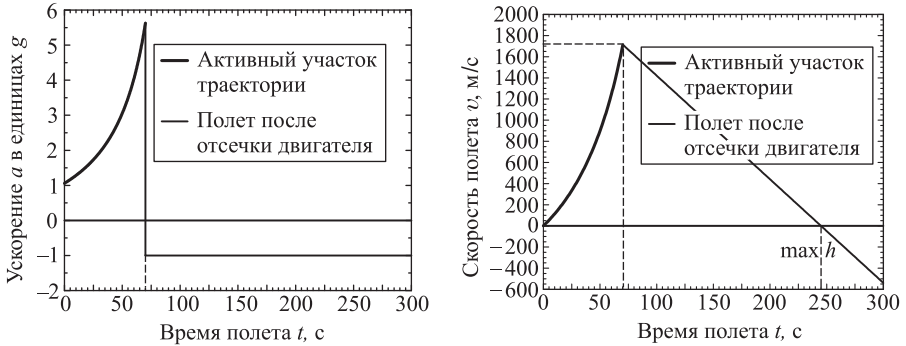


Рис. 3.12. Зависимость от времени ускорения и скорости ракеты V2

Для зависимости ускорения ракеты от времени в период работы двигателя имеем выражение:

$$a(t) = \frac{u\mu}{M_0 - \mu t} - g, \quad t \leq t_f. \quad (3.63)$$

Отсюда следует ускорение при старте  $a(0) = 1,06g$  (в реальности  $0,9g$ ) и в момент выключения двигателя  $a(t_f) = 5,6g$  (на практике  $5g$ ). Первое слагаемое в (3.63) дает перегрузку внутри ракеты: около  $2g$  при старте и  $6,6g$  в момент отсечки подачи топлива.

После интегрирования по времени выражения для ускорения (3.63) получаем закон изменения скорости:

$$v(t) = \begin{cases} -u \ln\left(1 - \frac{\mu t}{M_0}\right) - gt, & t \leq t_f; \\ v_f - gt, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (3.64)$$

Обращаем внимание, что по формуле Циолковского скорость «Фау-2» в момент отсечки двигателя должна составлять  $v_f = 2400$  м/с, а по нашим формулам она получается равной  $v(t_f) = 1714$  м/с. Такое уменьшение конечной скорости вызвано притяжением Земли. На практике максимальная скорость составила 1600 м/с. Звуковой барьер ракета «Фау-2» преодолевала на 25-й секунде полета. Графики зависимости от времени ускорения и скорости ракеты показаны на рис. 3.12.

Интегрируя по времени выражение (3.64) для скорости, находим зависимость от времени высоты подъема ракеты при вертикальном старте:

$$h(t) = \frac{uM_0}{\mu} \left(1 - \frac{\mu t}{M_0}\right) \ln\left(1 - \frac{\mu t}{M_0}\right) + ut - \frac{gt^2}{2}, \quad t \leq t_f. \quad (3.65)$$

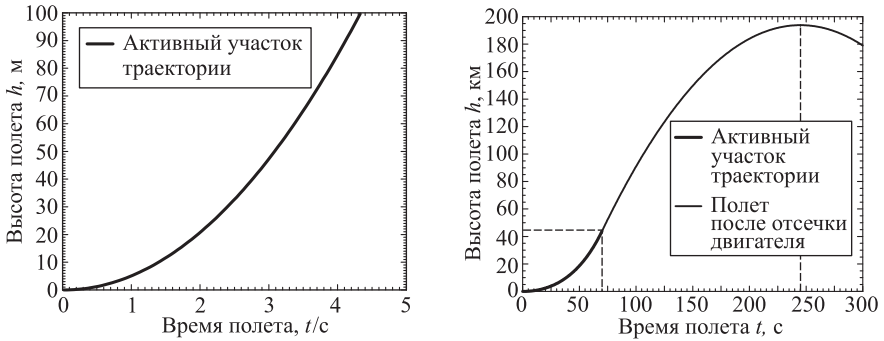
В момент отсечки двигателя на 70-й секунде полета ракета находилась на высоте

$$h(t_f) = -\frac{uM_f}{\mu} \ln \frac{M_0}{M_f} + ut_f - \frac{gt_f^2}{2} \approx 44 \text{ км}. \quad (3.66)$$

После отсечки двигателя ракета летит равномерно с начальной вертикальной скоростью  $v(t_f)$ :

$$h(t) = h(t_f) + v(t_f)(t - t_f) - \frac{g(t - t_f)^2}{2}, \quad t \geq t_f. \quad (3.67)$$

Согласно нашим расчетам, максимальной высоты полета  $h_{\max} = 194$  км ракета достигает через 245 с после старта. В реальности «Фау-2» взлетела на 188 км — всего на 3% ниже. Это был первый космический полет, так как, согласно классификации

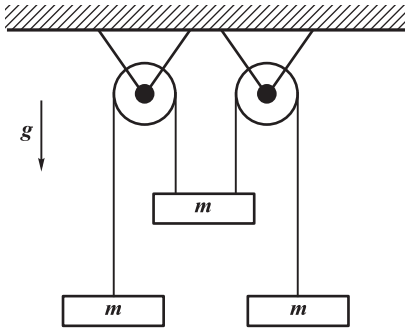


**Рис. 3.13.** Зависимость от времени высоты подъема ракеты V2. На левом графике показаны первые секунды после старта

Международной авиационной федерации, таковым считается полет на высоте более 100 км. График зависимости высоты подъема ракеты от времени показан на рис. 3.13.

## Контрольные вопросы

1. Сформулируйте принцип инерции Галилея.
2. Выскажите критические замечания по поводу часто встречающегося определения массы как «меры количества вещества» в данном теле. Какое свойство тел характеризует масса?
3. Как объяснить опускание столбика ртути при встряхивании медицинского термометра?
4. Почему импульс частицы не должен зависеть от ее радиуса-вектора? Почему импульс параллелен скорости частицы?
5. Почему спрыгнуть на рыхлую почву безопаснее, чем на твердую?
6. Если электровоз резко трогает с места, может произойти разрыв сцепки между вагонами. Почему? В какой части поезда скорее всего произойдет разрыв?
7. Два тела массами  $M$  и  $m$  ( $M > m$ ), соединенные невесомой нерастяжимой нитью, лежат на гладкой горизонтальной поверхности. Зависит ли ускорение тел от того, к какому именно из них приложена сила? Зависит ли от этого натяжение нити?
8. Согласно упрощенной модели сердца, при каждом сокращении около 70 г крови ускоряется от скорости  $v_1 = 0$  см/с до скорости  $v_2 = 120$  см/с за время  $\Delta t = 0,2$  с. С какой силой сердечная мышца действует на кровь?
9. Пожарный шланг выбрасывает 50 кг воды в секунду со скоростью 40 м/с. Какую силу должен приложить пожарный, чтобы удержать шланг?
10. Пуля массой  $m = 10$  г движется со скоростью  $v_0 = 300$  м/с и попадает в толстую деревянную доску толщиной  $l = 10$  см. При движении в доске на пулю действует постоянная сила трения  $F_{\text{тр}} = 3000$  Н. Пробьет ли пуля доску? Если ответ положителен, то с какой скоростью  $v_1$  пуля вылетит из доски? Если ответ отрицателен, то какое расстояние преодолит пуля в древесине? Те же вопросы для доски толщиной  $l = 20$  см.
11. Пусть три груза равной массы  $m$  подвешены на невесомых блоках как показано на рис. 3.14. Каково ускорение центрального груза? Каковы натяжения каждой из нитей? Трение в блоках отсутствует, нити нерастяжимы.



**Рис. 3.14.** Сила натяжения нити зависит от ускорения тела (к вопросу 11)

12. Барон Мюнхгаузен рассказывал, как он пытался на коне перескочить болото: «Сначала оно показалось мне не таким широким, каким я увидел его, когда находился уже на середине скачка. Паря в воздухе, я повернул поэтому обратно к тому месту, где находился раньше, чтобы взять больший разбег». Возможно ли такое? Если ответ положителен, какие дополнительные приспособления использовал барон?
13. Как известно, и во второй раз барону Мюнхгаузену не повезло, и он угодил-таки в болото. Впоследствии барон рассказывал: «Ухватившись за собственную косу, я вытащил из болота как самого себя, так и коня, которого крепко стиснул между колен». Можно ли таким образом приподнять себя?
14. Как-то лошадь отказалась везти повозку на том основании, что все равно не сможет сдвинуться с места. «Сила, с которой я тяну повозку, — рассуждала лошадь, — в точности уравнивается силой, с которой повозка тянет меня назад». Права ли лошадь?
15. Почему в метро просят не облокачиваться на поручни эскалатора?
16. Куда направлена сила трения при трогании автомобиля с места?
17. В ковбойских фильмах бравый шериф часто сбивает злодея с ног пулей. Какова скорость отдачи злодея средней комплекции при попадании в него пули крупного калибра ( $m = 10$  г,  $v = 400$  м/с)? Может ли такая отдача сбить человека с ног?
18. Однажды в безветренную погоду капитан Врунгель привел свою яхту «Беда» в движение, открывая на корме бутылки с газированной водой. Какие физические законы позволили добиться этого результата? Под каким углом к горизонту должны быть направлены бутылки для большей эффективности такого двигателя?
19. Сформулируйте принцип относительности Галилея.
20. На какую высоту поднялась «Фау-2» за первую секунду полета?
21. На какой высоте «Фау-2» достигла скорости звука?

## Глава 4

# Работа и энергия

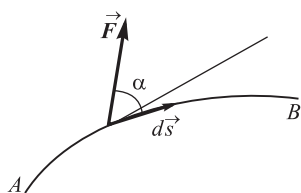
Если тело движется под действием силы, то говорят, что сила совершает работу. В механике с работой тесно связано понятие энергии. История развития представлений об энергии весьма драматична. На протяжении сорока лет велись споры между сторонниками Р. Декарта и Г. Лейбница. Первые утверждали, что при соударениях тел остается неизменной произведение массы на значение скорости, вторые отстаивали сохранение произведения массы на квадрат скорости, называвшееся тогда *живой силой*. Как часто случается, правы оказались обе стороны: при упругих соударениях сохраняется как *вектор* количества движения (т. е. импульс), так и живая сила, которую теперь называют *кинетической энергией*.

Впоследствии выяснился глубокий физический смысл закона сохранения энергии, который оказался связан с фундаментальной симметрией нашего мира — однородностью времени. Ученые обнаружили новые формы энергии, а закон сохранения полной энергии стал неперменным атрибутом всех физических теорий. В этой главе мы начинаем знакомство с простейшими формами энергии — потенциальной энергией тела в силовом поле и кинетической энергией движущегося тела.

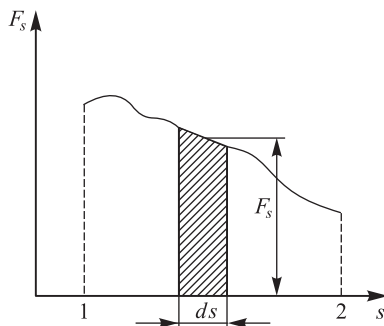
### 4.1 Работа силы

Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух шаров одинаковой массы, сделанных из пластилина. Если эти шары летят друг на друга с одной и той же скоростью, то при соударении они прилипнут друг к другу и остановятся. В этом случае суммарный импульс обоих шаров остался равным нулю, хотя состояние системы изменилось. Шары при этом нагрелись. Этот пример показывает, что импульс системы не всегда может служить мерой движения. Такой мерой является энергия. В данном случае механическая энергия при ударе и остановке тел перешла в другой вид энергии — тепловую.

Сначала рассмотрим важную характеристику — работу. Пусть материальная точка движется по траектории  $AB$  (рис. 4.1). На точку во время движения действует сила  $\vec{F}$ . На участке  $d\vec{s}$  (настолько малом, что модуль перемещения равен пройденному пути) силу  $\vec{F}$  можно считать постоянной.



**Рис. 4.1.** Работа силы зависит от угла между направлением силы и вектором перемещения



**Рис. 4.2.** Геометрическая интерпретация работы как площади

◆ **Элементарная работа силы  $\vec{F}$**  равна скалярному произведению векторов силы  $\vec{F}$  и перемещения  $d\vec{s}$ :  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos \alpha$ . ◆

Работа — алгебраическая величина, ее знак зависит от знака  $\cos \alpha$ . Положительная работа совершается силой, если ее направление составляет острый угол  $\alpha$  с направлением движения тела. Отрицательная работа совершается силой, направление которой составляет тупой угол  $\alpha$  с направлением движения, при этом сила тормозит это движение. Величина  $ds \cos \alpha$  — это проекция перемещения на линию действия силы. Следовательно, работа — это произведение силы на перемещение вдоль направления ее действия. Можно сказать и иначе: работу совершает не вся приложенная сила, но лишь ее проекция  $F_s = F \cos \alpha$  на направление перемещения:  $dA = F_s ds$ . Полная работа находится как сумма (интеграл) элементарных работ по всей траектории  $L$  точки:

$$A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_L F_s ds. \quad (4.1)$$

Графически работу можно представить как площадь *под* кривой  $F_s(s)$  (рис. 4.2), причем площади под осью абсцисс следует приписывать отрицательное значение.

Если перемещение ортогонально силе, то  $\cos \alpha = 0$  и работа равна нулю:  $dA = 0$ . Последнее показывает, что понятие работы в механике отлично от обыденного представления о работе. Так, при вращении планеты вокруг звезды по круговой траектории сила гравитационного притяжения ортогональна траектории планеты в любой момент времени. Поэтому силы гравитации не совершают работы, хотя и искривляют траекторию планеты. Аналогично, при перемещении груза в горизонтальном направлении сила тяжести не совершает работы. Работа не совершается также и тогда, когда тело покоится, так как точка приложения силы не перемещается и  $d\vec{s} = 0$ .

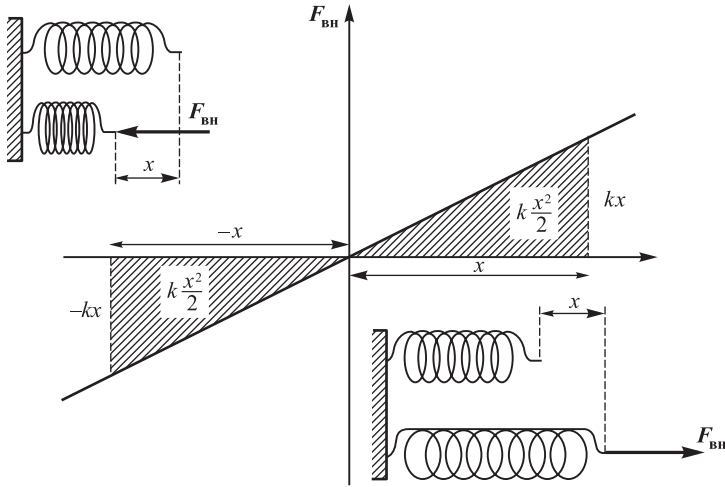


Рис. 4.3. Работа, совершаемая при сжатии/растяжении пружины

Если на тело действуют несколько сил  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ , то согласно принципу независимости действия сил имеем:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{s} = \sum_i (\vec{F}_i \cdot d\vec{s}) = \sum_i dA_i, \quad (4.2)$$

т. е. работа результирующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности.

Рассмотрим для примера работу, совершаемую внешней силой по сжатию и растяжению пружины жесткостью  $k$ . Направим ось  $Ox$  вдоль пружины, причем за начало координат  $O$  выберем положение свободного конца пружины, находящейся в ненагруженном состоянии. Процесс сжатия/растяжения представляем как последовательность равновесных состояний: в каждый момент времени прилагаем внешнюю силу, равную по величине силе упругости со стороны пружины. Тогда согласно закону Гука  $F_{\text{вн}} = -F_{\text{упр}} = kx$ , где  $x$  — удлинение пружины. При положительных  $x$  (растяжение пружины) внешняя сила направлена направо, при отрицательных (сжатие) — налево (рис. 4.3). Скалярное произведение для элементарной работы внешней силы имеет в этом случае вид  $dA = kx dx$ , так что для полной работы получаем

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.3)$$

Заметим, что  $A$  не зависит от знака  $x$ : и при растяжении, и при сжатии пружины внешняя сила совершает одну и ту же положительную работу.

## 4.2 Кинетическая энергия

Если внешняя сила действует на покоящееся тело, последнее приобретает некоторую скорость и способно само совершить работу.

◆ *Запас работы, связанный с движением тела, называется **кинетической энергией** тела.* ◆

Запишем уравнение движения материальной точки:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}, \quad (4.4)$$

где  $\vec{F}$  — результирующая сила. Умножим уравнение движения скалярно на перемещение  $d\vec{s} = \vec{v}dt$ :

$$m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}dt = \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (4.5)$$

В правой части уравнения мы получили элементарную работу  $dA$ , в левой — выражение, которое можно преобразовать к виду полного дифференциала:

$$m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{m}{2}d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

В результате имеем

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \quad (4.6)$$

т. е. элементарная работа, совершенная силой  $\vec{F}$  при перемещении  $d\vec{s}$  материальной точки массой  $m$  равна приращению величины  $(mv^2/2 + \text{const})$  — кинетической энергии, определяемой с точностью до произвольной постоянной. Получается, что сила совершает некоторую работу, и на такое же количество возрастает кинетическая энергия тела (обычное обозначение  $T$  или  $W$ ). При отрицательной работе силы кинетическая энергия тела убывает: энергия движения расходуется на преодоление противодействующей ему силы. Обычно считают, что покоящееся тело кинетической энергией не обладает, так что произвольную постоянную полагают равной нулю:

$$\boxed{T = \frac{mv^2}{2}}. \quad (4.7)$$

Кинетическую энергию материальной точки можно также выразить через ее импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ :

$$\boxed{T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{p}}{2} = \frac{p^2}{2m}}. \quad (4.8)$$

Если  $\vec{F} = 0$  (система замкнута), то работа сил равна нулю, следовательно, равно нулю приращение кинетической энергии. Иными словами, кинетическая энергия в этом случае сохраняется:  $T = \text{const}$ . На этом уровне нашего знакомства с законами природы трудно обнаружить особый смысл в введении нового понятия — кинетической энергии, поскольку она полностью определяется импульсом частицы. Но не будем торопиться с выводами. Вся глубина понятия энергии будет выявлена в дальнейшем, когда выяснится, что кинетическая энергия — лишь одна из многочисленных форм энергии.

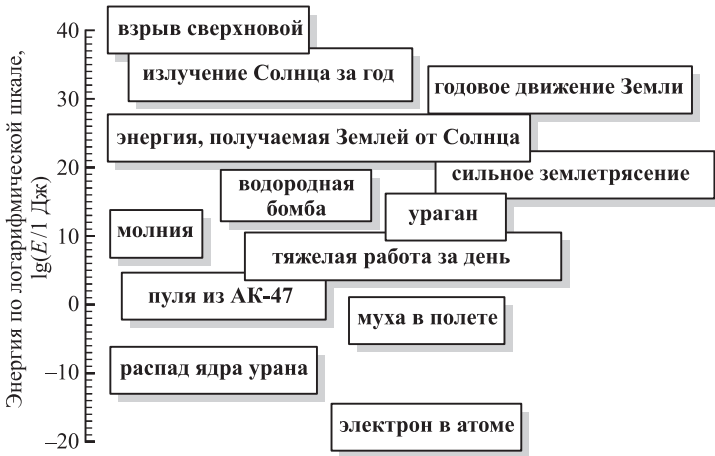


Рис. 4.4. Характерные масштабы энергии в природе

Выражение (4.7) устанавливает единицу измерения энергии. Размерность энергии  $[ML^2T^{-2}]$ . В СИ единица энергии называется джоулем (Дж): это кинетическая энергия массы 1 кг, движущейся со скоростью 1 м/с:

$$1 \text{ Дж} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

т. е. размерности работы и энергии совпадают.

**Задача 4.14.** Найти кинетическую энергию Земли в ее годичном движении вокруг Солнца. Расстояние до Солнца  $l_{\odot} = 150$  млн км., масса Земли равна  $M_{\oplus} = 6 \cdot 10^{24}$  кг.

**Решение.** Мы знаем, что длину окружности орбиты  $L = 2\pi l_{\odot}$  Земля обегает за один год  $T = 365,25$  сут.  $= 365,25 \times 24 \times 60 \times 60 = 3,16 \cdot 10^7$  с. Отсюда скорость орбитального движения Земли равна  $v = 2\pi l_{\odot}/T = 3 \cdot 10^4$  м/с  $= 30$  км/с. Кинетическая энергия Земли  $T = M_{\oplus} v^2/2 = 6 \cdot 10^{24} \times 9 \cdot 10^8/2 = 2,7 \cdot 10^{33}$  Дж. ■

На рисунке 4.4 показаны характерные значения энергий некоторых природных процессов.

### 4.3 Мощность

Представим снова элементарную работу в виде

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt. \quad (4.9)$$

◆ Работа, совершаемая в единицу времени, называется **мощностью**:

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad \blacklozenge \quad (4.10)$$

т. е. мощность можно представить как скалярное произведение вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения силы.



Работа, совершаемая за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  может быть записана в виде интеграла:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt. \quad (4.11)$$

Средняя мощность за этот же промежуток времени равна

$$\langle N \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt. \quad (4.12)$$

За единицу мощности принимается такая мощность, при которой в единицу времени совершается единица работы. Единицей мощности в СИ является ватт (Вт):

$$1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}. \quad (4.13)$$

Внесистемная единица мощности — лошадиная сила (л. с.) — равна 736 Вт. В быту часто используют единицу энергии — 1 кВт · ч =  $10^3$  Вт · 3600 с = 3,6 МДж.

**Задача 4.15.** Вертолет массой  $m = 3$  т висит в воздухе. Определить мощность  $N$ , развиваемую мотором вертолета, если диаметр ротора  $d = 8$  м. При расчете принять, что ротор отбрасывает вниз цилиндрическую струю воздуха диаметром, равным диаметру ротора. Плотность воздуха составляет  $\rho = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>.

**Решение.** При решении этой задачи надо применить все известные нам законы динамики. Поскольку это не одно- и не двухходовая задача, попробуем сначала найти вид окончательного выражения, пользуясь анализом размерности (см. раздел 1.3). Искомая мощность зависит от: 1) веса вертолета, 2) диаметра винта и 3) плотности воздуха, т. е. искомая формула должна иметь вид  $N = (mg)^\alpha d^\beta \rho^\gamma$ . Размерность энергии равна  $[\text{ML}^2\text{T}^{-2}]$ , а мощности  $[N] = [\text{ML}^2\text{T}^{-3}]$ . Составляем равенство размерностей в обеих частях искомой формулы:

$$[\text{ML}^2\text{T}^{-3}] = [\text{MLT}^{-2}]^\alpha [\text{L}]^\beta [\text{ML}^{-3}]^\gamma = [\text{M}]^{\alpha+\gamma} [\text{L}]^{\alpha+\beta-3\gamma} [\text{T}]^{-2\alpha}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \gamma, \\ 2 &= \alpha + \beta - 3\gamma, \\ -3 &= -2\alpha, \end{aligned} \quad (4.14)$$

находим  $\alpha = 3/2$ ,  $\gamma = -1/2$ ,  $\beta = -1$ , т. е. искомая мощность

$$N = C \frac{(mg)^{3/2}}{d\sqrt{\rho}}, \quad (4.15)$$

где  $C$  — некий числовой коэффициент.

Решим теперь эту же задачу точно. Пусть  $v$  — скорость струи воздуха, отбрасываемой винтом. За время  $\Delta t$  частицы воздуха проходят расстояние  $\Delta h = v\Delta t$ . Иными словами, за время  $\Delta t$  винт вертолета придает скорость  $v$  всем частицам воздуха, находящимся в цилиндре с площадью основания  $\pi d^2/4$  и высотой  $\Delta h$ . Масса воздуха  $\Delta m$  в этом объеме равна

$$\Delta m = \rho v \Delta t \frac{\pi d^2}{4}, \quad (4.16)$$

а его кинетическая энергия  $\Delta T$  дается выражением

$$\Delta T = \frac{\Delta mv^2}{2} = \Delta t \frac{\pi}{8} \rho v^3 d^2. \quad (4.17)$$

Поскольку мотор передает воздуху кинетическую энергию  $\Delta T$ , то такова и совершаемая им работа. Поэтому развиваемая мотором мощность равна

$$N = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\pi}{8} \rho v^3 d^2. \quad (4.18)$$

В этом выражении нам надо еще найти скорость струи воздуха, отбрасываемой винтом. Импульс  $\Delta p$ , передаваемый частицам воздуха за время  $\Delta t$ , равен

$$\Delta p = \Delta m v = \Delta t \rho v^2 \frac{\pi d^2}{4}. \quad (4.19)$$

Из второго закона Ньютона следует, что средняя сила, действующая на отбрасываемый вниз воздух, равна  $F = \Delta p / \Delta t$ . По третьему закону Ньютона такая же сила действует на вертолет со стороны воздуха. Эта сила компенсирует вес вертолета:  $F = mg$ . Отсюда получаем уравнение

$$mg = \rho v^2 \frac{\pi d^2}{4}, \quad (4.20)$$

позволяющее найти скорость струи воздуха:

$$v = \sqrt{\frac{4mg}{\pi \rho d^2}}. \quad (4.21)$$

Подставляя найденную скорость в (4.18), получаем окончательный результат:

$$N = \frac{\pi}{8} \rho d^2 \left( \frac{4mg}{\pi \rho d^2} \right)^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(mg)^{3/2}}{d \sqrt{\rho}}. \quad (4.22)$$

Мы видим, что выражение для мощности действительно оказалось таким, каким ожидалось на основе анализа размерностей, а неизвестный числовой коэффициент не столь сильно отличается от единицы:  $C = 1/\sqrt{\pi} = 0,56$ . Подставляя числовые данные, находим

$$N = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(3 \cdot 10^3 \times 9,8)^{3/2}}{8 \times \sqrt{1,29}} = 3,13 \cdot 10^5 \text{ Вт} = 313 \text{ кВт}. \quad \blacksquare$$

## 4.4 Потенциальная энергия

Выше мы уже получили выражение для работы, совершаемой при растяжении пружины. Рассмотрим следующую систему. Нерастянутая пружина лежит на гладкой горизонтальной плоскости, один ее конец закреплен, а ко второму прикреплен грузик массой  $m$ . Начало координатной оси поместим в точку, где находится свободный конец пружины. Мы оттягиваем пружину на расстояние  $x_{\max}$  и отпускаем грузик без начальной скорости. Каково движение грузика?

На грузик действует только упругая сила растянутой пружины, стремящаяся вернуть его к началу координат (положению равновесия). Под действием этой силы грузик приходит в движение. Если его координата в какой-то момент

времени равна  $x$ , то в этот момент на грузик действует со стороны пружины упругая сила  $F = -kx$ . Поэтому уравнение движения грузика имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (4.23)$$

Умножим обе части равенства на скорость грузика  $\dot{x}$ . Произведение в левой части можно представить в виде производной

$$m\dot{x}\ddot{x} = m \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{d}{dt} \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

а произведение в правой части уравнения (4.23) — в виде производной

$$-k\dot{x}x = -k \frac{d}{dt} \frac{x^2}{2} = -\frac{d}{dt} \frac{kx^2}{2}.$$

Поэтому уравнение (4.23) можно записать теперь как

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0. \quad (4.24)$$

Раз производная выражения в скобках равна нулю, само это выражение не зависит от времени, оно постоянно (сохраняет свое начальное значение):

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}. \quad (4.25)$$

Как бы ни двигался грузик на пружинке, выписанная сумма двух слагаемых не меняется. В первом слагаемом мы узнаем кинетическую энергию грузика, а во втором — работу по растяжению (сжатию) пружины на расстояние  $x$ . Совершив эту работу, мы запасаем в пружине энергию упругой деформации (ее называют *потенциальной энергией*). В любой момент времени грузик обладает какой-то кинетической энергией, а пружина — потенциальной.

◆ Сумма кинетической и потенциальной энергий называется **полной механической энергией**  $E$  системы. ◆

Значение постоянной интегрирования в (4.25) находим, вспоминая начальные условия: при  $t = 0$  мы отпустили грузик без начальной скорости  $\dot{x}(0) = 0$  на расстоянии  $x(0) = x_{\max}$  от начала координат. Отсюда

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_{\max}^2}{2}. \quad (4.26)$$

В начальный момент времени кинетическая энергия грузика равна нулю, и полная энергия системы равна той работе, которую мы сначала совершили, растянув пружину на расстояние  $x_{\max}$ . Затем груз двигается к началу координат с возрастающей скоростью. В момент прохождения точки равновесия ( $x = 0$ ) потенциальная энергия пружины равна нулю, следовательно, кинетическая энергия достигает максимума. Грузик проходит положение равновесия, сила упругости меняет знак и начинает его тормозить. Скорость груза обращается в нуль при  $x = -x_{\max}$ , когда полная энергия системы снова состоит лишь из потенциальной

энергии пружины (на этот раз сжатой). Далее процесс «перекачки» потенциальной энергии в кинетическую и наоборот происходит в обратном направлении, пока грузик не окажется в начальном положении. И все повторится вновь.

На этом частном примере мы заметили, что

- сохраняется полная энергия  $E$  системы грузик–пружина, равная сумме кинетической энергии грузика  $T = m\dot{x}^2/2$  и потенциальной энергии пружины  $U = kx^2/2$ ;
- потенциальная энергия пружины связана с работой по ее растяжению (сжатию):  $U = A$ ;
- силу упругости  $F = -kx$  со стороны деформированной пружины получаем дифференцированием потенциальной энергии по координате:  $F = -dU/dx$ .

## Векторный анализ: скалярное поле

На данном этапе погружения в классическую механику нам понадобится очередное математическое напоминание — на этот раз о дифференциальных операциях, производимых над физическими полями. Поле в физике — это объект, заданный в каждой точке пространства. Так, электрическое (магнитное) поле — это вектор электрической напряженности  $\vec{E}$  (магнитной индукции  $\vec{B}$ ), принимающий разные значения в разных точках. В общей теории относительности гравитационное поле представляется тензором кривизны Римана  $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ , заданным в каждой точке четырехмерного пространства–времени. В таких случаях мы говорим о векторных или тензорных полях. Но простейшим видом физического поля является **скалярное поле** — числовая функция  $f(\vec{r})$ , заданная в каждой точке  $\vec{r}$  пространства. Примерами скалярных полей может служить давление  $p(\vec{r})$  в газе или жидкости, концентрация  $n(\vec{r})$  молекул газа и его температура  $T(\vec{r})$ , электростатический потенциал  $\varphi(\vec{r})$  и т. п. Физические поля появились в классической физике давно, но сначала — как математические конструкции, удобные для описания наблюдаемых явлений. К этому классу полей можно отнести гравитационный потенциал в ньютоновской теории всемирного тяготения.

Но постепенно становилось ясно, что поля сами по себе представляют физическую реальность. Существование электромагнитных полей стало очевидным после работ М. Фарадея и Дж. Максвелла и открытия Г. Герцем электромагнитных волн. Гораздо позже были обнаружены другие фундаментальные поля — слабого и сильного цветового взаимодействия. Совсем недавно был найден бозон Хиггса — квант скалярного поля, взаимодействие с которым генерирует массы элементарных частиц.

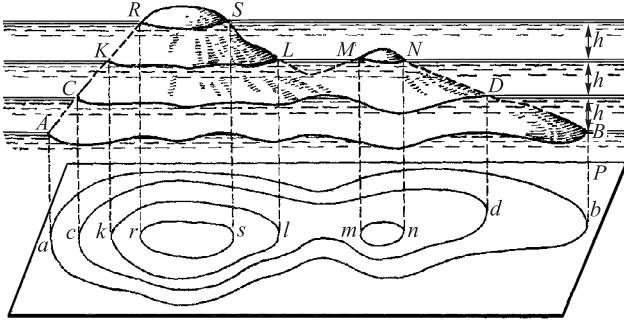
Векторный анализ имеет дело с дифференциальными операциями градиент (grad или  $\nabla$ ), дивергенция (div) и ротор (rot в русскоязычной литературе, или curl в англоязычной). Поскольку в этом кратком напоминании мы ограничимся скалярными полями, нам понадобится лишь градиент.

Градиент grad (столь же часто изображаемый значком «набла»  $\nabla$ ) — векторный дифференциальный оператор, компонентами которого являются частные производные по координатам. В прямоугольной декартовой системе координат

$$\text{grad} = \nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}. \quad (4.27)$$

Применение оператора набла к скалярному полю  $f(\vec{r})$  дает его градиент, определяющий направление и скорость скорейшего возрастания (убывания) поля:

$$\text{grad} f = \nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (4.28)$$



**Рис. 4.5.** Изображение рельефа местности на топографической карте. Чем меньше расстояние между изогипсами, тем круче спуск

Рассмотрим изменение скалярного поля  $f(\vec{r})$  при сдвиге на бесконечно малое расстояние  $dl$  в направлении, заданном каким-то единичным вектором  $\vec{e}$ :

$$df = f(\vec{r} + \vec{e} dl) - f(\vec{r}) = \left( e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y} + e_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (\vec{e} \cdot \nabla f) dl. \quad (4.29)$$

**Производная по направлению**  $\vec{e}$  определяется как

$$\frac{\partial f(\vec{r})}{de} = \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + \vec{e} dl) - f(\vec{r})}{dl} = \vec{e} \cdot \nabla f(\vec{r}) = \vec{e} \cdot \text{grad} f(\vec{r}). \quad (4.30)$$

Это соотношение выявляет физический смысл оператора «градиент». При смещении в направлении  $\vec{e}$ , ортогональном вектору  $\nabla f$ , скалярное поле не изменяется ( $df = 0$ ). Наоборот, изменения поля максимальны при смещении вдоль градиента поля  $\nabla f$ . В электростатике линии скорейшего спуска — это силовые линии, ортогональные эквипотенциальным поверхностям. На топографических картах (рис. 4.5) рельеф местности показывается изогипсами (горизонталями), соответствующими точкам с одинаковой высотой над уровнем моря. И в этом случае градиент указывает направление самого крутого спуска, ортогональное изогипсе в данной точке.

Применение операции «градиент» (grad) к скалярному полю (функции координат) порождает векторное поле.

Найдем для примера градиент функции  $f(r)$ , зависящей только от модуля радиуса-вектора  $r = |\vec{r}|$ . По определению градиента имеем

$$\begin{aligned} \text{grad} f(r) &= \vec{i} \frac{\partial f(r)}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f(r)}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f(r)}{\partial z} = \\ &= \frac{df(r)}{dr} \left( \vec{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Подставляя сюда производные модуля радиуса-вектора

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (4.32)$$

и аналогичные выражения для других координат, получаем

$$\text{grad} f(r) = \frac{df(r)}{dr} \frac{1}{r} (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \frac{df(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (4.33)$$

Если ввести обозначение  $\vec{n}_r$  для единичного вектора в направлении радиуса-вектора  $\vec{r}$ , то (4.33) можно записать в виде

$$\text{grad}f(r) = \frac{df(r)}{dr} \vec{n}_r. \quad (4.34)$$

Понятие градиента широко используется в различных областях физики (градиент давлений или температур) и вне ее (например, в компьютерной графике говорят о градиенте цвета, а в биологии — о метаболическом градиенте).

### Потенциальное поле сил

Обобщим теперь частный случай одномерного движения грузика на пружинке на трехмерное пространство. Пусть на частицу в каждой точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$  действует определенная сила  $\vec{F}(\vec{r}, t)$ , зависящая только от положения частицы и, быть может, от времени. Поскольку действующая сила не зависит от движения частицы, мы можем считать ее атрибутом пространства. В этом случае говорят, что в пространстве задано векторное *силовое поле*. Примером могут служить поле сил тяжести, электрическое поле и т. д.

Среди векторных силовых полей выделим *потенциальные* поля, которые можно описать некоторой скалярной функцией  $U = U(\vec{r}, t)$ , такой, что

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad} U.} \quad (4.35)$$

Ясно, что расчеты движения в потенциальных полях должны быть проще хотя бы потому, что вместо трех функций (компоненты силы) мы будем иметь дело лишь с одной функцией  $U$ .

Рассмотрим *стационарное потенциальное силовое поле*, т. е. потенциальное поле  $U(x, y, z)$ , не зависящее явно от времени. Найдем элементарную работу сил поля при перемещении  $d\vec{s}$ :

$$\begin{aligned} dA &= \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Здесь элементарная работа представляется как взятый с обратным знаком полный дифференциал функции  $U$ :  $dA = -dU(x, y, z)$ . В то же время, поскольку работа равна приращению кинетической энергии тела  $dA = dT$ , получаем отсюда  $dT = -dU$  или  $d(T + U) = 0$ , т. е. сохраняется сумма  $E = T + U = \text{const}$ . Таким образом, для стационарных потенциальных полей справедливы все выводы, сделанные нами при рассмотрении частного случая грузика на пружинке. Стало быть, скалярная функция  $U(\vec{r})$ , описывающая такое поле, есть не что иное как *потенциальная энергия* частицы в этом силовом поле. Потенциальная энергия определяется с точностью до константы, выбор которой может зависеть от конкретных условий, как будет показано ниже.

## Консервативные силы

Проинтегрируем полученное соотношение  $dA = -dU$  вдоль траектории тела и получим *важное свойство стационарных потенциальных полей*:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2. \quad (4.37)$$

Здесь  $U_1 = U(\vec{r}_1)$  и  $U_2 = U(\vec{r}_2)$  — значения потенциальной энергии в начальной  $\vec{r}_1$  и конечной  $\vec{r}_2$  точках перемещения. Соотношение (4.37) означает, что **работа  $A_{12}$ , совершаемая над частицей силами стационарного потенциального поля, не зависит от формы траектории частицы и определяется только ее начальным и конечным положением в пространстве.**

◆ Силы с таким свойством называются **консервативными**. ◆

Если работа сил поля положительна (частица перемещается под действием сил поля), то ее потенциальная энергия уменьшается:  $U_2 < U_1$ . Если же работа сил поля отрицательна (частица движется против сил поля благодаря запасу кинетической энергии или под действием некоторой «внешней силы», которая не включена в рассматриваемое потенциальное поле), то потенциальная энергия частицы увеличивается. Растягивая пружину в нашем примере, мы совершали работу против сил упругости и увеличивали потенциальную энергию системы.

◆ **Полная работа консервативных сил поля по перемещению частицы по замкнутой траектории равна нулю.** ◆

Действительно, в этом случае начальная и конечная точки совпадают,  $U_1 = U_2$  и  $A_{12} = 0$ . Покажем это более детально. Рассмотрим две произвольные точки 1 и 2 и два произвольных пути I и II, их соединяющих (рис. 4.6). Пусть поле сил консервативно, т. е. работы на этих путях совпадают:

$$A_{1-I-2} = A_{1-II-2}. \quad (4.38)$$

Переместим теперь тело из точки 1 в точку 2 по пути I, а затем — из точки 2 в точку 1 по пути II. Полная совершенная работа по замкнутому контуру равна сумме

$$A_{\text{о}} = A_{1-I-2} + A_{2-II-1}. \quad (4.39)$$

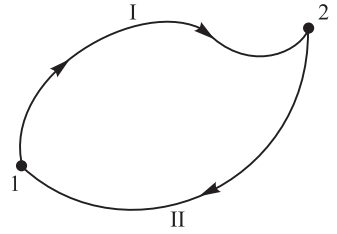
Сравним работы на пути II, проходимом в прямом и обратном направлениях. В каждой точке пути действуют те же силы, но изменение направления движения на обратное приводит к замене  $d\vec{s}$  на  $-d\vec{s}$ . Таким образом, искомая работа равна

$$A_{2-II-1} = -A_{1-II-2}. \quad (4.40)$$

Учитывая (4.38) и (4.40), переписываем (4.39) в виде

$$A_{\text{о}} = A_{1-I-2} + A_{2-II-1} = A_{1-I-2} - A_{1-II-2} = 0. \quad (4.41)$$

Мы доказали эквивалентность утверждений, что 1) работа консервативных сил не зависит от формы траектории и 2) работа таких сил при обходе замкнутого контура равна нулю.



**Рис. 4.6.** Работа консервативных сил не зависит от формы траектории и определяется лишь положением начальной и конечной точек, поэтому работа таких сил при обходе замкнутого контура равна нулю

Итак, стационарное потенциальное поле консервативно. Но верно и обратное: любое консервативное поле потенциально. Покажем это. Сначала выбираем произвольную точку  $\vec{r}_0$  и ассоциируем с ней какое-то число  $U(\vec{r}_0)$ . При переходе из точки  $\vec{r}_0$  в любую другую точку  $\vec{r}$  совершается работа  $A_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}}$ , не зависящая от пути перехода. Поэтому можно **определить** некоторую функцию  $U(\vec{r})$  для каждой точки равенством

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - A_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}}. \quad (4.42)$$

Подчеркнем еще раз: однозначно задать функцию  $U$  в каждой точке пространства можно лишь вследствие независимости работы от пути, т. е. для консервативных сил. Иначе, проходя из точки  $\vec{r}_0$  в точку  $\vec{r}$  различными путями, мы получали бы разные результаты, и функция  $U$  была бы неоднозначной.

Применим (4.42) для соседней точки  $\vec{r} + d\vec{r}$ :

$$U(\vec{r} + d\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - A_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}}. \quad (4.43)$$

Работу по перемещению из точки  $\vec{r}_0$  в точку  $\vec{r} + d\vec{r}$  представим как сумму работ по перемещению из  $\vec{r}_0$  в  $\vec{r}$  и из  $\vec{r}$  в  $\vec{r} + d\vec{r}$ :  $A_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}} = A_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}} + A_{\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}}$  (снова пользуясь независимостью работы от пути). Вычтем (4.43) из (4.42):

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r} + d\vec{r}) = A_{\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}}. \quad (4.44)$$

Слева стоит приращение  $-dU$ , а справа — элементарная работа  $dA$ . Полученное соотношение  $dA = -dU$  влечет за собой, как мы видели, сохранение величины  $T + U$ , т. е. введенная нами функция  $U$  действительно является потенциальной энергией системы. Таким образом, поле консервативных сил потенциально.

Не следует думать, что все поля в природе потенциальны, а силы — консервативны. Например, силы трения или сопротивления среды всегда направлены против перемещения и, следовательно, имеют одинаковый знак на всей траектории тела. При суммировании элементарных работ по замкнутому пути мы не получим нуля: работа будет зависеть от длины пройденного пути. Значит, эти силы не являются консервативными.

Произвольная постоянная  $U(\vec{r}_0)$ , фигурирующая в (4.42), не играет роли, так как физически наблюдаемым является изменение потенциальной энергии, а не ее абсолютное значение. Часто, когда это возможно, в качестве  $\vec{r}_0$  выбирают бесконечно удаленную точку и полагают значение потенциальной энергии в ней равной нулю. Но этот выбор не всегда возможен, как демонстрируется в следующем разделе.



### Постоянное однородное поле сил тяжести

Вблизи поверхности Земли все тела падают с постоянным ускорением  $\vec{g}$ , направленным к центру планеты. Если мы рассматриваем движение в области, линейные размеры которой много меньше радиуса Земли, земную поверхность можно считать плоской. В этом приближении поле тяжести однородно: силы, действующие на тело, в любой точке имеют одинаковое направление и величину  $\vec{F} = m\vec{g}$ . Покажем потенциальность поля силы тяжести у поверхности Земли (рис. 4.7).

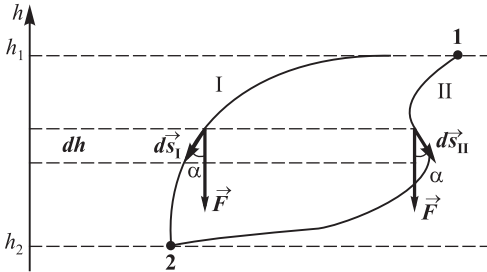


Рис. 4.7. Нахождение потенциальной энергии поля сил тяжести

Элементарная работа при перемещении  $d\vec{s}$  равна

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{g} \cdot d\vec{s} = -mg dh, \quad (4.45)$$

где  $-dh$  — проекция перемещения на направление действия силы, т. е.  $dh$  — изменение высоты тела. Полная работа при перемещении тела из точки 1 в точку 2 равна

$$A_{1 \rightarrow 2} = -mg \int_1^2 dh = -mg(h_2 - h_1). \quad (4.46)$$

Таким образом, в поле сил тяжести работа не зависит от пути, по которому движется частица, а определяется только начальным и конечным положениями частицы в пространстве. Соответственно, потенциальная энергия в поле сил тяжести находится в соответствии с общим рецептом как

$$U(h) = U(h_0) - A_{h_0 \rightarrow h} = U(h_0) + mg(h - h_0). \quad (4.47)$$

Если отсчитывать высоту от поверхности Земли, приписав при этом точке на поверхности нулевую потенциальную энергию, мы можем определить произвольную постоянную в (4.47). Полагая  $h = 0$  и  $U(0) = 0$ , находим  $U(h_0) = mgh_0$ , так что для произвольной высоты потенциальная энергия приобретает хорошо знакомый вид

$$U(h) = mgh.$$

**Задача 4.16.** Исходя из уравнений движения, показать сохранение полной энергии тела, движущегося в однородном поле силы тяжести.

**Решение.** Выберем начало координат на поверхности Земли и ось  $Oz$  направим вертикально. Так как тело движется с постоянным ускорением  $\vec{g}$ , его траектория описывается радиусом-вектором

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}.$$

Дифференцируя по времени, находим скорость тела:  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ . Кинетическая энергия тела равна

$$T = \frac{mv^2(t)}{2} = \frac{m(\vec{v}_0 + \vec{g}t)^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + m\vec{v}_0 \cdot \vec{g}t + \frac{mg^2 t^2}{2}.$$

Высоту тела над поверхностью (т. е. проекцию  $\vec{r}$ ) можно найти из скалярного произведения  $\vec{r} \cdot \vec{g}$ , принимая во внимание, что вектор ускорения свободного падения направлен вниз:  $\vec{r} \cdot \vec{g} = xg_x + yg_y + zg_z = 0 \cdot x + 0 \cdot y - g \cdot z = -gz$ , откуда потенциальная энергия тела может быть записана в виде

$$U = mgz = -m\vec{r} \cdot \vec{g} = -m\vec{r}_0 \cdot \vec{g} - m\vec{v}_0 \cdot \vec{g}t - \frac{mg^2 t^2}{2}.$$

Складывая  $U$  с выражением для кинетической энергии, мы убеждаемся в сокращении слагаемых, зависящих от времени:

$$E = T + U = \frac{mv_0^2}{2} - m\vec{r}_0 \cdot \vec{g} = \frac{mv_0^2}{2} + mgz_0.$$

Иначе говоря, в любой момент времени  $t$  полная энергия равна начальной полной энергии при  $t = 0$ , т. е. сумме начальных кинетической и потенциальной энергий тела. ■

## Поле центральных сил

◆ *Центральная сила — это сила, которая при любом положении тела, на которое она действует, направлена вдоль линии, соединяющей это тело с фиксированной точкой, называемой центром силы.* ◆

Если поместить начало координат в этот центр, то в каждой точке силы будут направлены по радиусу-вектору и будут зависеть лишь от расстояния до центра:  $\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{r}/r)F(r) = F(r)\vec{n}_r$ . Примерами могут служить поле точечного электрического заряда или гравитационное поле сферически симметричного объекта. Элементарная работа центральных сил (рис. 4.8) записывается тогда как

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F(r)\vec{n}_r \cdot d\vec{s} = F(r)dr, \quad (4.48)$$

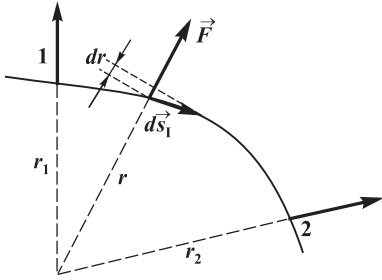
Отсюда полная работа

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr \quad (4.49)$$

не зависит от формы траектории, т. е. силы, действующие на частицу в центральном поле, консервативны. Соответственно, можно ввести потенциальную энергию

$$U(r) = U(r_0) - \int_{r_0}^r F(r')dr', \quad (4.50)$$

которая будет зависеть только от расстояния до центра, но не от направления радиуса-вектора.



**Рис. 4.8.** Поле центральных сил всегда потенциально

Используя результат примера (4.34), получаем, что операция «градиент», примененная к потенциальной энергии  $U(r)$  в уравнении (4.50), дает поле центральных сил с модулем  $F(r)$ , направленных по радиусу-вектору  $\vec{r}$ :

$$\text{grad } U(r) = \frac{dU(r)}{dr} \vec{n}_r = F(r) \vec{n}_r.$$

Таким образом, знание потенциальной энергии поля центральных сил позволяет легко восстановить зависимость этих сил от расстояния, и наоборот.

Говоря о центральных силах, мы также используем некоторую абстракцию. Что означает силовой центр, к которому (или от которого) направлено поле сил? Мы предполагаем, что центр неподвижен, но реально он образован какими-то физическими телами — зарядами в случае электрического поля, массами — в случае гравитационного. Просто при определенных условиях движением центра можно пренебречь. Скажем, изучая движение спутника вокруг Земли мы, строго говоря, должны учесть, что спутник и Земля движутся вокруг общего центра масс. Но масса Земли намного превышает массу спутника, центр масс системы практически совпадает с центром Земли, и ее можно считать неподвижным центром гравитационного поля.

Если же такого допущения сделать нельзя, то рассматривают силы взаимодействия между телами. Когда силы направлены вдоль линии, соединяющей тела, а их величина зависит только от взаимного расстояния  $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ , мы имеем дело с аналогом центральных сил. Здесь тоже можно ввести потенциальную энергию взаимодействия тел между собой  $U(r_{12})$ , так что сила  $\vec{F}_{12}$  между телами 1 и 2 удовлетворяет соотношению  $\vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = -dU(r_{12})$ .

## 4.5 Закон сохранения энергии

Пусть задана система  $N$  материальных точек с массами  $m_1, \dots, m_N$ . Предположим, что на точку с номером  $i$  действуют: 1) внутренние консервативные силы  $\vec{F}_{ij}$  со стороны других точек  $j$  системы, 2) внешние консервативные силы  $\vec{F}_i$  и 3) какие-то неконсервативные силы  $\vec{\Phi}_i$ . Уравнение движения  $i$ -й точки имеет вид

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.51)$$

Умножим обе части на элементарное перемещение  $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$  и сложим все уравнения для точек с номерами  $i = 1, \dots, N$ . При этом учтем, что  $\vec{v}_i dt = d\vec{v}_i$ :

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i \cdot d\vec{r}_i. \quad (4.52)$$

Рассмотрим по отдельности каждый член в этом уравнении.

В левой части стоит величина

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i d\left(\frac{v_i^2}{2}\right) = d\left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dT, \quad (4.53)$$

которая с очевидностью является приращением суммы  $T$  кинетических энергий всех частиц, т. е. приращением полной кинетической энергии системы.

Первое слагаемое в правой части равенства (4.52) можно преобразовать, если учесть, что в него входят одинаковые по модулю силы взаимодействия между частицами, например,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  и т. д. Итак, по третьему закону Ньютона  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ , и мы можем записать эту сумму так, чтобы суммирование выполнялось только по индексам  $i < j$ . Вместо общего вывода приведем пример преобразования этого слагаемого при  $N = 3$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i &= (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}) \cdot d\vec{r}_1 + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}) \cdot d\vec{r}_2 + (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}) \cdot d\vec{r}_3 = \\ &= (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}) \cdot d\vec{r}_1 + (-\vec{F}_{12} + \vec{F}_{23}) \cdot d\vec{r}_2 + (-\vec{F}_{13} - \vec{F}_{23}) \cdot d\vec{r}_3 = \\ &= \vec{F}_{12} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \vec{F}_{13} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \vec{F}_{23} \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) = \\ &= \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} + \vec{F}_{13} \cdot d\vec{r}_{13} + \vec{F}_{23} \cdot d\vec{r}_{23}. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая консервативность внутренних сил, мы можем выразить каждое из слагаемых в последней строчке через изменение потенциальной энергии соответствующей пары частиц:  $\vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = -dU(r_{12})$  и т. д.

В общем случае первое слагаемое в правой части (4.52) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^N \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^N [-dU(r_{ij})] = \\ &= -d \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^N U(r_{ij}) \right] = -dU_{\text{внутр}}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Здесь введено обозначение  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ .

Мы получили, что первое слагаемое равно (с обратным знаком) изменению суммарной потенциальной энергии взаимодействия всех пар частиц, т. е. убyli полной внутренней потенциальной энергии системы.

Второе слагаемое в (4.52) обычным образом выражается через изменение полной потенциальной энергии системы в поле внешних консервативных сил:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N dU(r_i) = -d \left[ \sum_{i=1}^N U(r_i) \right] = -dU_{\text{внешн}}. \quad (4.55)$$

Третье слагаемое равно работе неконсервативных сил:

$$\sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum d\mathcal{A}_i = d\mathcal{A}. \quad (4.56)$$

Объединяя все эти результаты, получаем

$$dT = -dU_{\text{внутр}} - dU_{\text{внешн}} + d\mathcal{A}$$

или, вводя обозначение  $E = T + U_{\text{внутр}} + U_{\text{внешн}}$ ,

$$dE = d\mathcal{A}. \quad (4.57)$$

Величина  $E$  представляет собой *полную механическую энергию* системы. Если на тела системы действуют только консервативные силы, то  $d\mathcal{A} = 0$  и, как следует из (4.57),  $dE = 0$ . Мы пришли к **закону сохранения полной механической энергии в отсутствие неконсервативных сил**: ♦

$$E = T + U_{\text{внутр}} + U_{\text{внешн}} = \text{const.} \quad \blacklozenge$$

Иногда в системе действуют неконсервативные силы, работа которых равна нулю. В этом случае энергия также сохраняется. Но если неконсервативные силы являются силами трения, сопротивления среды и т. п., то их работа всегда отрицательна (такие силы направлены против перемещения), откуда следует  $dE < 0$  — механическая энергия системы убывает.

Закон сохранения энергии является всеобъемлющим. Пока мы имеем дело только с механической энергией, но есть и другие ее формы, в том числе, без сомнения, нам пока не известные. Если обнаруживается, что в каком-либо физическом процессе энергия не сохраняется, мы придумываем новую форму энергии, чтобы обеспечить ее точный баланс. Поступая так, мы вовсе не «жульничаем» и не делаем нечестной попытки скрыть недостаток наших знаний о природе. Так ученые «придумали» тепловую, электромагнитную, ядерную и другие формы энергии. Один из основоположников теории относительности Анри Пуанкаре писал: «Поскольку мы не в состоянии дать общее определение энергии, закон сохранения энергии следует рассматривать просто как указание на то, что существует *нечто*, остающееся постоянным (в любом физическом процессе). К каким бы открытиям ни привели нас будущие эксперименты, мы заранее знаем, что и тогда будет *нечто*, обладающее способностью сохраняться, и это *нечто* мы можем называть энергией».

## 4.6 Условия равновесия механической системы

Закон сохранения энергии позволяет провести анализ общих особенностей движения, если известна функция потенциальной энергии. Рассмотрим для примера материальную точку (частицу), движущуюся вдоль оси  $Ox$  в потенциальном поле, показанном на рис. 4.9. Поскольку в однородном поле сил тяжести потенциальная энергия пропорциональна высоте подъема тела, можно представить себе ледяную горку (пренебрегаем трением) с профилем, соответствующим функции  $U(x)$  на рисунке.

Из закона сохранения энергии  $E = T + U$  и из факта, что кинетическая энергия  $T = E - U$  всегда неотрицательна, следует, что частица может находиться лишь в областях, где  $E \geq U$ . На рисунке частица с полной энергией  $E$  может двигаться только в области  $x_1 \leq x \leq x_2$  и  $x \geq x_3$ .

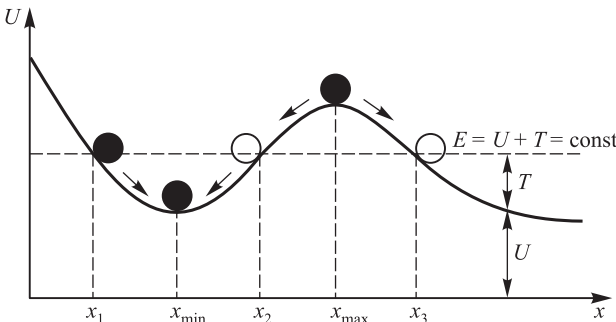
В первой области ее движение будет ограничено (финитно): при данном запасе полной энергии частица не может преодолеть «горок» на своем пути (их называют *потенциальными барьерами*) и обречена вечно оставаться в «долине» между ними. Вечно — с точки зрения *классической* механики, которую мы сейчас изучаем. В конце курса мы увидим, как *квантовая* механика помогает частице выбраться из заточения в *потенциальной яме* — области  $x_1 < x < x_2$ .

Во второй области движение частицы не ограничено (инфинитно), она может удалиться бесконечно далеко от начала координат направо, но слева ее движение по-прежнему ограничено потенциальным барьером:  $x \geq x_3$ .

В точках экстремума потенциальной энергии  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  сила, действующая на частицу, равна нулю, потому что равна нулю производная потенциальной энергии:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (4.58)$$

Если поместить в эти точки покоящуюся частицу, то она оставалась бы там ...опять-таки вечно, если бы не *флуктуации* ее положения. В этом мире нет ничего строго покоящегося, частица может испытывать небольшие отклонения (флуктуации) от положения равновесия. При этом, естественно, возникают силы.



**Рис. 4.9.** Области движения частицы вблизи положений устойчивого и неустойчивого равновесия

Если они возвращают частицу к положению равновесия, то такое равновесие называется *устойчивым*. Если же при отклонении частицы возникающие силы еще дальше уведут ее от равновесного положения, то мы имеем дело с *неустойчивым* равновесием, и частица в таком положении обычно долго не задерживается. По аналогии с ледяной горкой можно догадаться, что устойчивым будет положение в минимуме потенциальной энергии, а неустойчивым — в максимуме.

Покажем, что это действительно так. Для частицы в точке экстремума  $x_m$  ( $x_{\min}$  или  $x_{\max}$ ) действующая на нее сила  $F(x_m) = 0$ . Пусть вследствие флуктуации координата частицы изменяется на небольшую величину  $\Delta x$ . При таком изменении координаты на частицу начнет действовать сила

$$F(x_m + \Delta x) \approx F(x_m) + \Delta x F'(x_m) = \Delta x F'(x_m) \quad (4.59)$$

(штрихом обозначена производная по координате  $x$ ). Учитывая, что  $F = -U'$ , получаем для силы выражение

$$F(x_m + \Delta x) \approx -\Delta x U''(x_m). \quad (4.60)$$

В точке минимума вторая производная потенциальной энергии положительна:  $U''(x_{\min}) > 0$ . Тогда при положительных отклонениях от положения равновесия  $\Delta x > 0$  возникающая сила отрицательна, а при  $\Delta x < 0$  сила положительна. В обоих случаях сила препятствует изменению координаты частицы, и положение равновесия в минимуме потенциальной энергии устойчиво.

В точке максимума вторая производная отрицательна:  $U''(x_{\max}) < 0$ . Тогда увеличение координаты частицы  $\Delta x$  приводит к возникновению положительной же силы, еще больше увеличивающей отклонение от положения равновесия. При  $\Delta x < 0$  сила отрицательна, т.е. и в этом случае способствует дальнейшему отклонению частицы. Такое положение равновесия неустойчиво.

Таким образом, положение устойчивого равновесия может быть найдено при совместном решении уравнения и неравенства

$$\boxed{U'(x) = 0, \quad U''(x) > 0.} \quad (4.61)$$

**Задача 4.17.** Потенциальная энергия двухатомной молекулы (например,  $\text{H}_2$  или  $\text{O}_2$ ) описывается выражением вида

$$U(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}, \quad (4.62)$$

где  $r$  — расстояние между атомами, а  $A$ ,  $B$  — положительные постоянные. Определить равновесное расстояние  $r_m$  между атомами молекулы. Устойчива ли двухатомная молекула?

**Решение.** Первый член описывает отталкивание атомов на малых расстояниях (молекула сопротивляется сжатию), второй — притяжение на больших расстояниях (молекула сопротивляется разрыву). В соответствии со сказанным, равновесное расстояние находится при решении уравнения  $dU/dr = 0$ . Дифференцируя потенциальную энергию, получаем

$$U'(r) = -\frac{12A}{r^{13}} + \frac{6B}{r^7} = 0,$$

откуда  $r_m = (2A/B)^{1/6}$ . Найдим теперь вторую производную потенциальной энергии

$$U''(r) = \frac{12 \cdot 13 \cdot A}{r^{14}} - \frac{6 \times 7 \times B}{r^8}$$

и подставляем туда значение равновесного расстояния  $r_m$ :

$$U''(r_m) = \frac{18}{2^{1/3}} \frac{B^{7/3}}{A^{4/3}} > 0. \quad (4.63)$$

Положение равновесия устойчиво. ■

## 4.7 Примеры применения законов сохранения

Рассмотрим вначале задачи, когда требуется не точное решение, но лишь более или менее адекватная оценка порядков величин.

**Задача 4.18.** *Гвоздь забили пятью ударами молотка. Оценить, какую силу надо приложить, чтобы выдернуть гвоздь.*

**Решение.** Пусть  $m$  — масса молотка, а  $v$  — его скорость в момент удара. Для оценки можно предположить, что гвоздю передается вся кинетическая энергия молотка. При  $n$  ударах эта энергия равна  $T = nmv^2/2$ . Энергия гвоздя расходуется на преодоление силы трения  $F$  при вхождении гвоздя в стену: при углублении гвоздя на расстояние  $l$  совершается работа  $A = Fl$ . Из равенства  $A = T$  находим

$$F = \frac{nmv^2}{2l}. \quad (4.64)$$

Эта же сила препятствует вытаскиванию гвоздя. Для численной оценки примем разумные исходные данные:  $m = 1$  кг,  $v = 5$  м/с,  $l = 5$  см = 0,05 м. Получаем тогда:  $F = 5 \times 1 \times 5^2 / (2 \times 0,05) = 1250$  Н. Эта сила эквивалентна весу массы в 127 кг. ■

При решении мы пренебрегли потерями энергии на нагревание молотка, гвоздя и стенки, но перед нами стояла задача получить всего лишь оценку, а не точное решение.

**Задача 4.19.** *Оценить мощность выделения теплоты при экстренном торможении грузовика.*

**Решение.** Пусть  $m$  — масса грузовика, который двигался со скоростью  $v$ . Кинетическая энергия грузовика до торможения равна  $T = mv^2/2$ , после — нулю. Разность этих кинетических энергий перешла в теплоту:  $Q = mv^2/2$ . Среднюю скорость грузовика в процессе торможения можно принять равной  $v/2$ . Если тормозной путь равен  $l$ , то до остановки грузовика прошло время  $t = 2l/v$ . Отсюда находим мощность выделения теплоты:

$$P = \frac{Q}{t} \approx \frac{mv^3}{4l}.$$

Для численной оценки примем:  $m = 10$  т =  $10^4$  кг,  $v = 72$  км/час = 20 м/с,  $l = 20$  м. Тогда находим:  $P \approx 10^4 \times 20^3 / (4 \times 20) = 10^6$  Вт = 1 МВт! ■

Приведем теперь примеры совместного использования законов сохранения импульса и энергии при изучении соударения двух тел. При столкновении тела претерпевают деформацию. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел приводит к повышению их температуры. Существует два предельных типа удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий.

♦ **Абсолютно упругим** называется удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие виды энергии. ♦



При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга, и разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются двумя условиями — сохранением полной энергии и сохранением полного импульса системы двух тел.

Абсолютно неупругий удар характеризуется тем, что потенциальной энергии упругой деформации не возникает: кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю (тепловую) энергию.

◆ После **абсолютно неупругого удара** столкнувшиеся тела соединяются воедино и либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. ◆

При абсолютно неупругом ударе тел работает лишь закон сохранения импульса, механическая энергия не сохраняется, переходит в тепловую (внутреннюю), поэтому имеет место закон сохранения суммарной энергии — механической и внутренней.

### Абсолютно неупругое столкновение двух шаров

Итак, имеем два сталкивающихся шара, образующих замкнутую систему. Пусть начальные скорости шаров  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , а их массы  $m_1$  и  $m_2$ . При соударении шары слипаются в единое целое. Конечную скорость слипшихся шаров обозначим  $\vec{v}$ . При соударении выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}, \quad (4.65)$$

откуда

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.66)$$

Как и следовало ожидать, соединившиеся шары после соударения продолжают двигаться со скоростью центра масс системы до соударения. Механическая энергия шаров при этом не сохраняется, часть ее переходит во внутреннюю энергию слипшихся шаров. Эта часть равна разности кинетических энергий до и после соударения:

$$Q = \frac{m_1\vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\vec{v}^2}{2} = \frac{m_1m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (4.67)$$

В частном случае, когда шары одинаковы ( $m_2 = m_1$ ) и летят навстречу друг другу с одинаковыми скоростями  $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$ , из этих формул следует, что после удара шары останавливаются и, стало быть, вся их кинетическая энергия пошла на увеличение внутренней энергии системы:

$$\vec{v} = 0, \quad Q = 2\frac{m_1\vec{v}_1^2}{2}.$$

**Задача 4.20.** Артиллеристы стреляют так, чтобы ядро попало в неприятельский лагерь, находящийся в  $l_0 = 7,2$  км от пушки. В момент вылета ядра из дула на него вскакивает барон Мюнхаузен (абсолютно неупругий удар), масса которого в  $n = 5$  раз больше массы ядра. Из-за этого ядро падает, не долетев до цели. Какое расстояние барону придется пройти пешком, чтобы добраться до неприятельского лагеря? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Решение.** Если ядро вылетело из дула со скоростью  $v_0$ , то после вскакивания на него барона его скорость уменьшается вследствие сохранения импульса:

$$v = \frac{mv_0}{M+m},$$

где  $m$  — масса ядра, а  $M$  — масса Мюнхаузена. Исходя из уравнений раздела 2.7, артиллеристы рассчитывали угол возвышения  $\alpha$  пушки по формуле (2.40)  $l_0 = (v_0^2/g) \sin 2\alpha$ . Поскольку скорость изменилась, а угол остался прежним, дальность полета составит

$$l = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 l_0 = l_0 \left(\frac{m}{M+m}\right)^2.$$

Поэтому барону надо будет пройти расстояние

$$s = l_0 - l = l_0 \cdot \frac{M(M+2m)}{(M+m)^2} = l_0 \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 7,2 \times \frac{5 \times 7}{6^2} = 7 \text{ км.}$$

Иными словами, барону удалось пролететь на ядре только 200 м. ■

### Абсолютно упругое столкновение двух шаров

Ограничимся случаем центрального удара двух однородных шаров. Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры. Шары рассматриваем как материальные точки, т. е. пренебрегаем их возможным вращением, а также трением о поверхность, по которой они движутся. Напишем уравнения сохранения механической энергии и импульса. В рассматриваемом случае центрального удара скорости шаров после удара будут направлены вдоль той же прямой, по которой двигались центры шаров перед ударом. Поэтому векторы скоростей можно заменить их проекциями на линию соударения:

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad (4.68)$$

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (4.69)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — массы шаров,  $v_{10}$  и  $v_{20}$  — скорости шаров до удара и  $v_1$  и  $v_2$  — скорости шаров после удара (скорости понимаются в алгебраическом смысле: знак указывает направление движения вдоль линии соударения). Преобразуем уравнения сохранения энергии и импульса к виду:

$$m_1(v_{10} - v_1)(v_{10} + v_1) = m_2(v_2 - v_{20})(v_2 + v_{20}), \quad (4.70)$$

$$m_1(v_{10} - v_1) = m_2(v_2 - v_{20}). \quad (4.71)$$

Выражения, стоящие в левой и правой частях (4.71), будем считать отличными от нуля (иначе  $v_{10} = v_1$  и  $v_{20} = v_2$  — скорости шаров не изменились, т. е. столкновения не произошло). Разделим уравнение (4.70) на (4.71), после чего получим:

$$v_{10} + v_1 = v_2 + v_{20}. \quad (4.72)$$

Умножим (4.72) на  $m_2$  и вычтем из него (4.71). Находим:

$$v_1 = \frac{2m_2 v_{20} + (m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2}. \quad (4.73)$$

Умножим (4.72) на  $m_1$  и сложим с (4.71). Имеем:

$$v_2 = \frac{2m_1v_{10} + (m_2 - m_1)v_{20}}{m_1 + m_2}. \quad (4.74)$$

В отличие от неупругого столкновения здесь скорости шаров после соударения не могут быть равны. В самом деле, если  $v_1 = v_2$ , то из (4.73) и (4.74) следует, что до соударения скорости тоже были равны  $v_{10} = v_{20}$ . Но в этом случае соударение не может произойти. При центральном ударе шары столкнутся, если они движутся навстречу друг другу или один шар догоняет другой.

### Анализ полученных соотношений

1. Если второй шар первоначально покоился ( $v_{20} = 0$ ), то после соударения скорости шаров задаются соотношениями

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{2m_1v_{10}}{m_1 + m_2}.$$

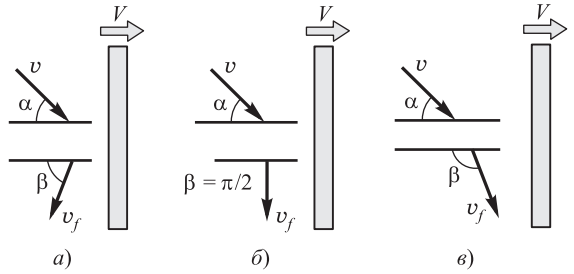
Знак скорости  $v_2$  совпадает со знаком  $v_{10}$ : покоившийся шар обязательно начнет двигаться в направлении движения налетающего шара. Знак скорости  $v_1$  зависит от соотношения масс шаров: если покоившийся шар более массивен, то налетавший отскочит в обратном направлении, если более массивен налетающий шар, он продолжит движение в том же направлении. При равенстве масс налетающий шар остановится.

Рассмотрим два предельных случая:

- Масса покоящегося шара гораздо больше массы налетающего:  $m_2 \gg m_1$ . Тогда  $v_2 \approx 0$  (тяжелый шар остается неподвижным) и  $v_1 \approx -v_{10}$  (легкий шар отскакивает с той же скоростью в обратном направлении, как от неподвижной стенки).
  - Масса налетающего шара намного превосходит массу покоящегося:  $m_1 \gg m_2$ . Тогда  $v_1 \approx v_{10}$  (тяжелый шар не меняет своей скорости) и  $v_2 \approx 2v_{10}$ .
2. Если шары одинаковы ( $m_1 = m_2$ ), то из (4.73) и (4.74) следует  $v_1 = v_{20}$ ,  $v_2 = v_{10}$ , т. е. шары при соударении обмениваются скоростями. С частным случаем этого явления мы познакомились выше: до соударения покоился шар 2, после — шар 1.
  3. Если оба шара движутся, но масса одного шара много больше массы другого ( $m_2 \gg m_1$ ), то  $v_1 \approx 2v_{20} - v_{10}$ ;  $v_2 \approx v_{20}$ . Иначе говоря, массивный шар не «замечает» соударения с легким шаром и продолжает двигаться с прежней скоростью. Скорость же легкого шара меняется: мы получили обобщение результатов п. 1.

### Абсолютно упругое отражение шара от движущейся стенки

Пусть шар, движущийся со скоростью  $v$ , налетает на стенку, которая также движется со скоростью  $V$  в направлении, ортогональном ее плоскости (рис. 4.10).



**Рис. 4.10.** Столкновение шара с движущейся стенкой. Показаны различные возможные случаи отражения

Угол падения шара  $\alpha$ , удар абсолютно упругий. Найдем, с какой скоростью  $v_f$  и под каким углом отражения  $\beta$  полетит шар после соударения. Заметим сначала, что если бы стенка покоилась, то при абсолютно упругом ударе ортогональный компонент скорости сменил бы знак (как в предыдущей задаче об отскоке легкого шара от тяжелого), а параллельный остался бы прежним. Иными словами, угол отражения шара от стенки был бы равен углу падения:  $\beta = \alpha$ .

До соударения компоненты скорости шара, параллельный и ортогональный плоскости стенки, имели вид:

$$v_{\parallel} = v \sin \alpha, \quad v_{\perp} = v \cos \alpha. \quad (4.75)$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с движущейся стенкой. Согласно закону сложения скоростей, в этой системе компоненты скорости  $v'$  имели до соударения величину

$$v'_{\parallel} = v \sin \alpha, \quad v'_{\perp} = v \cos \alpha - V. \quad (4.76)$$

В этой же системе отсчета компоненты скорости  $v'_f$  шара после упругого соударения равны

$$v'_{f,\parallel} = v \sin \alpha, \quad v'_{f,\perp} = -v \cos \alpha + V. \quad (4.77)$$

Возвращаясь в лабораторную систему отсчета, получаем компоненты конечной скорости шара:

$$v_{f,\parallel} = v \sin \alpha, \quad v_{f,\perp} = -v \cos \alpha + 2V. \quad (4.78)$$

Получаем теперь формулы для конечной скорости шара

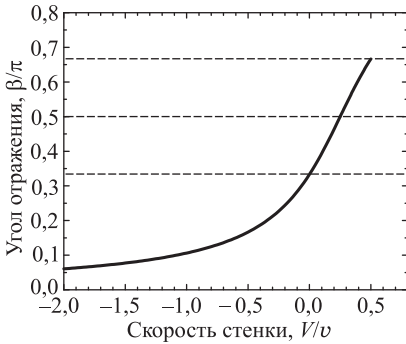
$$v_f = \sqrt{v^2 + 4V(V - v \cos \alpha)} \quad (4.79)$$

и угла отражения от стенки

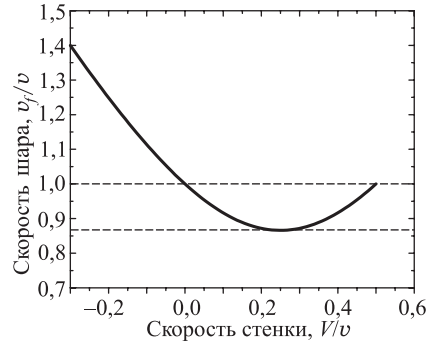
$$\beta = \arctg \left( \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha - 2V} \right). \quad (4.80)$$

### Анализ полученных результатов

Если стенка движется навстречу шару ( $V < 0$ ), то угол отражения будет меньше угла падения. При большой скорости стенки ( $V < 0, |V| \gg v$ ) из (4.80) следует,



**Рис. 4.11.** Зависимость угла отражения от скорости стенки. Пунктирные горизонтальные линии отмечают характерные значения:  $\beta = \alpha$  при  $V = 0$ ,  $\beta = \pi/2$  при  $V = (v/2) \cos \alpha$  и  $\beta = \pi - \alpha$  при  $V = v \cos \alpha$



**Рис. 4.12.** Зависимость скорости отраженного шара от скорости стенки. Пунктирные горизонтальные линии отмечают характерные значения:  $v_f = v$  при  $V = 0$  и  $V = v \cos \alpha$ , а также  $v_f = v \sin \alpha$  при  $\beta = \pi/2$  ( $V = (v/2) \cos \alpha$ )

что угол отражения стремится к нулю — шар отскакивает от стенки почти перпендикулярно ее плоскости:

$$\beta \approx \frac{v \sin \alpha}{2|V|} \ll 1.$$

Скорость шара при этих условиях увеличивается и в пределе стремится к значению  $v_f \approx 2V$ .

Если стенка покоится ( $V = 0$ ), то  $v_f = v$  и  $\beta = \alpha$  (угол падения равен углу отражения).

Если стенка «убегает» от шара, то угол падения увеличивается, а скорость шара падает. При скорости стенки  $V = (v/2) \cos \alpha$  угол отражения становится равным  $\beta = \pi/2$  — шар летит параллельно стенке со скоростью  $v_f = v \sin \alpha$ . При еще большей скорости убегания стенки угол отражения становится больше прямого — шар будто пытается догнать стенку, продолжая движение в той части пространства, которая раньше была занята ею. Наконец, при предельном значении  $V = v \cos \alpha$  угол отражения равен  $\beta = \pi - \alpha$  — шар движется по прямой, не сближаясь со стенкой, так как не может ее догнать и соударения не происходит. Сказанное иллюстрируется рисунками 4.11 и 4.12, построенными для конкретного угла падения  $\alpha = \pi/3$ .

## Выводы

После знакомства с примерами сформулируем важные положения:

- Законы сохранения носят общий характер и не зависят от конкретной системы и ее движения. Из законов сохранения вытекает, что какие-то процессы заведомо оказываются невозможными. Так, в 1775 г. Французская академия решила не принимать к рассмотрению проекты вечных двигателей как противоречащие закону сохранения энергии.

- Законы сохранения позволяют рассмотреть общие свойства движения без решения уравнений и детальной информации о протекании процессов во времени. Поэтому законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда силы точно не известны. Так, в частности, обстоит дело в физике элементарных частиц. Даже в тех случаях, когда силы заданы в точности, законы сохранения могут оказать существенную помощь при решении задач о движении частиц.
- Законы сохранения носят фундаментальный характер и тесно связаны с симметрией пространства и времени.

Последнее утверждение требует пояснений. *Симметрия* — одно из фундаментальных понятий современной физики. Под симметрией понимается свойство системы переходить в себя самое при некоторых преобразованиях. Например, атомная решетка бесконечного кристалла симметрична относительно сдвига (трансляции) на период решетки. При сдвиге же, скажем, на треть периода кристалл сам в себя уже не перейдет. Это — пример *дискретной симметрии*. Примером *непрерывной симметрии* является трансляционная симметрия самого пространства классической механики: если все без исключения физические объекты сдвинуть в любом направлении на любое (даже сколь угодно малое) расстояние, в мире ничего не изменится. Точно так же существует и непрерывная трансляционная симметрия времени классической ньютоновской механики. В 1918 г. немецкий математик Эмми Нётер (1882–1935) доказала мощную теорему, согласно которой **каждой непрерывной симметрии соответствует закон сохранения**. В частности, трансляционная симметрия пространства влечет за собой закон сохранения импульса, а трансляционная симметрия времени — закон сохранения энергии. С другими проявлениями теоремы Нётер мы еще познакомимся в дальнейшем. Заметим лишь, что теорема Нётер справедлива также и в квантовой теории.

## Контрольные вопросы

1. Приведите пример, когда сила трения совершает положительную работу.
2. Перемещение тела зависит от системы отсчета. Значит, работа также от нее зависит. Пусть груз перемещается по шероховатому полу с постоянной скоростью силой натяжения веревки. Приведите примеры систем отсчета, в которых работа, совершаемая силой натяжения веревки:  
а) положительна; б) равна нулю; в) отрицательна.
3. Представьте, что Земля вращается вокруг Солнца по круговой орбите. Производит ли при этом Солнце какую-либо работу? На самом деле орбита Земли — эллипс. Как изменится ваш ответ в этом случае?
4. Зависит ли значение кинетической энергии тела от направления его движения? От системы отсчета?
5. Изменится ли величина работы, совершаемой двигателем эскалатора, если пассажир, стоящий на движущейся вверх лестнице, будет подниматься по эскалатору с постоянной скоростью? Изменится ли потребляемая двигателем мощность?
6. Из результата задачи (4.18) получается, что чем глубже забит гвоздь, тем легче его вытащить ( $l$  стоит в знаменателе выражения (4.64) для силы). Не противоречит ли это нашему опыту?

7. Какова мгновенная мощность, развиваемая сердечной мышцей (см. контрольный вопрос 8 из гл. 3) в момент выталкивания крови в систему кровообращения? Какова средняя мощность сердца, если частота пульса составляет 60 ударов в минуту?
8. Сердце, работая как насос, сообщает крови некую кинетическую энергию. Что с этой энергией происходит дальше?
9. Ответьте на контрольный вопрос 10 из гл. 3 в терминах работы–энергии. Сравните ответ с полученным ранее.
10. Автомобиль массой  $m = 1200$  кг замедляется от скорости  $v_1 = 90$  км/ч до скорости  $v_2 = 70$  км/ч примерно за время  $\Delta t = 5$  с. Рычаг коробки передач находится при этом в нейтральном положении. Оцените приблизительную мощность, необходимую для движения автомобиля с постоянной скоростью  $v = 80$  км/ч. Выразите ответ в лошадиных силах (1 л. с.  $\approx 736$  Вт). Какую часть веса автомобиля составляет средняя сила сопротивления при скорости  $v = 80$  км/ч?
11. Имеются две пружины, которые различаются лишь жесткостями ( $k_1 > k_2$ ). Над какой пружиной совершается бóльшая работа, если: а) их растягивают на одинаковую длину; б) их растягивают одинаковой силой?
12. Чему равен коэффициент жесткости  $k$  пружины, если она может остановить автомобиль массой  $m$ , едущий со скоростью  $v$ , так что пассажиры испытывают при этом ускорение, не превышающее  $a$ ?
13. Инженер рассчитывает жесткость пружин, которые надо поместить на дно шахты лифта, чтобы при обрыве троса лифта пассажиры не испытали перегрузки, бóльшей  $10g$ . Масса лифта с пассажирами  $m = 1$  т, максимально возможная высота падения  $h = 40$  м (примерно 12-этажный дом). Предполагается установить  $n = 4$  пружины. Найти коэффициент жесткости  $k$  пружин.
14. Какой длины  $l$  должна быть пружина в предыдущем вопросе, если ее длина в максимально сжатом состоянии составляет  $1/10$  от длины  $l$  нерастянутой пружины? Исходя из результата, примите решение, надо ли кроме пружин предусмотреть иные меры безопасности?
15. Шарик падает на стальную плиту с некоторой высоты  $h$ . При каждом отскоке теряется  $\eta = 6\%$  энергии шарика до удара. После скольких отскоков шарик подпрыгнет на высоту  $h/2$ ?
16. Покоящийся шар получает центральный удар от другого такого же шара. Когда первый шар приобретет бóльшую скорость — при упругом или неупругом ударе?
17. Какими факторами определяется величина энергии, переданной при упругом столкновении от движущегося тела к неподвижной мишени?
18. При каком условии замедление быстро движущихся частиц при упругих столкновениях является наиболее эффективным?

## Глава 5

# Динамика твердого тела

В разделе 2.8 мы рассматривали кинематику твердого тела и обсуждали два типа движения: поступательное, когда все точки тела описывают одинаковые траектории, и вращательное вокруг оси, когда точки тела движутся в параллельных плоскостях и описывают окружности с центрами на оси вращения. Любое движение твердого тела сводится к поступательному и вращательному. Произвольное движение можно представить в виде суперпозиции поступательного движения всего тела, характеризуемого движением некоторой точки (например, центра масс), и вращения тела вокруг этой точки (т. е. вокруг осей, проходящих через нее).

Как мы уже знаем, уравнение динамики поступательного движения (второй закон Ньютона) связывает изменение импульса системы с действующими на нее силами. При отсутствии внешних сил полный импульс замкнутой системы сохраняется, и это связано с тем, что пространство само по себе однородно, все его точки равноправны, поэтому одинаковое перемещение в пространстве всех без исключения объектов ни к каким видимым последствиям не приведет. Но в нашем трехмерном пространстве имеется еще одна непрерывная симметрия: пространство само по себе *изотропно*, в нем нет выделенных направлений. Если повернуть все пространство вместе со всеми физическими объектами в нем вокруг произвольно взятой оси на любой (даже сколь угодно малый угол), в мире ничего не изменится. С этой симметрией связан **закон сохранения момента импульса**. Как мы увидим в дальнейшем, момент импульса является одной из основных величин, описывающих вращательное движение, где он играет ту же роль, что и импульс в динамике поступательного движения.

### 5.1 Закон сохранения момента импульса

По определению *момент импульса*  $\vec{L}$  отдельной частицы равен векторному произведению радиуса-вектора  $\vec{r}$  частицы на ее импульс  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}. \quad (5.1)$$

Направление вектора  $\vec{L}$  определяется по правилу буравчика (штопора), а его величина равна  $L = rp \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ . Величина  $l = r \sin \varphi$



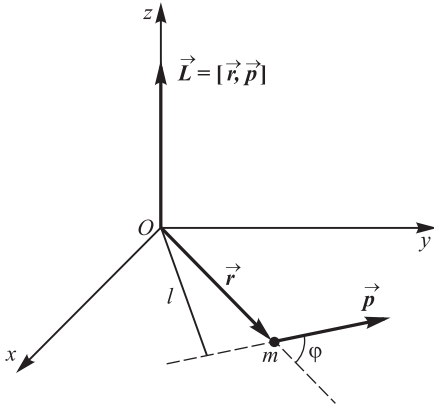


Рис. 5.1. Момент импульса  $\vec{L}$  частицы массой  $m$

равна расстоянию от начала координат  $O$  до прямой, вдоль которой направлен импульс частицы. Эта величина называется *плечом импульса* (рис. 5.1). Вектор  $\vec{L}$  зависит от выбора начала координат, поэтому говоря о нем, обычно указывают: «момент импульса относительно точки  $O$ ».

Рассмотрим производную по времени от момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (5.2)$$

Первое слагаемое равно нулю, так как векторное произведение параллельных векторов тождественно равно нулю:  $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} \equiv 0$ . Во втором слагаемом, согласно второму закону Ньютона, производную импульса можно заменить на действующую на тело силу.

♦ *Векторное произведение радиуса-вектора на силу называется **моментом силы** относительно точки  $O$ :*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad \blacklozenge \quad (5.3)$$

Направление момента силы определяется правилом буравчика, а величина  $M = rF \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между радиусом-вектором и силой. Аналогично тому, как это было сделано выше, определяется и *плечо силы*  $l = r \sin \alpha$  — расстояние от точки  $O$  до линии действия силы.

В итоге из (5.2) получаем *уравнение изменения во времени момента импульса частицы*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (5.4)$$

Это уравнение описывает вращательное движение тел. По форме оно аналогично второму закону Ньютона: вместо импульса частицы стоит момент импульса, а вместо силы — момент силы. Если  $\vec{M} = 0$ , то  $\vec{L} = \text{const}$ , т. е. момент импульса частицы постоянен в отсутствие моментов сил, действующих на нее.

Для центральных сил  $\vec{F} = (\vec{r}/r) F(r)$  их момент относительно силового центра равен нулю:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{F(r)}{r} \vec{r} \times \vec{r} \equiv 0. \quad (5.5)$$

Таким образом, для центральных сил  $d\vec{L}/dt = 0$ , т. е.  $\vec{L} = \text{const}$ . Другими словами, **в поле центральных сил момент импульса тела сохраняется.**

Отсюда вытекает важное следствие. Поскольку момент импульса ортогонален плоскости, задаваемой импульсом тела и радиусом-вектором, проведенным из центра сил, эта плоскость не меняет своего положения со временем. Иными словами, орбита каждого тела в поле центральных сил лежит в одной плоскости, проходящей через центр сил (хотя для разных тел эти плоскости могут различаться). Таким образом, в поле центральных сил невозможны, например, винтовые траектории.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц. Уравнения движения этих частиц имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_1, \\ \dot{\vec{p}}_2 &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_2, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  — внешние силы, а  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  — внутренние силы взаимодействия между частицами, направленные вдоль линии, их соединяющей ( $\vec{F}_{12} \parallel \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ). Умножим первое уравнение векторно слева на радиус-вектор первой частицы  $\vec{r}_1$ , а второе — векторно слева на радиус-вектор второй частицы  $\vec{r}_2$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1, \\ \vec{r}_2 \times \dot{\vec{p}}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Учитывая, что

$$\vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{p} - \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{p} \quad (5.8)$$

(так как  $\vec{p} \parallel \vec{v}$  и потому  $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} \equiv 0$ ) и используя во втором уравнении третий закон Ньютона  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ , перепишем (5.7) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1, \\ \frac{d}{dt} \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 &= -\vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Сложим полученные соотношения:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2. \quad (5.10)$$

Векторы  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  и  $\vec{F}_{12}$  коллинеарны, поэтому их векторное произведение равно 0.

Таким образом, мы получаем

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2. \quad (5.11)$$

В левой части равенства стоит производная от суммы моментов импульса частиц (эту сумму называют полным моментом импульса  $\vec{L}$  системы), а в правой — сумма моментов *внешних* сил — полный момент  $\vec{M}$  внешних сил, действующих на тела системы. Обобщение на случай системы из многих частиц (или твердого тела) очевидно:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i, \\ \vec{M} &= \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из (5.12) при  $\vec{M} = 0$  следует **закон сохранения момента импульса:**

◆ *если система замкнута или суммарный момент внешних сил, действующих на нее, равен нулю, то суммарный момент импульса системы сохраняется:  $\vec{L} = \text{const}$ .* ◆

Уравнение (5.12) называют обычно законом вращательного движения системы или твердого тела (относительно точки).

**Задача 5.21.** *Выяснить, при каких условиях момент импульса системы не зависит от выбора начала координат  $O$ .*

**Решение.** Найдем сначала, как изменяется момент импульса при смене начала координат. Возьмем некую точку  $O'$ , положение которой относительно точки  $O$  задается радиусом-вектором  $\vec{r}_0$ . Радиусы-векторы  $\vec{r}'_i$ , проведенные из  $O'$ , связаны с радиусами-векторами  $\vec{r}_i$  соотношениями  $\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}'_i$ . Подставим это выражение в формулу для момента импульса  $\vec{L}$  относительно точки  $O$ :

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_0 + \vec{r}'_i) \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_0 \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_0 \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}_i.$$

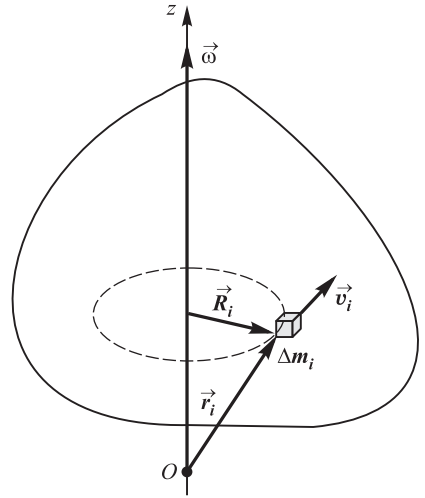
В первом члене мы введем полный импульс системы  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$ , а второй член есть не что иное, как момент импульса  $\vec{L}'$  относительно точки  $O'$ . Имеем

$$\vec{L} = \vec{r}_0 \times \vec{p} + \vec{L}'.$$

Мы ищем условие, когда  $\vec{L} = \vec{L}'$  для произвольного вектора  $\vec{r}_0$ . Это возможно только при равенстве нулю полного импульса системы  $\vec{p} = 0$ . Иными словами, момент импульса не зависит от выбора начала координат в системе отсчета, связанной с центром масс системы. ■

## 5.2 Динамика вращения вокруг неподвижной оси

Движение материальной точки характеризуется перемещением, скоростью, ускорением. Но при вращении твердого тела все его элементы имеют разные перемещения, различные скорости. Удобно найти переменные, одинаковые для всех



**Рис. 5.2.** Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси  $Oz$

элементов твердого тела. Мы их, собственно, уже знаем — угол поворота, угловая скорость, угловое ускорение. Соответственно, изучая динамику вращения, вместо импульса и силы мы будем оперировать их угловыми аналогами — моментом импульса и моментом силы, введенными выше.

### Уравнение движения

В разделе 5.1 было выведено уравнение движения системы материальных точек в виде

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (5.13)$$

где моменты импульса и силы определялись как

$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \quad \vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]. \quad (5.14)$$

Внутренние силы между телами системы, напомним, выпали из уравнений движения (5.12) или (5.13), (5.14). Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему частиц (материальных точек) с неизменными расстояниями между ними. Поэтому выписанные уравнения применимы для твердого тела, а неизменность расстояний между его точками позволяет характеризовать вращение тела вокруг неподвижной оси единственной координатой — углом поворота. Поэтому мы можем упростить уравнения движения (5.13), (5.14). Прежде всего, нас не интересуют в данный момент напряжения, возникающие в оси. Кроме того, для описания вращения достаточно рассмотреть проекции векторов  $\vec{L}$ ,  $\vec{M}$  на ось вращения.

Направим ось  $z$  вдоль оси вращения и выделим в твердом теле элемент массой  $\Delta m_i$ , положение которого характеризуется радиусом-вектором  $\vec{r}_i$  (рис. 5.2). Момент импульса этого элемента есть  $\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \Delta m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]$ . Радиус-вектор  $\vec{r}_i$  можно представить как сумму его проекций на ось  $z$  и плоскость  $xy$ :  $\vec{r}_i = \vec{k} z_i + \vec{R}_i$ ,

где вектор  $\vec{R}_i$  лежит в плоскости вращения и направлен от оси к выделенному элементу (см. рис. 5.2). Имеем:

$$\vec{L}_i = \Delta m_i z_i [\vec{k}, \vec{v}_i] + \Delta m_i [\vec{R}_i, \vec{v}_i]. \quad (5.15)$$

Первое слагаемое — вектор, направленный противоположно  $\vec{R}_i$ . Поэтому оно не дает вклада в  $z$ -компонент момента импульса. Второе слагаемое — вектор, направленный вдоль оси  $z$ . Так как  $\vec{R}_i \perp \vec{v}_i$  и  $v_i = \omega R_i$ , можем написать:

$$L_{z,i} = \Delta m_i R_i v_i = \omega \Delta m_i R_i^2. \quad (5.16)$$

Суммируя по всем элементам тела, получаем

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_i L_{z,i} = J\omega, \\ J &= \sum_i \Delta m_i R_i^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Величина  $J$  называется *моментом инерции* тела. Говоря о моменте инерции, всегда указывают, относительно какой-именно оси вращения он определен (в данном случае — это ось  $z$ ). Момент инерции того же тела относительно какой-то другой оси примет иное значение. Сохраняется только общее правило его вычисления: берется сумма по элементам массы, составляющим тело, умноженным на квадраты расстояний этих элементов массы до оси вращения.

В случае непрерывного распределения масс с плотностью  $\rho$  сумма заменится на интеграл по всему объему тела:

$$J = \int_V R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV. \quad (5.18)$$

Если тело однородно, то его плотность во всех точках постоянна и  $\rho$  можно вынести из-под знака интеграла.

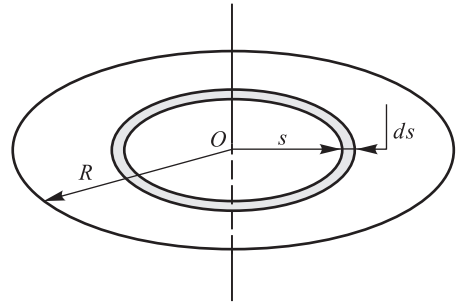
Записываем теперь уравнение (5.13) в проекции на ось  $z$ :  $dL_z/dt = M_z$ . Поскольку момент инерции не зависит от времени, дифференцируем только угловую скорость и получаем *основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси*

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_z. \quad (5.19)$$

Производная угловой скорости — это угловое ускорение  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ .

Рассмотрим теперь момент внешних сил. Разложим силу  $\vec{F}_i$  на вектор в направлении оси  $z$  и ортогональный оси  $z$  вектор:  $\vec{F}_i = \vec{k} F_{z,i} + \vec{F}_{\perp,i}$ . Используя снова аналогичное разложение радиуса-вектора  $\vec{r}_i = \vec{k} z_i + \vec{R}_i$ , получаем для момента внешних сил  $\vec{M}_i$ :

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = z_i F_{z,i} [\vec{k}, \vec{k}] + z_i [\vec{k}, \vec{F}_{\perp,i}] + F_{z,i} [\vec{k}, \vec{R}_i] + [\vec{R}_i, \vec{F}_{\perp,i}]. \quad (5.20)$$



**Рис. 5.3.** Вычисление момента инерции диска относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр

Первое слагаемое равно нулю. Два следующих содержат единичный орт — вектор  $\vec{k}$ , направленный вдоль оси  $Oz$  и, следовательно, не дают вклада в проекцию  $M_{z,i}$ . Оба вектора  $\vec{R}_i$ ,  $\vec{F}_{\perp,i}$  лежат в плоскости  $xy$  и, следовательно, последнее слагаемое направлено параллельно оси  $Oz$ . Если  $\alpha_i$  — угол между этими векторами, то

$$M_z = \sum_i M_{z,i} = \sum_i F_{\perp,i} R_i \sin \alpha_i = \sum_i F_{\perp,i} l_i, \quad (5.21)$$

где  $l_i$  — плечо силы (см. разд. 5.1). Силу  $F_{\perp,i}$  надо здесь понимать в алгебраическом смысле: она входит со знаком минус, если тормозит вращение.

## Момент инерции

Найдем моменты инерции для простейших (геометрически правильных) форм твердого тела, масса которого равномерно распределена по объему.

**1. Момент инерции обруча** относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр.

Обруч считается бесконечно тонким, т. е. толщиной обода можно пренебречь по сравнению с радиусом  $R$ . Поскольку в этой системе все массы находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения,  $R^2$  можно вынести из-под знака интеграла:

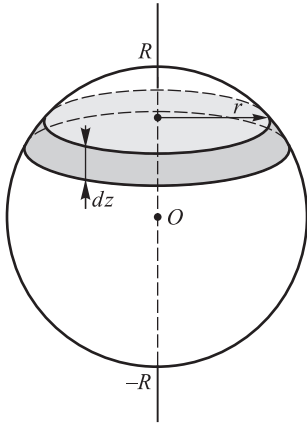
$$J = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2, \quad (5.22)$$

где  $m$  — полная масса обруча.

**2. Момент инерции диска** относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр.

Диск считается бесконечно тонким, т. е. его толщина много меньше радиуса  $R$ . Момент инерции, согласно определению, величина аддитивная: момент инерции целого тела равен сумме моментов инерции его частей. Разобьем диск на бесконечно тонкие обручи радиусом  $s$  и шириной  $ds$  (рис. 5.3) Площадь поверхности обруча равна произведению его длины окружности на ширину:  $2\pi s ds$ . Поскольку масса  $m$  диска распределена равномерно, масса единицы площади равна  $m/(\pi R^2)$ , так что масса обруча равна

$$dm = 2\pi s ds \frac{m}{\pi R^2} = \frac{2m}{R^2} s ds.$$



**Рис. 5.4.** Момент инерции шара относительно его диаметра

Момент инерции обруча мы уже знаем:

$$dJ = dm s^2 = \frac{2m}{R^2} s^3 ds. \quad (5.23)$$

Осталось просуммировать моменты инерции всех таких обручей:

$$J = \int dJ = \frac{2m}{R^2} \int_0^R s^3 ds = \frac{2m}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}. \quad (5.24)$$

Такой же результат получится и для момента инерции цилиндра конечной длины относительно его продольной оси.

### 3. Момент инерции шара

Поступим аналогичным образом: «нарежем» шар на бесконечно тонкие диски толщиной  $dz$ , находящиеся на расстоянии  $z$  от центра (рис. 5.4). Радиус такого диска  $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ . Объем диска  $dV_z$  равен его площади, умноженной на толщину:  $dV_z = \pi r^2 dz$ . Массу диска  $dm$  находим, разделив массу шара  $m$  на его объем  $4\pi R^3/3$  и умножив на объем диска:

$$dm = \frac{m}{4\pi R^3/3} \pi r^2 dz = \frac{3m}{4R^3} r^2 dz.$$

Момент инерции диска был найден выше. В применении к данному случаю он равен

$$dJ = \frac{dm r^2}{2} = \frac{3m}{8R^3} r^4 dz = \frac{3m}{8R^3} (R^2 - z^2)^2 dz. \quad (5.25)$$

Момент инерции шара находится интегрированием по всем таким дискам:

$$\begin{aligned} J &= \int dJ = \frac{3m}{8R^3} \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{3m}{8R^3} \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \\ &= \frac{3m}{8R^3} \left( R^4 \cdot 2R - 2R^2 \cdot \frac{2R^3}{3} + \frac{2R^5}{5} \right) = \frac{3mR^2}{8} \left( 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \\ &= \frac{2}{5} mR^2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

**4. Момент инерции тонкого стержня** относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню.

Пусть стержень имеет длину  $l$ . Направим ось  $x$  вдоль стержня. Начало координат по условию находится в центре стержня. Возьмем элемент стержня длиной  $dx$ , находящийся на расстоянии  $x$  от оси вращения. Его масса равна  $dm = (m/l)dx$ , а момент инерции  $dJ = dm x^2 = (m/l)x^2 dx$ . Отсюда находим момент инерции стержня:

$$J = \int dJ = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{ml^2}{12}. \quad (5.27)$$

### Теорема Штейнера

В приведенных примерах оси проходят через центр масс (центр инерции) тела. Момент инерции относительно других осей определяется в соответствии с **теоремой Штейнера**:

♦ *момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $J_C$  относительно параллельной оси, проходящей через центр инерции тела, и величины  $ma^2$  — произведения массы тела на квадрат расстояния от центра инерции тела до выбранной оси, т. е.*

$$J = J_C + ma^2. \quad \blacklozenge \quad (5.28)$$

Продемонстрируем сначала применение теоремы Штейнера. Вычислим момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его край перпендикулярно стержню. Прямое вычисление сводится к тому же интегралу (5.27), но взятому в других пределах:

$$J = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}. \quad (5.29)$$

Расстояние до оси, проходящей через центр масс, равно  $a = l/2$ . По теореме Штейнера получаем тот же результат.

$$J = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}.$$

Вывод теоремы Штейнера иллюстрируется рис. 5.5. Пусть одна ось проходит в направлении единичного вектора  $\vec{n}$  через центр масс  $C$  твердого тела (системы тел), а другая — параллельно ей через некоторую точку  $O$ . Из центра масс в направлении второй оси проводим ортогональный осям вектор  $\vec{a}$ , который определяет положение точки  $O$ . Радиусы-векторы некоторого элемента системы массой  $m_i$  относительно точек  $C$  и  $O$  обозначаем  $\vec{R}_{C,i}$  и  $\vec{R}_i$ , соответственно. Момент инерции этого элемента относительно оси  $C$  есть  $J_{C,i} = m_i x_{C,i}^2$ , где  $x_{C,i}$  — расстояние элемента от оси. По теореме Пифагора  $x_{C,i}^2 = R_{C,i}^2 - y_{C,i}^2$  (см. рис. 5.5).



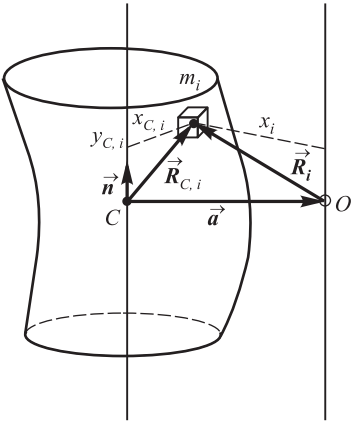


Рис. 5.5. К выводу теоремы Штейнера

Катет  $y_{C,i}$  равен проекции вектора  $\vec{R}_{C,i}$  на ось вращения, т. е.  $y_{C,i} = (\vec{n} \cdot \vec{R}_{C,i})$ . Используя эти выражения и суммируя по всем элементам системы, находим момент инерции относительно оси, проходящей через точку  $C$ , и, аналогичным образом, момент инерции относительно параллельной оси:

$$\begin{aligned} J_C &= \sum_i m_i x_{C,i}^2 = \sum_i m_i \left[ R_{C,i}^2 - (\vec{n} \cdot \vec{R}_{C,i})^2 \right], \\ J_O &= \sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i \left[ R_i^2 - (\vec{n} \cdot \vec{R}_i)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Здесь выражение для  $J_O$  получено из  $J_C$  простой заменой  $\vec{R}_{C,i}$  на  $\vec{R}_i$ .

Как видно из рис. 5.5, векторы  $\vec{R}_i$  и  $\vec{R}_{C,i}$  связаны между собой:

$$\vec{R}_i = \vec{R}_{C,i} - \vec{a}, \quad (5.31)$$

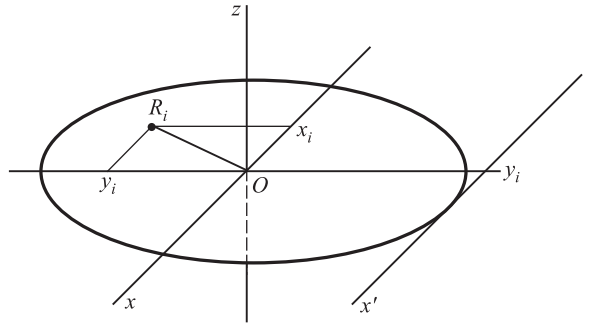
причем  $(\vec{n} \cdot \vec{R}_i) = (\vec{n} \cdot \vec{R}_{C,i})$ , так как векторы  $\vec{n}$  и  $\vec{a}$  ортогональны и их скалярное произведение  $(\vec{n} \cdot \vec{a}) = 0$ . Тогда мы можем преобразовать выражение для  $J_O$ :

$$\begin{aligned} J_O &= \sum_i m_i \left[ (\vec{R}_{C,i} - \vec{a})^2 - (\vec{n} \cdot \vec{R}_{C,i})^2 \right] = \\ &= \sum_i m_i \left[ R_{C,i}^2 - (\vec{n} \cdot \vec{R}_{C,i})^2 \right] - 2\vec{a} \cdot \sum_i m_i \vec{R}_{C,i} + a^2 \sum_i m_i. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Первое слагаемое в правой части — момент инерции  $J_C$  относительно оси, проходящей через центр масс (точку  $C$ ). Второе слагаемое равно  $ma^2$ , где  $m = \sum_i m_i$  — полная масса системы. Второе слагаемое равно нулю, так как оно пропорционально радиусу-вектору центра инерции относительно самого центра инерции. Окончательно:

$$J_O = J_C + ma^2, \quad (5.33)$$

что и требовалось доказать.



**Рис. 5.6.** Моменты инерции плоской фигуры относительно взаимно перпендикулярных осей

Теорема Штейнера связывает моменты инерции относительно параллельных осей. Иногда оказывается полезной другая теорема, связывающая моменты инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей. Однако эта теорема относится только к плоским фигурам, толщиной которых можно пренебречь по сравнению с размерами в двух других направлениях. Итак, **теорема о моментах инерции плоских фигур:**

*если через произвольную точку  $O$  плоской фигуры проведена ортогональная к фигуре ось, то момент инерции относительно этой оси равен сумме моментов инерций относительно двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости фигуры и проходящих через эту же точку  $O$ .*

Иными словами, берем на фигуре произвольную точку  $O$  и проводим координатные оси так, чтобы  $Ox$  и  $Oy$  лежали в плоскости фигуры. Тогда, согласно теореме, момент инерции относительно оси  $Oz$  равен сумме моментов инерций относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ :

$$J_{(z)} = J_{(x)} + J_{(y)}. \quad (5.34)$$

При этом расположение осей  $Ox$ ,  $Oy$  может быть произвольным; главное, чтобы они лежали в плоскости фигуры (рис. 5.6).

Из рисунка видно, что

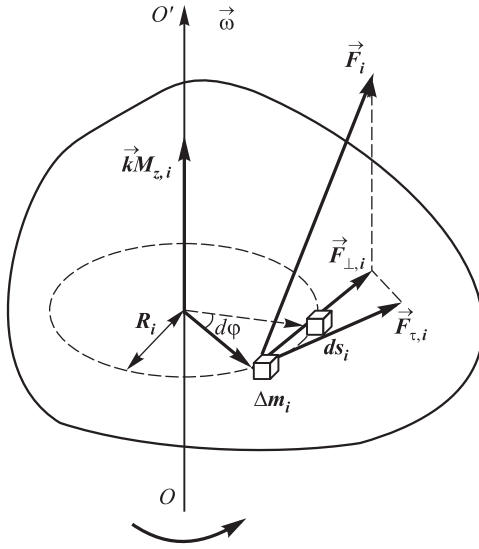
$$\begin{aligned} J_{(x)} &= \sum_i m_i y_i^2, & J_{(y)} &= \sum_i m_i x_i^2, \\ J_{(z)} &= \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_{(x)} + J_{(y)}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

что и требовалось доказать.

Найдем, например, момент инерции  $J_{(x)}$  диска относительно его диаметра. Два ортогональных диаметра диска равноправны:  $J_{(y)} = J_{(x)}$ . Согласно теореме о плоской фигуре,  $2J_{(x)} = J_{(z)} = mR^2/2$ , откуда

$$J_{(x)} = \frac{1}{4}mR^2.$$

Теперь можно применить теорему Штейнера, чтобы найти, например, момент инерции  $J_{(x')}$  относительно оси, параллельной диаметру и проходящей через край



**Рис. 5.7.** Работа сил при вращении твердого тела

диска (см. рис. 5.6):

$$J_{(x')} = J_{(x)} + mR^2 = \frac{5}{4}mR^2.$$

### 5.3 Работа внешних сил при вращении твердого тела

Определим работу, которую совершают внешние силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси  $OO'$ . Элементарная работа по перемещению на малый вектор  $d\vec{s}_i$  элемента массой  $\Delta m_i$  равна:

$$dA_i = \vec{F}_i d\vec{s}_i = F_{\tau,i} ds_i, \quad (5.36)$$

где  $F_{\tau,i}$  — тангенциальная составляющая внешней силы  $\vec{F}_i$ , действующей на элемент массой  $\Delta m_i$  (рис. 5.7). Вспомним разложение силы  $\vec{F}_i = \vec{k}F_{z,i} + \vec{F}_{\perp,i}$  на вектор, параллельный оси вращения (примем ее за ось  $z$ ), и вектор, ортогональный к ней. При вращении перемещение направлено по касательной к траектории, т. е., во-первых, лежит в плоскости вращения. Отсюда следует, что сила  $F_{z,i}$ , направленная вдоль оси вращения, работы не совершает. Во-вторых, перемещение ортогонально радиусу окружности, описываемой данным элементом. Проекцию  $\vec{F}_{\perp,i}$  внешней силы на плоскость вращения в свою очередь можно разложить на слагаемые. Одно из них направлено по радиусу, оно ортогонально перемещению и потому также не совершает работы. Работу совершает лишь проекция силы на касательное направление  $F_{\tau,i}$ , фигурирующая в (5.36).

Путь  $ds_i$  можно записать как  $ds_i = R_i d\varphi$ . Таким образом,

$$dA_i = F_{i\tau} R_i d\varphi. \quad (5.37)$$

Заметим, что  $F_{\tau,i} R_i = F_{\perp,i} l_i$ , где  $l_i$  — введенное выше плечо силы. Следовательно, мы выразили элементарную работу при перемещении элемента массой  $\Delta m_i$  через

проекцию момента внешней силы на ось вращения:

$$dA_i = M_{z,i}d\varphi. \quad (5.38)$$

Поэтому элементарная работа при вращении всего твердого тела равна

$$dA = \sum_i dA_i = \sum_i M_{z,i}d\varphi = M_z d\varphi = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}, \quad (5.39)$$

где  $\vec{M}$  есть полный момент всех внешних сил, а вектор  $d\vec{\varphi}$  направлен вдоль оси вращения согласно правилу буравчика. Для полной работы за время  $t$  можно записать:

$$A = \int dA = \int M_z d\varphi = \int_0^t M_z \omega dt. \quad (5.40)$$

Проекцию момента внешних сил можно выразить через угловое ускорение, используя основное уравнение динамики вращательного движения (5.19):

$$M_z = J \frac{d\omega}{dt}.$$

Тогда получаем с учетом равенства  $d\varphi = \omega dt$ :

$$dA = J \frac{d\omega}{dt} \omega dt = J \omega d\omega = d \left( \frac{J\omega^2}{2} \right).$$

Согласно закону сохранения энергии, работа  $dA$  равняется приращению  $dT$  кинетической энергии твердого тела. Таким образом, кинетическая энергия вращающегося вокруг неподвижной оси тела равна

$$\boxed{T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}}. \quad (5.41)$$

Между величинами, описывающими поступательное и вращательное движения, существует аналогия, которая облегчает усвоение и запоминание этих величин и связей между ними (табл. 5.1).

## 5.4 Плоское движение твердого тела

Рассмотрим теперь *плоское движение* твердого тела, т.е. движение, при котором точки тела описывают траектории, лежащие в параллельных плоскостях. Пример такого движения — вращение колеса автомобиля при его движении по прямой. Можно взять любую точку  $O$  тела и мысленно провести через нее ось вращения перпендикулярно плоскостям, в которых лежат траектории точек тела. Тогда ось вращения будет двигаться поступательно, оставаясь все время параллельной самой себе.

Таблица 5.1. Аналогия между поступательным и вращательным движениями

Поступательное движение	Вращательное движение
Перемещение $d\vec{r}$	Поворот $d\vec{\varphi}$
Скорость $\vec{v}$	Угловая скорость $\vec{\omega}$
Ускорение $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$
Масса $m$	Момент инерции $J$
Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса $\vec{L} = J\vec{\omega}$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$
Уравнение движения $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Уравнение движения $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ $J\varepsilon_z = M_z$
Работа $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Работа $dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$
Кинетическая энергия $T_{\text{пост}} = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия $T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}$

Соответственно, скорость  $\vec{v}_i$  элементарной массы  $\Delta m_i$  твердого тела складывается из скорости  $\vec{v}_0$  поступательного движения точки  $O$  и линейной скорости вращения вокруг связанной с ней (мысленно проведенной) оси:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_i], \quad (5.42)$$

где  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор, определяющий положение элементарной массы по отношению к точке  $O$ . Кинетическая энергия элементарной массы равна тогда:

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{\Delta m_i}{2} \vec{v}_i^2 = \frac{\Delta m_i}{2} \{ \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_i] \}^2 = \\ &= \frac{\Delta m_i}{2} \{ \vec{v}_0^2 + 2\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega}, \vec{r}_i] + +[\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2 \}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Векторное произведение  $[\vec{\omega}, \vec{r}_i]$  имеет модуль, равный  $\omega R_i$ , где  $R_i$  — расстояние массы  $\Delta m_i$  от оси вращения. Следовательно, третье слагаемое в фигурных скобках равно  $\omega^2 R_i^2$ . Второе слагаемое, представляющее смешанное произведение векторов, не меняется при циклической перестановке сомножителей:

$$\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = \vec{r}_i \cdot [\vec{v}_0, \vec{\omega}]. \quad (5.44)$$

В результате получим для кинетической энергии элемента твердого тела:

$$T_i = \frac{\Delta m_i}{2} \{ v_0^2 + 2\vec{r}_i \cdot [\vec{v}_0, \vec{\omega}] + \omega^2 R_i^2 \}. \quad (5.45)$$

Для нахождения кинетической энергии тела просуммируем по всем элементарным массам:

$$T = \sum_i T_i = \frac{1}{2} v_0^2 \sum_i \Delta m_i + [\vec{v}_0, \vec{\omega}] \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \Delta m_i R_i^2. \quad (5.46)$$

Сумма элементарных масс  $\sum_i \Delta m_i = m$  есть масса твердого тела. Выражение  $\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i = m \cdot \vec{R}_C$ , где  $\vec{R}_C$  — радиус-вектор центра масс тела относительно точки  $O$ . Наконец,  $\sum_i \Delta m_i R_i^2$  есть момент инерции тела  $J$  относительно оси вращения. Поэтому для кинетической энергии твердого тела можно записать формулу:

$$T = \frac{mv_0^2}{2} + m\vec{R}_C \cdot [\vec{v}_0, \vec{\omega}] + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (5.47)$$

Поскольку выбор мысленной оси вращения всецело в нашей власти, мы упростим выражение (5.47), взяв в качестве точки  $O$  центр масс тела. Тогда  $\vec{R}_C = 0$  и кинетическая энергия тела при плоском движении равна

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}. \quad (5.48)$$

Здесь  $\vec{v}_C$  — скорость движения центра масс, а  $J_C$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и ортогональной плоскости, где лежат траектории точек тела. Таким образом, кинетическая энергия твердого тела при плоском движении складывается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела.

*Движение твердого тела определяется действующими на тело внешними силами и моментами этих сил:*

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внешн}}, \\ J_C \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{\omega, \text{внешн}}. \end{cases} \quad (5.49)$$

Индекс  $\omega$  в обозначениях для момента внешней силы означает проекцию момента на ось вращения.

В следующих задачах мы имеем дело с плоским движением.

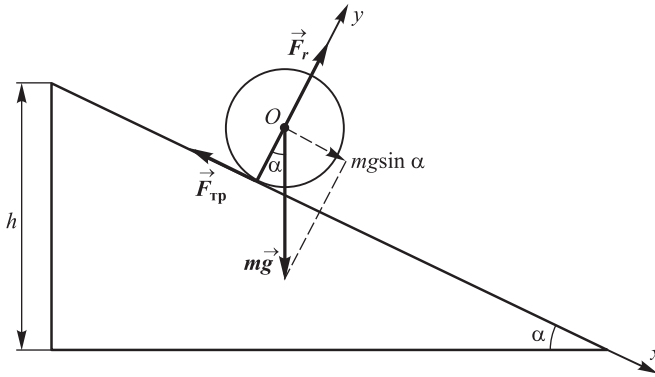
**Задача 5.22.** *Круглое однородное тело (обруч, цилиндр, шар) радиусом  $R$  и массой  $m$  скатывается без скольжения по наклонной плоскости под углом  $\alpha$  к горизонту с высоты  $h$  (рис. 5.8). Начальная скорость тела равна нулю. Найти скорость центра масс в конце спуска. У какого из тел (обруч, цилиндр, шар) конечная скорость будет наибольшей и наименьшей?*

**Решение: 1-й способ.** По условию тело катится без проскальзывания. Это условие используется у нас дважды. Сила трения между телом и плоскостью действует в точке соприкосновения, и при отсутствии скольжения между телом и плоскостью в точке соприкосновения действует сила трения покоя, которая не превышает своего максимального значения:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu mg \cos \alpha, \quad (5.50)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения. Оси координат удобно направить следующим образом: ось  $x$  — вдоль движения, ось  $y$  — перпендикулярно наклонной плоскости. Тело движется под действием трех сил: силы тяжести  $m\vec{g}$ , силы трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и силы нормального давления  $\vec{F}_r$ , так что уравнение поступательного движения центра инерции тела имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_r. \quad (5.51)$$



**Рис. 5.8.** Скатывание тела с наклонной плоскости (к задаче 5.22)

Вдоль оси  $y$  тело не движется. Проецируя (5.51) на ось  $y$ , получаем уравнение для силы нормального давления плоскости:

$$F_r - mg \cos \alpha = 0. \quad (5.52)$$

Проекция (5.51) на ось  $x$  дает:

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}. \quad (5.53)$$

Так как линейная скорость точек соприкосновения цилиндра с наклонной плоскостью равна нулю (опять используем условие отсутствия проскальзывания), скорость (ускорение) поступательного движения связаны с угловой скоростью (угловым ускорением) тела обычными соотношениями:

$$v = \omega R, \quad a = \varepsilon R. \quad (5.54)$$

Кроме поступательного движения тело еще и вращается. Вращение удобно описывать относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс цилиндра. Выбор этот обусловлен тем, что линии действия силы тяжести и силы нормального давления плоскости проходят через ось вращения и, следовательно, моменты этих сил равны нулю. Таким образом, цилиндр вращается только под действием силы трения покоя, и уравнение вращательного движения имеет вид:

$$J\varepsilon = F_{\text{тр}}R. \quad (5.55)$$

Таким образом, получается система четырех уравнений (5.52)–(5.55) с дополнительным неравенством (5.50).

Решая систему уравнений, находим:

$$\begin{aligned} a &= \frac{g \sin \alpha}{1 + J/mR^2}, \\ \varepsilon &= \frac{g \sin \alpha}{R(1 + J/mR^2)}, \\ F_r &= mg \cos \alpha, \\ F_{\text{тр}} &= \frac{mg \sin \alpha}{1 + mR^2/J}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Чем больше момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, тем меньше ускорение тела. Мы уже получили ответ на один из вопросов задачи: шар будет двигаться быстрее цилиндра, а цилиндр — быстрее обруча. Подставляя решение для силы трения в неравенство (5.50), находим условие, при котором будет отсутствовать проскальзывание:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \left( 1 + \frac{mR^2}{J} \right). \quad (5.57)$$

Смысл этого условия прост: наклон не должен быть слишком крут.

Итак, центр масс тела движется вдоль плоскости с постоянным ускорением  $a$ , так что зависимость пройденного пути и скорости от времени имеет вид:  $s = at^2/2$ ,  $v = at$ . Отсюда следует связь скорости и пройденного пути:  $s = v^2/2a$ . К концу спуска тело проходит путь  $s = h/\sin \alpha$ , так что его скорость достигает величины

$$v = \sqrt{\frac{2ah}{\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + J/mR^2}}. \quad (5.58)$$

Подставляя сюда моменты инерции обруча ( $J = mR^2$ ), цилиндра ( $J = mR^2/2$ ) и шара ( $J = 0,4mR^2$ ), находим:

$$v_{\text{обр}} = \sqrt{gh}, \quad v_{\text{цил}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}, \quad v_{\text{шар}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}. \quad (5.59)$$

**Решение: 2-й способ.** Используем закон сохранения полной энергии. В конце спуска тело приобретает кинетическую энергию

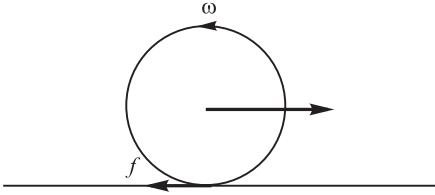
$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2} = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{J}{mR^2} \right). \quad (5.60)$$

Эта кинетическая энергия приобретена за счет потенциальной энергии  $mgh$ . Отсюда следует выражение (5.58) для скорости в конце спуска. Такой способ намного короче, но он не позволяет узнать детали процесса: действующие на тело силы и т. п. ■

В этой задаче мы имели дело со случаем, когда проскальзывание отсутствовало. Это позволило установить связь между угловой и линейной скоростями тела. Сила трения находилась тогда при решении уравнений движения. В обратном случае, когда тело движется с проскальзыванием, однозначной связи между линейной и угловой скоростями нет. Зато мы заранее знаем силу трения: раз точка соприкосновения тела с поверхностью движется, сила трения достигла своего максимального значения. Здесь важно понимать, в каком направлении действует сила трения.

Силы трения, как уже говорилось, направлены так, чтобы препятствовать относительному проскальзыванию соприкасающихся тел. Часто путают это *возможное* проскальзывание с *осуществляемым* поступательным движением. Необходимо четко понимать, что не редки случаи, когда сила трения не тормозит, но *ускоряет* тело, т. е. направлена по его движению. Самый известный пример — трогание автомобиля с места. Колеса начинают вращаться и проскальзывают по земле назад. Соответственно, сила трения направлена вперед, и именно она заставляет автомобиль трогаться. Чтобы ближе познакомиться с подобными случаями, рассмотрим задачу.





**Рис. 5.9.** Движение обруча с обратным вращением

**Задача 5.23.** Цирковой артист бросает на арену обруч массой  $m$  и радиусом  $R$ , который начинает катиться в горизонтальном направлении со скоростью  $v$ . При этом обручу придано обратное вращение с угловой скоростью  $\omega$ . При какой угловой скорости обруч после остановки покатится назад к артисту? Найти конечную скорость  $v_f$  поступательного движения обруча.

**Решение.** При обратном вращении обруча точка его касания с ареной движется вперед как из-за вращения, так и из-за поступательного движения обруча. Поэтому неизбежно существует проскальзывание и, значит, сила трения достигает своего максимального значения. Она тормозит как поступательное движение, так и вращение обруча. Ситуация показана на рис. 5.9. Может случиться так, что поступательное движение обруча будет остановлено в тот момент, когда он еще сохраняет обратное вращение. Далее сила трения начнет ускорять обруч по направлению к артисту. Ускорение это прекратится, когда исчезнет тенденция к проскальзыванию, после чего обруч покатится назад равномерно с некоторой установившейся скоростью  $v_f$ . Может, однако, случиться и так, что раньше будет остановлено обратное вращение, и тогда обруч сохранит поступательное движение вперед, изменив направление вращения на прямое. Чтобы различить эти два случая, качественных рассуждений недостаточно, и мы обратимся к формулам.

Момент инерции обруча  $J = mR^2$ . Потому уравнения движения записываются в виде:

$$\begin{aligned} m \frac{dv(t)}{dt} &= -\mu mg, & v(0) &= v, \\ mR^2 \frac{d\omega(t)}{dt} &= \mu mgR, & \omega(0) &= -\omega. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Здесь  $v(t)$ ,  $\omega(t)$  — скорость поступательного движения и угловая скорость в момент времени  $t$ , соответственно. Отрицательный знак у начального значения угловой скорости соответствует заданному в условии обратному вращению.

Решения уравнений (5.61) имеют вид:

$$v(t) = -\mu gt + v, \quad \omega(t) = \frac{\mu g}{R}t - \omega. \quad (5.62)$$

Условие исчезновения проскальзывания в момент времени  $t_f$  заключается в равенстве линейной скорости вращения обода и скорости поступательного движения обруча:  $v(t_f) = \omega(t_f)R$ . Подставляя сюда выражения для  $v(t)$  и  $\omega(t)$  из уравнений (5.62) и решая их относительно  $t_f$ , находим

$$t_f = \frac{v + \omega R}{2\mu g}. \quad (5.63)$$

В этот момент скорость поступательного движения обруча становится равной

$$v_f = v(t_f) = \frac{v - \omega R}{2}. \quad (5.64)$$

Соответственно, угловая скорость в тот же момент времени  $\omega_f = v_f/R$ . С этого мгновения обруч покатится равномерно (если нет сил трения качения), сохраняя достигнутые значения поступательной и угловой скоростей. Неравенство  $v_f < 0$  является условием того, что обруч покатится назад к артисту. Отсюда следует, что  $\omega > v/R$ . Следовательно, артисту надо закрутить обруч с угловой скоростью, превышающей указанное минимальное значение  $\omega_{\min} = v/R$ . ■

**Задача 5.24.** *Описать движение обруча, если ему придано прямое вращение.*

**Решение.** В этом случае начальная скорость нижней точки обруча складывается из скорости поступательного движения  $v$  и линейной скорости  $-\omega R$  вращения, направленной в обратную сторону. В связи с этим надо различать два случая.

1)  $\omega R \leq v$ .

Тогда начальная скорость  $v - \omega R$  нижней точки обода положительна, т. е. направлена в ту же сторону, что и скорость  $v$ . Значит, сила трения  $f$  направлена в противоположную сторону, т. е. как показано на рис. 5.9. Соответственно, в уравнениях движения (5.61) надо только изменить знак  $\omega$ . Вместо (5.62) получим решения

$$v(t) = -\mu g t + v, \quad \omega(t) = \frac{\mu g}{R} t + \omega. \quad (5.65)$$

Момент  $t_f$  исчезновения проскальзывания определится из того же соотношения  $v(t_f) = \omega(t_f)R$ , откуда находим:

$$t_f = \frac{v - \omega R}{2\mu g}. \quad (5.66)$$

Скорость поступательного движения обруча в этот момент становится равной

$$v_f = v(t_f) = \frac{v + \omega R}{2} \quad (5.67)$$

и остается потом неизменной. Эта скорость меньше начальной скорости поступательного движения обруча.

2)  $\omega R \geq v$ .

В этом случае скорость нижней точки обода отрицательна, направлена против скорости  $v$ . Значит, сила трения  $f$  направлена по  $v$ , т. е. в сторону, противоположную показанной на рис. 5.9.

Соответственно, в уравнениях движения надо изменить знак не только при  $\omega$ , но и при  $\mu$ . Решения имеют вид:

$$v(t) = \mu g t + v, \quad \omega(t) = -\frac{\mu g}{R} t + \omega. \quad (5.68)$$

Момент исчезновения проскальзывания определяется аналогично первому случаю:

$$t_f = \frac{\omega R - v}{2\mu g}. \quad (5.69)$$

Для скорости установившегося движения получается то же выражение (5.67), но в данном случае она будет больше начальной скорости поступательного движения.

Объединяя оба случая в один, записываем окончательный результат:

$$t_f = \frac{|v - \omega R|}{2\mu g}, \quad v_f = \frac{v + \omega R}{2}. \quad \blacksquare \quad (5.70)$$

## 5.5 О принципе работы колеса

Раз уж мы много говорили в этой главе о вращении тел, остановимся на самом великом и важном открытии человечества — изобретении колеса. Всем известно, что волочить груз гораздо труднее, чем перевозить его на колесах. Встает вопрос, почему? Колесо, играющее огромную роль в современной технике, по праву считается одним из гениальнейших изобретений человечества.

### Передвижение груза с помощью катка

Прототипом колеса был каток, подкладываемый под груз. Его первые применения теряются во мгле веков. Прежде чем разбираться с колесом, поймем принцип действия катка. Для этого решим задачу.

**Задача 5.25.** Груз массой  $M$  положен на цилиндрический каток массой  $m$  и радиусом  $r$ , который может двигаться по горизонтальному плоскому настилу. К грузу приложена горизонтальная сила  $F$  (рис. 5.10). Найти ускорения груза и катка. Силой трения качения пренебречь. Считать, что движение системы происходит без проскальзывания.

**Решение.** Обозначим  $f$  силу трения между катком и грузом и  $f_1$  — между катком и настилом. За положительное направление примем направление внешней силы  $F$ . Тогда положительным значениям  $f$  и  $f_1$  соответствуют направления сил трения, показанные на рис. 5.10. Силы трения, конечно же, действуют в месте соприкосновения трущихся поверхностей, но на рисунке соответствующие векторы чуть смещены для облегчения восприятия.

Таким образом, на груз действуют силы  $F$  и  $-f$ , а на каток — силы  $f$  и  $f_1$ . Обозначим  $a$  ускорение груза и  $a_1$  — ускорение катка. Кроме того, каток вращается по часовой стрелке с угловым ускорением  $\varepsilon$ .

Уравнения поступательного движения принимают вид:  
для груза

$$F - f = Ma \quad (5.71)$$

и для катка

$$f + f_1 = ma_1. \quad (5.72)$$

Уравнение вращательного движения катка записывается так:

$$(f - f_1)r = J\varepsilon. \quad (5.73)$$

Обратимся теперь к условиям отсутствия проскальзывания. Из-за вращения катка его нижняя точка имеет линейное ускорение  $-\varepsilon r$  и, кроме того, участвует в поступательном движении с ускорением  $a_1$ . В отсутствие проскальзывания между катком и

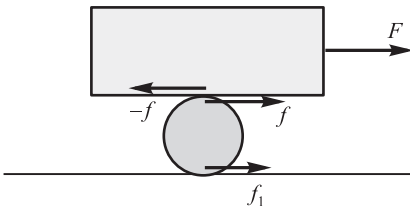


Рис. 5.10. Передвижение груза с помощью катка

настилом полное ускорение нижней точки катка должно быть равно нулю, так что

$$a_1 - \varepsilon r = 0. \quad (5.74)$$

Верхняя точка катка приобретает из-за вращения противоположно направленное линейное ускорение  $\varepsilon r$  и то же ускорение  $a_1$  поступательного движения. Чтобы не было проскальзывания между катком и грузом, полное ускорение верхней точки должно быть равно ускорению груза:

$$a_1 + \varepsilon r = a. \quad (5.75)$$

Из уравнений (5.74) и (5.75) следует, что ускорение катка в два раза меньше ускорения груза:

$$a_1 = \frac{a}{2}, \quad \varepsilon = \frac{a}{2r}. \quad (5.76)$$

Из непосредственного опыта каждый знает, что каток действительно отстает от груза.

Подставляя (5.76) в уравнения (5.71)–(5.73) и решая их относительно неизвестных  $a$ ,  $f$ ,  $f_1$ , получаем для ускорения груза

$$a = \frac{4F}{4M + m(1 + J/mr^2)}. \quad (5.77)$$

Обе силы трения  $f$  и  $f_1$  оказываются при этом положительными, так что на рис. 5.10 их направления выбраны правильно:

$$\begin{aligned} f &= F \frac{m(1 + J/mr^2)}{4M + m(1 + J/mr^2)}, \\ f_1 &= F \frac{m(1 - J/mr^2)}{4M + m(1 + J/mr^2)}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Как видно, радиус катка особой роли не играет: отношение  $J/mr^2$  зависит только от его формы. При данных массе  $m$  и радиусе  $r$  момент инерции катка максимален, когда каток представляет собой трубу:  $J = mr^2$ . В этом случае сила трения между катком и настилом отсутствует ( $f_1 = 0$ ) а уравнения (5.77), (5.78) принимают вид:

$$a = \frac{F}{M + m/2}, \quad f = F \frac{m/2}{M + m/2}. \quad (5.79)$$

При уменьшении массы катка сила трения уменьшается, ускорение груза увеличивается — груз легче перемещать.

В случае катка-цилиндра (бревна)  $J = mr^2/2$  и мы находим силы трения

$$f = F \frac{3m/8}{M + 3m/8}, \quad f_1 = F \frac{m/8}{M + 3m/8} \quad (5.80)$$

и ускорение груза

$$a = \frac{F}{M + 3m/8}. \quad (5.81)$$

Сравнивая с результатами для катка-трубы, видим, что эффективно масса катка как бы уменьшилась: ускорение груза возрастает при прочих равных условиях. ■

Главный итог решенной задачи: ускорение отлично от нуля (т. е. груз начинает двигаться) при сколь угодно малой внешней силе. При волочении же груза по настилу для его смещения необходимо приложить как минимум силу  $F = \mu Mg$ .

Второй вывод: ускорение вовсе не зависит от величины трения между частями данной системы. Коэффициент трения  $\mu$  не вошел в найденные решения, он появится только в условиях отсутствия проскальзывания, которые сводятся к тому, что приложенная сила  $F$  не должна быть слишком велика. Полученный результат, что каток как бы полностью «уничтожает» силу трения, не удивителен. Действительно, в отсутствие относительного перемещения соприкасающихся поверхностей силы трения не совершают работы. На самом деле каток «заменяет» трение скольжения на трение качения, которым мы пренебрегли. В реальном случае минимальная сила, необходимая для движения системы, отлична от нуля, хотя и гораздо меньше, чем при волочении груза по настилу. В современной технике принцип действия катка реализуется в шарикоподшипниках.

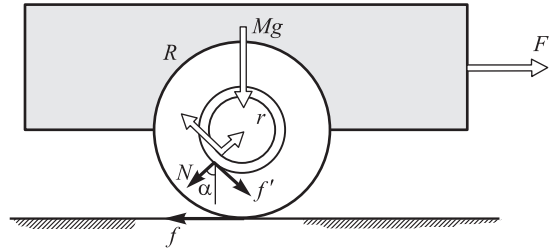
### Качественное рассмотрение работы колеса

Разобравшись с катком, перейдем к колесу. Первое колесо в виде деревянного диска, насаженного на ось, появилось, видимо, в 4-м тысячелетии до н. э. в цивилизациях Древнего Востока. Во 2-м тысячелетии до н. э. конструкция колеса совершенствуется: появляются спицы, ступица и гнутый обод. Изобретение колеса дало гигантский толчок развитию ремесел и транспорта. Однако многие не понимают самого принципа действия колеса. В ряде учебников и энциклопедий можно найти неверное утверждение, что колесо, подобно катку, также заменяет силу трения скольжения на силу трения качения. Иногда приходится слышать ссылки на использование смазки или подшипников, но дело не в этом, поскольку колесо с очевидностью появилось раньше, чем додумались до смазки (и, тем более, подшипников).

Действие колеса проще всего понять, исходя из энергетических соображений. Древние повозки устроены просто: кузов прикрепляется к деревянной оси радиусом  $r$  (общая масса кузова с осью равна  $M$ ). На ось насаживаются колеса массой  $m$  и радиусом  $R$  (рис. 5.11). Предположим, что такую повозку везут по деревянному же настилу (тогда во всех соприкасающихся местах имеем тот же коэффициент трения  $\mu$ ). Сначала заклиним колеса и, действуя силой  $F$ , протащим повозку на расстояние  $S$ . Поскольку повозка скользит по настилу, сила трения достигает своего максимально возможного значения  $f_{\max} = \mu(M + m)g$ . Работа против этой силы равна  $A = \mu(M + m)gS \approx \mu Mg$  (так как обычно масса колес много меньше массы повозки:  $m \ll M$ ).

Освободим теперь колеса и снова протащим повозку на то же расстояние  $S$ . Если колеса не скользят по настилу, то в нижней точке колеса сила трения не совершает работы. Но трение скольжения возникает между осью и колесом в нижней части оси радиусом  $r$ . Там тоже имеется сила нормального давления. Она будет несколько отличаться от прежней за счет веса колес и других причин, которые мы обсудим ниже, но при небольшой массе колес и небольшом коэффициенте трения можно считать ее примерно равной  $Mg$ . Поэтому между осью и колесом действует та же самая сила трения  $f_{\max} \approx \mu Mg$ . Подчеркнем еще раз: *колесо само по себе не уменьшает силу трения*. Но работа  $A'$  против этой силы будет теперь гораздо меньше, чем в случае волочения повозки с заклиненными колесами. Действительно, когда повозка проходит расстояние  $S$ , ее колеса

**Рис. 5.11.** Передвижение груза с помощью колеса: сила трения скольжения возникает здесь между закрепленной осью (внутренний круг) и вращающимся колесом



совершают  $N = S/2\pi R$  оборотов. Значит, трущиеся об ось колеса поверхности сдвинутся друг относительно друга на меньшее расстояние  $s = 2\pi rN = Sr/R$ . Поэтому работа против сил трения также будет в соответствующее число раз меньше:

$$A' = f_{\max}s = \mu MgS \frac{r}{R} = A \frac{r}{R}. \quad (5.82)$$

Таким образом, надев колеса на оси, мы уменьшаем не *силу трения*, как в случае с катком, а *путь*, на котором она действует. Скажем, колесо радиусом  $R = 0,5$  м и осью радиусом  $r = 2$  см уменьшает работу на 96%. С остальными 4% успешно справляются смазка и подшипники, уменьшающие само трение (смазка, кроме того, предотвращает износ ходовой части повозки). Теперь понятно, почему в старых экипажах и боевых колесницах делали такие большие колеса. Современные продуктовые коляски в супермаркетах могут катиться лишь благодаря подшипникам.

Из полученной формулы (5.82) следует, что при  $r = R$  (колеса без оси, вмонтированные в корпус и трущиеся об него) будет совершена та же работа, что и при волочении повозки. Весь выигрыш заключен в отношении радиусов  $r/R$ , т.е. колесо — по сути дела рычаг непрерывного действия с плечами  $r$  и  $R$ . Благодаря сворачиванию» рычага в окружность его не надо возвращать в начальное положение: это достигается автоматически. Трудно представить себе техническое изобретение, более гениальное по простоте и эффективности. В природе колесо не встречается, так что подсмотреть его у живых организмов человек не мог. И не все цивилизации до этого изобретения додумались.

## Количественная теория колеса

Рассмотрим силы, действующие на нашу повозку (см. рис. 5.11).

Силы, действующие на колесо: сила трения  $\vec{f}'$  со стороны оси, сила нормального давления  $\vec{N}$  со стороны оси, сила трения  $\vec{f}$  со стороны настила. Эти силы показаны на рис. 5.11 темными стрелками. Заметим, что мы не предполагаем, что ось соприкасается с колесом в своей нижней точке: угол  $\alpha$  описывает смещение назад точки соприкосновения оси с колесом (соответственно, точки приложения сил  $\vec{f}'$ ,  $\vec{N}$ ). Значение угла  $\alpha$  также должно быть найдено из решений уравнений движения. Кроме того, на колесо действует сила тяжести  $m\vec{g}$  и нормальное давление  $-(M+m)\vec{g}$  со стороны настила, но они сейчас нам не важны и на рисунке не показаны.

Выбирая ось  $x$  в горизонтальном направлении, а ось  $y$  — в вертикальном, записываем проекцию уравнения поступательного движения колеса на ось  $x$ :

$$ma = f' \cos \alpha - N \sin \alpha - f, \quad (5.83)$$

$$f' = \mu N. \quad (5.84)$$

Предполагая отсутствие проскальзывания в точке соприкосновения колеса с настилом ( $\varepsilon = a/R$ ), записываем уравнение вращательного движения колеса:

$$J \frac{a}{R} = fR - f'r. \quad (5.85)$$

Силы, действующие на повозку (показаны светлыми стрелками на рис. 5.11): внешняя сила  $\vec{F}$ , сила тяжести  $M\vec{g}$  и силы  $-f'$ ,  $-N$  со стороны оси. Записываем уравнения поступательного движения повозки в проекциях на оси  $x$ ,  $y$ :

$$Ma = F + N \sin \alpha - f' \cos \alpha, \quad (5.86)$$

$$0 = f' \sin \alpha + N \cos \alpha - Mg. \quad (5.87)$$

Мы имеем пять уравнений для пяти неизвестных:  $a, f, f', N, \alpha$ . Их все можно найти, решая систему уравнений. Мы хотим получить лишь ответ на вопрос: при какой минимальной силе  $F_{\min}$  повозка сдвинется с места? Для этого надо положить  $F = F_{\min}$ , при этом ускорение  $a = 0$ . Имеем тогда систему уравнений:

$$f = N(\mu \cos \alpha - \sin \alpha), \quad (5.88)$$

$$f = \mu N \frac{r}{R}, \quad (5.89)$$

$$F_{\min} = N(\mu \cos \alpha - \sin \alpha), \quad (5.90)$$

$$Mg = N(\mu \sin \alpha + \cos \alpha), \quad (5.91)$$

где мы уже учли соотношение (5.84). Из двух первых уравнений (5.88), (5.89) следует:

$$\mu \cos \alpha - \sin \alpha = \mu \frac{r}{R},$$

откуда можно найти тригонометрические функции угла  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\mu^2(r/R) + \sqrt{1 + \mu^2(1 - r^2/R^2)}}{1 + \mu^2}, \\ \sin \alpha &= \mu \frac{\sqrt{1 + \mu^2(1 - r^2/R^2)} - (r/R)}{1 + \mu^2}. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Тогда из двух последних уравнений (5.90), (5.91) следует искомое выражение:

$$F_{\min} = Mg \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{r}{R} \frac{\mu Mg}{\sqrt{1 + \mu^2(1 - r^2/R^2)}}. \quad (5.93)$$

В предельном случае  $r = R$  имеем  $F_{\min} = \mu Mg$ , что соответствует, в сущности, отсутствию колес и перетаскивание повозки волоком. В обратном предельном случае  $r \rightarrow 0$  минимальная сила также стремится к нулю. При малых коэффициентах трения квадратный корень в знаменателе приближенно равен единице, и  $F_{\min} \approx \mu Mg(r/R)$ . Выше мы качественно получили этот результат из энергетических соображений.

## 5.6 Гироскопы

*Гироскоп* был изобретен в 1852 г. французским ученым Леоном Фуко (он же и придумал название этого прибора — слово «гироскоп» означает на греческом «круг») в самом общем смысле — любое тело, вращающееся вокруг своей оси симметрии, которая сама может вращаться и принимать в пространстве любые направления. Гироскопы — сердце многих приборов, они настолько распространены в современном мире, а поведение их так необычно и неожиданно для неподготовленной публики, что им посвящали не только главы в учебниках, но и отдельные монографии. Теория гироскопа рассматривается в курсах теоретической механики, она довольно сложна и выходит за рамки курса общей физики. Но было бы неправильно совсем обойти молчанием столь интересные явления, связанные с вращением тел. В Интернете доступны две старинные книги, чтение которых может доставить удовольствие всем, кто заинтересуется свойствами гироскопов. Одна из них — популярная лекция<sup>1</sup>, автор которой вдохновенно и поэтично воспеваает удивительные свойства гироскопов, причем без единой формулы. Тем не менее основные сведения о поведении этого механизма читатель получает. Вторая книга, «Элементарное рассмотрение теории вращающегося волчка и гироскопического движения»<sup>2</sup>, по жанру — достаточно подробный учебник для тех, кто хочет глубже разобраться в сути явления. Он включает как разбор физики явлений, так и их математическое описание, но без излишних усложнений. В дальнейшем мы будем пользоваться этими двумя книгами.

### Факты о гироскопах

Возможность телу вращаться вокруг всех трех осей технически реализуется при помощи так называемого *карданова подвеса* — особой шарнирной опоры, позволяющей гироскопу поворачиваться в любой плоскости. Устройство прибора показано на рис. 5.12 из кн. [2].

Массивное колесо  $AB$  может свободно вращаться вокруг оси симметрии  $XX'$ . Эта ось закреплена в кольцевой рамке, которая может вращаться вокруг оси  $YY'$ . Наконец, ось  $YY'$  смонтирована на подставке, позволяющей ей вращаться вокруг вертикальной оси  $ZZ'$ . В приборе предусмотрен винт  $Z$ , которым можно зажать вертикальную ось и воспрепятствовать ее вращению.

**Факт 1.** Сильно раскрутим колесо  $AB$  в указанном на рис. 5.12 направлении и подвесим к оси  $XX'$  груз. Казалось бы, рамка должна повернуться вокруг оси  $YY'$ , колесо должно наклониться, а груз — опуститься. Так и произойдет в том случае, если зажать винт  $Z$ . Но если отпустить его, система поведет себе совсем иначе: вместо ожидавшегося наклона колеса гироскоп начинает вращаться вокруг оси  $ZZ'$ . Это вращение называется *прецессией*.

**Факт 2.** Если вместо постоянно подвешенного груза оказать на ось  $XX'$  кратковременное воздействие — стукнуть по ней, то гироскоп не изменит своего состояния, только ось  $XX'$  задрожит, начнет слегка покачиваться туда-сюда вокруг оси  $YY'$ .

**Факт 3.** Если вынуть рамку с вращающимся колесом из креплений  $YY'$ , взять в руку и попытаться резко повернуть вокруг оси  $YY'$ , т. е. риск, что гироскоп вырвется

<sup>1</sup> Дюсон Перри. Вращающийся волчок. Пер. с англ. Одесса: Mathesis, 1906.

<sup>2</sup> Harold Crabtree. An Elementary Treatment of the Theory of Spinning Tops and Gyroscopic Motion. NY: Longmans, Green and Co., 1909 (заимствованы рис. 5.12–5.15).



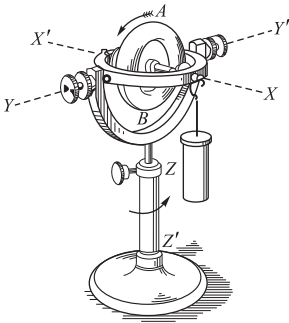


Рис. 5.12. Гироскоп в кардановом подвесе

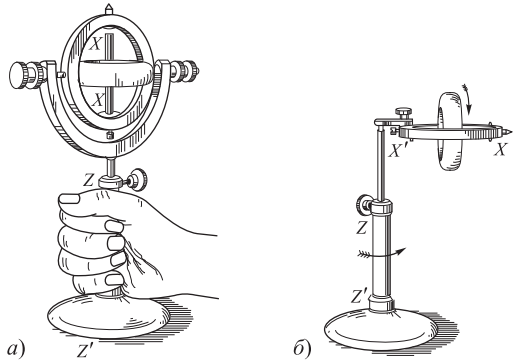


Рис. 5.13. Иллюстрации к перечисленным в тексте фактам 7 (слева) и 8 (справа)

из рук незадачливого экспериментатора, стремясь повернуться вокруг оси  $ZZ'$ . Поступательное же перемещение рамки или ее вращение вокруг оси  $XX'$  никакого особого эффекта не производит.

**Факт 4.** Если поддерживать вращение стоящего на столе гироскопа долгое время, то направление оси  $XX'$  опишет по комнате полный круг за 24 часа.

**Факт 5.** Если зажать винтами ось  $YY'$  так, чтобы плоскость кольцевой рамки была горизонтальной, то ось  $XX'$  установится по меридиану данной местности и будет указывать на север.

**Факт 6.** Если отпустить винты и снова дать оси  $YY'$  возможность свободно вращаться, то ось  $XX'$  установится в плоскости меридиана, причем угол наклона ее к горизонтальной плоскости будет равен широте данной местности. Иными словами, ось  $XX'$  будет указывать на Полярную звезду.

**Факт 7.** Если взять подставку с гироскопом в руку и повальсировать с ней по комнате, то ось гироскопа все время будет указывать на Полярную звезду. Но если зажать винтом ось  $ZZ'$ , то ось  $XX'$  гироскопа сразу же установится вертикально, параллельно оси вращения вальсирующего (см. рис. 5.13, а). При смене экспериментатором направления вращения ось гироскопа немедленно совершит сальто-мортале и снова встанет вертикально, но в противоположном направлении.

**Факт 8.** На рис. 5.13, б гироскоп с горизонтальной осью прецессирует вокруг оси  $ZZ'$  под действием собственного веса. Если ускорить прецессию, приложив к раме гироскопа горизонтальную силу, центр тяжести системы тут же начнет подниматься.

Сказанного достаточно, чтобы продемонстрировать, насколько необычно поведение гироскопа для человека, не столь хорошо знакомого с физикой вращательного движения. Однако, такое «противоестественное» поведение вытекает, как мы сейчас убедимся, из законов механики и используется на практике в множестве технических приложений.

## Элементарная теория гироскопа

Простейший случай — гироскоп с горизонтальной осью вращения (рис. 5.14, а). Диск гироскопа вращается вокруг горизонтальной оси  $OX$  с угловой скоростью  $\omega$ . Если момент инерции колеса относительно оси  $OX$  равен  $I$ , то угловой момент, создаваемый этим вращением, равен  $L = I\omega$  и направлен вдоль оси  $OX$  (на рис. 5.14, б) он изображен отрезком  $OA$ ). На гироскоп действует сила

тяжести  $mg$ , приложенная в центре масс диска (он обычно делается тяжелым, так что массой подвеса можно пренебречь). Если расстояние от вертикальной оси  $OZ$  до центра масса диска гироскопа равно  $l$ , то момент силы равен  $M = mgl$ , причем направлен он от нас ортогонально плоскости рисунка 5.14). Силы реакции опоры  $F$  и  $R$ , действующие в точке подвеса, момента сил относительно оси  $OZ$  не создают. Согласно основному уравнению (5.12) динамики вращательного движения, через бесконечный малый интервал времени  $dt$  угловой момент диска получит приращение  $dL = Mdt$ , ортогональное вектору углового момента  $L$ . Это значит, что угловой момент  $L$  повернется вокруг оси  $OZ$  на угол

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{mgl dt}{I\omega}$$

по часовой стрелке, если смотреть сверху (на рис. 5.14 это приращение изображено отрезком  $AA'$ , а результирующий угловой момент — отрезком  $OA'$ ). Отсюда находим угловую скорость  $\Omega = d\varphi/dt$  вращения гироскопа вокруг оси  $OZ$ :

$$\Omega = \frac{mgl}{I\omega}. \quad (5.94)$$

Такое вращение называется *прецессией*. Некоторые особенности прецессии можно понять уже на этом простом примере:

- Если момент действующих на тело внешних сил равен нулю, то угловой момент сохраняется и прецессия отсутствует.
- При прецессии угловой момент вращающегося тел поворачивается в направлении действующего на него момента сил.
- Чем выше скорость вращения гироскопа  $\omega$ , тем меньше скорость прецессии  $\Omega$ , и наоборот.

**Задача 5.26.** Тяжелый диск массой 20 кг вращается со скоростью 16 радиан в секунду. Под действием вращающего момента силы  $M = 90$  Нм он прецессирует с угловой скоростью  $\Omega = 4$  рад/с. Найти радиус диска.

**Решение.** Уравнение (5.94) позволяет выразить момент инерции диска через угловые скорости вращения  $\omega$  и прецессии  $\Omega$  и вращающий момент  $M$ :

$$I = \frac{M}{\Omega\omega}. \quad (5.95)$$

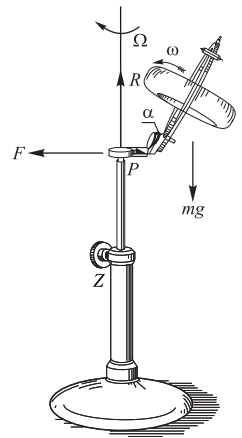
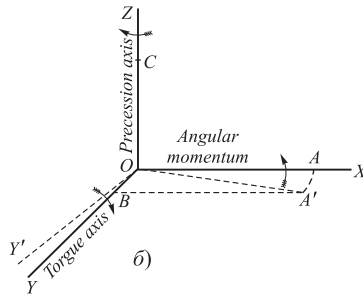
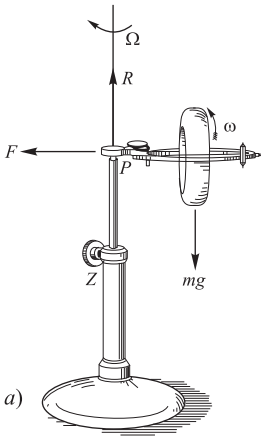
В то же время, выше мы нашли (5.24), что момент инерции диска определяется его массой и радиусом:

$$I = \frac{mR^2}{2}. \quad (5.96)$$

Приравняв выражения (5.95) и (5.96), находим:

$$R = \sqrt{\frac{2M}{m\Omega\omega}} = \sqrt{\frac{2 \times 90}{20 \times 16 \times 4}} = \frac{3}{8} \text{ м} = 37,5 \text{ см.} \quad \blacksquare \quad (5.97)$$

Следующая система, которую мы рассмотрим, — гироскоп, вращающийся вокруг оси симметрии, наклоненной к вертикали под постоянным углом  $\alpha$  (рис. 5.15). Пусть угловая скорость собственного вращения волчка равна  $\omega$ , а угловая скорость прецессии вокруг вертикальной оси —  $\Omega$ . Если  $\omega \gg \Omega$ , то



**Рис. 5.14.** Гироскоп с горизонтальной осью вращения; угловой момент направлен по оси  $OX$ , момент силы — по оси  $OY$ , прецессия происходит вокруг оси  $OZ$

**Рис. 5.15.** Гироскоп, вращающийся с постоянным наклоном  $\alpha$  к вертикали

можно считать, что полный угловой момент гироскопа направлен вдоль его оси симметрии. Тогда проекция полного момента на плоскость, ортогональную оси прецессии  $Oz$ , равна  $L_{\perp} = I\omega \sin \alpha$ . За время  $dt$  эта проекция повернется вокруг оси  $Oz$  на угол  $d\varphi = \Omega dt$ , т. е. приращение углового момента составит  $dL = L_{\perp} d\varphi$ . Согласно основному уравнению вращательного движения, скорость изменения углового момента равна моменту сил  $M$ :

$$M = \frac{dL}{dt} = L_{\perp} \Omega = I\omega \Omega \sin \alpha, \quad (5.98)$$

откуда получаем для скорости прецессии выражение

$$\Omega = \frac{M}{I\omega \sin \alpha}. \quad (5.99)$$

Сила, действующая на гироскоп, равна его весу, а плечо силы равно  $l \sin \alpha$ , где  $l$  — расстояние от шарнира  $P$  до центра масс гироскопа (см. рис. 5.15). Тогда момент силы  $M = mgl \sin \alpha$ . Подставляя это выражение в (5.99), находим

$$\Omega = \frac{mgl}{I\omega}. \quad (5.100)$$

Мы пришли к выводу, что скорость прецессии не зависит от угла наклона гироскопа. Но напомним, что это — результат приближенной теории, полученный при условии, что скорость вращения гироскопа намного больше скорости прецессии. Если этого не предполагать, то теория усложняется, а результат можно выразить в виде связи угла наклона оси и скорости прецессии (см. кн. [2], с. 85-87):

$$\cos \alpha = \frac{I\omega \Omega - mgl}{I_{\perp} \Omega^2}. \quad (5.101)$$

Здесь  $I$  — момент инерции гироскопа относительно оси симметрии, а  $I_{\perp}$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и ортогональной оси симметрии. Можно, наоборот, выразить скорость прецессии как функцию угла наклона оси гироскопа:

$$\Omega = \frac{I\omega \pm \sqrt{I^2\omega^2 - 4I_{\perp}mgl \cos \alpha}}{2I_{\perp} \cos \alpha}. \quad (5.102)$$

Если центр масс гироскопа находится выше точки опоры Р (см. рис. 5.15), то косинус угла наклона положителен и должно выполняться условие

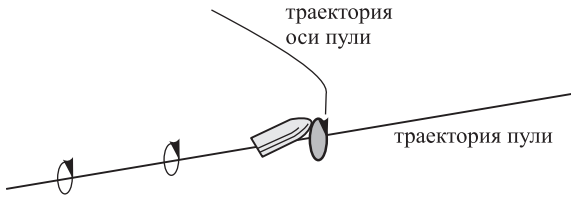
$$I^2\omega^2 - 4I_{\perp}mgl \cos \alpha \geq 0, \quad \text{или} \quad \omega \geq \frac{2\sqrt{I_{\perp}mgl \cos \alpha}}{I}. \quad (5.103)$$

При меньших скоростях вращения гироскопа устойчивая прецессия невозможна. Если центр масс гироскопа находится ниже точки опоры ( $\alpha > 90^\circ$ ), то косинус отрицателен и решение для  $\Omega$  существует при любых  $\omega$ . Заметим также, что вообще говоря для данных значений угла наклона и скорости вращения гироскопа могут существовать две разные угловые скорости прецессии.

## Гироскопический эффект и гироскопические силы

На этих примерах мы познакомились с *гироскопическим эффектом* — «протоестественным» на первый взгляд поворотом оси гироскопа не в направлении действия силы, а перпендикулярно к ней и к оси вращения. На самом деле этот эффект полностью соответствует законам динамики вращательного движения и, в конечном итоге, второму закону Ньютона. Для преодоления ощущения «протоестественности» поведения гироскопов существует общая рекомендация следить не за направлением силы, а за тем, вокруг какой оси она стремится повернуть систему.

Гироскопический эффект используется в нарезном оружии, где пуле во время движения по каналу ствола придается быстрое вращение (рис. 5.16). Сила сопротивления воздуха стремится опрокинуть головку пули вверх и назад, т. е. вращающий момент направлен параллельно земле и ортогонально плоскости траектории в правую от стрелка сторону. Нарезка в большинстве образцов стрелкового оружия делается слева вверх направо, так что угловой момент вращающейся пули направлен по ходу ее движения. Следовательно, сила сопротивления воздуха вследствие гироскопического эффекта отклоняет пулю вправо. Но как только пуля подставит свой левый бок встречному потоку воздуха, сила сопротивления начнет толкать ее дальше направо. Это значит, что вращающий момент направлен вниз. Головка пули начнет опускаться, сила сопротивления воздуха немедленно «подхватит» тенденцию и станет больше давить на верхнюю часть пули. А сила, направленная вниз, создаст момент, направленный влево, куда и станет отклоняться наша пуля. В результате такого «рысканья» ось пули описывает конус вокруг направления движения, не слишком далеко отклоняясь в сторону. Направление прецессии (направо–вниз–налево в нашем примере) совпадает с направлением вращения пули. Таким образом, вращение стабилизирует полет пули. В отсутствие вращения пули беспорядочно бы кувыркалась, что отрицательно сказалось бы на дальности прицельной стрельбы.



**Рис. 5.16.** При полете вращающейся пули она не кувырдается беспорядочно: гироскопический эффект приводит к прецессии ее оси вокруг траектории движения, тем самым стабилизируя полет

Гироскопический эффект можно увидеть даже в движении такой простой системы, как катящийся обруч. Его угловой момент направлен ортогонально плоскости обруча, т. е. параллельно земле и налево, если смотреть по ходу движения. Но при наклоне (а строго вертикального положения в жизни никогда не бывает) пара сила — сила тяжести и реакция поверхности — создают вращающий момент. Если, например, обруч слегка наклонился направо, то вертикально направленные силы стремятся повернуть обруч вокруг оси вдоль направления движения. Туда и направлен вращающий момент этих сил, туда и поворачивает ось обруча — направо, в нашем примере, т. е. в сторону наклона. В результате обруч «прецессирует» (покачивается) вокруг оси вдоль направления движения, и его траектория представляет собой извилистую линию, которая тем ближе к прямой, чем быстрее катится обруч. Джон Перри приводит шуточный пример (см. сноску 1 на с. 127): «Точно так же вы можете заметить, что подвыпивший человек, если он не стоит, прислонившись к стене или фонарному столбу, чувствует, что единственное его спасение от позорного падения заключается в достижении известной скорости движения, и что, таким образом, быстротой своего движения он получает возможность придать больше твердости своей походке». Что ж, в каждой шутке, как известно, есть только доля шутки.

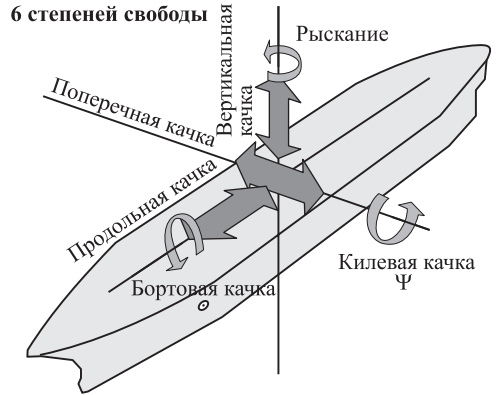
Чтобы повернуть вращающееся тело, нужно приложить момент внешних сил. Иногда он может достигать значительной величины. Представим себе поезд, поворачивающий направо. Это значит, что со стороны рельсов на вращающиеся колеса должен действовать момент силы вдоль направления движения поезда. Иначе говоря, возникает пара сил, приподнимающая левую сторону вагона и прижимающая к рельсам его правую сторону.

**Задача 5.27.** Пусть поезд со скоростью  $v = 72$  км/ч  $= 20$  м/с проходит закругление железной дороги радиусом  $R = 800$  м (отсчитываем его от центра закругления до середины колеи, ширина которой  $h = 1,5$  м.). Радиус вагонного колеса  $r = 0,5$  м, его масса  $m = 600$  кг, колесо можно считать плоским диском. Оценить момент силы  $M$ , действующий на колесную пару.

**Решение.** Для начала поясним, что железнодорожные колеса не вращаются независимо, как в автомобиле, но образуют так называемую колесную пару — два жестко сцепленных колеса. При закруглении пути внешнее и внутреннее колеса проходят дуги разных радиусов:  $R' = R + h/2$  и  $R' = R - h/2$ , соответственно. Момент силы, действующий на колесную пару, равен сумме моментов, действующих на каждое колесо.

Угловая скорость его вращения равна  $\omega = v/r$ . Угловая скорость поезда на закруглении радиусом  $R'$  равна  $\Omega = v/R'$ . Согласно (5.94), для поворота оси вращения колеса с такой угловой скоростью нужен вращающий момент

$$M' = I\omega\Omega = I\frac{v^2}{rR'}, \quad (5.104)$$



**Рис. 5.17.** Виды качки на судне (рисунок из Википедии)

где  $I$  — момент инерции колеса относительно оси его вращения. Складывая моменты сил, действующие на левое и правое колеса, получаем вращающий момент, приложенный к колесной паре:

$$M = I \frac{v^2}{r(R - h/2)} + I \frac{v^2}{r(R + h/2)} = 2I \frac{v^2 R}{r(R^2 - h^2/4)}. \quad (5.105)$$

Момент инерции колеса (диска) равен  $I = mr^2/2$ . Подставляя это выражение в (5.105), получаем расчетную формулу:

$$M = m \frac{v^2 r R}{R^2 - h^2/4}. \quad (5.106)$$

Поскольку  $R \gg h$ , при вычислениях можно пренебречь шириной колеи в знаменателе выражения (5.106):

$$M \approx mv^2 \frac{r}{R} = 600 \times 20^2 \times \frac{0,5}{800} = 150 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (5.107)$$

Если поднимать одно из колес с силой  $F$ , то такой же вращающий момент создается при  $F = M/h = 100 \text{ Н}$ , что составляет 1,7% от веса колеса  $P = mg = 5880 \text{ Н}$ . ■

Сравнительно небольшое значение момента силы определяется малой скоростью вращения гироскопа — вагонного колеса. Но вот обратный пример.

**Задача 5.28.** Ось ротора судовой турбины расположена параллельно оси судна. Масса ротора  $m = 6000 \text{ кг}$ , момент инерции ротора  $I = 1500 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , число оборотов  $n = 3600 \text{ об/мин}$ . Судно испытывает килевую качку (рис. 5.17) с максимальным углом наклона  $\psi_{\max} = 10^\circ = \pi/18 \text{ рад}$  и периодом  $T = 10 \text{ с}$ . Найти максимальную гироскопическую силу, действующую на подшипники турбины, если расстояние между ними  $h = 2 \text{ м}$ .

**Решение.** Угловая скорость вращения турбины  $\omega = 2\pi n = 2\pi \times 3600/60 = 120\pi \text{ рад/с}$ . Согласно условию, изменение угла наклона продольной оси судна к горизонту меняется по закону

$$\psi = \psi_{\max} \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad (5.108)$$

откуда следует закон изменения угловой скорости вращения судна относительно поперечной оси:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{d\psi}{dt} = \Omega_{\max} \cos \frac{2\pi t}{T}, \\ \Omega_{\max} &= \psi_{\max} \frac{2\pi}{T}.\end{aligned}\quad (5.109)$$

Максимальный момент силы, действующий на ротор, находится стандартным образом:

$$M_{\max} = I\omega\Omega_{\max} = 1500 \times 120\pi \times \frac{\pi}{18} \frac{2\pi}{10} = 5000\pi^3 = 1,55 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}.\quad (5.110)$$

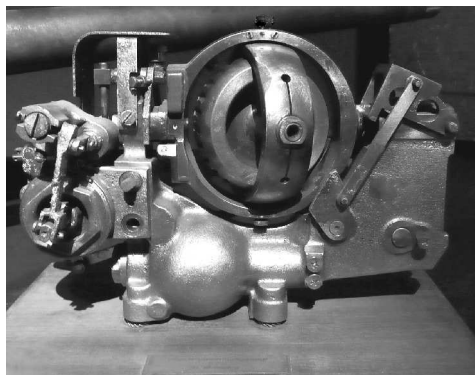
Разделив максимальный момент на расстояние между подшипниками, получаем максимальную гироскопическую силу, действующую на них:

$$F_{\max} = \frac{M_{\max}}{h} = 77,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.\quad (5.111)$$

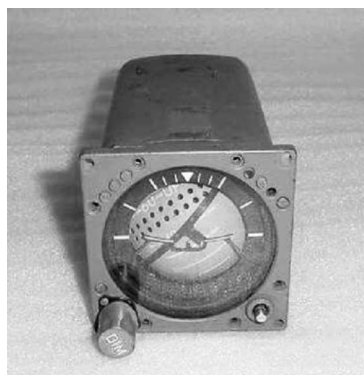
Эта величина на 30% превышает вес турбины  $P = mg = 58,8 \text{ кН}$ ! ■

Но роторы даже стационарных турбин испытывают действие гироскопических сил, потому что суточное вращение Земли стремится повернуть оси их вращения. Из-за малой скорости вращения  $n = 1 \text{ об/сут}$  ( $\Omega = 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}$ ), эти силы примерно на три порядка меньше сил, возникающих при качке корабля. Что не помешало поэтическому преувеличению Дж. Перри в кн. [1] (см. сноску на с. 127): «С чувством смущения и удивления обыкновенно узнают в первый раз о том, что все вращающиеся вокруг своей оси тела, как, например, маховые колеса паровых машин и т. п., в течение всего времени, пока они находятся в движении, постоянно стремятся свернуть свою ось по направлению к Полярной звезде; это непрерывное стремление вращающихся тел остается тщетным, хотя они и рвутся со своих подставок к объекту своих стремлений».

Однако, несмотря на свою медленность, суточное вращение Земли легко разворачивает ось свободного гироскопа в кардановом подвесе, так что она становится параллельной земной оси. Это свойство положено в основу принципа действия таких приборов, как гирокомпас и авиагоризонт. *Гирокомпас*, в отличие от обычной магнитной стрелки, всегда указывает на географический север, т. е. на точку пересечения оси вращения Земли с ее поверхностью, в то время, как магнитная стрелка показывает направление на магнитный полюс. К числу преимуществ гирокомпаса можно отнести то, что он не подвержен воздействию магнитных материалов, из которых построено судно. Идею гирокомпаса предложил еще изобретатель гироскопа Л. Фуко, но работающие образцы были запатентованы лишь в 1903 г. *Авиагоризонт*, изобретенный в 1929 г., показывает крен самолета (его поворот вокруг продольной оси — аналог бортовой качки судна, см. рис. 5.17) и тангаж (поворот самолета вокруг поперечной оси, угол направления скорости к горизонтальной плоскости — аналог килевой качки судна). Замечательное свойство гироскопа сохранять заданное направление в пространстве еще в конце XIX в. было предложено использовать для стабилизации курса торпеды. На рисунке 5.18 показан гироскоп торпеды G7a, разработанной в начале 1920-х гг. и состоявшей на вооружении немецких подводных лодок в межвоенный период



**Рис. 5.18.** Гироскоп немецкой торпеды G7a



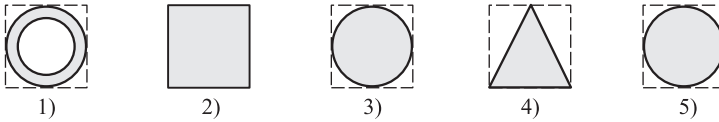
**Рис. 5.19.** Авиагоризонт самолета Боинг-747

(с начала 1930-х гг.) и во время Второй мировой войны. На рисунке 5.19 показан авиагоризонт современного самолета Боинг-747.

## Контрольные вопросы

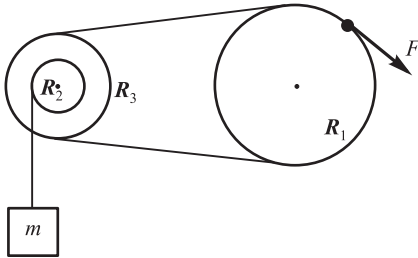
1. Можно ли сконструировать вертолет только с одним винтом?
2. С какими свойствами симметрии пространства и времени связаны законы сохранения импульса, энергии и момента импульса?
3. Луна вращается на орбите вокруг Земли таким образом, что к Земле всегда обращена одна ее сторона. Найти отношение собственного момента импульса Луны (при вращении вокруг ее оси) к ее орбитальному моменту импульса (при вращении вокруг Земли). Нужные числовые данные найдите в предыдущих задачах и вопросах.
4. Твердое тело с моментом инерции  $J$  вращается с угловым ускорением  $\epsilon$  и мгновенной угловой скоростью  $\omega$ . Какая мощность расходуется на такое вращение тела?
5. Можно ли рассматривать тело как материальную точку, расположенную в центре масс тела, при вычислении его момента инерции? Если «да», дайте объяснение, если «нет», приведите контрпример.
6. Оцените по порядку величины свой момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс вашего тела. Предполагается положение по стойке «смирно».
7. На рис. 5.20 показаны сечения различных тел одинаковой массы: 1) трубы, 2) параллелепипеда, 3) цилиндра, 4) треугольной призмы и 5) шара. Все сечения могут быть вписаны в одинаковый квадрат. Какое из тел имеет наибольший момент инерции относительно оси, проходящей через их центр масс ортогонально плоскости рисунка? У какого из тел момент инерции наименьший?
8. Два полых шара из меди и алюминия имеют одинаковый вес и размер. Шары покрашены одинаковой краской, которую нельзя царапать. Как различить шары?





**Рис. 5.20.** Определение моментов инерции тел различной формы (к контрольному вопросу 7)

9. Если привести яйцо во вращение, то сваренное вкрутую вращается гораздо дольше сырого. Почему?
10. Почему резко стартующий мотоцикл «встает на дыбы»?
11. Какую касательную силу  $F$  надо приложить к рукоятке (рис. 5.21), чтобы поднять груз массой  $m$ ? Радиусы показаны на рисунке.



**Рис. 5.21.** Использование рычага для поднятия груза (к вопросу 11)

12. Лестница длиной  $L = 5$  м и массой  $M = 10$  кг прислонена к гладкой стене, так что ее верхний конец находится на высоте  $H = 3,5$  м. Нижний конец упирается в шероховатый пол. Коэффициент трения между лестницей и полом равен  $\mu = 0,25$ . По лестнице начинает медленно подниматься человек массой  $m = 80$  кг. На какую высоту  $h$  удастся подняться человеку, прежде чем лестница начнет скользить по полу?
13. Каким должен быть коэффициент трения между нижним концом лестницы и полом, чтобы человек из предыдущего вопроса мог добраться до самого верха?
14. В уравнении (5.93) масса колес не вошла в конечный ответ для  $F_{\min}$ . Почему?

## Глава 6

# Закон всемирного тяготения

Согласно легенде, однажды в летний день 1665 г. И. Ньютон, созерцая окружающую природу, обратил внимание на падающее вниз яблоко — и его осенило: если между Землей и яблоком существует притяжение, то такая же сила должна существовать и между любыми двумя телами. Да, все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Это взаимодействие называется гравитационным и является, как уже отмечалось в разделе 3.3, одним из фундаментальных взаимодействий в природе.

Мы знаем о нем очень мало, гораздо меньше, чем, например, об электромагнитном взаимодействии. Тем не менее на уровне механики мы можем описать гравитацию, и это — очередное проявление разницы между вопросами «почему» и «как». О том же говорит старинный учебник физики, уже цитировавшийся нами в начале: «Не входя в исследование причин тяжести, заметим мы вообще только то, что ее называют обыкновенно *притягательною силой Земли*. Покуда самой вещи совершенно изъяснить не позволено, то некоторым образом в сем положении оправдаться можно тем, что из различных наблюдений признали бытие такой притягательной в естестве силы».

### 6.1 Законы Кеплера

Возможно, падающее яблоко и наводит на определенные мысли, но за полвека до Ньютона уже были известны количественные соотношения, которые прокладывали более прямой путь к установлению закона всемирного тяготения. Одним из величайших открытий в астрономии стали установленные И. Кеплером эмпирические законы движения планет (первые два — 1609 г., третий — 1619 г.):

1. *Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, причем Солнце находится в одном из фокусов орбиты.*
2. *Отрезок, соединяющий Солнце с планетой, описывает равные площади за равное время.*
3. *Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей эллипсов.*

Коль скоро планеты обращаются вокруг Солнца благодаря силе, с которой светило действует на них, законы Кеплера позволяют определить вид этой силы. Поместим начало координат в центр Солнца. Пусть  $\vec{r}$  — радиус-вектор планеты, а  $\vec{v}$  — ее скорость в данный момент времени. За время  $dt$  перемещение планеты равно  $d\vec{l} = \vec{v}dt$  и направлено под углом  $\alpha$  к радиусу-вектору. Площадь  $dS$  треугольника, образованного векторами  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}dt$  и  $\vec{r} + \vec{v}dt$ , равна  $dS = rvdt \sin \alpha$ . Согласно второму закону Кеплера, величина  $dS/dt = rv \sin \alpha$  остается постоянной. Первый закон Кеплера утверждает, в частности, что орбита планеты лежит в одной плоскости. Это значит, что не зависит от времени вектор  $\vec{r} \times \vec{v}$ , величина которого равна  $dS/dt$ , а направление ортогонально плоскости орбиты. Этот вектор пропорционален моменту импульса планеты  $\vec{r} \times \vec{p}$ . Отсюда следует, что силы, действующие на планету, — центральные: они направлены по линии, соединяющей Солнце с планетой, и зависят лишь от расстояния до Солнца.

Третий закон Кеплера позволяет установить зависимость сил от расстояния. Частный случай эллиптической орбиты — это круговая орбита, в центре которой находится Солнце. Тогда второй закон Кеплера сводится к утверждению о постоянстве угловой скорости  $\omega$  обращения планеты. Напомним, что угловая скорость обратно пропорциональна периоду обращения  $T$ :  $\omega = 2\pi/T$ . Для этого случая третий закон Кеплера утверждает, что отношение квадратов периодов обращения планет равно отношению кубов радиусов их орбит, т. е. что квадраты периодов пропорциональны кубам радиусов орбит:  $T^2 \sim r^3$ . Отсюда следует, что квадраты угловых скоростей обратно пропорциональны кубам радиусов:  $\omega^2 \sim r^{-3}$ . Комбинация  $\omega^2 r$  есть не что иное как нормальное ускорение, которое для равномерного вращения по окружности совпадает с полным ускорением  $F/m$ , где  $m$  — масса планеты. Таким образом, получаем, что  $F = m\omega^2 r \sim mr/r^3 \sim m/r^2$ . Отсюда следует, что Солнце притягивает планету с силой, пропорциональной массе планеты и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $r$  между центрами их масс:

$$F = C_1 \frac{m}{r^2}.$$

Здесь  $C_1$  — коэффициент пропорциональности. В соответствии с третьим законом Ньютона планета притягивает Солнце с такой же (по модулю) силой, для которой можно написать аналогичное выражение:

$$F = C_2 \frac{M}{r^2},$$

где  $M$  — масса Солнца, а  $C_2$  — какой-то другой коэффициент пропорциональности. Из равенства модулей этих сил вытекает соотношение

$$\frac{C_1}{M} = \frac{C_2}{m} = G.$$

Обозначенное символом  $G$  отношение коэффициентов пропорциональности и масс называется *гравитационной постоянной*. Подставляя значения  $C_1 = GM$ ,  $C_2 = Gm$  в выражения для силы гравитации между Солнцем и планетой, найдем

$$F = G \frac{mM}{r^2}.$$

## 6.2 Гравитационные силы

Обобщая полученное соотношение, можно утверждать, что силы гравитации между любыми двумя телами определяются массами взаимодействующих тел и расстояниями между ними. Согласно установленному **закону всемирного тяготения**,

♦ *любые две материальные точки взаимодействуют с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:*

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad \blacklozenge \quad (6.1)$$

где гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ , а  $\vec{r}_{12}$  — радиус-вектор второго тела относительно первого (рис. 6.1). Знаки минус указывают на то, что силы  $\vec{F}_{ij}$  взаимодействия противоположно направлены и являются силами притяжения. Наиболее точно гравитационная постоянная определяется по изменению периода колебаний крутильных весов, вызванному сближением притягивающихся масс. Первые измерения относятся к концу XVIII в, из них классическим является опыт Г. Кавендиша (1798).

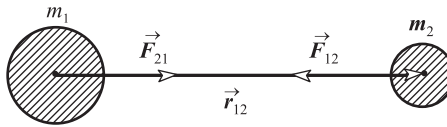


Рис. 6.1. Силы гравитации между двумя телами

Если тела нельзя считать материальными точками, их представляют как совокупность материальных точек (частиц) и, геометрически суммируя силы взаимодействия отдельных частиц, находят результирующую силу тяготения между ними. Можно показать, что для тел идеально сферической формы закон гравитационного взаимодействия будет таким же, как и для материальных точек, если считать, что радиус-вектор  $\vec{r}_{12}$  соединяет центры сфер (см. рис. 6.1).

## 6.3 Характерные астрономические масштабы

Закон всемирного тяготения позволяет установить масштабы расстояний и масс в Солнечной системе.

Радиус Земли можно найти с помощью геометрических измерений на ее поверхности. Первым это сделал Эратосфен (276–194 г. до н. э.), нашедший для радиуса Земли величину  $R_{\oplus} = 6311 \text{ км}$ . Эратосфен ошибся всего на 1%: современное значение  $R_{\oplus} = 6,38 \cdot 10^6 \text{ м}$ .

Как найти массу Земли? Каждое тело массой  $m$  притягивается к ней с силой

$$F = G \frac{m M_{\oplus}}{R^2}, \quad (6.2)$$

где  $M_{\oplus}$  — масса Земли, а  $R$  — расстояние от тела до центра Земли. В то же время, отношение силы к массе — это ускорение свободного падения  $g$  (вращением Земли пренебрегаем):

$$g = G \frac{M_{\oplus}}{R^2}. \quad (6.3)$$

Отсюда следует, что  $g$  не зависит от массы и размеров тела и определяется исключительно параметрами Земли и расстоянием до нее. Вблизи поверхности Земли  $R \approx R_{\oplus}$  и  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ . Находим отсюда массу Земли:

$$M_{\oplus} = \frac{gR_{\oplus}^2}{G} = \frac{9,81 \times (6,38 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ кг}. \quad (6.4)$$

Ключевым в этом расчете стало значение гравитационной постоянной  $G$ , поэтому мы имеем все основания утверждать, что «Кавендиш взвесил Землю» (при всем том, что понятие «веса» не применимо к Земле). Заодно почти даром он получил среднюю плотность Земли

$$\rho_{\oplus} = \frac{M_{\oplus}}{4\pi R_{\oplus}^3/3} = \frac{6,0 \cdot 10^{24} \times 3}{4\pi \times (6,38 \cdot 10^6)^3} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3. \quad (6.5)$$

В планетологии этот параметр позволяет судить о внутреннем составе небесных тел.

Ближайшим к Земле небесным телом является Луна. Определим расстояние  $L_{\zeta}$  до нее. Период обращения Луны вокруг Земли  $T_{\zeta} = 27,32 \text{ сут} = 27,32 \times 86400 = 2,36 \cdot 10^6 \text{ с}$ . Центробежное ускорение Луны

$$a_{\zeta} = \omega_{\zeta}^2 L_{\zeta} = \left( \frac{2\pi}{T_{\zeta}} \right)^2 L_{\zeta}$$

равно ускорению свободного падения на орбите Луны (см. (6.3) при  $R = L_{\zeta}$ ). Приравняв  $g$  и  $a_{\zeta}$ , находим:

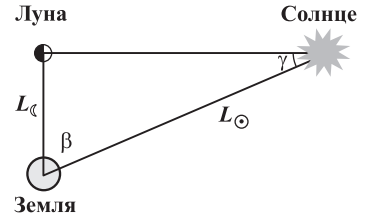
$$\begin{aligned} L_{\zeta} &= \sqrt[3]{\frac{GM_{\oplus}T_{\zeta}^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24} \times (2,36 \cdot 10^6)^2}{4\pi^2}} = \\ &= 3,84 \cdot 10^8 \text{ м} = 384 \text{ тыс. км}. \end{aligned}$$

Скорость Луны на орбите равна  $v_{\zeta} = 2\pi L_{\zeta} / T_{\zeta} = 1,02 \text{ км/с}$ . Легко определить угловой диаметр  $\varphi$  Луны: большой палец, толщина которого примерно равна  $d \approx 1 \text{ см}$ , закрывает при вытянутой руке ( $l \approx 1 \text{ м}$ ) ее диск. Отсюда имеем для углового диаметра  $\varphi \approx \text{tg } \varphi = d/l \approx 10^{-2} \text{ рад} \approx 0,57^\circ$ . Более точные измерения дают угловой диаметр  $\varphi = 31'5'' = 31,083' = 0,518^\circ \approx 0,009 \text{ рад}$ . Отсюда радиус Луны

$$R_{\zeta} = L_{\zeta} \text{tg}(\varphi/2) \approx L_{\zeta} \varphi/2 \approx 3,84 \cdot 10^8 \times 0,009/2 \approx 1,73 \cdot 10^6 \text{ м} = 1730 \text{ км}.$$

Зная расстояние от Земли до Луны, с помощью геометрии можно определить расстояние от Земли до Солнца. Когда Луна находится в первой четверти, направления от нее в сторону Земли и в сторону Солнца составляют прямой угол (рис. 6.2). Если в этот момент на Земле измерить угол  $\beta$  между направлениями на Луну и Солнце, то расстояние до Солнца определится как  $L_{\odot} = L_{\zeta} / \cos \beta$ . Угол  $\beta$  близок к прямому ( $\beta = 89^\circ 51'$ ), поэтому удобнее пользоваться дополнительным углом  $\gamma = \pi/2 - \beta$  (численно  $\gamma = 9' = 0,15^\circ \approx 0,0026 \text{ рад}$ .) Тогда расстояние до Солнца

$$L_{\odot} = \frac{L_{\zeta}}{\sin \gamma} \approx \frac{L_{\zeta}}{\gamma} = \frac{3,84 \cdot 10^8}{2,6 \cdot 10^{-3}} \approx 1,48 \cdot 10^{11} \text{ м} = 148 \text{ млн км}.$$



**Рис. 6.2.** «Геометрический» метод определения расстояния от Земли до Солнца (масштаб не выдержан)

Более точно это расстояние (его называют астрономической единицей и обозначают 1 а. е.) равно  $L_{\odot} = 1,496 \cdot 10^{11}$  м. Зная период обращения Земли вокруг Солнца  $T_{\oplus} = 1 \text{ год} \approx 365,25 \text{ сут} = 3,156 \cdot 10^7 \text{ с}$ , находим скорость Земли на орбите:

$$v_{\oplus} = \frac{2\pi L_{\odot}}{T_{\oplus}} \approx \frac{2\pi \times 1,496 \cdot 10^{11}}{3,156 \cdot 10^7} = 2,98 \cdot 10^4 \text{ м/с} = 29,8 \text{ км/с}.$$

Наконец, мы определим параметры Солнца. Угловой диаметр Солнца примерно таков же, как и у Луны:  $\varphi = 32' = 0,533^\circ = 9,31 \cdot 10^{-3}$  рад. Отсюда находим радиус Солнца:

$$\begin{aligned} R_{\odot} &= L_{\odot} \operatorname{tg}(\varphi/2) \approx \frac{L_{\odot} \varphi}{2} = \frac{1,496 \cdot 10^{11} \times 9,31 \cdot 10^{-3}}{2} = \\ &= 696 \cdot 10^6 \text{ м} = 696 \text{ тыс. км}. \end{aligned}$$

Массу Солнца  $M_{\odot}$  получаем из закона всемирного тяготения: центростремительное ускорение Земли на орбите

$$a_{\oplus} = \frac{v_{\oplus}^2}{L_{\odot}} = \frac{4\pi^2 L_{\odot}}{T_{\oplus}^2}$$

должно быть равно ускорению свободного падения Земли на Солнце

$$g_{\odot} = \frac{GM_{\odot}}{L_{\odot}^2}.$$

Приравнявая  $a_{\oplus}$  и  $g_{\odot}$ , получаем:

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2 L_{\odot}^3}{GT_{\oplus}^2} = \frac{4\pi^2 \times (1,496 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \times (3,156 \cdot 10^7)^2} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ кг}. \quad (6.6)$$

В этом выражении мы видим знакомую по третьему закону Кеплера комбинацию: отношение куба расстояния от планеты до Солнца к квадрату периода обращения. У всех планет это отношение одинаково, так как они вращаются вокруг одной и той же звезды. Орбитальную скорость Земли можно также записать в виде

$$v_{\oplus} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{L_{\odot}}}. \quad (6.7)$$

Это выражение справедливо для любой планеты при соответствующем изменении радиуса орбиты  $L_{\odot}$ .

Приведенные оценки показывают, как много можно узнать о мире, наблюдая его из удобного кресла и понимая законы природы.

## 6.4 Принцип эквивалентности масс

В предыдущем разделе мы негласно предполагали, что инертная масса  $m_i$  во втором законе Ньютона  $m_i \vec{a} = \vec{F}$  и гравитационная масса  $m_g$  в законе всемирного тяготения

$$\vec{F} = -G \frac{M m_g}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

суть одно и то же. Строго говоря, к этому у нас пока не было оснований, кроме чисто филологического — в обоих законах использовано слово «масса». Но представим себе, что величину  $m_g$  в законе всемирного тяготения мы называем не массой, а, скажем, гравитационным зарядом (по аналогии с зарядом электрическим). И сразу становится ясным, что вопрос о соотношении  $m_i$  и  $m_g$  не решается столь просто. Ответ должен быть получен в экспериментах.

Инертная масса  $m_i$  входит во второй закон Ньютона: она характеризует инертные свойства тела. Гравитационная масса появилась в законе всемирного тяготения и отражает способность тел притягивать друг друга. Ускорение тела под действием сил гравитации у поверхности Земли может быть записано как

$$a = \frac{F}{m_i} = \frac{GM_{\oplus} m_g}{R_{\oplus}^2 m_i}. \quad (6.8)$$

Совокупность опытных фактов указывает на то, что ускорение  $a$  одинаково для всех тел:  $a = g$ . Значит, инертная масса и гравитационная масса всех тел строго пропорциональны друг другу, т. е. их отношение  $m_g/m_i$  одно и то же для всех тел. Тогда единицу измерения гравитационной массы и гравитационную постоянную  $G$  можно выбрать так, чтобы  $m_i = m_g$ . Таким образом,  $m_i$  и  $m_g$  тождественны при надлежащем выборе единиц измерения.

Постоянство отношения  $m_g/m_i$  для всех тел является характерной особенностью гравитационного поля. Например, в электрическом поле мы не встречаемся ни с чем подобным: там отношение заряда тела к его массе  $q/m$  может принимать любые значения и меняется от тела к телу. Соответственно, не возникает вопрос об отождествлении электрического заряда и массы.

Следствием постоянства отношения «гравитационного заряда»  $m_g$  и инертной массы  $m_i$  является тот факт, что при одинаковых начальных условиях все тела движутся в данном гравитационном поле одинаково. Их траектории искривляются вблизи больших масс, но для любого тела, движущегося в произвольном гравитационном поле, существует единая траектория, приводящая из точки А в точку Б. Эта траектория называется *геодезической линией*. Например, при передвижении по поверхности Земли (если представлять ее как идеальную сферу) геодезической линией — аналогом кратчайшего расстояния в евклидовой геометрии — является дуга большого круга, т. е. линия пересечения поверхности Земли с плоскостью, проведенной через начальную и конечные точки А и Б и центр Земли. Коль скоро движение тел от их масс не зависит, искривление траекторий в гравитационном поле можно считать свойством самого «кривого» пространства-времени и описывать его в рамках неевклидовой геометрии, что и сделал А. Эйнштейн в своей Общей теории относительности (ОТО), созданной в 1915 г.

В 1916 г. Эйнштейн предсказал существование гравитационных волн — колебаний кривизны пространства-времени. Ровно сто лет спустя, в феврале 2016 г., физики международной коллаборации *LIGO* (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) в США сообщили о долгожданном открытии гравитационных волн, порожденных столкновением двух массивных черных дыр 1,3 млрд лет назад<sup>1</sup>.

## 6.5 Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия

В пространстве, окружающем тела, что-то меняется: мы говорим, что они создают гравитационное поле. Энергетическая характеристика этого поля — потенциальная энергия взаимодействия двух гравитационных масс — определяется по общим правилам. Именно, градиент потенциальной энергии должен давать силу:  $\vec{F} = -\text{grad } U$ . Для центральных сил  $\vec{F} = F(r)\vec{r}/r$ , к которым относится и сила всемирного тяготения, это уравнение, как мы видели в предыдущей главе, сводится к уравнению

$$\frac{dU}{dr} = -F(r) = G\frac{mM}{r^2}. \quad (6.9)$$

Отсюда

$$U = \int dU = \int GmM \frac{dr}{r^2}.$$

Интегрируя, получим

$$U = -G\frac{mM}{r} + \text{const}. \quad (6.10)$$

Постоянную интегрирования  $\text{const}$  принимают равной нулю, чтобы при  $r \rightarrow \infty$  потенциальная энергия гравитационного взаимодействия стремилась к нулю. Это не умаляет общности, так как физически наблюдаемой является разность потенциальных энергий, а не ее значение.

Рассмотрим изменение потенциальной энергии тела  $m$ , перемещенного с поверхности Земли на высоту  $h$ :

$$\begin{aligned} \Delta U &= -G\frac{mM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h} - \left(-G\frac{mM_{\oplus}}{R_{\oplus}}\right) = GmM_{\oplus} \left(\frac{1}{R_{\oplus}} - \frac{1}{R_{\oplus} + h}\right) = \\ &= G\frac{mM_{\oplus}}{R_{\oplus}} \cdot \frac{h}{R_{\oplus} + h} = G\frac{mM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \cdot \frac{h}{1 + h/R_{\oplus}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Учитывая, что  $GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2 = g$ , получаем

$$\Delta U = \frac{mgh}{1 + h/R_{\oplus}}. \quad (6.12)$$

<sup>1</sup>*B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. Physical Review Letters. 116, 061102 (2016).*



Если выбрать потенциальную энергию тела на поверхности Земли равной нулю, то  $\Delta U = U$ . При малых высотах  $h \ll R_{\oplus}$  можно пренебречь отношением  $h/R_{\oplus}$  в знаменателе правой части (6.12), что дает знакомое выражение  $U = mgh$ .

## 6.6 Космические скорости

Применим закон всемирного тяготения для определения начальных скоростей ракет, запускаемых в космическое пространство.

♦ **Первой космической скоростью**  $v_1$  называют такую горизонтально направленную минимальную скорость, при которой тело могло бы двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли. ♦

На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом  $r$ , действует сила притяжения Земли, сообщающая ему нормальное ускорение  $a_n = v_1^2/r$ . По второму закону Ньютона имеем

$$m \frac{v_1^2}{r} = G \frac{mM_{\oplus}}{r^2}. \quad (6.13)$$

Если спутник движется недалеко от Земли, то  $r \approx R_{\oplus}$  и  $GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2 = g$ . Поэтому для  $v_1$  получаем

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = \sqrt{gR_{\oplus}} = \\ &= \sqrt{9,81 \times 6,38 \cdot 10^6} \approx 7,9 \text{ км/с}. \end{aligned}$$

Для того чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения, т. е. удалиться на такое расстояние, где притяжение к Земле перестает играть существенную роль, необходима вторая космическая скорость.

♦ **Второй космической скоростью**  $v_2$  называют наименьшую скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической. ♦

Для того чтобы тело (при отсутствии сопротивления среды) могло преодолеть земное притяжение и уйти в космическое пространство, став спутником Солнца, необходимо, чтобы кинетическая энергия тела была равна (или превосходила) работу, совершаемую против сил земного притяжения:  $A = U_{\text{кон}} - U_{\text{нач}}$ , где

$$U_{\text{нач}} = -G \frac{mM_{\oplus}}{R_{\oplus}}, \quad U_{\text{кон}} = 0. \quad (6.14)$$

Следовательно, из определения кинетической энергии  $A = T_{\text{кин}}$  получаем:

$$G \frac{mM_{\oplus}}{R_{\oplus}} = \frac{mv_2^2}{2}, \quad (6.15)$$

откуда для второй космической скорости имеем

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = \sqrt{2gR_{\oplus}} = \sqrt{2} v_1 = \\ &= 11,2 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 11,2 \text{ км/с}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Для сообщения запускаемому объекту необходимой скорости (первой или второй космической) выгодно использовать линейную скорость вращения Земли, т. е. запускать его как можно ближе к экватору, где эта скорость составляет, как мы видели, 463 м/с (см. решение задачи 2.6). При этом направление запуска должно совпадать с направлением вращения Земли — с запада на восток. Легко подсчитать, что таким способом можно выиграть несколько процентов в энергетических затратах.

Совершенно аналогично рассчитывается движение в гравитационном поле Солнца. Чтобы преодолеть силу притяжения светила, объекту, находящемуся на орбите Земли, надо придать скорость  $v_{кр}$ . Эта скорость также определяется из уравнения, аналогичного (6.15), т. е. из равенства кинетической энергии объекта изменению его потенциальной энергии в поле Солнца при удалении на бесконечно большое расстояние:

$$\frac{mv_{кр}^2}{2} = G \frac{mM_{\odot}}{L_{\odot}},$$

где  $L_{\odot}$ , напомним, это радиус земной орбиты, а  $M_{\odot}$  — масса Солнца. Отсюда следует формула, аналогичная (6.16), где надо заменить массу Земли на массу Солнца и радиус Земли на радиус земной орбиты:

$$\begin{aligned} v_{кр} &= \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{L_{\odot}}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 1,99 \cdot 10^{30}}{1,496 \cdot 10^{11}}} = \\ &= 42,1 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 42,1 \text{ км/с}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Подчеркнем, что  $v_{кр}$  — это минимальная скорость, которую надо придать неподвижному телу, находящемуся на земной орбите, чтобы оно преодолело притяжение Солнца. Отметим также связь  $v_{кр} = \sqrt{2}v_{\oplus}$  с орбитальной скоростью Земли (6.7). Эта связь такова же, как и между первой и второй космическими скоростями  $v_1$  и  $v_2$ .

На практике мы запускаем ракету с Земли, так что она заведомо участвует в орбитальном движении вокруг Солнца. Земля движется вокруг Солнца с линейной скоростью  $v_{\oplus} = 29,8$  км/с (см. выше). Ракету целесообразно запускать в направлении движения Земли вокруг Солнца.

◆ *Скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно навсегда покинуло пределы Солнечной системы, называется третьей космической скоростью  $v_3$ .* ◆

Скорость  $v_3$  зависит от того, в каком направлении космический корабль выходит из зоны действия земного притяжения. Казалось бы, достаточно сообщить ракете относительно Земли скорость

$$v_{от} = v_{кр} - v_{\oplus} = 42,1 - 29,8 = 12,3 \text{ км/с} \quad (6.18)$$

в направлении движения Земли вокруг Солнца, и она покинет пределы Солнечной системы. Но это было бы правильно, если бы Земля не имела собственного поля тяготения. Такую скорость тело должно иметь, уже удалившись из сферы земного притяжения. Поэтому подсчет третьей космической скорости очень

похож на вычисление второй космической скорости, но с дополнительным условием — тело на большом расстоянии от Земли должно все еще иметь скорость  $v_{от}$ :

$$\frac{mv_3^2}{2} - G \frac{mM_{\oplus}}{R_{\oplus}} = \frac{mv_{от}^2}{2} \quad (6.19)$$

(при подсчете  $v_2$  в правой части этого соотношения должен стоять ноль). В этом уравнении мы можем выразить потенциальную энергию тела на поверхности Земли (второе слагаемое в левой части (6.19)) через вторую космическую скорость  $v_2$  в соответствии с (6.16):

$$\frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_{от}^2}{2}. \quad (6.20)$$

Отсюда находим:

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_{от}^2} = \sqrt{11,2^2 + 12,3^2} = 16,6 \text{ км/с}. \quad (6.21)$$

### «Темные звезды» Джона Мичелла

Если приравнять вторую космическую скорость к скорости света, можно получить радиус небесного тела, с поверхности которого не уйдет никакой сигнал:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R_g}} = c, \text{ откуда } R_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (6.22)$$

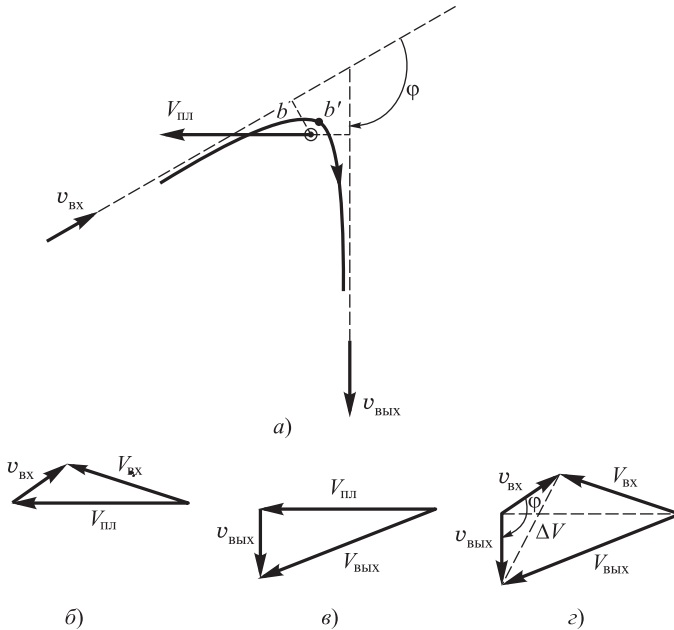
Величина  $R_g$  называется *гравитационным радиусом* объекта. Если, например, подставить сюда массу Солнца  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  кг, то для гравитационного радиуса нашего светила мы получим значение

$$R_{g\odot} = \frac{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 2 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 2,96 \cdot 10^3 \text{ м} = 2,96 \text{ км}. \quad (6.23)$$

Впервые мысль о невидимых «темных звездах» (*dark stars*) высказал в своей статье в 1784 г. английский священник, философ, естествоиспытатель и геолог Джон Мичелл, считавший вслед за Ньютоном, что свет состоит из мельчайших частичек (корпускул). Приведенный расчет неверен по сути, потому что нельзя применять нерелятивистское выражение для кинетической энергии к частицам света. Самое удивительное, что он дал правильный результат. Точно такое же выражение получил в 1915 г. Карл Шварцшильд, нашедший первое решение уравнений Общей теории относительности (теории гравитации Эйнштейна). Сейчас такие компактные и чрезвычайно плотные объекты называются «черными дырами», а гравитационный радиус часто называют «радиусом Шварцшильда».

## 6.7 Гравитационный маневр

Не раз и не два в газетных и журнальных статьях рассказывалось об очередном полете в далекий космос с использованием так называемого «гравитационного маневра», при котором траектория космического аппарата (КА) прошла вблизи какой-то планеты, которая своим притяжением ускорила аппарат и «выстрелила» им как из рогатки.



**Рис. 6.3.** Пролет космического аппарата вблизи планеты

В результате этого аппарат приобрел большую скорость без включения двигателя и затрат топлива.

Однако читатели, знающие школьную физику, могли бы удивиться такому описанию. В самом деле, пусть КА прилетает к планете издалека со скоростью  $v_{вх}$ . На дальних подступах к планете, когда еще мало влияние ее гравитационного поля, траектория аппарата представляет собой прямую линию (рис. 6.3, а), проходящую на некотором расстоянии  $b$  от планеты (его называют «прицельным расстоянием»). По мере приближения КА к планете силы гравитации становятся сильнее, они искривляют траекторию КА, а его скорость возрастает. В какой-то момент времени расстояние от КА до планеты становится минимальным (ее положение показано на рисунке 6.3, а черной точкой), а скорость — максимальной ( $v_{max}$ ), после чего КА начинает удаляться от планеты по другой траектории и с уменьшающейся скоростью. На большом расстоянии его скорость становится равной  $v_{вых}$ , а траектория стремится к прямой с прицельным расстоянием  $b'$ .

**Задача 6.29.** Пусть к Земле со скоростью  $v_{вх} = 1$  км/с приближается астероид, причем прицельное расстояние равно  $b = 100$  тыс км. На каком минимальном расстоянии  $r_{min}$  от Земли пролетит астероид и какой будет его максимальная скорость  $v_{max}$ ? Влияние других планет и Луны не учитывать.

**Решение.** В точке наибольшего сближения с Землей скорость астероида ортогональна радиусу-вектору, соединяющему его с Землей. Используем закон сохранения момента импульса, приравняв его значения в удаленной точке траектории и в момент наибольшего сближения:

$$(mv_{вх})b = (mv_{max})r_{min}. \quad (6.24)$$

Теперь применим закон сохранения энергии, приняв во внимание, что на большом удалении потенциальная энергия астероида в поле тяготения Земли равна нулю:

$$\frac{mv_{\text{вх}}^2}{2} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} - K \frac{m}{r_{\text{min}}}. \quad (6.25)$$

Здесь  $K$  — так называемый *гравитационный параметр* планеты, равный произведению ньютоновской гравитационной постоянной и массы планеты. Для Земли он равен

$$K = GM_{\oplus} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24} = 4,0 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}. \quad (6.26)$$

Совместное решение уравнений (6.24) и (6.25) дает

$$\begin{aligned} v_{\text{max}} &= \frac{K}{v_{\text{вх}} b} + \sqrt{\frac{K^2}{v_{\text{вх}}^2 b^2} + v_{\text{вх}}^2} = v_{\text{вх}} \left( \eta + \sqrt{\eta^2 + 1} \right); \\ r_{\text{min}} &= b \frac{v_{\text{вх}}}{v_{\text{max}}} = \frac{b}{\eta + \sqrt{\eta^2 + 1}}; \\ \eta &= \frac{K}{v_{\text{вх}}^2 b}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Подставляем численные данные:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{4,0 \cdot 10^{14}}{10^8 \times (10^3)^2} = 4,0; \\ v_{\text{max}} &= 8,1 v_{\text{вх}} = 8,1 \text{ км/с}; \\ r_{\text{min}} &= 0,12 b = 12 \text{ тыс. км}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

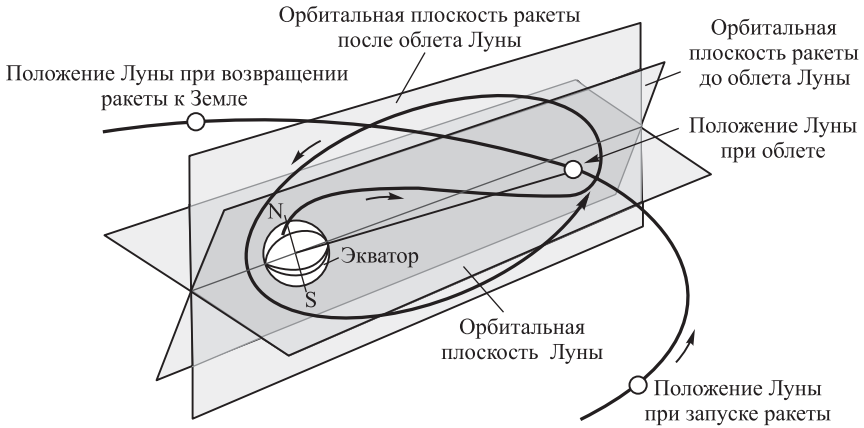
Такое сближение астероида с нашей планетой уже может представлять опасность. ■

Но что произойдет после облета астероидом нашей планеты? Если столкновения не случилось, астероид улетит в космическое пространство, изменив направление движения. Поскольку на больших расстояниях его потенциальная энергия в поле тяжести планеты равна нулю, то полная энергия равна кинетической. Применяя законы сохранения энергии и момента количества движения для двух уходящих в бесконечность ветвей траектории

$$\begin{aligned} \frac{mv_{\text{вх}}^2}{2} &= \frac{mv_{\text{вых}}^2}{2}, \\ (mv_{\text{вх}})b &= (mv_{\text{вых}})b', \end{aligned} \quad (6.29)$$

закключаем, что при удалении астероида от планеты не изменились ни его скорость ( $v_{\text{вх}} = v_{\text{вых}}$ ), ни прицельное расстояние ( $b = b'$ ). Поскольку момент количества движения — величина векторная, не должно меняться также его направление, т. е. астероид все время движется в одной плоскости. Но о какой же «планетной рогатке» тогда толкуют журналисты, о каком увеличении скорости космических аппаратов при облете планеты они рассказывают?

Все дело в том, что мы проводили свои расчеты в геоцентрической системе, где планета (Земля в нашем примере) покоилась. Если же перейти в гелиоцентрическую систему, связанную с Солнцем, то следует учесть движение планеты со скоростью  $\vec{V}_{\text{пл}}$ . Тогда входная и выходная скорости космического аппарата



**Рис. 6.4.** Схема полета космического аппарата «Луна 3»

задаются векторными суммами  $\vec{V}_{\text{вх}} = \vec{v}_{\text{вх}} + \vec{V}_{\text{пл}}$  (рис. 6.3,б) и  $\vec{V}_{\text{вых}} = \vec{v}_{\text{вых}} + \vec{V}_{\text{пл}}$  (рис. 6.3,в). Изменение скорости КА равно (рис. 6.3,г)

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_{\text{вых}} - \vec{V}_{\text{вх}} = \vec{v}_{\text{вых}} - \vec{v}_{\text{вх}}. \quad (6.30)$$

Его численное значение зависит от угла  $\varphi$  отклонения КА гравитационным полем планеты, а тот, в свою очередь, зависит от входной скорости аппарата и прицельного расстояния:

$$|\Delta V| = \sqrt{(\vec{v}_{\text{вых}} - \vec{v}_{\text{вх}})^2} = v_{\text{вх}} \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} = 2v_{\text{вх}} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (6.31)$$

В зависимости от угла  $\varphi$  приращение скорости может достигать значительной величины. Дополнительную кинетическую энергию КА получает от планеты, чья энергия при этом слегка уменьшается, но из-за огромного различия масс КА и планеты изменения скорости планеты незначительны. Идея ускорения космических аппаратов была предложена 25-летним американским студентом-математиком Майклом Миновичем в 1961 г. и впервые применена в 1973 г. при облете Юпитера американским космическим зондом «Пионер 10». В результате гравитационного маневра скорость аппарата была увеличена с 14,4 км/с до 36,7 км/с. С тех пор схема гравитационного ускорения неоднократно реализовывалась на практике, например при полете американских аппаратов «Маринер 10» (к Венере и Меркурию в 1973–74 гг.) и «Вояджер 2» (к планетам-гигантам — Юпитеру, Сатурну, Урану и Нептуну в 1977–89 гг.). По тому же принципу можно и затормозить космический аппарат, передав часть его кинетической энергии планете.

Помимо ускорения или торможения космических кораблей, можно без затрат топлива повернуть плоскость орбиты космического аппарата. Первый гравитационный маневр такого рода был выполнен в 1959 г. советским КА «Луна 3», облетевшим Луну и сфотографировавшим ее обратную сторону (рис. 6.4).

Согласно (6.31), максимальное приращение скорости получается при  $\varphi = \pi$ , т. е. при «отражении» КА в обратную сторону. Это соответствует нулевому

Таблица 6.1. Максимально возможные приращения скорости, км/с

Планета	Меркурий	Венера	Земля	Луна	Марс
Модуль скорости	3,005	7,328	7,910	1,680	3,555
Планета	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
Модуль скорости	42,73	25,62	15,18	16,73	1,09

прицельному расстоянию, при котором аппарат разобьется о поверхность планеты. Реально прицельное расстояние не может быть сделано меньше радиуса планеты. Формулы для максимального угла отклонения и соответствующего ему максимального приращения скорости имеют вид<sup>2</sup>:

$$\sin \frac{\varphi_{\max}}{2} = \frac{1}{1 + (v_{\text{вх}}/v_1)^2},$$

$$\Delta V_{\max} = \frac{2v_{\text{вх}}}{1 + (v_{\text{вх}}/v_1)^2}. \quad (6.32)$$

Дифференцируя  $\Delta V_{\max}$  по  $v_{\text{вх}}$ , легко убедиться, что максимальное значение приращения равно первой космической скорости  $v_1$  для данной планеты и достигается оно при  $v_{\text{вх}} = v_1$ . Угол отклонения траектории равен при этом  $\varphi_{\max} = 60^\circ$ . Максимально возможные приращения скорости при облете космическими аппаратами разных планет приведены в табл. 6.1.

## Контрольные вопросы

1. На какой высоте в экваториальной плоскости Земли надо подвесить спутник, чтобы он постоянно находился над одной и той же точкой земной поверхности?
2. В романе Ж.Верна герои летят на Луну в огромном пушечном снаряде. В определенной точке пути, где притяжение Луны уравновесило притяжение Земли, они, к общему изумлению, испытали состояние невесомости. В чем ошибка писателя-фантаста?
3. Солнце притягивает Луну примерно в два раза сильнее, чем ее притягивает Земля (проверьте:  $M_{\odot} = 7,35 \cdot 10^{22}$  кг). Почему сила притяжения Солнца не «отрывает» Луну от Земли, и она остается спутником нашей планеты?
4. В какой точке между Землей и Солнцем находится центр масс этих двух небесных тел?
5. Поместим на линии между Землей и Лунной материальное тело. В какой точке силы притяжения этого тела к Земле и Луне уравновесят друг друга?
6. Учтывая суточное вращение Земли, найти скорость, необходимую для запуска спутника: а) вдоль экватора на восток; б) вдоль экватора на запад; в) вдоль меридиана.
7. В результате гравитационного маневра космический корабль увеличил свою скорость. Почувствует ли ускорение его экипаж?

<sup>2</sup>В. И. Левантовский. Механика космического полета в элементарном изложении, 3-е изд. М.: Наука, 1980. С. 327. (Интересующиеся космическими полетами найдут в этой книге много полезных сведений.)

## Глава 7

# Неинерциальные системы отсчета

Как уже отмечалось, законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. ♦ *Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета с ускорением, называются неинерциальными.* ♦ В неинерциальных системах отсчета несправедлив первый закон Ньютона. Каждый знает, что при рывке автобуса с места пассажиров толкает в обратную сторону. Автобус — неинерциальная система, и в ней никаких видимых воздействий на пассажиров со стороны других тел не оказывалось, но они, тем не менее, не сохранили состояние покоя.

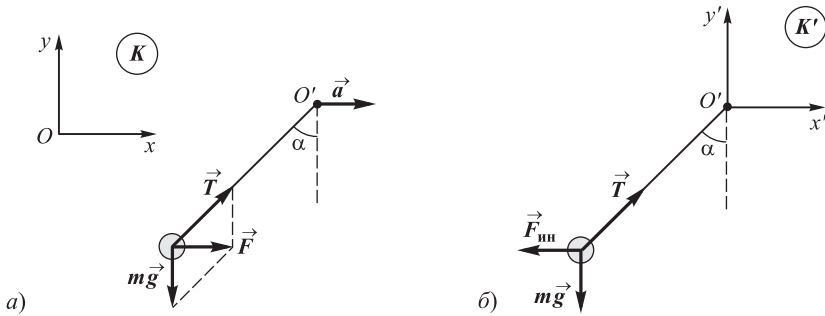
В принципе использование неинерциальных систем отсчета ничем не запрещено. Мы сами живем в такой системе — на Земле, вращающейся вокруг собственной оси и движущейся вокруг Солнца. В такой системе отсчета законы динамики выглядят значительно сложнее. В сущности, спор между системами мира по Птолемею и Копернику касался вопроса, какую из систем отсчета использовать: связанную с Землей или с Солнцем. Последняя, как известно, оказалась гораздо удобнее. Система отсчета, связанная с Землей, неинерциальна в гораздо большей степени, в ней движения планет выглядели сложными и запутанными. Но... никто не запрещает пользоваться и системой, связанной с Землей. Надо только соответствующим образом подправить законы динамики.

### 7.1 Силы инерции

Возьмем уединенное тело, не подверженное воздействию других тел. Если следить за ним из неинерциальной системы отсчета, то, подобно пассажирам автобуса, оно не будет оставаться в покое или двигаться прямолинейно и равномерно. А раз его скорость меняется, то отлично от нуля ускорение тела. Значит, умножив ускорение на массу, мы можем по второму закону Ньютона найти действующую на тело силу. Такого рода силы не совсем обычны в том смысле, что мы не можем указать телá, со стороны которых они действуют. В остальном они ничем не отличаются от прочих сил, с которыми мы уже знакомы.

♦ *Силы, появляющиеся в неинерциальных системах отсчета, называются силами инерции.* ♦





**Рис. 7.1.** Поведение шарика на нити, точка подвеса которого движется с ускорением: с точки зрения наблюдателей в инерциальной (а) и неинерциальной (б) системах

Иногда говорят о фиктивности таких сил, понимая под этим, что в инерциальной системе отсчета их не было бы. Этот аргумент представляется не совсем убедительным. Что за беда, если в одной системе отсчета тело имеет ускорение (на него действует сила), в другой это ускорение равно нулю (нет сил)? При переходе из одной системы отсчета к другой меняется скорость тела, его энергия. Познакомившись с теорией относительности, мы узнаем, что меняются длины и временные интервалы. Поэтому естественно и на силы взглянуть с этой же точки зрения. Итак, силы инерции вполне реальны, их можно измерить, но наблюдаются они только в неинерциальных системах отсчета. Эти силы имеют разные свойства в зависимости от закона движения неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной.

## 7.2 Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета

Рассмотрим шарик, подвешенный на нити, точка подвеса которого  $O'$  движется с ускорением  $\vec{a}$  относительно некоторой инерциальной системы отсчета  $K$ . Нить подвеса отклоняется от вертикали на некоторый угол  $\alpha$ . Угол этот таков, чтобы равнодействующая  $\vec{F}$  силы натяжения нити  $\vec{T}$  и силы тяжести  $m\vec{g}$  привела к движению шарика с ускорением  $\vec{a}$ :

$$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}, \quad (7.1)$$

откуда  $\operatorname{tg} \alpha = a/g$ . Так выглядит описание явления с точки зрения наблюдателя в инерциальной системе отсчета  $K$  (рис. 7.1, а).

Свяжем теперь систему отсчета  $K'$  с точкой подвеса  $O'$ . Эта система будет неинерциальной, так как она движется с ускорением  $\vec{a}$  относительно инерциальной системы  $K$ . Мы пользуемся нерелятивистской механикой, так что угол отклонения нити, равно как и силы  $\vec{T}$ ,  $m\vec{g}$  для обоих наблюдателей одинаковы. Но для наблюдателя  $K'$  шарик находится в покое (рис. 7.1, б). В то же время, наблюдатель  $K'$  видит, что результирующая сил  $\vec{T}$  и  $m\vec{g}$  не равна нулю. Поэтому наблюдатель  $K'$  приходит к выводу, что в его системе отсчета действует какая-то сила — сила инерции  $\vec{F}_{\text{ин}}$ , которой не было в инерциальной системе отсчета  $K$ .

Выражение для силы инерции получаем из условия равновесия шарика в системе  $K'$ , т. е. из равенства нулю трех сил: в равновесии:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0.$$

Отсюда  $\vec{F}_{\text{ин}} = -(\vec{T} + m\vec{g})$ , и из (7.1) следует выражение для **силы инерции** при поступательном движении неинерциальной системы с ускорением  $\vec{a}$ :

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}. \quad (7.2)$$

Этот же результат верен в общем случае для произвольного движения материальной точки в движущейся поступательно неинерциальной системе отсчета  $K'$ . Пусть скорость ее движения относительно инерциальной системы отсчета  $K$  описывается функцией  $\vec{V}(t)$ , а оси обеих систем остаются параллельными. Пусть скорость движения материальной точки в системе  $K$  меняется по закону  $\vec{v}(t)$ . Значит в инерциальной системе  $K$ , согласно второму закону Ньютона, на точку действует сила  $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}(t)$ . Скорость этой же точки для наблюдателя в системе  $K'$  равна  $\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}(t)$ . Значит в неинерциальной системе отсчета  $K'$  на точку действует сила  $\vec{F}' = m\dot{\vec{v}}'(t) = m\dot{\vec{v}}(t) - m\dot{\vec{V}}(t) = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}$ . Таким образом, и в этом случае сила инерции определяется формулой

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\dot{\vec{V}}(t) = -m\vec{a}(t),$$

где  $\vec{a}(t)$  — ускорение поступательного движения неинерциальной системы относительно инерциальной.

Заметим, что, благодаря равенству гравитационной и инертной масс, обсуждавшемуся в разд. 6.4, наблюдатель в системе  $K'$  может утверждать, что в его системе имеется однородное гравитационное поле, заставляющее тела «падать» с ускорением  $-\dot{\vec{V}}(t)$ . А. Эйнштейн сформулировал так называемый **принцип эквивалентности** неинерциальных систем и гравитационных полей и построил на этой основе общую теорию относительности (ОТО), или теорию гравитации.

### 7.3 Центробежная сила инерции

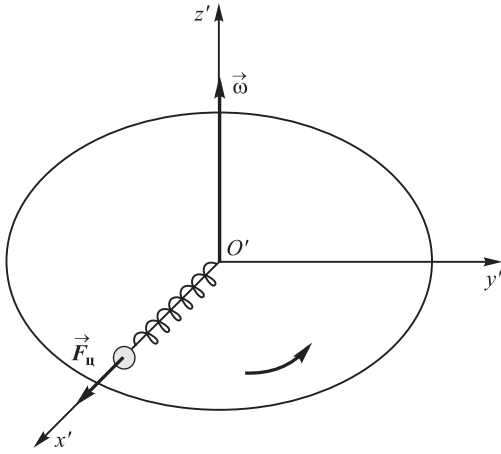
Представим себе диск, равномерно вращающийся с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Вместе с диском вращается надетый на спицу шарик, соединенный с центром диска пружиной. Шарик покоится относительно диска и занимает на спице такое положение, при котором сила натяжения пружины  $\vec{F}_{\text{пр}}$  оказывается равной произведению массы шарика  $m$  на нормальное (центростремительное) ускорение  $\vec{a}_n = -\omega^2\vec{r}$ :

$$\vec{F}_{\text{пр}} = m\vec{a}_n = -m\omega^2\vec{r}, \quad (7.3)$$

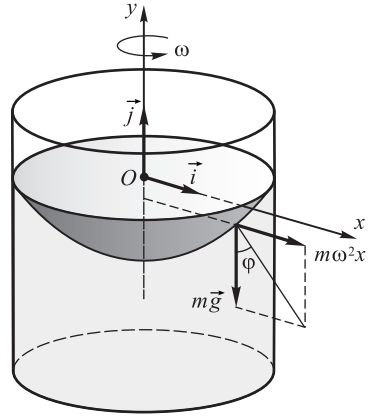
где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный к шарiku из центра диска (рис. 7.2).

Но так рассуждает наблюдатель, смотрящий на вращение диска из инерциальной системы отсчета. Свяжем с диском вращающуюся неинерциальную систему отсчета  $K'$ , в которой диск вместе с шариком покоится. Условие равновесия шарика в этой системе имеет вид:

$$\vec{F}_{\text{пр}} + \vec{F}_{\text{ц}} = 0. \quad (7.4)$$



**Рис. 7.2.** Центробежная сила инерции в системе отсчета, связанной с вращающимся диском



**Рис. 7.3.** Форма поверхности вращающейся жидкости (к задаче 7.30)

Наблюдатель во вращающейся системе отсчета объясняет равновесие шарика наличием силы инерции  $\vec{F}_ц = -\vec{F}_пр = m\omega^2\vec{r}'$ , направленной от центра диска  $O'$  по радиус-вектору  $\vec{r}'$ . Силу инерции, действующую на материальную точку в равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  системе отсчета называют *центробежной силой инерции*:

$$\vec{F}_ц = m\omega^2\vec{R}, \quad (7.5)$$

где  $\vec{R}$  — вектор, проведенный к материальной точке от оси вращения ортогонально последней. Мы ввели его, чтобы отличить от радиус-вектора  $\vec{r}$  в том случае, когда начало координат лежит на оси вращения, но не в плоскости вращения материальной точки. Можно показать, что (7.5) представляется в виде

$$\vec{F}_ц = -m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = m\omega^2\vec{r} - m\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}). \quad (7.6)$$

**Задача 7.30.** Сосуд с жидкостью вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси. Найти форму поверхности жидкости.

**Решение.** Задачу решаем в системе отсчета, вращающейся вместе с жидкостью. В этой системе жидкость неподвижна, но кроме силы тяжести на нее действует центробежная сила инерции. Поверхность жидкости симметрична относительно оси вращения. Рассмотрим сечение этой поверхности какой-нибудь вертикальной плоскостью, содержащей ось вращения, которую мы примем за ось  $Oy$  (рис. 7.3).

Возьмем на поверхности элемент жидкости массой  $m$ , расположенный в точке с координатой  $x$ . На него действуют 1) сила тяжести  $-\vec{j}mg$  и 2) центробежная сила инерции  $\vec{i}m\omega^2x$  (здесь координата  $x$  есть расстояние от оси вращения). Результирующая этих сил наклонена к вертикали под углом  $\varphi$  таким, что  $\text{tg } \varphi = m\omega^2x/mg = x(\omega^2/g)$ . Поверхность жидкости, описываемая функцией  $y(x)$ , всегда располагается ортогонально линии действия внешних сил. Как известно, тангенс того же угла можно найти как отношение приращений ( $\text{tg } \varphi = dy/dx$ ), т. е. как производную. Получаем уравнение  $y' = x(\omega^2/g)$ , которое легко интегрируется:  $y(x) = \omega^2x^2/2g + y(0)$ . Таким образом,

поверхность вращающейся жидкости принимает форму параболоида вращения. При  $\omega = 0$  имеем  $y(x) = y(0)$ , т. е. плоскую горизонтальную поверхность. ■

## 7.4 Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной силы инерции, появляется еще одна сила, называемая *силой Кориолиса* или кориолисовой силой инерции.

Пусть шарик массой  $m$  движется без трения вдоль радиуса диска (рис. 7.4) с постоянной скоростью  $v$ , направленной в некую точку  $A$  на краю диска. Если диск не вращается, то шарик движется по радиусу и попадает в точку  $A$ . Если же диск привести во вращение с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , то к моменту достижения шариком края диска на месте точки  $A$  окажется другая точка  $B$ . Если шарик оставляет след, то он прочертит свою траекторию *относительно диска* — кривую линию  $OB$ . При этом на шарик не действуют никакие видимые силы и относительно инерциальной системы он по-прежнему движется с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Скорость же шарика относительно диска  $\vec{v}'$  изменяла свое направление. Значит, в системе отсчета, связанной с вращающимся диском, на шарик действовала сила инерции, не параллельная скорости  $\vec{v}'$ . Стало быть, она не была направлена по радиусу, откуда следует, что эта сила отлична от рассмотренной выше центробежной силы инерции. Ее и называют силой Кориолиса.

Найдем выражение для силы Кориолиса в частном случае (рис. 7.5), когда частица массой  $m$  движется относительно вращающейся системы отсчета  $K'$  равномерно по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения  $\vec{\omega}$ , с центром на оси вращения. Скорость частицы относительно вращающейся системы  $K'$  обозначим через  $v'$ . В неподвижной (инерциальной) системе отсчета  $K$  частица также движется по окружности, но ее линейная скорость равна

$$v = v' + \omega R, \quad (7.7)$$

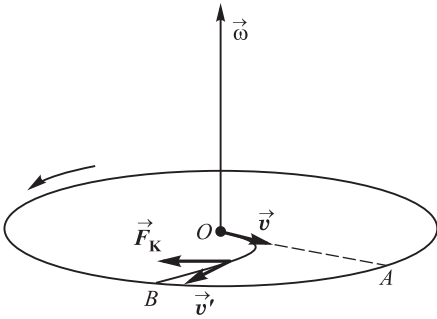
где  $\omega$  — угловая скорость вращающейся системы,  $R$  — радиус окружности.

Для того чтобы частица двигалась относительно неподвижной системы отсчета  $K$  по окружности со скоростью  $v = v' + \omega R$ , на нее должна действовать направленная к центру окружности сила  $\vec{F}$  (например, натяжение нити), причем величина этой силы равна

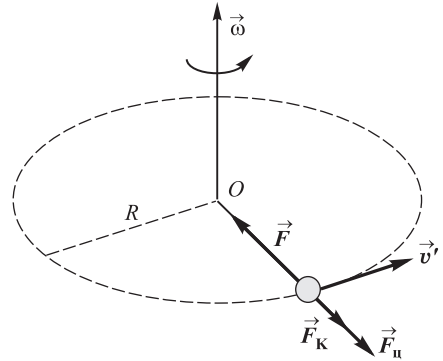
$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(v' + \omega R)^2}{R} = \frac{mv'^2}{R} + 2mv'\omega + m\omega^2 R. \quad (7.8)$$

Относительно вращающейся системы отсчета  $K'$  в этом случае частица движется с ускорением  $v'^2/R$ . Из (7.8) получаем:

$$\frac{mv'^2}{R} = F - 2mv'\omega - m\omega^2 R. \quad (7.9)$$



**Рис. 7.4.** Отклонение шарика, движущегося во вращающейся системе отсчета, наблюдатель приписывает действию силы Кориолиса



**Рис. 7.5.** Вращение шарика относительно вращающейся системы отсчета (к выводу выражения для силы Кориолиса)

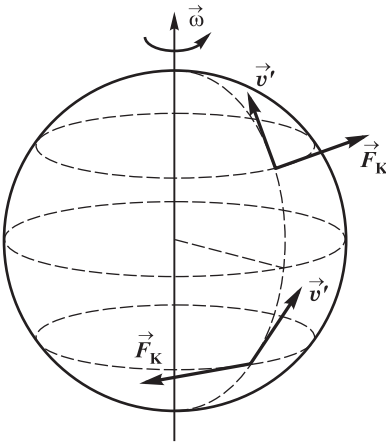
Слева стоит произведение массы на ускорение частицы во вращающейся системе отсчета. Значит, справа должны стоять силы, на нее действующие. Первое слагаемое понятно: это сила натяжения нити, которая одинакова как для инерциальной, так и для неинерциальной систем. С третьим слагаемым мы тоже уже имели дело: это направленная по радиусу (от центра) центробежная сила инерции. Второе слагаемое и есть сила Кориолиса. В данном случае она также направлена от центра, но зависит от скорости частицы. Модуль кориолисовой силы в этом примере равен  $2mv'\omega$ . Ее направление совпадает с движением штопора, ручка которого поворачивается от вектора скорости  $\vec{v}'$  к вектору угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Можно показать, что в общем случае *сила Кориолиса* определяется как

$$\vec{F}_K = 2m[\vec{v}' \times \vec{\omega}]. \quad (7.10)$$

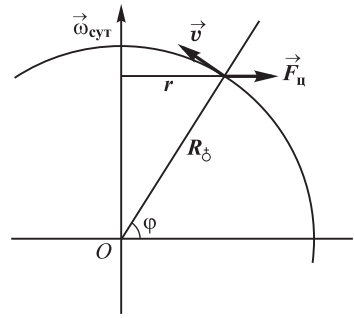
Сила Кориолиса ортогональна вектору скорости. В случае радиального движения, показанного на рис. 7.4, она отклоняла шарик направо, вынуждая его двигаться по траектории  $OB$ .

Сила Кориолиса действует только на тела, *движущиеся* относительно вращающейся системы отсчета, например относительно Земли. Приведем некоторые примеры. В северном полушарии правые рельсы железнодорожных путей по движению изнашиваются быстрее, чем левые, а циклоны вращаются по часовой стрелке. В южном же полушарии все происходит наоборот. При выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу — в южном (рис. 7.6). При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к земле, если выстрел произведен на запад, и поднимать его кверху, если выстрел произведен в восточном направлении.

**Задача 7.31.** Поезд массой  $m = 150$  т идет в меридиональном направлении на север со скоростью  $v = 72$  км/ч. Чему равна кориолисова сила, прижимающая его в боковом направлении к рельсам? Каков эффект действия центробежной силы? Поезд находится на широте Москвы  $\varphi = 56^\circ$ .



**Рис. 7.6.** На Земле движущиеся тела отклоняются вправо в северном полушарии, и влево в южном.



**Рис. 7.7.** Кориолисова сила направлена от нас перпендикулярно плоскости рисунка (к задаче 7.31)

**Решение.** Угол между вектором угловой скорости суточного вращения Земли и касательной к меридиану равен широте места (рис. 7.7). Поэтому кориолисова сила равна

$$F_K = 2mv\omega_{\text{сут}} \sin \varphi.$$

Подставляя числовые данные, находим

$$F_K = 2 \times 1,5 \cdot 10^5 \times 20 \times 7,27 \cdot 10^{-5} \times \sin 56^\circ = 362 \text{ Н}.$$

Эта сила соответствует весу массы  $F_K/g = 37$  кг и составляет  $2,5 \cdot 10^{-4}$  от веса поезда.

Расстояние поезда от оси вращения Земли равно  $r = R_{\text{з}} \cos \varphi$ , так что центробежная сила

$$F_{\text{ц}} = m\omega_{\text{сут}}^2 r = m\omega_{\text{сут}}^2 R_{\text{з}} \cos \varphi.$$

Направлена она по перпендикуляру к оси вращения. Следовательно, ее составляющая  $F_{\text{ц}}^{\perp} = F_{\text{ц}} \cos \varphi$ , направленная вдоль радиуса Земли, уменьшает вес поезда:

$$F_{\text{ц}}^{\perp} = m\omega_{\text{сут}}^2 R_{\text{з}} \cos^2 \varphi.$$

Подставляя данные, получаем

$$F_{\text{ц}}^{\perp} = 1,5 \cdot 10^5 \times (7,27 \cdot 10^{-5})^2 \times 6,38 \cdot 10^6 \times \cos^2 56^\circ = 1,58 \text{ кН}.$$

Это соответствует весу массы  $F_{\text{ц}}^{\perp}/g = 161$  кг и составляет  $1,1 \cdot 10^{-3}$  от веса поезда.

Другая составляющая центробежной силы  $F_{\text{ц}}^{\parallel} = F_{\text{ц}} \sin \varphi$  направлена по касательной к меридиану и тормозит поезд. Она равна

$$F_{\text{ц}}^{\parallel} = \frac{1}{2} m\omega_{\text{сут}}^2 R_{\text{з}} \sin 2\varphi = 2,34 \text{ кН},$$

что соответствует весу массы  $F_{\text{ц}}^{\parallel}/g = 239$  кг и составляет  $1,6 \cdot 10^{-3}$  от веса поезда.

Таким образом, влияние центробежной силы проявляется в десятых долях процента, а проявления кориолисовой силы — на порядок меньше (что связано, разумеется, с небольшой скоростью поезда). ■

В природе даже небольшие, но постоянно действующие силы могут оказать значительное влияние. Например, известен эмпирический закон Бэра (1857), согласно которому в Северном полушарии наблюдается более сильное подмывание правых берегов рек (и левых — в Южном полушарии). Согласно теории этого эффекта (А. Эйнштейн, 1926), при совместном действии силы Кориолиса (при прямом русле реки) или центробежной силы (при его изгибе) и сил внутреннего трения (из-за которых скорость течения вблизи берегов и дна меньше, чем в середине реки), в воде возникают круговые потоки, приводящие к более сильной эрозии правого берега. Кроме того, более сильной эрозии подвергается правая половина дна, из-за чего река у правого берега бывает глубже, чем у левого. Из-за этого скорость течения у левого берега меньше, чем у правого. А при большом поперечном сечении реки круговое движение воды медленнее уничтожается внутренним трением и поэтому размеры извилин больших рек также будут больше. Совместное действие центробежной силы и сил внутреннего трения жидкости можно наблюдать на собственном столе, когда при размешивании чая в стакане чайники сносятся к оси вращения, а не к краям стакана, как наивно можно было бы ожидать, исходя из направления действия центробежной силы<sup>1</sup> (так называемый *парадокс чайного листа*).

## Контрольные вопросы

1. Когда и почему возникает необходимость рассмотрения сил инерции?
2. В чем заключается общий метод определения сил инерции?
3. Реальны ли силы инерции?
4. Какие силы инерции существуют в системах отсчета, движущихся поступательно?
5. Какой физический фактор обуславливает возникновение невесомости при свободном падении?
6. Какие силы инерции возникают во вращающихся системах отсчета?
7. Автомобиль сделал резкий поворот, и пассажир, сидящий у правой стенки, оказался прижатым к ней. В какую сторону повернул автомобиль?
8. Почему для ускорения выливания жидкости из бутылки надо придать жидкости быстрое вращательное движение?
9. В астрономической системе Птолемея, использующей Землю в качестве системы отсчета, движения планет выглядели очень сложными. Объясните почему.
10. Покажите справедливость формулы (7.6).
11. Производит ли работу центробежная сила инерции? Приведите примеры в случае положительного ответа.
12. Какие факторы обуславливают возникновение силы Кориолиса?
13. На летящий снаряд действует сила Кориолиса. Какую работу производит эта сила?
14. Перечислите известные вам проявления действия сил инерции вблизи земной поверхности.

---

<sup>1</sup> А. Эйнштейн. Причины образования извилин в руслах рек и так называемый закон Бэра. Собр. научных трудов в 4 т. Т. 4. Статьи, рецензии, письма. М.: Наука, 1967. С. 74.

## Глава 8

# Элементы механики жидкостей и газов

В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как сплошные среды, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. Плотность жидкости слабо зависит от давления. Плотность же газов от давления зависит существенным образом. Однако из опыта известно, что сжимаемостью газа, как и жидкости, во многих задачах можно пренебречь и пользоваться единым понятием несжимаемой жидкости, плотность которой всюду одинакова. Гидростатика — наука древняя. Основываясь, например, на свойствах равновесия несжимаемой жидкости, французский ученый Б. Паскаль установил закон сообщающихся сосудов (известный, правда, еще Леонардо да Винчи). Исследования Паскаля по гидростатике были опубликованы в 1663 г., уже после его смерти. С них мы и начнем эту главу.

### 8.1 Закон Паскаля

Утверждение, известное как *закон Паскаля* или *закон гидростатики*, но в равной мере справедливое и для газов, гласит, что

♦ *жидкость, находящаяся в замкнутом сосуде, передает производимое на нее давление по всем направлениям одинаково.* ♦

В некотором объеме жидкости, находящемся в равновесии, выделим мысленно некоторую площадку  $\Delta s$ . Отдельные частицы жидкости действуют друг на друга и, в частности, на площадку  $\Delta s$  с силой, зависящей от степени сжатия. Это воздействие характеризуется *давлением*

$$p = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta s}, \quad (8.1)$$

где  $\Delta F$  — равнодействующая всех сил, с которыми жидкость действует на площадку.





Рис. 8.1. Масштабы давлений, встречающихся в окружающем мире

В СИ давление выражается в паскалях (Па). Один паскаль — давление, производимое силой один ньютон, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью  $1 \text{ м}^2$ :

$$1 \text{ Па} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}^2}.$$

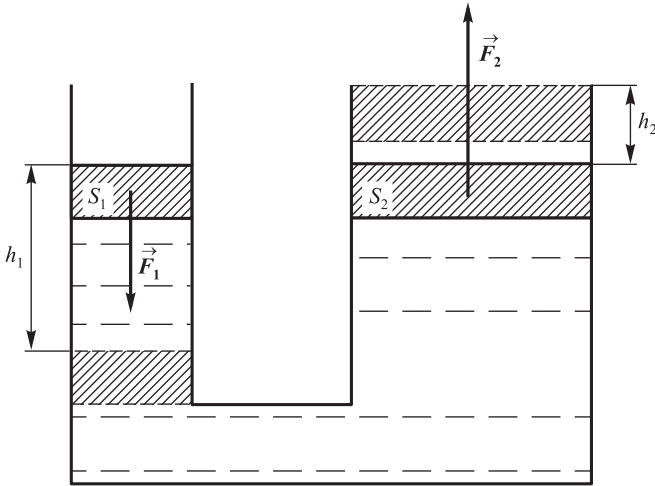
Например, если булавка вдавливается в поверхность стола силой  $10 \text{ Н}$ , а площадь ее острия  $0,05 \text{ мм}^2$ , то булавка оказывает давление  $p = \frac{\Delta F}{\Delta s} = 2 \cdot 10^8 \text{ Па}$ . На рисунке 8.1 показана диаграмма характерных масштабов давлений, встречающихся в природе.

Обратим внимание: давление — *скалярная* величина, для него неприменимо понятие направления. Сила же, с которой жидкость давит на элементарную площадку  $\Delta s$ , всегда направлена по нормали к площадке. Действительно, если бы сила была направлена не под прямым углом к выбранной площадке, то ее касательная составляющая из-за отсутствия сопротивления сдвигу привела бы жидкость в движение, что противоречит условию неподвижности.

Одно из проявлений закона Паскаля можно наблюдать в гидравлическом прессе (рис. 8.2). Два сообщающихся сосуда заполнены жидкостью и закрыты поршнями различной площади. По закону Паскаля, давление под поршнями одинаковы  $p_1 = p_2$ , т. е.

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{или} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (8.2)$$

Таким образом, сила давления второго поршня больше силы давления первого во столько раз, во сколько площадь второго поршня больше площади первого.



**Рис. 8.2.** Схема работы гидравлического пресса

Гидравлический пресс — простой механизм, позволяющий развивать колоссальные силы, используемые для прессования различных изделий из металлов и пластмасс. Обозначим  $h_1$  и  $h_2$  — ходы поршней. Вследствие практической несжимаемости объемы жидкости, перешедшей из одного цилиндра в другой, одинаковы:  $S_1 h_1 = S_2 h_2$ . Работы, совершаемые силами  $F_{1(2)}$  за один ход, вычисляются как  $A_1 = F_1 h_1$  и  $A_2 = F_2 h_2$ , так что их отношение равно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{F_1 h_1}{F_2 h_2} = \frac{S_1 h_1}{S_2 h_2} = 1. \quad (8.3)$$

Как и следовало ожидать, пресс дает выигрыш в силе, но не в совершаемой работе.

Определим давление внутри жидкости, считая ее несжимаемой, т. е. считая ее плотность неизменной независимо от глубины. Пусть на жидкость в сосуде действует внешнее давление  $p_0$ . Выделим мысленно в жидкости вертикальный цилиндр с поперечным сечением  $S$  и высотой  $h$  (рис. 8.3). На верхний слой жидкости действует внешнее давление  $p_0$ , которое также передается и другим слоям жидкости. К этому давлению в нижележащих слоях добавляется давление, создаваемое весом слоев жидкости, расположенных выше. На верхнее основание цилиндра действует сила  $F_0 = p_0 S$ , на нижнее основание  $F = p S$ , где  $p$  — давление на глубине  $h$ . Кроме того, вертикально вниз действует вес столба жидкости, находящейся в объеме цилиндра:

$$F_{\text{т}} = mg = \rho h S g, \quad (8.4)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $hS$  — ее объем. Запишем условие равновесия выделенного столба жидкости:

$$F_0 + F_{\text{т}} = F, \quad (8.5)$$

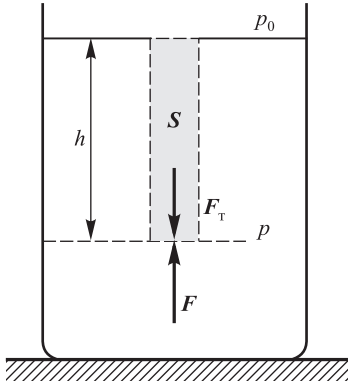


Рис. 8.3. Давление жидкости в поле сил тяжести

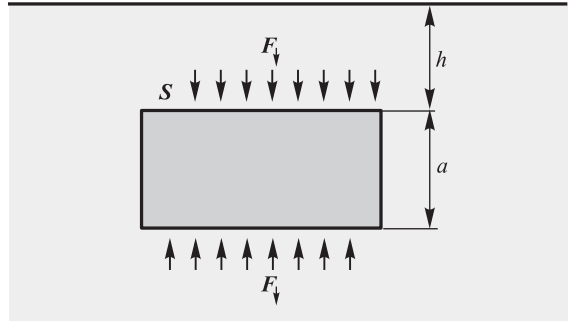


Рис. 8.4. Силы давления, действующие на тело в жидкости (к закону Архимеда)

или

$$p_0 S + \rho h S g = p S. \quad (8.6)$$

Следовательно,

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}, \quad (8.7)$$

где  $\rho g h$  — гидростатическое давление жидкости, обусловленное ее тяжестью.

Согласно формуле (8.7), сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние. Поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, называемая *силой Архимеда*. Погрузим в жидкость на глубину  $h$  параллелепипед с площадью основания  $S$  и высотой ребра  $a$  (рис. 8.4). Давление на глубине  $h$  равно  $p(h) = p_0 + \rho g h$ , и потому на верхнее основание действует сила

$$F_{\downarrow} = p(h) S = S(p_0 + \rho g h).$$

На глубине  $h + a$  давление равно  $p(h + a) = p_0 + \rho g(h + a)$ , и потому на нижнее основание действует сила

$$F_{\uparrow} = p(h + a) S = S(p_0 + \rho g h + \rho g a).$$

Равнодействующая этих двух сил направлена вверх и равна по величине

$$F_A = F_{\uparrow} - F_{\downarrow} = \rho S a g = \rho V g = m g. \quad (8.8)$$

Здесь  $S a = V$  — объем погруженной части тела,  $m = \rho V$  — масса жидкости (газа) того же объема. Полученное уравнение представляет математическую формулировку **закона Архимеда**:

◆ на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа). ◆

## 8.2 Закон Архимеда

Открытие выталкивающей силы Архимедом (287 до н. э.—212 до н. э.) часто связывают с историей о золотой короне царя Гиерона, рассказанной римским архитектором Витрувием (I в. до н. э.)<sup>1</sup>. Царь заказал ювелиру корону. Готовая корона соответствовала по весу выданному количеству золота, но царь заподозрил, что ювелир подменил часть золота равным по весу количеством серебра. Вывести ювелира на чистую воду было поручено Архимеду. Тот последовательно опустил в наполненный до краев сосуд корону и равные ей по весу слитки золота и серебра. Каждый раз измеряя количество вылившейся воды, Архимед обнаружил, что корона вытесняла меньше воды, чем слиток серебра, но больше, чем слиток золота, и тем самым доказал факт кражи. Витрувий пишет: «Что же до Архимеда, то из всех его многочисленных и замечательных открытий приводимое мною является, несомненно, доказательством прямо-таки безграничной его изобретательности». Что правда, то правда: решение остроумное и эффективное. Но оно не имеет отношения к закону Архимеда, так как Архимед не взвешивал слитки и корону, а сравнивал их объемы (т. е. средние плотности).

Закон Архимеда изложен в первой части его трактата «О плавающих телах»<sup>2</sup> в виде ряда теорем. Сочинение было известно по латинскому переводу XIII в., сделанному для Фомы Аквинского. Греческий же текст Архимеда нашли только в 1905 г. Нам представляется полезным познакомить студентов с рассуждениями великого математика, физика и инженера.

В качестве исходного положения (аксиомы) Архимед взял утверждение, демонстрирующее, что он если и не пользовался законом Паскаля, то подошел к нему очень близко: «Предположим, что жидкость имеет такую природу, что из ее частиц, расположенных на одинаковом уровне и прилежащих друг к другу, менее сдавленные выталкиваются более сдавленными и что каждая из ее частиц сдавливается жидкостью, находящейся над ней по отвесу, если только жидкость не заключена в каком-нибудь сосуде и не сдавливается еще чем-нибудь другим».

Отсюда Архимед выводит первую теорему: «Поверхность всякой жидкости, установившейся неподвижно, будет иметь форму шара, центр которого совпадает с центром Земли». Способ доказательства тот же самый, что и во всех последующих теоремах. Архимед мысленно проводит в жидкости сферу с центром в центре Земли и исходит из того, что частицы, расположенные на этой сфере, должны быть сдавлены одинаково, иначе жидкость не будет неподвижной. Но сдавливаются они частицами, находящимися в столбе жидкости по отвесу над ними. Значит, высота этого столба должна быть всюду одинаковой. Поверхность, равноотстоящая от сферы, тоже будет сферой, описанной из центра Земли.

Далее эта идея об одинаковой сдавленности частиц, находящихся на одном расстоянии от центра Земли, применяется к различным случаям плавания тел. Вот одна из теорем Архимеда:

<sup>1</sup> *Витрувий*. Десять книг об архитектуре. Книга 9. Вступление, гл. 9–12. Пер. Ф. А. Петровского. М.: Изд-во Академии архитектуры, 1936. С. 167–168.

<sup>2</sup> *Архимед*. Сочинения. Пер. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962. С. 328–357

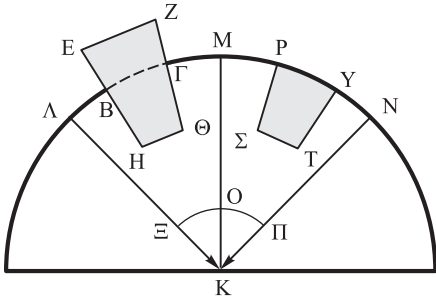


Рис. 8.5. К доказательству теоремы о весе жидкости, вытесненной плавающим телом

«Тело, более легкое, чем жидкость, будучи опущено в эту жидкость, погружается настолько, чтобы объем жидкости, соответствующий погруженной <части тела>, имел вес, равный весу всего тела».

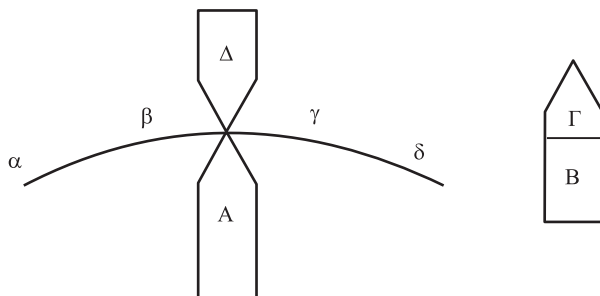
Приведем доказательство этой теоремы, данное Архимедом. Пусть имеется плавающее тело  $ЕНΘZ$  (рис. 8.5) и жидкость неподвижна. Архимед мысленно окружает его пирамидой  $КΛМ$ , основание которой лежит на поверхности воды, а вершина  $К$  находится в центре Земли. Рядом строит такую же пирамиду  $KNM$ , выделяет в ней объем  $РΣΤΥ$ , равный объему погруженной части  $ВНΘГ$ , и мысленно проводит сферу  $EOΠ$  с центром в  $К$ . Далее Архимед рассуждает так:

«Теперь, поскольку жидкость остается неподвижной, частицы ее, расположенные на одном уровне, будут испытывать одинаковое давление; следовательно, жидкость под поверхностями, соответствующими дугам  $EO$  и  $ΠO$ , будет сдавливаться одинаково, так что одинакова будет и тяжесть, которой они придавливаются. Но вес жидкости в первой пирамиде, за исключением объема  $ВНΘГ$ , будет равен весу жидкости во второй пирамиде, за исключением части жидкости  $РΣΤΥ$ ; теперь ясно, что вес тела  $ЕНΘZ$  будет равен весу жидкости  $РΣΤΥ$ . После этого очевидно, что объем жидкости, соответствующий погруженной части опущенного тела, имеет вес, равный весу всего тела».

И отсюда уже Архимед выводит свой закон, оригинальная формулировка которого звучит так:

**«Тела более легкие, чем жидкость, опущенные в эту жидкость насильственно, будут выталкиваться вверх с силой, равной тому весу, на который жидкость, имеющая равный объем с телом, будет тяжелее этого тела».**

Выводит он его из предыдущей теоремы следующим образом (рис. 8.6). Пусть тело  $A$  легче этой жидкости и имеет вес  $B$  и пусть вес жидкости в объеме тела  $A$  равен  $B + Γ$ . Возьмем теперь какое-то тело  $Δ$  весом  $Γ$  и соединим его с телом  $A$ . Вес  $B + Γ$  объединенного тела равен весу жидкости в объеме тела  $A$ . Если дуга  $αβγδ$  представляет поверхность какой-то жидкости, то согласно предыдущей теореме, погруженная часть объединенного тела будет иметь объем, равный объему тела  $A$ . Остальная его часть, а именно объем  $Δ$ , будет находиться над поверхностью жидкости. И Архимед завершает доказательство словами:



**Рис. 8.6.** К доказательству закона Архимеда

«Теперь ясно, что <с какой силой> тело выталкивается кверху, <с такой же силой оно будет придавливаться> книзу находящимся над ним телом  $\Delta$ , поскольку ни то, ни другое не пересиливают друг друга. Но  $\Delta$  давит вниз с тяжестью, равной весу  $\Gamma$ , так как было предположено, что вес тела  $\Delta$  равен  $\Gamma$ ; теперь то, что требовалось доказать, будет очевидно».

Внимательный читатель заметил, конечно, что третий закон классической механики представлялся Архимеду как сам собой разумеющийся — и это за девятнадцать веков до Ньютона. И в шарообразности Земли Архимед тоже не сомневался. Но самое поразительное в его трактате «О плавающих телах» — это вторая часть, где Архимед изучал устойчивость плавающего в жидкости коноида (усеченного параболоида вращения, форма которого похожа на корабль). Для этого метацентр (точка приложения выталкивающей силы Архимеда) должен лежать выше центра тяжести плавающего тела. Тогда при наклоне плавающего тела выталкивающая сила Архимеда и сила тяжести образуют пару сил, возвращающую тело в вертикальное положение. В противном случае корабль опрокинется. Задача это непростая даже для владеющих интегральным исчислением, а Архимед решал ее геометрически. Еще две тысячи лет после него устойчивости кораблей строители добивались исключительно эмпирически, исходя из собственного практического опыта.

### 8.3 Уравнение непрерывности

Рассмотрим теперь движение жидкости. Самый простой случай — так называемое стационарное течение. Нет никакого противоречия в употреблении слова «стационарный» рядом со словом «течение», которое подразумевает движение элементов жидкости.

◆ **Стационарное течение** — это течение, при котором скорость жидкости в каждой данной точке остается постоянной как по величине, так и по направлению. ◆

Элементы жидкости приходят и уходят, но в данной точке каждый вновь пришедший элемент приобретает ту скорость, которая этой точке соответствует. Поэтому стационарное течение можно характеризовать *полем скоростей*, задавая векторную функцию  $\vec{v}(\vec{r})$  от пространственных координат. Графически поле скоростей изображается с помощью *линий тока*, которые проводятся так, что

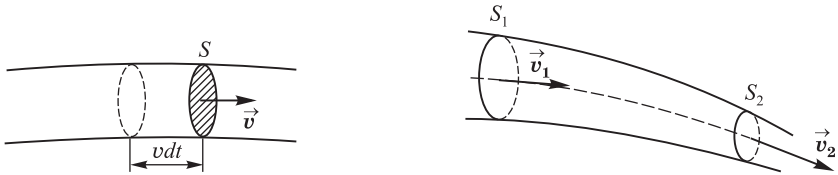


Рис. 8.7. Трубки тока жидкости (к выводу уравнения непрерывности)

касательные к ним совпадают с направлением вектора скорости жидкости в соответствующих точках пространства. Если вспомнить то, что мы знаем из школьного курса физики об электричестве, то можно сказать, что линии тока — это аналог силовых линий.

Условимся проводить линии тока так, чтобы густота их (которая характеризуется отношением числа линий  $\Delta N$  к величине перпендикулярной к ним площади  $\Delta S$ , через которую они проходят) была пропорциональна величине скорости в данном месте. Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют *трубкой тока*. Для стационарного течения форма и расположение линий тока со временем не изменяются.

Рассмотрим какую-либо трубку тока. За время  $dt$  через произвольное ее сечение  $S$  проходит объем жидкости  $Svdt$  (рис. 8.7, *слева*). Выберем два ее сечения  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 8.7, *справа*). За время  $dt$  через сечение  $S_1$  пройдет объем жидкости  $S_1v_1dt$ , где  $v_1$  — скорость течения жидкости в точках сечения  $S_1$ . Аналогично, через сечение  $S_2$  за то же время  $dt$  пройдет объем жидкости  $S_2v_2dt$ , где  $v_2$  — скорость течения жидкости в точках сечения  $S_2$ . Из условия несжимаемости жидкости следует равенство объемов жидкости, вошедших в область между сечениями  $S_1$ ,  $S_2$  и вышедших из него:

$$S_1v_1 = S_2v_2. \quad (8.9)$$

Следовательно,

♦ для несжимаемой жидкости величина  $Sv$  в любом сечении одной и той же трубки тока должна быть одинакова:  $Sv = \text{const}$ . ♦

Это соотношение — одна из форм *теоремы о непрерывности струи*. Теорема о непрерывности струи применима к реальным жидкостям, а также к газам, в том случае, если сжимаемостью их можно пренебречь. Прямое следствие теоремы — широко известный факт: в месте сужения трубы скорость потока возрастает. Более того, аналогичная теорема есть и в теории электромагнетизма, и там она связана с сохранением электрического заряда.

**Задача 8.32.** Оценить пропускную способность одного ряда участка автомагистрали. Учсть, что Правила дорожного движения рекомендуют держать дистанцию  $L$  между автомобилями, которая в метрах численно равна половине скорости движения, выраженной в км/час.

**Решение.** В этой задаче мы в сущности тоже имеем дело с уравнением непрерывности — при отсутствии «пробки» на дороге через каждое ее сечение должно проходить одинаковое количество автомобилей. Поток автомобилей равен  $\Phi = v\rho$ , где  $v$  — средняя скорость движения, а  $\rho$  — плотность автомобилей на дороге, т. е. число машин на единицу длины. Если  $l$  — средняя длина автомобиля, а  $L$  — средняя дистанция между ними,

то  $\rho = 1/(l + L)$ . Рекомендацию Правил дорожного движения математически можно выразить в виде формулы:  $L = \eta v$ , где  $\eta = 0,5 \text{ м} \times 1 \text{ ч/км} = 0,5 \text{ м} \times 3,6 \text{ с/м} = 1,8 \text{ с}$  — «коэффициент безопасности». В итоге приходим к выражению:

$$\Phi = \frac{v}{l + \eta v}. \quad (8.10)$$

Для численной оценки примем  $l = 3 \text{ м}$ , а  $v = 60 \text{ км/час} = 16,67 \text{ м/с}$  (допустимая скорость движения в городах). Получаем тогда:

$$\Phi = \frac{16,67}{3 + 1,8 \times 16,67} = 0,51 \text{ с}^{-1},$$

т. е. каждый ряд способен пропустить 30 машин в минуту.

При повышении скорости движения до  $v = 90 \text{ км/ч} = 25 \text{ м/с}$  пропускная способность возрастает совершенно незначительно: в этом случае находим

$$\Phi = \frac{25}{3 + 1,8 \times 25} = 0,52 \text{ с}^{-1}.$$

Даже в пределе бесконечно большой скорости движения  $v \rightarrow \infty$  предельное значение потока  $\Phi \rightarrow 1/\eta = 1/1,8 = 0,56 \text{ с}^{-1}$ . При снижении скорости движения до, скажем,  $v = 30 \text{ км/ч} = 8,33 \text{ м/с}$  пропускная способность равна

$$\Phi = \frac{8,33}{3 + 1,8 \cdot 8,33} = 0,46 \text{ с}^{-1}.$$

Гораздо более «эффективным» является несоблюдение дистанции. Скажем, при дистанции  $L$ , равной длине  $l$  корпуса автомобиля, и скорости движения  $v = 30 \text{ км/ч}$ , получаем для потока:

$$\Phi = \frac{v}{2l} = \frac{8,33}{2 \times 3} = 1,4 \text{ с}^{-1}.$$

Но вряд ли повышение пропускной способности магистрали в три раза должно достигаться за счет уменьшения безопасности движения. ■

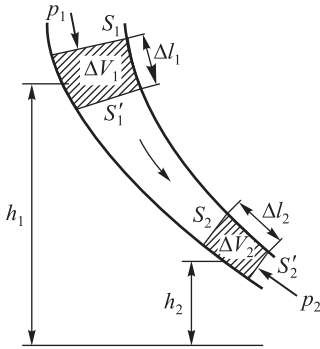
## 8.4 Уравнение Бернулли

При течении жидкости ее отдельные слои в общем случае текут с *разными скоростями*, скользят друг относительно друга, вследствие чего между ними возникают силы трения. Эти силы называют *силами внутреннего трения*. Они возникают не только в жидкостях, но и в газах.

Жидкость, в которой внутреннее трение (*вязкость*) полностью отсутствует, назовем *идеальной*. Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , по которой слева направо течет жидкость (рис. 8.8). Пусть в месте сечения  $S_1$  заданы: скорость течения  $v_1$ , давление  $p_1$  и высота  $h_1$ , на которой расположено это сечение. Аналогично, в месте сечения  $S_2$  заданы скорость течения  $v_2$ , давление  $p_2$  и высота  $h_2$ .

За время  $\Delta t$  объем жидкости переместится вдоль трубки тока, причем сечение  $S_1$  переместится в положение  $S'_1$ , пройдя путь  $\Delta l_1$ , сечение  $S_2$  переместится в положение  $S'_2$ , пройдя путь  $\Delta l_2$ . В силу уравнения непрерывности заштрихованные объемы равны:  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ .





**Рис. 8.8.** Трубка тока в стационарно текущей идеальной жидкости (к выводу уравнения Бернулли)

Энергия каждой частицы жидкости складывается из ее кинетической энергии и потенциальной энергии в поле сил тяжести. Полная энергия потока, протекающего за время  $\Delta t$  через сечение  $S_1$ , равна

$$E_1 = \left( \frac{\rho \Delta V_1 v_1^2}{2} + \rho \Delta V_1 g h_1 \right) = \Delta V \left( \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 \right). \quad (8.11)$$

Аналогичное выражение имеем для сечения  $S_2$ :

$$E_2 = \left( \frac{\rho \Delta V_2 v_2^2}{2} + \rho \Delta V_2 g h_2 \right) = \Delta V \left( \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \right). \quad (8.12)$$

При стационарном течении между сечениями  $S_1$  и  $S_2$  энергия не накапливается. В идеальной жидкости силы трения отсутствуют, так что механическая энергия никуда не исчезает. Следовательно, изменение полной энергии жидкости равно работе, совершенной внешними силами ( $\Delta E = E_2 - E_1 = A$ ).

Силы давления на боковую поверхность трубки тока перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения частиц, вследствие чего работы не совершают. Отлична от нуля лишь работа сил, приложенных к сечениям  $S_1$  и  $S_2$ . Эта работа равна

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (8.13)$$

Приравнявая  $\Delta E$  работе  $A$ , находим:

$$\Delta V \left( \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \right) - \Delta V \left( \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 \right) = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (8.14)$$

Сократив на  $\Delta V$  и перенеся члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, получаем:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (8.15)$$

Сечения  $S_1$  и  $S_2$  были взяты совершенно произвольно. Поэтому можно утверждать, что

♦ в стационарно текущей идеальной жидкости в любом сечении трубки тока выполняется условие

$$\boxed{\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const.}} \quad \blacklozenge \quad (8.16)$$

Полученное нами соотношение называется *уравнением Бернулли*.

В частном случае горизонтального течения жидкости  $h = \text{const}$  уравнение Бернулли принимает вид

$$\boxed{\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.}}$$

Из уравнения непрерывности  $Sv = \text{const}$  следует, что в месте сужения потока его скорость возрастает, а из уравнения Бернулли — что в этом месте падает давление. Когда идущие параллельными курсами корабли находятся слишком близко друг к другу, давление между ними падает и давление внешнего потока их сталкивает.

**Задача 8.33.** В сосуде проделано небольшое отверстие. Высота жидкости над отверстием равна  $h$ . Какова скорость вытекающей струи?

**Решение.** Применим уравнение Бернулли. В качестве сечения  $S_1$  возьмем поверхность жидкости, а за сечение  $S_2$  примем проделанное отверстие. Давления в обоих сечениях можно считать постоянными (и равными атмосферному). Скоростью жидкости в сечении  $S_1$  можно пренебречь (если площадь сосуда много больше площади отверстия:  $S_1 \gg S_2$ ). Тогда имеем:

$$\rho gh = \frac{\rho v^2}{2},$$

где  $h$  — высота сечения  $S_1$  над сечением  $S_2$  (т. е. уровень жидкости над отверстием), а  $v$  — скорость истечения жидкости из отверстия. Получаем в итоге:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Указанное соотношение носит имя Торичелли. Заметим, что скорость истечения струи равна скорости свободного падения тела с той же высоты. Это не удивительно, так как в основе обоих результатов лежит закон сохранения энергии. ■

Выводя уравнение Бернулли, мы пренебрегли сжимаемостью жидкости. Что касается газов, их сжимаемость намного больше, чем у жидкостей. Получим оценку применимости уравнения Бернулли к течению газов. Величина  $\rho v^2/2$ , называемая динамическим давлением, должна быть мала по сравнению со статическим давлением  $p$ . Тогда колебания давления вследствие течения газа будут невелики, и его сжимаемостью можно пренебречь. Следовательно, критерием применимости уравнения Бернулли к газам служит неравенство

$$\frac{\rho v^2}{2} \ll p, \quad \text{или} \quad v \ll \sqrt{\frac{2p}{\rho}}. \quad (8.17)$$

Дадим численную оценку. При нормальных условиях давление воздуха  $p \approx 10^5$  Па, а плотность воздуха  $\rho = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>. Отсюда  $v \ll \sqrt{2p/\rho} \approx 390$  м/с. Это число близко к скорости звука. При скоростях, заметно меньших, мы можем применять уравнение Бернулли к газам с тем же успехом, что и к жидкостям.

## 8.5 Движение тел в среде с сопротивлением

Со времен опытов Галилея на Пизанской башне известно, что все тела падают в поле силы тяжести с одинаковым ускорением  $g$ . Однако каждодневная практика указывает на другое: легкое перышко падает медленнее тяжелого металлического шарика. Понятна и причина этого — сопротивление воздуха.

### Уравнения движения

Если ограничиться случаем поступательного движения невращающихся тел в неподвижной среде с сопротивлением, то сила сопротивления будет направлена против скорости. В векторном виде ее можно записать как

$$\vec{F}_r = -F_r \frac{\vec{v}}{v}, \quad (8.18)$$

где  $F_r$  — абсолютная величина этой силы, а  $v$  — модуль скорости тела.

Учет сопротивления среды меняет вид уравнений движения тела, брошенного под углом к горизонту:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{F_r}{v} \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -mG - \frac{F_r}{v} \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

В формулах (8.19) учтена также выталкивающая сила Архимеда, действующая на тело: ускорение свободного падения  $g$  заменено на меньшую величину

$$G = g \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right), \quad (8.20)$$

где  $\rho_a$  — плотность среды (для воздуха  $\rho_a = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>), а  $\rho$  — средняя плотность тела. Действительно, вес  $P$  тела в среде уменьшается на выталкивающую силу Архимеда

$$P = mg - g\rho_a V.$$

Выражая объем  $V$  тела через его среднюю плотность  $V = m/\rho$ , приходим к выражению

$$P = mg \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) = mG.$$

При наличии сопротивления воздуха скорость падающего тела не может расти безгранично. В пределе она стремится к некоторому установившемуся значению, которое зависит от характеристик тела. Если тело достигло установившейся скорости падения  $v_{\max}$ , то из уравнений (8.19) следует, что сила сопротивления равна весу тела (с учетом архимедовой силы):

$$F_r = mG. \quad (8.21)$$

Сила сопротивления  $F_r$ , как мы вскоре убедимся, есть функция скорости падения. Стало быть, (8.21) представляет собой уравнение для определения установившейся скорости падения  $v_{\max}$ . Ясно, что при наличии среды энергия тела частично расходуется на преодоление ее сопротивления.

## Число Рейнольдса

Разумеется, уравнения (8.19) невозможно даже начать решать, пока нам ничего неизвестно о модуле  $F_r$  силы сопротивления. Величина этой силы существенно зависит от характера обтекания тела встречным потоком газа (или жидкости). При малых скоростях этот поток является *ламинарным* (т. е. слоистым). Его можно представить себе как относительное движение не смешивающихся между собой слоев среды. Как уже отмечалось в разделе 8.4, при относительном движении слоев жидкости или газа между этими слоями возникают силы сопротивления движению, которые называются *силами внутреннего трения*. Эти силы обусловлены особым свойством текучих тел — *вязкостью*, которая характеризуется численно *коэффициентом вязкости*  $\eta$ . Приведем характерные значения  $\eta$  для различных веществ: для воздуха ( $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Па · с), воды ( $\eta = 10^{-3}$  Па · с), глицерина ( $\eta = 0,85$  Па · с). Эквивалентное обозначение единиц, в которых измеряется коэффициент вязкости: Па · с = кг · м<sup>-1</sup> · с<sup>-1</sup>. Между движущимся телом и средой всегда существуют силы сцепления, так что непосредственно вблизи поверхности тела слой газа (жидкости) полностью задерживается, как бы «прилипающая» к нему. Он трется о следующий слой, который слегка отстаёт от тела. Тот, в свою очередь, испытывает силу трения со стороны еще более удаленного слоя и т. д. Совсем далекие от тела слои можно считать покоящимися. Теоретический расчет внутреннего трения для движения шарика диаметром  $D$  приводит к *формуле Стокса*:

$$\boxed{F_r = 3\pi D\eta v.} \quad (8.22)$$

Подставляя (8.22) в (8.21), находим выражение для установившейся скорости падения шарика в среде:

$$v_{\max} = \frac{mg}{3\pi D\eta} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right). \quad (8.23)$$

Видно, что чем легче тело, тем меньше скорость его падения в атмосфере. Уравнение (8.23) объясняет нам падение пушинки. Но попытаемся применить его к падению парашютиста, представляя последнего как шар массой 100 кг. Силой Архимеда здесь можно пренебречь, а диаметр «шара»  $D$  выберем равным 10 м (размер парашюта). Получаем тогда несуразный результат:

$$v_{\max} = \frac{100 \times 9,8}{3 \times 3,14 \times 10 \times 1,8 \cdot 10^{-5}} \approx 578 \text{ км/с.}$$

Дело в том, что сила трения пропорциональна скорости тела лишь для ламинарного встречного потока воздуха. При увеличении скорости тела вокруг него возникают воздушные вихри, слои перемешиваются и движение в какой-то момент становится *турбулентным*. Внутреннее трение (вязкость) перестает играть существенную роль.

Возникновение силы сопротивления можно тогда представить себе следующим образом. Пусть тело прошло в среде путь  $l$ . При силе сопротивления  $F_r$  на это затрачивается работа  $A = F_r l$ . Если площадь поперечного сечения тела

равна  $S$ , то тело «натолкнется» на частицы, занимающие объем  $Sl$ . Полная масса частиц в этом объеме равна  $\rho_a Sl$ . Представим, что эти частицы полностью увлекаются телом, приобретая скорость  $v$ . Тогда их кинетическая энергия становится равной  $T = \rho_a Slv^2/2$ . Эта энергия не появилась ниоткуда: она создана за счет работы внешних сил по преодолению силы сопротивления. Стало быть,  $A = T$ , откуда  $F_r = \rho_a Sv^2/2$ . Мы видим, что теперь сила сопротивления сильнее зависит от скорости движения, становясь пропорциональной ее второй степени [ср. (8.22)]. В отличие от сил внутреннего трения ее часто называют *силой динамического лобового сопротивления*.

Однако предположение о полном увлечении частиц среды движущимся телом оказывается слишком сильным. В реальности любое тело так или иначе обтекается потоком, что уменьшает силу сопротивления. Принято использовать так называемый *коэффициент сопротивления*  $C$ , записывая силу лобового сопротивления в виде:

$$F_r = CS \frac{\rho_a v^2}{2}. \quad (8.24)$$

При турбулентном потоке в некотором интервале скоростей  $C$  не зависит от скорости движения тела, но зависит от его формы: скажем, для диска он равен единице, а для шара  $C \approx 1/2$ .

Подставляя (8.24) в (8.21), приходим к иному, нежели (8.23), выражению для установившейся скорости падения шара ( $C = 1/2$ ):

$$v_{\max} = \frac{4}{D} \sqrt{\frac{mg}{\pi \rho_a} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}. \quad (8.25)$$

Применяя (8.25) к нашему парашютисту, находим

$$v_{\max} = \frac{4}{10} \sqrt{\frac{100 \times 9,8}{3,14 \times 1,29}} \approx 6,2 \text{ м/с},$$

что соответствует скорости приземления при прыжке без парашюта с высоты 2 м. Видно, что для описания движения парашютиста больше подходит формула, соответствующая турбулентному потоку воздуха.

Выражение для силы сопротивления в виде (8.24) удобно использовать во всем интервале скоростей. Поскольку при малых скоростях режим сопротивления меняется, то коэффициент сопротивления в области ламинарного течения и в переходной области к турбулентному течению будет зависеть от скорости тела. Однако прямая зависимость  $C$  от  $v$  невозможна, поскольку коэффициент сопротивления безразмерен. Значит, он может быть лишь функцией какой-то безразмерной комбинации с участием скорости. Такая комбинация, играющая важную роль в гидро- и аэродинамике, называется числом Рейнольдса **Re** (см. раздел 1.3, формула (1.6)).

Число Рейнольдса — это параметр, описывающий смену режима при переходе от ламинарного течения к турбулентному. Таким параметром может служить отношение силы лобового сопротивления к силе внутреннего трения. Подставляя в (8.24) выражение для площади поперечного сечения шара  $S = \pi D^2/4$ ,

убеждаемся, что сила лобового сопротивления с точностью до несущественных сейчас числовых факторов определяется выражением  $D^2\rho_a v^2$ , а сила внутреннего трения — выражением  $D\eta v$  [см. (8.22)]. Отношение этих двух выражений и есть число Рейнольдса (вспомним раздел 1.3):

$$\boxed{\mathbf{Re} = \frac{D\rho_a v}{\eta}}. \quad (8.26)$$

Если речь идет не о движении шара, то под  $D$  понимается характерный размер системы (скажем, диаметр трубы в задаче о течении жидкости). По самому смыслу числа Рейнольдса ясно, что при его малых значениях доминируют силы внутреннего трения: вязкость велика и мы имеем дело с ламинарным потоком. При больших значениях числа Рейнольдса, наоборот, доминируют силы динамического лобового сопротивления и поток становится турбулентным.

Число Рейнольдса имеет огромное значение при моделировании реальных процессов в меньших (лабораторных) масштабах. Если для двух течений разных размеров числа Рейнольдса одинаковы, то такие течения подобны, и возникающие в них явления могут быть получены одно из другого простым изменением масштаба измерения координат и скоростей. Поэтому, например, на модели самолета или автомобиля в аэродинамической трубе можно предугадать и изучить процессы, которые возникнут в процессе реальной эксплуатации.

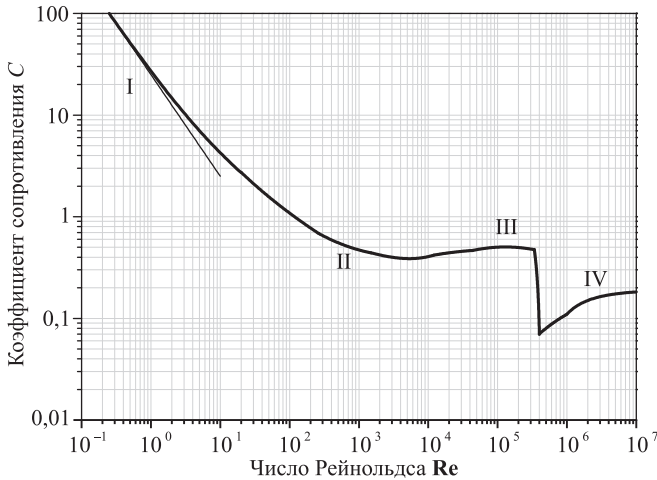
## Коэффициент сопротивления

Итак, коэффициент сопротивления в формуле (8.24) зависит от числа Рейнольдса:  $C = C(\mathbf{Re})$ . Эта зависимость имеет сложный характер, показанный (для шара) на рис. 8.9. Теоретически получить эту кривую трудно, и обычно используют зависимости, экспериментально измеренные для данного тела. Однако возможна качественная ее интерпретация.

**Область I.** Здесь число Рейнольдса очень мало ( $\mathbf{Re} \leq 1$ ) и течение потока ламинарно. Экспериментальная кривая описывается в этой области функцией  $C \approx 24/\mathbf{Re}$ . При подстановке этого значения в формулу (8.24) и использовании  $S = \pi D^2/4$  и выражения (8.26) для числа Рейнольдса мы приходим к формуле Стокса (8.22). В этой области, как уже говорилось, сопротивление возникает вследствие вязкости среды.

**Область II.** Здесь число Рейнольдса лежит в интервале  $1 < \mathbf{Re} < 2 \cdot 10^4$ . Данная область соответствует переходу от ламинарного к турбулентному течению. Экспериментальные данные свидетельствуют, что при увеличении числа Рейнольдса достигается некоторое его критическое значение, после которого стационарное ламинарное течение становится неустойчивым. Разумеется, это критическое значение не универсально и различается для разных типов течений. Но его характерная величина порядка нескольких десятков.

При  $\mathbf{Re}$  лишь слегка больших критического значения появляется нестационарное периодическое движение потока, характеризуемое некоторой частотой. При дальнейшем увеличении  $\mathbf{Re}$  периодическое движение усложняется и в нем появляются новые и новые частоты. Этим частотам соответствуют периодические движения (вихри), пространственные масштабы которых становятся все более мелкими. Движение приобретает более сложный и запутанный характер — развивается турбулентность. В данной



**Рис. 8.9.** Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для шара: римскими цифрами показаны области значений  $Re$ , которым соответствуют различные режимы течения воздушного потока

области коэффициент сопротивления продолжает падать с ростом  $Re$ , но медленнее. Минимум достигается при  $Re = (4-5) \cdot 10^3$ , вслед за чем  $C$  несколько повышается.

**Область III.** Эта область соответствует развитому турбулентному течению потока вокруг шара, а с этим режимом мы уже встречались выше. Характерные здесь значения числа Рейнольдса лежат в интервале от  $Re = 2 \cdot 10^4$  до  $Re = 2 \cdot 10^5$ .

При движении тело оставляет за собой турбулентный след, за пределами которого течение ламинарно. Вихревой турбулентный след легко наблюдать, например, за кормой корабля. Часть поверхности тела непосредственно примыкает к области турбулентного следа, а его передняя часть — к области ламинарного течения. Граница между ними на поверхности тела называется *линией отрыва*. Физической причиной возникновения силы сопротивления является разность давлений на передней и задней поверхностях тела. Оказывается, что положение линии отрыва определяется свойствами пограничного слоя и не зависит от числа Рейнольдса. Поэтому коэффициент сопротивления примерно постоянен в этом режиме.

**Область IV.** Однако такой режим обтекания тела не может поддерживаться до сколь угодно больших значений  $Re$ . В какой-то момент передний ламинарный пограничный слой турбулизируется, что отодвигает назад линию отрыва. Турбулентный след за телом сужается, что приводит к резкому (в 4–5 раз) падению сопротивления среды. Это явление, названное *кризисом сопротивления*, происходит в узком интервале значений  $Re = (2-2,5) \cdot 10^5$ . Строго говоря, приведенные теоретические соображения могут измениться при учете сжимаемости среды (воздуха, в нашем случае). Однако это проявится, как мы уже обсуждали, при скоростях объектов, сравнимых со скоростью звука  $c \approx 330$  м/с.

## Контрольные вопросы

1. Будет ли разница в действии гидравлического пресса на Земле и на Луне?
2. Почему при измерении артериального давления манжета, соединенная с манометром, надевается на руку примерно на уровне сердца?
3. Левый желудочек сердца, сокращаясь, прогоняет кровь по системе кровообращения. Считая площадь внутренней поверхности желудочка равной  $S = 85 \text{ см}^2$ , а максимальное давление крови —  $p = 120 \text{ мм рт. ст.}$ , рассчитать максимальную силу  $F$ , развиваемую мышцами желудочка.
4. Зная, что нормальное атмосферное давление примерно равно  $p = 100 \text{ кПа}$ , оценить по порядку величины массу атмосферы Земли.
5. Можно ли вакуумным насосом откачать воду из колодца глубиной  $12 \text{ м}$ ?
6. Предположим, что человек может понизить давление в легких на  $80 \text{ мм рт. ст.}$  по сравнению с атмосферным. На какую высоту ему удастся втянуть воду через соломинку?
7. При каждом сокращении сердце прокачивает примерно  $70 \text{ см}^3$  крови. Среднее давление в желудочке  $p_1 = (120 + 80)/2 = 100 \text{ мм рт. ст.}$ , среднее давление в остальных частях системы кровообращения примем равным  $p_2 = 90 \text{ мм рт. ст.}$  Какую среднюю мощность развивает сердце при частоте пульса  $60$  ударов в минуту? Сравнить с оценкой средней мощности в гл. 4.
8. Для доказательства справедливости своего закона Паскаль осуществил впечатляющий опыт, наглядно показавший, какую огромную силу может создать гидростатическое давление. В крышку, плотно закрывавшую небольшой винный бочонок, наполненный водой, вставили тонкую длинную трубку. Затем в трубку доливали небольшое количество воды, и когда она поднималась до высоты  $h = 12 \text{ м}$ , бочонок разрывался. Радиус бочонка  $R = 20 \text{ см}$ , внутренний радиус трубки  $r = 0,3 \text{ см}$ . Вычислить результирующую силу  $F$ , действовавшую на крышку бочонка, и массу  $m$  налитой в трубку воды.
9. В стакане плавает кусочек льда. Как изменится уровень воды, когда лед растает?
10. Стальной шарик плавает в ртути. Изменится ли погружение шарика в ртуть, если сверху налить воды?
11. Если открытый водопроводный кран зажать пальцем так, чтобы оставалось только маленькое отверстие, то вода из него вырывается с большей скоростью, чем при полностью открытом кране. Почему?
12. Почему струя воды из крана сужается книзу? Вывести формулу для диаметра  $d$  струи в зависимости от расстояния  $l$  до крана. Начальная скорость, с которой вода вытекает из крана, равна  $v_0$ , диаметр отверстия крана  $D$ .
13. Если держать навесу два листа бумаги, так что они параллельны и находятся на расстоянии нескольких сантиметров друг от друга, то при продувании воздуха через промежуток между листами они начнут двигаться. Как? Прodelайте опыт и объясните результат.
14. Во время сильного ветра с домов иногда срывает крыши. Используя уравнение Бернулли, объясните, почему это происходит.



15. Если скорость горизонтального ветра над плоской крышей площадью  $S = 250 \text{ м}^2$  составляет  $v = 25 \text{ м/с}$ , то какая сила  $F$  действует на крышу? Плотность воздуха  $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$ .
16. Облака состоят из мелких капель воды. Почему никто не видел, как облака падают на землю?
17. Оценить мощность, расходуемую двигателем автомобиля на преодоление сопротивления воздуха на скорости  $60 \text{ км/ч}$ . Как изменится ответ, если скорость возрастет до  $100 \text{ км/ч}$ ? Результат выразить в л. с.

## Глава 9

# Элементы специальной теории относительности

Если системы отсчета движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно и в одной из них справедливы законы динамики Ньютона, то эти системы являются инерциальными. Галилей установил, что во всех инерциальных системах отсчета законы классической динамики имеют одинаковую форму: в этом заключается суть механического принципа относительности (принципа относительности Галилея). Создание в XIX в. электродинамики Фарадея—Максвелла и многочисленные опыты с электрическими и магнитными полями привели ученых (цитируя Эйнштейна) «к предположению, что не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя, и даже более того — к предположению, что для всех координатных систем, для которых справедливы уравнения механики, имеют место те же самые электродинамические и оптические законы...» Однако, как отмечал Эйнштейн, «электродинамика Максвелла в том виде, как ее в настоящее время обыкновенно понимают, в применении к движущимся телам приводит к асимметрии, которая, по-видимому, несвойственна самим явлениям». Разрешение этого противоречия между обобщением принципа относительности и уравнениями электродинамики привело к отказу от преобразований Галилея и созданию специальной теории относительности (СТО), являющейся предметом этой главы.

### 9.1 Анализ преобразований Галилея

Рассмотрим две системы отсчета — инерциальную систему  $K$  (с координатами  $x, y, z$ ), которую условно будем считать неподвижной, и систему  $K'$  (с координатами  $x', y', z'$ ), движущуюся относительно  $K$  равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{V}$  (для конкретности вдоль оси  $x$ ). Отсчет времени начнем с момента, когда начала координат обеих систем совпадают (рис. 9.1).

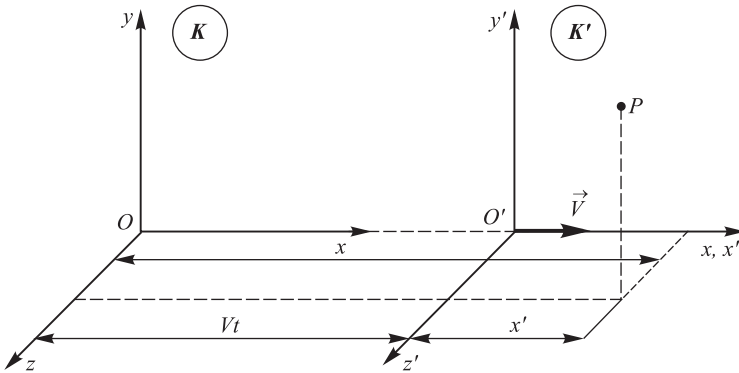


Рис. 9.1. Преобразования Галилея из одной инерциальной системы отсчета в другую

Ранее мы уже нашли связь (3.51) между координатами произвольной точки  $P$  в обеих системах отсчета:

$$\begin{array}{ll} x = x' + Vt', & x' = x - Vt, \\ y = y', & y' = y, \\ z = z', & z' = z, \\ t = t', & t' = t. \end{array} \quad (9.1)$$

Эти уравнения носят название *преобразований Галилея*. В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета, т. е. к преобразованиям координат мы добавили еще и уравнение совпадения времен. Продифференцировав преобразования Галилея по времени с учетом  $t = t'$ , мы получаем правило сложения скоростей по Галилею в векторной форме [ср. (3.50)]:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'. \quad (9.2)$$

Дифференцируя еще раз, находим соотношение для ускорений — ускорение  $\vec{a}$  в системе  $K$  оказывается равным ускорению  $\vec{a}'$  в системе  $K'$ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'. \quad (9.3)$$

Еще раз: ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно ( $\vec{V} = \text{const}$ ), оказывается одним и тем же. Как говорят, ускорения *инвариантны* относительно таких систем отсчета. Поэтому если одна из них инерциальная, то и остальные системы отсчета будут инерциальными. Как следствие, никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно. Иными словами, в природе отсутствует выделенная система отсчета.

Величины, численные значения которых не изменяются при преобразованиях координат, называются *инвариантами* преобразований.

**Инвариантность длины и интервала времени.** Расстояние между двумя точками  $P_1$  и  $P_2$  можно выразить через координаты этих точек в системе  $K$ :

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (9.4)$$

и именно это расстояние измеряет наблюдатель в системе отсчета  $K$ . Для наблюдателя же в системе отсчета  $K'$  координаты тех же точек будут другими, и он определит расстояние между ними как

$$l' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}. \quad (9.5)$$

Из преобразований Галилея следует, что  $x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1$  и аналогично для других координат, так что  $l = l'$ . Иными словами, оба наблюдателя находят одно и то же значение для расстояния между двумя точками — длина инвариантна по отношению к преобразованиям Галилея.

Аналогичным образом, инвариантны интервалы времени для обоих наблюдателей:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \Delta t'. \quad (9.6)$$

Если два события одновременны ( $t_1 = t_2$ ), то временной интервал между ними равен нулю. Вследствие инвариантности это же справедливо и в системе отсчета  $K'$ , т. е. данные события одновременны в любой инерциальной системе отсчета.

Задумаемся, откуда взялись столь естественные на первый взгляд утверждения? Преобразования Галилея для координат следуют из простого геометрического правила сложения векторов (см. рис. 3.10). Но посмотрим на этот рисунок внимательнее. Вектор  $\vec{r}'$  задан, в сущности, относительно системы  $K'$ , наблюдатель в этой системе описывает им положение некоторой точки в пространстве. Наблюдатель в системе отсчета  $K$  *предполагает*, что может использовать этот же радиус-вектор, чтобы сложить с радиусом-вектором начала отсчета  $O'$  и получить положение той же точки относительно системы  $K$ . Но на чем основано это предположение? На том, что вектор  $\vec{r}'$  одинаков в обеих системах отсчета, что у него в обеих системах те же проекции на координатные оси и та же длина. А это значит, что при выводе преобразования Галилея мы изначально неявно предположили инвариантность расстояний. Инвариантность же интервалов времени мы постулировали совершенно откровенно. Основанием для этого служит наш повседневный опыт. Но любой опыт ограничен какими-то масштабами, в пределах которых он приобретен. Когда ученые столкнулись с физикой больших скоростей при изучении распространения электромагнитных волн (света) оказалось, что наш повседневный опыт более не применим.

## 9.2 Опыт Майкельсона—Морли

Рассмотрим сначала другой волновой процесс — звук. Звук распространяется в упругой среде: воздухе, воде, твердых телах. Скорость звука определяется свойствами среды и постоянна относительно среды. Если наблюдатель движется в среде, то относительно него скорость звука будет другой, и определяется она законом сложения скоростей Галилея. При наличии среды о принципе относительности говорить не приходится: выделена та система отсчета, в которой

среда покоится. Движение всех остальных систем отсчета легко установить (например, при движении автомобиля наличие воздушной среды обнаруживается по сопротивлению воздуха — кажущемуся ветру).

Раньше думали, что свет — это также механический волновой процесс в особой упругой среде, названной эфиром. Относительно эфира свет распространяется со скоростью, которую принято обозначать буквой  $c$ . Экспериментально установлено, что  $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 300\,000 \text{ км/с}$ . Механический принцип относительности Галилея означает, что при механическом движении эфирного ветра не наблюдается. Это объясняли «тонкостью», «разреженностью» эфира, не оказывающего сопротивления движению «грубых» объектов, с которыми имеет дело механика. Иное дело — электромагнитные явления, распространение света. Там эфирный ветер должен был наблюдаться, и цель опытов (А. Майкельсон, 1881; А. Майкельсон и Э. У. Морли, 1887) как раз и заключалась в поисках этого ветра.

Идея состояла в использовании орбитального движения Земли со скоростью  $V = 30 \text{ км/с}$ . При движении с этой скоростью относительно эфира наблюдатель мог бы обнаружить видимое изменение скорости света: она должна быть равна  $c + V$  при движении навстречу световому лучу и  $c - V$  при удалении от источника света. Отношение скоростей Земли и света  $V/c \approx 10^{-4}$ , так что надо было добиться такой или более высокой относительной точности измерений. Это оказалось возможным благодаря использованию интерферометра. Мы не станем вдаваться в технические подробности опыта Майкельсона—Морли, но расскажем лишь о его основной физической идее.

В этом опыте сравнивались времена прохождения света от источника  $S$  к зеркалу  $M$  и обратно к источнику для двух случаев: когда путь света был параллелен и ортогонален орбитальной скорости Земли. В первом случае (рис. 9.2, а) свет проходит путь  $L$  до зеркала за время  $L/(c - V)$ , а обратный путь — за время  $L/(c + V)$ . Складывая эти времена, получаем полное время  $t_{\parallel}$ , затрачиваемое светом на прохождение пути до зеркала и обратно:

$$t_{\parallel} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - V^2/c^2}. \quad (9.7)$$

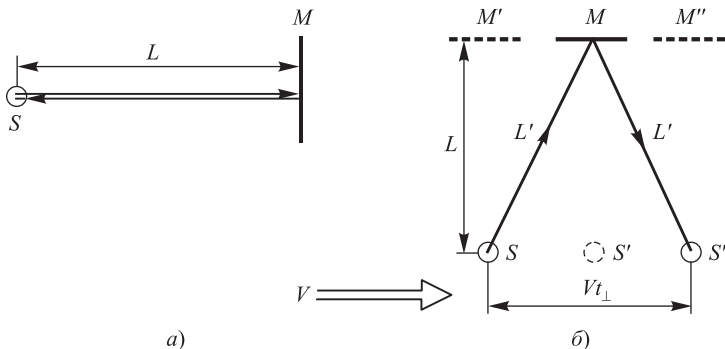


Рис. 9.2. Идея опыта Майкельсона—Морли

Во втором случае (рис. 9.2,б) из-за движения зеркала и источника свет затратит на путь время  $t_{\perp} = 2L'/c$ . Расстояние  $L'$  найдем по теореме Пифагора:

$$L' = \sqrt{L^2 + \left(\frac{Vt_{\perp}}{2}\right)^2}.$$

Отсюда получаем уравнение для времени  $t_{\perp}$ :

$$t_{\perp} = \frac{2}{c} \sqrt{L^2 + \left(\frac{Vt_{\perp}}{2}\right)^2}.$$

Решение этого уравнения дает

$$t_{\perp} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9.8)$$

Сравнивая времена  $t_{\parallel}$  и  $t_{\perp}$ , убеждаемся, что они различаются.

Конструктивно интерферометр Майкельсона был выполнен так, что луч от источника раздваивался, часть его шла параллельно скорости Земли, а часть — ортогонально. После отражения от зеркал лучи встречались в одной точке и создавали интерференционную картину. Никакой разницы во временах прохождения обоих путей обнаружено не было. Но, быть может, скорости Земли и эфира случайно совпали, и потому эфирного ветра не наблюдалось? Опыт повторили через полгода, когда Земля в своем орбитальном движении повернула в противоположную сторону. Результат оказался тем же.

### 9.3 Преобразования Лоренца

Для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона—Морли была выдвинута интересная гипотеза. Сначала Дж. Фитцджеральд, а затем (независимо) Г. А. Лоренц попытались объяснить результат опыта тем, что эфирный ветер «давит» на тела и сокращает их размеры вдоль направления движения. Если это так, то в формулах для продольного распространения света в интерферометре надо заменить «истинную» длину пути  $L$  на некоторую другую величину  $L_{\parallel}$ . Тогда формула (9.7) примет вид

$$t_{\parallel} = \frac{2L_{\parallel}}{c} \frac{1}{1 - V^2/c^2}. \quad (9.9)$$

Для совпадения времен  $t_{\parallel} = t_{\perp}$  достаточно тогда положить

$$L_{\parallel} = L \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (9.10)$$

Гипотеза Фитцджеральда—Лоренца казалась искусственной, изобретенной для объяснения результатов лишь одного эксперимента.

А между тем у физиков появилась еще одна трудность, не связанная с опытом Майкельсона. К этому времени сформировалась теория электромагнетизма, воплотившаяся в уравнения Максвелла. И оказалось, что уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразований Галилея. Это означало,

что с помощью электромагнитного поля, казалось бы, можно сделать то, что не удалось в опытах Майкельсона — обнаружить движение инерциальной системы. Но тогда пришлось бы отказаться от принципа относительности Галилея, который выглядел весьма убедительно. К тому же свет, использованный в опытах Майкельсона—Морли, это частный случай электромагнитного поля.

Поэтому был поставлен вопрос: а как должны выглядеть преобразования координат от одной системы отсчета к другой, чтобы уравнения Максвелла были инвариантными? Ответ дал в 1904 г. Лоренц, и с тех пор эти преобразования называют его именем (хотя они появлялись ранее в работах других ученых — у В. Фохта в 1887 г. и у Дж. Лармора в 1900 г.).

Из уравнений Максвелла следует, в частности, что свет распространяется со скоростью  $c$ . Вернемся к двум инерциальным системам отсчета (см. рис. 9.1). Одну мы будем считать неподвижной ( $K$ -система). Пусть другая система ( $K'$ ) движется относительно  $K$ -системы с постоянной скоростью  $\vec{V}$ . Для упрощения будем считать, что оси координат обеих систем параллельны, в начальный момент времени точки  $O$  и  $O'$  (начало координат в обеих системах) совпадают, а затем точка  $O'$  движется со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$ . Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  из точки  $O$ , совпадающей с точкой  $O'$ , вдоль оси  $x$  излучается световой импульс. Уравнение его распространения имеет вид  $x = ct$ . Аналогично должно выглядеть уравнение распространения света относительно системы отсчета  $K'$ :  $x' = ct'$ . Это — частный случай инвариантности уравнений Максвелла, но его рассмотрения достаточно, чтобы вывести преобразования Лоренца.

Мы будем рассуждать так же, как и при выводе преобразований Галилея, учитывая все, что успели с тех пор узнать. При преобразованиях Галилея координата  $x$  относительно системы отсчета  $K$  складывалась из положения начала отсчета системы  $K'$  (величина  $Vt$ ) и координаты  $x'$ . Но сейчас мы уже не будем предполагать инвариантности длин и потому умножим  $x'$  на некий коэффициент  $\gamma$ . Иными словами, мы предполагаем *пропорциональность* длин в разных системах отсчета, но не их равенство. Тогда координата  $x$  какой-либо материальной точки связана с координатой  $x'$  этой же точки соотношением

$$x = \gamma x' + Vt. \quad (9.11)$$

Коэффициент  $\gamma$  пока неизвестен, а отрезок  $Vt$  — расстояние между точками  $O$  и  $O'$  в момент времени  $t$ , измеряемый по часам системы  $K$ .

Если система  $K'$  движется относительно  $K$  со скоростью  $V$ , то система  $K$  движется относительно  $K'$  со скоростью  $-V$ . Ввиду равноправности обеих систем отсчета можно написать аналогичную связь между координатами:

$$x' = \gamma x - Vt'. \quad (9.12)$$

Теперь отрезок  $Vt'$  — это расстояние между точками  $O$  и  $O'$  в момент времени  $t'$ , измеряемый по часам системы  $K'$ . Как видно, мы не предполагаем инвариантности интервалов времени, но и не отвергаем такую возможность: если наши уравнения допустят решение  $\gamma = 1$ ,  $t = t'$ , то мы вернемся в лоно классической механики. Как мы увидим, этот вариант не реализуется.

Запишем преобразования (9.11), (9.12) так, чтобы в левой и правой частях уравнений стояли координаты и времена, относящиеся к одной системе отсчета.

Для этого выразим  $x$  через  $x', t'$  из уравнения (9.12), подставим это выражение в (9.11) и найдем оттуда  $t$ . Получаем в итоге:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\gamma}, \quad t = \frac{Vt' + x'(1 - \gamma^2)}{V\gamma}. \quad (9.13)$$

Применим теперь преобразования координат (9.13) к уравнению  $x = ct$  распространения светового импульса в системе отсчета  $K$ . Подставляя сюда выражения (9.13) для  $x, t$ , находим:

$$\frac{x' + Vt'}{\gamma} = c \left[ \frac{Vt' + x'(1 - \gamma^2)}{V\gamma} \right], \quad (9.14)$$

откуда

$$x' = ct' \left[ \frac{1 - V/c}{1 - (1 - \gamma^2)c/V} \right]. \quad (9.15)$$

Чтобы это уравнение имело вид  $x' = ct'$ , выражение в квадратных скобках должно быть равно единице, т. е.  $1 - \gamma^2 = V^2/c^2$  или

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (9.16)$$

Подставляя выражение для  $\gamma$  в (9.13), получаем преобразования Лоренца. Их надо дополнить соотношениями  $y = y', z = z'$ , которые в точности совпадают с тем, что было в преобразованиях Галилея.

**Преобразования Лоренца**, оставляющие инвариантными уравнения теории электромагнетизма, имеют вид:

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.} \quad (9.17)$$

Для получения **обратных преобразований Лоренца** достаточно поменять знак у скорости  $V$  и перенести штрихи из левой части уравнений в правую:

$$\boxed{x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.} \quad (9.18)$$

## 9.4 Постулаты Эйнштейна. Некоторые эффекты специальной теории относительности

Достижения предшественников были осмыслены и приведены в стройную систему благодаря работам А. Пуанкаре и А. Эйнштейна. К 1905 г. была создана специальная теория относительности (СТО) — физическая теория пространства и времени, в которой, как и в классической ньютоновской механике, предполагается, что время однородно, а пространство однородно и изотропно. СТО основана на двух постулатах.



- **Принцип относительности.** Никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной системы, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно: все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.
- **Принцип инвариантности скорости света.** Скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Первый постулат является обобщением механического принципа относительности Галилея на все явления природы. Согласно второму постулату, постоянство скорости света — фундаментальное свойство природы, которое констатируется как опытный факт. Выше мы использовали этот постулат в форме уравнений движения светового импульса  $x = ct$ ,  $x' = ct'$ . Из этих постулатов следует необходимость замены преобразований Галилея преобразованиями Лоренца (9.17).

Непосредственное следствие преобразований Лоренца таково: **не может быть объектов, движущихся быстрее света.** Действительно, с такими объектами можно было бы связать систему отсчета, а при  $V > c$  для координат и времен получатся мнимые значения. Выходит, что скорость света играет роль **предельно возможной скорости распространения сигнала.**

## Инвариантность интервала

Пусть даны два события: одно произошло в момент времени  $t_1$  в точке с координатами  $x_1, y_1, z_1$ , а второе — в момент времени  $t_2$  в точке с координатами  $x_2, y_2, z_2$ .

◆ **Интервалом между событиями называется величина**

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}. \quad \blacklozenge \quad (9.19)$$

Поставив над координатами и временами штрихи, мы получим величину интервала  $s'_{12}$  между *этими же событиями* в другой системе отсчета. Из преобразований Лоренца получаем соотношения

$$\begin{aligned} c^2(t_2 - t_1)^2 &= \frac{c^2(t'_2 - t'_1)^2 + 2V(t'_2 - t'_1)(x'_2 - x'_1) + V^2(x'_2 - x'_1)^2/c^2}{1 - V^2/c^2}, \\ (x_2 - x_1)^2 &= \frac{(x'_2 - x'_1)^2 + 2V(x'_2 - x'_1)(t'_2 - t'_1) + V^2(t'_2 - t'_1)^2}{1 - V^2/c^2}, \\ (y_2 - y_1)^2 &= (y'_2 - y'_1)^2, \\ (z_2 - z_1)^2 &= (z'_2 - z'_1)^2, \end{aligned}$$

из которых следует:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2} = s'_{12}.$$

Таким образом, величина интервала оказалась инвариантом относительно преобразований Лоренца. В классической механике таким свойством обладали по

отдельности временной интервал  $t_{12} = t_2 - t_1$  и пространственное расстояние

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

В *релятивистской* физике (от англ. *relativity* — относительность) этим свойством обладает только комбинация  $s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$ .

### Замедление времени

Пусть в начале координат системы  $K'$  закреплены часы: их координаты равны тогда  $x' = y' = z' = 0$ , а  $t'$  — показываемое ими время (т. е. время в системе отсчета  $K'$ ). Подставляя эти значения в уравнения (9.17) преобразований Лоренца, находим обычные выражения для координат этих часов в системе  $K$ :  $x = Vt, y = z = 0$  (т. е. в системе  $K$  часы движутся со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$ ). Удивительным является последнее уравнение — преобразование времени:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \text{или} \quad t' = t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (9.20)$$

Время  $t'$ , отсчитываемое часами в системе  $K'$ , меньше времени  $t$ , отсчитываемого часами системы  $K$ .

◆ *Время  $t'$ , показываемое часами в системе отсчета, где они покоятся, называется собственным временем.* ◆

Конкретное устройство часов здесь не играет никакой роли: речь идет о том, что временной интервал не является больше инвариантом и различен для разных систем отсчета. Это демонстрирует следующая задача.

**Задача 9.34.** *Время жизни  $\tau_0$  покоящегося мюона (одной из элементарных частиц) равно 2,2 мкс. От точки рождения до детектора, зарегистрировавшего его распад, мюон пролетел расстояние  $l = 6$  км. С какой скоростью  $v$  (в долях скорости света) летел мюон?*

**Решение.** В системе отсчета  $K'$ , связанной с мюоном, его время жизни равно  $\tau_0$ . В лабораторной системе  $K$ , согласно (9.20), от рождения мюона до распада пройдет время  $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . За это время мюон преодолет расстояние

$$l = v\tau = \frac{v\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отсюда найдем

$$\frac{v}{c} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + (c\tau_0)^2}}.$$

Величина  $l_0 = c\tau_0 = 3 \cdot 10^8 \times 2,2 \cdot 10^{-6} = 660$  м  $\ll l$ , так что

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + (l_0/l)^2}} \approx 1 - \frac{l_0^2}{2l^2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{660}{6000} \right)^2 = 0,994.$$

Согласно классической механике, мюон должен был бы пролететь небольшое расстояние — всего  $v\tau_0 = 0,994c\tau_0 = 0,994l_0 = 656$  м. Многочисленные наблюдения за элементарными частицами, покрывающими гораздо большие расстояния, чем им позволяет классическая механика, — прямое доказательство реальности эффекта замедления времени. ■

## Сокращение длины

Пусть в системе отсчета  $K'$ , движущейся вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $V$  (рис. 9.1), закреплен стержень, длина которого равна  $l_0$ .

♦ *Длина  $l_0$  стержня, измеренная в системе отсчета, где он покоится, называется его собственной длиной.* ♦

Если один конец стержня находится в начале координат ( $x'_1 = 0$ ), а его другой конец находится в точке с координатой  $x'_2 = l_0$ , то из преобразований Лоренца следуют координаты концов стержня в системе отсчета  $K$ :  $x_1 = Vt$ ,  $x_2 = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2} + Vt$ . Разность этих координат дает длину стержня в системе отсчета  $K$ :

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (9.21)$$

Движущийся стержень становится короче стержня покоящегося. Этот факт также находится в согласии с утверждением, что в релятивистской механике инвариантом является интервал  $s_{12}$ , а не пространственные расстояния. Полученное сокращение длины движущегося объекта напоминает сокращение Фитцджеральда—Лоренца (9.10), но с той разницей, что никакой эфир на объект не действует и никаких механических напряжений в стержне не возникает. Просто длина в движущейся и неподвижной системах отсчета различается, как различаются временные интервалы между двумя событиями. Оба этих эффекта — сокращение длины и замедление времени — связаны друг с другом.

**Задача 9.35.** *Рассмотреть события задачи 9.34 с точки зрения наблюдателя, «сидящего» на мюоне.*

**Решение.** В момент рождения мюона детектор, регистрирующий его распад, находился с точки зрения наблюдателя в лаборатории на расстоянии  $l$ . С точки зрения наблюдателя на мюоне детектор приближается к мюону со скоростью  $v$ , причем начальное расстояние  $L$  до него меньше:  $L = l\sqrt{1 - v^2/c^2} = 6000 \times \sqrt{1 - 0,994^2} = 656$  м. Детектор приблизится к мюону за время  $t = L/v = 656/(0,994c) = 656/(0,994 \times 3 \cdot 10^8) = 2,2 \cdot 10^{-6}$  с. Это время совпадает с временем жизни мюона, который распадется в детекторе, как это видел и неподвижный наблюдатель. Описания событий разные, но оба наблюдателя зафиксируют один и тот же физический факт — распад мюона в детекторе. ■

## Одновременность и последовательность событий

Пусть имеются два события 1 и 2. Место и время совершения первого из них выберем за начало отсчета соответствующих координат:  $x_1 = 0$ ,  $t_1 = 0$ . Пусть событие 2 происходит одновременно или позже первого ( $t_2 \geq 0$ ) в точке на оси  $Ox$ , удаленной на расстояние  $L$ . Посмотрим, каковы координаты и моменты времени совершения этих событий с точки зрения наблюдателя, движущегося в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $V$ . Из преобразований Лоренца следует, что  $x'_1 = 0$ ,  $t'_1 = 0$ , т. е. координаты и время совершения первого события не изменяются. Второе же событие произойдет в точке  $x'_2$  в момент времени  $t'_2$ , где

$$x'_2 = \frac{L - Vt_2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{V}{c^2}L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9.22)$$

Знак координаты  $x'_2$  будет таким же, как и в классической механике. Если наблюдатель не успеет долететь до места совершения события к моменту, когда оно произойдет ( $Vt_2 < L$ ), то событие случится у него впереди по курсу ( $x'_2 > 0$ ), если же успеет ( $Vt_2 > L$ ), — то событие 2 произойдет сзади него ( $x'_2 < 0$ ). Но вот то, что происходит с *моментом* совершения события 2, не имеет аналога в классической физике. В самом деле, относительно неподвижного наблюдателя событие 2 произошло позже события 1. Но при достаточно большой скорости  $V > c^2 t_2 / L$  знак у  $t'_2$  становится отрицательным, т. е. есть порядок событий меняется!

Но всегда ли это возможно? Ведь события 1 и 2 могут быть причинно связаны друг с другом. Например, событие 1 — рождения отца, а событие 2 — рождение его ребенка. Разве не было бы абсурдным, если бы нашелся наблюдатель, для которого ребенок родился бы прежде отца (нарушилась бы, как говорят, причинно-следственная связь)? Конечно, это невозможно. Давайте сформулируем условие, при котором события 1 и 2 могут быть связаны друг с другом. Так как максимально возможная скорость распространения любого сигнала не превышает  $c$ , то события могут находиться в причинно-следственной связи, если они не слишком удалены друг от друга:  $L \leq ct_2$ . Только тогда «сообщение» о первом событии достигнет второго до его совершения. Но если  $ct_2 \geq L$ , то для изменения порядка событий наблюдатель должен двигаться со скоростью  $V > c(ct_2/L) > c$ . А это, как мы видели, невозможно. Таким образом, события, которые могут в принципе зависеть друг от друга, имеют одинаковую временную последовательность для наблюдателей во всех системах отсчета. Интервал (9.19) между такими событиями является действительным числом и называется «*временноподобным интервалом*».

Если же события происходят настолько далеко друг от друга, что они не могут быть связаны никаким сигналом ( $ct_2 < L$ ), то порядок совершения этих событий зависит от скорости движения наблюдателя. Так, при скорости  $V > c^2 t_2 / L$  порядок событий будет для него иным, нежели в неподвижной системе отсчета. Интервал (9.19) между такими событиями является мнимым числом и называется «*пространственноподобным интервалом*». В частности, одновременные события ( $t_1 = t_2$ ), происходящие в неподвижной системе отсчета на любом расстоянии друг от друга, не могут быть причинно-связанными (для этого нужны были бы сигналы с бесконечно большой скоростью). Из (9.22) получаем при  $t_2 = 0$ :

$$t'_2 = -\frac{L}{c} \cdot \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9.23)$$

Значит, при любой скорости наблюдателя, движущегося в положительном направлении оси  $Ox$ , событие 2 происходит раньше события 1. При движении в обратном направлении ( $V < 0$ ) событие 2 происходит позже.

Мы убедились, что наряду с относительностью временных интервалов и пространственных расстояний даже одновременность событий не имеет абсолютного значения. Все эти величины *относительны*, т. е. зависят от движения наблюдателя. В классической физике относительными были, например, скорости тел, их кинетические энергии. Теперь этот список пополнился, только и всего.

**Задача 9.36.** Рассмотреть процесс измерения длины движущегося стержня с точки зрения наблюдателя, «сидящего» на нем.

**Решение.** С точки зрения наблюдателя в системе  $K'$ , где стержень покоится, движется его коллега в системе  $K$ . Следовательно все его измерительные линейки стали короче в  $\sqrt{1 - V^2/c^2}$  раз. Казалось бы, наблюдатель в  $K$  должен зафиксировать тогда не сокращение стержня, а его удлинение:

$$l \stackrel{?}{=} \frac{l_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9.24)$$

Возникает кажущийся парадокс, который разрешается очень просто.

Дело в том, что сокращение всех линеек в системе  $K'$  — лишь один из эффектов СТО. Здесь проявляется и другой эффект — разное понятие одновременности. Наблюдатель в системе  $K$  измеряет положение концов стержня *одновременно по своим часам*. Но с точки зрения наблюдателя в  $K'$  положение одного из концов стержня измерено раньше положения другого. За это время стержень успел сдвинуться и потому наблюдатель в  $K$  измерял совсем не длину  $l_0$ , а какую-то другую величину  $\tilde{l}$ , и измеряя ее своей укоротившейся линейкой, должен был получить значение

$$l = \frac{\tilde{l}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9.25)$$

Найдем теперь  $\tilde{l}$  с помощью преобразований Лоренца. Пусть наблюдатель в  $K$  измеряет положение концов стержня в момент  $t = 0$ . Согласно обратным преобразованиям Лоренца (9.18), этому моменту времени соответствует следующая связь координаты и времени в системе отсчета  $K'$ :

$$t' = -\frac{Vx'}{c^2}. \quad (9.26)$$

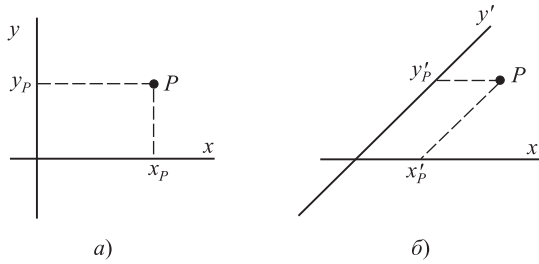
Отсюда следует, что с точки зрения наблюдателя в системе  $K'$  его коллега измерил положение правого конца стержня с координатой  $x' = l$  на время  $\Delta t = Vl_0/c^2$  *раньше*, чем положение его левого конца ( $x' = 0$ ). Поскольку с точки зрения  $K'$  система  $K$  движется навстречу левому концу стержня, за время между измерениями она сместится на расстояние  $V\Delta t = V^2l_0/c^2$ , так что с точки зрения  $K'$  наблюдатель в  $K$  измеряет на самом деле не длину  $l_0$ , а меньшее расстояние  $\tilde{l} = l_0 - V\Delta t = l_0(1 - V^2/c^2)$ . Подставляем это значение в (9.25) и получаем, что с точки зрения наблюдателя, «сидящего» на движущемся стержне, его коллега в системе отсчета  $K$  и должен был получить тот результат, который получил:

$$l = \frac{l_0(1 - V^2/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (9.27)$$

И никаких парадоксов! Было построено немало хитроумных мысленных экспериментов такого рода, ведущих к кажущимся парадоксам, и всякий раз СТО успешно с ними справлялась. ■

## 9.5 Пространство-время Минковского

В 1908 г. Г. Минковский в своем докладе «Пространство и время» провозгласил, что «отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность». Чтобы понять это утверждение, вспомним, что в декартовой системе координат положение любой точки  $P$  описывается тройкой чисел  $\{x, y, z\}$  — ее координатами. Заметим,



**Рис. 9.3.** Прямоугольные и косоугольные декартовы координаты

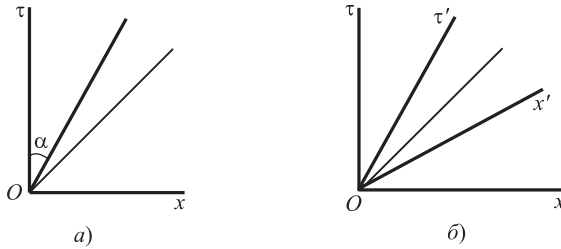
что система вовсе не обязана быть прямоугольной: с таким же успехом мы можем пользоваться косоугольной системой, и координаты точки  $P$  определяются по тому же принципу — отрезками, отсекаемыми на координатных осях прямыми, проведенными из  $P$  параллельно осям (рис. 9.3). При повороте системы координат числа  $\{x, y, z\}$  меняются, но сама точка  $P$  (в которой может быть расположен какой-то физический объект) остается той же самой. В частности, остается неизменным ее расстояние до начала координат (и вообще расстояние между любыми двумя точками). Можно сказать, что каждая система координат по-своему «нарезает» пространство на координаты  $\{x, y, z\}$ .

В специальной теории относительности в игру вступает время. Переход к новой системе отсчета переплетает время с пространством, оставляя неизменным интервал между любыми двумя событиями. Это свойство позволило Минковскому представить *систему отсчета* как декартову *систему координат* в четырехмерном пространстве-времени, а преобразования Лоренца — как ее поворот в плоскостях  $(t, x)$ ,  $(t, y)$  или  $(t, z)$ . Есть, правда, одна особенность: в выражение для интервала (9.19) квадраты пространственных координат входят с другим знаком, нежели квадраты времени. Поэтому пространство-время Минковского называется *псевдоевклидовым*. Повороты системы координат в таком пространстве имеют свои особенности, как мы увидим ниже.

Для изображения мировых линий на пространственно-временных диаграммах удобно использовать одинаковые единицы по всем осям. Для этого будем измерять время в «световых метрах»  $\tau = ct$  (световой метр — это время, за которое свет проходит расстояние в один метр). Легко догадаться, что в этих координатах мировая линия луча света, испущенного из начала координат в момент времени  $\tau = 0$  в положительном направлении оси  $Ox$ , является биссектрисой угла между осью времени  $O\tau$  и пространственной осью  $Ox$ . Другими словами, при использовании «световых метров» все скорости безразмерны и измеряются в долях скорости света ( $v = \Delta x / \Delta t$ , откуда  $\Delta x / \Delta \tau = v/c$ ), так что значение самой скорости света равно единице.

Обратим внимание на важное обстоятельство: на любой пространственно-временной диаграмме *ось времени — это мировая линия тела отсчета, с которым связана данная система отсчета*. Действительно, в собственной системе отсчета тело покоится и его пространственные координаты не меняются.

Мировая линия тела, начавшего движение с постоянной скоростью  $V$  из начала координат  $\tau = 0$ ,  $x = 0$ , описывается уравнением  $x = Vt = (V/c)\tau$  и представляет собой прямую линию с углом наклона  $\alpha$  к оси времени  $O\tau$ , где  $\operatorname{tg} \alpha = V/c$  (рис. 9.4, а). Если мы свяжем с этим телом «штрихованную» систему отсчета, то его мировая линия станет в этой системе осью времени  $O\tau'$ , а пространственная ось  $Ox'$  определится из условия, что мировая линия светового луча должна остаться биссектрисой и в новых координатных осях, так как скорость света не зависит от выбора системы отсчета (рис. 9.4, б). Переход

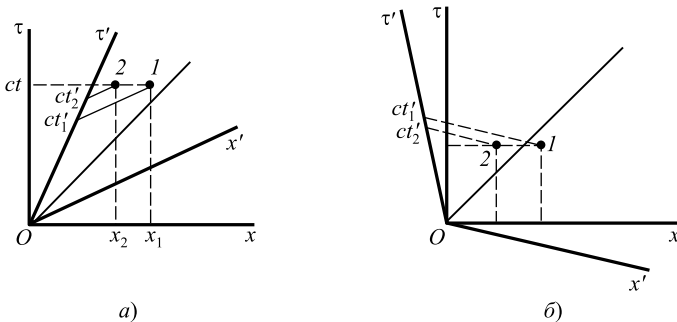


**Рис. 9.4.** Мировая линия тела, движущегося в лабораторной системе с постоянной скоростью  $V$ . Угол наклона определяется как  $\operatorname{tg} \alpha = V/c$ , мировая линия луча света есть биссектриса угла, образованного координатными осями  $O\tau$  и  $Ox$ . Если связать с этим телом движущуюся систему отсчета, то его мировая линия станет осью времени  $O\tau'$  «штрихованной» системы отсчета, а ось  $Ox'$  расположится так, чтобы мировая линия луча света осталась биссектрисой между координатными осями  $O\tau'$  и  $Ox'$

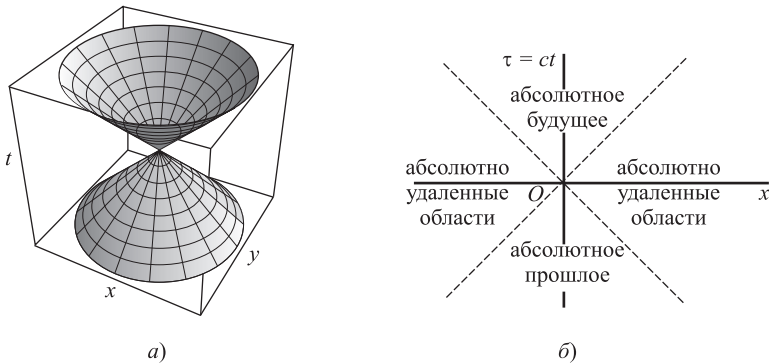
к косоугольной системе координат — та цена, которую мы платим, пытаясь изобразить псевдоевклидово пространство на евклидовой плоскости.

Пространственно-временные диаграммы очень полезны для понимания непривычных свойств релятивистской кинематики. Рассмотрим сначала относительность одновременности, следующую из преобразований Лоренца. Пусть в лабораторной системе в разных точках пространства одновременно произошли события 1 и 2. В другой системе отсчета эти события уже не одновременны и, более того, их последовательность тоже относительна. При одном выборе «штрихованной» системы отсчета первое событие наступит раньше второго (рис. 9.5,а), при другом — позже (рис. 9.5,б).

Одновременные события 1 и 2 — частный случай событий с пространственноподобным интервалом между ними. Если попытаться соединить такие события каким-то сигналом, то его мировая линия будет отклонена от оси времени сильнее, чем биссектриса. Иными словами, такой сигнал должен распространяться быстрее скорости света. Это невозможно, так что между такими событиями не существует причинно-следственной связи и смена их последовательности не нарушит никаких законов физики.



**Рис. 9.5.** События 1 и 2, одновременные в лабораторной системе отсчета (а), не будут одновременными в другой системе отсчета (б). Более того, последовательность во времени этих событий также зависит от системы отсчета



**Рис. 9.6.** Световой конус делит пространство-время на области абсолютного будущего, абсолютного прошлого и область вне полостей конуса, где временная последовательность событий зависит от системы отсчета

Если представить себе, что событие  $O$ , взятое за начало координат лабораторной системы отсчета, — это испускание сферической световой волны, распространяющейся во все стороны, то совокупность мировых линий всех световых лучей образует так называемый *световой конус* (рис. 9.6, а). Конечно, световой конус должен быть изображен в четырех измерениях  $ct, x, y, z$ , но, как писал поэт Ф. Соллогуб, «не умеем мы четвертый строить перпендикуляр», и поэтому рисуем не сам четырехмерный конус, а его сечение при  $z = 0$ . А на двумерных пространственно-временных диаграммах он изображен еще и в сечении  $y = 0$  и вырождается в пересекающиеся прямые, являющиеся мировыми линиями световых лучей, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси  $Ox$  (показаны пунктиром на рис. 9.6, б).

Однако, пониманию эффектов СТО это упрощение не препятствует. По отношению к событию  $O$ , выбранному за начало отсчета, световой конус делит пространство-время на различные области. Верхняя полость конуса — события, которые связаны с  $O$  времениподобными интервалами. Сигнал о событии  $O$  успевает дойти до этих точек, поэтому они могут находиться с  $O$  в причинно-следственной связи и в любой системе отсчета будут происходить позже  $O$ . Нижняя полость — события в прошлом ( $t < 0$ ), сигнал от которых успел дойти до  $O$ . Эти события в любой системе отсчета происходили до события  $O$ . Поэтому внутренние области светового конуса с вершиной в точке  $O$  называются *абсолютным будущим* и *абсолютным прошлым* по отношению к точке  $O$  (см. рис. 9.6, б). Зато подходящим выбором системы отсчета можно добиться того, что любое событие внутри светового конуса произойдет (или уже произошло) в той же точке пространства, что и событие  $O$ .

Области вне светового конуса — события, любое из которых, в зависимости от выбора системы отсчета, может происходить до, после или одновременно с событием  $O$ . Но никакое из них не может происходить в том же месте, что и событие  $O$ , какую бы систему отсчета ни выбрать.

## 9.6 Сложение скоростей по Лоренцу

Мы говорили, что скорость света — максимально возможная скорость распространения сигнала. Но что будет, если свет испускается движущимся источником



в направлении его скорости  $V$ . Согласно закону сложения скоростей, следующему из преобразований Галилея, скорость света должна быть равна  $c+V$ . Но в теории относительности это невозможно. Посмотрим, какой закон сложения скоростей следует из преобразований Лоренца. Для этого запишем их для бесконечно малых величин:

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + V dx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9.28)$$

По определению скорости ее компоненты в системе отсчета  $K$  находятся как отношения соответствующих перемещений к временным интервалам:  $v_x = dx/dt$  и т. д. Аналогично определяется скорость объекта в движущейся системе отсчета  $K'$ , только пространственные расстояния и временные интервалы надо взять относительно этой системы:  $v'_x = dx'/dt'$  и т. д. Следовательно, разделив выражение  $dx$  на выражение  $dt$ , получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + V dx'/c^2}. \quad (9.29)$$

Разделив в правой части равенства числитель и знаменатель на  $dt'$ , находим связь  $x$ -компонентов скоростей в разных системах отсчета, которая отличается от правила сложения скоростей (9.2) по Галилею:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (9.30)$$

Кроме того, в отличие от классической физики, меняются и компоненты скоростей, ортогональные направлению движения. Аналогичные вычисления для других компонентов скоростей дают:

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (9.31)$$

Таким образом, мы вывели формулы для преобразования скоростей в релятивистской механике. Обратные преобразования получаются при переносе штрихов из правой части в левую и смене знака скорости  $V$  на  $-V$ .

Теперь мы можем ответить на вопрос, поставленный в начале данного раздела. Пусть в точке  $O'$  движущейся системы отсчета  $K'$  установлен лазер, посылающий импульс света в положительном направлении оси  $O'x'$ . Какой будет скорость импульса для неподвижного наблюдателя в системе отсчета  $K$ ? В этом случае скорость светового импульса в системе отсчета  $K'$  имеет компоненты  $v'_x = c, v'_y = 0, v'_z = 0$ . Применяя закон релятивистского сложения скоростей, находим для компонентов скорости импульса относительно неподвижной системы  $K$ :  $v_x = c, v_y = 0, v_z = 0$ . Мы получаем, что скорость импульса  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = c$ . Тот же результат получится при любом направлении распространения импульса. Это естественно, так как независимость скорости света от движения источника и наблюдателя заложена в одном из постулатов

теории относительности. Релятивистский закон сложения скоростей — следствие этого постулата.

Скорость света оказывается выделенной тем, что не меняется при «прибавлении» к ней любой скорости движения источника  $V < c$ . В классической физике при галилеевском законе сложения таким свойством обладает бесконечно большая скорость: сколько ни прибавляй или ни отнимай от бесконечности, она бесконечностью и останется. Ньютоновская механика — это теория, где допустима бесконечно большая скорость распространения сигналов. Такое допущение хорошо работает при малых скоростях объектов  $v \ll c$ .

Действительно, при малых скоростях системы отсчета  $V \ll c$  преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея и мы получаем обычный закон сложения скоростей  $v_x = v'_x + V, v_y = v'_y, v_z = v'_z$ . При этом ход течения времени и длина линейки будут одинаковы в обеих системах отсчета. Таким образом, законы классической механики применимы, если скорости объектов много меньше скорости света. Теория относительности не зачеркнула достижения классической физики, она установила рамки их справедливости.

**Задача 9.37.** Тело со скоростью  $v_0$  налетает перпендикулярно на стенку, двигающуюся ему навстречу со скоростью  $v$ . Пользуясь формулами для релятивистского сложения скоростей, найти скорость  $v_1$  тела после отскока. Удар абсолютно упругий, масса стенки намного больше массы тела. Проанализировать предельные случаи. Найти скорость  $v_1$ , если  $v_0 = v = c/3$ .

**Решение.** Нам понадобятся как формула (9.30), так и формула для обратного преобразования:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad (9.32)$$

где  $V$  — скорость системы отсчета  $K'$  относительно системы  $K$ . Направим ось  $x$  вдоль начальной скорости тела  $v_0$  и свяжем систему отсчета  $K'$  со стенкой. Тогда  $v_x = v_0$  и  $V = -v$ . В системе отсчета, связанной со стенкой, начальная скорость  $v'_0$  тела согласно (9.32) равна

$$v'_0 = \frac{v_0 + v}{1 + v_0 v/c^2}. \quad (9.33)$$

Поскольку стенку можно считать бесконечно массивной, по закону сохранения энергии после упругого удара тело отскочит в обратном направлении с тем же (относительно стенки) абсолютным значением скорости:

$$v'_1 = -v'_0 = -\frac{v_0 + v}{1 + v_0 v/c^2}. \quad (9.34)$$

Вернемся назад в лабораторную систему отсчета  $K$ . Подставляя в (9.30)  $v'_1$  вместо  $v'_x$  и учитывая, что  $V = -v$ , находим после преобразований:

$$v_1 = \frac{v'_1 - v}{1 - v'_1 v/c^2} = -\frac{v_0(1 + v^2/c^2) + 2v}{1 + 2v_0 v/c^2 + v^2/c^2}. \quad (9.35)$$

Проанализируем предельные случаи.

- Если скорости тела и стенки малы ( $v_0 \ll c, v \ll c$ ), то можно пренебречь всеми членами, где эти скорости и их произведение делятся на скорость света. Получаем тогда из (9.35) результат классической механики  $v_1 = -(v_0 + 2v)$  — скорость шара после отскока увеличивается на удвоенную скорость стенки; направлена

она, естественно, противоположно начальной. Ясно, что в релятивистском случае этот результат не годится. В частности, при  $v_0 = v = c/3$  из него следует, что скорость тела после отскока будет равна  $v_1 = -c$ , чего не может быть.

- Пусть теперь на стенку налетает объект со скоростью света (например, лазерный луч отражается от движущегося зеркала). Подставляя  $v_0 = c$  в соотношение (9.35), получаем

$$v_1 = -\frac{c(1 + v^2/c^2) + 2v}{1 + 2cv/c^2 + v^2/c^2} = -c \frac{(1 + v/c)^2}{(1 + v/c)^2} = -c.$$

Иными словами, скорость лазерного луча изменила направление, но не свою абсолютную величину, как и должно быть.

- Рассмотрим теперь случай, когда стенка движется с релятивистской скоростью:  $v \rightarrow c$ . В этом случае (9.35) дает нам

$$v_1 \rightarrow -\frac{2v_0 + 2c}{2 + 2v_0c/c^2} = -c.$$

Тело после отскока также будет двигаться со скоростью, близкой к скорости света.

- Наконец, подставим в (9.35) значения  $v_0 = v = c/3$ :

$$v_1 = -c \frac{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{9}\right) + \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9}} = -\frac{7}{9}c = -0,78c.$$

В отличие от классической механики теория относительности дает для скорости после отскока значение, меньшее скорости света.

- Напоследок посмотрим, что случится, если стенка удаляется от тела с той же скоростью ( $v = -v_0$ ). Имеем в этом случае из (9.35):

$$v_1 = -\frac{v_0(1 + v_0^2/c^2) - 2v_0}{1 - 2v_0^2/c^2 + v_0^2/c^2} = -\frac{v_0(-1 + v_0^2/c^2)}{1 - v_0^2/c^2} = v_0.$$

Как и в классической механике, тело стенку не догонит, и его скорость не изменится. ■

## 9.7 Опыт Физо

Если показатель преломления среды равен  $n$ , то скорость света в этой среде равна  $v = c/n$ . Но представим себе, что среда движется со скоростью  $V$  и в направлении движения в ней распространяется световой импульс. С какой скоростью  $c'$  этот импульс движется относительно неподвижного наблюдателя? Для ответа на вопрос применим закон релятивистского сложения скоростей (9.30):

$$c' = \frac{v + V}{1 + vV/c^2} = \frac{c/n + V}{1 + V/cn}. \quad (9.36)$$

При небольших скоростях движения среды в этом выражении можно удержать лишь члены первого порядка по отношению  $V/c$ :

$$c' = \frac{c/n + V}{1 + V/cn} \approx \left(\frac{c}{n} + V\right) \left(1 - \frac{V}{cn}\right) \approx \frac{c}{n} + V - \frac{c}{n} \cdot \frac{V}{cn}. \quad (9.37)$$

Мы пришли к окончательному выражению:

$$c' \approx \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (9.38)$$

Если свет распространяется против движения среды, то в этой формуле следует поменять знак у скорости  $V$ .

В XIX в. еще полагали, что свет распространяется в эфире и что движущаяся среда частично увлекает эфир пропорционально своей скорости, так что скорость света становится равной  $c' = c/n + \alpha V$ , где  $\alpha$  — коэффициент увлечения эфира средой. Французский ученый Луи Физо в 1851 г. сумел измерить разность скорости света в неподвижной и движущейся среде (текущей воде) и эмпирически пришел к формуле (9.38). Теория относительности объяснила результат Физо, не привлекая дополнительных предположений об увлечении эфира движущейся средой.

## 9.8 Явление абберации

Выше мы убедились, что скорость света, излученного движущимся источником в направлении его движения, остается той же самой в обеих системах отсчета. Усложним задачу и посмотрим, что произойдет с лучом при произвольном направлении излучения.

**Задача 9.38.** Пусть на космическом корабле, летящем к Земле со скоростью  $V = \beta c$ , установлен лазер, посылающий световой импульс под углом  $\theta'$  к направлению полета. Найти скорость и направление импульса относительно Земли.

**Решение.** По условию, компоненты скорости лазерного импульса относительно корабля равны

$$v'_x = c \cos \theta', \quad v'_y = c \sin \theta', \quad v'_z = 0. \quad (9.39)$$

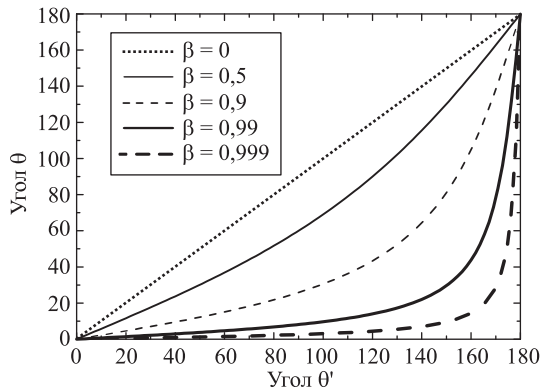
Подставляем эти значения в формулы (9.30) и (9.31):

$$v_x = \frac{V + c \cos \theta'}{1 + (V/c) \cos \theta'}, \quad v_y = c \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (V/c) \cos \theta'}, \quad v_z = 0. \quad (9.40)$$

Легко проверить, что  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$ , т. е. скорость света не зависит от движения источника. Косинус угла  $\theta$  наклона лазерного луча с точки зрения наблюдателя на Земле равен отношению компонента  $v_x$  к скорости света:

$$\cos \theta = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}. \quad (9.41)$$

На рисунке 9.7 показана зависимость угла  $\theta$  от угла  $\theta'$  при разных значениях относительной скорости источника  $\beta = V/c$ . Видно, что с увеличением скорости почти



**Рис. 9.7.** Изменение направления светового импульса, испущенного под углом  $\theta'$  к направлению движения источника. Приведены результаты расчета при разных скоростях  $V$  источника ( $\beta = V/c$ )

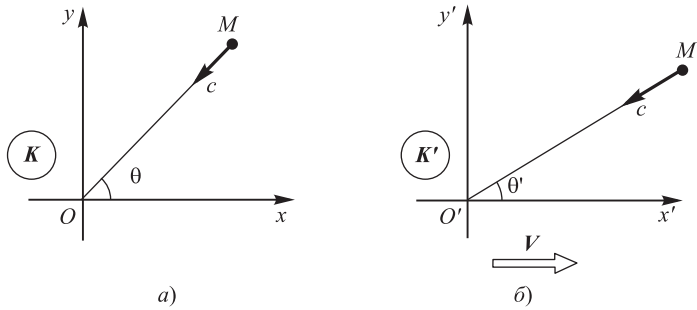


Рис. 9.8. Углы наблюдения звезды различны в системах отсчета  $K$  и  $K'$

все излучение движущегося источника сосредоточено в переднем конусе с небольшим раствором, что даже позволяет земному наблюдателю «видеть» заднюю сторону объекта. ■

Решенная задача имеет самое прямое отношение к явлению так называемой *годовой абберации звезд*, открытому Дж. Брэдли в 1725 г. Наблюдения показали, что в течение года звезды описывают на небе небольшие эллипсы. Теоретическое объяснение основывалось на идее сложения скорости луча света от звезды с орбитальной скоростью Земли. Рассказывают, что толчком к пониманию эффекта послужила прогулка Брэдли на яхте. Он заметил, что вымпел на мачте вовсе не указывает направления ветра, но меняет свое направление каждый раз при повороте яхты.

Итак, пусть в системе отсчета  $K$  («неподвижная» система, связанная, например, с Солнцем) некая звезда (точка  $M$ ) посылает свой луч на Землю (начало координат  $O$ ). Луч распространяется под углом  $\theta$  к направлению движения Земли, которое мы выбрали в качестве оси  $Ox$  (рис. 9.8, а). Скорость луча света равна  $c$ , скорость движения Земли равна  $V$ . В системе отсчета  $K'$ , связанной с Землей (рис. 9.8, б), угол наклона  $\theta'$  светового луча будет иным.

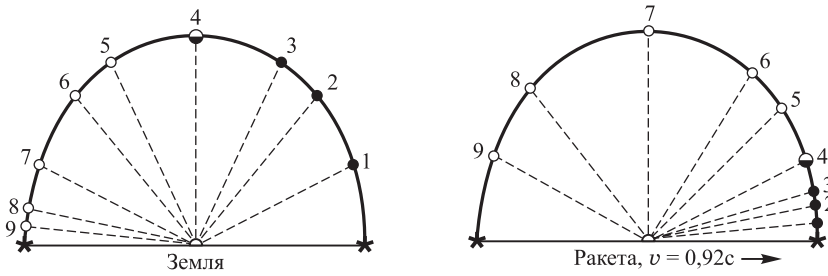
Все необходимые расчеты мы уже провели, остается лишь поменять знак у скорости света  $c \rightarrow -c$  в уравнении (9.41):

$$\cos \theta = \frac{V - c \cos \theta'}{-c + V \cos \theta'}.$$

Это уравнение легко переписать в виде

$$\cos \theta' = \frac{V + c \cos \theta}{c + V \cos \theta}. \quad (9.42)$$

По сравнению с (9.41) здесь просто поменялись местами углы  $\theta$  и  $\theta'$ . В течение года Земля в неподвижной системе описывает замкнутую траекторию, ее скорость меняется по величине и направлению, так что периодически меняется и угол наблюдения звезды  $\theta'$ , в то время как угол  $\theta$  остается неизменным. Это и есть явление абберации. Но скорость Земли мала по сравнению со скоростью света, и расчет по правилам галилеевского сложения скоростей будет отличаться от результатов (9.42) лишь на величину порядка  $V^2/c^2$ .



**Рис. 9.9.** Вид звездного неба с Земли (а) и с ракеты, летящей с релятивистской скоростью  $v = 0,92c$  (б). Белыми кружочками отмечены звезды, которые на Земле видны в задней (по отношению к направлению движения ракеты) полусфере, а черными — звезды передней полусферы. Видно, что по мере увеличения скорости вид звездного неба кардинально меняется

Применим теперь полученные формулы к случаю наблюдения звездного неба с гипотетического космического корабля, движущегося с большой скоростью. Представим себе, что звезды в лабораторной системе (Земля) расположены более или менее равномерно на небосводе. С точки зрения астрономов на корабле это уже не так (рис. 9.9). Действительно, звезда сзади по курсу корабля не сдвинется: из наших формул при  $\theta = 180^\circ$ ,  $\cos \theta = -1$  следует, что  $\cos \theta' = -1$ ,  $\theta' = 180^\circ$ . Звезда же, видимая под углом  $\theta = 90^\circ$  ( $\cos \theta = 0$ ) к курсу корабля, будет наблюдаться космонавтами в направлении  $\cos \theta' = V/c$ . Этот угол очень мал при  $V$  близких к  $c$ . В этом узком конусе будут сосредоточены все звезды передней (в неподвижной системе отсчета) полусферы. Наоборот, звезды из узкого конуса с тем же углом раствора, но сзади по курсу, займут всю заднюю полусферу в системе отсчета  $K'$ . Таким образом, при увеличении скорости корабля небо позади остается почти пустынным, в то время как почти вся видимая Вселенная сольется в яркое пятно впереди по курсу.

### 9.9 Форма объектов, движущихся с релятивистскими скоростями

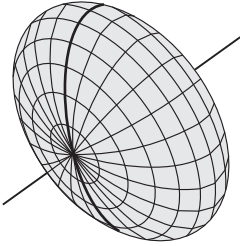
Пусть в движущейся системе отсчета  $K'$  покоится шар с центром в начале координат и радиусом  $R$ . Какую форму примет шар для наблюдателя в «неподвижной» системе отсчета  $K$ ? Уравнение поверхности шара в системе  $K'$  записывается обычным образом:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2. \tag{9.43}$$

Подставляя сюда преобразования Лоренца (9.17), получаем уравнение поверхности в системе  $K$ :

$$\left( \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right)^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{9.44}$$

Мы только что воспроизвели один из результатов А.Эйнштейна из его первой, и основной, статьи по СТО (1905), который он прокомментировал так: «Следовательно,

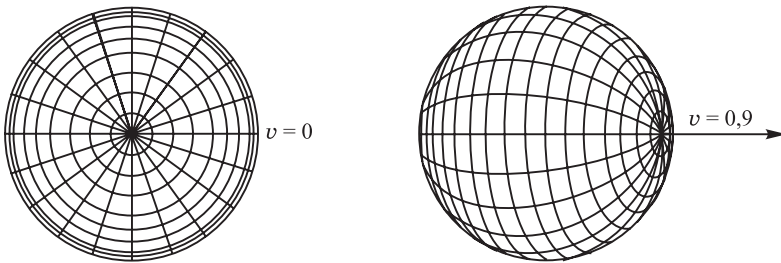


**Рис. 9.10.** Согласно Эйнштейну, быстро летящий шар при наблюдении из покоящейся системы отсчета будет казаться эллипсоидом, сплюснутым вдоль линии движения

твердое тело, которое в покоящемся состоянии имеет форму шара, в движущемся состоянии — при наблюдении из покоящейся системы — принимает форму эллипсоида вращения с полуосьми  $R\sqrt{1 - V^2/c^2}$ ,  $R$ ,  $R$ ».

Этот результат кажется очевидным: сокращение объектов в направлении их движения должно привести к изменению их формы, так что шар превращается в эллипсоид, куб — в параллелепипед и т. п. Но что понимается под изменением формы объектов? Сказанное выше относится к поверхностям, состоящим из точек, чье положение в пространстве зафиксировано в один и тот же момент времени  $t$ . Но что будет, если мы посмотрим на быстро летящий объект или сфотографируем его? Неужели космонавт, приближающийся к нашей Земле с околосветовой скоростью, увидит ее в окошко иллюминатора сплюснутым диском? Оказалось, что дело обстоит совсем не так, но физики осознали это всего лишь в конце 1950-х гг.

Бесспорно, что превращение шара в эллипсоид происходит, если зафиксировать положение всех точек его поверхности в один и тот же момент времени (рис. 9.10). Но при визуальном наблюдении (фотосъемке) видимая форма тела создается изображениями точек его поверхности, **одновременно** попавшими в глаз, но испущенными в **разное время**. Расчеты показывают, что объект будет казаться повернутым, но его форма не изменится (рис. 9.11). Здесь уместно вспомнить о возможности увидеть благодаря aberrации света заднюю сторону быстро движущегося объекта. Самое удивительное, что сохранением своей видимой формы летящий объект обязан именно сокращению Фитцджеральда—Лоренца: без него видимая форма объекта изменилась бы.



**Рис. 9.11.** Расчеты показывают, что для покоящегося наблюдателя быстро движущееся тело не изменяет своей формы, но кажется повернутым (рис. из Википедии). Угол поворота зависит, разумеется, от скорости

## 9.10 Релятивистское выражение для импульса

Из общих соображений симметрии мы пришли в разделе 3.2 к выводу, что импульс материальной точки должен быть связан с ее скоростью соотношением  $\vec{p} = \vec{v}m(v)$ , где  $m(v)$  — неизвестная пока функция модуля скорости. При малых скоростях мы заменяли ее значением в нуле, которое называли массой:  $m = m(0)$ . Настало время определить вид этой функции  $m(v)$ .

Представим себе, что в неподвижной системе отсчета вдоль оси  $Ox$  движется тело массой  $m$  и на него в направлении движения в течение короткого времени  $dt$  действует сила  $F$ . Под действием этой силы тело приобретает скорость  $v + dv$ . Изменение импульса тела равно

$$dp = (v + dv)m(v + dv) - vm(v) = dv \frac{d}{dv} (vm(v)). \quad (9.45)$$

Возьмем систему отсчета  $K'$ , движущуюся вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $V = v$ . В этой системе отсчета (ее называют *собственной* или *сопутствующей*) тело первоначально покоилось, а после действия силы приобрело скорость  $dv'$ . Поскольку речь идет о бесконечно малой скорости тела, то применимы законы классической механики. Тогда скорость, приобретенная телом, определится из уравнения

$$dv' = (F/m)dt'. \quad (9.46)$$

Приращения скоростей в разных системах отсчета связаны по формуле (9.30), где надо положить  $V = v$ :

$$\begin{aligned} v + dv &= \frac{dv' + v}{1 + dv'v/c^2} \approx (dv' + v)(1 - dv'v/c^2) \approx \\ &\approx v + dv' (1 - v^2/c^2), \end{aligned} \quad (9.47)$$

откуда

$$dv = dv' \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (9.48)$$

Подставляя это выражение в (9.45) и используя (9.46), находим:

$$dp = \frac{F}{m} dt' \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{d}{dv} (vm(v)). \quad (9.49)$$

Применяя формулу (9.20) для замедления времени  $dt' = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , получаем отсюда

$$\frac{dp}{dt} = \frac{F}{m} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \frac{d}{dv} (vm(v)). \quad (9.50)$$

В то же время, согласно основному уравнению динамики,  $dp/dt = F$ . С учетом этого из (9.50) получаем уравнение для функции  $m(v)$ :

$$\frac{d}{dv} (vm(v)) = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}. \quad (9.51)$$



Функция  $m(v)$  находится интегрированием:

$$m(v) = \frac{m}{v} \int \frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m}{v} \cdot \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Правильность интегрирования можно проверить дифференцированием функции  $v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Таким образом,

$$\boxed{m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.} \quad (9.52)$$

Произвольная константа интегрирования выбрана так, чтобы выполнялось соотношение  $m(0) = m$ , в соответствии с определением массы в разделе 3.2.

Итак, *релятивистский импульс*  $\vec{p} = m(v)\vec{v}$  дается выражением

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.} \quad (9.53)$$

При малых скоростях  $v \ll c$  (9.53) переходит в обычное выражение классической механики  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Релятивистский импульс бесконечно растет при приближении скорости тела к скорости света.

При выводе формулы для релятивистского импульса мы неявно предположили, что сила  $F$  будет одной и той же в разных системах отсчета. Это верно для силы, действующей в направлении движения системы отсчета  $K'$ . Можно привести более сложный вывод соотношения (9.53), не основанный на этом предположении, но результат будет тем же.

**Задача 9.39.** Тело начинает двигаться из состояния покоя под действием постоянной во времени силы  $F$ . Найти зависимость от времени скорости тела и пройденного расстояния. Сравнить с классическими результатами.

**Решение.** Так как скорость тела в этом случае будет направлена вдоль линии действия силы, можно записать основное уравнение динамики в скалярной форме:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}} \right) = F, \quad (9.54)$$

где  $v(t)$  — скорость тела в момент времени  $t$ , причем  $v(0) = 0$ . Интегрируя, находим:

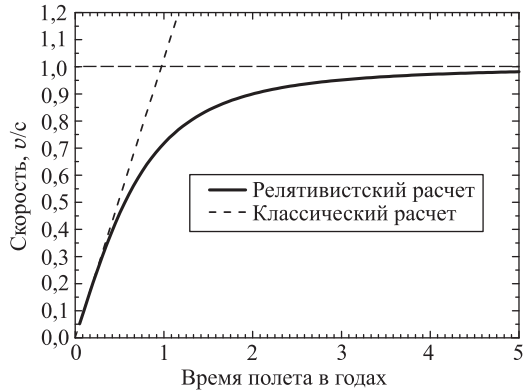
$$\frac{v(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}} = \frac{F}{m} t = a_0 t, \quad (9.55)$$

где мы ввели обозначение  $a_0 = F/m$  для *классического* ускорения тела. Возводя уравнение в квадрат, легко получаем закон зависимости скорости от времени:

$$v(t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + (a_0 t/c)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + (c/a_0 t)^2}}. \quad (9.56)$$

Таким образом, в любой момент времени  $v(t) < c$ , а при больших временах  $t \gg c/a_0$  скорость тела становится все ближе к скорости света, но никогда не достигает ее:

$$v(t) \approx c \left( 1 - \frac{c^2}{2a_0^2 t^2} \right). \quad (9.57)$$



**Рис. 9.12.** Скорость ракеты, движущейся с постоянным ускорением в собственной системе отсчета

В случае небольших значений времени ( $t \ll c/a_0$ ) мы получаем результат классической нерелятивистской механики для равноускоренного движения:

$$v(t) \approx a_0 t. \tag{9.58}$$

Приведем численные оценки (рис. 9.12). Пусть в собственной системе отсчета тело (ракета) движется с ускорением  $a_0 = g = 9,8 \text{ м/с}^2$  (т.е. космонавты испытывают привычную земную силу тяжести). Согласно классической механике, ракета достигнет скорости света через время  $t_{cl} = c/a_0 = 3 \cdot 10^8 / 9,8 = 3,06 \cdot 10^7 \text{ с}$ , т.е. примерно через год. На самом деле в этот момент времени ее скорость будет равняться

$$v(t_{cl}) = \frac{c}{\sqrt{1 + (c/a_0 t_{cl})^2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = 0,707c.$$

Через два года пути скорость станет равной  $v(2t_{cl}) = c/\sqrt{1 + 0,25} = 0,894c$ , через пять лет будет  $v(5t_{cl}) = c/\sqrt{1 + 0,04} = 0,981c$ , через 10 лет  $v(10t_{cl}) = c/\sqrt{1 + 0,01} = 0,995c$  и так далее. Сколько бы времени ни ускорялась ракета, ее скорость никогда не достигнет скорости света.

Пройденное расстояние находится интегрированием (9.56):

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \frac{a_0 t'}{\sqrt{1 + (a_0 t'/c)^2}} dt' = \frac{c^2}{a_0} \int_0^{a_0 t/c} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \\ &= \frac{c^2}{a_0} \sqrt{1 + x^2} \Big|_0^{a_0 t/c} = \frac{c^2}{a_0} \left( \sqrt{1 + (a_0 t/c)^2} - 1 \right) = \\ &= \frac{a_0 t^2}{1 + \sqrt{1 + (a_0 t/c)^2}}. \end{aligned} \tag{9.59}$$

При малых временах имеем выражение  $s \approx a_0 t^2 / 2$ , знакомое по школьной физике. При больших временах получаем движение с постоянной скоростью, близкой к скорости света:  $s \approx ct$ . ■

## 9.11 Релятивистское выражение для кинетической энергии

Итак, релятивистское уравнение движения материальной точки, или *основное уравнение релятивистской динамики*, имеет обычный вид уравнения второго закона Ньютона, но с другой зависимостью импульса от скорости:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \vec{F}.} \quad (9.60)$$

Преобразуем приращение импульса в левой части этого уравнения:

$$d\vec{p} = d\vec{v} \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \vec{v} dv \frac{mv/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}. \quad (9.61)$$

Умножим уравнение (9.60) скалярно на вектор перемещения  $d\vec{s} = \vec{v}dt$ . Справа мы имеем обычное выражение для изменения кинетической энергии тела:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = dT. \quad (9.62)$$

Слева после учета  $\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\vec{v}^2/2 = dv^2/2 = v dv$  можно получить

$$\begin{aligned} \vec{v}dt \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{v} \cdot d\vec{p} = v dv \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + v^2 dv \frac{mv/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{mvdv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = d \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \end{aligned} \quad (9.63)$$

Таким образом,

$$dT = d \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (9.64)$$

Следовательно, выражение в скобках справа с точностью до постоянной интегрирования представляет собой *кинетическую энергию материальной точки, движущейся со скоростью  $v$* . Значение этой постоянной фиксируется условием, что  $T = 0$  при  $v = 0$ :

$$\boxed{T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).} \quad (9.65)$$

При малых скоростях  $v \ll c$  мы можем разложить квадратный корень в ряд Тейлора:

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}.$$

В этом приближении кинетическая энергия определяется классической формулой

$$T \approx mc^2 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{mv^2}{2}.$$

## 9.12 Полная энергия тела

В теории относительности пространство и время не являются независимыми: из преобразований Лоренца и инвариантности интервала видно, что они входят в уравнения на равных правах, образуя единое пространство-время. Вспомним, что законы сохранения импульса  $\vec{p}$  и энергии  $E$  тела связаны, соответственно, с однородностью пространства и времени. При переходе к движущейся системе отсчета выражения для импульса и энергии должны преобразовываться аналогично координатам и времени в преобразованиях Лоренца. Посмотрим на уравнения (9.17). Если заменить в первом из них  $x \Rightarrow p_x$ ,  $x' \Rightarrow p'_x$ , то время  $t'$  надо заменить на величину, пропорциональную энергии в системе  $K'$ . Коэффициент пропорциональности следует из соображений размерности: энергию надо разделить на квадрат какой-то скорости. У нас есть лишь одна выделенная скорость — скорость света. Аналогично, в последнем уравнении меняем  $t \Rightarrow E$ ,  $t' \Rightarrow E'$ , а координату  $x'$  — на величину, пропорциональную импульсу  $p'_x$ . В результате записываем преобразования Лоренца для импульса и энергии в системах отсчета  $K$  и  $K'$ :

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2} E'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad E = \frac{E' + V p'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9.66)$$

Что такое релятивистский импульс — мы уже знаем. Но что такое релятивистская энергия  $E$ ? Именно эта величина выступает партнером импульсу в преобразованиях (9.66), именно она связана со свойствами пространства-времени и должна сохраняться в замкнутых системах.

Применим полученные формулы к точке массой  $m$ , движущейся вдоль оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $v$ . Ее импульс равен  $p_x = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Свяжем с точкой систему отсчета  $K'$  ( $V = v$ ). В этой системе точка покоится:  $p'_x = 0$ . С учетом этих выражений для импульсов из первого уравнения (9.66) следует выражение для энергии точки в системе  $K'$ :  $E' = mc^2$ . Подставляя его в последнее уравнение (9.66), находим энергию движущейся материальной точки:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (9.67)$$

Мы получили очень интересные результаты. В системе  $K'$  точка покоится, но ее энергия отлична от нуля. Ее так и называют — *энергия покоя* и обозначают  $E_0$  ( $E_0 = E_{|v=0}$ ):

$$E_0 = mc^2. \quad (9.68)$$

Мы пришли к знаменитой **формуле Эйнштейна**. Полная энергия движущегося тела, как следует из (9.67) и (9.65), дается суммой энергий покоя и кинетической энергии

$$E = E_0 + T. \quad (9.69)$$

Энергия покоя, сосредоточенная в теле, огромна. Для примера: килограмм угля при сжигании дает около  $30 \text{ МДж} = 3 \cdot 10^7 \text{ Дж}$  энергии. Энергия же покоя одного

килограмма равна  $E_0 = 1 \times (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{16}$  Дж, т. е. в три миллиарда раз больше. При некоторых условиях энергия покоя может быть выделена. К сожалению, на практике это впервые было осуществлено при взрыве атомной бомбы.

Из релятивистских выражений для импульса (9.53) и энергии (9.67) нетрудно получить связь между ними:

$$E^2 - c^2 \vec{p}^2 = m^2 c^4. \quad (9.70)$$

Отсюда следует, что левая часть выражения (9.70) является инвариантом, т. е. не зависит от системы отсчета. Это же можно получить из преобразований Лоренца (9.66). Итак, зная импульс тела, можно найти его энергию

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (9.71)$$

и скорость

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E} \vec{p} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}. \quad (9.72)$$

Связь кинетической энергии с импульсом:

$$p^2 c^2 = E^2 - m^2 c^4 = (E - mc^2)(E + mc^2) = T(T + 2mc^2). \quad (9.73)$$

Релятивистские соотношения между энергией тела, его импульсом и скоростью можно изобразить в виде прямоугольного треугольника (рис. 9.13), облегчающего запоминание формул.

При бесконечно больших импульсах энергия тела неограниченно растет, а скорость стремится к скорости света. Наоборот, при малых импульсах имеем:

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \approx mc^2 \left( 1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2} \right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

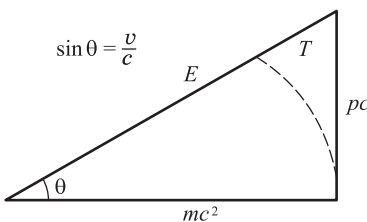
$$\vec{v} \approx \frac{\vec{p}}{m}, \quad p \approx \sqrt{2mT}. \quad (9.74)$$

Мы снова пришли к нерелятивистским соотношениям для кинетической энергии и скорости частицы как функций ее импульса.

Из всего сказанного следуют критерии применимости классической механики Ньютона—Галилея:

$$v \ll c, \quad \text{или} \quad p \ll mc, \quad \text{или} \quad T \ll mc^2. \quad (9.75)$$

Все эти условия эквивалентны, из любого из них следуют остальные.



**Рис. 9.13.** Графическое представление релятивистского соотношения (9.71) между энергией и импульсом. Пусть нижний катет — энергия покоя  $mc^2$  частицы массой  $m$ , правый катет — энергия фотона с импульсом  $p$ . Тогда гипотенуза — полная энергия частицы  $E$ , а разность между гипотенузой и нижним катетом — кинетическая энергия  $T$  этой частицы. Соотношение (9.72)  $p = vE/c^2$  реализуется здесь в виде  $\sin \theta = v/c$

**Задача 9.40.** Солнечная постоянная  $C$  (энергия излучения, падающая за единицу времени на единичную площадку, расположенную перпендикулярно солнечным лучам вблизи Земли вне ее атмосферы), равна  $C = 1,4$  кВт/м<sup>2</sup>. Определить массу  $\Delta m$ , которую теряет Солнце за один год.

**Решение.** Земля находится от Солнца на расстоянии  $L_{\odot} = 1,48 \cdot 10^{11}$  м. За время  $\Delta t$  на единицу площади попадает энергия  $C\Delta t$ . Умножая на площадь сферы радиусом  $L_{\odot}$ , получаем полную энергию, излученную Солнцем за время  $\Delta t$ :  $\Delta E = 4\pi L_{\odot}^2 C\Delta t$ . Эта энергия возникает в результате термоядерных реакций за счет уменьшения энергии покоя Солнца. Следовательно, его масса за год уменьшится на величину

$$\begin{aligned} \Delta m &= \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4\pi L_{\odot}^2 C\Delta t}{c^2} = \\ &= \frac{4\pi \times (1,48 \cdot 10^{11})^2 \times 1,4 \cdot 10^3 \times 3,16 \cdot 10^7}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1,35 \cdot 10^{17} \text{ кг.} \end{aligned}$$

За время существования (5 млрд лет) Солнце потеряло  $5 \cdot 10^9 \times 1,35 \cdot 10^{17} \approx 6,75 \cdot 10^{26}$  кг. Учитывая, что масса Солнца равна  $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$  кг, потери массы на излучение составляют 0,03%. ■

Пример демонстрирует *важный вывод теории относительности: в природе нет закона сохранения массы, есть лишь закон сохранения полной энергии*. Закон сохранения массы возник в классической физике только потому, что кинетические энергии продуктов химических реакций были намного меньше их энергий покоя.

## 9.13 Частицы с нулевой массой

Рассмотрим релятивистское выражение (9.71), связывающее энергию и импульс:

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \quad (9.76)$$

Положив в этом соотношении  $m = 0$ , получим

$$\boxed{E = pc.} \quad (9.77)$$

В то же время, модуль импульса частицы связан с ее скоростью соотношением  $p = (E/c^2)v$ . Подставляя сюда (9.77), получаем  $v = c$ . Частицы нулевой массы не могут покоиться и не могут двигаться иначе как со скоростью света! К числу таких частиц принадлежит световая частица, называемая фотоном (обозначается символом  $\gamma$ ). У фотона нет энергии покоя  $mc^2$ , так как он никогда не покоится. Но энергией фотон обладает, что каждый может ощутить на практике, загорая на пляже. На рис. 9.13 это соответствует предельному случаю, когда нижний катет равен нулю, а гипотенуза совпадает с другим катетом и кинетической энергией:  $E = T = pc$ .

**Задача 9.41.** Нейтральный пи-мезон (обозначение  $\pi^0$ ) — элементарная частица с массой  $m_{\pi^0} = 2,4 \cdot 10^{-28}$  кг — распадается на два фотона:  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ . Определить импульсы фотонов, если распавшийся пи-мезон покоился.

**Решение.** Так как вначале пи-мезон покоился, полный импульс системы был равен нулю. Вследствие закона сохранения импульсы фотонов  $p$  равны по величине и направлены в противоположные стороны. Следовательно, равны и энергии фотонов  $E_{\gamma} = pc$ .

Записываем закон сохранения энергии в этой реакции:  $m_{\pi^0}c^2 = 2pc$ , откуда  $p = m_{\pi^0}c/2 = 2,4 \cdot 10^{-28} \times 3 \cdot 10^8/2 = 3,6 \cdot 10^{-20}$  кг · м/с. ■

Из квантовой теории (см. второй том курса) известно, что энергия фотона связана с частотой световой волны  $\omega$  соотношением  $E = \hbar\omega$ , где  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$  Дж · с — фундаментальная константа физики, называемая приведенной постоянной Планка. Фотон обладает также импульсом  $p = E/c = \hbar\omega/c$ . Падая на поверхность, фотоны передают ей свой импульс и оказывают тем самым давление. Обнаружить и измерить световое давление удалось П. Н. Лебедеву в 1900 г.

В 1915 г. А. Эйнштейн, обобщая идеи специальной теории относительности (СТО) на неинерциальные системы, создал теорию гравитации, которую называют также общей теорией относительности — ОТО. Согласно этой теории, любой объект, обладающий энергией  $E$ , будет подвержен действию гравитационного поля, как если бы он имел гравитационную массу  $m_g$ . Связь  $m_g$  с энергией тела дается уже знакомым соотношением

$$E = m_g c^2. \quad (9.78)$$

Масса фотона равна нулю, но в любом гравитационном поле он должен вести себя как частица с гравитационной массой

$$m_g = \frac{\hbar\omega}{c^2}. \quad (9.79)$$

При движении фотона вблизи поверхности Земли вверх по вертикали фотон должен затратить часть своей энергии на совершение работы против силы тяжести:

$$A = m_g gl = \frac{\hbar\omega gl}{c^2}, \quad (9.80)$$

где  $l$  — пройденный по вертикали путь. Соответственно первоначальная энергия фотона, равная  $\hbar\omega$ , должна уменьшиться на величину  $\Delta E = A$ . Значит, частота фотона в конце пути будет меньше на величину  $\Delta\omega$ :

$$\Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\omega gl}{c^2}. \quad (9.81)$$

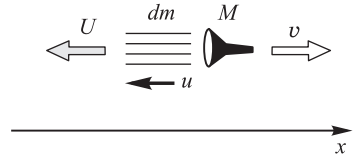
Относительное уменьшение частоты фотона  $\delta = \Delta\omega/\omega = gl/c^2$  при распространении по вертикали было измерено в 1960 г. американскими учеными Р. Паундом и Г. Ребкой. В условиях опыта (перепад высот около 18 м) оно составило малую величину  $2 \cdot 10^{-15}$ , что в пределах погрешности эксперимента (10%) совпало с предсказанием ОТО. В экспериментах с водородным лазером в космосе (1980) точность экспериментов была повышена до 0,007%. Эффект изменения частоты света при удалении от большой тяготеющей массы называется *гравитационным красным смещением*.

## 9.14 Релятивистская формула Циолковского

Во многих научно-фантастических романах герои летят в космос на фотонных ракетах. Не вдаваясь в подробности возможности практической реализации подобных идей<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Детальный анализ движения ракет с релятивистской скоростью дан в книге: *Е. Зенгер. Механика фотонных ракет*. М.: ИЛ, 1958.

**Рис. 9.14.** Фотонная ракета массой  $M$  движется со скоростью  $v$ . В момент времени  $t$  ее двигатель выбрасывает порцию газа массой  $dm$  со скоростью  $u$  относительно ракеты (или  $U$  в лабораторной системе отсчета)



в качестве упражнения мы все же рассмотрим в этом разделе движение ракеты, не предполагая малости ее скорости и скорости отбрасываемого рабочего тела (газа) по сравнению со скоростью света. Для начала выведем релятивистский аналог уравнения Мещерского (3.54). Пусть вдоль оси  $x$  летит ракета (рис. 9.14), скорость которой в данный момент времени равна  $v$ , а масса —  $M$  (для упрощения формул зависимость от времени  $t$  мы не показываем). И пусть в этот момент времени двигатель ракеты выбрасывает очередную порцию газа массой  $dm$  со скоростью  $-u$  относительно ракеты. Тогда скорость газа в лабораторной системе отсчета (относительно Земли) равна

$$U = \frac{v - u}{1 - uv/c^2}. \quad (9.82)$$

Газы уносят импульс

$$dp_g = dm \frac{U}{1 - U^2/c^2}. \quad (9.83)$$

Изменение импульса ракеты вследствие отдачи равно

$$dp_r = d \left( \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (9.84)$$

По закону сохранения импульса полное изменение импульса замкнутой системы ракета–газы должно быть равно нулю:  $dp_g + dp_r = 0$ . С учетом этого приходим к уравнению

$$d \left( \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = - \frac{U dm}{1 - U^2/c^2}. \quad (9.85)$$

Помимо изменения выражения для импульса объекта и другого закона сложения скоростей, в теории относительности  $dm \neq -dM$ , т.е. мы не можем утверждать, как ранее при  $v \ll c$ , что уменьшение массы ракеты равно массе вылетевших газов. Закона сохранения массы нет, но есть закон сохранения полной энергии — изменение полной энергии ракеты равно полной энергии, унесенной газами:

$$d \left( \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = - \frac{c^2 dm}{1 - U^2/c^2}. \quad (9.86)$$

С учетом (9.86) и (9.82) уравнение (9.85) записывается как

$$d \left( \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{v - u}{1 - uv/c^2} d \left( \frac{M}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (9.87)$$

Это и есть релятивистский аналог уравнения Мещерского (3.54). Учитывая соотношение

$$d \left( \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{M dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + v d \left( \frac{M}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (9.88)$$



можно записать (9.87) в виде

$$\frac{Mdv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -u \frac{1-v^2/c^2}{1-uv/c^2} d\left(\frac{M}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \quad (9.89)$$

Теперь еще раз используем правило дифференцирования произведения

$$d\left(\frac{M}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{dM}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + dv \frac{Mv/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \quad (9.90)$$

и приведем уравнение (9.89) к виду

$$Mdv = -u(1-v^2/c^2)dM. \quad (9.91)$$

Разделяем переменные и интегрируем от начала движения до момента отсечки двигателя:

$$\int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M} = -\frac{1}{u} \int_0^{v_f} \frac{dv}{1-v^2/c^2}. \quad (9.92)$$

Отсюда находим:

$$\ln \frac{M_f}{M_0} = \frac{c}{2u} \ln(1-v_f/c) - \frac{c}{2u} \ln(1+v_f/c)$$

или

$$\boxed{\frac{M_f}{M_0} = \left(\frac{1-v_f/c}{1+v_f/c}\right)^{c/2u}}. \quad (9.93)$$

Результаты классической механики следуют при формальном переходе к пределу  $c \rightarrow \infty$ . Используя определение основания натуральных логарифмов

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad (9.94)$$

получаем из (9.93)

$$\frac{M_f}{M_0} = e^{-v_f/u}, \quad (9.95)$$

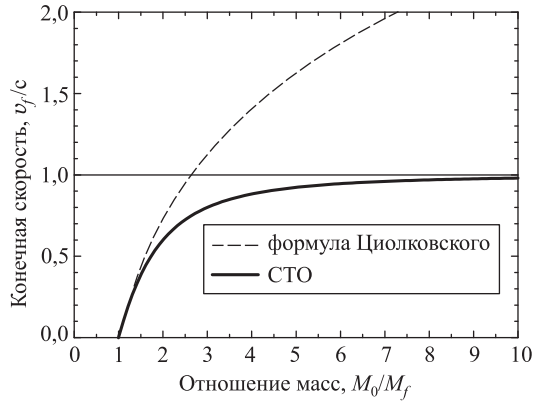
что совпадает с формулой Циолковского (3.59).

В другом предельном случае, когда рабочим телом является электромагнитное излучение (фотонная ракета, рис. 9.14),  $u = c$  и формула (9.93) упрощается:

$$\frac{M_f}{M_0} = \sqrt{\frac{1-v_f/c}{1+v_f/c}}. \quad (9.96)$$

Например, чтобы достичь скорости  $v_f = 0,999c$ , необходимо взять отношение масс  $M_0/M_f = \sqrt{1999} \approx 45$ , т. е. превратить в электромагнитное излучение примерно 98% начальной массы звездолета. Обратная формула, выражающая зависимость конечной скорости звездолета от соотношения стартовой и конечной масс имеет вид:

$$\frac{v_f}{c} = \frac{1 - M_f^2/M_0^2}{1 + M_f^2/M_0^2}. \quad (9.97)$$



**Рис. 9.15.** Конечная скорость фотонной ракеты как функция отношения начальной  $M_0$  и конечной  $M_f$  масс

Зависимость конечной скорости фотонной ракеты от отношения масс  $M_0/M_f$  показана на рис. 9.15 для расчетов в рамках СТО и классической механики.

## 9.15 Ускорители на встречных пучках

В этом параграфе мы перейдем от фантастических проектов к реальности. Исследуя микромир, физики разгоняют заряженные частицы (электроны или протоны) в ускорителях и сталкивают с неподвижной мишенью или друг с другом, чтобы потом изучать получившиеся осколки — другие частицы. Пусть частица массой  $m_1$  и импульсом  $\vec{p}_1$  сталкивается с частицей массой  $m_2$  и импульсом  $\vec{p}_2$ . Представим себе, что после столкновения частицы слипаются в какую-то другую воображаемую частицу (хотя в некоторых случаях она может быть и реальной), и вычислим ее массу  $m_{12}$ . Она связана с энергией  $E_{12}$  частицы и ее импульсом  $\vec{p}_{12}$  соотношением (9.70)

$$m_{12}^2 c^4 = E_{12}^2 - c^2 \vec{p}_{12}^2 \quad (9.98)$$

и называется *инвариантной массой* пары частиц. Название связано с тем, что, как и всякая другая масса,  $m_{12}$  не зависит от выбора системы отсчета. Законы сохранения энергии и импульса позволяют определить  $E_{12}$  и  $\vec{p}_{12}$ :

$$\begin{aligned} E_{12} &= E_1 + E_2, \\ \vec{p}_{12} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \end{aligned} \quad (9.99)$$

Подобным образом инвариантную массу можно определить для системы из любого числа частиц. Более того, в такой системе можно определить инвариантные массы для любой пары частиц, любой тройки и вообще любой их комбинации.

Нетрудно доказать, что  $m_{12} \geq m_1 + m_2$ . Для этого перейдем в систему покоя воображаемой частицы. Это значит, что ее импульс равен нулю, т.е. импульсы сталкивающихся частиц  $\vec{p}'_2 = -\vec{p}'_1$  (здесь и далее мы отмечаем штрихом величины, относящиеся к этой системе). Тогда инвариантная масса определяется соотношением

$$m_{12}^2 c^4 = (E'_1 + E'_2)^2. \quad (9.100)$$

Так как полная энергия частицы всегда больше или равна ее энергии покоя ( $E'_i \geq m_i c^2$ ,  $i = 1, 2$ ), уравнение (9.100) дает ограничение

$$\boxed{m_{12} \geq m_1 + m_2.} \quad (9.101)$$

Представим теперь, что родившаяся в столкновении воображаемая частица распадается на несколько других. Согласно (9.101), суммарная масса покоя продуктов распада не может быть больше инвариантной массы породившей их частицы. Теперь понятно, что для рождения на ускорителях очень тяжелых частиц необходимо увеличивать энергию сталкивающихся частиц (а точнее, их инвариантную массу).

Чтобы разобраться в этом уточнении, представим себе ускоритель, в котором протоны массой  $m$  разгоняются до полной энергии  $E$  и направляются на неподвижную водородную мишень, состоящую из тех же протонов. В этом случае инвариантная масса двух сталкивающихся протонов равна

$$m_{12}^2 c^4 = (E + mc^2)^2 - c^2 p^2, \quad (9.102)$$

где импульс  $p$  ускоренного протона связан с его энергией соотношением

$$c^2 p^2 = E^2 - m^2 c^4. \quad (9.103)$$

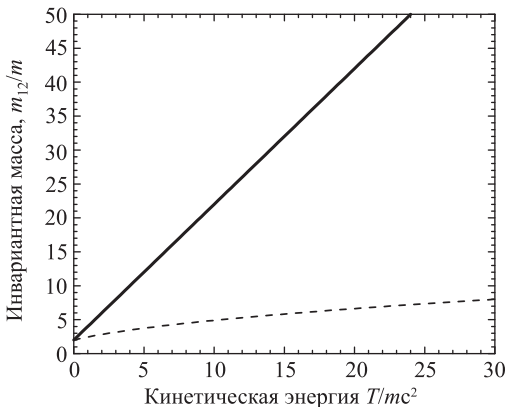
Подставляя (9.103) в (9.102), получаем

$$m_{12} c^2 = \sqrt{2mc^2(E + mc^2)}. \quad (9.104)$$

Пусть теперь пучок протонов вместо неподвижной мишени сталкивается с встречным пучком протонов, разогнанных до той же энергии. При лобовом столкновении суммарный импульс протонов равен нулю, и потому инвариантная масса пропорциональна суммарной энергии протонов:

$$m_{12} c^2 = 2E. \quad (9.105)$$

На рис. 9.16 показана инвариантная масса двух одинаковых сталкивающихся частиц в ускорителе с неподвижной мишенью и в ускорителе на встречных пучках (их еще называют коллайдерами, от англ. *collide* — сталкиваться) в зависимости от кинетической энергии пучка  $T = E - mc^2$ . Видно, что при увеличении энергии коллайдеры дают колоссальный выигрыш. Связано это с тем, что в них вся энергия пучков может быть потрачена на рождение новых частиц, а в ускорителях с неподвижной мишенью большая часть энергии начального пучка идет на бесполезное ускорение продуктов распада, обусловленное законом



**Рис. 9.16.** Зависимость от кинетической энергии инвариантной массы двух одинаковых частиц в ускорителе с неподвижной мишенью (пунктирная линия) и в ускорителе на встречных пучках (сплошная линия). Инвариантная масса  $m_{12}$  выражена здесь в единицах массы  $m$  сталкивающихся частиц, а кинетическая энергия  $T$  — в единицах их энергии покоя  $mc^2$

сохранения импульса. Величина  $m_{12}c^2$  называется *энергией столкновения*  $E_{ст}$ , ее не надо путать с энергией  $E$  ускоренных частиц.

Приведем численный пример. В физике элементарных частиц используется внесистемная единица энергии — электронвольт ( $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ) и ее производные  $1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$ ,  $1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}$  и  $1 \text{ ТэВ} = 10^{12} \text{ эВ}$ . В ускорителе У70 в Протвино (1976) протоны разгонялись до энергии  $E = 76 \text{ ГэВ}$ . По формуле (9.104) для традиционных ускорителей с неподвижной мишенью находим энергию столкновения, учитывая, что энергия покоя протона  $mc^2 = 938 \text{ МэВ}$ :

$$E_{ст} = m_{12}c^2 = mc^2 \sqrt{2 \left( \frac{E}{mc^2} + 1 \right)} = 0,938 \text{ ГэВ} \sqrt{2 \left( \frac{76}{0,938} + 1 \right)} \approx 12,0 \text{ ГэВ}. \quad (9.106)$$

Ускоритель Национальной лаборатории им. Э. Ферми (Батавия, США, 1976) разгонял протоны до энергии  $E = 500 \text{ ГэВ}$ . В этом случае  $E \gg mc^2$  и формулу для энергии столкновения можно упростить:

$$E_{ст} = m_{12}c^2 \approx \sqrt{2mc^2 E} = \sqrt{2 \times 0,938 \times 500} = 30,6 \text{ ГэВ}. \quad (9.107)$$

Таким образом, повышение энергии протонов в пучке почти в семь раз привело к увеличению полезной энергии всего лишь в два с половиной раза, остальная часть энергии была израсходована на кинетическую энергию продуктов столкновения. Такие же пучки в коллайдере дали бы энергию столкновения  $E_{ст} = 2E = 1000 \text{ ГэВ}$ . Чтобы добиться такой же полезной энергии на ускорителе с неподвижной мишенью, нужно было бы довести энергию ускоряемых частиц до колоссальной величины

$$E = \frac{E_{ст}^2}{2mc^2} = \frac{1000^2}{2 \times 0,938} = 533 \text{ ТэВ}, \quad (9.108)$$

выходящей за пределы даже современных возможностей. На коллайдере Теватрон в Лаборатории Ферми энергия пучков была доведена до  $980 \text{ ГэВ}$ . В 2011 г. Теватрон был закрыт в связи с пуском Большого адронного коллайдера (LHC — *Large Hadron Collider*) Европейской организации ядерных исследований (ЦЕРН) в Женеве, который сейчас является самым мощным ускорителем в мире: энергия протонов в пучке достигла  $7 \text{ ТэВ}$ , т. е. энергия столкновения равна  $14 \text{ ТэВ}$ ! На этом ускорителе был открыт бозон Хиггса, о котором мы расскажем во втором томе.

В Большом электрон-позитронном коллайдере (*LEP*, 1989) в ЦЕРНе энергия сталкивающихся электронов и позитронов была равна  $E = 104 \text{ ГэВ}$ . Позже энергия была удвоена, но для открытия бозона Хиггса энергии ускорителя все же не хватило. На нем, однако, были проведены всесторонние исследования промежуточных векторных бозонов  $W^\pm$  и  $Z^0$ , переносящих слабые взаимодействия элементарных частиц. О них мы также расскажем позже. Ныне в туннеле *LEP* расположился Большой адронный коллайдер.

В электрон-адронном кольцевом ускорителе *HERA* в Национальном исследовательском центре *DESY* (Гамбург, Германия, 1992) сталкивались частицы разных типов: электроны, ускоренные до энергии  $E_e = 27,5 \text{ ГэВ}$  и протоны с энергией  $E_p = 920 \text{ ГэВ}$ . Эти энергии намного превосходят массы покоя соответствующих частиц ( $m_e c^2 = 511 \text{ МэВ}$ ), поэтому можно считать, что импульс

электрона равен  $p_e = E_e/c$ , а импульс протона  $p_p = E_p/c$ . Тогда формула (9.98) для инвариантной массы (энергии столкновения) дает

$$\begin{aligned} m_{12}^2 c^4 &= (E_p + E_e)^2 - c^2 (p_p - p_e)^2 = (E_p + E_e)^2 - (E_p - E_e)^2 = 4E_p E_e, \\ E_{\text{ст}} &= 2\sqrt{E_p E_e}. \end{aligned} \quad (9.109)$$

Подставляя сюда числа, находим  $E_{\text{ст}} = 318$  ГэВ. Ускоритель *HERA* — единственный в мире электрон-протонный (и позитрон-протонный) коллайдер. Его работа прекращена 2007 г. после выполнения намеченной физической программы. Популярное изложение вопросов, связанных с открытиями новых частиц в столкновениях протонов (электронов), можно найти в книге<sup>2</sup>.

Приведенные примеры демонстрируют законы релятивистской кинематики, так что специальная теория относительности давно применяется на практике.

## Контрольные вопросы

1. В каком случае из преобразований Лоренца получаются преобразования Галилея? Проверьте, восстанавливается ли при этом абсолютность пространства и времени классической механики.
2. Лазерный луч падает ортогонально на зеркало и отражается от него. Какова скорость луча после отражения, если зеркало: а) неподвижно; б) движется в сторону лазера; в) удаляется от него?
3. Два события произошли в одном месте в одно время. Будут ли они одновременными для всех других наблюдателей?
4. Как практически наблюдать aberrацию света от звезды, если истинное направление на нее неизвестно?
5. Что такое гравитационное красное смещение? Предложите способ его наблюдения в космосе.
6. Чему будет равно ускорение ракеты в задаче 9.39 с точки зрения *земного* наблюдателя в моменты времени  $t = 0, t_{cl}, 2t_{cl}, 5t_{cl}$  и  $10t_{cl}$ ?
7. При каком отношении  $M_0/M_f$  начальной и конечной масс фотонной ракеты ее скорость в момент отсечки двигателя достигла бы скорости света, если бы формула Циолковского была верна в этом случае?
8. При какой энергии электронов в пучке, направленном на неподвижную водородную мишень, энергия столкновения электронов с протонами будет такой же, как на коллайдере *HERA*?

<sup>2</sup> Г. И. Копылов. Всего лишь кинематика // Библиотечка «Квант». Вып. 11. М.: Наука, 1981.

## Часть II

# Основы термодинамики и статистической физики

*Передо мною мир стоит  
Мифологической проблемой:  
Мне Менделеев говорит  
Периодической системой;  
Соединяет разум мой  
Законы Бойля, Ван-дер-Ваальса  
Со снами вьющего вальса,  
С богами зреющего тьмой . . .  
.....  
И было: много, много дум;  
И метафизики, и шумов . . .  
И строгой физикой мой ум  
Переполнял профессор Умов.  
Над мглой космической он пел,  
Развив власы и выгнув вью,  
Что парадоксами Максвелл  
Уничтожает энтропию . . .*

---

Андрей Белый.  
«Первое свидание»



## Глава 10

# Идеальный газ

В нашем курсе, как принято во всех учебниках, мы постепенно продвигаемся от простого к сложному. До сих пор мы занимались в основном поведением одной частицы под действием разных сил. Но реальные физические системы состоят из невообразимо огромного числа частиц, так что проследить за движением каждой из них не под силу самым мощным компьютерам. Таким (макроскопическим) системам и посвящена в целом вся эта часть учебника.

В науке сложились два метода изучения свойств вещества и физических процессов, происходящих в макроскопических телах: молекулярно-кинетический и термодинамический. Оба метода дополняют друг друга, и мы будем излагать их параллельно.

### 10.1 Состояние системы и эмпирическая температура

#### Общие положения молекулярно-кинетической теории

Молекулярная физика исходит из двух основных положений.

- Любое тело — твердое, жидкое или газообразное — состоит из обособленных частиц, которые мы называем молекулами.
- Молекулы всякого вещества находятся в беспорядочном хаотическом движении, не имеющем какого-либо преимущественного направления. Это движение называют тепловым, так как его интенсивность связана с температурой вещества (количественной характеристикой степени нагретости тел).

Молекулярно-кинетическая теория ставит перед собой цель истолковать те свойства вещества, которые непосредственно наблюдаются на опыте (вязкость, теплопроводность и т. п.) как суммарный результат действия молекул. Как и в классической механике, сначала выделяется изучаемая система (например, какой-то газ или некое твердое тело). Но если в механике типичная система (одна-две частицы или абсолютно твердое тело) имела небольшое число степеней свободы — независимых величин, характеризующих ее движение, — то при изучении свойств вещества мы имеем дело с огромным числом молекул, каждая из которых, к тому же, может двигаться поступательно, вращаться и колебаться.



При таком числе степеней свободы микроскопической системы описать движение всех ее структурных единиц не представляется возможным. Поэтому эта область науки оперирует *макроскопическими* параметрами, характеризующими свойства системы как целого — давлением, объемом, температурой.

Молекулярно-кинетическая теория пользуется статистическим методом, интересуясь не движением каждой отдельной молекулы, но лишь такими средними величинами, которые характеризуют движение и взаимодействие всей совокупности молекул. Но использует она при этом основные закономерности физики, действующие на *микроскопическом* уровне — законы классической механики, электродинамики и пр. Поэтому молекулярно-кинетическая теория в состоянии предсказать значения многих физических параметров системы на основе, как говорят, первых принципов. Термодинамика же, как правило, не в состоянии объяснить значения тех или иных физических параметров, и с самого начала имеет дело с *макроскопическими* характеристиками и связывающими их закономерностями, найденными в наблюдениях и экспериментах.

В этой главе на примере хорошо известных законов для идеальных газов мы увидим разницу этих дополняющих друг друга подходов.

## Состояние системы и нулевое начало термодинамики

В любом разделе физики изучение явлений начинается с выделения определенной совокупности тел, которую называют системой. Все тела, которые не входят в систему, но могут влиять на ее свойства и поведение, называют окружающей средой. Представим, например, газ (система) в закрытом цилиндре под поршнем (среда). Изменение положения поршня или температуры стенок цилиндра меняет состояние системы.

Величины, характеризующие состояние системы, называются ее *параметрами*. Состояние таких простейших систем, как газ, характеризуется следующими макроскопическими параметрами: объемом  $V$ , давлением  $p$ , температурой  $T$ . Естественно, нужны также параметры, определяющие систему — ее масса  $m$ , относительная молекулярная масса  $M$  (или масса моля  $\mu$ ). Напомним, что относительная молекулярная масса  $M$  — это безразмерная величина, равная отношению массы молекулы данного вещества к  $1/12$  массы атома углерода  $^{12}\text{C}$ . *Моль* — это количество данного вещества, масса которого, выраженная в граммах, численно равна относительной молекулярной массе. Масса моля (*молярная масса*  $\mu$ ) имеет в СИ размерность кг/моль. При решении задач значения относительной молекулярной массы элементов берутся из таблицы Менделеева. Молярная масса рассчитывается легко:  $\mu = M \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Например, для золота  $\mu_{\text{Au}} = 197 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Для сложных веществ необходимо произвести простые арифметические действия, например  $\mu_{\text{CO}_2} = (12 + 2 \times 16) \cdot 10^{-3} = 44 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Вообще говоря, параметры системы могут иметь разные значения в различных ее точках. В этом случае системе в целом нельзя приписать определенных значений этих параметров и мы имеем дело с *неравновесным состоянием*. Данные многочисленных наблюдений привели к *постулату о существовании термодинамического равновесия*: при неизменных внешних условиях

и независимо от начального состояния любая система приходит в *равновесное* состояние, в котором остаются неизменными характеризующие ее макроскопические параметры (давление, объем, температура и т. д.), и самостоятельно, без внешнего воздействия, выйти из этого состояния уже не может. Если две системы  $A$  и  $B$  соединить жесткой и непроницаемой для вещества перегородкой, пропускающей теплоту, то рано или поздно эти системы придут в равновесие, их температуры выровняются. **Принцип транзитивности термодинамического равновесия** гласит, что если система  $A$  находится в равновесии по отдельности с системами  $B$  и  $C$ , то эти две системы также находятся в равновесии друг с другом. Постулат существования термодинамического равновесия и принцип транзитивности составляют содержание так называемого **нулевого начала термодинамики** (по традиции законы термодинамики именуются «началами»).

В равновесном состоянии системы между параметрами имеется связь: заданные два параметра системы (например, ее температура и объем) однозначно определяют третий (в данном случае, давление). Математически эту связь можно изобразить так называемым *уравнением состояния*  $F(V, p, T) = 0$ , где конкретный вид функции  $F$  зависит от системы. Примером служат уравнения Клапейрона—Менделеева для идеального или Ван-дер-Ваальса для неидеального газов (см. ниже). Равновесное состояние может быть изображено графически точкой на плоскости, где по осям отложены какие-нибудь два из параметров —  $(p, V)$ ,  $(p, T)$  или  $(V, T)$ . Примеры даны на рис. 10.1.

Под *процессом* понимается всякий переход системы из одного состояния в другое. Процесс связан с нарушением равновесного состояния системы. Если состояние системы меняется со временем, то в системе происходит какой-то процесс. Обратное, вообще говоря, неверно: состояние системы может не меняться, хотя в ней и идет процесс. Например, при стационарном процессе переноса теплоты состояние системы является неравновесным, хотя и остается неизменным в том смысле, что не меняются распределения температур по объему системы.

При бесконечно медленном протекании процесса можно считать, что в каждый данный момент времени состояние системы равновесное. Физически это

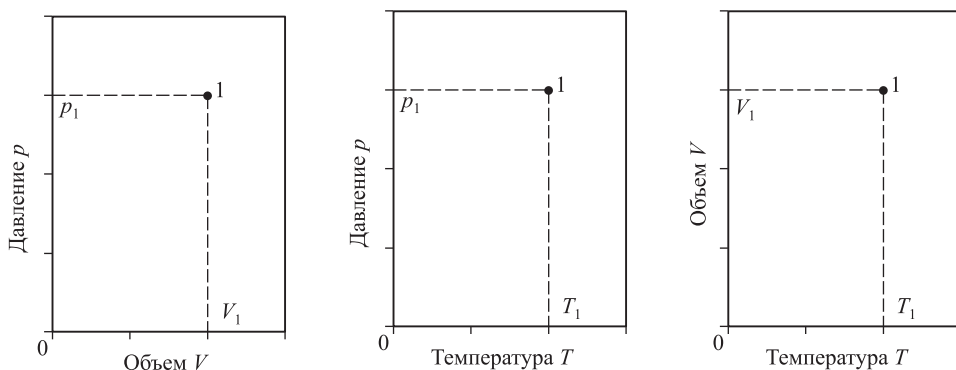


Рис. 10.1. Равновесные состояния системы на  $pV$ -,  $pT$ - и  $VT$ -диаграммах

означает, что характерное время процесса много больше времени установления равновесия в системе. Такой процесс называют *равновесным* процессом, и его можно представить себе как последовательность равновесных состояний. В дальнейшем будут изучаться (если иное специально не оговорено) лишь равновесные процессы.

Поскольку состояние системы представляется точкой на диаграмме, а процесс — это последовательность равновесных состояний, он изображается на диаграмме линией. Каждая точка на линии — условно равновесное промежуточное состояние системы. Равновесный процесс является *обратимым*, так как он может протекать в обратном направлении, проходя те же промежуточные состояния, что и в прямом процессе, но в обратном порядке, причем в окружающих телах не останется никаких изменений. Естественно, что в системе тогда не должно действовать никаких сил, подобных силам трения. Ниже мы познакомимся с диаграммами, описывающими некоторые характерные процессы в термодинамических системах.

Зная состояние системы, мы можем найти *функции состояния* — физические характеристики, которые зависят только от состояния системы, т. е. принимают те же значения всякий раз, когда система оказывается в данном состоянии независимо от ее предыстории. Одной из функций состояния является температура.

## Температура

Любая система обладает неким запасом *внутренней* энергии, не связанной с положением или движением системы как целого относительно внешней среды. О внутренней энергии мы еще поговорим подробнее, а сейчас нам достаточно интуитивного понимания, что, бросив с какой-то скоростью яйцо, мы его не сварим, хотя кинетическая энергия яйца и увеличится. Чтобы приготовить яйцо всмятку, его надо не бросать, а подогреть.

Для количественной характеристики внутренней энергии вводится понятие *температуры*. Температура занимает особое место в ряду физических величин. Опыт показывает, что она характеризует состояние теплового равновесия тел. Если привести в соприкосновение два тела с разными температурами, то в результате взаимодействия между молекулами эти тела будут обмениваться энергией. Через некоторое время температуры выровняются и передача теплоты прекратится, наступит состояние теплового равновесия. Состояние теплового равновесия и есть то состояние, в которое переходит с течением времени любая изолированная система.

Введение самого понятия температуры возможно благодаря нулевому началу термодинамики, потому что сам принцип работы любого термометра связан с тем, что он приходит в состояние теплового равновесия с телом, температура которого измеряется. Обычные способы определения температуры основаны на зависимости от нее ряда свойств тел (объема, давления и др.). При этом выбирается термометрическое тело и градуировка температурной шкалы. Наиболее распространенной является стоградусная шкала Цельсия (1742). Участок этой шкалы между точками замерзания и кипения воды при нормальном атмосферном давлении делится на 100 равных частей. Такая часть называется градусом

Цельсия (обозначается  $t^{\circ}\text{C}$ ). Таким образом, точка кристаллизации воды соответствует  $0^{\circ}\text{C}$ , а точка кипения —  $100^{\circ}\text{C}$ .

В давно вышедшей из употребления шкале Реомюра (1730, обозначается  $t^{\circ}\text{R}$ ) температура замерзания и кипения воды приняты за нуль и восемьдесят градусов, т. е. градус Реомюра больше градуса Цельсия (фактор  $100/80 = 5/4$ ) и связь температур в этих двух шкалах дается соотношениями

$$t^{\circ}\text{R} = \frac{4}{5}t^{\circ}\text{C}, \quad t^{\circ}\text{C} = \frac{5}{4}t^{\circ}\text{R}. \quad (10.1)$$

Мы упоминаем об этой шкале только потому, что она была широко распространена в России, использовалась в метеорологических сводках и встречается в литературных произведениях. Так, в романе Ф. М. Достоевского «Преступление и наказание» упомянута небывалая жара в Петербурге — «тридцать градусов Реомюра», т. е.  $37,5^{\circ}\text{C}$ . Использование шкалы Реомюра прекратилось в России лишь в 1920-е годы.

В США используют шкалу Фаренгейта (1724, обозначается  $t^{\circ}\text{F}$ ). За нуль своей шкалы Г. Фаренгейт выбрал наименьшую температуру, которую он мог воспроизвести в своей лаборатории — точку плавления смеси соли и льда. Точкам замерзания и кипения воды соответствуют температуры  $32^{\circ}\text{F}$  и  $212^{\circ}\text{F}$ . Этот интервал разделен не на сто, а на 180 частей (аналогично угловым градусам). Поэтому градус Фаренгейта меньше градуса Цельсия (фактор  $100/180 = 5/9$ ). Связь температур в этих двух шкалах дается формулами

$$t^{\circ}\text{F} = 32 + \frac{9}{5}t^{\circ}\text{C}, \quad t^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9}(t^{\circ}\text{F} - 32). \quad (10.2)$$

Пример: нормальной температурой человеческого тела ( $36,6^{\circ}\text{C}$ ) в США считается

$$t^{\circ}\text{F} = 32 + \frac{9}{5} \times 36,6 = 97,9^{\circ}\text{F}.$$

Существуют и другие варианты термометров с иной шкалой, но нет смысла на них останавливаться. Исключение — *абсолютная шкала температур*  $T$  (шкала Кельвина), имеющая особое значение в физике. Эта шкала была предложена в 1848 г. британским ученым Уильямом Томсоном, лордом Кельвиным, и аргументом служила необходимость такой шкалы, в которой нулевая точка соответствовала бы абсолютному холоду (абсолютному нулю), а цена деления была бы равна градусу Цельсия. Принятое ныне значение абсолютного нуля температуры соответствует  $-273,15^{\circ}\text{C}$ . Это значение определено опытным путем при изучении законов расширения газов. Следует упомянуть, что газовая шкала температур впервые была предложена еще в 1703 г. французским ученым Г. Амонтоном (это имя уже встречалось нам в связи с законом для силы трения), который использовал воздушный термометр и пришел к идее абсолютного нуля как температуры, при которой «воздух теряет всю свою упругость».

Связь абсолютной температуры  $T$  с температурой по стоградусной шкале дается соотношением

$$T \text{ K} \approx t^{\circ}\text{C} + 273,15. \quad (10.3)$$

Обращаем внимание, что в современной терминологии употребляется слово «кельвин», а не «градус Кельвина». Соответственно, в числовых обозначениях опускается символ градуса. Пример употребления: жидкий азот кипит при



**Рис. 10.2.** Примеры различных температур в природе. Абсолютный нуль  $T = 0$  соответствует бесконечно удаленной точке ( $10^{-\infty}$ ) на логарифмической шкале и не может быть показан на рисунке

семидесяти семи кельвинах (77,4 К, или  $-195,75^\circ\text{C}$ ). Примеры характерных температур, встречающихся в природе, приведены на рис. 10.2.

Впоследствии мы увидим, что абсолютная шкала температур следует также из законов термодинамики и не зависит от термометрического тела. А пока обратимся к уравнению состояния идеального газа.

## 10.2 Уравнение Клапейрона—Менделеева

Под идеальным понимается настолько разреженный газ, что взаимодействием между его молекулами на расстоянии можно пренебречь. Эксперименты показали, что при обычных температурах и давлениях свойства реальных газов близки к свойствам идеального. Убедимся в этом, скажем, на примере водяного пара.

Еще в 1811 г. итальянский физик Амедео Авогадро выдвинул гипотезу, согласно которой в равных объемах различных газов, взятых при одинаковых температурах и давлениях, содержится одно и то же число молекул. Последующее подтверждение гипотезы в многочисленных экспериментах превратило ее в **закон Авогадро**. Один моль любого вещества по определению содержит одно и то же число молекул, которое называют числом Авогадро:  $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ .

Следствием закона Авогадро является утверждение, что при одинаковых условиях (давлении и температуре) моль любого газа занимает одинаковый объем (его называют *молярным объемом*). Экспериментально установлено, что молярный объем при нормальных условиях<sup>1</sup> равен  $V_m \approx 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

Применим эти закономерности к водяному пару. По таблице Менделеева определяем массу моля воды:  $\mu_{\text{H}_2\text{O}} \approx 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ . Плотность воды в жидком состоянии  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} \approx 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Отсюда можно найти объем одного моля воды:  $V_{\text{H}_2\text{O}} = \mu_{\text{H}_2\text{O}}/\rho_{\text{H}_2\text{O}} \approx 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$ . Получаем отсюда объем  $V_1$ , приходящийся на одну молекулу воды:  $V_1 = V_{\text{H}_2\text{O}}/N_A \approx 3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$ . В конденсированном состоянии молекулы располагаются вплотную друг к другу, т. е. в сущности  $V_1$  есть объем молекулы воды. Отсюда получается оценка ее линейного размера (диаметра):  $D \approx \sqrt[3]{V_1} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ . В газообразном состоянии на одну молекулу водяного пара приходится объем  $V_2 \approx V_m/N_A \approx 3,7 \cdot 10^{-26} \text{ м}^3$ . Значит, газ можно нарезать мысленно на кубики с длиной ребра  $L = \sqrt[3]{V_2} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ , и в каждом таком кубике окажется одна молекула. Иными словами,  $L$  — среднее расстояние между молекулами водяного пара. Мы видим, что  $L$  на порядок превосходит размер  $D$  молекулы. Аналогичные оценки получаются и для других газов, так что с хорошей точностью можно считать, что молекулы не взаимодействуют друг с другом и при нормальных условиях газ идеален.

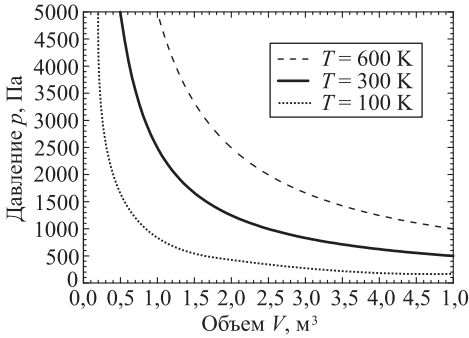
Как уже говорилось, уравнение состояния, имеющее вид  $F(p, V, T) = 0$ , позволяет выразить один термодинамический параметр через два других. Конкретный вид этого уравнения зависит от того, какое вещество и в каком агрегатном состоянии рассматривается. Уравнение состояния идеального газа объединяет ряд *экспериментально установленных* частных газовых законов. Каждый из них описывает поведение газа при условии, что изменяются лишь два параметра.

**1. Закон Бойля—Мариотта** утверждает, что давление газа обратно пропорционально его объему при условии постоянства температуры и количества газа в замкнутой системе:

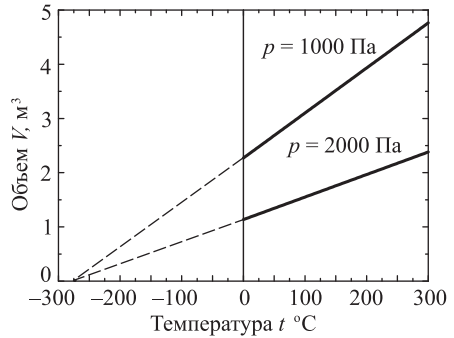
$$pV = \text{const.} \quad (10.4)$$

Переход газа из одного состояния в другое, совершающийся при постоянной температуре, называется *изотермическим* процессом. Закон открыт экспериментально, но понятен с точки зрения молекулярно-кинетической теории: чем меньший объем доступен для частиц газа, тем чаще они стучатся о стенки сосуда и тем больше давление. Графически изотермические процессы изображены на  $pV$ -диаграмме (рис. 10.3), построенной для одного моля разреженного газа при разных температурах  $T$ . Показанные кривые представляют собой гиперболы  $p = \text{const}/V$ , располагающиеся тем выше, чем выше температура газа.

<sup>1</sup>Нормальные условия — стандартные физические условия, с которыми обычно соотносят свойства веществ: давление  $p = 101\,325 \text{ Па} = 760 \text{ ммрт. ст.}$ , температура  $T = 273,15 \text{ К} = 0^\circ\text{C}$ . Эти значения можно встретить во многих учебниках и справочниках. Но при пользовании литературой необходимо проявлять осторожность: иногда в качестве нормальной температуры используют значение  $T = 298 \text{ К}$  или  $T = 298,15 \text{ К} = 25^\circ\text{C}$ . Кроме того, по рекомендации Международного союза теоретической и прикладной химии (IUPAC) с 1982 г. для нормального давления принято значение  $p = 10^5 \text{ Па}$ .



**Рис. 10.3.** Изотермы для одного моля идеального газа



**Рис. 10.4.** Изобарные процессы для одного моля идеального газа при низком давлении

**2. Закон Гей-Люссака** описывает тепловое расширение газов при постоянном давлении  $p = \text{const}$ :

$$V = V_0(1 + \alpha t). \quad (10.5)$$

Здесь  $t$  — температура в градусах Цельсия,  $V_0$  — объем газа при  $t = 0^\circ\text{C}$ . Такие процессы называются *изобарными*. Графически эта зависимость показана на  $Vt$ -диаграмме (рис. 10.4). Чем выше давление газа, тем ниже располагаются соответствующие прямые. Гей-Люссак обнаружил, что температурный коэффициент расширения  $\alpha$  почти не зависит от природы газа. Экстраполируя изобары в область низких температур, мы видим, что объем идеального газа становится равным нулю при температуре  $t = -1/\alpha$ , так что закон Гей-Люссака (10.5) можно переписать в виде

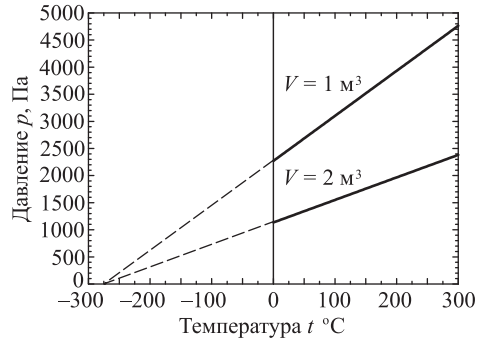
$$V = V_0\alpha(1/\alpha + t). \quad (10.6)$$

Именно эта форма закона Гей-Люссака позволяет ввести абсолютную температуру  $T = (1/\alpha + t)^\circ\text{C}$ , с использованием которой он принимает наиболее простой вид:

$$V = \text{const} \cdot T. \quad (10.7)$$

Ж. Л. Гей-Люссак установил (1807), что при нагревании газа при постоянном давлении от  $0^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$  его объем увеличивается в отношении 1,375 к первоначальному объему. Этому значению соответствует коэффициент температурного расширения  $\alpha = 0,00375$ , что приводит к точке абсолютного нуля температуры  $-1/\alpha = -1/0,00375 = -266,7^\circ\text{C}$ . Это всего на 2,4% отличается от современного значения  $-273,15^\circ\text{C}$ .

Говоря об экстраполяции газового закона в область низких температур вблизи абсолютного нуля, мы имеем в виду лишь экстраполяцию математической формулы (10.5), вовсе не предполагая, что она будет описывать даже сжиженные газы. Но в сравнении с обсуждавшимися выше эмпирическими температурами абсолютная шкала, введенная с помощью газового закона, имеет то неоспоримое преимущество, что ее начальная точка — абсолютный нуль температуры —



**Рис. 10.5.** Изохорные процессы для одного моля идеального газа при низком давлении

определена физическим законом и не зависит от термометрического вещества, как в шкале Цельсия или Фаренгейта.

**3. Закон Шарля** гласит, что давление данной массы газа, заключенного в постоянный объем  $V = \text{const}$ , линейно зависит от его температуры:

$$p = p_0(1 + \alpha t). \quad (10.8)$$

Здесь  $p_0$  — давление газа при  $t = 0^\circ\text{C}$ , а коэффициент  $\alpha$  оказался тем же самым, что и в законе Гей-Люссака (10.5). Процессы при постоянном объеме называются *изохорными*. Графически они показаны на  $pt$ -диаграмме (см. рис. 10.5). Закон Шарля иногда называют вторым законом Гей-Люссака. Но по справедливости он должен был бы носить имя Гийома Амонтона, который в 1700–1702 гг., за сто лет до Жака Шарля (1787) и Жозефа-Луи Гей-Люссака (1802), нашел зависимость давления от температуры, экспериментируя со своим воздушным термометром.

Переходя к абсолютной температуре, записываем закон Шарля в виде

$$p = \text{const} \cdot T. \quad (10.9)$$

Если объединить три газовых закона, то получим уравнение состояния идеального газа для одного моля:

$$pV = RT. \quad (10.10)$$

В уравнение входит *универсальная газовая постоянная*  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .

При неизменных значениях объема и температуры системы давление газа пропорционально числу молей вещества  $\nu = m/\mu$ . Поэтому для произвольной массы газа  $m$  уравнение состояния идеального газа (10.10) примет вид:

$$\boxed{pV = \frac{m}{\mu} RT.} \quad (10.11)$$

Это уравнение называют **уравнением Клапейрона—Менделеева**. Оно было выведено в 1834 г. французским физиком Б. Клапейроном в виде

$$pV = \frac{p_0 V_0}{267^\circ\text{C} + t_0} (267^\circ\text{C} + t) = KT, \quad (10.12)$$



где температура  $t$  дается по шкале Цельсия, величины  $p_0, V_0$  — давление и объем некоторого количества газа при произвольно выбранной температуре  $t_0$ , а  $p, V$  — давление и объем той же массы газа при температуре  $T = 267^\circ\text{C} + t$  ( $-267^\circ\text{C}$  — принятое в то время значение для абсолютного нуля температуры). Д. И. Менделеев обобщил эту формулу (1874), выделив в постоянной Клапейрона  $K$  зависимость от числа молей газа  $\nu = m/\mu$ .

### 10.3 Кинетическая теория идеальных газов

В этом разделе мы изложим молекулярно-кинетическое описание идеального газа, позволяющее глубже понять физический смысл уравнения Клапейрона—Менделеева.

При выводе уравнения состояния будем считать молекулы шариками исчезающе малого объема, столкновения которых между собой или со стенками сосуда подобны абсолютно упругим соударениям и которые не взаимодействуют друг с другом на расстоянии. Припишем каждой молекуле номер  $i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), где  $N$  — полное число молекул в системе. Пусть молекула  $i$  подлетает к стенке, ограничивающей движение вдоль оси  $x$ , со скоростью  $v_{i,x}$  и импульсом  $p_{i,x}$ .<sup>2</sup> При отражении она меняет импульс на обратный  $-p_{i,x}$ , так что изменение  $x$ -компонента импульса молекулы равно  $\Delta p_{i,x} = p_{i,x} - (-p_{i,x}) = 2p_{i,x}$ . Молекула после отражения долетит до противоположной стенки, снова отразится и в следующий раз подлетит к той же стенке через время  $\Delta t = 2l/v_{i,x}$ , где  $l$  — длина сосуда. Поскольку импульс  $\Delta p_{i,x}$  передается стенке каждые  $\Delta t$  секунд, на стенку со стороны одной молекулы действует средняя сила<sup>3</sup>

$$\langle F_i \rangle = \frac{\Delta p_{i,x}}{\Delta t} = \frac{p_{i,x} v_{i,x}}{l}. \quad (10.13)$$

(Заметим на будущее, что средние значения мы будем обозначать чертой сверху или, если это будет более удобно, угловыми скобками, так что обозначения  $\overline{F}$  и  $\langle F \rangle$  эквивалентны.) Так как стенке, ограничивающей движение молекул вдоль оси  $x$ , передается лишь  $x$ -компонента импульса молекулы, а его компоненты вдоль осей  $y$  и  $z$  не меняются, то средняя сила  $\langle F_i \rangle$  в (10.13) направлена вдоль оси  $x$ , т. е. по нормали к стенке.

Если в сосуде заключено  $N$  молекул, то полная сила  $F$  получится суммированием выражения (10.13) по всем молекулам:  $F = \sum_i^N F_i$ . При этом сумма произведений импульсов на скорости представима в виде

$$\sum_i^N p_{i,x} v_{i,x} = N \left( \frac{1}{N} \sum_i^N p_{i,x} v_{i,x} \right) = N \langle p_x v_x \rangle,$$

<sup>2</sup>Чтобы не путать обозначения давления и импульса, все компоненты вектора импульса обозначены в этом параграфе прямым шрифтом.

<sup>3</sup>Для упрощения вывода (10.13) мы рассматривали одну молекулу в сосуде. Если же молекул много, то они могут сталкиваться друг с другом, но из-за того, что мы предполагаем эти столкновения упругими и интересуемся лишь средним значением силы, окончательный результат (10.14) не меняется и при более строгом рассмотрении.

Так как все направления равноправны и молекулы совершенно одинаково отражаются от всех стенок сосуда, имеем  $\langle p_x v_x \rangle = \langle p_y v_y \rangle = \langle p_z v_z \rangle$ . В то же время, среднее значение произведения импульса молекулы на ее скорость определяется как  $\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle = \langle p_x v_x \rangle + \langle p_y v_y \rangle + \langle p_z v_z \rangle$ . Поэтому  $\langle p_x v_x \rangle = \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle / 3$  и выражение для полной силы, действующей на стенку со стороны газа, приобретает вид:

$$F = N \frac{\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle}{3l}. \quad (10.14)$$

Разделив полную силу на площадь стенки  $S$ , мы получим выражение для давления газа, где заменим произведение  $Sl$  на объем  $V$  сосуда. В итоге приходим к уравнению

$$pV = N \left\langle \frac{\vec{p} \cdot \vec{v}}{3} \right\rangle. \quad (10.15)$$

Используем теперь тот факт, что скорость движения молекул при обычных для нашего мира температурах много меньше скорости света, так что импульс молекулы представим в виде  $\vec{p} = m_0 \vec{v}$ , где  $m_0$  — масса молекулы. Получаем тогда из (10.14) соотношения, которые называют **основным уравнением молекулярно-кинетической теории (МКТ) газов**:

$$pV = \frac{2}{3} N \left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \frac{2}{3} N \langle E_{\text{пост}} \rangle, \quad (10.16)$$

или

$$p = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle. \quad (10.17)$$

Здесь  $n$  — концентрация молекул,  $\langle E_{\text{пост}} \rangle$  — средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну молекулу. Произведение  $N \langle E_{\text{пост}} \rangle$  есть полная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа в данном объеме  $V$ .

Таким образом, для идеального газа мы имеем эмпирически установленное уравнение Клапейрона—Менделеева и теоретически выведенное уравнение МКТ. Для установления связи между ними слегка преобразуем (10.11). Введем новую величину — **постоянную Больцмана**  $k_B = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Важность этой физической постоянной определяется тем, что с ее помощью устанавливается связь между энергией и температурой, как это видно уже по ее размерности. Далее используем, что  $\nu = m/\mu$  — число молей вещества в системе, а  $N_A$  — число молекул в одном моле, так что  $\nu N_A$  равно полному числу частиц в системе. Приходим тогда к следующей форме уравнения Клапейрона—Менделеева:

$$pV = N k_B T. \quad (10.18)$$

Сравнивая (10.16) и (10.18), мы видим, что в сущности имеем дело с одним и тем же уравнением, если (с точностью до числового множителя) *отождествить*

абсолютную температуру  $T$  и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул:

$$\langle E_{\text{пост}} \rangle = \left\langle \frac{m_0 \vec{v}^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (10.19)$$

При  $T = 0$ , как мы теперь воочию убеждаемся, действительно прекращается тепловое движение молекул, и потому абсолютный нуль температуры недостижим.

**Задача 10.42.** В подземной полости радиусом  $r = 100$  м проводится подземное испытание ядерного оружия мощностью 50 килотонн. Оценить давление газа в полости и минимальную глубину испытательной шахты, необходимую для того, чтобы продукты взрыва не вырвались наружу.

**Решение.** В приведенной формулировке нам пока не хватает данных. Сначала надо найти полную энергию газа, образовавшегося при взрыве. Намек на ее величину содержится в указании *тротилового эквивалента*: по традиции энергию взрыва сравнивают с энергией взрыва тротила (тола). Энергия  $E$  взрыва 50-килотонной бомбы эквивалентна энергии взрыва  $5 \cdot 10^4$  т =  $5 \cdot 10^7$  кг тротила. В справочнике находим, что энергия взрыва 1 кг тротила равна 4,2 МДж. Таким образом, при взрыве этой бомбы выделяется энергия  $E = 4,2 \cdot 10^6 \times 5 \cdot 10^7 = 2,1 \cdot 10^{14}$  Дж. Поскольку взрыв происходит в полости, будем считать, что вся эта энергия превратилась в кинетическую энергию продуктов взрыва. Так как нам известен объем полости  $V = 4\pi r^3/3 \approx 4,2 \cdot 10^6$  м<sup>3</sup>, то величину давления находим из уравнения Клапейрона—Менделеева:

$$p = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \approx 3,1 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Получим теперь ответ на второй вопрос задачи. Газы не вырвутся наружу, если внешнее давление  $p_0$  породы над полостью превышает давление продуктов взрыва. Внешнее давление можно оценить по известной формуле гидростатики  $p_0 = \rho g h$ , где  $\rho$  — плотность породы. В том же справочнике находим, например, плотность гранита  $\rho = 2600$  кг/м<sup>3</sup>, которую можно взять за основу оценки. Из равенства  $p = p_0$  находим минимальную глубину шахты  $h$ :

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{3,1 \cdot 10^7}{2,6 \cdot 10^3 \times 9,8} \approx 1,2 \text{ км.} \quad \blacksquare$$

В заключение этого раздела заметим, что при выводе уравнения (10.15) мы не предполагали классической зависимости импульса от скорости, поэтому оно имеет более широкую область применения, чем уравнение состояния идеального газа (10.16). Например, электромагнитное излучение можно представить как совокупность *фотонов*, движущихся со скоростью света. Поэтому для них  $\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle = c \langle |p| \rangle$ , где  $c$  — скорость света. В то же время, энергия фотонов  $E_\gamma$  связана с их импульсом соотношением  $E_\gamma = |\vec{p}|c$ , так что уравнение (10.15) приобретает в этом случае вид:

$$pV = \frac{1}{3} N \langle E_\gamma \rangle. \quad (10.20)$$

Мы видим, что уравнение состояния идеального газа фотонов отличается множителем в правой части по сравнению с уравнением (10.16) для газа обычных частиц.

## 10.4 Закон равнораспределения энергии

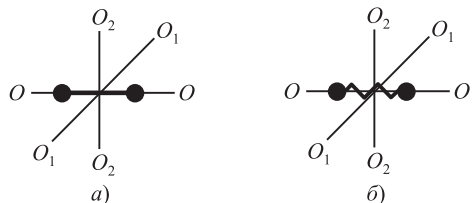
Итак, вклад в давление идеального газа дает кинетическая энергия поступательного движения молекул. Если же говорить о полной внутренней энергии газа  $U$ , то она складывается, вообще говоря, из многих компонентов и зависит от *числа степеней свободы* молекул, составляющих газ (см. раздел 2.1).

Одноатомные молекулы, которые в модели идеального газа представляются материальными точками, имеют три степени свободы: их положение определяется тремя координатами  $x, y, z$ . Система из  $n$  независимых атомов должна иметь  $3n$  степеней свободы. Но в молекулах атомы связаны, и это меняет дело.

В двухатомной молекуле с жесткой связью расстояние между атомами фиксировано (рис. 10.6, *а*). Ее движение можно представить как два одновременно происходящих движения: 1) поступательное движение центра масс, для описания положения которого надо задать три координаты, и 2) вращательное движение относительно двух осей, перпендикулярных продольной оси молекулы  $OO$ , для описания которого надо задать два угла поворота. Мы говорим, что такая молекула имеет пять степеней свободы — три поступательных ( $i_{\text{пост}} = 3$ ) и две вращательных ( $i_{\text{вращ}} = 2$ ). Описание вращения относительно третьей оси, совпадающей с осью молекулы, не имеет смысла, так как атомы мы представляем материальными точками. Иначе говоря, из шести степеней свободы, которыми обладают два независимых атома, одна исключается из-за жесткой связи между ними. Значит общее число степеней свободы такой молекулы равно пяти.

Для трехатомной молекулы с жесткой связью между всеми атомами мы имеем  $i_{\text{пост}} = 3$  и  $i_{\text{вращ}} = 3$ , так что полное число степеней свободы равно шести. Это число степеней свободы совпадает с числом степеней свободы абсолютно твердого тела и не изменяется при переходе к молекулам, состоящим из 4, 5, ...,  $n$  атомов.

Если связь между атомами не жесткая, что изображено на рис. 10.6, *б* пружинкой между ними, то взаимное расстояние может меняться вследствие внутренних колебаний молекулы. Поэтому к трем поступательным (координаты центра масс) и двум вращательным (углы поворота) степеням свободы двухатомной молекулы надо добавить еще одну колебательную ( $i_{\text{кол}} = 1$ ) степень свободы (расстояние между атомами), так что полное число степеней свободы станет равным шести. Поскольку полное число степеней свободы  $n$  независимых атомов равно  $3n$ , на долю колебательных степеней свободы в случае, когда все связи между атомами не жесткие и  $n \geq 3$ , остается  $i_{\text{кол}} = 3n - 6$ . Здесь предполагается, что атомы не лежат все на одной прямой: в противном случае мы имеем (как в двухатомной молекуле)  $i_{\text{пост}} = 3$ ,  $i_{\text{вращ}} = 2$  и, стало быть,  $i_{\text{кол}} = 3n - 5$ .



**Рис. 10.6.** Модель двухатомной молекулы с жесткой связью между атомами (*а*) и с дополнительной колебательной степенью свободы (*б*)

Вернемся к идеальному газу. Мы видели, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул равна  $(3/2)k_B T$  и что поступательному движению соответствуют три степени свободы. Значит, на одну степень свободы приходится средняя энергия  $k_B T/2$ . Но все виды движения равноправны. Молекулы сталкиваются и может статься так, что энергия поступательного движения перейдет в энергию вращательного движения. Поэтому на каждую из вращательных степеней свободы должно приходиться в среднем то же количество энергии —  $k_B T/2$ . Это утверждение известно как закон **Больцмана равномерного распределения энергии** по степеням свободы. Похожим образом столкновения молекул могут породить и колебательные движения в них, так что закон равномерного распределения относится также и к колебательным степеням свободы молекул. Но здесь есть тонкость. При колебаниях молекула будет обладать как кинетической энергией колебаний, так и потенциальной. Из механики известно, что при колебательном движении средние значения кинетической и потенциальной энергий равны между собой. Поэтому колебательным степеням свободы следует приписывать двойную энергию  $k_B T$ . Если ввести *эффективное число степеней свободы*

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{кол}}, \quad (10.21)$$

то средняя энергия одной молекулы будет равна  $\bar{E} = ik_B T/2$ . Значит, полная внутренняя энергия газа, содержащего  $N$  молекул, будет в  $N$  раз больше:

$$U = \frac{i}{2} N k_B T = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT. \quad (10.22)$$

Уравнение Клапейрона—Менделеева может быть записано как

$$pV = \frac{2}{i} U \quad (10.23)$$

или в несколько другой форме:

$$pV = (\gamma - 1) U. \quad (10.24)$$

С так называемым *показателем адиабаты*

$$\gamma = \frac{i + 2}{i} \quad (10.25)$$

мы еще встретимся в дальнейшем.

**Задача 10.43.** В комнате объемом  $V = 75 \text{ м}^3$  находится двухатомный газ (воздух) при температуре  $t_1 = 12^\circ \text{C}$  ( $T_1 = 285 \text{ К}$ ). Включают обогреватель и поднимают температуру воздуха до  $t_2 = 22^\circ \text{C}$  ( $T_2 = 295 \text{ К}$ ). Поскольку комната не герметизирована, давление газа остается все время постоянным  $p = 100 \text{ кПа}$ . Найти изменение внутренней энергии газа в комнате. Какая энергия была потрачена на обогрев окружающей среды?

**Решение.** Ответ несколько неожиданный: согласно (10.24) внутренняя энергия газа в комнате не изменилась, поскольку остались прежними и его давление, и объем. В то же время, часть газа из комнаты вышла: если вначале там содержалось

$$\nu_1 = pV/RT_1 = 75 \times 10^5 / (8,31 \times 285) = 3166,76 \text{ моль},$$

то после подогрева осталось лишь

$$\nu_2 = pV/RT_2 = 75 \times 10^5 / (8,31 \times 295) = 3059,41 \text{ моль.}$$

На улицу вышло  $\delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 107,35$  моль воздуха или  $100\%(\Delta\nu/\nu_1) = 3,39\%$  его начального количества.

Подсчитаем, сколько энергии ушло на «обогрев» улицы. Условно разобьем весь процесс на два этапа (на самом деле они происходят одновременно, но это не меняет сути дела). На первом этапе мы обогреваем герметичную комнату. Начальная внутренняя энергия газа  $U_1 = pV/(\gamma-1) = 75 \times 10^5 / 0,4 = 18,75$  МДж. Поскольку внутренняя энергия пропорциональна температуре, после нагрева герметичной комнаты она становится равной  $U_2 = U_1 (T_2/T_1) = 18,75 \times (295/285) = 19,408$  МДж, т.е. от печки получена энергия  $\Delta U = U_2 - U_1 = 0,658$  МДж. На втором этапе мы удаляем из комнаты 3,39% подогретого воздуха и вместе с ним ту же долю энергии. Удаляемая энергия  $0,0339U_2 = 0,0339 \times 19,408 = 0,658$  МДж в точности равна энергии, полученной от печки. Иным путем мы снова пришли к тому же выводу. ■

Итак, теперь окончательно ясно, что ушедший на улицу воздух унес с собой всю энергию, полученную от печки. В чем же тогда роль печки? Стоило ли ее вообще включать, если она обогревает только улицу? Полезный эффект печки состоит в том, что та же полная внутренняя энергия распределена между меньшим количеством молекул. Значит, возросла средняя энергия, приходящаяся на одну молекулу. По теореме о равномерном распределении энергии возрастает и средняя энергия молекул тел, находящихся в комнате. Стало быть, повысится их температура (затраты энергии на это в решении не учитывались).

## 10.5 Смеси газов

С чистыми газами нам редко приходится встречаться в природе. Например, наша среда обитания — воздух — состоит из азота  $N_2$  (78,08%), кислорода  $O_2$  (20,95%), инертных газов (0,94%), углекислого газа  $CO_2$  (0,03%). Какие же уравнения описывают смеси идеальных газов?

Итак, пусть в объеме  $V$  при температуре  $T$  содержится смесь газов (которые мы будем нумеровать индексом  $i$ ). Роль каждого компонента смеси будем характеризовать так называемой *массовой долей*:

$$w_i = \frac{m_i}{m}, \quad (10.26)$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -го компонента. Наша задача — написать уравнение, подобное уравнению Клапейрона—Менделеева и разобраться с эффективным числом степеней свободы смеси, где могут содержаться и одноатомные, и многоатомные молекулы. Прежде всего заметим, что мы рассматриваем идеальные газы. Молекулы не взаимодействуют друг с другом, и потому каждый компонент не мешает любому другому «жить» в том же общем сосуде. Различные газы в сосуде просто не замечают друг друга. Поэтому для каждого из компонентов также справедливо уравнение Клапейрона—Менделеева

$$p_i V = \frac{m_i}{\mu_i} RT = \nu_i RT, \quad (10.27)$$

где  $\nu_i$  — число молей вещества в  $i$ -м компоненте. Полное число  $\nu$  молей в смеси равно сумме числа молей  $\nu_i$  в каждом из компонентов:  $\nu = \sum_i \nu_i$ . Аналогично, полная масса смеси равна сумме масс каждого из компонентов:  $m = \sum_i m_i$ . Естественно определить *эффективную массу одного моля смеси*  $\mu$  как

$$\mu = \frac{m}{\nu} = \frac{\sum_i m_i}{\sum_i \nu_i}.$$

Давление  $p_i$ , оказываемое  $i$ -м компонентом, называется *парциальным* давлением (от слова *part* — часть). В 1801 г. Джон Дальтон установил закон (носящий теперь его имя): *давление смеси химических не взаимодействующих идеальных газов равно сумме парциальных давлений*. Суммируя левые и правые части (10.27), приходим к стандартной форме уравнения Клапейрона—Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT.$$

Величины  $m, \mu, \nu$  определяются из условия конкретной задачи. Например, если заданы массовые доли компонентов, то эффективную массу моля смеси находим из соотношения

$$\frac{1}{\mu} = \left( \sum_i \frac{w_i}{\mu_i} \right). \quad (10.28)$$

Внутренняя энергия  $U_i$   $i$ -го компонента определяется в соответствии с уравнениями (10.22) и (10.24):

$$U_i = \frac{\nu_i}{\gamma_i - 1} RT. \quad (10.29)$$

С одной стороны, полная внутренняя энергия смеси равна сумме энергий каждого компонента:

$$U = \sum_i U_i = \left( \sum_i \frac{\nu_i}{\gamma_i - 1} \right) RT. \quad (10.30)$$

С другой стороны, мы хотим иметь стандартное выражение

$$U = \frac{\nu}{\gamma - 1} RT. \quad (10.31)$$

Сравнивая (10.30) и (10.31), получаем выражение для эффективного показателя адиабаты смеси:

$$\gamma = 1 + \frac{\nu}{\sum_i \nu_i / (\gamma_i - 1)}. \quad (10.32)$$

Найдя массу моля и показатель адиабаты смеси, мы можем пользоваться всеми формулами, полученными ранее для «чистых» идеальных газов.

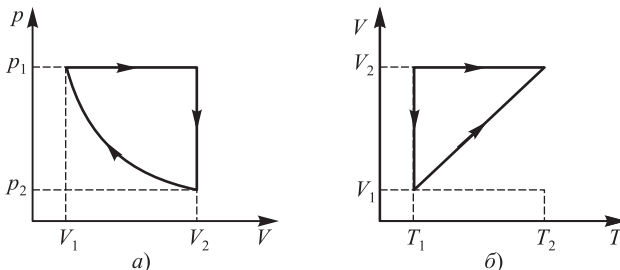
**Задача 10.44.** Дана смесь кислорода  $O_2$  (компонент 1) и аргона  $Ar$  (компонент 2), причем количества вещества обоих компонентов одинаковы  $\nu_1 = \nu_2$ . Найти показатель адиабаты смеси.

**Решение.** Показатель адиабаты двухатомного кислорода равен  $\gamma_1 = 7/5$ , а одноатомного аргона  $\gamma_2 = 5/3$ . Поэтому

$$\gamma = 1 + \frac{2\nu_1}{\nu_1(5/2 + 3/2)} = 1 + \frac{4}{8} = 1,5. \blacksquare$$

## Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории строения вещества.
2. Какими макроскопическими параметрами определяется состояние простейших систем?
3. При каком условии мы можем изучать процессы в системе, рассматривая их как последовательность равновесных состояний?
4. При какой температуре ее численное значение одинаково в шкалах Цельсия и Фаренгейта?
5. Является ли температура микроскопическим или макроскопическим параметром?
6. Студенту сообщили, что температура в центре Солнца равна  $1,5 \cdot 10^7$  градусов. Он спросил, по Цельсию или по Кельвину? Как бы вы ответили на его вопрос?
7. Объясните физический смысл абсолютной температуры.
8. Почему нагретая медицинская банка «присасывается» к телу человека?
9. Каковы основные положения, лежащие в основе модели идеального газа?
10. Сколько молекул вы вдыхаете, если при одном вдохе получаете 1 л воздуха?
11. На рисунке 10.7, а изображена диаграмма процесса. Постройте диаграмму в координатах  $(p, T)$  и  $(V, T)$ .
12. С некоторым газом совершен круговой процесс (рис. 10.7, б). Изобразите тот же процесс на графиках  $(p, V)$  и  $(p, T)$ .
13. Запишите уравнение Клапейрона—Менделеева через плотность газа.
14. Воздушный пузырек на дне озера глубиной 16 м имеет объем  $1,1 \text{ см}^3$ . Температура на дне озера равна  $4^\circ\text{C}$ , а на поверхности —  $16^\circ\text{C}$ . Определите объем пузырька в тот момент времени, когда он достигнет поверхности воды.



**Рис. 10.7.** Диаграммы круговых процессов к контрольным вопросам 11 (а) и 12 (б)



15. Самое низкое давление, получаемое с помощью самой совершенной вакуумной техники, приблизительно равно  $10^{-12}$  Па. Сколько молекул содержится при таком давлении в  $1 \text{ см}^3$  при температуре  $0^\circ\text{C}$ ?
16. Почему при оценке характеристик ядерного взрыва в задаче 10.42 мы неявно предположили, что вся энергия взрыва перешла в энергию *поступательного* движения его продуктов, не учитывая вращательных и колебательных степеней свободы молекул?
17. В последние годы бурно развивается технология изготовления тонких пленок различных материалов толщиной в несколько десятков атомных слоев (их часто называют наноструктурами). Частицы в пленках движутся как будто в двумерном пространстве, а не в обычном трехмерном. Сколько степеней свободы имеет в такой пленке: 1) материальная точка; 2) двухатомная молекула в виде «гантели»; 3) двухатомная молекула, где атомы соединены «пружиной»; 4) трехатомная молекула?
18. Если бы комната в задаче 10.43 была герметизирована, то рост температуры привел бы к повышению давления в комнате. На какой глубине под водой ныряльщик испытал бы такое же повышение давления?
19. Из формулы (10.24) следует, что давление газа пропорционально плотности энергии, т. е. энергии молекул в единице объема. Значит,  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Дж/м}^3$ . Проверьте, так ли это?
20. Вычислите молярную массу смеси газов ( $\text{N}_2$  — 80%,  $\text{O}_2$  — 20%).
21. Парциальное давление углекислого газа ( $\text{CO}_2$ ) в легких приблизительно равно 35 мм рт. ст. Каково процентное содержание  $\text{CO}_2$  в легких?
22. Каковы минимальное и максимальное значения показателя адиабаты для всех мыслимых газов?

## Глава 11

# Энергия и работа в термодинамике

В основе термодинамики лежат несколько фундаментальных законов, называемых *началами термодинамики*. Они были установлены на основании обобщения большой совокупности опытных фактов. Их применение позволяет изучать протекание различных процессов и делать выводы, имеющие общий характер. Нулевое начало термодинамики — постулат о существовании равновесных состояний и принцип транзитивности термодинамического равновесия — мы обсудили в предыдущей главе. Сейчас пришел черед других фундаментальных законов, и первым из них будет закон сохранения энергии.

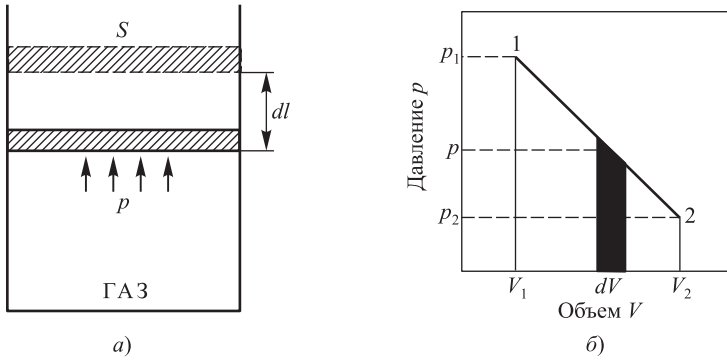
### 11.1 Первое начало термодинамики

Примером функции состояния системы является ее *внутренняя энергия*  $U$ . Она складывается из кинетической энергии хаотического движения молекул, потенциальной энергии взаимодействия между молекулами, кинетической энергии атомов внутри молекул, потенциальной энергии взаимодействия между атомами внутри молекул, а также кинетической и потенциальной энергии частиц, входящих в состав атомов (ядер и электронов). Внутренняя энергия *не включает* кинетическую и потенциальную энергии, которыми система может обладать как целое (скажем, при движении сосуда с газом или помещении газа во внешнее потенциальное поле). Каждый раз, когда система оказывается в том же состоянии (например, при каких-то конкретных температуре и давлении), ее внутренняя энергия принимает присущее этому состоянию значение, независимо от способа, каким система приведена в данное состояние. При переходе из состояния 1 в состояние 2 изменение внутренней энергии равно разности значений внутренней энергии в этих состояниях

$$\Delta U = U_2 - U_1 \quad (11.1)$$

и не зависит от того, какие процессы перевели систему из 1 в 2. Внутренняя энергия системы может изменяться двумя способами: 1) путем совершения над системой работы  $A$  и 2) путем передачи ей количества теплоты  $Q$ .

Совершение работы сопровождается перемещением внешних тел, действующих на систему. Рассмотрим газ в сосуде под поршнем (рис. 11.1, *a*). При перемещении поршня на расстояние  $dl$  газ совершает работу  $\delta A = F dl$ . Если  $S$  —



**Рис. 11.1.** Расширение газа под поршнем (а) и графическое изображение производимой им работы (б)

площадь поперечного сечения сосуда, то силу  $F$  можно выразить через давление ( $F = pS$ ), которое при малом перемещении поршня можно считать постоянным. Перемещение выражается через изменение объема газа ( $dl = dV/S$ ), так что элементарная работа, совершенная газом, представляется в виде

$$\delta A = p dV. \quad (11.2)$$

**Работа** есть мера механической энергии, переданной от одной системы к другой. Этот тип передачи энергии всегда связан с перемещением макроскопических частей системы и внешних тел. Если бы такого перемещения не происходило, т. е. не менялся бы объем системы ( $dV = 0$ ), то, как следует из соотношения (11.2), газ не мог бы совершить работы ( $\delta A = 0$ ). При увеличении объема системы работа положительна (газ совершает работу), а при уменьшении — отрицательна (работа совершается внешними силами над газом).

При конечном изменении объема системы ( $V_1 \rightarrow V_2$ ) совершаемая газом работа является суммой всех элементарных работ:

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (11.3)$$

Графически работа изображается площадью криволинейной трапеции под графиком процесса на  $p, V$ -диаграмме (см. рис. 11.1, б). Видно, что эта площадь зависит не только от положения конечных точек ( $p_1, V_1$ ) и ( $p_2, V_2$ ), но и от всего процесса (положения кривой) перехода из состояния 1 в состояние 2. Поэтому работа не является функцией состояния системы.

**Количество теплоты** (или просто теплота)  $Q$  — это количественная мера энергии хаотического движения молекул, переданной от одной системы к другой. Теплообмен — такой процесс обмена энергией, который не связан с перемещением макроскопических тел или их частей. Теплота, полученная системой, считается положительной, а отданная ею теплота — отрицательной. Поскольку количество теплоты, переданное при теплообмене, связано с изменением энергии движения

молекул системы, то о хаотическом беспорядочном движении молекул часто говорят как о тепловом движении. Будучи одной из форм энергии, теплота измеряется в джоулях (Дж).

Но прежде чем была понята связь теплоты и энергии, теплоту измеряли в специальных единицах — *калориях*: сообщение одной калории 1 грамму воды поднимало ее температуру на один градус Цельсия. Сейчас калория определяется просто как 1 кал = 4,1868 Дж. Калория все еще применяется в некоторых областях человеческой деятельности. Вспомните, например, калорийность продуктов питания, в которых многие стараются себя ограничить. При окислении 100 г животных жиров освобождается около 1000 ккал энергии (для других продуктов поменьше: хлеб — 214 ккал, сыр — 313 ккал, сахар — 390 ккал, шоколад — 428 ккал, масло — 734 ккал).

**Задача 11.45.** *Человек массой 90 кг, желающий похудеть, ежедневно 10 раз взбегаёт по лестнице на 12-й этаж (расстояние между этажами порядка 3 м). Если его диета не меняется, то какой вес он потеряет за неделю?*

**Решение.** Оценим прежде всего совершаемую за семь дней работу:

$$A = (7 \times 10)mgh \approx 70 \times 90 \times 9,8 \times 36 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Переведем эту работу в калории:  $A = 2,2 \cdot 10^6 / 4,1868 = 531$  ккал. Это соответствует примерно потере 50 г веса. ■

**Первое начало термодинамики** — это закон сохранения и превращения энергии, примененный к тепловым явлениям. Именно, при получении системой тепловой энергии  $\delta Q$  часть ее тратится на совершение работы  $\delta A$ , а остаток расходуется на изменение внутренней энергии  $dU$  системы:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (11.4)$$

При конечных изменениях параметров системы имеем

$$Q_{1 \rightarrow 2} = U_{12} + A_{1 \rightarrow 2}. \quad (11.5)$$

Как мы видели, внутренняя энергия является функцией состояния системы, а работа — нет, что мы показали, используя в индексе стрелку, подчеркивающую зависимость от пути перехода из 1 в 2. Отсюда следует, что и теплота не есть функция состояния системы, она тоже зависит от особенностей рассматриваемого процесса. Именно поэтому для элементарных приращений этих величин мы использовали символы  $\delta A$  и  $\delta Q$  (а не  $dA$  или  $dQ$ ), чтобы подчеркнуть, что они не являются полными дифференциалами функций, которых не существует.

## 11.2 Работа идеального газа в различных процессах

Применение уравнения состояния (10.11) идеального газа позволяет найти совершаемую им работу при некоторых типичных процессах. Заодно можно определить количество теплоты, получаемое от внешнего источника.

**1. Изохорный процесс.** Случай  $V = \text{const}$  — самый простой. Работа просто равна нулю, поскольку объем не меняется. Получаемое количество теплоты полностью идет на изменение внутренней энергии газа (10.24):

$$Q_{1 \rightarrow 2, V} = U_{12, V} = \frac{V(p_2 - p_1)}{\gamma - 1}. \quad (11.6)$$

То же самое можно выразить через изменение температуры газа:

$$Q_{1 \rightarrow 2, V} = U_{12, V} = \frac{m}{\mu} R \frac{(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}. \quad (11.7)$$

**2. Работа при изобарном расширении.** Поскольку  $p = \text{const}$ , давление можно вынести из-под знака интеграла в (11.3):

$$A_{1 \rightarrow 2, p} = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1). \quad (11.8)$$

Изменение внутренней энергии газа следует из (10.24):

$$U_{12, p} = \frac{p(V_2 - V_1)}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} R \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1}. \quad (11.9)$$

Складывая (11.8) и (11.9), находим количество теплоты, переданное газу в этом процессе:

$$Q_{1 \rightarrow 2, p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p(V_2 - V_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1). \quad (11.10)$$

**Задача 11.46.** Газ получил при постоянном давлении определенное количество теплоты  $Q$ . Какая часть расходуется на совершение работы  $A$ , а какая — на увеличение внутренней энергии газа? Как зависит ответ от вида используемого газа в предположении жесткой связи атомов (т. е. в пренебрежении колебательными степенями свободы)?

**Решение.** Из наших формул сразу следует, что

$$A_{1 \rightarrow 2, p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} Q_{1 \rightarrow 2, p},$$

$$U_{12, p} = \frac{1}{\gamma} Q_{1 \rightarrow 2|p=\text{const}}.$$

Чем больше  $\gamma$ , тем большая часть теплоты переходит в работу: для одноатомных газов  $A = 2Q/5 = 0,4Q$ , для двухатомных  $A = 2Q/7 \approx 0,286Q$  и для многоатомных газов  $A = Q/4 = 0,25Q$ . ■

Заметим, что мы излагаем достаточно общий подход, который может быть применен не только к идеальным газам. Для иных систем может измениться уравнение состояния, как следствие изменятся выражения для совершенной работы, но принципы их вывода остаются одними и теми же. Приведем пример. Пусть для некоего материала давление, температура и объем связаны соотношением

$$pV = aT - bT^2. \quad (11.11)$$

Найдем выражение для работы материала при изменении его температуры от  $T_1$  до  $T_2$  при постоянном давлении.

Поскольку давление постоянно, имеем для работы стандартное выражение  $A_{1 \rightarrow 2, p} = p(V_2 - V_1)$ . Используя уравнение состояния (11.11), находим отсюда

$$A_{1 \rightarrow 2, p} = a(T_2 - T_1) - b(T_2^2 - T_1^2) = (T_2 - T_1)[a - b(T_2 + T_1)].$$

**3. Работа при изотермическом расширении.** Используя уравнение состояния и выражение (11.2) для элементарной работы, находим

$$\delta A = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}. \quad (11.12)$$

Далее используем выражение (11.3) для конечного изменения объема при  $T = \text{const}$

$$A_{1 \rightarrow 2, T} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (11.13)$$

Поскольку объем обратно пропорционален давлению, тот же результат можно представить в виде

$$A_{1 \rightarrow 2, T} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (11.14)$$

Так как внутренняя энергия идеального газа не меняется при изотермическом процессе, в работу преобразовалась вся теплота, полученная от источника:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = A_{1 \rightarrow 2}.$$

**Задача 11.47.** *Расширяясь, водород совершил работу  $A = 6$  кДж. Какое количество теплоты  $Q$  подведено к газу, если процесс протекал: а) изобарно; б) изотермически.*

**Решение.** Рассмотрим сначала изобарное расширение. Из формул (11.8) и (11.10) следует связь количества теплоты и совершенной работы:

$$Q_{1 \rightarrow 2, p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} A_{1 \rightarrow 2, p} = \frac{7}{2} A = 21 \text{ кДж}. \quad (11.15)$$

Мы использовали значение  $\gamma = 7/5$  для двухатомного газа. Для изотермического расширения, как мы видели, полученное количество теплоты просто равно произведенной работе:  $Q_{1 \rightarrow 2, T} = A = 6$  кДж. ■

### 11.3 Теплоемкость системы

Введем теперь очень важную термодинамическую характеристику, называемую **теплоемкостью** системы (традиционно обозначается буквой  $C$  с различными индексами). Теплоемкость — это физическая величина, равная количеству теплоты, которое необходимо передать системе, чтобы изменить ее температуру на один кельвин:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (11.16)$$

Теплоемкость — величина аддитивная, она зависит от количества вещества в системе. Поэтому вводят также *удельную*  $c = C/m$  и *молярную*  $c_m = C/\nu$  теплоемкости (напомним, что  $\nu = m/\mu$  — количество молей вещества в системе). Поскольку количество теплоты не есть функция состояния и зависит от процесса, теплоемкость также будет зависеть от способа подвода теплоты к системе. Чтобы понять это, вспомним первое начало термодинамики. Разделив уравнение (11.4) на элементарное приращение абсолютной температуры  $dT$ , получим соотношение

$$C = \frac{dU}{dT} + \frac{\delta A}{dT}. \quad (11.17)$$

Второе слагаемое, как мы убедились, зависит от вида процесса.

Рассмотрим два частных случая, соответствующих процессу подведения теплоты при: 1) постоянном объеме и 2) постоянном давлении в системе.

В первом случае работа  $\delta A = 0$  и мы получаем так называемую теплоемкость  $C_V$  при постоянном объеме:

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (11.18)$$

В случае идеального газа внутренняя энергия данной массы зависит лишь от температуры, и частную производную можно заменить на обычную:  $C_V = dU/dT$ .

В изобарическом процессе поступающая теплота идет на повышение внутренней энергии газа из-за увеличения температуры и объема, и на совершение им работы при расширении. Соответственно,

$$\begin{aligned} C_p &= \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \\ &= C_V + \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Частные производные вычисляются с помощью уравнения состояния.

Для идеального газа  $(\partial U/\partial V)_T = 0$ , а из уравнения Клапейрона—Менделеева следует, что  $p(\partial V/\partial T)_p = (m/\mu)R$ , так что получаем в итоге

$$C_p = \frac{dU}{dT} + \frac{m}{\mu} R = C_V + \frac{m}{\mu} R. \quad (11.20)$$

Разделив это уравнение (его называют *соотношением Майера*) на число молей вещества в системе, получаем аналогичное соотношение для молярных теплоемкостей идеального газа при постоянном объеме и давлении:

$$\boxed{c_{m,p} = c_{m,V} + R.} \quad (11.21)$$

Теплоемкость при постоянном давлении больше теплоемкости при постоянном объеме, так как часть подведенной энергии тратится на совершение работы и для того же нагревания требуется подвести больше теплоты. Отметим, что из (11.21) следует физический смысл газовой постоянной  $R$  — это работа, совершаемая одним моле идеального газа при повышении его температуры на один кельвин при постоянном давлении.

Таким образом, теплоемкость оказывается зависящей не только от рода вещества, но и от условий, в которых происходит процесс изменения температуры. Теплоемкость реальных веществ зависит, вообще говоря, также и от самой температуры  $T$ , но, как мы увидим в дальнейшем, для идеального газа этой зависимости нет. Примем пока этот факт как предположение, основанное на опыте.

Из полученных формул для количества теплоты, переданной в различных процессах, сразу находим выражения для соответствующих теплоемкостей. Для изохорного процесса  $C_V$  следует из (11.7):

$$C_V = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \Big|_{V=\text{const}} = \frac{m}{\mu} R \frac{1}{\gamma - 1}, \quad (11.22)$$

Для изобарного процесса выражение для  $C_p$  вытекает из (11.10):

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \Big|_{p=\text{const}} = \frac{m}{\mu} R \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \quad (11.23)$$

Отношение теплоемкостей  $C_p/C_V = \gamma$ . Для молярных теплоемкостей отсюда получается:

$$\boxed{c_{m,V} = R \frac{1}{\gamma - 1}, \quad c_{m,p} = R \frac{\gamma}{\gamma - 1}.} \quad (11.24)$$

Отношение теплоемкостей равно показателю адиабаты:

$$C_p/C_V = c_{m,p}/c_{m,V} = \gamma.$$

На термодинамическом уровне нельзя предсказать численное значение  $\gamma$ ; нам удалось это сделать лишь при рассмотрении микроскопических свойств системы [см. выше выражения (10.25) и (10.32) для смеси газов]. Из наших формул следуют теоретические предсказания для молярных теплоемкостей газов с жесткими связями между атомами и показателями адиабаты:

Одноатомные газы ( $i = 3$ ):

$$\begin{aligned} c_{m,p} &= 5/2 R = 20,78 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \\ c_{m,V} &= 3/2 R = 12,47 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \\ \gamma &= 5/3 = 1,67; \end{aligned} \quad (11.25)$$

Двухатомные газы ( $i = 5$ ):

$$\begin{aligned} c_{m,p} &= 7/2 R = 29,09 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \\ c_{m,V} &= 5/2 R = 20,78 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \\ \gamma &= 7/5 = 1,4; \end{aligned} \quad (11.26)$$

Многоатомные газы ( $i = 6$ ):

$$\begin{aligned} c_{m,p} &= 4 R = 33,24 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \\ c_{m,V} &= 3 R = 24,93 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \\ \gamma &= 4/3 = 1,33. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Экспериментальные данные для различных веществ представлены в табл. 11.1.

**Таблица 11.1.** Молярная теплоемкость веществ при комнатной температуре и нормальном давлении

Вещество	$c_{m,p}$ , Дж/(моль · К)	$c_{m,V}$ , Дж/(моль · К)	$\gamma$
He	20,97	12,65	1,66
Ar	20,79	12,43	1,67
H <sub>2</sub>	28,77	20,42	1,41
O <sub>2</sub>	29,34	20,90	1,40
N <sub>2</sub>	28,8	20,87	1,39
CO	29,33	21,12	1,39
CO <sub>2</sub>	37,23	28,74	1,30
NH <sub>3</sub>	36,70	27,73	1,32
Al	24,18	—	—
Cu	24,47	—	—
Ag	25,24	—	—
Au	25,61	—	—
Hg	27,68	—	—

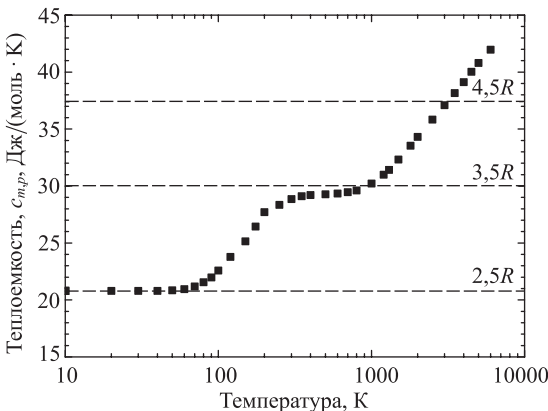


Видно, что простая модель идеальных газов в целом неплохо описывает свойства реальных газов. Обращаем внимание, что совпадение было получено без учета колебательных степеней свободы. Это связано с квантовыми свойствами колеблющихся систем и будет вкратце обсуждено в соответствующей главе второго тома учебника. Пока скажем лишь, что при недостаточно высоких температурах (менее нескольких тысяч градусов) колебательные степени свободы «заморожены».

Мы привели также значения молярной теплоемкости некоторых металлов при комнатной температуре. Если представить кристаллическую решетку металла как упорядоченный набор твердых шариков, соединенных пружинками с соседними шариками, то каждая частица может колебаться в трех направлениях ( $i_{\text{кол}} = 3$ ) и с каждой такой степенью свободы связаны кинетическая  $k_B T/2$  и такая же потенциальная энергия. Поэтому на частицу кристалла приходится внутренняя энергия  $3k_B T$ . Умножая на число Авогадро, получим внутреннюю энергию одного моля  $U_m = 3RT$ , откуда вытекает значение молярной теплоемкости  $c_m = 3R = 24,93$  Дж/(моль·К). (Вследствие малого коэффициента теплового расширения твердых тел для них не различают  $c_p$  и  $c_v$ .) Приведенное значение молярной теплоемкости твердых тел называется *законом Дюлонга и Пти*, и из таблицы видно также хорошее совпадение с экспериментом.

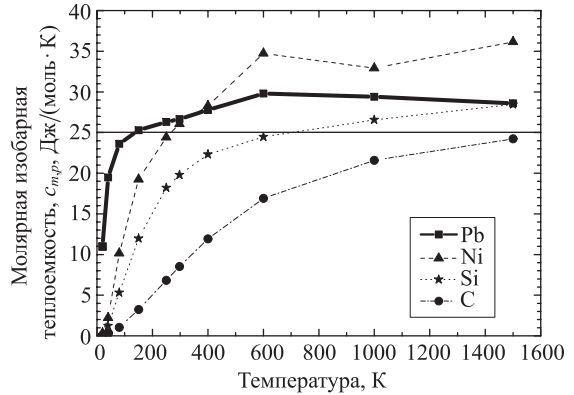
Однако говоря о неплохом соответствии выведенных нами соотношений и данных опытов, следует отметить, что таковое наблюдается лишь в определенном диапазоне температур. Иначе говоря, теплоемкость системы зависит от температуры, и наши результаты имеют ограниченную область применимости. Рассмотрим сначала рис. 11.2, на котором изображена молярная теплоемкость  $c_{m,p}$  газообразного водорода.

При температурах ниже 100 К теплоемкость  $c_{m,p} \approx 5R/2$ , что указывает на отсутствие вклада вращательных степеней свободы. Далее с ростом температуры теплоемкость быстро возрастает до классического значения  $7R/2$ , характерного для двухатомной молекулы с жесткой связью, в которой нет колебательных степеней свободы. При температурах выше 2000 К теплоемкость обнаруживает рост, что свидетельствует о возбуждении еще и колебательной степени свободы и о наличии каких-то других явлений, так как теплоемкость превышает значение



**Рис. 11.2.** Молярная теплоемкость газообразного водорода  $H_2$  при постоянном давлении как функция температуры (экспериментальные данные по статье *H. W. Wooley et al. Journal of Research of National Bureau of Standards*, **41**, 379–475, 1948)

**Рис. 11.3.** Экспериментальные данные по зависимости от температуры изobarной молярной теплоемкости некоторых элементов — свинца, никеля, кремния и углерода (графита); горизонтальная линия соответствует закону Дюлонга и Пти



$9R/2$ . Но почему при низких температурах «заморожены» вращательные и колебательные степени свободы? Ответы на эти вопросы будут даны в последующих главах нашего курса, а сейчас можно сказать только, что и здесь все дело сводится к специфически квантовым явлениям, не объяснимым с позиций классической физики.

Обратимся теперь к рис. 11.3, представляющему зависимость изobarных молярных теплоемкостей некоторых элементов от температуры. При комнатной температуре свинец (Pb) и никель (Ni) имеют теплоемкости вблизи предельного значения  $3R = 25,02$  Дж/(моль · К); для кремния (Si) и графита (C) такая температура еще недостаточно высока. Но при низких температурах все кривые демонстрируют значительное отклонение от закона Дюлонга и Пти. Это еще одно проявление законов квантовой механики. Классическая физика оказывается бессильной объяснить многие закономерности при низких температурах.

## 11.4 Адиабатный процесс

♦ **Адиабатным** называется процесс, при котором не происходит теплообмена с внешней средой ( $\delta Q = 0$ ). ♦

Физически это означает, что процесс протекает достаточно быстро и система не успевает обменяться теплотой с внешними телами. Однако, коль скоро мы имеем дело с равновесными процессами, скорость адиабатного процесса не должна быть слишком уж велика. Примером таких процессов может служить распространение звуковых колебаний в упругой среде.

Попытаемся вывести уравнение, описывающее адиабатный процесс (ранее мы имели дело с самыми простыми уравнениями процессов:  $pV = \text{const}$  для изотермического,  $p = \text{const}$  для изobarного и  $V = \text{const}$  для изохорного процессов). Так как  $\delta Q = 0$ , первое начало термодинамики дает  $dU = -\delta A = -pdV$ . В то же время,  $dU = d(pV)/(\gamma - 1) = (Vdp + pdV)/(\gamma - 1)$ . Приравнивая эти выражения, находим

$$\gamma p dV + V dp = 0. \quad (11.28)$$

Умножая (11.28) на  $V^{\gamma-1}$ , получаем в левой части полный дифференциал:

$$\gamma p V^{\gamma-1} dV + V^{\gamma} dp = d(pV^{\gamma}) = 0. \quad (11.29)$$

В результате приходим к уравнению адиабатного процесса:

$$\boxed{p V^{\gamma} = \text{const.}} \quad (11.30)$$

Графически адиабатный процесс описывается на  $pV$ -диаграмме кривыми, похожими на изотермы, но идущими круче, так как  $\gamma > 1$  (поскольку  $C_p > C_v$ ). Это и понятно, так как при адиабатном расширении газ совершает работу за счет внутренней энергии и его температура падает, что еще больше уменьшает давление по сравнению с изотермическим расширением. Учитывая, что из уравнения состояния идеального газа следует пропорциональность  $pV \sim T$ , уравнение адиабатного процесса можно представить в виде

$$\boxed{T V^{\gamma-1} = \text{const.}} \quad (11.31)$$

Первое начало термодинамики в применении к адиабатному процессу позволяет вычислить работу газа при адиабатном расширении. Если в начальной и конечной точках процесса давления и объемы равны, соответственно,  $p_1, V_1$  и  $p_2, V_2$ , то из (11.30) следуют выражения

$$p = \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}}, \quad p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}.$$

Поэтому для работы газа при переходе из состояния 1 в состояние 2 получаем:

$$\begin{aligned} A_{\text{ад}} &= p_1 V_1^{\gamma} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = -\frac{p_1 V_1^{\gamma}}{\gamma-1} \left( \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{p_2 V_2^{\gamma}}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{V_1^{\gamma-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\gamma-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Выражения для работы при адиабатном процессе с учетом уравнения Клапейрона—Менделеева можно выразить также через температуры в начале  $T_1$  и конце  $T_2$  процесса:

$$\boxed{A_{\text{ад}} = -\frac{m}{\mu} R \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1}.} \quad (11.33)$$

Для бесконечно малых изменений параметров уравнения (11.32), (11.33) переходят в соотношения

$$\delta A = -\frac{d(pV)}{\gamma-1} = -\frac{m}{\mu} R \frac{dT}{\gamma-1}. \quad (11.34)$$

**Задача 11.48.** Горючая смесь в двигателе Дизеля воспламеняется при температуре  $T_2 = 1100$  К. Начальная температура смеси  $T_1 = 350$  К. Во сколько раз нужно уменьшить объем смеси при сжатии, чтобы она воспламенилась? Сжатие считать адиабатным. Показатель адиабаты для смеси  $\gamma = 1,4$ .

**Решение.** Для решения удобнее воспользоваться уравнением адиабатного процесса в форме (11.31):

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}.$$

Отсюда сразу следует выражение для степени сжатия горючей смеси:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{1100}{350}\right)^{5/2} \approx 17,5. \blacksquare$$

## 11.5 Уравнение Ван-дер-Ваальса для реальных газов

Уравнение Клапейрона—Менделеева следует из молекулярно-кинетической теории в предположении идеальности газа. Если мы хотим описывать поведение реальных систем, надо учесть взаимодействие молекул между собой. Точный учет межмолекулярных сил — задача чрезвычайно трудная. Поэтому было предложено несколько модификаций уравнения состояния идеального газа, которые могли бы ухватить основные черты поведения реальных систем. Наиболее удачной попыткой стало уравнение Ван-дер-Ваальса.

Уравнение идеального газа имеет вид:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

В подходе Ван-дер-Ваальса взаимодействие молекул между собой учитывается двумя способами. Во-первых, принимается во внимание, что молекулы имеют конечные размеры. Если обозначить собственный объем всех молекул в моле вещества буквой  $b$ , то для движения молекул остается свободный объем

$$V - \frac{m}{\mu} b,$$

и именно он должен фигурировать в уравнении состояния. Во-вторых, учитывается, что молекула, подлетающая к стенке сосуда, «чувствует» притяжение других молекул, которое уравнивалось, когда молекула была внутри сосуда. Дополнительная сила, направленная внутрь сосуда, эквивалента дополнительному давлению  $p_i$  (его называют внутренним давлением газа). Поэтому вместо внешнего давления  $p$  уравнение состояния должно содержать сумму  $p + p_i$ . Как зависит внутреннее давление  $p_i$  от параметров системы? Сила, действующая на молекулу, пропорциональна концентрации  $n$  молекул в системе. Число подлетающих к стенке молекул также пропорционально  $n$ , и потому внутреннее давление пропорционально квадрату концентрации частиц:

$$p_i \sim n^2 \sim \frac{m^2}{\mu^2} \frac{1}{V^2}.$$

Обозначая коэффициент пропорциональности буквой  $a$ , приходим к уравнению Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2}\right) \left(V - \frac{m}{\mu} b\right) = \frac{m}{\mu} RT. \quad (11.35)$$

Для одного моля вещества это уравнение упрощается:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) (V - b) = RT. \quad (11.36)$$

Рассмотрим вид изотерм для одного моля газа Ван-дер-Ваальса на  $pV$ -диаграмме. Они описываются функцией

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}. \quad (11.37)$$

При достаточно высоких температурах и больших объемах введенными поправками можно пренебречь, и вид изотерм получится как для идеального газа. При понижении температуры вид кривых (гипербол) все более искажается и при некотором критическом значении температуры  $T_c$  данная изотерма приобретает точку перегиба — *критическую точку* с координатами  $p_c$ ,  $V_c$ , в которой равны нулю первая и вторая производные давления по объему. При дальнейшем понижении температуры точка перегиба «раздваивается» на минимум и максимум функции  $p(V)$ . Математически это связано с тем, что уравнение (11.37) может быть записано в виде кубического уравнения относительно объема  $V$ :

$$pV^3 - (pb + RT)V^2 + aV - ab = 0. \quad (11.38)$$

Как известно, кубическое уравнение имеет либо один действительный корень, либо три. Переход между этими случаями и соответствует критической точке. В случае трех корней уравнения (11.38) одному значению давления и температуры будут соответствовать совершенно разные значения объема. Как мы вскоре увидим, это описывает сосуществование в системе двух фаз — газообразной и жидкой.

Найдем сначала значения параметров, соответствующих критической точке. Берем первую и вторую производные функции (11.37) и приравниваем их нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial V} &= -\frac{RT}{(V - b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} &= \frac{2RT}{(V - b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Решение этой пары уравнений даст нам критические значения  $T_c$  и  $V_c$ . Находя из первого уравнения значение

$$RT = 2a \frac{(V - b)^2}{V^3}, \quad (11.40)$$

подставляем его во второе уравнение, откуда тогда следует

$$\frac{4a}{(V - b)V^3} = \frac{6a}{V^4} \Rightarrow 4V = 6(V - b).$$

Получаем сначала значение молярного критического объема

$$V_c = 3b. \quad (11.41)$$

Подставляя его в уравнение (11.40), находим критическую температуру

$$T_c = \frac{8a}{27bR}. \quad (11.42)$$

Наконец, подставляя найденные значения  $T_c$ ,  $V_c$  в уравнение (11.37), находим критическое давление

$$p_c = \frac{a}{27b^2}. \quad (11.43)$$

Эти критические значения получены для одного моля вещества. Чтобы найти их для произвольного числа молей, заметим, что при переходе от уравнения (11.36) к (11.35) надо произвести масштабное преобразование  $R \rightarrow Rm/\mu$ ,  $b \rightarrow bm/\mu$ ,  $a \rightarrow am^2/\mu^2$ . Выполняя то же преобразование в формулах для критических значений термодинамических параметров, убеждаемся, что критические температура и давление не изменяются, а объем преобразуется естественным образом:

$$V_c = \frac{m}{\mu} V_{m,c} = 3b \frac{m}{\mu}. \quad (11.44)$$

Значения критических параметров берутся из данных эксперимента. Отметим, что газовая постоянная  $R$  также может быть выражена через критические параметры:

$$R = \frac{8}{3} \frac{p_c V_{m,c}}{T_c}. \quad (11.45)$$

Для каждого реального газа следует вычислять свою *индивидуальную* газовую постоянную  $R$ , которая будет отличаться от универсальной газовой постоянной  $N_A k_B$  идеального газа, чему не следует удивляться, учитывая феноменологический приближенный характер уравнения Ван-дер-Ваальса. Значения критических параметров и газовая постоянная для ряда веществ приведены в табл. 11.2.

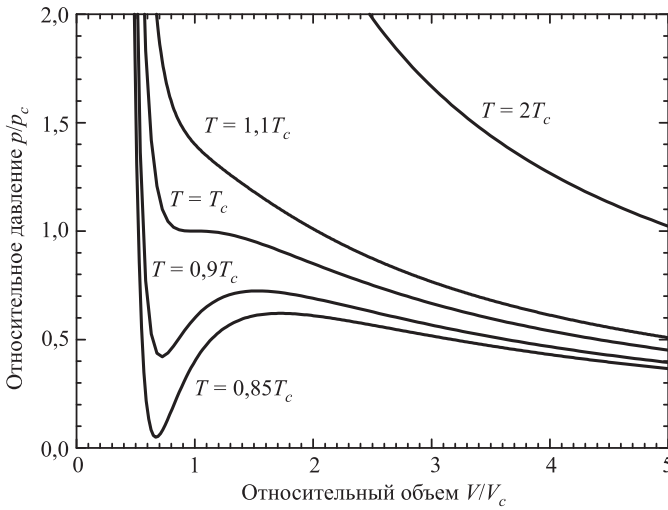
Возьмем для примера пары воды. Из таблицы следует значение коэффициента  $b = V_{m,c}/3 = 18,77 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$ . Поделив на число Авогадро, получаем объем одной молекулы  $v = b/N_A = 31,2 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$ , откуда для диаметра молекулы следует оценка  $d \approx \sqrt[3]{6v/\pi} = 0,39 \text{ нм}$ . Это действительно близко к размерам молекулы воды, что свидетельствует о правильности модели Ван-дер-Ваальса.

Введем обозначения для термодинамических параметров, измеренных в единицах их критических значений, т. е. для безразмерных отношений:

$$\pi = \frac{p}{p_c}, \quad v = \frac{V}{V_c}, \quad \theta = \frac{T}{T_c}. \quad (11.46)$$

**Таблица 11.2.** Критические параметры некоторых газов

Газ	$T_c$ , К	$p_c$ , МПа	$V_{m,c}$ , см <sup>3</sup> /моль	$R/(N_A k_B)$
He	5,2	0,23	57,5	0,82
H <sub>2</sub>	33,2	1,30	65,5	0,82
O <sub>2</sub>	154,8	5,08	78	0,82
CO <sub>2</sub>	304,1	7,39	94	0,73
H <sub>2</sub> O	647,3	22,1	56,3	0,62



**Рис. 11.4.** Изотермы газа Ван-дер-Ваальса, показанные для различных значений температуры. Графики построены для безразмерных отношений термодинамических параметров  $p$ ,  $V$  к их критическим значениям  $p_c$ ,  $V_c$

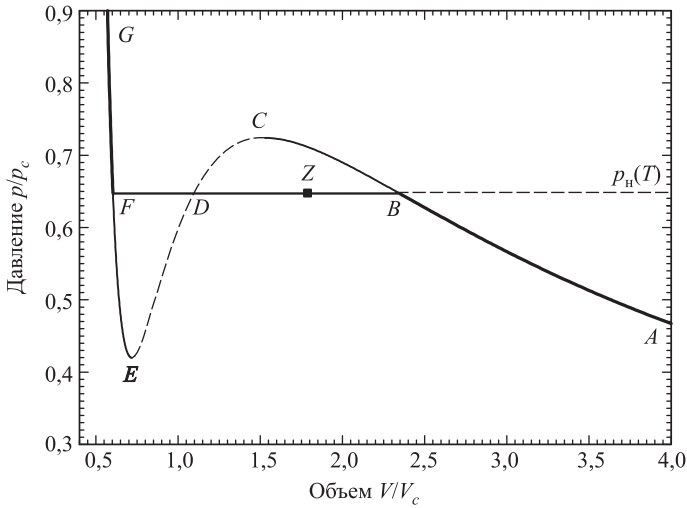
В этих обозначениях все критические значения термодинамических параметров равны единице, а уравнение Ван-дер-Ваальса (11.35) принимает простой вид:

$$\pi = \frac{8\theta}{3v-1} - \frac{3}{v^2}. \quad (11.47)$$

Отметим универсальность этого уравнения, которое может быть использовано даже без точного знания значений критических параметров (но которые нужны, конечно, при возвращении к обычным единицам измерения температуры, давления и объема).

На рисунке 11.4 представлены изотермы газа Ван-дер-Ваальса для нескольких значений температур ( $\theta = 2, 1, 1, 0,9, 0,85$ ). При достаточно высоких температурах  $T = 2T_c$  ( $\theta = 2$ ) изотермы Ван-дер-Ваальса совпадают с изотермами идеального газа за исключением области малых объемов. При понижении температуры гиперболы начинают искажаться и при  $T = T_c$  ( $\theta = 1$ ) график имеет точку перегиба при  $p = p_c$ ,  $V = V_c$  ( $\pi = 1$ ,  $v = 1$ ). При еще более низких температурах на изотерме появляются минимум и максимум.

Одна из теоретических изотерм газа Ван-дер-Ваальса при температуре ниже критической показана на рис. 11.5. Ее ход в целом понятен. Сначала при сжатии газа изотерма ведет себя по закону Бойля—Мариотта (участок  $AB$ ) — здесь давление создается в основном движением частиц. Но по мере дальнейшего сжатия начинают действовать силы притяжения между молекулами, уменьшающие давление. Поэтому его рост замедляется, а после точки  $C$  сменяется даже падением. В этой области потенциальная энергия притяжения начинает доминировать над кинетической энергией молекул. Наконец, наш газ сжат настолько, что молекулы начинают соприкасаться друг с другом и между ними возникают мощные силы отталкивания (точка  $E$ ). Изотерма резко поднимается вверх, огромные давления



**Рис. 11.5.** Изотерма газа Ван-дер-Ваальса для температуры ниже критической ( $T = 0,9T_c$ ). Сплошные кривые показывают однофазные состояния системы: участок  $ABC$  соответствует газообразной фазе, участок  $EFG$  — жидкой фазе. Прямолинейный участок  $BDF$  описывает сосуществование двух фаз, его ордината равна давлению насыщенного пара  $p_n/p_c$ . Состояние системы на участке  $CDE$  (показан пунктиром) нестабильно и не может быть реализовано в природе. Участки  $BC$  и  $EF$  (тонкие сплошные линии) соответствуют *метастабильным состояниям* — перегретой жидкости ( $EF$ ) и перенасыщенному пару ( $BC$ )

возникают даже при небольшом уменьшении объема. Это означает, что система перешла в жидкую фазу, а жидкость практически несжимаема.

Однако теоретическая изотерма газа Ван-дер-Ваальса весьма отличается от экспериментальной. Иначе и быть не может, так как область между минимумом и максимумом (на рис. 11.5 — участок  $CDE$ , показанный пунктиром) описывает нестабильное состояние системы, которое не может быть реализовано на практике. В этой области давление растет при увеличении объема и падает при его уменьшении. Представим себе какое-нибудь состояние в этой области (точку на растущей ветви графика). Если в результате флуктуации внешняя сила, удерживающая газ в некотором объеме, несколько возрастет, то объем газа слегка уменьшится, и это, в отличие от обычных состояний, приведет к *уменьшению* давления газа. Испытывая меньшее сопротивление, внешняя сила сильнее сожмет газ, давление его еще больше уменьшится, и т. д. Словом, такое состояние столь же нестабильно, как и равновесие иглы, стоящей на своем кончике.

Таким образом, теоретическая изотерма газа Ван-дер-Ваальса распалась на две ветви, каждая из которых соответствует однофазному состоянию: участок  $ABC$  — это изотерма газообразной фазы, участок  $EFG$  — изотерма жидкой фазы. Но в опытах было обнаружено сосуществование этих двух фаз, и такому двухфазному состоянию системы соответствует прямолинейный участок изотермы  $BDF$ . При изотермическом сжатии в какой-то точке  $B$  начинается конденсация газа в жидкость и над жидкостью образуется *насыщенный пар*, давление которого  $p_n(T)$  зависит только от температуры и потому не меняется при



дальнейшем сжатии. Чем меньше объем газа, тем большая его часть переходит в жидкое состояние. Наконец, весь газ переходит в жидкость, прямолинейный участок изотермы заканчивается в точке  $C$  и давление резко возрастает.

Правило определения положения горизонтального участка  $BDF$  изотермы газа Ван-дер-Ваальса называется **правилом Максвелла**.<sup>1</sup> Нам представляется уместным воспроизвести фрагмент прямой речи классика науки: «Предположим теперь, что среда, оставаясь однородной, переходит из состояния  $B$  в состояние  $F$  по гипотетической кривой  $BCDEF$ , а затем возвращается по прямой  $FB$  в виде смеси жидкости и пара. Поскольку температура была все время постоянной, теплота не могла превратиться в работу. Однако превращенная в работу теплота представлена избытком площади  $FDE$  над площадью  $BCD$ . Следовательно, условие, определяющее максимальное давление пара при заданной температуре, заключается в том, что линия  $BF$  отсекает сверху и внизу равные площади.»

Таким образом, из термодинамических соображений площадь фигуры  $BCD$  должна быть равна площади фигуры  $DEF$ . Ход реальной изотермы показан на рис. 11.5 жирными сплошными линиями  $ABDFG$ . Возьмем какую-то точку  $Z$  на прямолинейном участке  $BF$ , и пусть двухфазная система массой  $m$  занимает в этом состоянии объем  $V_Z$ . В точке  $F$  имеется только жидкость той же массой  $m$  и объемом  $V_F$ , откуда находим плотность жидкой фазы  $\rho_{\text{ж}} = m/V_F$ . В точке  $B$  та же масса насыщенного пара занимает объем  $V_B$ , и мы получаем плотность насыщенного пара  $\rho_{\text{п}} = m/V_B$ . Если обозначить  $m_{\text{ж}}$  и  $m_{\text{п}}$  массы жидкой и газообразной фаз в точке  $F$ , то для объема системы, равного сумме объемов жидкости и пара, получаем соотношение

$$V_Z = \frac{m_{\text{ж}}}{m} V_F + \frac{m_{\text{п}}}{m} V_B. \quad (11.48)$$

Учитывая сохранение массы  $m = m_{\text{ж}} + m_{\text{п}}$  в процессе парообразования, получаем отсюда:

$$m_{\text{ж}}(V_Z - V_F) = m_{\text{п}}(V_B - V_Z). \quad (11.49)$$

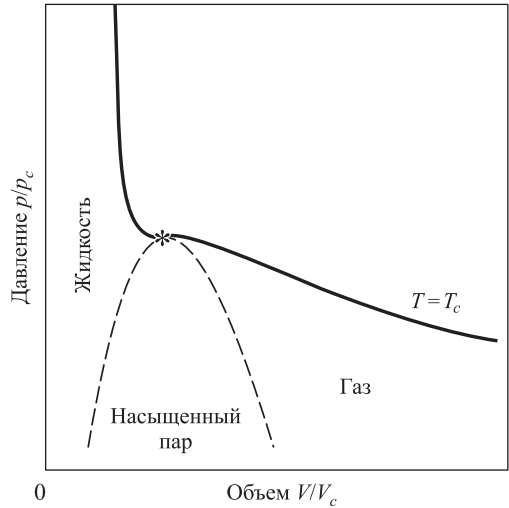
Разности объемов представляются на графике отрезками длиной  $FZ$  и  $BZ$ . Мы пришли к так называемому **правилу рычага**: точка  $F$  делит прямолинейный отрезок изотермы на части, длины которых обратно пропорциональны массам фаз:

$$m_{\text{ж}} FZ = m_{\text{п}} BZ; \quad \frac{m_{\text{ж}}}{m_{\text{п}}} = \frac{BZ}{FZ}. \quad (11.50)$$

При выводе (11.50) мы никак не использовали уравнение состояния Ван-дер-Ваальса, т. е. правило рычага справедливо для равновесия любых химически одинаковых фаз, не вступающих в реакцию друг с другом.

Вне нашего внимания остались пока участки однофазных кривых  $BC$  и  $EF$ . Они соответствуют *метастабильным состояниям* — перегретой жидкости (кривая  $EF$ ) и пересыщенному пару (кривая  $BC$ ). *Перегретая жидкость* — это жидкость, находящаяся при температуре выше точки кипения при данном давлении. На изотерме газа Ван-дер-Ваальса началу кипения жидкости соответствует точка  $F$ . Однако кипение начинается с парообразования вокруг зародышей —

<sup>1</sup> Дж. К. Максвелл. О динамическом доказательстве молекулярного строения тел. *Nature*, vol. XI, Issue 279, pp. 357–359 (1875). Перевод в книге: Дж. К. Максвелл. Речи и статьи. Гостехиздат, М.-Л., 1940. С. 104–126.



**Рис. 11.6.** Область сосуществования газообразной и жидкой фаз, полученная соединением концов прямолинейных участков изотерм при различных температурах

каких-то неоднородностей в жидкости, а в отсутствие таковых жидкость может быть нагрета гораздо выше точки кипения. Википедия сообщает, например, что при нормальном давлении вода может быть нагрета до  $200\text{ }^\circ\text{C}$ , но достаточно малейшего толчка, чтобы она закипела, а при температуре  $300\text{ }^\circ\text{C}$  перегретая вода существует в течение лишь микросекунд.

*Пересыщенный (перенасыщенный) пар* — это пар, давление которого превышает давление насыщенного пара при данной температуре. Такое состояние может быть получено при увеличении давления пара в объеме, свободном от центров конденсации (пылинок, ионов, капелек жидкости и т. д.). Другой способ — охлаждение насыщенного пара при тех же условиях, поэтому пересыщенный пар часто называют *переохлажденным паром*.

При повышении температуры прямолинейный участок изотермы поднимается вверх и становится короче, пока не превратится в критическую точку. Эта точка соответствует определенной температуре, давлению и плотности. В критической точке плотность жидкости и ее насыщенного пара становятся одинаковыми, видимая граница между ними исчезает. При более высоких температурах изотерма становится монотонной и все больше приближается к изотерме идеального газа.

Если построить прямолинейные участки изотерм для разных температур ниже критической ( $T < T_c$ ), то они заполнят область, граница которой показана пунктирной линией на рисунке 11.6. Эта область соответствует сосуществованию жидкой и газообразной фаз, справа от нее лежит область газообразной фазы, слева — жидкой.

Рассматривая график, можно прийти к следующим выводам:

- При температуре выше критической вещество может существовать только в газообразном состоянии. Никаким сжатием газ при  $T > T_c$  нельзя превратить в жидкость. В критической точке (отмечена звездочкой на рис. 11.6) исчезает различие между газом и жидкостью.

- Давление насыщенного пара  $p_n(T)$  не может превышать критического давления  $p_c$ .
- Объем вещества в жидком состоянии не может превышать его критический объем.

Максвелл высоко оценил работу Ван-дер-Ваальса (1873): «Молекулярная теория непрерывности жидкого и газообразного состояний составляет предмет весьма остроумной диссертации Иоганна Дидерика ван-дер-Ваальса (Лейденский университет). Мне кажется, что в некоторых пунктах он впал в математические ошибки и, разумеется, его конечный результат не является исчерпывающим выражением взаимодействия между реальными молекулами; но он так талантливо и смело взялся за этот трудный вопрос, что его исследование даст, вероятно, заметный толчок развитию учения о молекулярном строении тел. Несомненно, эта диссертация заставила многих исследователей изучить голландский язык, на котором она написана». В 1910 г. Ван-дер-Ваальс был удостоен Нобелевской премии «за работу, посвященную уравнению состояния газов и жидкостей».

**Задача 11.49.** Найти наибольший объем  $V$ , который может занимать вода массой  $m = 1$  кг.

**Решение.** Как было сказано, наибольший объем жидкость занимает в критической точке. Поэтому используем (11.44):  $V = V_c = (m/\mu)V_{m,c}$ . Значение  $V_{m,c}$  берем из таблицы 11.2:  $V = (1/18 \cdot 10^{-3}) \times 56,3 = 3,1 \cdot 10^3 \text{ см}^3 = 3,1 \text{ л}$  — в три раза больше объема воды при обычных условиях! ■

Заметим, что зависимость давления насыщенного пара от температуры  $p_n(T)$  проявляется, в частности, в изменении температуры кипения воды при подъеме в горы. Точка кипения определяется из равенства давления насыщенного пара атмосферному давлению. Понижение последнего приводит к более низкой изотерме на нашем рисунке, т. е. к понижению температуры кипения.

Напомним заодно, что вместе с атмосферным давлением и температурой воздуха в сводках погоды сообщают и его относительную влажность. Под ней понимается выраженное в процентах отношение парциального давления водяного пара, содержащегося в воздухе, к давлению насыщенного пара при данной температуре. Таким образом, 100% влажность вовсе не означает, что вместо воздуха мы стали дышать водой. Давление насыщенного водяного пара при некоторых значениях температуры приведено в табл. 11.3.

**Таблица 11.3.** Давление насыщенных паров воды

$t$ , °C	$p_n$ , кПа	$t$ , °C	$p_n$ , кПа	$t$ , °C	$p_n$ , кПа	$t$ , °C	$p_n$ , МПа
0	0,61	25	3,17	60	19,9	200	2,32
5	0,87	30	4,24	70	31,2	250	3,98
10	1,23	35	5,63	80	47,4	300	8,59
15	1,71	40	7,37	90	70,1	350	16,5
20	2,34	50	12,3	100	101	374	22,1

**Задача 11.50.** По радио передали, что атмосферное давление  $p = 757$  мм рт. ст. (плотность ртути  $\rho = 13,55 \text{ т/м}^3$ ), относительная влажность воздуха  $r = 86\%$ , а температура воздуха  $t = 20^\circ\text{C}$ . Какова абсолютная влажность воздуха  $r_a$  (масса

водяных паров в единице объема)? Какую долю  $\eta$  от атмосферного давления составляет парциальное давление водяных паров?

**Решение.** Переведем значение атмосферного давления в СИ. Давление ртутного столба высотой  $h$  равно  $p = \rho gh = 13,55 \cdot 10^3 \times 9,81 \times 0,757 = 100,6$  кПа. По табл. 11.3 находим давление насыщенных паров при данной температуре воздуха:  $p_n = 2,34$  кПа. Парциальное давление паров воды  $p_i = p_n (r/100\%) = 2,34 \times 0,86 = 2,01$  кПа, и мы можем уже ответить на второй вопрос задачи:  $\eta = p_i/p = 2,01/100,6 = 0,02$ .

Теперь применим уравнение Клапейрона—Менделеева для водяного пара. Поскольку искомая абсолютная влажность есть не что иное, как плотность водяного пара, т. е.  $r_a = m/V$ , немедленно находим:

$$r_a = \frac{p_i \mu}{RT} = \frac{2,01 \cdot 10^3 \times 18 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 293} = 14,9 \frac{\text{г}}{\text{м}^3}. \blacksquare$$

**Задача 11.51.** Если температура в задаче 11.50 понизится, то в воздухе может появиться туман. При какой температуре  $t_p$  это произойдет? Какое количество росы выпадет на землю при понижении температуры до  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ ?

**Решение.** Надо найти температуру  $t_p$  (ее называют *точкой росы*), при которой давление  $p_n$  насыщенного водяного пара станет равным полученному в предыдущей задаче парциальному давлению  $p_i = 2,01$  кПа. Тогда относительная влажность воздуха достигнет 100%, и дальнейшее понижение температуры приведет к конденсации «излишков» пара. В таблице 11.3 нет значения 2,01 кПа для давления насыщенного пара. Но можно утверждать, что искомая температура находится в интервале от  $15^\circ\text{C}$  до  $20^\circ\text{C}$ . Поскольку он не столь велик, для более точного определения точки росы используем линейное приближение: будем считать, что в указанном интервале зависимость давления от температуры дается формулой

$$p_n = 1,71 + \frac{t - 15}{5} (2,34 - 1,71) = 0,126t - 0,180, \quad (11.51)$$

где давление измеряется в кПа, а температура — в градусах Цельсия. Приравнявая  $p_n$  и  $p_i$ , находим точку росы  $t_p = (2,01 + 0,18)/0,126 \approx 17^\circ\text{C}$ .

При понижении температуры до значения  $t_1 = 10^\circ$  давление насыщенного пара понижается до  $p_{i,1} = 1,23$  кПа, как следует из той же таблицы, т. е. становится меньше прежнего  $p_i = 2,01$  кПа. В этой же пропорции уменьшается плотность водяных паров:  $r_{a,1} = r_a \cdot (p_{i,1}/p_i) = 14,9 \times (1,23/2,01) = 9,1$  г/м<sup>3</sup>. Следовательно, из каждого кубометра воздуха на землю выпадет  $(14,9 - 9,1) = 5,8$  г воды.  $\blacksquare$

Наличие внутреннего давления  $p_i = m^2 a / (\mu^2 V^2)$  газа Ван-дер-Ваальса приводит к тому, что внутренняя энергия такого газа по сравнению с внутренней энергией идеального газа  $U_{ид}$  включает добавку  $U_i$  — потенциальную энергию взаимодействия молекул между собой. Эта энергия равна работе сил внутреннего давления:

$$dU_i = p_i dV = \frac{m^2 a}{\mu^2} \frac{dV}{V} = -d \left( \frac{m^2 a}{\mu^2 V} \right) = -d(p_i V). \quad (11.52)$$

В отсутствие внутреннего давления дополнительная энергия равна нулю, так что можем положить  $U_i = -p_i V$ . Здесь отрицательный знак означает притяжение между молекулами.

Тогда для внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса имеем соотношение:

$$U = U_{ид}(T) - \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V}. \quad (11.53)$$

Формула отражает тот факт, что при увеличении объема газа производится работа против сил притяжения между молекулами. Из (11.53) следует теоретическое объяснение так называемого *эффекта Джоуля—Томсона*. В этом эффекте газ адиабатно расширяется в пустоту. Поскольку нет подвода теплоты и газ не совершает работы против внешнего давления, его внутренняя энергия  $U$  должна оставаться постоянной. Для идеального газа это эквивалентно постоянству температуры. Но в реальном газе уменьшение вычитаемого в (11.53) влечет за собой уменьшение первого члена, т. е. понижение температуры. Этим эффектом пользуются при сжижении газов. В следующей главе мы еще вернемся к обсуждению эффекта Джоуля—Томсона для газа Ван-дер-Ваальса. В веществах, где доминирует отталкивание между молекулами, наблюдается повышение температуры при адиабатном расширении, т. е. обратный эффект Джоуля—Томсона.

**Задача 11.52.** Получить выражения для молярных теплоемкостей газа Ван-дер-Ваальса при постоянном объеме и постоянном давлении. Исследовать поведение теплоемкостей в зависимости от температуры и объема системы.

**Решение.** Исходными выражениями являются уравнение (11.53) для внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса, уравнение состояния (11.37) для одного моля и общие выражения для теплоемкостей (11.18) и (11.19) любой системы.

Из (11.18) и (11.53) немедленно вытекает, что молярная теплоемкость газа Ван-дер-Ваальса совпадает с молярной теплоемкостью идеального газа:

$$c_{m,V} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial U_{ид}}{\partial T} \right)_V = \frac{i}{2} RT. \quad (11.54)$$

Из (11.19) следует, что разность теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме равна:

$$c_{m,p} - c_{m,V} = \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (11.55)$$

Первое слагаемое легко находим, дифференцируя (11.53) и приняв во внимание, что внутренняя энергия идеального газа не зависит от его объема:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{a}{V^2}. \quad (11.56)$$

Тогда (11.56) переписывается в виде

$$c_{m,p} - c_{m,V} = \left\{ p + \frac{a}{V^2} \right\} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (11.57)$$

Записываем теперь уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса в виде

$$RT = (V - b) \left( p + \frac{a}{V^2} \right) \quad (11.58)$$

и дифференцируем обе части (11.58) по объему при постоянном давлении:

$$R \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \left( p + \frac{a}{V^2} \right) - 2(V - b) \frac{a}{V^3}. \quad (11.59)$$

Отсюда находим частную производную объема по температуре:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p^{-1} = \frac{R}{\left( p + \frac{a}{V^2} \right) - 2(V - b) \frac{a}{V^3}}. \quad (11.60)$$

Подставляя (11.60) в (11.57) и заменяя с учетом уравнения состояния  $p + a/V^2$  на  $RT/(V - b)$ , получаем окончательно

$$c_{m,p} - c_{m,V} = \frac{R}{1 - \frac{2a}{RTV} \left(1 - \frac{b}{V}\right)^2}. \quad (11.61)$$

Соотношение Майера (11.21)  $c_{m,p} - c_{m,V} = R$  следует отсюда либо при высоких температурах, либо при больших объемах (малых плотностях газа). Чтобы придать физический смысл понятиям «высокая температура» и «большой объем», используем безразмерные отношения объема и температуры к их критическим значениям (11.41) и (11.42):  $v = V/V_c$ ,  $\theta = T/T_c$ . В этих единицах (11.61) записывается в виде

$$c_{m,p} - c_{m,V} = \frac{R}{1 - \frac{9}{4\theta v} \left(1 - \frac{1}{3v}\right)^2}. \quad (11.62)$$

Теперь ясно, что для выполнения соотношения Майера температура или объем должны быть велики по сравнению со своими критическими значениями.

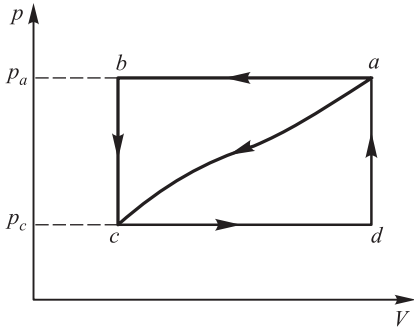
Если температура газа больше критической (существует только газообразная фаза), то разность теплоемкостей, как легко убедиться, достигает максимального значения при  $v = 1$ , откуда получаем

$$R \leq c_{m,p} - c_{m,V} \leq \frac{R}{1 - 1/\theta}. \quad (11.63)$$

Если же температура ниже критической, то в двухфазной области изобара совпадает с изотермой и потому значение  $c_{m,p}$  бесконечно.

## Контрольные вопросы

1. Какую работу должен совершить человек, чтобы компенсировать съеденный кусок пирога калорийностью 400 ккал? В течение какого времени человек должен работать, если при средней физической нагрузке он развивает мощность 500 Вт?
2. Какое количество теплоты выделяется, когда тормоза автомобиля массой 1200 кг замедляют его скорость от 90 км/час до нуля?
3. Баллон с манометром содержит сжатый газ. Открыв кран, из баллона выпускают газ, так что давление падает до атмосферного. Кран закрывают, но через некоторое время манометр показывает, что давление в баллоне превышает атмосферное. Объясните это явление.
4. Один моль азота  $N_2$  при температуре  $0^\circ\text{C}$  нагревается до  $100^\circ\text{C}$  при постоянном давлении 1,0 атм. Определите: 1) изменение внутренней энергии; 2) работу, совершенную газом; 3) сообщенное ему количество теплоты.
5. Молоток массой 0,5 кг имел скорость 5 м/с непосредственно перед ударом по гвоздю. Оцените повышение температуры железного гвоздя массой 15 г после десяти ударов молотка, быстро следующих один за другим, считая, что гвоздь полностью поглощает всю выделившуюся теплоту. Указание: молярная теплоемкость железа  $c_m = 25,14$  Дж/(моль · К).
6. Во время работы человек массой 70 кг развивает мощность 0,5 л.с. Считая, что 20% произведенной энергии переходит в полезную работу, а остальные 80% — в теплоту, вычислите, насколько повысилась бы температура тела человека спустя один час в отсутствие теплообмена с окружающей средой. Указание: человек в основном состоит из воды, молярная теплоемкость  $c_m = 75,3$  Дж/(моль · К).



**Рис. 11.7.**  $pV$ -диаграмма процессов перехода газа из состояния  $a$  в  $c$  и (обратно) разными способами (к контрольному вопросу 8)

7. При очень низких температурах молярная теплоемкость многих веществ пропорциональна абсолютной температуре в третьей степени:  $c_m = c_{0,m}T^3$  (это соотношение иногда называют законом Дебая). Для каменной соли  $T_0 = 281$  К и  $c_{0,m} = 1940$  Дж/(моль  $\cdot$  К<sup>3</sup>). Определите количество теплоты, необходимое для нагревания 3,5 моль этого вещества от температуры 12 К до 38 К.
8. Газ переходит из состояния « $a$ » в состояние « $c$ » вдоль кривой « $ac$ » (рис. 11.7). При этом газ совершает работу  $A = -35$  Дж, и ему сообщается теплота  $Q = -63$  Дж. Если же процесс описывается линией « $a-b-c$ », то совершенная работа равна  $A = -48$  Дж. 1) Чему равна сообщаемая газу теплота  $Q$  для процесса « $a-b-c$ »? 2) Если  $p_c = p_a/2$ , то какая работа совершается в процессе « $c-d-a$ »? 3) Чему равна сообщаемая теплота  $Q$  в процессе « $c-d-a$ »? 4) Чему равна разность внутренних энергий  $U_a - U_c$ ? 5) Если  $U_d - U_c = 5$  Дж, то чему равна теплота  $Q$  для процесса « $d-a$ »?
9. Идеальный одноатомный газ медленно расширяется до тех пор, пока его первоначальный объем не удвоится. Изобразите на  $pV$ -диаграмме: 1) изотермический, 2) адиабатический и 3) изобарический процессы. В каких процессах происходит наибольшее и наименьшее изменение внутренней энергии? В каких процессах совершается наибольшая и наименьшая работа? В каких процессах газу сообщается наибольшее и наименьшее количество теплоты?
10. При адиабатическом расширении объем идеального газа увеличивается в два раза, причем газ совершает 850 Дж работы. 1) Какое количество теплоты сообщается газу при этом? 2) Чему равно изменение внутренней энергии газа? 3) Как меняется температура газа?
11. В каком состоянии (жидком или газообразном) находится углекислый газ в баллоне, если давление  $p = 120$  атм, а температура  $t = 20^\circ\text{C}$ ? Тот же вопрос, если в баллоне находится кислород. Примечание: внесистемная единица давления 1 атм  $\approx$  101 кПа.
12. В прочный сосуд налили воду и нагрели ее до температуры  $t = 500^\circ\text{C}$ . Давление в сосуде увеличилось до  $p = 500$  атм. Жидкость или газ находятся в сосуде?
13. Горцы, пасущие скот на высокогорных пастбищах, при варке мяса плотно закрывают котлы крышкой и накладывают сверху камни. Для чего?
14. Почему запотевают очки у человека, вошедшего в теплое помещение с холода?
15. Почему летом после захода солнца туман появляется сначала в низинах? Почему облака осенью бывают ниже, чем летом?

## Глава 12

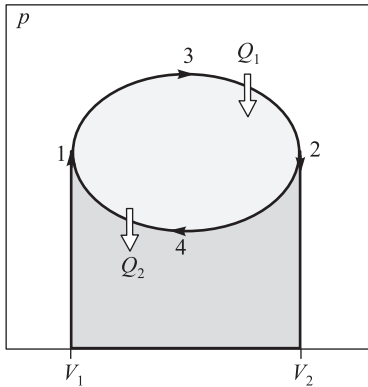
# Второе начало термодинамики и энтропия

В этой главе мы продолжим изучение термодинамических свойств систем. Основная наша цель сейчас — понять, каким образом теплота может быть преобразована в работу механизмов. Как мы видели, тепловая энергия — это в конечном итоге энергия хаотического движения молекул. Полезная же работа, извлекаемая из различных устройств, имеет упорядоченный характер. Тепловые машины вращают генераторы на электростанциях, приводят в движение транспортные средства. Каким же образом происходят превращения одного вида энергии в другие? Интуитивно ясно, что различные виды энергии чем-то разнятся, даром что все они подчиняются закону сохранения энергии или первому началу термодинамики. В самом деле, очень легко превратить механическую работу в тепло: достаточно потереть друг о друга два деревянных бруска, и они нагреются. Упорядоченное периодическое движение брусков превращается при этом в хаотическое движение составляющих их молекул. Но сможете ли вы заставить нагретые бруски истратить часть своей тепловой энергии на возбуждение их упорядоченного периодического движения? Словом, в этой главе мы займемся вопросом, с какой эффективностью порядок может быть организован из хаоса.

### 12.1 Циклы и КПД тепловых машин

*Тепловыми машинами* в термодинамике называются любые устройства, преобразующие теплоту в работу (тепловые двигатели) или переносящие теплоту от менее нагретых тел к телам с более высокой температурой (холодильные установки). Для функционирования тепловой машины необходимы три составляющие: нагреватель, холодильник и рабочее тело. *Рабочее тело* (им может быть любая материальная среда, расширяющаяся при нагревании и сжимающаяся при охлаждении) получает теплоту от *нагревателя* (источника теплоты, находящегося при высокой температуре  $T_{\max}$ ), часть теплоты отдает *холодильнику* (другому источнику с более низкой температурой  $T_{\min} < T_{\max}$ ), а остаток тепловой энергии превращает в работу. Тепловые машины работают по *замкнутым циклам*: рабочее тело проходит ряд состояний, чтобы вернуться неизменившимся в





**Рис. 12.1.** Пример некоторого замкнутого цикла (направление процесса показано стрелками). Площадь под верхней кривой равна работе, совершаемой системой, а площадь под нижней кривой — работе внешних сил над системой (показана темным тоном). Разность площадей (более светлый тон) равна полной работе, совершенной системой в цикле

исходное и повторять этот процесс снова и снова. На диаграммах состояний подобные циклические процессы изображаются замкнутыми кривыми.

Рассмотрим подробнее процесс на рис. 12.1. При расширении газа от минимального ( $V_1$ ) до максимального ( $V_2$ ) объема по пути  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  система совершает положительную работу  $A_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2}$ , численно равную площади под верхней кривой. При возвращении системы в исходное состояние по другому пути  $2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  работа  $A_{2 \rightarrow 4 \rightarrow 1}$  совершается над системой. Она отрицательна и по абсолютной величине равна площади под нижней кривой. Алгебраическая сумма этих работ  $A = A_1 + A_2 = A_1 - |A_2|$  есть полная работа, совершенная системой. Ее численная величина равна разности упомянутых площадей, т. е. площади *между* верхней и нижней кривыми. Иными словами, полная работа равна площади данного цикла на  $pV$ -диаграмме если процесс совершается по часовой стрелке; в противном случае полная работа отрицательна, но ее модуль также равен площади цикла.

В ходе осуществления цикла система взаимодействовала с внешней средой, получала и отдавала теплоту. Если обозначить через  $Q_1$  количество теплоты, полученное системой, то коэффициент полезного действия (КПД)  $\eta$  гипотетической тепловой машины, работающей по этому циклу, естественно определить через отношение

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (12.1)$$

КПД часто выражают также в процентах, для чего  $\eta$  надо умножить на 100%. Если обозначить через  $Q_2$  ( $Q_2 > 0$ ) количество теплоты, возвращенное системой во внешнюю среду, то разность  $Q_1 - Q_2$  равна совершенной работе  $A$ . Это следует из первого начала термодинамики и из того факта, что при возвращении системы в исходное состояние ее внутренняя энергия также принимает исходное значение. Тогда КПД тепловой машины записывается в виде:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (12.2)$$

Отсюда видно, что КПД тепловой машины не может быть больше единицы. Это утверждение можно сформулировать как **невозможность вечного двигателя первого рода**: нельзя соорудить периодически действующую тепловую машину, которая совершала бы полезную работу в количестве, превышающем получаемую извне энергию. Существование такого двигателя противоречило бы закону сохранения энергии. Поскольку ни количество теплоты, ни совершенная системой работа не являются функциями состояния, КПД зависит от данного конкретного цикла, по которому работает тепловая машина.

До сих пор мы рассматривали процесс, соответствующий работе именно *тепловой машины*. Если повернуть процесс вспять (пустить его против часовой стрелки на рис. 12.1), то мы получим модель *холодильной* установки. Все стрелки на этом рисунке меняют направления на обратные, система получает от холодильника количество теплоты  $Q_2$ , и за счет работы внешней силы (электромотора) передает нагревателю большее количество теплоты  $Q_1$ . Закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) требует выполнения равенства  $Q_2 + A = Q_1$ . Эффективность холодильной установки можно определить аналогично КПД тепловой машины. Надо только учесть, что полезным теперь является количество отнимаемой теплоты  $Q_2$ , для чего мы совершаем работу  $A$ . Поэтому в литературе часто определяют *холодильный коэффициент*  $\eta'$  как отношение отнимаемой теплоты к совершаемой при этом работе:

$$\eta' = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (12.3)$$

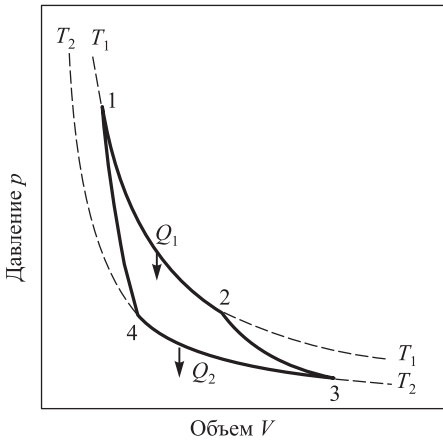
Заметим, что холодильный коэффициент может стать больше единицы. Если мы хотим пользоваться привычным коэффициентом полезного действия, то для холодильной установки естественно определить его как отношение отнятой теплоты к переданному во внешнюю среду:

$$\eta_{\text{хол}} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_2 + A}. \quad (12.4)$$

Такое определение соответствует традиционным взглядам на КПД установок. В холодильнике со 100%-й эффективностью (если бы это было возможно) все количество отнятой теплоты передавалось бы без совершения работы во внешнюю среду. Тогда мы имели бы  $Q_2 = Q_1$  и  $\eta_{\text{хол}} = 1$ . Наоборот, когда мы совершаем какую-то работу, но не отнимаем никакой теплоты, то  $Q_2 = 0$  и  $\eta_{\text{хол}} = 0$ .

## 12.2 Цикл Карно

Как уже говорилось, для работы любой тепловой машины по замкнутому циклу необходима внешняя среда, которую условно можно представить себе как два тела — нагреватель, находящийся при температуре  $T_{\text{max}}$ , и холодильник, находящийся при температуре  $T_{\text{min}}$  ( $T_{\text{min}} < T_{\text{max}}$ ). Предполагается, что при контакте с рабочим телом температуры нагревателя и холодильника не меняются, т. е. их теплоемкости гораздо больше теплоемкости рабочего тела и их можно рассматривать как бездонные тепловые резервуары. При контакте с нагревателем рабочее тело получает теплоту, при контакте с холодильником — отдает.



**Рис. 12.2.** Цикл Карно (обходится по часовой стрелке) — комбинация двух изотерм  $1 \rightarrow 2$ ,  $3 \rightarrow 4$  и двух адиабат  $2 \rightarrow 3$  и  $4 \rightarrow 1$ . Для наглядности пунктиром показаны ветви соответствующих изотерм, не проходимые системой в данном цикле. Теплообмен со средой осуществляется в изотермических ветвях цикла: на участке  $1 \rightarrow 2$  газ получает теплоту  $Q_1$ , а на участке  $3 \rightarrow 4$  отдает теплоту  $Q_2$

В термодинамике существует **теорема Карно**:

◆ *при заданных температурах нагревателя и холодильника максимально возможный КПД тепловой машины определяется формулой*

$$\eta_C = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} \quad (12.5)$$

*и не зависит от рабочего тела машины.* ◆

Реализация максимально возможного КПД достигается, например, в так называемом **цикле Карно**, когда идеальный газ проходит замкнутый цикл, составленный из двух адиабат и двух изотерм (рис. 12.2). Убедимся, что цикл Карно с идеальным газом в качестве рабочего тела действительно имеет КПД, соответствующий формуле (12.5). Температура системы равна  $T_1$  в точках кривой 1–2 и  $T_2$  в точках кривой 3–4. Значения остальных термодинамических параметров ( $p, V$ ) будут иметь в качестве индекса номер соответствующей точки на диаграмме. Нам надо вычислить количества полученной  $Q_1$  и отданной  $Q_2$  теплоты, найти совершенную газом работу  $A = Q_1 - Q_2$  и определить КПД цикла. Заметим, что на участках  $2 \rightarrow 3$  и  $4 \rightarrow 1$  система не обменивается теплотой с внешней средой. Следовательно, теплоту  $Q_1$  газ получает на участке  $1 \rightarrow 2$ , а теплоту  $Q_2$  отдает на участке  $3 \rightarrow 4$ . Рассмотрим подробнее различные участки цикла.

**Изотерма 1→2.** На этом участке газ находится в контакте с нагревателем и происходит изотермическое расширение от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . Температура  $T_1$  не меняется, следовательно не изменяется внутренняя энергия, а вся полученная теплота расходуется на совершение газом работы:  $Q_1 = A_{1 \rightarrow 2}$ . Величину этой работы мы уже вычисляли, так что находим:

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.6)$$

**Адиабата 2→3.** Здесь система отсоединяется от нагревателя и не обменивается теплотой с внешней средой:  $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$ . Газ продолжает расширяться, но

уже адиабатно. Работа совершается за счет внутренней энергии газа, и его температура падает до значения  $T_2$ . На этом участке цикла нам нужна информация, доставляемая уравнением адиабаты

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (12.7)$$

**Изотерма 3→4.** Система подключается к холодильнику и газ начинает сжиматься. Внутренняя энергия остается неизменной, над газом совершается работа ( $A_{3\rightarrow4} < 0$ ), а выделяющаяся теплота  $Q_2 = -A_{3\rightarrow4}$  передается холодильнику. Имеем аналогично (12.6):

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (12.8)$$

**Адиабата 4→1.** Система отключена от внешней среды и продолжает сжиматься изотермически, что приводит к повышению ее температуры до  $T_1$ . В конечном итоге система возвращается в первоначальное состояние. Поскольку точки 4 и 1 лежат на адиабате, получаем связь объемов и температур, аналогичную (12.7):

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}. \quad (12.9)$$

Из уравнений (12.7) и (12.9) находим отношения объемов

$$\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2},$$

откуда следует, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (12.10)$$

Поэтому отдаваемую холодильнику теплоту  $Q_2$  [см. уравнение (12.8)] можно записать как

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.11)$$

Используя выражение (12.6) для теплоты, полученной системой, находим совершенную в ходе цикла работу

$$A = Q_1 - Q_2 = \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.12)$$

Из проведенного анализа следует также, что максимальная температура в цикле равна  $T_{\max} = T_1$ , а минимальная —  $T_{\min} = T_2$ . Если разделить (12.12) на (12.6), то немедленно получим выражение (12.5) для КПД цикла Карно, из которого выпадают все параметры, кроме температур холодильника и нагревателя.

**Задача 12.53.** Котел тепловой станции работает при температуре около  $t_1 = 550^\circ\text{C}$ . Отработанная теплота отводится к реке при температуре около  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ . Каков максимально возможный КПД этой станции?

**Решение.** Поскольку в формуле для КПД цикла Карно используются абсолютные температуры, перейдем к шкале Кельвина:  $T_1 = 550 + 273 = 823 \text{ К}$ ,  $T_2 = 20 + 273 = 293 \text{ К}$ . Теперь находим КПД тепловой станции:  $\eta = (823 - 293)/823 = 64,4\%$ . Конечно, реальный КПД станции заметно ниже. ■

Важно подчеркнуть, что теплообмен между рабочим телом и источниками теплоты (нагревателем и холодильником) происходит на изотермах, т. е. когда источник и рабочее тело имеют одинаковую температуру. Это обеспечивает *обратимость* цикла Карно: все проходимые равновесные состояния рабочего тела могут быть пройдены в обратном порядке. Если цикл Карно осуществить в обратном направлении, т. е. против часовой стрелки на рис. 12.2, то для определения эффективности холодильной установки надо использовать формулы (12.3), (12.4) и выражения (12.6), (12.11). Получаем тогда:

$$\eta' = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad \eta_{\text{хол}} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (12.13)$$

Парадоксально, но факт: чем ниже температура внешней среды  $T_1$ , тем меньше мы нуждаемся в холодильнике, и тем эффективнее он работает.

Приведем численный пример. Если кондиционер поддерживает в комнате температуру  $t_2 = 20^\circ\text{С}$ , а температура наружного воздуха равна  $t_1 = 30^\circ\text{С}$ , то для холодильного коэффициента имеем  $\eta' = 293/10 = 29,3$ , а для КПД  $\eta_{\text{хол}} = 293/303 = 96,7\%$ . Конечно, на самом деле температура тепловыделяющего элемента больше наружной температуры на 20–30 градусов, так что разность температур может достигать 30–40 градусов, что приводит к значениям  $\eta' \approx 7\text{--}10$ ,  $\eta_{\text{хол}} \approx 88\text{--}91\%$ .

Напомним, что речь идет об идеальных установках, работающих по циклу Карно. Реальный типичный кондиционер потребляет мощность 750 Вт, перекачивая за час около 5 МДж тепловой энергии. Это значит, что за секунду кондиционер совершает работу  $A = 750 \text{ Дж}$ , и отнимает у воздуха в комнате теплоту  $Q_2 = 5 \cdot 10^6 / 3600 \approx 1,4 \text{ кДж}$ . Отсюда находим  $\eta' = Q_2/A \approx 1400/750 \approx 1,9$  и  $\eta_{\text{хол}} = Q_2/(Q_2 + A) \approx 1400/2150 \approx 65\%$ . Мы видим, что реальный кондиционер гораздо менее эффективен, нежели идеальный холодильник Карно.

**Задача 12.54.** Пусть в домашнем холодильнике поддерживается температура  $t_2 = -3^\circ\text{С}$ , а температура в кухне равна  $t_1 = 27^\circ\text{С}$ . Пусть далее мотор холодильника потребляет мощность  $N = 200 \text{ Вт}$ . Предполагая, что холодильник работает по циклу Карно и что тепловыделяющий элемент имеет температуру окружающего воздуха, определить мощность потока тепловой энергии, перекачиваемой из камеры холодильника в кухню.

**Решение.** Температуры воздуха в холодильнике и в кухне равны  $T_1 = 270 \text{ К}$  и  $T_2 = 300 \text{ К}$ , соответственно. За время  $t$  компрессор холодильника совершит работу  $A = Nt$ . КПД холодильника  $\eta_{\text{хол}} = T_2/T_1 = Q_2/Q_1 = (Q_1 - A)/Q_1$ , откуда находим количество теплоты, поступающее в кухню в единицу времени:

$$\frac{Q_1}{t} = N \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 200 \frac{300}{300 - 270} = 2 \text{ кВт}.$$

По закону сохранения энергии количество теплоты  $Q_2$ , отнимаемое из камеры холодильника, в сумме с работой  $A = Nt$ , произведенной мотором, дает количество теплоты  $Q_1$ , поступающее в кухню. Отсюда находим количество теплоты, выкачиваемое из

холодильника в единицу времени:

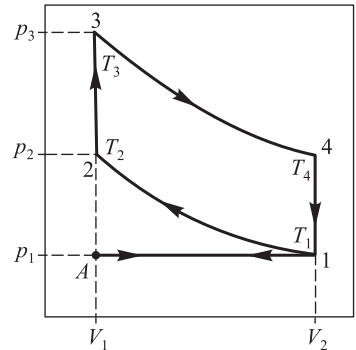
$$\frac{Q_2}{t} = \frac{Q_1}{t} - N = 1800 \text{ кВт.}$$

КПД нашего холодильника  $\eta = Q_2/Q_1 = 0,9$ . Обращаем внимание, что холодильник работает как весьма эффективный *обогреватель* помещения. Надо только оплачивать потребляемую мотором мощность 200 Вт, а в кухню поступит в 10 раз бóльшая энергия, 90% которой перекачивается из камеры холодильника. Любопытно, что если бы вместо холодильника был включен обогреватель той же мощности 200 Вт, то он нагревал бы помещение как минимум в 10 раз слабее. ■

Наши численные оценки демонстрируют, в чем заключается проблема теплового загрязнения окружающей среды, свойственная технической цивилизации.

## 12.3 Двигатель внутреннего сгорания

Теперь познакомимся с одним из циклов, используемых в технике, и сравним его по эффективности с циклом Карно. Технические циклы на самом деле необратимы и даже не замкнуты, так как часть рабочего вещества выбрасывается наружу. Задачей техники является создание циклов, приближающихся по своим характеристикам к идеальным. Поэтому мы рассмотрим *идеализированный* процесс (так называемый цикл Отто), близкий к используемому в двигателе внутреннего сгорания. Цикл Отто изображен на рис. 12.3. Как обычно, термодинамические параметры имеют индекс номер соответствующей точки на рисунке (в данном случае надо будет помнить, что  $V_3 = V_2$ ,  $V_4 = V_1$ ).



**Рис. 12.3.** Идеализированный цикл четырехтактного двигателя внутреннего сгорания (цикл Отто)

**Изобара  $A \rightarrow 1$ .** Первый такт цикла. Вследствие движения поршня в цилиндр всасывается горючее. Приблизительно можно считать, что это происходит при атмосферном давлении  $p_1$ . Объем увеличивается от  $V_2$  до  $V_1$ .

**Адиабата  $1 \rightarrow 2$ .** Второй такт цикла. Теплообмена со средой нет. Поршень движется в обратном направлении, адиабатно сжимая смесь от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . При этом повышается давление, и температура растет от  $T_1$  до  $T_2$ . Связь температур и объемов в начале и конце адиабатной части цикла дается соотношением:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (12.14)$$

**Изохора 2→3.** Начало третьего такта. Под действием электрической искры горючая смесь взрывается: давление почти мгновенно возрастает до значения  $p_3$ , а объем еще не успеваает измениться. Температура растет от  $T_2$  до  $T_3$  за счет теплоты, выделенной при взрыве. Работа не производится, а количество полученной теплоты выражается формулой:

$$Q_1 = Q_{2 \rightarrow 3} = C_V (T_3 - T_2). \quad (12.15)$$

**Адиабата 3→4 .** Продолжение третьего такта. Теплообмена со средой нет. Газ адиабатно расширяется до максимального объема цилиндра  $V_1$ , падают температура и давление. Связь температур и объемов в начале и конце адиабаты дается уравнением:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_3}{T_4}. \quad (12.16)$$

**Изохора 4→1.** Конец третьего такта. Открывается клапан, давление падает до атмосферного при постоянном объеме. Температура также падает до значения  $T_1$ .

$$Q_2 = -Q_{4 \rightarrow 1} = C_V (T_4 - T_1). \quad (12.17)$$

**Изобара 1→A.** Четвертый такт. Поршень выталкивает из цилиндра отработанные газы, система возвращается в начальное состояние. Поскольку участок  $A \rightarrow 1$  проходится дважды в разных направлениях, соответствующие вклады в работу и в теплоту сокращаются и могут не приниматься во внимание.

Таким образом, получаем для КПД цикла:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}. \quad (12.18)$$

Из уравнений (12.14), (12.16) следует равенство отношений  $T_2/T_1 = T_3/T_4$ , откуда

$$T_2 = \frac{T_1 T_3}{T_4}. \quad (12.19)$$

Подставляя (12.19) в (12.18), приходим к окончательному выражению для КПД цикла:

$$\eta = \frac{T_3 - T_4}{T_3}. \quad (12.20)$$

Оно получилось очень похожим на формулу для КПД цикла Карно, но обратим внимание, что максимальной температурой здесь является температура  $T_{\max} = T_3$  в точке 3, а минимальной — температура  $T_{\min} = T_1$  в точке 1. Поэтому КПД цикла Карно, работающего между такими температурами, равнялся бы

$$\eta_C = \frac{T_3 - T_1}{T_3}.$$

Разность этих двух выражений отлична от нуля:

$$\eta_C - \eta = \frac{T_4 - T_1}{T_3} > 0, \quad (12.21)$$

поскольку  $T_4 > T_1$ . Мы воочию убедились, что КПД рассмотренного цикла меньше КПД цикла Карно. Заметим также, что КПД цикла Отто можно выразить через отношение объемов:

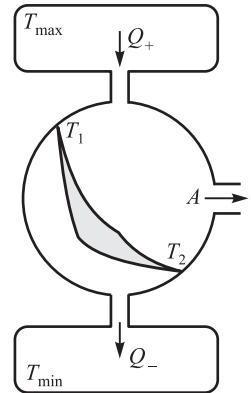
$$\eta = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}. \quad (12.22)$$

Величина  $V_1/V_2$  называется сжатием. Получается, что КПД рассмотренного цикла определяется только величиной сжатия горючей смеси и показателем адиабаты.

## 12.4 Внутреннеобратимая тепловая машина

Помимо цикла Карно и технических циклов, используемых в различных двигателях, представляет интерес так называемая *внутреннеобратимая* тепловая машина (смысл названия станет ясен позже). Дело в том, что максимальный КПД, соответствующий циклу Карно, никогда не достигается на практике. Более того, если бы это было даже возможно, далеко не очевидно, что такую машину стоило бы создавать. Помимо КПД в реальной жизни немаловажную роль играют также простота устройства и управления, стоимость установки, ее надежность, скорость работы и тому подобные требования, которые зачастую конфликтуют между собой. В цикле Карно контакты рабочего тела с тепловыми резервуарами происходят при одинаковой температуре. Это значит, что теплота передается бесконечно медленно, что, конечно, очень непрактично. Представление о реальной производительности используемых установок можно получить, рассматривая внутреннеобратимую тепловую машину.

Предположим снова, что мы имеем два тепловых резервуара при температурах  $T_{\max}$  и  $T_{\min}$ . Предположим также, что работа производится в цикле Карно, функционирующем при температурах  $T_1$  нагревателя и  $T_2$  холодильника. Имеется в виду, что выполняется следующая цепочка неравенств:  $T_{\max} > T_1 > T_2 > T_{\min}$ . Иными словами, мы рассмотрим необратимый в целом процесс, внутри которого есть обратимый цикл. Теплота подается к рабочему телу при постоянной разности температур  $T_{\max} - T_1$  и отводится от него при постоянной разности температур  $T_2 - T_{\min}$  (см. схему на рис. 12.4). В этом и заключается главное отличие от стандартного цикла Карно, где соответствующие разности температур равны нулю.



**Рис. 12.4.** Цикл внутреннеобратимой машины, имитирующей реальные энергетические установки

Скорость теплообмена между рабочим телом и тепловыми резервуарами пропорциональна разности температур между ними:

$$\begin{aligned} \frac{Q_+}{t_+} &= c_+ (T_{\max} - T_1), \\ \frac{Q_-}{t_-} &= c_- (T_2 - T_{\min}), \end{aligned} \quad (12.23)$$

где  $Q_+, t_+$  — получаемое количество теплоты и время его передачи рабочему телу при контакте с нагревателем, а  $Q_-, t_-$  — количество теплоты, отдаваемой холодильнику, и



время этого процесса. Величины  $c_{\pm}$  — соответствующие коэффициенты теплопроводности. Тогда полное время  $t$  теплообмена равно

$$t = t_+ + t_- = \frac{1}{c_+} \cdot \frac{Q_+}{T_{\max} - T_1} + \frac{1}{c_-} \cdot \frac{Q_-}{T_2 - T_{\min}}. \quad (12.24)$$

Время, затрачиваемое машиной на внутренний цикл Карно, определяется временем установления равновесия в рабочем теле, которое существенно меньше, чем время передачи теплоты  $t$ . Поэтому  $t$  можно считать временем совершения полного цикла.

Как обычно, мы предполагаем, что отсутствуют потери теплоты на трение и подобные процессы. Количества теплоты  $Q_{\pm}$  и совершенная работа  $A$  связаны между собой соотношениями, найденными нами при изучении цикла Карно:

$$Q_+ = A \frac{T_1}{T_1 - T_2}, \quad Q_- = A \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (12.25)$$

Подставляя (12.25) в (12.24), находим для времени  $t$  осуществления цикла выражение:

$$\frac{t}{A} = \frac{1}{T_1 - T_2} \left( \frac{1}{c_+} \cdot \frac{T_1}{T_{\max} - T_1} + \frac{1}{c_-} \cdot \frac{T_2}{T_2 - T_{\min}} \right). \quad (12.26)$$

Мощность рассматриваемой машины равна  $A/t$ . Представим себе, что мы проектируем такую машину. У нас имеется возможность выбрать оптимальным образом температуры  $T_1$  и  $T_2$ , при которых функционирует внутренний цикл Карно. Выбирая их равными  $T_{\max}$  и  $T_{\min}$ , соответственно, мы добьемся максимального КПД. Но из формулы (12.26) следует, что при этом  $t \rightarrow \infty$  и выходная мощность машины стремится к нулю. Более практично выбрать температуры таким образом, чтобы максимума достигла выходная мощность. Приравнявая нулю производные по  $T_1$  и  $T_2$  правой части выражения (12.26) для  $t/A$ , находим уравнения для температур, при которых выходная мощность максимальна. Опуская детали рутинных вычислений, приведем лишь конечный результат: максимальная выходная мощность равна

$$\left( \frac{A}{t} \right)_{\max} = c_+ c_- \left( \frac{\sqrt{T_{\max}} - \sqrt{T_{\min}}}{\sqrt{c_+} + \sqrt{c_-}} \right)^2. \quad (12.27)$$

Достигается это значение при температурах внутреннего цикла Карно

$$T_1 = \sqrt{T_0 T_{\max}}, \quad T_2 = \sqrt{T_0 T_{\min}}, \quad (12.28)$$

где параметр  $T_0$ , имеющий смысл некой средней температуры системы, определен соотношением:

$$\sqrt{T_0} = \frac{\sqrt{c_+ T_{\max}} + \sqrt{c_- T_{\min}}}{\sqrt{c_+} + \sqrt{c_-}}. \quad (12.29)$$

Очевидно, что КПД нашей машины равен КПД *внутреннего* цикла Карно  $1 - T_2/T_1$ . Поскольку отношение температур внутреннего цикла равно квадратному корню из отношения температур нагревателя и холодильника, находим для КПД внутреннеобратимой машины:

$$\eta_{\text{вотм}} = 1 - \sqrt{\frac{T_{\min}}{T_{\max}}}. \quad (12.30)$$

Легко убедиться, что КПД меньше максимально возможного  $\eta_C = (1 - T_{\min}/T_{\max})$ , но зато мы выиграли в выходной мощности. Любопытно, что КПД оптимизированной по мощности внутреннеобратимой машины не зависит от коэффициентов теплопроводности: как и в цикле Карно, он определяется лишь отношением температур нагревателя

**Таблица 12.1.** Сравнение наблюдаемых КПД нескольких электростанций разных типов с КПД цикла Карно  $\eta_C$  и цикла внутреннеобратимой машины  $\eta_{\text{вотм}}$

Местонахождение и тип электростанции	$T_{\text{min}}$ (°C)	$T_{\text{max}}$ (°C)	$\eta_C$	$\eta_{\text{вотм}}$	Реальный КПД
<i>West Thurrock</i> , Великобритания (угольная)	25	565	0,64	0,40	0,36
<i>CANDU</i> , Канада (ядерная)	25	300	0,48	0,28	0,30
<i>Larderello</i> , Италия (геотермальная)	80	250	0,33	0,18	0,16

и холодильника. Авторы концепции внутреннеобратимой машины<sup>1</sup> приводят таблицу, где сравниваются несколько крупных электростанций (табл. 12.1). Видно, что формула (12.30) гораздо лучше соответствует практике, нежели КПД идеального цикла Карно. В заключение этого параграфа — иллюстрация на конкретных числах.

**Задача 12.55.** Пусть коэффициенты теплопроводности  $c_{\pm}$  одинаковы и таковы, что при разнице температур  $\Delta T = 10$  К мощность теплового потока между тепловыми резервуарами и рабочим телом составляет 1 кВт, т. е.  $c_+ = c_- = c = 100$  Вт/К. Пусть, далее, температуры резервуаров равны  $T_{\text{max}} = 550^\circ\text{C} = 823$  К и  $T_{\text{min}} = 20^\circ\text{C} = 293$  К. Найдите максимальную выходную мощность внутреннеобратимой тепловой машины и температуры  $T_1$  и  $T_2$ , при которых должно функционировать рабочее тело, использующее цикл Карно.

**Решение.** Из формулы (12.29) следует, что при равенстве коэффициентов теплопроводности «средняя» температура  $T_0$  определяется как

$$T_0 = \left( \frac{\sqrt{T_{\text{max}}} + \sqrt{T_{\text{min}}}}{2} \right)^2 = 524,5 \text{ К.}$$

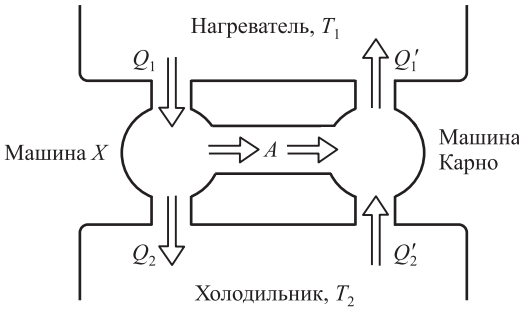
Используя (12.28), находим оптимальные температуры  $T_1 = \sqrt{T_0 T_{\text{max}}} = 657$  К ( $384^\circ\text{C}$ ) и  $T_2 = \sqrt{T_0 T_{\text{min}}} = 392$  К ( $119^\circ\text{C}$ ). КПД такой установки равен  $\eta_{\text{вотм}} = 0,403$  (ср.  $\eta_C = 0,644$ ). При таком образом выбранных температурах рабочего тела достигается максимальная выходная мощность, определяемая по формуле (12.27):

$$\left( \frac{A}{t} \right)_{\text{max}} = c \left( \frac{\sqrt{T_{\text{max}}} - \sqrt{T_{\text{min}}}}{2} \right)^2 \approx 3,35 \text{ кВт.} \blacksquare$$

## 12.5 Второе начало термодинамики

Конечно, сравнение лишь пары циклов с циклом Карно не может служить доказательством максимальной (по КПД) эффективности последнего. Но даже если мы переберем все мыслимые циклы, то все равно искомого доказательства не получим. Ведь в цикле Карно в качестве рабочего тела используется идеальный газ. Быть может, если заставить работать какое-либо другое вещество, мы сумеем превзойти КПД цикла Карно? Вообразим, что такая тепловая машина  $X$  принципиально возможна и посмотрим, к каким последствиям это приведет. Используя

<sup>1</sup> F. L. Curzon and B. Ahlborn, *American Journal of Physics*. **43**, 22, 1975.



**Рис. 12.5.** Гипотетическая тепловая машина, позволяющая обосновать невозможность вечного двигателя второго рода

эту гипотетическую тепловую машину с КПД  $\eta_X$ , соорудим новую установку: соединим машину  $X$  с холодильной установкой Карно и подсоединим их к одному и тому же нагревателю (находящемуся при температуре  $T_1$ ) и холодильнику (находящемуся при температуре  $T_2$ ). Схема установки изображена на рис. 12.5.

Как будет работать наш агрегат? Машина  $X$  забирает теплоту  $Q_1$  от нагревателя, часть ее превращает в полезную работу  $A = \eta_X Q_1$ , а остаток в количестве  $Q_2 = (1 - \eta_X) Q_1$  передает холодильнику. Вся полезная работа  $A$  (предполагается, что исключены потери энергии) используется для приведения в действие холодильной установки Карно, КПД которой равен  $\eta_{\text{хол}} = T_2/T_1$ , а холодильный коэффициент  $\eta' = T_2/(T_1 - T_2)$  [см. уравнения (12.13)]. Это значит, что установка Карно забирает из холодильника теплоту

$$Q'_2 = \eta' A = \eta_X \frac{T_2}{T_1 - T_2} Q_1 \quad (12.31)$$

и передает нагревателю теплоту

$$Q'_1 = \frac{Q'_2}{\eta_{\text{хол}}} = \eta_X \frac{T_1}{T_1 - T_2} Q_1 = Q_1 \frac{\eta_X}{\eta_C}, \quad (12.32)$$

где, напомним,  $\eta_C$  — КПД тепловой машины Карно.

В результате действия агрегата из двух машин получился следующий итог. Никакой работы не произведено, так как вся работа от действия тепловой машины  $X$  потрачена на приведение в действие установки Карно. От холодильника отнято количество теплоты

$$\begin{aligned} \Delta Q &= Q'_2 - Q_2 = Q_1 \left( \eta_X \frac{T_2}{T_1 - T_2} + \eta_X - 1 \right) = \\ &= Q_1 \left( \eta_X \frac{T_1}{T_1 - T_2} - 1 \right) = Q_1 \left( \frac{\eta_X}{\eta_C} - 1 \right). \end{aligned} \quad (12.33)$$

Точно такое же количество теплоты передано нагревателю: как следует из (12.32),  $Q'_1 - Q_1 = \Delta Q$ . Так что с законом сохранения энергии у нас все в порядке, но если  $\eta_X > \eta_C$ , то  $Q'_1 > Q_1$ ,  $Q'_2 > Q_2$ . Это значит, что наш агрегат без всякой работы внешних сил передал какое-то количество теплоты от холодильника к нагревателю. Казалось бы, что беспокоиться не о чем, раз закон сохранения энергии не нарушен. Но никто в природе не наблюдал таких процессов передачи теплоты от холодных тел к горячим, при которых в окружающей среде не происходило каких-либо изменений. В конечном итоге на основе опытных фактов было сформулировано **второе начало термодинамики**:

◆ *невозможны процессы, единственным результатом которых был бы переход теплоты от тела менее нагретого к телу более нагретому.* ◆

Не следует думать, что второе начало термодинамики запрещает передачу теплоты от холодного тела к горячему. Отнюдь нет, в холодильной установке так и происходит. Но ключевое слово в формулировке второго начала — это слово *единственный*. Передача теплоты от холодного тела к нагретому — не единственный результат действия холодильной установки, она связана с источником внешней работы, за счет которой и функционирует.

Многочисленные опыты и наблюдения привели ко второму началу термодинамики и пониманию, что оно является фундаментальным законом природы. Коль скоро это так, то из второго начала следует вывод: для любой гипотетической тепловой машины  $X$  ее КПД не превосходит КПД цикла Карно:  $\eta_X \leq \eta_C$ .

У второго начала термодинамики есть и другая формулировка:

◆ *невозможно осуществление циклического процесса, единственным результатом которого было бы получение работы за счет теплоты, взятой из одного источника.* ◆

Иными словами, нельзя построить установку, где вся теплота  $Q_1$ , полученное от нагревателя, преобразовывалось бы в полезную работу  $A = Q_1$ . Тогда КПД такой установки (ее называют *вечным двигателем второго рода*) равнялся бы единице и превысил бы КПД цикла Карно. Таким образом, второе начало термодинамики запрещает существование вечного двигателя второго рода: какое-то количество полученной теплоты обязательно должно быть передано другим телам (холодильнику). Изобретателям остается только пожалеть об этом. Как было бы здорово, если бы можно было использовать огромную тепловую энергию, накопленную, скажем, в мировом океане! Увы, мы вынуждены сжигать топливо, что приводит и к расходованию природных ресурсов, и к выбросу углекислого газа и прочих продуктов сгорания, и к тепловому загрязнению окружающей среды вследствие принципиальной необходимости отводить часть теплоты в атмосферу или водоемы, играющие роль холодильника.

Вопрос о КПД тепловых машин тесно связан с так называемой *обратимостью* процессов. Процесс называется обратимым, если он может быть проведен в обратном направлении, через ту же последовательность равновесных состояний, но в обратном порядке. Обратимость процессов в термодинамике сродни отсутствию трения в механике. Так же, как в механике, наилучшим механизмом является механизм без трения, так и здесь наилучшей тепловой машиной является обратимая машина. Чтобы показать это, снова обратимся к нашему агрегату на рис. 12.5. Мы не предполагали, что машина  $X$  обратима, но получили, что ее КПД не может превышать КПД тепловой машины Карно, работающей в паре с ней в обратном направлении: ( $\eta_X \leq \eta_C$ ). Пусть теперь машина  $X$  будет обратимой. Запустим наш агрегат в обратном направлении: машина Карно производит полезную работу, и она используется для запуска машины  $X$  как холодильной установки. Но тогда с помощью таких же аргументов мы получим противоположное неравенство  $\eta_X \geq \eta_C$ . Из двух противоположных неравенств

следует единственный вывод: КПД обеих машин равны:  $\eta_X = \eta_C$ . Таким образом, все обратимые тепловые машины имеют *одинаковый* КПД, совпадающий с КПД машины Карно. Необратимые же машины имеют меньший КПД

Какие машины в принципе могут быть обратимыми? Мы видели, что теплота может течь только от нагретых тел к холодным. Это и создает необратимость подобных процессов. Есть два исключения. В адиабатном процессе вообще не происходит передачи теплоты. Медленно сжимая поршнем газ в теплоизолированном сосуде, мы совершаем работу, нагревая при этом газ. Если отпустить поршень, то газ адиабатно расширится, охладившись до прежней температуры и совершив то же количество работы за счет своей внутренней энергии. Мы имеем дело с обратимым процессом. Другой случай, когда процесс передачи теплоты происходит при одинаковой температуре двух тел. Тогда тоже нет выделенного направления переноса тепловой энергии и такой (изотермический) процесс также будет обратим. Таким образом, обратимыми могут быть адиабатный и изотермический процессы и любой цикл, построенный из таких процессов.

Но если теплота переносится при *разных* температурах контактирующих тел и тем более, если в системе есть трение или иные потери энергии, если в газе возникают ударные волны и прочее, то процесс будет необратимым. Взрыв паров бензина в цилиндре автомобильного двигателя не является обратимым процессом: движение поршня в обратном направлении никогда не приводит к рекомбинации продуктов взрыва обратно в пары бензина.

**Вывод: все реальные процессы являются неравновесными и необратимыми.**

## 12.6 Абсолютная термодинамическая температура

До сих пор мы пользовались шкалой Кельвина, установленной на основе свойств идеальных газов. В этом разделе мы дадим более общее определение температуры, исходя из основных принципов термодинамики. В своем изложении мы будем следовать переводу лекций великого итальянского физика Э. Ферми, прочитанных им в Колумбийском университете (Нью-Йорк) в 1936 г.<sup>2</sup>

Мы только что убедились что отношение  $Q_1/Q_2$  теплоты  $Q_1$ , полученной от нагревателя при температуре  $t_1$ , к теплоте  $Q_2$ , отданной холодильнику при температуре  $t_2$ , имеет одинаковую величину для всех обратимых тепловых машин, работающих в одинаковом интервале температур  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_1, t_2), \quad (12.34)$$

где  $f(t_1, t_2)$  — универсальная функция температур  $t_1$  и  $t_2$ , не зависящая от особенностей машины.

Возьмем другую обратимую тепловую машину, и пусть она при той же температуре  $t_2$  поглощает ту же теплоту  $Q_2$ , выделенную первой машиной, и отдает некоторую теплоту  $Q_0$  при какой-то температуре  $t_0$ . Для этой машины

<sup>2</sup> Э. Ферми. Термодинамика. Харьков: Издательство Харьковского университета, 1969. С. 40–44.

можно написать аналогичное равенство:

$$\frac{Q_2}{Q_0} = f(t_2, t_0). \quad (12.35)$$

Но агрегат из этих двух машин, последовательно соединенных, также является обратимой машиной, так как обратимы обе входящие в него машины. И работает этот агрегат между температурами  $t_1$  и  $t_0$ . Значит, для него тоже справедливо равенство

$$\frac{Q_1}{Q_0} = f(t_1, t_0). \quad (12.36)$$

Разделив (12.36) на (12.35), получаем отношение

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{f(t_1, t_0)}{f(t_2, t_0)}. \quad (12.37)$$

Сравнивая уравнения (12.34) и (12.37), получаем важное равенство

$$f(t_1, t_2) = \frac{f(t_1, t_0)}{f(t_2, t_0)}. \quad (12.38)$$

В этом рассуждении температура  $t_0$  играет вспомогательную роль. Она произвольна, ее значение можно зафиксировать во всех соотношениях и забыть о ней навсегда. Тогда функцию  $f(t, t_0)$  можно считать функций одной лишь температуры  $t$  и принять  $f(t, t_0) = \theta(t)$ . Отсюда следует, что универсальная функция  $f(t_1, t_2)$  равна отношению функции  $\theta$ , взятой с разными аргументами  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_1, t_2) = \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)}. \quad (12.39)$$

Вид функций  $\theta(t)$  найти невозможно, так как мы используем произвольную эмпирическую температуру  $t$ . Но мы можем ввести новую температурную шкалу, используя вместо  $t$  саму функцию  $\theta$ . Эта шкала называется **абсолютной термодинамической шкалой температуры**. В новой шкале, где  $\theta_1 = \theta(t_1)$  и  $\theta_2 = \theta(t_2)$ , отношение (12.39) полученной и отданной теплоты записывается как

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}. \quad (12.40)$$

Но мы видели, что это же отношение может быть записано в виде

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad (12.41)$$

где  $T$  — абсолютная температура, введенная с помощью газового закона. Поскольку отношение температур двух шкал одинаково, они пропорциональны:  $\theta = CT$ , где  $C$  — произвольная постоянная. Мы фиксируем ее, выбирая ту же цену деления (градус Цельсия), и тогда приходим к выводу, что эти две шкалы совпадают:

$$\theta = T. \quad (12.42)$$

Потому нет необходимости употреблять для абсолютной температуры два разных символа, и в дальнейшем мы будем пользоваться обозначением  $T$  для абсолютной термодинамической шкалы.

## 12.7 Энтропия

В классической механике и электродинамике мы привыкли к тому, что невозможность какого-то процесса связана, как правило, с каким-то законом сохранения (энергии, импульса, электрического заряда и т. п.). Почему же невозможен вечный двигатель второго рода? Вроде бы он не нарушает никаких законов сохранения? Чтобы понять это, надо обратиться к новой функции состояния  $S$ , называющейся *энтропия* (на др. греч «энтропия» означает «поворот», «превращение»).

Путь к этой новой для нас функции состояния недолог, мы его сделаем сначала для идеального газа. Возьмем уравнение первого начала термодинамики

$$\delta Q = p dV + dU$$

и разделим его обе части на температуру. С учетом соотношения (11.20) получим:

$$\frac{dU}{T} = \frac{m}{\mu} c_{m,V} \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} c_{m,V} d(\ln T).$$

Далее возьмем выражение для элементарной работы  $\delta A = p dV$  и выразим объем через давление и температуру из уравнения состояния идеального газа:

$$\frac{\delta A}{T} = \frac{p dV}{T} = \frac{m}{\mu} R \frac{p}{T} d\left(\frac{T}{p}\right) = \frac{m}{\mu} R d\left(\ln \frac{T}{p}\right).$$

Получим в итоге выражение

$$\frac{\delta Q}{T} = d \left[ \frac{m}{\mu} (c_{m,p} \ln T - R \ln p) \right], \quad (12.43)$$

где использовано соотношение  $c_{m,p} = c_{m,V} + R$  между молярными теплоемкостями. Правая часть представляет собой дифференциал функции термодинамических параметров. Стало быть, и левая часть также является дифференциалом какой-то функции состояния:

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (12.44)$$

Эта функция  $S$  и называется энтропией. Ее размерность  $[S] = \text{Дж/К}$ , как следует из (12.44). Уравнение (12.43) уже содержит явный вид энтропии идеального газа:

$$S = \frac{m}{\mu} (c_{m,p} \ln T - R \ln p) + \text{const}, \quad (12.45)$$

где const — постоянная интегрирования, не зависящая от термодинамических параметров системы (давления, объема, температуры). Если при каком-то значении термодинамических параметров  $p_0, V_0, T_0$  энтропия одного моля газа равна  $S_0$ , то уравнение (12.45) можно написать в виде

$$S = \frac{m}{\mu} \left( c_{m,p} \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0} + S_0 \right), \quad (12.46)$$

Используя уравнение Клапейрона—Менделеева эту же формулу можно представить в виде

$$S = \frac{m}{\mu} \left( c_{m,V} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} + S_0 \right) \quad (12.47)$$

или записать ее как

$$S = \frac{m}{\mu} \left( c_{m,V} \ln \frac{p}{p_0} + c_{m,p} \ln \frac{V}{V_0} + S_0 \right). \quad (12.48)$$

Получилось так, что величина  $\delta Q$ , не являющаяся дифференциалом какой-либо функции состояния, при делении на температуру  $T$  стала таковым — см. уравнение (12.44), которое имеет гораздо более общий характер, нежели выражение (12.47) для энтропии идеального газа. В важности этой функции термодинамических параметров мы скоро убедимся.

### Изменение энтропии в процессах с идеальным газом

Исходная точка — первое начало термодинамики:  $\delta Q = pdV + dU$  и определение энтропии  $dS = \delta Q/T$ . Отсюда получаем

$$TdS = pdV + dU. \quad (12.49)$$

Кроме этого, мы используем связь внутренней энергии идеального газа и молярной теплоемкости при постоянном объеме:

$$dU = \nu c_{m,V} dT, \quad (12.50)$$

где  $\nu = m/\mu$  — число молей рассматриваемого газа.

**Изохорный процесс.** При постоянном объеме  $dV = 0$  и уравнение (12.49) дает

$$dS = \nu c_{m,V} \frac{dT}{T}. \quad (12.51)$$

Интегрируя это равенство от начальной температуры  $T_1$  до конечной  $T_2$ , получаем для изменения энтропии

$$\Delta S = \nu c_{m,V} \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (12.52)$$

**Изобарный процесс.** Дифференцируя уравнение Клапейрона—Менделеева  $pV = \nu RT$  при постоянном давлении, получаем  $pdV = \nu R dT$ . Подставляя это равенство в уравнение (12.49), получаем

$$dS = \nu (R + c_{m,V}) \frac{dT}{T} = \nu c_{m,p} \frac{dT}{T}, \quad (12.53)$$

где  $c_{m,p}$  — молярная теплоемкость при постоянном давлении. Интегрируя (12.53) от начальной температуры  $T_1$  до конечной  $T_2$ , получаем для изменения энтропии

$$\Delta S = \nu c_{m,p} \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (12.54)$$

**Изотермический процесс.** Про постоянной температуре остается постоянной внутренняя энергия и (12.49) дает  $TdS = pdV$ . Связь давления с объемом следует из уравнения Клапейрона—Менделеева:  $p = \nu RT/V$ , откуда имеем

$$dS = \nu R \frac{dV}{V}. \quad (12.55)$$

Интегрируя от начального объема  $V_1$  до конечного  $V_2$ , находим изменение энтропии при изотермическом изменении объема (или давления):

$$\Delta S = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (12.56)$$



**Адиабатный процесс.** В этом процессе отсутствует теплообмен ( $\delta Q = 0$ ), стало быть  $dS = \delta Q/T = 0$  и энтропия постоянна.

Энтропия — очень важная величина, и мы немного поиграем с ней, чтобы лучше освоиться с этой термодинамической функцией состояния.

**Задача 12.56.** Для одного моля идеального одноатомного газа построить графики изобарного и изохорного процессов в координатах «температура—энтропия» ( $T, S$ ).

**Решение.** Для изобары будем считать, что  $p = p_0$ . Уравнение (12.46), записанное для одного моля идеального одноатомного газа ( $m/\mu = 1$  моль,  $c_{m,p} = 5R/2$ ), позволяет выразить температуру через энтропию:

$$\frac{T}{T_0} = \exp\left(\frac{2}{5} \frac{S - S_0}{R \cdot 1 \text{ моль}}\right). \quad (12.57)$$

Аналогичным образом для изохорного процесса ( $V = V_0$ ) получаем из уравнения (12.47) для одного моля одноатомного газа ( $m/\mu = 1$  моль,  $c_{m,V} = 3R/2$ ) температуры с энтропией:

$$\frac{T}{T_0} = \exp\left(\frac{2}{3} \frac{S - S_0}{R \cdot 1 \text{ моль}}\right). \quad (12.58)$$

Графики изображены на рис. 12.6. Оба графика ведут себя похожим образом, но изохора идет круче, так как теплоемкость при постоянном давлении больше теплоемкости при постоянном объеме:  $c_{m,p} > c_{m,V}$ . ■

**Задача 12.57.** Для одного моля идеального двухатомного газа построить графики изотермического и изобарного процессов в координатах «давление—энтропия» ( $p, S$ ).

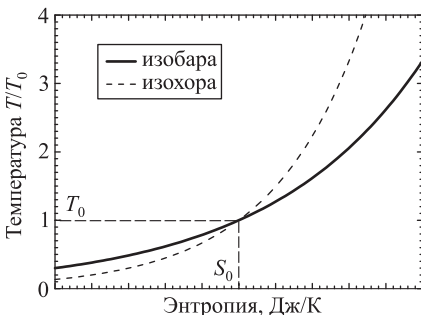
**Решение.** Действуем аналогично. Для изотермического процесса  $T = T_0$  используем уравнение (12.46), откуда находим связь давления и энтропии:

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{S - S_0}{R \cdot 1 \text{ моль}}\right). \quad (12.59)$$

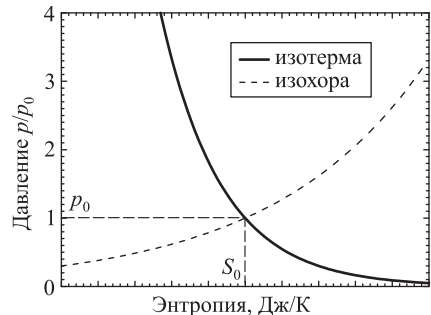
Для изохорного процесса  $V = V_0$  используем уравнение (12.48) при  $m/\mu = 1$  моль и  $c_{m,V} = 5R/2$ . Получаем тогда следующую связь давления и температуры:

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{S - S_0}{R \cdot 1 \text{ моль}}\right). \quad (12.60)$$

Для изотермического процесса экспонента получилась падающей (рис. 12.7) в полном соответствии с (12.56). ■



**Рис. 12.6.** Графики изобарного и изохорного процессов в координатах «температура—энтропия»



**Рис. 12.7.** Графики изотермического и изохорного процессов в координатах «давление—энтропия»

## Энтропия и цикл Карно

При замкнутом цикле, когда система возвращается в исходное состояние, изменение любой функции состояния (в частности, энтропии) равно нулю:

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (12.61)$$

Знак криволинейного интеграла означает, что интегрирование ведется по замкнутому контуру.

Проверим выполнение (12.61) на примере цикла Карно. Поскольку там теплота получается и отдается на изотермах, температуру можно вынести из-под знака интеграла, и тогда интегрирование даст просто количество теплоты, поделенное на температуру, при которой оно получается или отдается. И действительно, выше было найдено, что на изотермических ветвях цикла при температуре  $T_1$  газ получает теплоту

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

а при температуре  $T_2$  — отдает теплоту

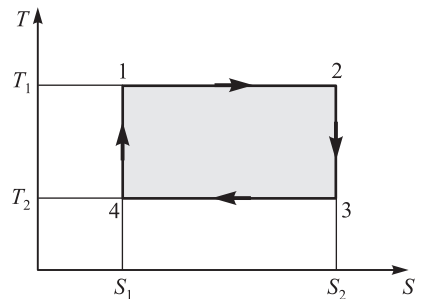
$$Q_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Выполнение равенства

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{(-Q_2)}{T_2} = 0$$

теперь очевидно. Напомним, что получаемая теплота имеет положительный знак, а отдаваемое — отрицательный; мы же определили ранее  $Q_2$  как абсолютную величину отдаваемой теплоты.

Изобразим теперь цикл Карно на диаграмме, где по осям отложены значения температуры и энтропии ( $TS$ -диаграмма) и вычислим с ее помощью КПД цикла. Легко убедиться, что искомая диаграмма представляет собой прямоугольник (рис. 12.8). Действительно, две изотермы цикла — линии постоянной температуры — на  $TS$ -диаграмме изобразятся отрезками, параллельными оси энтропии  $S$ . Две адиабаты — линии постоянной энтропии — изобразятся отрезками, параллельными оси температур  $T$ . На изотерме 1–2 система получает теплоту  $Q_1 = T_1(S_2 - S_1)$ , т. е.  $Q_1$  равно площади под отрезком 1–2. На изотерме 4–3



**Рис. 12.8.** Адиабатный процесс в координатах «температура—энтропия»

теплота  $Q_2 = T_2(S_2 - S_1)$  отдается ( $Q_2$  равно площади под отрезком 4–3). Разность этих площадей, т. е. заштрихованная на рисунке площадь цикла Карно — выполненная работа  $A = Q_1 - Q_2$ . Отсюда немедленно следует КПД цикла, причем нет необходимости подсчитывать изменение энтропии на изотермах, так как оно благополучно сокращается:

$$\eta_C = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{(T_1 - T_2)(S_2 - S_1)}{T_2(S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_2}.$$

Мы обращаем внимание, насколько это вывод проще, чем вычисления КПД, проведенные ранее. Более того, мы нигде не использовали уравнение состояния идеального газа, так что наш результат справедлив для *любого рабочего тела*.

Еще один пример — цикл двигателя внутреннего сгорания (см. рис. 12.3). Теплота получается и отдается на изобарах, так что  $dQ = C_V dT$  и  $dS = dQ/T = C_V d(\ln T)$ . Поэтому для приращения энтропии на ветви  $2 \rightarrow 3$  имеем:

$$\Delta_{2 \rightarrow 3} S = \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} = C_V \ln \frac{T_3}{T_2};$$

для изменения энтропии на ветви  $4 \rightarrow 1$  находим:

$$\Delta_{4 \rightarrow 1} S = \int_4^1 \frac{\delta Q}{T} = C_V \ln \frac{T_1}{T_4}.$$

Заметим, что на этой части ветви изменение энтропии имеет отрицательный знак. Сумма же этих результатов дает изменение энтропии рабочего вещества в указанном цикле:

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = \Delta_{2 \rightarrow 3} S + \Delta_{4 \rightarrow 1} S = C_V \ln \frac{T_1 T_3}{T_2 T_4} = 0,$$

в силу соотношения (12.19) между температурами.

Проделаем теперь похожие выкладки с произвольным циклом. Выделим в нем две части: знаком + обозначим те фазы процесса, когда система получает теплоту, а знаком – фазы, когда система отдает теплоту. Поскольку полный интеграл равен нулю, аналогичные интегралы по двум частям цикла равны между собой:

$$\oint_+ \frac{\delta Q}{T} = \oint_- \frac{(-\delta Q)}{T}. \quad (12.62)$$

Если обозначить через  $T_1$  максимальную температуру в первой части цикла, то неравенство  $T \leq T_1$  влечет за собой неравенство:

$$\oint_+ \frac{\delta Q}{T} \geq \frac{1}{T_1} \oint_+ \delta Q = \frac{Q_1}{T_1},$$

где  $Q_1$ , как и прежде, означает полное количество теплоты, полученное системой. Если ввести минимальную температуру  $T_2$  во второй части цикла, то из  $T \geq T_2$  следует:

$$\oint_- \frac{-\delta Q}{T} \leq \frac{1}{T_2} \oint_- (-\delta Q) = \frac{Q_2}{T_2},$$

где  $Q_2$  — количество теплоты, отданное системой. Из этих неравенств и соотношения (12.62) следует, что

$$\frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{или} \quad \frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}. \quad (12.63)$$

Наконец, получаем неравенство для КПД цикла:

$$\eta = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right) \leq \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \eta_C. \quad (12.64)$$

С помощью понятия энтропии мы получили иным путем тот же результат: *КПД любого замкнутого цикла не превышает КПД цикла Карно.*

### Возрастание энтропии

Таким образом, мы убедились, что новая функция состояния — энтропия — связана со вторым началом термодинамики. До сих пор мы ограничивались равновесными процессами. Рассмотрим пример неравновесного процесса. Пусть в начальном состоянии имеются два одинаковых идеальных газа с равными массами  $m$  при одинаковой температуре  $T$ , но разных давлениях  $p_1$  и  $p_2$ . Найдем изменение энтропии  $\Delta S$  при соединении сосудов с газом.

В первый момент после соединения сосудов, когда газы еще не смешались, энтропия системы равна сумме энтропий газов в отдельных сосудах:

$$S_1 + S_2 = \frac{2m}{\mu} \left( c_{m,p} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{R}{2} \ln \frac{p_1 p_2}{p_0^2} + S_0 \right). \quad (12.65)$$

Найдем теперь объемы сосудов:

$$V_1 = \frac{m}{\mu} RT \frac{1}{p_1}, \quad V_2 = \frac{m}{\mu} RT \frac{1}{p_2}.$$

После соединения сосудов масса газа становится равной  $2m$ , а объем будет равен сумме объемов  $V_1 + V_2$ . Значит давление  $p$  после соединения сосудов и установления равновесия будет равно

$$p = \frac{2m}{\mu} R \frac{T}{V_1 + V_2} = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}. \quad (12.66)$$

Поэтому энтропия газа после соединения сосудов определяется формулой

$$S = \frac{2m}{\mu} \left( c_{m,p} \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{2p_1 p_2}{(p_1 + p_2)p_0} + S_0 \right). \quad (12.67)$$

Изменение энтропии следует из (12.65) и (12.67):

$$\begin{aligned} \Delta S &= S - S_1 - S_2 = \frac{m}{\mu} R \left( \ln \frac{p_1 p_2}{p_0^2} - 2 \ln \frac{2p_1 p_2}{(p_1 + p_2)p_0} \right) = \\ &= \frac{m}{\mu} R \ln \frac{(p_1 + p_2)^2}{4p_1 p_2}. \end{aligned} \quad (12.68)$$

Под знаком логарифма стоит величина, всегда бóльшая единицы. Стало быть, энтропия увеличилась:  $\Delta S > 0$ .

Самостоятельно предлагается определить изменение энтропии при смешивании равных масс двух одинаковых идеальных газов, находящихся при одинаковом давлении  $p$ , но разных температурах  $T_1$  и  $T_2$ . Ответ:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} c_{m,p} \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}. \quad (12.69)$$

Снова убеждаемся, что  $\Delta S > 0$ .

Суть происходящего в том, что после того, как мы смешали газы и получили неравновесное состояние с энтропией, равной сумме энтропий смешивавшихся частей, давления стали выравниваться и энтропия возросла. То же самое происходит при выравнивании температур.

Чтобы не создавалось ложного представления, будто термодинамика относится только к идеальным газам, решим задачу об установлении теплового равновесия при контакте двух твердых тел.

**Задача 12.58.** Два куска железа, один массой  $m_1 = 2$  кг, нагретый до температуры  $t_1 = 1200^\circ\text{C}$ , и второй — массой  $m_2 = 3$  кг при температуре  $t_2 = 500^\circ\text{C}$ , приводят в тепловой контакт внутри теплоизолирующей оболочки, так что потеря теплоты в системе нет. Какой будет температура кусков после установления теплового равновесия и как изменилась при этом энтропия каждого из них и их суммарная энтропия? Удельная теплоемкость железа  $c = 0,444$  кДж/(кг · К). Изменением размеров тел при нагревании и охлаждении пренебречь.

В данной задаче получаемое или отдаваемое телами теплоты связано исключительно с изменением их температуры:  $\delta Q = mc dt$ . Пусть  $T_0$  — температура железа после установления теплового равновесия. Тогда первый кусок железа отдал количество теплоты  $Q_1 = m_1 c (T_0 - T_1)$ , а второй получил то же самое количество теплоты  $Q_2 = m_2 c (T_0 - T_2)$ . Сумма этих величин равна нулю по закону сохранения энергии:  $\delta Q_1 + \delta Q_2 = 0$ . Отсюда сразу получаем температуру обоих кусков в тепловом равновесии:

$$T_0 = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}. \quad (12.70)$$

Переходя к вопросу об энтропии, заметим, что ее изменения для каждого куска железа дается выражением  $dS = dU/T$ , причем в каждый момент времени второму куску передается та же самая энергия, что отнимается от первого куска, но при меньшей температуре. Значит, общий ответ нам известен заранее: суммарная энтропия должна возрасти. Для расчета интегрируем это дифференциальное соотношение между начальной и конечной температурами:

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= cm_1 \int_{T_1}^{T_0} \frac{dT}{T} = -cm_1 \ln \frac{T_1}{T_0}, \\ \Delta S_2 &= cm_2 \int_{T_2}^{T_0} \frac{dT}{T} = cm_2 \ln \frac{T_0}{T_2}, \\ \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2. \end{aligned} \quad (12.71)$$

Перейдем к численным расчетам. Температура железа по достижении теплового равновесия дается уравнением (12.70), откуда следует

$$t_0 = \frac{2 \times 1200 + 3 \times 500}{2 + 3} = 780^\circ\text{C}, \quad T_0 = 1053 \text{ К}. \quad (12.72)$$

Для дальнейших вычислений начальные температуры тоже следует перевести в абсолютную шкалу:  $T_1 = 1473 \text{ К}$  и  $T_2 = 773 \text{ К}$ . Тогда

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= -444 \times 2 \ln \frac{1473}{1053} = -298 \text{ Дж/К}, \\ \Delta S_2 &= 444 \times 3 \ln \frac{1053}{773} = 412 \text{ Дж/К}, \\ \Delta S &= 114 \text{ Дж/К}. \blacksquare\end{aligned}\tag{12.73}$$

В процессах такого рода ключевую роль играет их обратимость (или необратимость). Проиллюстрируем это на двух задачах.

**Задача 12.59.** *Кусок льда массой  $m = 0,5 \text{ кг}$  плавится при температуре  $t = 0^\circ\text{С}$ , превращаясь в воду. Удельная теплота плавления льда равна  $L = 335 \text{ кДж/кг}$ . Найти изменение энтропии куска льда. Каково при этом изменение энтропии всей Вселенной?*

**Решение.** Процесс плавления льда можно представить себе как результат подсоединения льда к тепловому резервуару при той же абсолютной температуре  $T = 273 \text{ К}$ , увеличенной на бесконечно малую величину. Разделив полученную теплоту  $Q = mL$  на эту температуру, получим изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{mL}{T} = \frac{0,5 \times 335 \cdot 10^3}{273} = 614 \text{ Дж/К}.\tag{12.74}$$

Тепловой резервуар теряет то же количество теплоты при той же температуре, следовательно изменение его энтропии равно  $\Delta S = -614 \text{ кДж/К}$ . Сумма изменений энтропии льда и резервуара равна нулю, т. е. энтропия Вселенной изменений не претерпела. Так и должно быть, поскольку процесс теплообмена между резервуаром и льдом происходит при одной температуре и обратим: понизив температуру теплового резервуара на бесконечно малую величину и сделав ее ниже точки замерзания воды, мы снова обратим ее в лед.  $\blacksquare$

**Задача 12.60.** *Камень массой  $m = 10 \text{ кг}$  упал с высоты  $h = 10 \text{ м}$  на Землю. Температура камня и окружающей среды  $t = 20^\circ\text{С}$ . Определить изменение энтропии системы «камень—Земля».*

**Решение.** Падение камня и превращение его кинетической энергии в тепловую — процесс необратимый. Изменение энтропии в этом процессе можно определить, используя первое начало термодинамики  $\Delta Q = \Delta U + A$ . Так как  $\Delta Q = T\Delta S$ , то  $T\Delta S = \Delta U + A$ .

По условию задачи температура, а следовательно, и внутренняя энергия не изменяются ( $\Delta U = 0$ ). Работа же  $A$  равна изменению потенциальной энергии системы «камень—Земля»:  $A = mgh$ . Отсюда:  $\Delta S = mgh/T$ . Подставляем числовые значения из условия задачи:

$$\Delta S = 10 \times 9,8 \times 10/293 = 3,34 \text{ Дж/К}. \blacksquare$$

Цель этих примеров прежде всего состояла в том, чтобы на частных случаях продемонстрировать, как работает **закон возрастания энтропии**:

♦ *если замкнутая система в некоторый момент времени находится в неравновесном состоянии, то процессы протекающие в ней, приводят к возрастанию энтропии, которая достигает максимума, когда система придет в равновесие.* ♦

## 12.8 Статистический смысл энтропии

Закон возрастания энтропии является иной формулировкой второго начала термодинамики. Как мы сейчас убедимся, его смысл сводится к тому, что система стремится к более вероятному состоянию. Вспомним задачу о смешивании газов с разными давлениями. В принципе, можно представить себе обратный процесс: газ в сосуде самопроизвольно разделится на две части, так что давления в каждой из частей будут различаться. Никакой закон сохранения не противоречит такому процессу, но он никогда не происходит в реальности, поскольку вероятность его ничтожно мала. Закон возрастания энтропии связан с тем, что данное *макроскопическое* состояние системы (заданные параметры  $T, p, V$ ) может быть реализовано множеством способов при различных *микроскопических* состояниях (положения и скорости молекул). Понятно ведь, что можно поменять импульсы или положения какой-то пары молекул, и мы получим другое микроскопическое состояние, но термодинамическое состояние системы не изменится. Число микроскопических состояний, соответствующих тому же макроскопическому состоянию, определяет вероятность последнего: чем большим числом способов можно его реализовать, тем оно вероятнее. Возрастание энтропии, как уже говорилось, означает лишь то, что система стремится перейти в более вероятное состояние, которое реализуется бóльшим числом микроскопических состояний.

Чтобы убедиться, что энтропия действительно связана с вероятностью, рассмотрим еще один неравновесный процесс. Пусть имеется сосуд объемом  $V$ , разделенный на правую и левую половины непроницаемой перегородкой. Пусть идеальный газ из  $N$  молекул содержится в левой половине сосуда, в то время как правая половина от молекул свободна. Перегородку делаем проницаемой, так что газ может адиабатно расширяться в пустоту, как в эффекте Джоуля—Томсона. Определим изменение энтропии газа. Поскольку при расширении в пустоту не совершается работы против внешней силы, а теплоты извне не поступает в силу условия адиабатности, идеальный газ не изменяет свою температуру. Увеличение же в два раза объема, занимаемого молекулами газа, приводит к двукратному уменьшению его давления от начального значения  $p_1$  до конечного  $p_2 = p_1/2$ . Поэтому энтропии газа до и после расширения равны соответственно

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{m}{\mu} (c_{m,p} \ln T - R \ln p_1 + S_0), \\ S_2 &= \frac{m}{\mu} \left( c_{m,p} \ln T - R \ln \frac{p_1}{2} + S_0 \right), \end{aligned} \quad (12.75)$$

а изменение энтропии дается выражением

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} R \ln 2 = Nk_B \ln 2 = \\ &= k_B \ln 2^N. \end{aligned} \quad (12.76)$$

Каково же происхождение фактора  $2^N$  под знаком логарифма? Проследим за какой-нибудь молекулой. При непроницаемой перегородке она могла находиться только в левой половине сосуда, а потом ей стали доступны обе половины. Число способов размещения данной молекулы увеличилось в два раза, и так — для каждой из  $N$  молекул. Поэтому полное число способов размещения молекул

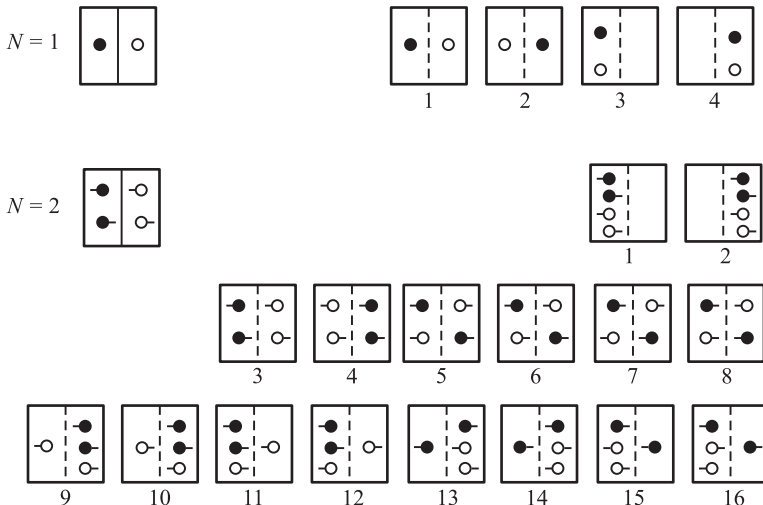
увеличилось в  $2^N$  раз. В такое же число раз вероятность состояния газа, равномерно занимающего полный объем сосуда, больше вероятности состояния, когда при проницаемой перегородке все молекулы сосредоточатся в левой половине, оставив правую свободной. В принципе, это не противоречит никаким законам, но при  $N = N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  молекул (один моль вещества) вероятность такого события фантастически, грандиозно, невероятно мала ( $2^{-N_A}$ ).

Еще один пример на ту же тему. Возьмем тот же сосуд и пусть в каждой из его половинок находится равное число  $N$  молекул при одинаковых температуре и давлении. Мысленно пометим молекулы левой половины черным цветом, а правой — белым. После этого соединим сосуды и определим изменение энтропии  $\Delta S$ . После перемешивания температуры газов не изменятся, а их *парциальные* давления уменьшатся в два раза, так что полное давление, равное сумме парциальных, останется прежним. Поэтому процесс перемешивания сродни расширению газов черных и белых молекул в пустоту, и мы можем воспользоваться результатом (12.76). Складывая изменения энтропий обоих газов, получаем

$$\Delta S = 2k_B \ln 2^N = k_B \ln 2^{2N} \quad (12.77)$$

( $N$  пробегает теперь только четные значения). Убедимся, что и в данном случае  $2^{2N}$  описывает увеличение числа способов распределения молекул по сосуду.

Рассмотрим рисунок 12.9. Пусть у нас есть всего по одной молекуле в каждом из сосудов ( $N = 1$ ). Раньше черная молекула могла находиться только в левом сосуде, а после смешивания для нее стали доступны обе части соединенного сосуда. Аналогично расширились возможности для белой молекулы, которая ранее была ограничена в своих передвижениях правым сосудом. Итак, после



**Рис. 12.9.** Возрастание энтропии при смешивании одинаковых порций газа. При подсчете различных способов распределения молекул по частям соединенного сосуда надо различать каждую черную и каждую белую молекулы, для чего они снабжены «хвостиками», торчащими налево либо направо



смешивания молекулы свободно блуждают по сосудам и мы имеем в четыре ( $2^2$ ) раза больше вариантов их размещения (см. верхнюю часть рис. 12.9). Если у нас имеется  $N = 2$  молекулы в каждой из половинок, то после соединения у них появляется в  $16 = 2^4$  больше возможностей распределиться по объему системы (нижняя часть рисунка). Ясно, что в общем случае  $N$  молекул число  $2^N$  действительно есть не что иное, как фактор, определяющий возрастание числа способов распределения молекул по объему системы.

Можно дать статистическое определение энтропии

$$S = k_B \ln \Omega, \quad (12.78)$$

где  $\Omega$  — *термодинамическая вероятность*, или *статистический вес* — число *микроскопических* способов, которыми можно реализовать данное *макроскопическое* состояние (поскольку заведомо  $\Omega \geq 1$ , эта величина не является вероятностью в обычном смысле).

Расчет вероятности макроскопических состояний и подстановка их в эту формулу приводит к прежним выражениям для энтропии идеального газа. Использование логарифма в определении энтропии позволяет свести умножение вероятностей к сложению энтропий. В рассмотренных нами примерах энтропия, приходящаяся на одну молекулу, возросла на величину  $\Delta_1 S = k_B \ln 2$ . Двойка под логарифмом — это увеличение в два раза свободного пространства, доступного молекуле. Энтропия газа из  $N$  молекул в  $N$  раз больше:  $\Delta S = N k_B \ln 2 = k_B \ln 2^N$ .

Еще одно наглядное представление о связи энтропии с вероятностью дает следующая задача.

**Задача 12.61.** *Сосуд разделен перегородкой на две одинаковые по объему  $V$  части. В каждой содержится одинаковая масса  $m$  одинакового газа при одинаковых давлении  $p$  и температуре  $T$ . Перегородку убирают, и газы смешиваются. Найти изменение энтропии.*

**Решение.** В отличие от задач о выравнивании температуры и давления при смешивании газов, здесь вроде как ничего не происходит при снятии перегородки: давление обоих компонентов одинаковы, температуры — тоже. И все же процесс необратим, ибо каждой молекуле газов теперь доступен в два раза больший объем, чем раньше.

Энтропия газов до смешивания была одинаковой и определенной уравнением (12.47)

$$S_1 = S_2 = \frac{m}{\mu} \left( c_{m,V} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} + S_0 \right),$$

а полная энтропия обоих компонентов равнялась их сумме

$$S_1 + S_2 = 2 \frac{m}{\mu} \left( c_{m,V} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} + S_0 \right).$$

После смешивания газов мы получаем удвоенное количество вещества в удвоенном объеме при тех же давлении и температуре. Поэтому энтропия после смешивания равна

$$S_{12} = 2 \frac{m}{\mu} \left( c_{m,V} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{2V}{V_0} + S_0 \right),$$

так что приращение энтропии

$$\Delta S = S_{12} - S_1 - S_2 = 2 \frac{m}{\mu} R \ln 2. \quad (12.79)$$

В сущности, мы этот ответ уже получили, подсчитывая число способов размещения черных и белых молекул. Поскольку число молекул в каждой половине равно  $N = \nu N_A$ , а универсальная газовая постоянная  $R$  связана с постоянной Больцмана соотношением  $R = k_B N_A$ , то из уравнения (12.77) немедленно находим (12.79):

$$\Delta S = k_B \ln 2^{2N} = 2Nk_B \ln 2 = 2 \frac{m}{\mu} R \ln 2. \quad \blacksquare \quad (12.80)$$

В классической статистике энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной. В квантовой статистике, оперирующей с дискретными уровнями энергии, эта постоянная определена. Оттуда, в частности, следует *теорема Нернста*, иногда называемая *третьим началом термодинамики*:

◆ *при стремлении температуры к абсолютному нулю энтропия также стремится к нулю.* ◆

Действительно, при абсолютном нуле температуры всякое тепловое движение прекращается и все молекулы находятся в состоянии с наименьшей энергией. Поэтому есть только один способ реализации такого состояния ( $\Omega = 1$ ), так что  $S = 0$ .

Представим себе, что мы снимаем фильм о смешивании молекул в сосудах. Сначала у нас слева — черные молекулы, а справа — белые. Молекулы сталкиваются, путешествуют по сосудам и в конечном итоге равномерно перемешиваются (так сказать, их смесь дает более или менее ровный серый цвет). Такое поведение системы большого числа частиц соответствует нашей практике. Запустим теперь фильм в обратном направлении. В каждом отдельном кадре, т. е. в конкретном акте соударения молекул, мы не увидим ничего особенного. Законы механики не нарушатся на нашем экране, поскольку они обратимы. Но конечный итог «обратного» фильма поистине чудесен: казалось бы беспорядочные столкновения молекул привели к разделению серого цвета на черный слева и белый справа. В таком процессе энтропия уменьшается, а система приходит от беспорядка к порядку. На самом деле каждая молекула имела в точности такие скорости и положения, испытывала именно такие, а не другие столкновения, чтобы в конце концов прийти в ту половину сосуда, где она оказалась. Такое событие в высшей степени невероятно, хотя и не противоречит микроскопическим законам физики. Закон возрастания энтропии утверждает, что система с течением времени имеет тенденцию перейти в менее упорядоченное состояние. Как говорится, «энтропия возрастает, а мир стремится к хаосу». Вопрос же о самоорганизации материи, о возникновении порядка из хаоса — предмет совсем другой науки, синергетики.

## Вывод формулы Больцмана Планком

Нижеследующий вывод формулы Больцмана (12.78) принадлежит основоположнику квантовой теории Макс Планку.<sup>3</sup> Планк исходил из гипотезы, которую сформулировал следующим образом: «Совокупность микросостояний образует дискретное множество. Каждое макросостояние физической системы охватывает совершенно определенное число ее микросостояний; это число и представляет собой термодинамическую вероятность, или статистический вес  $\Omega$ , макросостояния.  $\langle \dots \rangle$  Статистический вес  $\Omega$  является

<sup>3</sup> М. Планк. Введение в теоретическую физику. В 5 т. Т. 5. Теория теплоты. Л.-М., Гостехиздат, 1935. С. 171–173.

мерой энтропии  $S$  системы в соответствующем макросостоянии; таким образом

$$S = f(\Omega), \quad (12.81)$$

где  $f$  обозначает некоторую универсальную функцию одного аргумента».

Далее Планк рассматривает систему 1–2, состоящую из двух независимых подсистем 1 и 2. С одной стороны, энтропия полной системы должна равняться сумме энтропий ее подсистем:

$$S_{12} = S_1 + S_2. \quad (12.82)$$

С другой стороны, каждое микросостояние одной подсистемы можно комбинировать с каждым микросостоянием другой, так что статистический вес полной системы есть произведение статистических весов подсистем:

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \Omega_2. \quad (12.83)$$

Из этих двух уравнений получаем функциональное соотношение для искомой универсальной функции  $f$ :

$$f(\Omega_1) + f(\Omega_2) = f(\Omega_1 \Omega_2). \quad (12.84)$$

Дифференцируем (12.84) по аргументам  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ :

$$f'(\Omega_1) = \Omega_2 f'(\Omega_1 \Omega_2), \quad f'(\Omega_2) = \Omega_1 f'(\Omega_1 \Omega_2). \quad (12.85)$$

Отсюда следует соотношение

$$\Omega_1 f'(\Omega_1) = \Omega_2 f'(\Omega_2), \quad (12.86)$$

т. е.

$$\Omega f'(\Omega) = k_B, \quad (12.87)$$

где  $k_B$  — некая универсальная постоянная (Планк назвал ее постоянной Больцмана). Уравнение (12.87) легко интегрируется и мы приходим к выражению

$$f(\Omega) = k_B \ln \Omega + \text{const}. \quad (12.88)$$

Но из уравнения (12.84) вытекает, что  $f(1) = 0$ , т. е.  $\text{const} = 0$ . Окончательно имеем

$$S = k_B \ln \Omega. \quad (12.89)$$

Теперь достаточно сравнить формулу (12.89) с любым конкретным расчетом энтропии (например, для идеального газа), чтобы найти связь постоянной Больцмана с газовой постоянной  $R$ .

Формулу Больцмана можно обратить, вычислив по энтропии статистический вес данного макроскопического состояния:

$$\Omega = \exp\left(\frac{S}{k_B}\right). \quad (12.90)$$

В состоянии равновесия максимален статистический вес (мы обозначим его  $\Omega_m$ ) и максимальна энтропия ( $S_m$ ). Тогда для относительной вероятности любого состояния верно соотношение

$$\frac{\Omega}{\Omega_m} = \exp\left(\frac{\Delta S}{k_B}\right) = \exp\left(-\frac{S_m - S}{k_B}\right). \quad (12.91)$$

Статистическая интерпретация энтропии не запрещает, например, процесс передачи теплоты от холодного тела к горячему. Просто вероятность такого процесса крайне мала из-за малости постоянной Больцмана ( $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}$  Дж/К). Для иллюстрации решим упрощенный вариант задачи 12.58.

**Задача 12.62.** Две соприкасающиеся железные глыбы массой  $m = 1000$  кг каждая находятся при одинаковой температуре  $T = 1500$  К. Найти вероятность того, что одна из них самопроизвольно нагреется на десятиллиардную часть градуса ( $\Delta T = 10^{-10}$  К), а другая остынет на эту же величину. Удельная теплоемкость железа  $c = 444$  Дж/(кг·К).

**Решение.** Расчетные формулы у нас уже готовы — см. (12.71):

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= mc \int_T^{T+\Delta T} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T + \Delta T}{T}, \\ \Delta S_2 &= mc \int_T^{T-\Delta T} \frac{dT}{T} = -mc \ln \frac{T}{T - \Delta T}, \\ \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \left[ 1 - \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right] \approx -mc \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2.\end{aligned}\quad (12.92)$$

Подставим числа в формулу для изменения полной энтропии:

$$\Delta S \approx -1000 \times 444 \times \left( \frac{10^{-10}}{1500} \right)^2 = -\frac{4,44}{1,5^2} \cdot 10^{-21} = -1,971 \cdot 10^{-21} \text{ Дж/К}.\quad (12.93)$$

Для отношения изменения энтропии к постоянной Больцмана получаем

$$\frac{\Delta S}{k_B} \approx -\frac{1,971 \cdot 10^{-21}}{1,381 \cdot 10^{-23}} = 142,9.\quad (12.94)$$

Наконец, приходим к оценке относительной вероятности столь небольшой температурной флуктуации:

$$\frac{\Omega}{\Omega_m} = \exp \left( \frac{\Delta S}{k_B} \right) \approx \exp(-142,9) = 0,87 \cdot 10^{-62}.\quad (12.95)$$

Комментарии излишни, как говорится, потому что при такой ничтожной вероятности даже таких крошечных, не поддающихся наблюдению флуктуаций не могло произойти за все время существования нашей Вселенной.

## 12.9 Термодинамические потенциалы

Выше мы познакомились с двумя функциями состояния — внутренней энергией  $U$  и энтропией  $S$ . Они зависят от термодинамических параметров системы  $p, V, T$ , из которых два независимы, а третий определяется из уравнения состояния. Однако никто не мешает нам использовать вместо одного из параметров энтропию, считая ее независимым параметром наряду, например, с объемом, и определяя через них давление и температуру. Первое начало термодинамики можно написать в виде

$$dU = TdS - pdV,\quad (12.96)$$

откуда следуют уравнения

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V, \quad p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S.\quad (12.97)$$

Иначе говоря, абсолютная температура — это отношение изменения внутренней энергии к изменению энтропии в изохорном процессе, а давление — отношение изменения внутренней энергии к изменению объема в адиабатном процессе. Внутренняя энергия удобна для использования, когда независимыми параметрами выбраны энтропия и объем. Тогда для изменения внутренней энергии можно написать уравнение

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV. \quad (12.98)$$

Подставляем (12.98) в первое начало термодинамики:

$$\delta Q = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV. \quad (12.99)$$

Отсюда при изохорном процессе ( $dV = 0$ ) следует выражение для теплоемкости при постоянном объеме:

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (12.100)$$

В общем, все это нам уже известно. Однако при ином выборе независимых параметров удобнее пользоваться иными функциями состояния (их общее название — термодинамические потенциалы).

## Энтальпия

Эта функция состояния, называемая также *тепловой функцией* или *теплосодержанием*, удобна при выборе в качестве независимых параметров энтропии и давления. Энтальпия определяется уравнением

$$H = U + pV. \quad (12.101)$$

Дифференцируем это соотношение

$$dH = dU + d(pV) = dU + pdV + Vdp \quad (12.102)$$

и подставляем в него дифференциал внутренней энергии из первого начала термодинамики:

$$dH = (TdS - pdV) + pdV + Vdp = TdS + Vdp. \quad (12.103)$$

Отсюда получаем соотношения

$$T = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_p, \quad V = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_S, \quad (12.104)$$

т. е. температура есть отношение изменения энтальпии к изменению энтропии в изобарном процессе, а объем определяется отношением изменения энтальпии к изменению давления в адиабатном процессе.

Физический смысл энтальпии можно понять, рассматривая газ в цилиндрическом сосуде под поршнем (рис. 12.10). Потенциальная энергия поршня с грузом равна

$$U_{\text{пот}} = mgh = \frac{mg}{S} Sh = pV, \quad (12.105)$$

где  $S$  — площадь сечения сосуда,  $h$  — его высота и  $V = Sh$  — объем. Таким образом, энтальпия (12.101) есть сумма внутренней энергии газа и потенциальной энергии

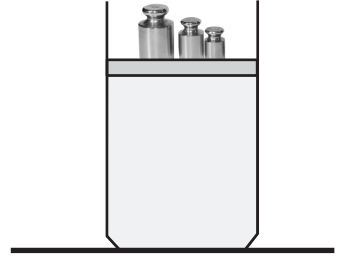


Рис. 12.10. К физическому смыслу энтальпии

внешних сил:  $H = U + U_{\text{пот}}$ . Из уравнения первого начала термодинамики (12.103), записанного в виде

$$\delta Q = dH - V dp, \quad (12.106)$$

закключаем, что энтальпия — это теплота, подведенная к системе в изобарном ( $dp = 0$ ) процессе.

Выбирая в качестве независимых параметров температуру и давление, имеем

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp. \quad (12.107)$$

Подставляем (12.107) в (12.106):

$$\delta Q = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] dp. \quad (12.108)$$

В изобарном процессе  $dp = 0$ , поэтому теплоемкость при постоянном давлении равна

$$C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p. \quad (12.109)$$

## Свободная энергия

Эта функция состояния часто называется свободной энергией Гельмгольца. Она определяется уравнением

$$F = U - TS \quad (12.110)$$

и удобна, если независимыми параметрами системы выбраны температура и объем. Дифференциал свободной энергии равен

$$dF = dU - d(TS) = (TdS - pdV) - (SdT + TdS) = -SdT - pdV, \quad (12.111)$$

откуда

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V, \quad p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T. \quad (12.112)$$

Запишем первое начало термодинамики в виде

$$dA = \delta Q - dU, \quad (12.113)$$

где  $dA$  — работа, совершаемая системой. В отличие от механики здесь работа может быть совершена не только за счет убыли внутренней энергии, но и за счет теплообмена. Пусть система находится в тепловом контакте с окружающей средой, температура  $T$

которой остается постоянной, и пусть она переходит из состояния 1 в состояние 2. Имеет место неравенство

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \leq S_2 - S_1, \quad (12.114)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — энтропии начального и конечного состояний, а интеграл берется по процессу перехода между ними. Если процесс обратимый, то осуществляется равенство. Поскольку температура постоянна, ее можно вынести за знак интеграла и получить соотношение

$$\int_1^2 \delta Q \leq T(S_2 - S_1). \quad (12.115)$$

Интегрируя по процессу уравнение (12.113) первого начала термодинамики, получаем неравенство для работы, совершенной во время нашего процесса:

$$A_{1 \rightarrow 2} \leq -(U_2 - U_1) + T(S_2 - S_1) = -(F_2 - F_1). \quad (12.116)$$

Отсюда вытекает, что если система испытывает обратимое превращение из начального состояния в конечное, находясь в тепловом равновесии с окружающей средой при постоянной температуре, то работа, совершенная системой при превращении, равна убыли свободной энергии. Иначе говоря, свободная энергия играет в термодинамике роль механической энергии. Если система динамически изолирована (например, помещена в жесткий сосуд постоянного объема) и не производит работы ( $dA = 0$ ), то

$$F_2 \leq F_1, \quad (12.117)$$

т. е. свободная энергия динамически изолированной системы, находящейся в тепловом контакте со средой при постоянной температуре, не может увеличиться за счет протекающих в ней процессов. В частности, если такая система находится в состоянии, соответствующей минимуму свободной энергии, то это будет состояние устойчивого равновесия, из которого система сама выйти не может.

## Свободная энергия Гиббса

Этот термодинамический потенциал определяется как

$$G = U - TS + pV. \quad (12.118)$$

Дифференцируя, получаем

$$dG = (dU - TdS + pdV) - SdT + Vdp = -SdT + Vdp. \quad (12.119)$$

Выражение в скобках равно нулю в силу первого начала термодинамики. Отсюда

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p, \quad V = - \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_T. \quad (12.120)$$

Рассмотрим превращения в системе, находящейся при постоянной температуре и давлении. Если  $V_1$  и  $V_2$  — начальный и конечный объемы системы, то она совершает работу

$$A_{1 \rightarrow 2} = p(V_2 - V_1). \quad (12.121)$$

Поскольку мы рассматриваем изотермический процесс, к нему применимо неравенство (12.116). Учитывая, что потенциал Гиббса (12.118) можно записать как  $G = F + pV$ , получаем отсюда аналогичное неравенство

$$G_2 - G_1 = F_2 - F_1 + A_{1 \rightarrow 2} \leq 0. \quad (12.122)$$

Иначе говоря, в изотермическом изобарном процессе потенциал Гиббса никогда не может увеличиваться. При неизменных температуре и давлении в состоянии устойчивого равновесия потенциал Гиббса достигает минимума.

Термодинамические потенциалы имеют множество применений в различных областях физики и химии. Мы ограничимся рассмотрением лишь двух примеров.

### Эффект Джоуля—Томсона

Как мы уже знаем, *эффект Джоуля—Томсона* — это охлаждение газа при его адиабатном расширении в пустоту. Схема опыта такова: два баллона — один, наполненный сжатым газом, и другой, из которого газ откачан до высокого вакуума — помещены в теплоизолирующую оболочку и соединены пористой перегородкой, так что газ начинает медленно поступать из первого баллона во второй. Измеряется температура газа. При небольшом давлении в первом баллоне температура газа не меняется, при сильном сжатии расширяющийся в пустоту газ охлаждается.

Рассмотрим свободную энергию Гельмгольца в координатах  $S, T$ . С учетом (12.112) ее вторая производная может быть записана как

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = - \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T. \quad (12.123)$$

Меняя местами порядок дифференцирования и используя те же уравнения (12.112), получаем иное соотношение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = - \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V. \quad (12.124)$$

Поскольку от порядка частных производных ничего не зависит, приходим к равенству

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V. \quad (12.125)$$

Из уравнения первого начала термодинамики в форме

$$dU = TdS - pdV, \quad (12.126)$$

следует, что

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - p. \quad (12.127)$$

Соотношения (12.126) и (12.127) вместе дают

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p. \quad (12.128)$$



Правая часть определяется из уравнения состояния. Для одного моля идеального газа мы имеем  $pV = RT$ , откуда

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V} = \frac{p}{T} \quad (12.129)$$

и

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0, \quad (12.130)$$

т. е. внутренняя энергия идеального газа зависит лишь от температуры, но не от объема. При расширении в пустоту газ не производит работы, его внутренняя энергия сохраняется и, стало быть, температура остается постоянной.

Обратимся теперь к реальным газам, в качестве модели которых возьмем газ Ван-дер-Ваальса с уравнением состояния (11.37)

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}. \quad (12.131)$$

Дифференцируем давление по температуре при постоянном объеме:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} = \frac{1}{T} \left(p + \frac{a}{V^2}\right). \quad (12.132)$$

Подставляя (12.132) в (12.130), получаем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V^2}, \quad (12.133)$$

т. е. при постоянной температуре внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса увеличивается с ростом его объема. Отсюда следует, что при адиабатическом расширении в пустоту, когда внутренняя энергия не меняется, температура газа должна уменьшиться, чтобы скомпенсировать рост энергии за счет увеличения объема. Действительно, если записать внутреннюю энергию как функцию температуры и объема, то ее дифференциал равен

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV, \quad (12.134)$$

откуда при постоянстве внутренней энергии  $dU = 0$  газа следует

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = -\frac{1}{C_V} \frac{a}{V^2}. \quad (12.135)$$

Правая часть (12.135) отрицательна, т. е. при расширении газа Ван-дер-Ваальса в пустоту его температура падает. Физическое объяснение состоит в том, что при расширении газа взаимное притяжение его молекул преодолевается за счет их кинетической энергии (в идеальном газе молекулы не взаимодействуют и потому температура газа при адиабатическом расширении в пустоту не меняется). Эффект Джоуля—Томсона является одним из методов получения низких температур.

### Уравнение Клапейрона—Клаузиуса

Рассмотрим систему, состоящую из жидкости массой  $m_1$  и насыщенного пара над ней, масса которого  $m_2$ , а давление  $p$ . Пусть  $g_1$  и  $g_2$  — значения удельной свободной энергии (потенциала) Гиббса для жидкости и насыщенного пара, соответственно. Тогда свободная энергия Гиббса системы пар—жидкость равна

$$G = m_1 g_1 + m_2 g_2. \quad (12.136)$$

Пусть в системе происходит изотермический процесс, в результате которого часть пара массой  $dm_2$  конденсируется в жидкость, масса которой увеличивается на  $dm_1$ . По закону сохранения массы  $dm_2 = -dm_1$ . Потенциалы Гиббса  $g_1$  и  $g_2$ , зависящие лишь от температуры и давления, в этом фазовом переходе не изменяются. Дифференцируем (12.136):

$$dG = dm_1 g_1 + dm_2 g_2 = dm_1 (g_1 - g_2). \quad (12.137)$$

В состоянии устойчивого равновесия свободная энергия Гиббса имеет минимум ( $dG = 0$ ), т. е. условие равновесия двух фаз записывается в виде равенства удельных потенциалов Гиббса этих фаз:

$$g_1 - g_2 = 0. \quad (12.138)$$

Вводя удельные объемы  $v_1, v_2$  жидкости и насыщенного пара, их удельные внутренние энергии  $u_1, u_2$  и удельные энтропии  $s_1, s_2$ , используем определение (12.118) свободной энергии Гиббса и получаем уравнение

$$(u_2 - u_1) - T(s_2 - s_1) + p(v_2 - v_1) = 0. \quad (12.139)$$

Дифференцируем это уравнение по температуре:

$$\frac{d(u_2 - u_1)}{dT} - T \frac{d(s_2 - s_1)}{dT} - (s_2 - s_1) + \frac{dp}{dT}(v_2 - v_1) + p \frac{d(v_2 - v_1)}{dT} = 0. \quad (12.140)$$

Теперь учтем первое начало термодинамики для обеих фаз

$$T \frac{ds_i}{dt} = \frac{du_i}{dT} + p \frac{dv_i}{dT}, \quad (12.141)$$

которое позволяет записать (12.140) в виде

$$-(s_2 - s_1) + \frac{dp}{dT}(v_2 - v_1) = 0. \quad (12.142)$$

Величина  $s_2 - s_1$  является изменением энтропии при изотермическом испарении единицы массы жидкости. Если  $\lambda$  — удельная теплота испарения жидкости, то происходящее при этом изменение энтропии равно

$$s_2 - s_1 = \frac{\lambda}{T}. \quad (12.143)$$

Подставляя (12.143) в (12.142), мы приходим к уравнению Клапейрона—Клаузиуса, определяющего зависимость давления  $p$  насыщенного пара от температуры  $T$  и удельных объемов жидкости  $v_1$  и пара  $v_2$ :

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)}. \quad (12.144)$$

Из общего характера вывода уравнения Клапейрона—Клаузиуса очевидно, что оно применимо не только к равновесию фаз в системе жидкость—газ, но и для любых фазовых превращений, сопровождающихся выделением или поглощением теплоты (например, к системе лед—вода).

## Контрольные вопросы

1. Закон сохранения энергии — универсальный закон природы. В то же время в прессе и выступлениях политиков можно встретить словосочетание «энергосберегающие технологии». Что имеется в виду в последнем случае?
2. Может ли данное количество механической энергии быть полностью превращенным в теплоту? Если ответ положителен, приведите примеры, если отрицателен — дайте объяснение.
3. Станет ли КПД тепловой машины равным 100%, если свести к нулю трение в частях машины?
4. Что дает большее увеличение КПД идеальной тепловой машины Карно — увеличение на  $10^\circ$  температуры нагревателя или понижение на  $10^\circ$  температуры холодильника?
5. На Гавайских островах реализована идея создания теплового двигателя, действие которого основано на различии между температурами на поверхности океана и на глубине нескольких сотен метров. В тропических широтах эти температуры могут быть равны, соответственно,  $25^\circ\text{C}$  и  $5^\circ\text{C}$ . Какой максимальный КПД мог бы иметь такой двигатель?
6. Почему расход топлива автомобилем зимой больше, чем летом?
7. Тепловая электростанция обеспечивает мощность 1 ГВт и использует паровые турбины. Пар подается в турбины подогретым до температуры 520 К и отдает избыточную (неиспользованную) теплоту речной воде при температуре 290 К. Будем считать, что турбина работает по обратимому циклу Карно. Если скорость расхода речной воды  $40\text{ м}^3/\text{с}$ , то на сколько повысится температура речной воды ниже по течению от электростанции?
8. Тот же вопрос, если электростанция работает по циклу внутреннеобратимой тепловой машины.
9. Обратимы ли процессы упругого и неупругого удара шаров?
10. Желая охладить комнату, некий гражданин включил холодильник и открыл его дверцу. Комната теплоизолирована от окружающего воздуха. Станет ли в комнате холоднее?
11. Первое начало термодинамики иногда несколько вольно формулируют следующим образом: «Невозможно получить что-либо из ничего», а второе начало: «Невозможно точно восстановить разрушенное». Объясните, согласуются ли эти вольные формулировки со строгими формулировками первого и второго начала термодинамики.
12. Океаны содержат огромное количество тепловой энергии. Почему, вообще говоря, нельзя использовать всю эту энергию для получения полезной работы?
13. Чему равны приращения энтропии  $\Delta S/\Delta m$  в расчете на килограмм проходящей речной воды в вопросах 7, 8?
14. Построить качественные графики изобарного и изотермического процессов в координатах «объем—энтропия» ( $V, S$ ).
15. Два автомобиля массами 1200 кг каждый, двигаясь со скоростью 60 км/час навстречу друг другу, сталкиваются и останавливаются. На сколько изменится энтропия Вселенной после этого столкновения?

## Глава 13

# Распределение молекул по скоростям и координатам

Предположение о равномерном распределении молекул в пространстве и равномерном распределении скоростей по всем направлениям называют *предположением о молекулярном хаосе*. Как ни странно это выглядит, именно благодаря абсолютной хаотичности движения молекул можно установить определенные закономерности, которым подчиняется состояние системы.

### 13.1 О закономерностях в мире хаоса

Пусть имеется некоторый замкнутый сосуд небольшого (чтобы пренебречь действием внешних силовых полей) объема, заполненный газом. Предположим, что в газе установилось *состояние равновесия*, так что все макроскопические параметры системы имеют определенные значения, остающиеся постоянными сколь угодно долго при неизменных внешних условиях. Эти условия должны быть такими, чтобы в системе не было переноса вещества, энергии, импульса и т. п. Опыт показывает, что при равновесии и в отсутствие внешних силовых полей молекулы газа

- распределяются по всему объему замкнутого сосуда с равномерной плотностью  $n(\vec{r}) = \text{const}$ ,
- обладают скоростями, равномерно распределенными по всем направлениям в пространстве.

Это означает, что число молекул, движущихся по любому направлению, должно быть одинаковым. Если бы это было не так и существовало бы направление преимущественного движения молекул, то в этом направлении возник бы поток газа. Из опыта следует, что в газе, заключенном в замкнутый сосуд и не подвергающемся воздействию извне, возникновение установившегося потока невозможно.

В пределах любым образом ориентированных, но постоянных по величине телесных углов лежат направления движения в среднем одинакового числа молекул (рис. 13.1). Соударения молекул не изменяют эту ситуацию.

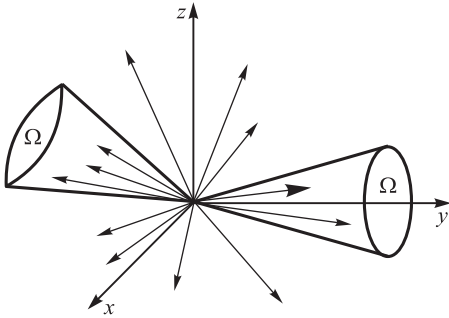


Рис. 13.1. Распределение молекул по направлениям движения

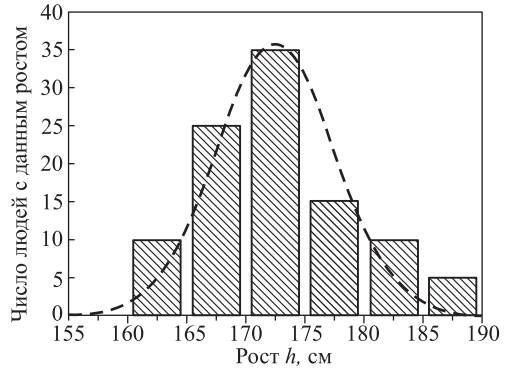


Рис. 13.2. Гистограмма, изображающая распределение людей по росту, и примерный вид соответствующей функции распределения (пунктирная кривая)

Для простоты мы будем рассматривать *идеальный газ*. С точки зрения кинетической теории, идеальный газ — простейшая молекулярно-кинетическая модель газа. Эта модель предполагает следующие два свойства.

- Силы взаимодействия между молекулами отсутствуют (взаимодействие возникает при соударении молекул друг с другом или со стенками сосуда; соударения носят упругий характер).
- Собственным объемом молекул можно пренебречь по сравнению с объемом, занятым газом.

Реальные газы близки к идеальному газу при малых плотностях. При уменьшении плотности средние расстояния между молекулами значительно превосходят линейные размеры молекул и сила взаимодействия друг с другом уменьшается практически до нуля.

## Функция распределения

Что такое *распределение*? Начнем с простого примера, позволяющего ввести необходимые определения. Пусть в некотором коллективе из 100 человек 10 имеют рост от 160 до 165 см, 25 — от 165 до 170, 35 — от 170 до 175, 15 — от 175 до 180, 10 — от 180 до 185 и остальные 5 — от 185 до 190. Это перечисление удобно изобразить в виде простой общепринятой диаграммы, рисуя вертикальные прямоугольники, пропорциональные числу людей данного роста (рис. 13.2). Такую диаграмму называют гистограммой. Если построить ее не для ста человек, а для взрослого населения целой страны, то можно ввести гораздо более мелкие подразделения по росту. Например, определять рост с точностью не 5 см, а 0,5 см (применительно к росту человека большая точность вряд ли имеет смысл).

Допустим, однако, что некоторая изучаемая величина может задаваться сколь угодно точно, так что для весьма большого коллектива законно перейти от гистограммы к плавной *функции распределения*, график которой проходит через вершины вертикальных прямоугольников гистограммы. Кривую такого рода мы и должны построить для распределения молекул газа по скоростям.

## Элементы теории вероятностей

### Случайные события

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий случайные явления. Основой теории вероятностей является понятие *случайного* события как одного из возможных исходов некоторого *испытания* — процесса, который принципиально может воспроизводиться неограниченное число раз. На интуитивном уровне это понятие ясно, и мы не станем вдаваться в его формальное определение, принятое в современной математике. Выпадение числа 6 (или любого другого) при бросании игральной кости, появление красного или черного в игре в рулетку — примеры случайных событий.

Зачастую, однако, мы имеем дело с невоспроизводимыми событиями, к которым все же применима теория вероятности. Речь идет о количественных характеристиках *массовых* явлений. Скажем, на предприятии изготавливается транзистор. Он может быть дефектным или исправным, но в отличие от бросания игральной кости повторить процесс, изготовить тот же самый транзистор во второй, третий, ..., миллионный раз уже невозможно. К этому же классу явлений относится появление данного числа вызовов на телефонной станции, возраст человека, занимающего определенное место на стотысячном стадионе и т. п.

Можно ли случайные события или массовые явления описывать математическими формулами? Можно ли в мире случайностей найти некоторые закономерности? Такие попытки предпринимались издавна из-за потребностей практики. Еще в древних государствах делались прогнозы роста народонаселения и количества собираемого урожая и податей. Развитие страхового дела в средние века потребовало оценки степени опасности кораблекрушения. В XVII в. в Италии было основано первое общество по страхованию жизни, и его основателю надо было знать степень риска смерти клиента в зависимости от его возраста и профессии. Последним толчком к появлению теории вероятностей как самостоятельной математической дисциплины стало распространение азартных игр.

### Вероятность случайного события

Каждому случайному событию можно приписать число, которое называется *вероятностью* события. Вероятность некоторого случайного события определяется *относительной частотой его появления* в ряду других случайных событий. Чем чаще происходит событие, тем больше его вероятность.

Пусть производится некоторое испытание, исходом которого является какой-то набор случайных событий  $A, B, C, \dots$ . Скажем, бросается игральная кость, которая предполагается геометрически правильной, так что все ее грани равноправны. Возможно всего шесть событий — выпадение чисел 1, 2, ..., 6. Пусть произведено  $n$  испытаний, и событие  $A$  наступило  $k_n(A)$  раз. Величина  $P_n(A) = k_n(A)/n$  представляет собой относительную частоту события  $A$  в данной серии испытаний. Вообще говоря, значение  $P_n(A)$  колеблется при переходе от одной серии испытаний к другой. Если при увеличении числа  $n$  испытаний в серии число  $P_n(A)$  стремится к определенному пределу  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A)$ , то этот предел  $P(A)$  называется вероятностью события  $A$ . Если кость бросается достаточно много раз в нашем примере, то частота выпадения каждого из чисел будет одинаковой. Мы скажем, что вероятность выпадения любого из них равна  $1/6$ .

Из классического определения вероятности следует, что она всегда заключена между нулем и единицей:  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Вероятность *невозможного* события равна нулю, вероятность *достоверного* события равна единице. Обратные утверждения, вообще говоря, неверны. Например, не следует думать, что никогда не может осуществиться

событие, вероятность которого равна нулю. События, которые осуществляются при бросании кости, дискретны: возможно выпадение единицы или двойки, но не двух с половиной. Но что делать, если события будут непрерывными? Например, вернемся к примеру группы людей. Какова вероятность того, что рост наудачу выбранного индивидуума будет в точности равен 176,543... см? Ясно, что эта вероятность равна нулю: существует бесчисленное множество непрерывно распределенных значений роста (возможных исходов измерений), так что знаменатель нашего определения вероятности бесконечно велик. Но все же может случиться так, что какой-то индивидуум имеет в точности такой рост. Чтобы избежать подобных трудностей в таких случаях вместо вероятности события удобнее пользоваться *плотностью вероятности*, или *распределением*. Зная эту величину, мы сможем, например, ответить на такой вопрос: какова вероятность того, что рост этого индивидуума заключен между 175 см и 180 см? В нашем примере эта вероятность составляет  $15/100 = 0,15$ . Та плавная кривая, которая соответствует гистограмме на рис. 13.2 при уменьшении интервала измерений роста, изобразила бы как раз плотность вероятности.

### Закон сложения вероятностей

Два события  $A$  и  $B$  называются *несовместимыми*, если при проведении испытания они не могут произойти одновременно. *Суммой* или *объединением* событий  $A \cup B$  называется наступление одного из них (знак  $\cup$  означает *или-или*). Вероятность наступления одного из двух *несовместимых* событий  $A$  или  $B$  определяется **законом сложения вероятностей**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (13.1)$$

Обобщение закона (13.1) на произвольное число несовместимых событий очевидно.

**Задача 13.63.** Какова вероятность, что при однократном бросании кости выпадет четное число?

**Решение.** Поскольку выпадение какого-то из чисел исключает выпадение другого, то эти события несовместимы. На гранях кости имеются четные числа 2, 4, 6, вероятности появления которых одинаковы:  $P(2) = P(4) = P(6) = 1/6$ . Вероятность выпадения четного числа  $P(2 \cup 4 \cup 6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$ . Очевидность полученного результата иллюстрирует высказывание французского математика Лапласа, что теория вероятностей есть здравый смысл, сведенный к математическому исчислению. ■

Другой пример — рассмотренный выше коллектив из ста человек. Здесь мы имеем дело с вероятностями того, что рост индивидуума заключен в определенных пределах. Так, мы знаем вероятности того, что рост находится в пределах 175–180 см (0,15), 180–185 см (0,1) и 185–190 (0,05). Какова вероятность того, что рост наугад выбранного человека из этого же коллектива превышает 175 см? По закону сложения вероятности приходим к ответу:  $0,15 + 0,1 + 0,05 = 0,3$ . Аналогично находится вероятность того, что рост будет ниже 175 см:  $0,1 + 0,25 + 0,35 = 0,7$ . Зададим теперь вопрос: чему равна вероятность того, что произвольно выбранный индивидуум имеет какой-нибудь рост? Вероятность эта равна единице:

$$\sum_i P_i = \frac{10}{100} + \frac{25}{100} + \frac{35}{100} + \frac{15}{100} + \frac{10}{100} + \frac{5}{100} = \frac{100}{100} = 1,$$

что согласуется с определением вероятности. Мы рассмотрели пример так называемого *условия нормировки вероятности*.

Непрерывные события описываются функцией распределения, которая графически изображается плавной кривой. Для нашего примера с распределением ростов в большом

коллективе мы обозначим ее  $w(h)$ . Тогда бесконечно малая величина  $w(h)dh$  равна вероятности того, что рост индивидуума заключен в пределах от  $h$  до  $h + dh$ . Чтобы узнать вероятность  $P(h_1, h_2)$ , что индивидуум имеет рост в пределах  $h_1 \leq h \leq h_2$ , надо просуммировать все эти бесконечно малые величины, т. е. вычислить площадь под частью кривой между точками с координатами  $h_1$  и  $h_2$ :

$$P(h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} w(h) dh. \quad (13.2)$$

Площадь под функцией распределения вероятности во всей области ее определения должна быть равна единице, поскольку сумма всех возможных событий является достоверным событием.

### Закон умножения вероятностей

*Произведением* или *пересечением* событий  $A \cap B$  называется осуществление обоих из них (знак  $\cap$  имеет смысл *и-и*). Два события называются *независимыми*, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого. Для двух *независимых* событий выполняется **закон умножения вероятностей**:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (13.3)$$

**Задача 13.64.** Пусть бросаются две игральные кости. Какова вероятность, что сумма чисел на гранях равна 12?

**Решение.** Такой исход возможен при выпадении шестерок на каждой из костей, причем число очков на одной из костей с очевидностью не влияет на число очков на другой. Искомая вероятность равна  $(1/6) \cdot (1/6) = 1/36$ . ■

Другой пример: возьмем три коллектива по сто человек в каждом, один из которых состоит исключительно из блондинов, другой — из брюнетов, а третий — из шатенов. Пусть в каждом из них имеется то же самое распределение по росту, что и в рассмотренном выше примере. Перемешаем коллективы и получим новый коллектив из трехсот человек. Ясно, что при таком перемешивании распределение по росту не изменилось, причем рост индивидуума не зависит от цвета его волос. Вероятности того, что индивидуум будет брюнетом, блондином или шатеном равны между собой ( $1/3$ ). Вопрос: какова вероятность, что наугад выбранный человек окажется брюнетом с ростом в пределах от 175 см до 180 см? Ответ получается на основе закона умножения вероятностей:  $(1/3) \cdot 0,15 = 0,05$ .

### Средние величины

Понятие статистического среднего является естественным обобщением привычного нам понятия среднего арифметического. В рассматриваемом примере у нас имеется ряд значений роста индивидуума. Под *арифметическим средним* мы понимаем отношение суммы всех этих значений к полному их числу, т. е. сумму вида  $\sum h_i N_i / N$ , где  $h_i$  — значение роста,  $N_i$  — число индивидуумов, имеющих это значение роста,  $N$  — полное число индивидуумов (измерений).

*Статистическим средним* величины  $h$ , которое мы будем обозначать через  $\langle h \rangle$ , называется предел отношения

$$\langle h \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_i h_i N_i}{N} = \sum_i h_i P_i, \quad (13.4)$$



где  $P_i$  — вероятность того, что величина  $h$  имеет значение  $h_i$ . Получаем

$$\langle h \rangle = 160 \frac{10}{100} + 165 \frac{25}{100} + 170 \frac{35}{100} + 175 \frac{15}{100} + 180 \frac{10}{100} + 185 \frac{5}{100} = 170,25 \text{ см.}$$

В случае непрерывно распределенных событий необходимо вычислить соответствующий интеграл  $\int hw(h) dh$ , взятый в пределах всей области изменения переменной  $h$ .

## Распределение Пуассона

Разные задачи (не только физические) приводят к разным функциям распределения, изучаемым теорией вероятности.

Рассмотрим идеальный газ, который содержит  $N$  молекул, заключенных в объеме  $V$ . Мысленно выделим в данном объеме какую-то его часть, объем которой равен  $\Delta V$ . Какова вероятность того, что в этом объеме  $\Delta V$  окажется  $n$  молекул? Представим себе, что весь объем  $V$  первоначально пуст, и мы «вбрасываем» туда молекулы одну за другой. Вероятность  $p$  того, что случайно брошенная молекула попадет в малый выделенный объем  $\Delta V$  равна  $p = \Delta V/V$ , вероятность  $q$  того, что она не попадет в него, равна  $q = 1 - p$ . По теореме умножения вероятностей величина  $p^n(1 - q)^{N-n}$  есть вероятность того, что в объеме  $\Delta V$  попадут ровно  $n$  молекул. Однако нас не интересует, какие именно  $n$  молекул попали в объем  $\Delta V$ , поэтому эту вероятность надо еще умножить на число способов, которыми  $n$  молекул могут быть выбраны из всего набора из  $N$  молекул, т. е. на число сочетаний из  $N$  элементов по  $n$ , которое равно

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \quad (13.5)$$

Таким образом, полная вероятность нахождения в объеме  $\Delta V$  произвольно выбранных  $n$  молекул равна

$$w_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}, \quad p = \frac{\Delta V}{V}. \quad (13.6)$$

Полученное выражение носит название **биномиального распределения**. Оно возникает всякий раз при описании числа «успешных исходов» в последовательности из  $N$  независимых случайных экспериментов, в каждом из которых вероятность «успеха» постоянна и равна  $p$ .

**Задача 13.65.** Найти среднее число  $\langle n \rangle$  успешных исходов при биномиальном распределении.

**Решение.** По определению среднего

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^N w_N(n) = \sum_{n=0}^N n C_N^n p^n (1-p)^{N-n} = (1-p)^N \sum_{n=0}^N n C_N^n \left( \frac{p}{1-p} \right)^n. \quad (13.7)$$

По формуле бинома Ньютона имеем соотношение

$$(1+x)^N = \sum_{n=0}^N C_N^n x^n. \quad (13.8)$$

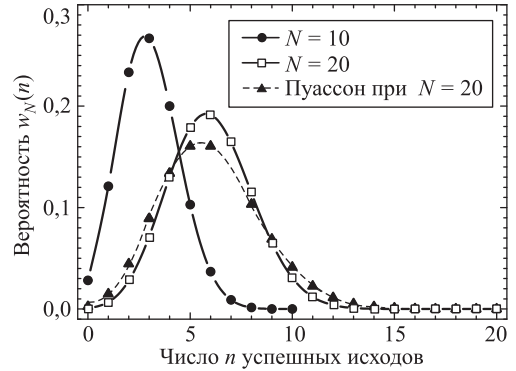
Дифференцируя (13.8) по  $x$

$$N(1+x)^{N-1} = \sum_{n=0}^N n C_N^n x^{n-1} \quad (13.9)$$

и умножая обе части (13.9) на  $x$ , приходим к соотношению

$$\sum_{n=0}^N C_N^n n x^n = N x (1+x)^{N-1}. \quad (13.10)$$

**Рис. 13.3.** Биномиальное распределение при вероятности события  $p = 0,3$  показано черными кружками для  $N = 10$  испытаний (этом случае среднее значение  $\langle n \rangle = pN = 3$ ) и белыми квадратиками для  $N = 20$  испытаний ( $\langle n \rangle = pN = 6$ ). Черные треугольники соответствуют распределению Пуассона при  $N = 20$ . Для наглядности точки дискретных распределений соединены линиями



С его помощью вычисляем сумму в правой части уравнения (13.7), полагая  $x = p/(1-p)$ :

$$\langle n \rangle = (1-p)^N N \frac{p}{1-p} \left( \frac{1}{1-p} \right)^{N-1} = pN. \quad (13.11)$$

Например, подбрасывая монетку ( $p = 1/2$ ), следует ожидать, что в среднем орел выпадет ровно в половине случаев — результат вполне очевидный. ■

При очень большом числе испытаний  $N \gg n$  в биномиальном распределении (13.6) можно использовать асимптотическое выражение для отношения факториалов

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\dots(N-n+1) \approx N^n \quad (13.12)$$

и заменить  $N-n$  на  $N$  в показателе степени множителя  $1-p$ . Тогда получаем в пределе больших  $N$  выражение

$$w_N(n) \approx \frac{N^n}{n!} p^n (1-p)^N. \quad (13.13)$$

Вводя среднее значение  $\langle n \rangle = pN$  согласно (13.11), переписываем (13.13) в виде

$$w_N(n) \approx \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \left( 1 - \frac{\langle n \rangle}{N} \right)^N \approx \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (13.14)$$

Распределение

$$p(n) = \frac{\beta^n}{n!} e^{-\beta} \quad (13.15)$$

называется **распределением Пуассона**. Мы убедились, что параметр  $\beta$  есть среднее значение случайных величин  $n$  при большом числе испытаний.

На рисунке 13.3 показаны биномиальные распределения для случайного события, вероятность которого  $p = 0,3$  при числах испытаний  $N = 10$  и  $N = 20$ . Для последнего случая показано также распределение Пуассона.

Распределение Пуассона описывает число случайных событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что эти события независимы друг от друга и происходят с некоторой фиксированной вероятностью. Примером может служить следующая задача.

**Задача 13.66.** При термоэлектронной эмиссии происходит вылет электронов с поверхности металла или полупроводника. Определить вероятность вылета  $n$  электронов за время  $t$ , предполагая, что: 1) вылеты электронов — статистически независимые события и 2) вероятность вылета одного электрона за бесконечно малый промежуток времени равна  $\lambda dt$  ( $\lambda$  — постоянная величина).

**Решение.** Обозначим через  $P_n(t)$  вероятность вылета  $n$  электронов за время  $t$  (соответственно,  $P_0(t)$  — вероятность того, что за это же время не вылетит ни один электрон). Рассмотрим близкий момент времени  $t+dt$ . За промежуток времени  $dt$  может вылететь один электрон, вероятность чего равна  $P_1(dt) = \lambda dt$ , а может не вылететь ни одного электрона, вероятность чего равна  $P_0(dt)$ . Вероятность вылета двух и более электронов пропорциональна степеням бесконечно малой величины  $dt$ , которыми мы пренебрегаем, поэтому  $P_0(dt) = 1 - P_1(dt)$ . Используя предположение о статистической независимости событий вылета электронов и учитывая правило подсчета вероятности двух последовательных событий, получаем, что

$$P_n(t+dt) = P_{n-1}(t)P_1(dt) + P_n(t)P_0(dt) = P_n(t) - P_1(t)(P_n(t) - P_{n-1}(t)). \quad (13.16)$$

Отсюда получаем зацепляющиеся дифференциальные уравнения

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda(P_n(t) - P_{n-1}(t)). \quad (13.17)$$

При  $n = 0$  эти уравнения принимают вид

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t), \quad (13.18)$$

так как  $P_{-1}(t) = 0$  (ни за какое время не может вылететь «минус один» электрон). Решение (13.18) тривиально:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad (13.19)$$

При интегрировании (13.18) использовано очевидное начальное условие  $P_0(0) = 1$  (за нулевое время электрон вылететь не может, т. е.  $P_1(0) = 0$  и  $P_0(0) = 1 - P_1(0) = 1$ , т. е. с вероятностью единица он и не вылетит). Для других вероятностей начальное условие имеет вид  $P_n(0) = 0, n \geq 1$ .

Ищем решение в виде  $P_n(t) = f_n(t) \exp(-\lambda t)$ . Подставляя это представление в (13.17), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{df_n(t)}{dt} &= \lambda f_{n-1}(t), \\ f_0(t) &= 1, \quad f_n(0) = 0. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Методом математической индукции теперь совсем легко доказать, что  $f_n(t) = (\lambda t)^n/n!$ , так что решением задачи стало распределение Пуассона:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \quad \blacksquare \quad (13.21)$$

Если велико число событий (вылетевших электронов, частиц в выделенном объеме), то в распределении Пуассона (13.15) можно использовать формулу Стирлинга для асимптотического поведения факториала:

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \ln(\sqrt{2\pi n}). \quad (13.22)$$

Логарифмируя распределение Пуассона и используя (13.22), находим

$$\ln p(n) = -\beta + n \ln \beta - n \ln n + n - \ln(\sqrt{2\pi n}). \quad (13.23)$$

Обозначим через  $\Delta n = n - \beta$  отклонение значения случайной величины  $n$  от ее среднего значения  $\beta$ . Тогда (13.23) можно записать в виде

$$\ln p(n) = \Delta n + (\beta + \Delta n) \ln \beta - (\beta + \Delta n) \ln(\beta + \Delta n) - \ln \left( \sqrt{2\pi(\beta + \Delta n)} \right). \quad (13.24)$$

Нам надо упростить это выражение при  $\beta \gg \Delta n$ . Во-первых, разложим в ряд третье слагаемое:

$$\begin{aligned} (\beta + \Delta n) \ln(\beta + \Delta n) &= (\beta + \Delta n) \ln \beta + (\beta + \Delta n) \ln(1 + \Delta n/\beta) \approx \\ &\approx (\beta + \Delta n) \ln \beta + (\beta + \Delta n) \left( \frac{\Delta n}{\beta} - \frac{(\Delta n)^2}{2\beta^2} \right) \approx \\ &\approx (\beta + \Delta n) \ln \beta + \Delta n + \frac{(\Delta n)^2}{2\beta}. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Теперь разложим в ряд четвертое слагаемое в (13.24):

$$\ln \left( \sqrt{2\pi(\beta + \Delta n)} \right) \approx \ln \sqrt{2\pi\beta}. \quad (13.26)$$

С учетом соотношений (13.25) и (13.26), логарифм распределения Пуассона (13.24) принимает вид

$$\ln p(n) \approx -\frac{(\Delta n)^2}{2\beta} - \ln \sqrt{2\pi\beta}, \quad (13.27)$$

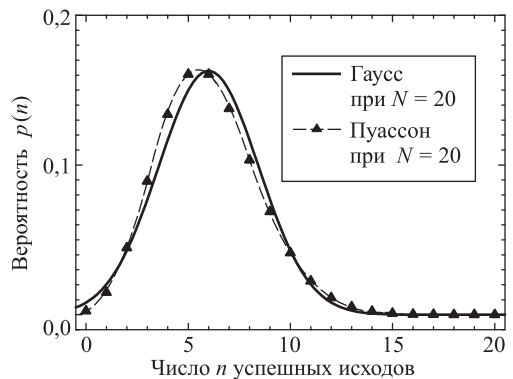
откуда следует распределение, называемое **распределением Гаусса** или **нормальным распределением**:

$$p(n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp \left( -\frac{(\Delta n)^2}{2\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp \left( -\frac{(n - \beta)^2}{2\beta} \right). \quad (13.28)$$

Точнее, распределение Гаусса для случайной величины  $x$  выглядит как

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2} \right), \quad (13.29)$$

где  $\langle x \rangle$  — среднее значение (математическое ожидание), а  $\sigma$  — среднее квадратичное отклонение. При  $\beta \gg \Delta n$  распределение Пуассона переходит в распределение Гаусса, где среднее квадратичное отклонение равно квадратному корню из среднего значения:  $\sigma = \sqrt{\beta}$ . Сравнение распределения Пуассона с распределением Гаусса представлено на рис. 13.4.



**Рис. 13.4.** Сравнение распределения Пуассона с распределением Гаусса, полученным из него в пределе бесконечно большого числа испытаний. Видно, что кривые мало отличаются уже при  $N = 20$

## 13.2 Распределение молекул по скоростям

В этом разделе, являющемся центральным для данной темы, устанавливается вид *распределения Максвелла*.

Газ, предоставленный самому себе и находящийся при постоянных внешних условиях, приходит в состояние равновесия. С макроскопической точки зрения в нем устанавливаются постоянная температура и постоянное давление (а если газ состоит из нескольких компонентов, как воздух, то и состав газа в разных местах в сосуде будет одинаков). Молекулы газа даже в равновесии движутся беспорядочно, сталкиваясь между собой и со стенками сосуда, непрерывно меняя свою скорость. Однако не все столь хаотично, как кажется на первый взгляд. Как бы ни изменялась скорость молекулы, среднее значение ее квадрата (как это следует из молекулярно-кинетической теории идеальных газов) остается постоянной:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m_0}. \quad (13.30)$$

Зададим вопрос: сколько молекул (или лучше, какая доля молекул) движется с определенной скоростью в данный момент? Из предположения о хаотическом характере молекулярного движения следует, что возможно появление молекул с любыми скоростями, так что распределение молекул по скоростям надо характеризовать непрерывной функцией. Несмотря на полную хаотичность молекулярных движений, несмотря на случайный характер столкновений и вызываемых ими изменений скорости молекул, их распределение по скоростям, как показывают теория и опыт, оказывается вполне определенным. На характер распределения по скоростям не влияют даже внешние поля при условии, что состояние системы является равновесным.

Будем считать, что возможные значения скорости заключены, в принципе, от 0 до  $\infty$ . В реальных системах скорость не может быть бесконечно большой, так как всякая система состоит из большого, но конечного числа молекул. Поэтому даже если представить себе такой практически невероятный случай, при котором все молекулы остановятся, передав всю энергию одной единственной молекуле, то и тогда энергия этой молекулы и, следовательно, ее скорость будет конечной. Мы здесь даже не говорим об ограничениях, налагаемых теорией относительности, согласно которой скорость любой молекулы не может превысить скорость света. Очень малые и очень большие по сравнению со средним значением скорости мы будем считать в принципе возможными, но, как мы убедимся, они окажутся маловероятными.

Прежде чем приступить к рассмотрению закона распределения молекул газа по скоростям, выясним сущность задачи о распределении. Определить распределение молекул по скоростям, казалось бы, означает определить число молекул, обладающих той или иной заданной скоростью. Однако в такой постановке вопрос не имеет смысла, так как число молекул, имеющих точно (математически точно!) заданную скорость, равно нулю. Действительно, число различных значений скорости бесконечно велико, число же молекул конечно. Поэтому число молекул, приходящихся на долю каждого произвольно заданного значения скорости, равно нулю. Вследствие этого вопрос должен быть сформулирован иначе:

сколько молекул (или какая доля молекул) обладает скоростями, лежащими в некотором интервале вблизи заданной скорости?

Итак, найти распределение молекул по скоростям — это значит определить, сколько молекул или какая доля молекул из общего числа  $N$  обладают скоростями, лежащими в интервале от  $\vec{v}$  до  $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ .

### Функция распределения молекул по скоростям

Если  $\Delta N$  — число молекул, имеющих при заданном состоянии системы скорости от  $\vec{v}$  до  $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ , то это число, вообще говоря, зависит от:

- общего числа молекул  $N$  в системе,
- величины интервала  $\Delta\vec{v}$ ,
- значения самой скорости  $\vec{v}$  (так как в одинаковых по величине интервалах, но при разных абсолютных значениях скорости число частиц будет различным).

Таким образом,  $\Delta N = \Delta N(N, \Delta\vec{v}, \vec{v})$ . Здесь под  $\vec{v}$  понимается вектор с компонентами  $\{v_x, v_y, v_z\}$  (в декартовой системе координат). Кроме того, нам понадобится величина  $\Delta^3 v = \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$ , т. е. «объем» интервала скоростей.

При уменьшении этого «объема» число частиц в нем естественно стремится к нулю. В таких случаях, как было пояснено выше, необходимо пользоваться функцией (мы обозначим ее  $F$ ), численно равной количеству молекул, приходящемуся на единичный объем интервала скоростей:

$$F = \frac{dN}{d^3 v}, \quad (13.31)$$

где бесконечно малый объем скоростей  $d^3 v = dv_x dv_y dv_z$ . Эта величина зависит уже лишь от  $N$  и  $\vec{v}$ :  $F = F(N, \vec{v})$ ; Ее можно назвать концентрацией молекул в пространстве скоростей. Число молекул в конечном интервале скоростей может быть получено обратной операцией — интегрированием  $F(N, \vec{v})$  по  $\vec{v}$ .

Обратимся теперь к зависимости функции  $F$  от числа молекул в системе. Чем больше полное число  $N$  молекул, тем больше число молекул  $\Delta N$ , приходящееся на единичный объем интервала скоростей. В пределе бесконечно большого числа молекул ( $N \rightarrow \infty$ ) величина  $F$  пропорциональна рассматриваемому количеству молекул  $N$  и, следовательно, для различных порций газа будет различна. Поэтому мы введем другую функцию, которая будет зависеть только от скорости:

$$n(\vec{v}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F(N, \vec{v})}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{dN}{d^3 v}. \quad (13.32)$$

Эта функция  $n(\vec{v})$  называется *функцией распределения молекул по скоростям*. Таким образом, **функция распределения  $n(\vec{v})$  дает относительное количество (долю) молекул, имеющих скорость в единичном интервале скоростей вблизи скорости  $\vec{v}$ .**

Если взять несколько порций одного и того же газа, находящихся в идентичных условиях (одинаковы  $p$  и  $T$ ), то распределение молекул по скоростям в них также будет идентично. Зная вид  $n(\vec{v})$ , можно найти количество молекул  $dN$  из общего числа молекул  $N$ , скорости которых попадают внутрь интервала  $d\vec{v}$ , т. е. имеют значения, заключенные в пределах от  $\vec{v}$  до  $\vec{v} + d\vec{v}$ :

$dN(\vec{v}) = Nn(\vec{v})d^3v$ . Исходя из определения вероятности мы можем заключить, что величина  $dN/N = n(\vec{v})d^3v$  является вероятностью того, что любая из молекул газа обладает скоростью, лежащей в интервале  $d\vec{v}$  вблизи  $\vec{v}$ , а сама функция  $n(\vec{v})$  имеет смысл плотности вероятности.

Функция распределения должна подчиняться условию, имеющему простой физический смысл: число молекул с произвольными значениями скорости от 0 до  $\infty$  в объеме  $V$  равно полному числу молекул  $N$ , находящихся в этом объеме. Если просуммировать числа  $\Delta N(\vec{v})$  по всем скоростям от 0 до  $\infty$ , то эта сумма должна равняться полному числу молекул  $N$ . Для более точных вычислений нужно брать интервал  $d^3v$  бесконечно малым, а сумму заменить интегралом  $\int Nn(\vec{v})d^3v = N$ , откуда

$$\int n(\vec{v})d^3v = 1. \quad (13.33)$$

Итак, хотя функция  $n(\vec{v})$  пока нам неизвестна, мы уже знаем, что интеграл от нее, взятый по всем возможным скоростям, равен 1. Это условие называют *условием нормировки* функции распределения. Функция распределения для газов была найдена теоретически Максвеллом (1859) и носит его имя. В следующем разделе мы установим ее вид.

## Распределение Максвелла

Поскольку все направления движения молекул в пространстве равноправны, распределение скоростей должно быть изотропным и функция распределения  $n(\vec{v})$  не может зависеть от направления скорости. Это означает, что  $n(\vec{v})$  не может быть произвольной функцией от компонентов скорости  $v_x, v_y, v_z$ , а должна являться функцией абсолютной величины скорости  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ . В зависимости от выбранной системы координат вероятность  $dN/N$  имеет различный вид. В декартовой системе:

$$\frac{dN}{N} = n(v)dv_x dv_y dv_z; \quad (13.34)$$

в цилиндрической системе:

$$\frac{dN}{N} = n(v)v_r dv_r dv_z d\varphi; \quad (13.35)$$

в сферической системе:

$$\frac{dN}{N} = n(v)v^2 dv \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (13.36)$$

Далее предлагается простой, хотя и не вполне строгий, вывод вида функции распределения. Рассмотрим процесс столкновения двух частиц, движущихся со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Пусть в результате соударения скорости молекул изменяются и превращаются в  $\vec{v}_3$  и  $\vec{v}_4$ . Число таких столкновений в единицу времени в единице объема газа должно быть пропорционально числу молекул со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , т. е. произведению  $n(v_1) \cdot n(v_2)$ . Рассмотрим далее процесс соударения, являющийся обратным данному. При этом скорости молекул изменяются от значений  $\vec{v}_3$  и  $\vec{v}_4$  до значений  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Число таких соударений в единицу

времени в объеме пропорционально количеству молекул со скоростями  $\vec{v}_3$  и  $\vec{v}_4$ , т. е.  $n(v_3) \cdot n(v_4)$ .

В силу предположения о молекулярном хаосе и предположения о том, что число молекул с данными значениями скорости не изменяется процессами молекулярных столкновений в газе, находящемся в стационарном состоянии, можно считать, что число молекул, у которых в результате столкновений скорости изменяются от значений  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  к значениям  $\vec{v}_3, \vec{v}_4$ , равно числу молекул, у которых скорости изменяются противоположным образом — от  $\vec{v}_3, \vec{v}_4$  к  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ . Отсюда следует, что

$$n(v_1)n(v_2) = n(v_3)n(v_4). \quad (13.37)$$

Равенство (13.37) выражает баланс частиц, обменивающихся скоростями в результате упругого соударения, когда их кинетические энергии сохраняются:

$$\frac{m_0}{2}v_1^2 + \frac{m_0}{2}v_2^2 = \frac{m_0}{2}v_3^2 + \frac{m_0}{2}v_4^2. \quad (13.38)$$

Равенства (13.33), (13.37) и (13.38) представляют совокупности условий, которым должна удовлетворять искомая функция распределения.

Используя (13.38), выразим  $v_4$  через  $v_1, v_2, v_3$ :

$$v_4 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_3^2}. \quad (13.39)$$

Функциональные уравнения (13.37) и (13.39) легко превратить в простое дифференциальное уравнение. Взяв логарифм от (13.37), имеем

$$\ln n(v_1) + \ln n(v_2) = \ln n(v_3) + \ln n(v_4). \quad (13.40)$$

Продифференцируем (13.40) по аргументу  $v_1$ :

$$\frac{d \ln n(v_1)}{dv_1} = \frac{d \ln n(v_4)}{dv_4} \frac{\partial v_4}{\partial v_1}. \quad (13.41)$$

Аналогично

$$\frac{d \ln n(v_2)}{dv_2} = \frac{d \ln n(v_4)}{dv_4} \frac{\partial v_4}{\partial v_2}. \quad (13.42)$$

Учитывая уравнение (13.39), находим

$$\frac{\partial v_4}{\partial v_1} = \frac{v_1}{v_4}, \quad \frac{\partial v_4}{\partial v_2} = \frac{v_2}{v_4}. \quad (13.43)$$

Подставляя (13.43) в правые части соотношений (13.41) и (13.42), приходим к равенству

$$\frac{1}{v_1} \frac{d \ln n(v_1)}{dv_1} = \frac{1}{v_2} \frac{d \ln n(v_2)}{dv_2}. \quad (13.44)$$

При этом мы должны помнить, что уравнение (13.44) справедливо при любых значениях  $v_1, v_2$ , которые являются независимыми переменными. Это значит, что равенство (13.44) должно иметь место при совершенно произвольных значениях скоростей, поэтому оно может быть выполнено только тогда, когда правая и левая части (13.44) равны некоторой постоянной (обозначим ее  $-\alpha$ ):

$$\frac{d \ln n(v)}{dv} = -\alpha v. \quad (13.45)$$



Очевидно, что переменная  $v$  может принимать значения  $v_1$ ,  $v_2$  или любое иное. Разделяя переменные, записываем (13.45) в виде

$$d \ln n(v) = -\frac{\alpha}{2} d(v^2). \quad (13.46)$$

Интегрируя (13.46), находим

$$n(v) = A \exp\left(-\frac{\alpha}{2}v^2\right), \quad (13.47)$$

где  $A$  — постоянная интегрирования. Из физических соображений очевидно, что  $n \rightarrow 0$  при  $v \rightarrow \infty$ : неограниченно большие скорости молекул маловероятны. Поэтому коэффициент  $\alpha > 0$ . Постоянная  $A$  определяется из условия нормировки (13.33) для функции распределения:

$$A = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{3/2}. \quad (13.48)$$

В дальнейшем мы покажем, что параметр  $\alpha$  связан с абсолютной температурой  $T$  соотношением

$$\alpha = \frac{m_0}{k_B T}. \quad (13.49)$$

Следовательно,

$$n(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2k_B T}\right). \quad (13.50)$$

Формула (13.50) представляет собой распределение Максвелла для молекул идеального газа по скоростям. Математически оно представляет собой распределение Гаусса для трех случайных величин — проекций скоростей в декартовых координатах — с нулевыми средними значениями.

Учитывая, что  $n(v)$  зависит только от модуля скорости, а направления скоростей равновероятны, можно ввести функцию распределения  $f(v)$  молекул по абсолютной величине скорости. Для этого надо проинтегрировать выражение (13.36) по углам, что дает

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= n(v)v^2 dv \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 4\pi n(v)v^2 dv = f(v) dv. \end{aligned} \quad (13.51)$$

Отсюда и из (13.50) следует выражение для распределения Максвелла по модулям скоростей молекул:

$$f(v) = 4\pi n(v)v^2 = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2k_B T}\right). \quad (13.52)$$

Величина  $f(v)dv$  есть вероятность найти частицу с модулем скорости, лежащим в интервале от  $v$  до  $v + dv$ . Условие нормировки  $f(v)$  имеет вид:

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1. \quad (13.53)$$

### 13.3 Характерные скорости молекул

В этом разделе обсуждаются некоторые следствия, вытекающие из распределения (13.52). На рисунке 13.5 изображены две кривые  $f(v)$ , соответствующие распределениям молекул кислорода  $O_2$  по абсолютным величинам скоростей при температурах  $T_1 = 300 \text{ К}$  и  $T_2 = 1300 \text{ К}$ .

#### Наиболее вероятная скорость

При бесконечно малых и неограниченно больших значениях скоростей  $f(v)$  стремится к нулю — такие предельные значения скоростей маловероятны в системе. Следовательно, при каком-то значении скорости функция  $f(v)$  достигает своего максимума.

♦ Скорость  $v_{\text{вер}}$ , отвечающая максимальному значению функции распределения, называется **наиболее вероятной скоростью**. ♦

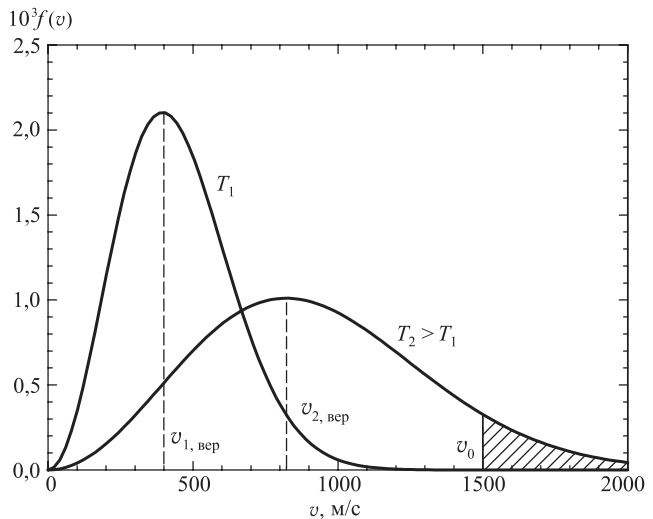
Ее можно найти, решая уравнение  $df(v)/dv = 0$ , откуда следует, что

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_0}}. \quad (13.54)$$

Иными словами, наиболее вероятной называется скорость, вблизи которой на единичный интервал приходится наибольшее число молекул. В этой точке  $f(v)$  принимает максимальное значение:

$$f(v_{\text{вер}}) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{2k_B T}{m_0 e} = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi k_B T}} = 0,587 \sqrt{\frac{m_0}{k_B T}}. \quad (13.55)$$

Соотношения (13.54), (13.55) могут быть полезны для анализа *изменения* функции распределения при изменении *температуры* газа или при изменении рода газа, т. е. *массы* молекул.



**Рис. 13.5.** Распределение молекул кислорода по скоростям при разных температурах  $T_1 = 300 \text{ К}$  и  $T_2 = 1300 \text{ К}$

С ростом температуры  $v_{\text{вер}}$  (13.54) увеличивается, т. е. максимум сдвигается вправо ( $T_2 > T_1$ ) (см. рис. 13.5). При этом  $f(v_{\text{вер}})$  уменьшается, кривая становится более полой. Кривая деформируется и в том случае, если температура постоянна, но масса молекул уменьшается. Напомним, что в силу условия нормировки (13.53) при любых деформациях площадь под графиками функции распределения  $f(v)$  постоянна и равна единице.

Относительное количество молекул, скорость которых превышает некоторое значение  $v_0$ , определяется выражением

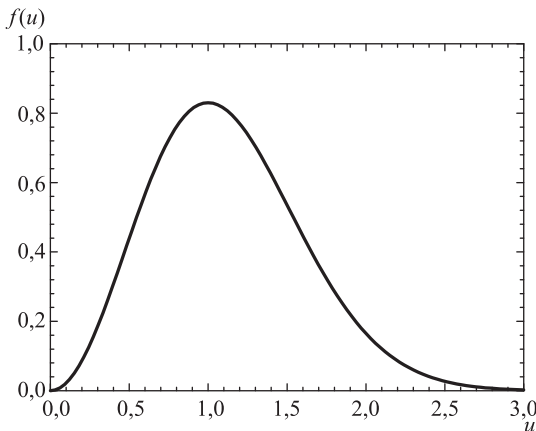
$$\frac{N(v \geq v_0)}{N} = \int_{v_0}^{\infty} f(v) dv. \quad (13.56)$$

На графике (см. рис. 13.5) этому интегралу соответствует лежащая справа от  $v_0$  заштрихованная часть площади, ограниченная кривой  $f(v)$  и осью скоростей. Как видно из рис. 13.5, относительное количество молекул, имеющих скорости, превышающие  $v_0$ , растет с повышением температуры.

В заключение этого раздела заметим, что во всех формулах для функции распределения и характерных скоростей встречается отношение массы молекулы к постоянной Больцмана  $m_0/k_B$ . Умножая числитель и знаменатель на число Авогадро  $N_A$  и учитывая, что  $m_0 N_A = \mu$  (молярная масса газа), а  $k_B N_A = R$  (универсальная газовая постоянная), мы всюду можем использовать это отношение в наиболее удобной для конкретной задачи форме:  $m_0/k_B = \mu/R$ .

## Распределение молекул по величинам безразмерной скорости

Если при графическом изображении закона Максвелла (13.50) по оси абсцисс откладывать скорости молекул  $v$ , то форма кривой и положение максимума будут зависеть от массы молекул и от температуры газа. Но если по горизонтальной оси откладывать отношение скорости к наиболее вероятной скорости, т. е. безразмерную скорость  $u = v/v_{\text{вер}}$ , то для всех температур и любых масс молекул (любых газов), получится одна и та же кривая (рис. 13.6).



**Рис. 13.6.** Распределение Максвелла по величинам безразмерной скорости  $u$ . Наиболее вероятной скорости, при которой функция распределения имеет максимум, соответствует значение  $u = 1$

Сделаем замену переменной  $u = v/v_{\text{вер}}$ ,  $2k_B T/m_0 = v_{\text{вер}}^2$ ,  $dv = v_{\text{вер}} du$  в (13.51) и (13.52), получим распределение Максвелла в наиболее простой форме:

$$f(u) = \frac{1}{N} \frac{dN}{du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2. \quad (13.57)$$

Эта формула (13.57) и соответствующий ей график (см. рис. 13.6) удобны для решения многих задач.

**Задача 13.67.** Найти, какая часть общего числа молекул кислорода имеет при температуре 27°C: 1) скорости, отличающиеся от наиболее вероятной на 1%; 2) скорости в интервале 562–572 м/с.

**Решение.** Произведем необходимые вычисления. Чтобы ответить на первый вопрос задачи, учтем, что  $u = 1$  при  $v = v_{\text{вер}}$ . Величина интервала  $\Delta u = 0,02$ . Следовательно,

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \cdot 1 \cdot \Delta u = \frac{4}{\sqrt{3,14}} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 \cdot 0,02 = 0,0166 = 1,66\%.$$

Вычислим наиболее вероятную скорость:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 300}{32 \cdot 10^{-3}}} = 395 \text{ м/с.}$$

Найдем отношение  $v = 562$  м/с и  $v_{\text{вер}}$ :

$$u = \frac{v}{v_{\text{вер}}} = \frac{562}{395} = 1,42.$$

Определим по кривой (см. рис. 13.6) значение функции  $f(u)$  при  $u = 1,42$ . Получаем  $f(u) = 0,62$ . Ширина интервала  $\Delta v = 10$  м/с ( $\Delta u = 10/395 = 0,0253$ ). Следовательно, долю молекул в этом малом интервале можно найти не интегрируя, по приближенной формуле  $f(u)\Delta u = 0,2 \cdot 0,0253 = 0,0156 = 1,56\%$ . ■

Интересно отметить, что молекула кислорода проходит за секунду путь, равный в среднем 0,4 км. Но не нужно забывать о соударениях молекул. Из-за них молекула по прямой движется очень недолго, и ее путь представляет собой ломаную линию. Поэтому молекула, двигаясь с огромной скоростью по отдельным звеньям ломаной траектории, передвигается от слоя к слою газа со сравнительно небольшой скоростью.

### Средняя арифметическая скорость

Знание функции распределения молекул по скоростям  $f(v)$  позволяет найти среднее значение скорости и любой величины, являющейся функцией скорости, например квадрата скорости  $v^2$  или кинетической энергии молекулы  $mv^2/2$ .

**Средняя арифметическая скорость** равна отношению суммы абсолютных величин скоростей всех молекул в системе к числу этих молекул. Разобьем интервал всех возможных значений скорости от 0 до  $\infty$  на малые интервалы  $\Delta v_i$ . Каждому интервалу соответствует количество молекул:

$$\Delta N_i = N f(v_i) \Delta v_i. \quad (13.58)$$

Так как интервалы малы, можно приближенно считать скорости молекул данного интервала одинаковыми и равными  $v_i$ . Сумма значений скоростей молекул интервала:

$$v_i \Delta N_i = v_i N f(v_i) \Delta v_i. \quad (13.59)$$

Сумма значений скоростей всех молекул:

$$\sum_i v_i \Delta N_i = N \sum_i v_i f(v_i) \Delta v_i. \quad (13.60)$$

Разделив эту сумму на число молекул, получим приближенное выражение для средней арифметической скорости:

$$\langle v \rangle \approx \sum_i v_i f(v_i) \Delta v_i. \quad (13.61)$$

Точное выражение получается при стремлении к нулю интервалов  $\Delta v_i$ , т. е. при переходе от суммы к интегралу:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv. \quad (13.62)$$

После вычислений:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8 RT}{\pi \mu}}. \quad (13.63)$$

### Среднеквадратичная скорость

Теперь очевидно, что для нахождения среднего значения произвольной функции  $L(v)$ , нужно ее умножить на функцию распределения и проинтегрировать по всем возможным значениям скорости:

$$\langle L(v) \rangle = \int_0^{\infty} L(v) f(v) dv. \quad (13.64)$$

В частности, при  $L(v) = v$  отсюда находится  $\langle v \rangle$ .

Среднее значение квадрата скорости равно отношению суммы квадратов скоростей всех молекул системы к общему числу молекул. Таким образом,

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{3k_B T}{m_0} = \frac{3RT}{\mu}. \quad (13.65)$$

**Среднеквадратичная скорость** молекулы  $v_{\text{кв}}$  определяется отсюда как

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (13.66)$$

Следует отметить, что

$$v_{\text{вер}} < \langle v \rangle < v_{\text{кв}}, \quad (13.67)$$

но зависимость от  $T$  и  $m_0$  ( $\mu$ ) у них одинаковая. Эти скорости отличаются друг от друга численными множителями.

Через среднеквадратичную скорость выражается средняя кинетическая энергия молекулы:

$$\langle T \rangle = \left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \frac{m_0 v_{\text{КВ}}^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T. \quad (13.68)$$

Этот результат находится в согласии основным уравнением МКТ газов и *теоремой о равномерном распределении энергии* — на каждую степень свободы молекулы приходится энергия  $k_B T/2$ . Три степени свободы поступательного движения молекулы как раз соответствуют результату (13.68). В сущности, именно для того, чтобы получить (13.68), мы выбрали должным образом коэффициент  $\alpha$  в (13.49).

### Эксперимент по проверке распределения Максвелла

Необходимо еще раз подчеркнуть, что установленный Максвеллом закон распределения молекул по скоростям и все вытекающие из него следствия справедливы только для идеального газа, находящегося в равновесии. Закон справедлив для любого числа  $N$ , если только это число достаточно велико. Закон Максвелла — статистический, а законы статистики выполняются тем точнее, чем к большему числу одинаковых объектов они применяются. При малом числе объектов могут наблюдаться значительные отклонения от предсказанной статистики.

Экспериментальное определение распределения скоростей молекул было осуществлено впервые О. Штерном в 1920 г. Исследовалось распределение по скоростям одноатомных молекул паров металлов (Ag или Pt), из которых изготовлена нить. Нить нагревалась электрическим током, и металл испарялся (рис. 13.7).

Молекулы, прошедшие через щель, летят по прямой и оседают на стенке холодного цилиндра ( $a$ ). Если привести всю установку во вращение (щель все время против точки  $S_0$ ), то молекулы, обладающие большей скоростью  $v$ , попадут в некоторую точку вблизи  $S_0$ , а более медленные затратят на путь больше времени и попадут в точку, отстоящую дальше от  $S_0$  ( $b$ ). Следует обратить внимание, что вылетающие молекулы движутся по прямой, они не участвуют во вращательном движении. Поскольку молекулы в зависимости от скорости попадают в разные точки внешнего цилиндра, то исследуя толщину слоя металла,

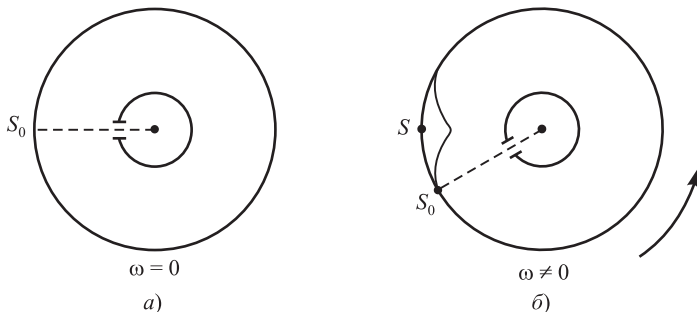


Рис. 13.7. Схема эксперимента Штерна

осевшего на стенку цилиндра, можно составить представление о распределении молекул по скоростям.

Найдем распределение молекул по расстояниям  $S$  от точки  $S_0$  до места их попадания на стенку цилиндра. Если  $R$  и  $r$  — радиусы большого и малого цилиндров, соответственно (см. рис. 13.7), то время полета от щели до стенки цилиндра  $t = (R - r)/v$ . За это время цилиндр повернется на угол  $\varphi = \omega t$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения установки. Соответственно, точка попадания будет смещена относительно  $S_0$  на расстояние  $S = \varphi R = \omega R t$ . Подставляя сюда время полета, получаем связь скорости молекулы с расстоянием  $S$ :

$$v = \frac{\omega R(R - r)}{S}. \quad (13.69)$$

Подставляя в свою очередь выражение (13.69) в распределение Максвелла (13.52) и учитывая, что  $dv \sim dS/S^2$ , находим распределение молекул по расстояниям  $S$ :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= f(v)dv = C \exp\left(-\frac{\beta}{S^2}\right) \frac{dS}{S^4}, \\ \beta &= \frac{m_0 \omega^2 R^2 (R - r)^2}{2k_B T} \end{aligned} \quad (13.70)$$

(мы опускаем выражение для нормировочной постоянной  $C$ ).

Опыты Штерна подтвердили справедливость закона, установленного Максвеллом.

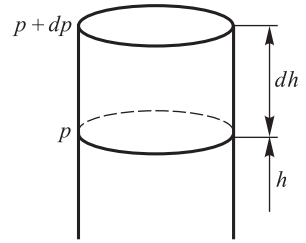
### 13.4 Распределение молекул по координатам

В этом разделе мы перейдем теперь к анализу распределения молекул газа по координатам. Очевидно, что если на молекулы газа не действуют внешние силы, то газ *равномерно* распределяется по заданному объему. В этом случае давление и плотность газа будут одинаковы во всех точках. Если же газ находится в силовом поле (как, например, атмосферный воздух, который испытывает притяжение Земли), то давление и плотность газа уже не будут всюду одинаковыми, а будут меняться от точки к точке.

#### Барометрическая формула

Однако учет силы тяжести меняет ситуацию, и молекулы уже не будут равномерно распределены в пространстве. Для примера найдем закон, по которому изменяется давление атмосферы (или ее плотность) по мере удаления от поверхности Земли.

Выделим вертикальный столб воздуха с площадью горизонтального сечения  $S$ . Предположим, что: 1) этот столб находится в тепловом равновесии, т. е. температура везде одинакова (в реальной атмосфере это не так, но для простоты анализа будем предполагать  $T = \text{const}$ ); 2) газ идеальный, т. е. для него справедливо уравнение Клапейрона—Менделеева (10.11); 3) можно пренебречь изменением ускорения свободного падения  $g$  с высотой (что справедливо для не очень больших высот).



**Рис. 13.8.** Воздушный цилиндр (к выводу барометрической формулы)

Атмосферное давление на высоте  $h$  обусловлено весом вышележащих слоев газа. Пусть  $p$  — давление на высоте  $h$ , тогда  $p + dp$  — давление на высоте  $h + dh$  (рис. 13.8). При этом, если  $dh > 0$ , то давление уменьшается,  $dp < 0$ , так как уменьшается вес вышележащих слоев атмосферы.

Выделенный слой газа высотой  $dh$  и массой  $m$  находится в равновесии. Следовательно, сумма действующих на него сил должна быть равна нулю:  $\sum_i \vec{F}_i = 0$ . В проекциях на вертикальную ось получаем

$$(p + dp)S + \rho g S dh - pS = 0, \quad (13.71)$$

где  $\rho$  — плотность газа на высоте  $h$ . Раскрывая скобки и приводя подобные члены, переходим к уравнению

$$dp = -\rho g dh. \quad (13.72)$$

Воспользуемся уравнением Клапейрона—Менделеева (10.11) для выделенной массы газа  $m$  и выразим плотность через давление:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \quad (13.73)$$

Подставляя (13.73) в (13.72), окончательно получаем:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh. \quad (13.74)$$

Это уравнение можно проинтегрировать в случае изотермической атмосферы ( $T = \text{const}$ ):

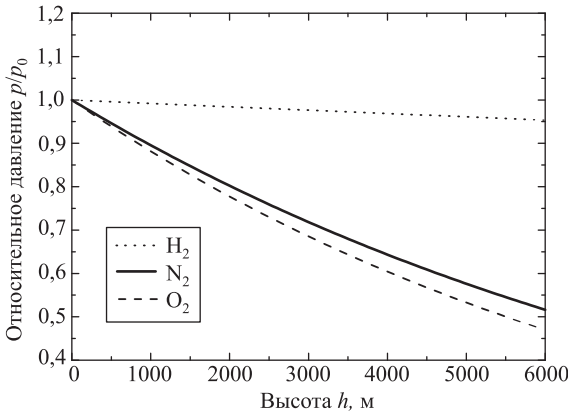
$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right). \quad (13.75)$$

Постоянная интегрирования  $p_0$  равна давлению у поверхности Земли ( $h = 0$ ).

Полученная зависимость называется *барометрической формулой*. Она описывает распределение давления газа по высоте в однородном поле тяжести при постоянной температуре. Следует обратить внимание, что скорость уменьшения давления с высотой зависит от рода газа. Чем меньше  $\mu$ , тем меньше по абсолютной величине показатель степени, и тем медленнее для такого газа уменьшается давление при увеличении высоты. На рисунке 13.9 показаны зависимости давления от высоты при температуре  $T = 300$  К ( $27^\circ\text{C}$ ) для трех газов различной молярной массы — водорода  $\text{H}_2$  ( $\mu_1 = 2,016$  г/моль), азота  $\text{N}_2$  ( $\mu_2 = 28,013$  г/моль) и кислорода  $\text{O}_2$  ( $\mu_3 = 31,999$  г/моль).

**Задача 13.68.** Определить, на какой высоте давление кислорода уменьшается в два раза (при  $T = 300$  К).





**Рис. 13.9.** Зависимость давления трех разных газов ( $H_2$ ,  $N_2$  и  $O_2$ ) от высоты

**Решение.** Применяем барометрическую формулу:

$$p(h) = \frac{p_0}{2} \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right).$$

Тогда

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{\mu gh}{RT} \quad \text{и} \quad h = \frac{RT \ln 2}{\mu g} \simeq 5,5 \text{ км.} \quad \blacksquare$$

Используя уравнение идеального газа в форме

$$p = nk_B T, \quad (13.76)$$

из барометрической формулы легко получить закон изменения с высотой концентрации  $n$  молекул:

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right). \quad (13.77)$$

Из (13.77) следует, что состав воздуха с удалением от поверхности Земли будет меняться количественно: возрастет концентрация газов с малой молярной массой, например водорода и гелия.

У поверхности воздух представляет собой смесь газов:  $N_2$  — 78,08%,  $O_2$  — 20,95%,  $CO_2$  — 0,03%, инертные газы — 0,94%. Посмотрим, как изменится относительное количество кислорода к азоту в изотермической атмосфере ( $T = 300 \text{ К}$ ) на высоте 10 км.

$$\begin{aligned} \frac{n(O_2)}{n(N_2)} &= \frac{n_0(O_2)}{n_0(N_2)} \exp\left[-\frac{(\mu_{O_2} - \mu_{N_2})gh}{RT}\right] = \\ &= \frac{0,21}{0,78} e^{-0,16} = 0,27 e^{-0,16} = 0,23. \end{aligned}$$

Отношение концентраций кислорода и азота уменьшится от 0,27 до 0,23. Наш расчет справедлив лишь для изотермической атмосферы и сравнительно небольших высот, для которых ускорение свободного падения изменяется незначительно:  $g = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$ .

## Политропная модель атмосферы

Все мы летали на самолетах и слышали объявления экипажа, что самолет летит на высоте 10 000 м и температура за бортом  $-50$  градусов по Цельсию. Стало быть, для таких высот модель изотермической атмосферы не годится, и в этом разделе мы вспомним термодинамику и построим более реалистическую модель политропной атмосферы. За основу возьмем эмпирические формулы для изменения с высотой  $h$  температуры  $T$  и давления  $p$  атмосферы, описывающие экспериментальные данные. В так называемой *международной стандартной атмосфере* (МСА), определенной международными соглашениями, приняты следующие параметры, представляющие среднегодовое и среднеширотное состояние атмосферы нашей планеты. Температура на уровне моря принимается равной  $15^\circ\text{C}$ , т. е.  $T_0 = 288\text{ K}$ , а давление  $p_0 = 101\,325\text{ Па}$  (760 ммрт. ст.). На высоте 11 км температура принимается равной  $-56,5^\circ\text{C}$ , т. е.  $T_{11} = 216,5\text{ K}$ , а давление  $p_{11} = 22\,632\text{ Па}$ . Градиент температуры по вертикали считается постоянным и равен  $-6,5\text{ K/км}$ . Тогда эмпирические формулы для зависимости температуры и давления МСА от высоты выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \beta h, \quad \beta \approx -6,5\text{ K/км}; \\ p &= p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{5,253}. \end{aligned} \quad (13.78)$$

Эти уравнения применимы для высот, меньших 11 км. Как мы сейчас убедимся, они следуют из модели атмосферы, в которой за основу берется уравнение так называемого *политропного* процесса  $pV^n = \text{const}$ . Если показатель политропы  $n = 1$ , мы имеем дело с изотермическим процессом, если  $n = \gamma$ , то это адиабатный процесс. Показатель политропы найдем, сравнив теоретические результаты с формулами (13.78).

Схема вычислений та же самая, как при выводе барометрической формулы. На начальном этапе мы имеем то же самое уравнение (13.72) механического равновесия столба воздуха, вес которого компенсируется разностью давлений на его нижнем и верхнем слое. Предполагая, что воздух — идеальный газ, мы точно так же выражаем его плотность через термодинамические параметры с помощью уравнения Клапейрона—Менделеева и получаем то же самое уравнение (13.74). А вот на следующем этапе мы отклоняемся от проложенного маршрута и используем связь давления и температуры в политропном процессе: если  $p \propto 1/V^n$ , а  $V \propto T/p$ , то

$$p = p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (13.79)$$

или

$$\frac{dp}{p} = \frac{n}{n-1} \frac{dT}{T}. \quad (13.80)$$

Комбинируя уравнения (13.74) и (13.80), получаем скорость падения температуры с высотой:

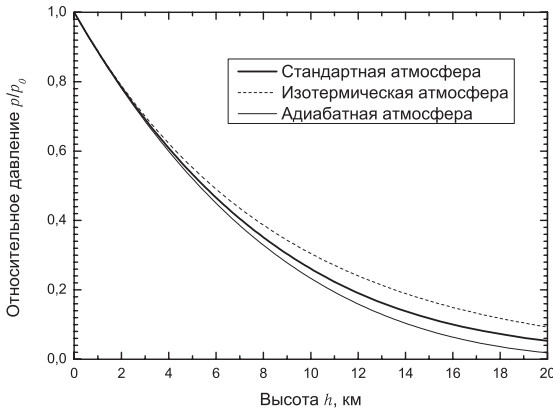
$$\beta = \frac{dT}{dh} = -\frac{n-1}{n} \frac{\mu g}{R}. \quad (13.81)$$

Сравнивая (13.79) с (13.82), находим показатель политропы:

$$\frac{n}{n-1} = 5,253; \quad n = 1,235. \quad (13.82)$$

Средняя молярная масса воздуха равна  $\mu = 28,98\text{ г/моль}$ . Тогда из (13.81) находим величину градиента температуры в нашей модели:

$$\beta = \frac{dT}{dh} = -\frac{0,235 \times 28,98 \cdot 10^{-3} \times 9,81}{1,235 \times 8,31} = -6,53 \cdot 10^{-3}\text{ K/м} = -6,51\text{ K/км}. \quad (13.83)$$



**Рис. 13.10.** Зависимость от высоты давления воздуха для трех разных моделей атмосферы. Температура на уровне моря принята равной  $t_0 = 15^\circ\text{C}$ . Для стандартной атмосферы до высоты  $h = 11$  км применяются формулы политропной атмосферы, начиная с 11 км и до 20 км верна барометрическая формула для изотермической атмосферы

Это превосходно согласуется с (13.78). Таким образом, эмпирические формулы для стандартной атмосферы соответствуют политропной атмосфере с показателем политропы  $n = 1,235$ .

К модели политропной атмосферы близка модель адиабатической атмосферы<sup>1</sup>. В ее основе лежит простая физическая картина. Конвекционные потоки в атмосфере постоянно перемещают воздух из нижних слоев атмосферы в высокие, и наоборот. Поднимаясь в высокие слои с низким давлением, воздух расширяется. Так как воздух плохой проводник теплоты, можно считать, что при этом расширении нет теплообмена со средой, т. е. расширение происходит адиабатно. Стало быть, воздух при расширении остывает. Наоборот, опускаясь в нижние слои атмосферы, воздух адиабатно сжимается и нагревается. Показатель адиабаты для воздуха равен  $n = \gamma = 7/5 = 1,4$ , и формула (13.83) дает более быстрое падение температуры с высотой:  $\beta = -9,8$  К/км. Ферми относит различие на счет процессов конденсации водяного пара при расширении воздуха, которые в его модели не учтены. Мы видим, что модель политропной атмосферы работает более чем удовлетворительно. В технике политропными процессами описывается работа многих тепловых машин. Для давления в адиабатной атмосфере получается зависимость

$$p = p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3.5}. \quad (13.84)$$

Напомним, что формулы (13.78) для стандартной атмосферы справедливы до высот  $h = 11$  км. Далее, до высоты 20 км, температура атмосферы остается постоянной (так называемая *тропопауза* — переходный слой между тропосферой и стратосферой). В этом интервале применяем барометрическую формулу для изотермической атмосферы с температурой  $T_{11}$ :

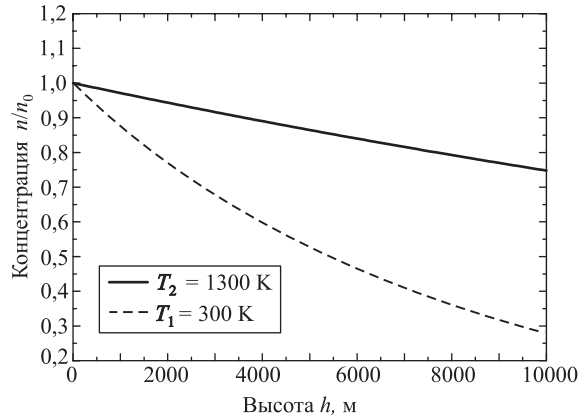
$$p = p_{11} \exp \left( \frac{-\mu g (h - h_{11})}{RT_{11}} \right). \quad (13.85)$$

Графики на рис. 13.10 представляют изменение давления с высотой для разных моделей атмосферы — изотермической, политропной и адиабатной.

## Распределение Больцмана

Для сравнительно небольших высот порядка 5–6 км давление воздуха не слишком отличается от результатов в модели изотермической атмосферы, поэтому мы

<sup>1</sup> Э. Ферми. Термодинамика. Харьков: Изд-во Харьковского университета. 1969. С. 29–30.



**Рис. 13.11.** Зависимость концентрации молекул кислорода от высоты при разных температурах:  $T_1 = 300$  K и  $T_2 = 1300$  K

возвращаемся к барометрической формуле. Число молекул в единице объема зависит от высоты  $h$  и температуры  $T$ , причем обе переменные входят в показатель экспоненты. Уравнение (13.77) можно записать в виде:

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0gh}{k_B T}\right), \quad (13.86)$$

где  $m_0$  — масса одной молекулы газа. При этом выражение  $m_0gh$ , стоящее в числителе, есть не что иное, как потенциальная энергия одной молекулы в поле силы тяжести Земли. Поэтому можно говорить, что мы имеем распределение молекул идеального газа по значениям потенциальной энергии. При этом чем больше потенциальная энергия, тем меньше таких молекул. В знаменателе показателя степени стоит  $k_B T$  — величина, пропорциональная средней энергии молекулы. Если  $T$  велико, то энергия молекул (энергия теплового движения) тоже велика. Значение экспоненциального множителя при увеличении  $T$  будет возрастать. На рисунке 13.11 показаны кривые концентрации молекул кислорода  $O_2$  на разных высотах при двух различных температурах  $T_1 = 300$  K и  $T_2 = 1300$  K (последний случай, конечно, нереален и используется лишь как иллюстрация).

Видно, что число частиц в единице объема при большой температуре медленнее убывает с высотой. При уменьшении температуры растет доля частиц, располагающихся на меньшей высоте. А при  $T = 0$  все частицы расположились бы на поверхности Земли. Этот факт имеет простое физическое объяснение. Каждое конкретное распределение молекул по высоте устанавливается в результате действия двух тенденций:

- 1) притяжение молекул к Земле (потенциальная энергия  $m_0gh$ ) стремится расположить их на поверхности Земли;
- 2) тепловое движение (характерное значение кинетической энергии  $k_B T$ ) стремится разбросать молекулы по всем высотам равномерно.

Обозначив  $E_p = m_0gh$ , получим

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right). \quad (13.87)$$

Молекулы располагаются преимущественно там, где меньше их потенциальная энергия. Это согласуется с общим принципом, которому подчиняется природа. Всякая система стремится занять положение с наименьшей потенциальной энергией. Частицы будут с большей вероятностью располагаться в тех точках пространства, где потенциальная энергия меньше.

Больцман доказал, что такое распределение осуществляется в поле любых сил, а не только в гравитационном поле, и для любых частиц (не только для молекул идеального газа). Поэтому распределение (13.87), где  $n$  — концентрация частиц с потенциальной энергией  $E_p$ , называется *распределением Больцмана*.

### 13.5 Распределение Максвелла—Больцмана

Мы установили функцию, определяющую распределение молекул по величине скорости (распределение Максвелла), и зависимость, определяющую распределение молекул по значениям потенциальной энергии (распределение Больцмана). Оба распределения можно объединить в один закон *Максвелла—Больцмана*.

Рассмотрим бесконечно малый объем  $d^3r$  газа, расположенный в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$  в большой системе, представляющей идеальный газ при постоянной температуре во внешних силовых полях. Число молекул в выделенном объеме  $n(\vec{r})d^3r$ . Поскольку объем невелик, в его пределах концентрацию частиц можно считать постоянной. Это означает, что выполнено условие справедливости распределения Максвелла. Тогда число молекул  $dN$ , имеющих скорости от  $\vec{v}$  до  $\vec{v} + d\vec{v}$ , равно

$$dN = An(\vec{r}) \exp\left(-\frac{m_0v^2}{2k_B T}\right) d^3v d^3r. \quad (13.88)$$

Подставляя сюда концентрацию молекул  $n(\vec{r})$ , определенную распределением Больцмана (13.87), находим

$$dN = B \exp\left(-\frac{E_p + m_0v^2/2}{k_B T}\right). \quad (13.89)$$

Поскольку выражение

$$E = E_p + \frac{m_0v^2}{2} \quad (13.90)$$

представляет собой полную энергию частицы во внешнем потенциальном силовом поле, мы пришли к обобщенному *распределению Максвелла—Больцмана по энергиям* молекул:

$$dN = N \frac{\exp(-E/k_B T) d^3r d^3v}{\int \exp(-E/k_B T) d^3r d^3v}, \quad (13.91)$$

где  $N$  — полное число частиц в системе, а  $dN$  — число частиц с координатами между  $\vec{r}$  и  $\vec{r} + d\vec{r}$  и (одновременно) со скоростями между  $\vec{v}$  и  $\vec{v} + d\vec{v}$ . Интеграл в знаменателе обеспечивает условие нормировки  $\int dN = N$ .

#### Распределение по энергиям для многоатомных молекул

Если учесть сложную структуру молекул, т.е. наличие у нее не только поступательных, но и вращательных и колебательных степеней свободы, то полная

энергия представится в виде суммы кинетической  $E_k$  и потенциальной  $E_p$  энергий, а кинетическая энергия, в свою очередь, складывается из поступательной, вращательной и колебательной частей:

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p, \\ E_k &= E_{\text{пост}} + E_{\text{вр}} + E_{\text{кол}}. \end{aligned} \quad (13.92)$$

Например, двухатомная молекула (скажем,  $\text{H}_2$ ) имеет шесть степеней свободы:

$$E_{\text{пост}} = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 v_x^2}{2} + \frac{m_0 v_y^2}{2} + \frac{m_0 v_z^2}{2}, \quad (13.93)$$

$$E_{\text{вр}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\omega_x^2}{2} + \frac{I\omega_y^2}{2}, \quad (13.94)$$

$$E_{\text{кол}} = \frac{m_0 \dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad (13.95)$$

где  $k$  — коэффициент, характеризующий упругую связь между атомами двухатомной молекулы;  $x$  — смещение атомов от положения равновесия. Распределение Максвелла—Больцмана для многоатомных молекул имеет тот же вид (13.91), где полная энергия дается уравнениями (13.92)–(13.95).

## Скорость химических реакций

У химиков есть эмпирическое правило, что при повышении температуры на  $10^\circ\text{C}$  скорость реакции удваивается. Это — всего лишь грубое обобщение, из него есть множество исключений, но все же в целом оно более или менее верно. Объяснение можно дать на основе распределения Максвелла—Больцмана.

Для протекания многих химических реакций необходимо, чтобы энергия участвующих в них частиц превышала некое пороговое значение, которое мы обозначим  $E_0$ . Чем больше таких частиц, тем выше скорость реакции. Из формул (13.51), (13.52) следует распределение частиц по энергиям. В них надо лишь выразить скорость частицы  $v$  через ее кинетическую энергию  $E$  ( $v = \sqrt{2E/m_0}$ ) и учесть, что  $dv = dE/\sqrt{2m_0E}$ . В результате находим:

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E}{k_B T}} e^{-E/k_B T} \frac{dE}{k_B T}. \quad (13.96)$$

Отсюда находим число частиц с энергией  $E \geq E_0$ :

$$\begin{aligned} N(E \geq E_0) &= N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{E_0}^{\infty} \sqrt{\frac{E}{k_B T}} e^{-E/k_B T} \frac{dE}{k_B T} = \\ &= N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{E_0/k_B T}^{\infty} dx \sqrt{x} e^{-x}, \end{aligned} \quad (13.97)$$

где мы сделали замену переменных интегрирования  $E = xk_B T$ .

Для численных оценок мы примем пороговую энергию равной энергии возбуждения колебаний молекулы:  $E_0 \sim 6 \cdot 10^{-20}$  Дж. Тогда для комнатной температуры  $T_1 = 300$  К получаем величину  $E_0/k_B T_1 \sim 14,5$ , а для температуры  $T_2 = 310$  К это отношение равно

$E_0/k_B T_2 \sim 14,0$ . Числа частиц, участвующих в реакции, определяются соотношениями:

$$N_1(E \geq E_0) \sim N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{14,5}^{\infty} dx \sqrt{x} e^{-x} \approx 2,24 \cdot 10^{-6} N,$$

$$N_2(E \geq E_0) \sim N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{14,0}^{\infty} dx \sqrt{x} e^{-x} \approx 3,63 \cdot 10^{-6} N,$$

$$\frac{N_2(E \geq E_0)}{N_1(E \geq E_0)} \approx 1,6. \quad (13.98)$$

Действительно, повышение температуры всего на 10 градусов привело к увеличению на 60% числа частиц, энергия которых превышает пороговое значение.

### 13.6 Адиабатный процесс в молекулярно-кинетической теории

В этом разделе мы снова устанавливаем связь между термодинамикой и молекулярно-кинетическим подходом. Рассмотрим одноатомный идеальный газ, находящийся под поршнем в цилиндре объемом  $V$ . Материалы цилиндра и поршня считаем непроницаемыми для теплоты. Найдем зависимость давления газа от его объема при медленном передвижении поршня.

Рассмотрим упругое столкновение молекулы со скоростью  $v$  с поршнем, имеющим скорость  $u \ll v$ . В курсе механики мы получили следующую формулу (4.79) для скорости  $v_f$  молекулы после такого столкновения:

$$v_f = \sqrt{v^2 + 4u(u - v \cos \alpha)}, \quad (13.99)$$

где  $\alpha$  — угол между скоростями молекулы и поршня. Отсюда следует выражение для изменения кинетической энергии молекулы в результате столкновения:

$$\Delta E = \frac{m(v_f^2 - v^2)}{2} = 2mu(u - v \cos \alpha) \approx -2mv_z u. \quad (13.100)$$

Здесь мы пренебрегли квадратом скорости  $u$  поршня и выбрали ось  $z$  вдоль оси цилиндра. Если скорости молекулы и поршня направлены навстречу друг другу, у них будут разные знаки и кинетическая энергия молекулы возрастет. Если же молекула «убегает» от поршня, знаки у скоростей одинаковы и приращение кинетической энергии получается отрицательным.

Пусть  $n(v_z)$  — функция распределения молекул по проекции скорости  $v_z$ , т. е.  $n(v_z)dv_z$  есть доля молекул, имеющих проекцию скорости на ось  $z$ , заключенную в интервале от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$ . Но за время  $dt$  до поршня площадью  $S$  успеют долететь лишь те, что находятся в объеме  $v_z S dt$ . Отсюда получаем число  $dN$  молекул, успевших столкнуться с поршнем за время  $dt$  и проекции скоростей которых попадают в указанный интервал:

$$dN = N n(v_z) v_z dv_z \frac{S dt}{V}. \quad (13.101)$$

Здесь  $N$  — полное число молекул в цилиндре. С учетом (13.100) записываем теперь полное изменение кинетической энергии всех молекул в цилиндре:

$$dE = \int (-muv_z) dN = -Nmu \frac{S dt}{V} \int n(v_z) v_z^2 dv_z = -\frac{NSmu}{V} \langle v_z^2 \rangle dt. \quad (13.102)$$

Средние значения квадратов всех проекций скоростей равны между собой, так что  $\langle v_z^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3$ , и (13.102) записывается как

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{NSmu}{3V} \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{Su}{V} E, \quad (13.103)$$

где  $E$  — средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул. Основное уравнение МКТ (10.16) связывает эту энергию с объемом и давлением газа формулой  $pV = 2E/3$ , так что (13.102) переписывается в виде

$$\frac{d(pV)}{dt} = -\frac{2}{3} Sup. \quad (13.104)$$

Произведение площади поршня на его скорость дает нам изменение объема газа в единицу времени ( $u = dV/dt$ ), и мы получаем связь давления и объема в адиабатном процессе:

$$d(pV) = -\frac{2}{3} p dV. \quad (13.105)$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение

$$V dp = -\frac{5}{3} p dV, \quad (13.106)$$

интегрирование которого дает окончательный ответ:

$$pV^{5/3} = \text{const}. \quad (13.107)$$

Мы получили уравнение (11.30) адиабатного процесса  $pV^\gamma = \text{const}$  с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$  для одноатомного газа, исходя из чисто механической модели и молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Поместим теперь в цилиндр двухатомный газ. Вращательное движение молекул не претерпевает изменений при столкновении с поршнем, поэтому уравнение

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{NSmu}{3V} \langle v^2 \rangle \quad (13.108)$$

для изменения кинетической энергии сохраняет силу. Только теперь полная кинетическая энергия  $E$  поровну распределяется не по трем поступательным степеням свободы, а по пяти, включая и две вращательные. Тогда на долю средней кинетической энергии поступательного движения придется три пятых полной энергии, из-за чего изменится связь полной энергии со среднеквадратичной скоростью:

$$N \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{5} E. \quad (13.109)$$

Тогда уравнение (13.108) примет вид:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{5} \frac{Su}{V} E. \quad (13.110)$$

Связь полной энергии с давлением будет иной:

$$pV = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{5} E \right) = \frac{2}{5} E,$$

откуда

$$d(pV) = -\frac{2}{5} p dV, \quad (13.111)$$

что приводит к закону

$$pV^{7/5} = \text{const} \quad (13.112)$$

для адиабатического процесса с двухатомным газом.



## Контрольные вопросы

- Представьте себе, что Вы периодически встряхиваете в ладони шесть монет и бросаете их на стол. Какова вероятность выпадения шести «решек»?
- Шарообразный баллон с газом в состоянии теплового равновесия имеет радиус  $R$ . Определить среднее и среднеквадратичное расстояние от молекул до центра шара
- Дана группа частиц со следующим распределением по скоростям ( $N_i$  — число частиц, имеющих скорость  $v_i$ ):

$N_i$	2	4	6	8	2
$v_i$ (см/с)	1	2	3	4	5

Каковы характерные скорости этой системы: 1) среднеквадратичная  $v_{\text{кв}}$ , 2) средняя арифметическая  $\langle v \rangle$  и 3) наиболее вероятная  $v_{\text{вер}}$ ?

- При какой температуре газа число молекул со скоростями в заданном интервале  $v_0, v_0 + dv$  будет максимально? Масса молекулы равна  $m_0$ .
- При какой температуре смеси азота и кислорода наиболее вероятные скорости молекул азота и кислорода отличаются друг от друга на  $\Delta v = 30$  м/с?
- Покажите, что среднеквадратичная скорость движения молекулы газа определяется выражением  $v_{\text{кв}} = \sqrt{3p/\rho}$ , где  $p$  — давление газа, а  $\rho$  — его плотность.
- В открытом космосе плотность вещества приблизительно равна одному атому в  $1 \text{ см}^3$  (в основном это атомы водорода), а температура равна приблизительно 3,4 К. Вычислите среднеквадратичную скорость движения этих атомов водорода и их давление. Сравните со случаем нормального давления.
- Можно ли определить температуру вакуума?
- При какой температуре газа среднеквадратичная скорость молекул водорода отличается от их наиболее вероятной скорости на  $\Delta v = 400$  м/с?
- Космический корабль входит в атмосферу Земли со скоростью около 8 км/с. Молекулы (пусть это будет азот  $\text{N}_2$ ) ударяются о нос космического корабля с такой же скоростью. Какой температуре соответствует такое же значение среднеквадратичной скорости движения молекул?
- Чему равно среднеарифметическое значение проекции скорости  $\langle v_x \rangle$  молекул газа, если масса молекулы  $m_0$ , а температура газа  $T$ ?
- Чему равно среднеквадратичное значение проекции скорости  $\sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$  молекул газа, если масса молекулы  $m_0$ , а температура газа  $T$ ?
- Пользуясь распределением Максвелла и вычисленными в гл. 6 значениями космических скоростей, объясните, почему водород, если он когда-то был в атмосфере Земли, все-таки улетучился?
- Для простоты будем считать, что наша атмосфера состоит из 79% азота и 21% кислорода и имеет постоянную температуру  $T = 300$  К. Каким будет процентный состав атмосферы на высоте 10 км (ср. конец раздела 13.4).
- Почему атмосфера, подобная земной, не может существовать на Луне? (Ускорение свободного падения на Луне  $g_{\text{Л}} = 1,6 \text{ м/с}^2$ , радиус Луны  $R_{\text{Л}} = 1740$  км.)
- Используя (13.96), найти наиболее вероятную энергию  $E_{\text{вер}}$ . Соответствует ли она наиболее вероятной скорости, т. е. выполняется ли равенство  $E_{\text{вер}} = m_0 v_{\text{вер}}^2 / 2$ ?
- Используя (13.96), найти среднее значение энергии  $\langle E \rangle$ . Какой скорости она соответствует?

## Глава 14

# Явления переноса

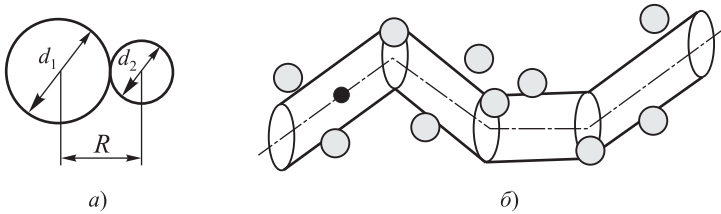
В предыдущих главах мы имели дело с равновесными системами. В результате хаотического движения молекул и перераспределения энергии между ними в различных частях системы устанавливаются равновесные температура, давление, концентрация частиц.

В реальных системах, однако, возникают ситуации, когда между ее частями существует перепад (градиент) температур, концентрации частиц, массы, импульса. Такая система не находится в состоянии равновесия и в ней существуют потоки соответствующей физической величины. Направление этих потоков таково, что они способствуют стремлению системы к состоянию термодинамического равновесия. Важно, что перенос физической величины происходит тоже за счет хаотического движения молекул, а не из-за направленного движения, подобного течению воды по трубам. Такого рода процессы называются *явлениями переноса*, они ответственны, как мы увидим в этой главе, за диффузию частиц, теплопроводность тел, вязкость жидкости. Здесь мы пользуемся молекулярно-кинетическим подходом и наша цель — понять, каким образом блуждающие молекулы переносят информацию в другие части системы.

### 14.1 Столкновения молекул

Говоря об идеальном газе, мы исходили из того, что молекулы не взаимодействуют между собой. На самом деле предполагалось, конечно, отсутствие потенциальной энергии взаимодействия между ними. Упругие столкновения между молекулами и молекул со стенками обязательно должны происходить хотя бы потому, что иначе будет непонятен механизм, приводящий к закону равномерного распределения энергии по степеням свободы, потому что иначе нельзя будет говорить о температуре системы, давлении в ней и т. п. Столкновения молекул происходят случайно. Они приводят к изменению направления и величины скорости частиц, но не меняют распределения молекул по скоростям и координатам в равновесных системах, о чем мы уже говорили в предыдущей главе.

Возникает вопрос: а всегда ли молекулы будут сталкиваться друг с другом? Ведь молекулы очень малы, а расстояния между ними в идеальном газе на порядок больше их линейных размеров. Быть может, для сосудов малых размеров



**Рис. 14.1.** Столкновение двух молекул (а) и траектория движения выделенной молекулы газа (б). Направление движения молекулы меняется, когда какая-то из молекул среды окажется на расстоянии  $r \leq R$  от линии ее движения

они летят без соударений от стенки к стенке? Подсчитаем, сколько раз в единицу времени одна молекула может столкнуться с другими и какое расстояние она пролетает в среднем между столкновениями.

Прежде чем перейти к вычислениям, примем простейшую модель для молекулы. Будем представлять их в виде упругих шариков. Столкновение молекул диаметрами  $d_1$  и  $d_2$  происходит, если центр одной из них окажется на расстоянии  $r \leq R = (d_1 + d_2)/2$  от линии движения другой (рис. 14.1,а). Если представить себе, что молекула 1 налетает на молекулу 2, то столкновение произойдет, если первая молекула попадет в сферу радиусом  $R = (d_1 + d_2)/2$ , описанную вокруг второй молекулы. Площадь сечения этой сферы  $\sigma = \pi R^2 = \pi(d_1 + d_2)^2/4$ . Величина  $R$  называется *эффективным радиусом взаимодействия* молекул 1 и 2, а  $\sigma$  — *эффективным сечением взаимодействия* этих молекул. Для одинаковых молекул диаметром  $d$  имеем  $R = d$  и  $\sigma = \pi d^2$ . В результате столкновений траектории движения молекул представляют собой ломаные линии (рис. 14.1,б).

За время между двумя последовательными столкновениями молекула пролетает некоторый путь  $l$ . Разумеется, для каждой отдельной молекулы дело чистой случайности, сколь далеко ей удастся продвинуться без столкновений. Но усредняя  $l$  по всем молекулам системы, мы получим физическую величину  $\lambda = \langle l \rangle$ , называемую *длиной свободного пробега*. Ее статистический смысл (или, если хотите, определение) таков: отношение малого отрезка длиной  $dx$  к  $\lambda$  дает вероятность столкновения  $dW = dx/\lambda$  на пути  $dx$ . Пусть  $P(x)$  — вероятность пролететь без столкновений расстояние  $x$ . Тогда  $P(x + dx) \approx P(x) + P'(x)dx$  — вероятность пролететь без столкновений расстояние  $x + dx$  (здесь  $P'(x)$  — производная функции  $P(x)$  по переменной  $x$ ). Последнее событие складывается из двух независимых событий: 1) частица пролетела без столкновений расстояние  $x$ , вероятность чего равна  $P(x)$ , и 2) также без столкновений преодолела еще и маленький отрезок пути  $dx$ , вероятность чего равна  $1 - dx/\lambda$ . По теореме об умножении вероятностей имеем тогда:

$$P(x) + P'(x)dx = P(x) \left( 1 - \frac{dx}{\lambda} \right).$$

Отсюда следует уравнение для вероятности  $P(x)$ :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = -\frac{dx}{\lambda}.$$

Поскольку вероятность преодолеть нулевое расстояние без столкновений равна единице, имеем дополнительно начальное условие  $P(0) = 1$ . Интегрируя дифференциальное уравнение, находим окончательно

$$P(x) = \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right). \quad (14.1)$$

Как видно, чем больше путь  $x$ , тем меньше вероятность преодолеть его без столкновений.

Убедимся теперь, что параметр  $\lambda$  действительно является длиной свободного пробега. Вычислим, с какой вероятностью молекула пролетит без столкновений расстояние  $l$ . Это значит, что частица пролетела без столкновений расстояние  $x = l$  (вероятность чего есть  $P(l)$ ) и столкнулась с другой частицей непосредственно за этим — на малом отрезке длиной  $dl$  (вероятность чего можно найти как  $dl/\lambda$ ). Вероятность  $dw$  такого события по теореме умножения вероятностей равна  $dw = P(l) dl/\lambda$ . Находим тогда среднее значение  $l$ :

$$\langle l \rangle = \int l dw = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) l dl = \lambda. \quad (14.2)$$

Не следует думать, что вероятность преодолеть расстояния, превышающие  $\lambda$ , равна нулю: часть молекул может пролететь очень далеко, но лишь малая их часть. При  $x = \lambda$ , как следует из (14.1), эта вероятность равна  $P(\lambda) = 1/e \approx 0,368$ , т. е. 36,8% частиц испытают столкновения на этом пути. При длине пути  $x = 2\lambda$  получаем  $P(2\lambda) = 1/e^2 \approx 0,135$ , т. е. столкновения суждены уже для 86,5% частиц, при  $x = 3\lambda$  в столкновениях примет участие уже 95% частиц, потому что  $P(3\lambda) = 1/e^3 \approx 0,0498$ .

Чтобы определить среднее число столкновений  $\nu$  одной молекулы с другими в единицу времени, сделаем следующие допущения.

- Все молекулы одинаковы, т. е. мы не рассматриваем смеси газов.
- Все молекулы, за исключением той, за которой мы наблюдаем, неподвижны. В дальнейшем мы покажем, как избавиться от этого заведомо неверного предположения.
- При столкновениях скорость  $v_{от}$  молекулы не меняется. Это предположение, в сущности, того же уровня, что и предыдущее: при упругом столкновении с препятствием, которое остается неподвижным, модуль скорости действительно не меняется. (Смысл подстрочного индекса «от» станет ясен в дальнейшем.)

Путь нашей молекулы диаметром  $d$  остается прямолинейным до тех пор, пока ей не встретится неподвижная молекула, чей центр окажется от линии движения на расстоянии, меньшем  $R = d$ . После этого молекула сменит направление движения и будет двигаться прямолинейно до нового соударения. За интервал времени  $\Delta t$  молекула пройдет (ломаный) путь  $v_{от}\Delta t$  и столкнется со всеми молекулами, попавшими в (ломаный) цилиндр радиусом  $d$  и площадью основания  $\sigma = \pi d^2$  (см. рис. 14.1,б). Объем этого цилиндра равен  $\pi d^2 v_{от}\Delta t$ . Если  $n$  — концентрация молекул в системе (их число в единице объема), то легко найти количество «неподвижных» молекул в цилиндре, т. е. число столкновений  $\Delta N$ :

$$\Delta N = n\pi d^2 v_{от}\Delta t.$$

Отсюда следует частота столкновений (число столкновений в единицу времени):

$$\nu = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \pi d^2 v_{\text{от}} n = \sigma v_{\text{от}} n. \quad (14.3)$$

Избавимся теперь от последствий предположения о неподвижности молекул. Пусть мы следим за молекулой 1 со скоростью  $\vec{v}_1$ , и она сталкивается с молекулой 2, имеющей скорость  $\vec{v}_2$ . В системе отсчета, связанной со второй молекулой, она неподвижна, зато первая молекула имеет скорость  $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ . Ясно теперь, что именно среднее значение *относительной* скорости молекул играет роль скорости  $v_{\text{от}}$ , использованной нами при выводе соотношения (14.3) для частоты столкновений. Имеем тогда:

$$v_{\text{от}}^2 = \langle \vec{v}_{12}^2 \rangle = \langle \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta_{12} \rangle, \quad (14.4)$$

где  $\theta_{12}$  — угол между направлениями движения молекул. Из-за хаотичности движения этот угол равновероятно принимает любые значения и среднее значение косинуса равно нулю. А усреднение квадратов скоростей приводит к появлению среднеквадратичной скорости молекул  $v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle \vec{v}_1^2 \rangle} = \sqrt{\langle \vec{v}_2^2 \rangle}$ , уже знакомой нам по предыдущей главе. Получаем в итоге, что  $v_{\text{от}} = \sqrt{2} v_{\text{кв}}$ , и формула (14.3) записывается в окончательном виде:

$$\nu = \sqrt{2} \pi d^2 v_{\text{кв}} n = \sqrt{2} \sigma v_{\text{кв}} n. \quad (14.5)$$

Заметим, что, перейдя от скорости молекулы к ее среднеквадратичной скорости, мы на самом деле избавились и от нашего третьего предположения, поскольку  $v_{\text{кв}}$  постоянна при заданной температуре.

Зная частоту столкновений, можно найти длину свободного пробега. Действительно, время между двумя последовательными соударениями  $\tau = 1/\nu$ , и за это время частица проходит путь  $\lambda = v_{\text{кв}} \tau$ . Таким образом,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}. \quad (14.6)$$

Поскольку при постоянной температуре концентрация частиц пропорциональна давлению, с ростом давления длина свободного пробега уменьшается. Это и понятно, так как уменьшается среднее расстояние между частицами. На самом деле молекула не является твердым шариком, и ее диаметр  $d$  — величина не совсем постоянная: он уменьшается при увеличении температуры, хотя и незначительно. Поэтому длина свободного пробега слегка растет с повышением температуры.

Следует отметить, что среднее расстояние между частицами далеко не совпадает с длиной свободного пробега. Ранее мы оценили диаметр молекулы водяного пара  $d = 3 \cdot 10^{-10}$  м и среднее расстояние между молекулами при нормальных условиях  $L = 3 \cdot 10^{-9}$  м. Теперь мы можем найти концентрацию молекул  $n = 1/L^3 \approx 4 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>. Подставляя найденное  $n$  в выражение для длины свободного пробега, находим  $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-8}$  м, что в 200 раз больше диаметра молекулы и в 20 раз — среднего расстояния между молекулами. Для полноты картины оценим также частоту столкновений. Кинетическая энергия поступательного движения молекулы  $E = 3k_B T/2 \approx 6 \cdot 10^{-21}$  Дж. Зная массу молекулы воды  $m = 18 \cdot 10^{-3}$  (кг/моль)/ $N_A \approx 3 \cdot 10^{-26}$  кг, получаем оценку

среднеквадратичной скорости  $v_{\text{кв}} = \sqrt{2E/m} \approx 630$  м/с. Наконец, определяем  $\nu = v_{\text{кв}}/\lambda \approx 10^{10}$  с<sup>-1</sup>. Иначе говоря, молекула испытывает 10 млрд соударений в секунду! Линейный размер сосуда, содержащего один литр газа, равен  $l = 10$  см = 0,1 м. При скорости 630 м/с молекула могла бы пролететь путь от стенки до стенки за время  $t = l/v_{\text{кв}} = 0,1/630 \approx 1,6 \cdot 10^{-4}$  с, испытав за это время  $N = \lambda l = 0,1/6 \cdot 10^{-8} = 1,7 \cdot 10^6$  столкновений с другими молекулами.

Однако при понижении давления до  $p = 0,1$  Па при температуре  $T = 300$  К мы получаем из уравнения Клапейрона—Менделеева иную величину концентрации молекул идеального газа:  $n = p/(k_B T) \approx 2 \cdot 10^{19}$ , что в два миллиона раз меньше концентрации молекул при нормальных условиях. Соответственно, в такое же число раз возрастает длина свободного пробега ( $\lambda \approx 10$  см) и уменьшается число столкновений при пролете молекулы от стенки до стенки сосуда ( $N \approx 1$ ). Если длина свободного пробега гораздо больше размеров сосуда, то такой сильно разреженный газ называют *техническим вакуумом*. Процессы переноса в таком газе замедленны. Например, теплоизолирующие свойства технического вакуума используются в конструкции термоса, где расстояние между двойными стенками имеет величину порядка миллиметра, а воздух между ними откачан до давления порядка десятых долей паскаля.

У нас осталось без обсуждения первое предположение об одинаковости всех молекул. Оно было нужно не по принципиальным соображениям, а для упрощения вывода и окончательных выражений. Если это не так, если мы рассматриваем смесь газов, то компоненты имеют разные концентрации частиц, различные среднеквадратичные скорости, а их молекулы — разные массы. Как следствие, изменится формула для средней длины свободного пробега, причем результаты будут отличаться для различных сортов молекул.

**Задача 14.69.** Как изменится формула (14.6) для средней длины свободного пробега молекул, если они представляют собой плоские диски,двигающиеся в материале тонкой пленки, будучи не в состоянии из нее вылететь?

**Решение.** Как и прежде, для столкновения молекул диаметрами  $d_1$  и  $d_2$  они должны сблизиться на расстояние  $R = (d_1 + d_2)/2$ . Поэтому при движении молекулы по плоскости пленки она заденет все другие молекулы, которые попадут в ломаный прямоугольник (в отличие от цилиндра в трехмерном случае) шириной  $2R$  и длиной  $v_{\text{от}} \Delta t$ . Площадь этого прямоугольника  $S = (d_1 + d_2)v_{\text{от}} \Delta t$ . При поверхностной концентрации  $n$  молекул (в этом случае  $n$  — их число на единицу площади) произойдет  $\Delta N = S n$  столкновений. Отсюда для частоты столкновений находим

$$\nu = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \sqrt{2}(d_1 + d_2)v_{\text{кв}}n, \quad (14.7)$$

где мы учли, что, как и прежде, относительная скорость  $v_{\text{от}} = \sqrt{2}v_{\text{кв}}$ . Отсюда длина свободного пробега  $\lambda = v_{\text{кв}}/\nu$  для плоских молекул получается равной

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}(d_1 + d_2)n}. \quad (14.8)$$

При одинаковых молекулах ( $d_1 = d_2 = d$ )

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}dn}. \quad \blacksquare \quad (14.9)$$

**Задача 14.70.** Идеальный газ сжимают: а) изотермически, б) адиабатно. Для обоих случаев найти зависимость от давления длины свободного пробега  $\lambda$  и частоты столкновений  $\nu$ .

**Решение.** Согласно уравнению (14.5) частота столкновений пропорциональна среднеквадратичной скорости  $v_{\text{кв}}$  и концентрации  $n$  молекул ( $\nu \propto v_{\text{кв}}n$ ), а в соответствии с уравнением (14.6) длина свободного пробега обратно пропорциональна концентрации молекул ( $\lambda \propto 1/n$ ). Из уравнения состояния идеального газа, записанного в виде  $p = nk_B T$ , следует, что концентрация молекул пропорциональна давлению и обратно пропорциональна температуре ( $n \propto p/T$ ). Уравнение (13.66) утверждает, что среднеквадратичная скорость пропорциональна квадратному корню из температуры ( $v_{\text{кв}} \propto T^{1/2}$ ). Комбинируя вместе все эти соотношения, получаем

$$\lambda \propto \frac{T}{p}, \quad \nu \propto \frac{p}{\sqrt{T}}. \quad (14.10)$$

При изотермическом процессе  $T = \text{const}$  отсюда следует

$$\lambda \propto p^{-1}, \quad \nu \propto p. \quad (14.11)$$

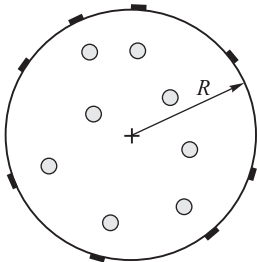
При адиабатном процессе имеем связь давления и температуры:  $T \propto p^{(\gamma-1)/\gamma}$ . Подставляя эту зависимость в (14.10), получаем

$$\lambda \propto p^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \nu \propto p^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}. \quad \blacksquare \quad (14.12)$$

## Свидание в лесу, ежик в тумане и атомная бомба

Идея длины свободного пробега может быть использована для оценки видимости в лесу, в тумане или даже для грубой оценки критической массы урана в атомной бомбе. Можно было бы просто использовать уравнение (14.8), но нам представляется поучительным провести несколько иные рассуждения.

Представьте себе, что у вас назначено свидание в лесу. С какого максимального расстояния  $R$  вы заметите своего партнера (а партнер — вас)? Положим, вы включаете фонарик, чтобы подать ему/ей сигнал. Если не учитывать рассеяние света, то все деревья отбрасывают тени, линейный размер которых можно считать примерно равным диаметру  $d$  деревьев. На рис. 14.2 ваше положение отмечено крестиком, вокруг проведена окружность радиусом  $R$ , деревья показаны кружками, а их тени на окружности отмечены черным. Определим, какую часть окружности покрывают тени. Пусть  $n$  — плотность посадки деревьев (их число на единицу площади). Если  $l$  — среднее расстояние между деревьями, то



**Рис. 14.2.** К оценке видимости в лесу

$n \approx 1/l^2$ . Внутри окружности попадает  $\pi R^2 n$  деревьев. Полная длина тени на окружности равна поэтому  $\pi R^2 n d$ . Мы видим, что полная длина тени растет как квадрат радиуса и при каком-то значении  $R$  превысит длину окружности  $2\pi R$ . Но если вся окружность покрыта тенью, то свет дальше не пройдет. Это значение  $R$  и будет максимальным расстоянием видимости в лесу. Теперь понятно, что оно определяется из равенства  $\pi R^2 n d = 2\pi R$ , т. е. мы получили оценку

$$R \approx \frac{2}{nd} = \frac{2l^2}{d}. \quad (14.13)$$

Для численного примера можно взять значения, исходя из своего жизненного опыта. Скажем, свидание назначено среди березок со средним диаметром ствола  $d = 0,25$  м и средним расстоянием между деревьями  $l = 10$  м. Тогда находим  $R \approx 800$  м.

Установим связь полученного результата с формулой (14.8) для средней длины свободного пробега. У нас одна молекула (световой луч) не имеет размера ( $d_1 = 0$ ), размер прочих молекул равен среднему диаметру ствола ( $d_2 = d$ ) и, наконец, молекулы (стволы) — покоятся, т. е. надо отбросить множитель  $\sqrt{2}$ . Получаем в результате из (14.8) в применении к нашей задаче выражение

$$\lambda = \frac{1}{dn}.$$

Таким образом, найденный нами радиус видимости равен  $R \approx 2\lambda$ . Вероятность того, что луч света преодолеет это расстояние без «столкновений» с деревьями, равна  $P(R) = \exp(-R/\lambda) = e^{-2} = 0,135$ . Иными словами, с вероятностью 86,5% свет будет задержан деревьями.

Свидание в лесу происходило на плоскости. Сейчас мы вернемся в объемный мир. Тот же рисунок изображает теперь сферу радиусом  $R$  и препятствия в виде шариков диаметром  $d$ . Например, мы хотим оценить видимость для ежика, заблудившегося в тумане, и роль деревьев теперь исполняют водяные капли. Если концентрация капель равна  $n$  (их число в единице объема), то внутри сферы находится  $(4\pi/3) R^3 n$  капель. Их тени на сфере представляют собой круги площадью  $\pi d^2/4$ . При максимальном расстоянии видимости тени покрывают всю сферу:

$$\frac{4\pi}{3} R^3 n \frac{\pi d^2}{4} = 4\pi R^2.$$

Отсюда находим расстояние видимости в тумане:

$$R \approx \frac{12}{\pi n d^2}. \quad (14.14)$$

Снова сравним этот результат с формулой (14.6) для длины свободного пробега молекулы в газовой среде, где надо отбросить фактор  $\sqrt{2}$  и положить для эффективного сечения взаимодействия  $\sigma = \pi(d_1 + d_2)^2/4 = \pi(0 + d)^2/4 = \pi d^2/4$ :

$$\lambda = \frac{4}{\pi d^2 n}, \quad R = 3\lambda. \quad (14.15)$$

Вероятность того, что луч света преодолеет путь  $R = 3\lambda$  без столкновений, равна  $P(R) = \exp(-R/\lambda) = e^{-3} = 0,05$ . Стало быть, с вероятностью 95% столкновение на этом пути произойдет.



Получим численную оценку. Наши рассуждения годятся, если размер капель заметно (скажем, на порядок-два) превышает длину световой волны. Так как видимый диапазон имеет длины волн 0,4–0,7 мкм, то для диаметра капель примем оценку  $d \approx 10^{-4}$  м. Пусть концентрация капель  $n \approx 3 \cdot 10^7 \text{ м}^{-3}$  (о происхождении этого числа см. ниже). Тогда получаем для видимости в тумане  $R \approx 12/(\pi \times 3 \cdot 10^7 \times 10^{-8}) \approx 13$  м.

Концентрацию капель мы оценили следующим образом. Давление насыщенного водяного пара при, скажем,  $20^\circ \text{ С}$  ( $T = 293 \text{ К}$ ) равно  $p_n \approx 2,3 \cdot 10^3 \text{ Па}$ . Применяя уравнение Клапейрона—Менделеева, находим плотность водяного пара при 100% влажности:

$$\frac{m}{V} = \frac{p_n \mu_{\text{H}_2\text{O}}}{RT} \approx \frac{2,3 \cdot 10^3 \times 18 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 293} \approx 0,017 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

При резком понижении температуры весь пар конденсируется в капли указанного размера — образуется густой туман. Масса одной капли равна

$$m_{\text{кап}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^3 \approx 520 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \times d^3.$$

Количество образовавшихся капель в объеме  $V$  находим как отношение массы пара  $m$  к массе капли  $m_{\text{кап}}$ . Тогда концентрация капель определится из соотношения:

$$n = \frac{m}{m_{\text{кап}} V} \approx \frac{0,017}{520 d^3} \approx \frac{3,3 \cdot 10^{-5}}{d^3}.$$

При  $d = 10^{-4}$  м получаем использованное выше значение  $n \approx 3 \cdot 10^7 \text{ м}^{-3}$ .

Зависимость расстояния видимости в тумане от размера капель дается, таким образом, соотношением:

$$R = \frac{12}{\pi n d^2} \approx \frac{12d^3}{\pi \times 3,3 \cdot 10^{-5} \times d^2} \approx 1,2 \cdot 10^5 d.$$

При предельно малых капельках с диаметром порядка десяти длин световой волны  $d \sim 10^{-5}$  м видимость сокращается до одного метра. Что называется, «не видно дальше своего носа». При еще меньших размерах капель наша модель становится неверной, так как свет уже нельзя рассматривать как совокупность частиц с ничтожно малым размером. Начинают играть роль эффекты дифракции, и выражение для эффективного сечения взаимодействия света с каплями уже не будет определяться чисто геометрическим сечением капель.

Решенная задача имеет также отношение к вопросу о критической массе изотопа урана-235, применяемого для изготовления атомных бомб. Вместо света в этой задаче мы имеем нейтроны, а вместо капель — ядра  $^{235}\text{U}$ . При столкновении с ядрами нейтроны расщепляют их на осколки, и при этом вылетает еще 3–4 нейтрона. При критическом радиусе  $R_{\text{крит}}$  количество нейтронов не будет уменьшаться и возникнет самоподдерживающаяся цепная реакция — произойдет атомный взрыв. За основу определения критического радиуса можно взять радиус видимости  $R = 12/(\pi n d^2)$ , уменьшенный на коэффициент размножения нейтронов  $k = 3,5$ . Поскольку  $12/(3,5\pi) \approx 1$ , получаем:

$$R_{\text{крит}} \approx \frac{1}{n d^2}.$$

Радиус ядра  $r_{\text{я}} \approx r_0 A^{1/3} \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \times 235^{1/3} \approx 8,6 \cdot 10^{-15}$  м, где  $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-15}$  м — радиус ядра с массовым числом  $A = 1$ , т. е. протона (нейтрона). Поэтому эффективный диаметр взаимодействия равен  $d = 2(r_{\text{я}} + r_0) \approx 2 \cdot 10^{-14}$  м.

В справочнике находим плотность урана:  $\rho_{\text{U}} = 19 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Массу ядра  $^{235}\text{U}$  выражаем через массу протона (нейтрона):

$$m_{\text{U}} = 235 m_p \approx 235 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \approx 3,9 \cdot 10^{-25} \text{ кг/м}^3.$$

Отсюда находим концентрацию ядер  $n = \rho_{\text{U}}/m_{\text{U}} \approx 5 \cdot 10^{28}$  м<sup>-3</sup>. Теперь мы можем вычислить критический радиус:

$$R_{\text{крит}} \approx \frac{1}{5 \cdot 10^{28} \times (2 \cdot 10^{-14})^2} = 0,05 \text{ м}.$$

Критический объем  $V_{\text{крит}} \approx (4\pi/3) R_{\text{крит}}^3 \approx 5,2 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>, а критическая масса  $M_{\text{крит}} = \rho_{\text{U}} V_{\text{крит}} \approx 10$  кг.

Отметим, что мы не выдаем никаких секретов производства ядерного оружия: слишком грубы наши оценки. Единственная наша цель — продемонстрировать еще раз единство законов физики, действующих в самых разнообразных системах.

## 14.2 Законы процессов переноса

Если газ выведен из состояния равновесия, то в нем возникают процессы, стремящиеся вернуть систему в равновесное состояние. Например, разные части системы имеют разные температуры или концентрации частиц. Соответственно, температуры или концентрации стремятся выровняться, что сопровождается передачей тех или иных физических величин от одной части системы к другой. Подобные явления переноса имеют между собой много общего и отличаются физическими характеристиками, которые «переносятся» из одного места в другое.

**Диффузия.** Пусть в системе имеются молекулы, концентрация которых  $n(z)$  зависит от координаты  $z$ . Мысленно поместим в точке с координатой  $z$  квадратик площадью  $S$ , ортогональный оси  $z$ . В системе происходит процесс выравнивания концентрации  $n$  частиц, сопровождающийся их переносом в направлении убывания  $n$ . Эксперимент показал, что поток  $\Phi$  частиц через площадь  $S$  (т. е. число частиц, проходящих чрез  $S$  в единицу времени), равен

$$\Phi = -D \frac{\partial n}{\partial z} S, \quad (14.16)$$

где  $D$  определяется свойствами системы и называется коэффициентом диффузии. Величина  $\Phi$  имеет размерность  $[\Phi] = \text{с}^{-1}$ , размерность концентрации частиц  $[n] = \text{м}^{-3}$ , и поэтому размерность коэффициента диффузии  $[D] = \text{м}^2/\text{с}$ . Отрицательный знак в законе диффузии означает, что поток частиц направлен от больших значений концентрации к меньшим. Действительно, пусть  $n(z)$  — убывающая функция, т. е. концентрация частиц падает с ростом  $z$ . Тогда производная  $n(z)$  отрицательна, а поток  $\Phi$  получается положительным и, следовательно, направлен в сторону увеличения  $z$ .

Если обе части уравнения (14.16) умножить на массу  $m$  диффундирующих молекул, то для потока массы  $M = m\Phi$  получим аналогичное уравнение:

$$M = -D \frac{\partial \rho}{\partial z} S, \quad (14.17)$$

где  $\rho = mn$  — масса диффундирующего вещества в единице объема, т. е. его плотность. Связь (14.16) потока частиц с градиентом  $\partial n / \partial z$  концентрации называется **первым законом Фика**.

Первый закон Фика ничего не говорит о величине коэффициента диффузии, который должен в каждом конкретном случае определяться экспериментально. Поэтому этот закон носит эмпирический характер. Он применим не только для газов, но и для твердых и жидких тел. Следует отметить также, что перенос вещества в газах и жидкостях может осуществляться и механическим путем за счет конвекционных потоков (скажем, за счет ветра в атмосфере или течения в океане). Важно не путать диффузию, которая происходит из-за молекулярного движения, с конвекцией, возникающей вследствие воздействия внешних сил.

Заметим, что если система является смесью, то первый закон Фика записывается точно в такой же форме для каждого из компонентов в отдельности, но коэффициенты диффузии, вообще говоря, различаются. Это значит, что в смеси, скажем, двух газов может случиться так, что концентрация частиц одного из компонентов уже выровнялась, а второго — еще нет.

Второй закон Фика позволяет найти зависимость концентрации диффундирующих частиц от времени. Для его вывода рассмотрим два параллельных друг другу одинаковых квадрата, расположенных в близких точках с координатами  $z$  и  $z + dz$ . Для определенности будем считать, что  $n(z)$  — убывающая функция (рис. 14.3). Тогда через левую площадку за время  $dt$  входит  $\Phi(z)dt$  частиц, а через правую выходит  $\Phi(z + dz)dt$  частиц.

Увеличение числа частиц  $dN$  в пространстве между площадками равно разности числа входящих и выходящих частиц:

$$dN = [\Phi(z) - \Phi(z + dz)] dt = -\Phi'(z) dz dt.$$

Здесь штрихом обозначена производная потока частиц по  $z$ . Разделив  $dN$  на объем  $S dz$  зазора между квадратами, получаем изменение концентрации частиц

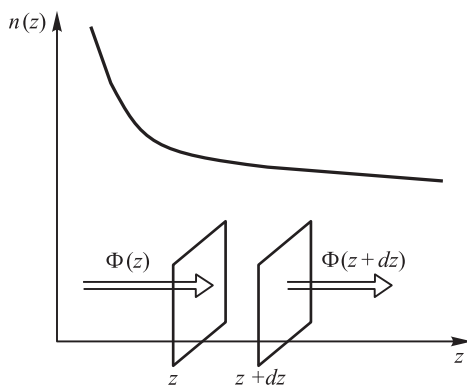


Рис. 14.3. Иллюстрация явления диффузии (к выводу второго закона Фика)

за время  $dt$ :

$$dn = -\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \frac{dt}{S}. \quad (14.18)$$

Используя первый закон Фика, находим отсюда

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial n}{\partial z} \right).$$

Обычно коэффициент диффузии не зависит от координаты, и мы получаем уравнение, выражающее **второй закон Фика**:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}}. \quad (14.19)$$

Если ввести *плотность* потока частиц  $j = \Phi/S$  (число частиц, пересекающих единичную площадь в единицу времени), то уравнение (14.18) можно записать в иной форме:

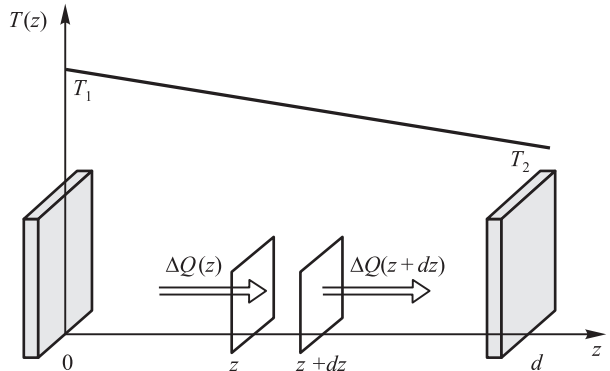
$$\frac{\partial j}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0. \quad (14.20)$$

Это уравнение — один из примеров так называемого *уравнения непрерывности*, встречающегося во многих областях физики и выражающего закон сохранения числа частиц. Его смысл: скорость изменения числа частиц в объеме равна разности потоков входящих и выходящих частиц (при условии, что внутри объема не происходит образование или исчезновение частиц).

**Теплопроводность.** Предположим теперь, что есть два источника теплоты различной температуры  $T_1$  и  $T_2$ . Представим их себе как широкие пластины, расположенные перпендикулярно оси  $z$  в точках с координатами  $z = 0$  и  $z = d$ . Газ, заполняющий зазор между пластинами, передает тепловую энергию от горячего тела к более холодному. При этом в газе устанавливается некоторое распределение температур  $T(z)$ , так что  $T(0) = T_1$  и  $T(d) = T_2$  (рис. 14.4).

Поместим между источниками квадратик площадью  $S$ , также ортогональный пластинам. Опыт показывает, что поток  $\Phi_Q$  тепловой энергии (количество теплоты в единицу времени  $\Phi_Q = \delta Q/dt$ ) через площадь  $S$  дается выражением

$$\boxed{\Phi_Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} S}. \quad (14.21)$$



**Рис. 14.4.** Распределение температуры между двумя источниками

Постоянная  $\varkappa$  называется **коэффициентом теплопроводности** и имеет размерность  $[\varkappa] = \text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$ . Отрицательный знак указывает, что поток теплоты направлен в сторону понижения температуры. При указанных условиях в равновесном состоянии в газе установится линейный закон изменения температуры. Действительно, согласно (14.21) через квадратик площадью  $S$ , расположенный в точке  $z$ , за время  $\Delta t$  втекает количество теплоты  $\Delta Q(z) = -\varkappa T'(z) S \Delta t$ . Через такой же квадратик в точке  $z + dz$  за это же время вытекает теплота  $\delta Q(z + dz) = -\varkappa T'(z + dz) S \Delta t$ . Если температура между квадратиками не меняется (установилось равновесие), то эти количества теплоты равны между собой, откуда следует, что  $T'(z + dz) - T'(z) = T''(z) dz = 0$ . Из равенства нулю второй производной следует, что функция температуры линейна:  $T(z) = a + bz$ . Из граничных условий в концевых точках находим константы интегрирования:  $T(z) = T_1 + (z/d)(T_2 - T_1)$ . Полученная линейная зависимость — следствие стационарности, того факта, что мы рассматривали установившееся распределение температур. То же самое следует из второго закона Фика: для стационарной системы производная по времени в левой части уравнения (14.19) равна нулю, откуда следует равенство нулю второй производной концентрации частиц по координате  $z$ , что эквивалентно линейности функции  $n(z)$ .

**Задача 14.71.** Какое количество тепловой энергии уносится в единицу времени через окно площадью  $S = 2 \text{ м}^2$  и расстоянием между стеклами  $d = 5 \text{ см}$ , если в комнате поддерживается температура  $t_1 = 20^\circ \text{C}$ , а на улице стоит мороз  $t_2 = -20^\circ \text{C}$ ?

**Решение.** Сразу заметим, что поскольку величина градуса по шкалам Цельсия и Кельвина одинакова, разность температур  $T_1 - T_2 = t_1 - t_2 = 40 \text{ К}$ . Для оценки возьмем значение коэффициента теплопроводности воздуха при  $0^\circ \text{C}$  и нормальном давлении  $\varkappa = 0,024 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$ . Наличие стекла можно не учитывать, так как его коэффициент теплопроводности в 30–50 раз больше. К тому же толщина стекла много меньше промежутка между стеклами. Поэтому от мороза нас оберегает именно воздушная прослойка между стеклами. В соответствии со сказанным, в этом промежутке устанавливается линейное распределение температуры, так что  $T'(z)$  постоянна и равна  $T'(z) = (T_1 - T_2)/d$ . Поток тепловой энергии в единицу времени равен тогда

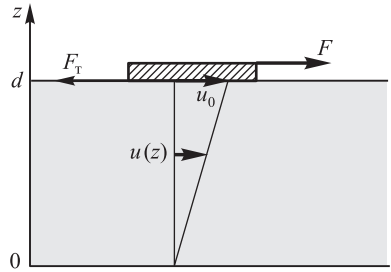
$$\frac{\delta Q}{dt} = -\varkappa S \frac{T_1 - T_2}{d} = -0,024 \times 2 \times \frac{40}{0,05} = 38,4 \text{ Вт.}$$

Расход энергии через одно окно за месяц  $Q = 38,4 \cdot 24 \cdot 30 = 27,6 \text{ кВт} \cdot \text{ч}$ .

Решая эту задачу, мы неявно сделали сильное предположение, что температура внутреннего стекла совпадает с температурой в комнате, а наружного — с температурой окружающего воздуха. Из практики каждый знает, что это не так: на самом деле наружная поверхность теплее, а внутренняя — холоднее. В реальности градиент температур в промежутке между рамами может быть раза в два меньше, что соответственно уменьшает поток тепловой энергии наружу. Однако точное решение задачи выходит за рамки данного курса. ■

**Вязкость.** Рассмотрим мысленный опыт. Пусть на поверхности жидкости плавает пластина, которую медленно тянут направо с силой  $F$  (рис. 14.5). Опыт показывает, что при установившемся движении пластина перемещается с постоянной скоростью  $u_0$ . Пусть расстояние до неподвижного дна равно  $d$ , а площадь пластины равна  $S$ . Что мы можем сказать о течении жидкости?

Ясно, что кроме силы  $F$  на пластину должно действовать что-то еще: иначе она двигалась бы равноускоренно. Это «что-то еще» может действовать только



**Рис. 14.5.** Сила внутреннего трения  $F_T$ , действующая на пластину, движущуюся со скоростью  $u_0$  по поверхности жидкости. Результатом стало линейное распределение скоростей слоев  $u(z)$  вдоль оси  $z$

со стороны жидкости. Другими словами, на пластину со стороны жидкости действует сила, подобная силе трения. Она направлена налево и по величине равна действующей силе  $F$ . Каково происхождение этой силы? Прилегающий к пластине слой жидкости «прилипает» к ней и движется с той же скоростью  $u_0$ . Аналогично, слой жидкости, прилегающий ко дну, имеет нулевую скорость. Следовательно, в системе возникает некоторое распределение скоростей  $u(z)$ , где  $z$  — расстояние от дна. В конечном итоге неподвижное дно через жидкость действует на пластину, порождая *силу внутреннего трения*, направленную против течения. В соответствии со сказанным, заведомо должны выполняться граничные условия  $u(0) = 0$ ,  $u(d) = u_0$ . Сила трения возникает как раз вследствие этого распределения скоростей: вышележащий (более быстрый) слой «трется» о нижележащий и тормозится им. По третьему закону Ньютона такая же сила действует с его стороны на более медленный нижележащий слой и стремится ускорить его. В результате устанавливается стационарное движение с постоянным распределением скоростей.

Опыт показывает, что сила  $F$  связана со скоростью  $u_0$  соотношением:

$$F = \eta u_0 \frac{S}{d}. \quad (14.22)$$

Коэффициент  $\eta$ , имеющий размерность  $[\eta] = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = \text{Па} \cdot \text{с}$ , называется **коэффициентом динамической вязкости**.

Чтобы найти распределение скоростей в этой системе, представим себе наблюдателя, находящегося на расстоянии  $z$  от дна и движущегося вместе с жидкостью со скоростью  $u(z)$ . С точки зрения этого наблюдателя, его слой покоится, а пластину движется со скоростью  $u_0 - u(z)$ . Зависимость той же силы  $F$  от скорости должна теперь описываться аналогичной формулой с заменой  $u_0 \rightarrow u_0 - u(z)$  и  $d \rightarrow d - z$ :

$$F = \eta [u_0 - u(z)] \frac{S}{d - z}. \quad (14.23)$$

Приравнявая выражения (14.22) и (14.23), находим скорость слоя как функцию расстояния от дна:

$$u(z) = u_0 \frac{z}{d}. \quad (14.24)$$

Мы получили линейный закон распределения скоростей, удовлетворяющий нашим граничным условиям  $u(0) = 0$ ,  $u(d) = u_0$ . В случаях не столь простых систем течение имеет более сложный характер, но и тогда мы можем воспользоваться найденной закономерностью. Действительно, рассмотрим жидкость, в которой

существует градиент скоростей по координате  $z$ . Относительная скорость слоев с координатами  $z$  и  $z + dz$  равна  $u(z + dz) - u(z) \approx u'(z) dz$ . Поскольку мы рассматриваем сколь угодно малые расстояния  $dz$ , то для малых площадей  $S$  течение можно считать плоским и описываемым прежними формулами. Тогда сила внутреннего трения между соседними слоями будет определяться уравнением (14.22), где вместо  $u_0$  стоит относительная скорость слоев  $u'(z) dz$ , а вместо  $d$  — расстояние между слоями  $dz$ :

$$F(z) = \eta \frac{du}{dz} S. \quad (14.25)$$

Такое выражение действительно соответствует опытам по определению силы внутреннего трения между слоями жидкости или газа при ламинарном течении. В сущности, мы получили аналог линейного распределения температур при рассмотрении теплопроводности.

Стоит обратить внимание, что сила внутреннего трения  $F(z)$  направлена *вдоль скорости*  $u(z)$  упорядоченного движения слоев и *перпендикулярно* направлению градиента скорости. Это связано с тем, что в данном явлении между слоями переносится *импульс* упорядоченного движения молекул, и направление *переноса* определяется *градиентом скорости* слоев, а сам *импульс* (и возникающая сила внутреннего трения) совпадает с направлением *скорости* слоя. Более подробно этот механизм рассмотрен в следующем параграфе.

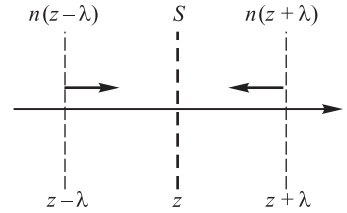
Нетрудно заметить то общее, что есть у всех обсуждавшихся законов. Всюду входит градиент некоторой величины — концентрации частиц, скорости течения, температуры. Всюду при условии стационарности устанавливается линейное распределение этой величины. Все это потому, что явления переноса имеют общее происхождение — молекулярное движение.

### 14.3 Кинетическая теория переноса

Изложенные выше законы явлений переноса — первый закон Фика и аналогичные законы для внутреннего трения и теплопроводности — были установлены экспериментально. В этом разделе мы покажем, что они следуют из молекулярно-кинетической теории. Основу всех явлений переноса составляет хаотичное движение молекул. При переходе в другие части системы молекулы переносят туда информацию о тех условиях, в которых они пребывали прежде. Перенос массы (или сам переход частиц) определяет диффузию. Перенос энергии от одних слоев газа к другим определяет его теплопроводность. И перенос импульса, как мы увидим, определяет явление внутреннего молекулярного трения газа (жидкости).

#### Диффузия

Рассмотрим сначала одномерную (только в одном направлении) диффузию (точнее, самодиффузию, т. е. диффузию каким-то образом выделенных молекул в среде, состоящих из таких же частиц). В этом случае средние скорости  $\langle v \rangle$  частиц среды и диффундирующих частиц одинаковы, а длина свободного пробега дается уже знакомым выражением  $\lambda = 1/(\sqrt{2}\sigma n)$ . Выделим мысленно в среде площадку



**Рис. 14.6.** Встречные потоки частиц через площадку  $S$  из областей с разной концентрацией частиц (к выводу первого закона Фика)

$S$  и направим ось  $z$  ортогонально к ней. Две другие оси  $x$  и  $y$  параллельны площадке. Хаотичность движения молекул смоделируем следующим образом. Будем считать, что ровно  $1/3$  молекул движется вдоль оси  $x$ ,  $1/3$  — вдоль оси  $y$  и  $1/3$  — вдоль оси  $z$ . Из молекул, летящих параллельно  $z$ , ровно половина ( $1/6$  часть полного числа молекул) движется в положительном направлении, и еще  $1/6$  часть полного числа молекул в системе — в отрицательном. Подсчитаем количество молекул, пересекающих площадь  $S$  в единицу времени (рис. 14.6). Ясно, что молекулы, летящие вдоль осей  $x$  и  $y$  площадку не пересекут. За время  $dt$  молекулы преодолевают расстояние  $\langle v \rangle dt$ . Потому на площадку попадет только  $1/6$  часть молекул из объема  $\langle v \rangle S dt$  справа и  $1/6$  часть молекул из объема слева. Но концентрация частиц слева и справа разная, так как  $n$  зависит от  $z$ .

Внимательный читатель может спросить: ведь мы рассматриваем бесконечно малый промежуток времени  $dt$ , следовательно наши объемы в сущности диски бесконечно малой толщины  $\langle v \rangle dt$ . Поэтому, казалось бы, и концентрации частиц слева и справа должны совпадать? Вопрос правилен, но дело в том, что последний раз перед попаданием на площадку  $S$  молекулы сталкивались с другими молекулами на расстоянии длины свободного пробега  $\lambda$  от площадки. Поэтому к выделенной нами площади они подходят с теми концентрациями частиц, которые сложились в точках с координатами  $z - \lambda$  и  $z + \lambda$  (если  $z$  — координата площадки). Слева на площадку попадет число частиц  $dN_{\rightarrow}$ , а справа —  $dN_{\leftarrow}$ , причем эти числа будут различаться:

$$\begin{aligned} dN_{\rightarrow} &= \frac{1}{6} n(z - \lambda) \langle v \rangle S dt, \\ dN_{\leftarrow} &= \frac{1}{6} n(z + \lambda) \langle v \rangle S dt. \end{aligned} \quad (14.26)$$

Поскольку  $\lambda$  мало, можем разложить концентрации частиц в ряд, удерживая только два первых члена:

$$\begin{aligned} n(z - \lambda) &\approx n(z) - \lambda \frac{\partial n(z)}{\partial z}, \\ n(z + \lambda) &\approx n(z) + \lambda \frac{\partial n(z)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (14.27)$$

Полное число частиц  $dN$ , пересекающих площадку в положительном направлении оси  $z$ , равно разности чисел частиц, пересекающих площадку слева и справа. Находим тогда:

$$dN = dN_{\rightarrow} - dN_{\leftarrow} = -\frac{1}{6} 2\lambda \frac{\partial n(z)}{\partial z} \langle v \rangle S dt. \quad (14.28)$$

Выражение для потока числа частиц

$$\Phi(z) = \frac{dN}{dt} = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \frac{\partial n(z)}{\partial z} S \quad (14.29)$$



по структуре в точности совпадает с первым законом Фика (14.16). Стало быть, мы не только вывели этот закон, но и определили коэффициент диффузии:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle. \quad (14.30)$$

Подставляя сюда выражения (14.6) для длины свободного пробега и (13.63) для средней арифметической скорости, и учитывая связь (10.18) давления идеального газа и концентрации молекул, находим зависимость коэффициента диффузии от температуры и характеристик газа:

$$D = \frac{2k_B}{3\pi^{3/2}d^2p} \sqrt{\frac{R}{\mu}} T^{3/2}. \quad (14.31)$$

Такая зависимость коэффициента диффузии в газах от температуры и давления подтверждается экспериментом.

## Теплопроводность

Проанализируем теперь явление теплопроводности. Предположим, что концентрация частиц в системе всюду одинакова, так что слева и справа площадку пересекает одинаковое число частиц, как и в предыдущем разделе:

$$dN = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S dt, \quad (14.32)$$

так что полный поток частиц через  $S$  равен нулю. Однако молекулы приносят с собой те средние энергии  $w$ , которыми они обладали в слоях с координатами  $z - \lambda$  и  $z + \lambda$ . Эти энергии пропорциональны температуре:  $E_{\text{мол}} = (i/2) k_B T$  (напомним, что  $i$  — эффективное число степеней свободы молекулы). Умножая среднюю энергию молекулы на число частиц, пересекающих площадку, получаем для переносимого ими количества энергии слева и справа:

$$\begin{aligned} dE_{\rightarrow} &= \left( \frac{1}{6} n \langle v \rangle S dt \right) \frac{i}{2} k_B T (z - \lambda), \\ dE_{\leftarrow} &= \left( \frac{1}{6} n \langle v \rangle S dt \right) \frac{i}{2} k_B T (z + \lambda). \end{aligned} \quad (14.33)$$

Для потока теплоты, переносимого в положительном направлении оси  $z$ , получаем отсюда выражение

$$\Phi_Q = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{dE_{\rightarrow} - dE_{\leftarrow}}{dt} = - \left( \frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \right) \frac{i}{2} k_B \frac{\partial T}{\partial z} S. \quad (14.34)$$

Мы вывели закон (14.21) и нашли коэффициент теплопроводности

$$\kappa = \frac{i}{6} k_B n \langle v \rangle \lambda. \quad (14.35)$$

Поскольку  $\lambda \sim 1/(\sigma n)$ , то коэффициент теплопроводности не зависит от плотности газа. Подставляя сюда выражения (14.6) для длины свободного пробега

и (13.63) для средней арифметической скорости, находим зависимость  $\kappa$  от температуры и характеристик газа:

$$\kappa = \frac{ik_B}{3\pi^{3/2}d^2} \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \quad (14.36)$$

где  $i$  — эффективное число степеней свободы молекулы газа.

Введем удельную теплоемкость (т. е. теплоемкость единицы массы вещества) при постоянном объеме  $c_V = (i/2)R/\mu = (i/2)k_B N_A/\mu$  и учтем далее, что масса молекулы равна  $m_0 = \mu/N_A$ , откуда следует связь концентрации частиц с плотностью газа:  $\rho = m_0 n = \mu n/N_A$ . Получаем тогда для коэффициента теплопроводности несколько иное выражение:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda c_V. \quad (14.37)$$

## Вязкость

Рассмотрим теперь механизм возникновения вязкости. Ось  $z$  теперь будем представлять расположенной вертикально в соответствие с рис. 14.5. Сути дела это, разумеется, не меняет. Снова предположим, что концентрация частиц одинакова во всех частях системы, так что числа частиц  $dN = \frac{1}{6}n\langle v \rangle S dt$ , приходящих снизу и сверху, равны. Однако молекулы приходят из слоев, имеющих разные скорости упорядоченного (не теплового!) движения  $u(z)$ . Когда более медленная молекула из нижнего слоя попадает в верхний, она притормаживает его упорядоченное движение. Наоборот, молекулы из верхнего слоя ускоряют нижний слой. Таким образом, этот процесс способствует выравниванию скоростей в системе, а именно в этом и заключается явление внутреннего трения (вязкости).

Мы предполагаем, что скорость упорядоченного движения много меньше средней скорости теплового движения молекул (составляющей сотни м/с). Тогда среднюю арифметическую скорость  $\langle v \rangle$  (13.63) теплового движения можно по-прежнему считать постоянной. Для импульсов упорядоченного движения, переносимого через площадь  $S$  снизу и сверху, имеем:

$$\begin{aligned} dp_{\uparrow} &= m_0 u(z - \lambda) dN, \\ dp_{\downarrow} &= m_0 u(z + \lambda) dN. \end{aligned} \quad (14.38)$$

Отсюда для полного импульса, переносимого в положительном направлении оси  $z$ , получаем:

$$dp = dp_{\uparrow} - dp_{\downarrow} = -2\lambda \frac{du(z)}{dz} \left( \frac{1}{6} \rho \langle v \rangle \right) S dt. \quad (14.39)$$

В этой формуле мы использовали плотность газа  $\rho = m_0 n$ .

Переносимый импульс параллелен скорости  $u$ , а направление переноса определяется градиентом скорости. При распределении скоростей, показанном на рис. 14.5, скорость растет с ростом  $z$ , так что производная  $du/dz > 0$ . Знак минус в уравнении (14.39) означает, что импульс, поступающий снизу от более медленных слоев меньше импульса, поступающего сверху, от более быстрых. Поэтому импульс слоя с координатой  $z$  в данном случае стремится *возрасти*

на величину  $dp_{\text{сл}} = -dp$ . По второму закону Ньютона производная  $dp_{\text{сл}}/dt$  дает силу, действующую на слой жидкости площадью  $S$  и имеющий координату  $z$ :

$$F(z) = \frac{dp_{\text{сл}}}{dt} = -\frac{dp}{dt} = \frac{1}{3}\rho\lambda\langle v \rangle \frac{du}{dz} S. \quad (14.40)$$

При положительном градиенте  $u'(z) > 0$  знаки силы  $F(z)$  и скорости  $u(z)$  совпадают, так что они направлены в одну сторону. Таким образом, мы вывели закон (14.25) и получили выражение для коэффициента динамической вязкости

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\lambda\langle v \rangle. \quad (14.41)$$

Подставляя сюда выражения (14.6) для длины свободного пробега и (13.63) для средней арифметической скорости, устанавливаем зависимость  $\eta$  от температуры и характеристик газа:

$$\eta = \frac{2k_B}{3\pi^{3/2}d^2} \sqrt{\frac{\mu T}{R}}. \quad (14.42)$$

Обращаем внимание, что коэффициент динамической вязкости не зависит в конечном итоге от плотности, т.е. от давления. Это происходит потому, что с ростом давления увеличивается плотность газа, но и пропорционально растет концентрация частиц, т.е. уменьшается длина свободного пробега. Эти два эффекта компенсируют друг друга.

Из проведенного анализа явлений переноса следуют связи между соответствующими коэффициентами [см. соотношения (14.30), (14.37) и (14.41)]:

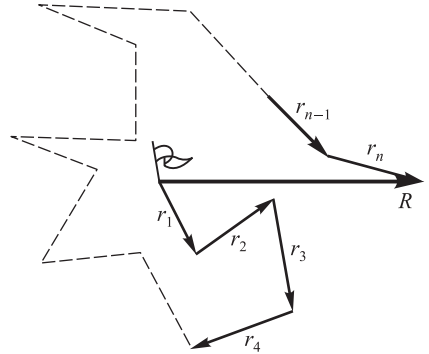
$$\begin{aligned} \eta &= \rho D, \\ \varkappa &= \eta c_V = \rho c_V D. \end{aligned} \quad (14.43)$$

Приведем численные оценки, воспользовавшись полученными ранее результатами для водяного пара, которые характерны при нормальных условиях для всех газов: плотность  $\rho \approx 0,7 \text{ кг/м}^3$ ,  $\langle v \rangle \approx 600 \text{ м/с}$ , длина свободного пробега  $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ , концентрация частиц  $n \approx 4 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Тогда находим: коэффициент диффузии  $D \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициент теплопроводности ( $i = 6$ )  $\varkappa \approx 0,02 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$ , коэффициент динамической вязкости  $\eta \approx 0,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Сравним полученные оценки с опытными данными для воздуха:  $D = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\varkappa = 0,024 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$ ,  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Мы видим, что не ошиблись, по крайней мере, в порядках величин, хотя наши оценки коэффициентов и не совсем точны.

## 14.4 Броуновское движение

### Задача о блуждающем матросе

Решим сначала классическую задачу о пьяном матросе. Матрос выходит из кабака и собирается направиться домой. Он движется с постоянной скоростью  $v$ , но в состоянии поддерживать выбранное направление движения лишь на пути  $\lambda$  (т.е. в течение времени  $\tau = \lambda/v$ ). После этого его разворачивает, он теряет ориентировку и движется в каком-то другом направлении. Выбор направления каждый раз происходит случайным образом, так что любые направления равновероятны. Спрашивается, на каком среднем расстоянии  $R_{\text{кв}}$  от кабака находится матрос в



**Рис. 14.7.** Траектория блуждающего матроса

момент времени  $t$  (предполагается, что  $t \gg \tau$ ). Слово «среднее» здесь означает следующее. Предположим, что такое происходит каждый день, и каждый раз мы измеряем удаление матроса от кабачка. Среднее квадратичное полученных значений при большом числе испытаний (скажем, за год) и дает нам искомую величину  $R_{\text{КВ}}$ .

Итак, возьмем кабачок за начало отсчета координат и будем характеризовать положение матроса в момент времени  $t$  радиусом-вектором  $\vec{R}$ . Путь матроса состоит из ломаных линий, число которых  $k = t/\tau$ . Пусть  $i$  — номер линии ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Перемещение матроса по линии с номером  $i$  задаем вектором  $\vec{r}_i$ , так что для всех значений  $i$  имеем  $r_i^2 = \lambda^2$  (рис. 14.7). Тогда радиус-вектор  $\vec{R}$  представляется в виде суммы векторов  $\vec{r}_i$ :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^k \vec{r}_i. \quad (14.44)$$

Возведем в квадрат обе части равенства (14.44):

$$\begin{aligned} \vec{R}^2 &= \sum_{i=1}^k \vec{r}_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^k r_i r_j \cos \theta_{ij} = \\ &= \lambda^2 k + 2\lambda^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^k \cos \theta_{ij}. \end{aligned} \quad (14.45)$$

Здесь  $\theta_{ij}$  — угол между векторами  $\vec{r}_i$  и  $\vec{r}_j$ . Усредним теперь обе части равенства (14.45) по всем случаям похода матроса в кабачок. Средние значения всех косинусов равны нулю в силу равновероятности выбора матросом следующего направления движения после прямого отрезка. Получаем тогда:

$$\langle \vec{R}^2 \rangle = k\lambda^2 = \frac{t}{\tau}\lambda^2 = \lambda vt. \quad (14.46)$$

Отсюда следует искомое среднеквадратичное расстояние

$$R_{\text{КВ}} = \sqrt{\langle \vec{R}^2 \rangle} = \sqrt{\lambda vt}. \quad (14.47)$$

Заметим, что это расстояние зависит от квадратного корня из времени в отличие от случая прямолинейного и равномерного движения. Это существенно

меняет характер движения. Приведем численный пример. Пусть матрос движется медленно, со скоростью  $v = 0,9$  км/час  $= 0,25$  м/с. За время  $t = 3$  ч  $= 10\,800$  с при прямолинейном движении он удалится бы на расстояние  $0,9 \cdot 3 = 2,7$  км. Предположим, что по прямой он в состоянии двигаться только  $\lambda = 20$  м. Тогда среднее его удаление от кабачка за то же время составит  $R_{\text{кв}} = \sqrt{20 \cdot 0,25 \cdot 10800} \approx 232$  м!

## Броуновское движение и диффузия

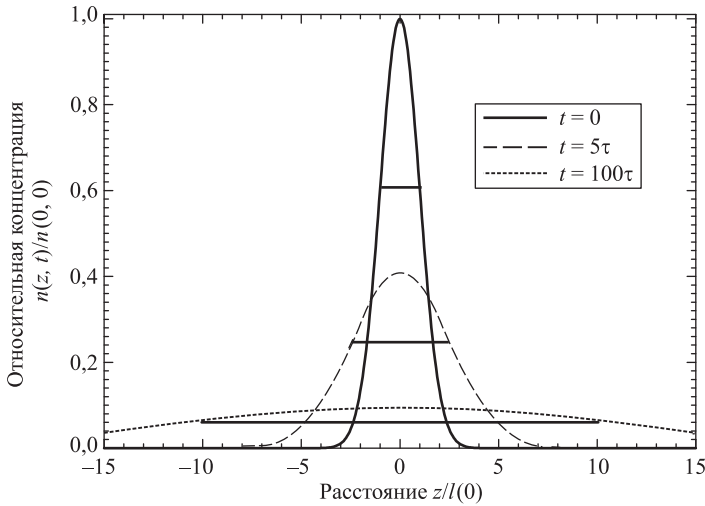
Оставив нашего матроса петлять в окрестностях кабачка, мы вправе задать вопрос: а какое он имеет отношение к молекулярно-кинетической теории? Оказывается, самое прямое. Пусть в воде плавает пылинка, за которой мы наблюдаем в микроскоп. Пылинка подвергается ударам со стороны молекул среды, случайным образом меняя свое направление движения и скорость. Случайность траектории пылинки здесь связана с тем, что 1) с разных сторон ее может ударить различное число молекул и 2) молекулы, ударяющие с одной стороны, могут в этот момент иметь большие скорости, нежели молекулы, ударяющие с другой. Поэтому пылинка движется по ломаной траектории. Это явление называется *броуновским движением*. С повышением температуры интенсивность броуновского движения растет. При увеличении размеров пылинки случайности ее столкновения с молекулами сглаживаются и броуновское движение становится ненаблюдаемым. Броуновское движение является самым непосредственным доказательством хаотического движения молекул. Наш блуждающий матрос — имитация броуновского движения. На этой простой задаче мы продемонстрировали характерную особенность — зависимость среднеквадратичного смещения пылинки от корня из времени движения. Произведение  $\lambda v$  в уравнении (14.47) имеет ту же размерность и ту же структуру, что и коэффициент диффузии. Поэтому для броуновского движения также следует ожидать зависимости среднеквадратичного смещения вида  $R_{\text{кв}} \sim \sqrt{Dt}$ .

Броуновское движение тесно связано с диффузией. Обратимся ко второму закону Фика (14.19). Это — уравнение первого порядка по времени, и оно позволяет найти функцию  $n(z, t)$ , если задана начальная концентрация числа частиц  $n(z, 0)$ . Мы не будем решать эту задачу точно. Отметим только, что с течением времени начальное распределение «расплывается» в пространстве и при этом изменяет свою форму. Но есть один вид начального распределения (так называемое *гауссово* распределение), форма которого остается неизменной. Мы займемся только этим, самым простым, случаем, позволяющим тем не менее получить все характерные особенности процесса. В процессе вычислений нам понадобятся два стандартных интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2l^2}\right) dz = \sqrt{2\pi}l \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2l^2}\right) dz = \sqrt{2\pi}l^3.$$

Пусть распределение частиц в начальный момент времени  $t = 0$  имеет вид:

$$n(z, 0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}l(0)} \exp\left(-\frac{z^2}{2l^2(0)}\right). \quad (14.48)$$



**Рис. 14.8.** Расплывание гауссова распределения концентрации частиц с течением времени: три кривые соответствуют трем различным значениям времени, измеренного в единицах  $\tau = l^2(0)/(2D)$ . По оси абсцисс отложены «безразмерные» расстояния, измеренные в единицах полуширины  $l(0)$  начального распределения. По оси ординат показано отношение концентрации частиц  $n(z, t)$  к ее максимальному значению  $n(0, 0)$  в начальный момент времени  $t = 0$ . Горизонтальные отрезки показывают среднюю квадратичную ширину  $2l(t)/l(0)$  каждого из распределений

График этой функции представлен на рис. 14.8. Здесь  $N$  — полное число частиц, распределенных по оси  $z$  с концентрацией  $n(z, 0)$ :

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} n(z, 0) dz.$$

Величина  $l(0)$  характеризует ширину распределения. Действительно, выражение  $n dz/N$  дает относительное число частиц на интервале  $(z, z + dz)$ , т. е. вероятность частице оказаться на этом отрезке. Поэтому среднее значение квадрата координаты равно

$$\langle z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{n(z, 0)}{N} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l(0)} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2l^2(0)}\right) dz = l^2(0). \quad (14.49)$$

Определим ширину распределения как расстояние между точками  $z = -\sqrt{\langle z^2 \rangle}$  и  $z = +\sqrt{\langle z^2 \rangle}$ . Тогда  $l(0) = \sqrt{\langle z^2 \rangle}$  есть среднее квадратичная полуширина распределения в начальный момент времени  $t = 0$ .

Как уже было сказано, гауссово распределение — единственное, не меняющее своей формы при расплывании. Это значит, что в произвольный момент времени  $t$  распределение будет иметь вид:

$$n(z, t) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}l(t)} \exp\left(-\frac{z^2}{2l^2(t)}\right). \quad (14.50)$$

Соответственно, для произвольного момента времени  $\langle z^2 \rangle = l^2(t)$ , где пока неизвестная функция  $l(t)$  есть меняющаяся полуширина распределения.

Наша задача упростилась: вместо решения дифференциального уравнения в частных производных (14.19), нам достаточно теперь подставить туда выражение (14.50), убедиться, что оно действительно является решением, и найти зависимость полуширины распределения от времени (т. е. определить функцию  $l(t)$ ).

Продифференцируем (14.50) по координате  $z$ :

$$\frac{\partial n}{\partial z} = -\frac{z}{l^2(t)} n. \quad (14.51)$$

Продифференцируем по  $z$  еще раз, принимая во внимание результат первого дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{l^2(t)} n \right) = -\frac{n}{l^2(t)} - \frac{z}{l^2(t)} \frac{\partial n}{\partial z} = \\ &= n \frac{z^2 - l^2(t)}{l^4(t)}. \end{aligned} \quad (14.52)$$

Теперь продифференцируем (14.50) по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{dl(t)}{dt} \frac{dn}{dl(t)} = \frac{dl(t)}{dt} \left( n \frac{z^2}{l^3(t)} - \frac{n}{l(t)} \right) = \\ &= \frac{dl(t)}{dt} l(t) n \frac{z^2 - l^2(t)}{l^4(t)}. \end{aligned} \quad (14.53)$$

Подставляя выражения (14.52) и (14.53) в уравнение (14.19) второго закона Фика, убеждаемся, что  $n(z, t)$  в форме (14.50) действительно является решением, если полуширина распределения  $l(t)$  удовлетворяет уравнению

$$l \frac{dl}{dt} = D. \quad (14.54)$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$\int_{l(0)}^{l(t)} l \, dl = D \int_0^t dt \Rightarrow \frac{l^2(t)}{2} - \frac{l^2(0)}{2} = Dt,$$

откуда находим зависимость полуширины распределения от времени:

$$l(t) = \sqrt{l^2(0) + 2Dt}. \quad (14.55)$$

Если в начальный момент времени  $t = 0$  все молекулы были сосредоточены в одном месте ( $l(0) = 0$ ), то

$$l(t) = \sqrt{2Dt}, \quad (14.56)$$

что на новом уровне воспроизводит результат, угаданный нами при анализе блужданий матроса. Увеличение полуширины распределения дает смещение броуновской частицы. Выражение для среднеквадратичного смещения броуновской частицы  $\langle \Delta z^2 \rangle = l^2(t) - l^2(0) = 2Dt$  — это классический результат Эйнштейна—Смолуховского, построивших теорию броуновского движения.

**Задача 14.72.** В аудиторию входит студентка. Оценить время, через которое запах ее духов достигнет экзаменатора, сидящего за столом.

**Решение.** Коэффициент диффузии молекул в газах мы оценили как  $D \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . Расстояние  $l(t)$  до экзаменатора примем равным 4 м, а ширина начального распределения примерно равна диаметру головы студентки  $l(0) \approx 0,2 \text{ м}$ . Поскольку  $l(t) \gg l(0)$ , можно воспользоваться уравнением (14.56), откуда находим:

$$t \approx \frac{l^2(t)}{2D} = 4 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 4,6 \text{ сут.}$$

Ответ явно несуразен и противоречит всему мировому опыту приема экзаменов. Из этого примера ясно, что распространение запахов по комнате происходит не вследствие диффузии, а из-за более быстрых процессов — конвекционных течений воздуха в комнате. ■

### Численные оценки для броуновского движения

Если диффузионные процессы столь медленны, то как удалось наблюдать броуновское движение? Для ответа на этот вопрос мы оценим сейчас коэффициент диффузии пылинки в жидкости. Мы уже знаем, что среднеквадратичное смещение частицы вдоль какой-то оси линейно зависит от времени:

$$\langle z^2(t) \rangle = \langle z^2(0) \rangle + 2Dt. \quad (14.57)$$

Этот закон можно принять как определение коэффициента диффузии броуновских частиц. Рассмотрим уравнение движения частицы вдоль выбранной оси  $z$ :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z - 6\pi r \eta \frac{dz}{dt}. \quad (14.58)$$

Здесь  $F_z$  — случайная сила, действующая на частицы со стороны молекул, а второй член в правой части — сила сопротивления движению частицы вследствие вязкости жидкости (закон Стокса: предполагается, что броуновские частицы являются шариками радиусом  $r$ ). Поскольку нас интересует зависимость от времени *квадрата* координаты  $z$ , мы умножим уравнение (14.58) на  $z$  и используем соотношения

$$\begin{aligned} z \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( z \frac{dz}{dt} \right) - \left( \frac{dz}{dt} \right)^2, \\ z \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{dz^2}{dt}. \end{aligned}$$

Усредняя получившееся уравнение, приходим к выражению

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \langle z^2 \rangle}{dt^2} - m \left\langle \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right\rangle = - \frac{6\pi r \eta}{2} \frac{d \langle z^2 \rangle}{dt}. \quad (14.59)$$

Здесь учтено, что  $\langle z F_z \rangle = 0$  из-за случайности сил, действующих на пылинку со стороны молекул. В силу (14.57)  $d \langle z^2 \rangle / dt = 2D$ ,  $d^2 \langle z^2 \rangle / dt^2 = 0$ . Подставляя эти значения в (14.59) и учитывая, что  $m \langle v_z^2 \rangle = k_B T$ , находим искомое выражение для коэффициента диффузии броуновских частиц:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi r \eta}. \quad (14.60)$$



Выполним теперь численные оценки. Радиус броуновских частиц (пылинок)  $r \sim 0,5 \cdot 10^{-6}$  м. Принимая  $\eta = 10^{-3}$  Па·с (вода) и  $T = 300$  К, получаем из (14.60)  $D \approx 0,44 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>/с, что гораздо меньше коэффициента диффузии молекул духов студентки. Тем не менее броуновское движение наблюдаемо. Скажем, за 30 секунд среднеквадратичное смещение частицы составит  $z_{\text{кв}} = \sqrt{2Dt} = 10^{-6} \sqrt{2 \cdot 0,44 \cdot 30} = 5 \cdot 10^{-6}$  м, что в пять раз превышает диаметр пылинки. Поэтому такие смещения можно наблюдать в микроскоп. Пример демонстрирует извечную научную истину: сами по себе величины не могут априори считаться малыми или большими, все познается в сравнении.

## Контрольные вопросы

1. Приведите примеры экспериментального подтверждения молекулярно-кинетической теории. Укажите физические явления, подтверждающие: 1) существование промежутков между молекулами; 2) движение молекул; 3) существование сил притяжения и отталкивания между молекулами.
2. Пусть средняя длина пробега молекулы в 100 раз превышает размеры сосуда с газом. Можно ли осуществить такое? Если ответ положителен, то можно ли считать, что каждая молекула «не замечает» присутствия всех остальных?
3. Оценить длину  $\lambda$  свободного пробега баскетболистов на площадке в предположении, что они движутся хаотически. Размеры площадки 26 м  $\times$  14 м, на ней находится 10 игроков. (Указание: представьте себе вид на площадку сверху. Рассматривая проекцию баскетболистов на горизонтальную плоскость, сводим задачу к движению дисков диаметром  $d$  по плоскости. Величину  $d$  предлагается выбрать самостоятельно, исходя из жизненного опыта.)
4. Оценить максимально допустимое давление в кинескопе длиной 45 см, при котором 98% всех электронов попадет на экран, не столкнувшись ни с одной молекулой воздуха. (Указание: электрон считать материальной точкой.)
5. «Нахохлится Воробей Воробейч, подберет под себя ноги, да и сидит», — писал Мамин-Сибиряк. Объясните нахохливание птиц зимой с точки зрения законов физики.
6. Наружная стена комнаты имеет ширину  $l = 6$  м и толщину  $d = 20$  см. Высота потолка  $h = 2,5$  м. Какое количество тепловой энергии уходит в единицу времени через стену на улицу при разности температур снаружи и в комнате  $\Delta T = 25$  К? Материал стены — железобетон ( $\kappa = 1,6$  Дж/(м·с·К)). Сравните с результатами для деревянного дома (для дуба  $\kappa = 0,2$  Дж/(м·с·К)).
7. Электрическая лампочка мощностью 100 Вт производит 95 Вт теплоты, которая рассеивается через стеклянный баллон лампы радиусом 3 см и толщиной 1 мм. Чему равна разность температур между внутренней и внешней поверхностями стеклянного баллона лампы?
8. Какой газ будет диффундировать быстрее — N<sub>2</sub> или O<sub>2</sub>? И насколько быстрее (в процентах)?
9. Пусть из кабачка одновременно вышли два матроса (см. раздел 14.4). При тех же числовых данных найти среднеквадратичное расстояние  $L_{\text{кв}}$  между ними через время  $t = 3$  ч.

## Часть III

# Основы классической теории электромагнетизма

*Камилла такая умница, она  
сразу все поймет. Право, ей  
даже удалось как-то понять  
обратную пропорциональность  
квадрата расстояний!*

---

Оноре де Бальзак.  
«Утраченные иллюзии»



## Глава 15

# Электрическое поле в вакууме

История утверждает, что греческий философ Фалес около двадцати столетий назад наблюдал действие электрических сил: он обнаружил, что янтарь, будучи натертым шерстяной фланелью, способен притягивать легкие предметы. Янтарь (на греческом «электрон») дал нам термин «электричество».

Древние греки были знакомы и с особыми свойствами железной руды, являющейся природным магнитом. Слово «магнит» происходит от греческого «камень из Магнесии» — по имени города в Малой Азии, вблизи которого имелось месторождение этой руды.

Систематическое изучение электричества и магнетизма началось в эпоху Возрождения, однако только к концу XIX в. физики достигли ясного понимания основ классической теории этих явлений.

### 15.1 Электрические свойства тел

Все тела в природе образованы из атомов или молекул, которые, в свою очередь, состоят из ядер и электронов, обладающих электрическим зарядом. Существуют два типа электрических зарядов, условно называемых отрицательными и положительными. Электроны являются отрицательно заряженными частицами, а ядра атомов заряжены положительно. Силы электрического взаимодействия связывают ядро и электроны в единую систему — атом.

Наименьший по величине электрический заряд, экспериментально обнаруженный в природе, — заряд электрона:

$$q_e = -e, \quad e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Электрический заряд, равный  $e$ , называют элементарным зарядом. Отметим, что приведенное значение элементарного заряда обычно используется при решении стандартных школьных и вузовских задач. На самом деле физики-экспериментаторы определили его с гораздо большей точностью. В настоящее время в таблицах приводится значение

$$e = (1,602\,1892 \pm 0,000\,0046) \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Положительный заряд атомных ядер образован входящими в их состав протонами. Заряд протона положителен и по величине равен заряду электрона  $q_p = +e$ .

В каждом атоме суммы положительных и отрицательных зарядов равны по абсолютной величине, и поэтому обычно тела оказываются электронейтральными. Однако, прилагая некоторые усилия, можно оторвать электроны от одних тел, которые становятся при этом положительно заряженными, и передать их другим телам, которые заряжаются отрицательно. Такие тела являются *макроскопически заряженными*. Электрический заряд любого тела кратен элементарному заряду  $e$ , т. е. изменяется дискретно на величину

$$\Delta q = \pm Ne,$$

где  $N$  — целое число. В чем причина подобного «квантования» электрического заряда, никому пока неизвестно. Но никогда еще не наблюдались частицы с дробным (в единицах  $e$ ) зарядом. Правда, современная теория фундаментальных взаимодействий — так называемая Стандартная модель — рассматривает в качестве основных составляющих вещества кварки с дробными зарядами  $\pm e/3$  и  $\pm 2e/3$ , но, согласно этой теории, кварки прочно заперты внутри элементарных частиц и в свободном состоянии наблюдаться не могут.

Многочисленные эксперименты доказали, что электрический заряд сохраняется, т. е. алгебраическая сумма всех зарядов  $q_i$  замкнутой системы остается постоянной:

$$\sum_i q_i = \text{const.}$$

Все законы сохранения связаны с той или иной симметрией: закон сохранения импульса и энергии — с трансляционной симметрией пространства и времени, сохранение углового момента — с изотропией пространства. Сохранение электрического заряда также связано с особой симметрией — так называемой калибровочной инвариантностью уравнений релятивистской квантовой теории поля.

На микроскопическом уровне сохранение электрического заряда прослеживается по ядерным реакциям. Возьмем, например,  $\alpha$ -распад изотопа урана-238:  ${}_{92}^{238}\text{U} \rightarrow {}_{90}^{234}\text{Th} + {}_2^4\text{He}$ . Атомный номер  $Z$  ядра урана равен 92. Это означает, что в ядре находится 92 протона, т. е. заряд ядра равен  $q_{\text{U}} = 92e$ . Для тория  $Z = 90$  и заряд его ядра  $q_{\text{Th}} = 90e$ , а для гелия  $Z = 2$  и  $q_{\text{He}} = 2e$ . Выполнение равенства  $q_{\text{U}} = q_{\text{Th}} + q_{\text{He}}$  и означает сохранение электрического заряда в данной реакции. *Никогда не наблюдались* реакции, в которых бы нарушался закон сохранения электрического заряда. Это не означает, что частицы с электрическим зарядом не могут исчезать или рождаться, но при этом также должны исчезнуть или родиться частицы с таким же, но обратным по знаку, зарядом. Главное, чтобы суммарный заряд до и после реакции оставался неизменным. Приведем в качестве примера так называемую реакцию *аннигиляции*: электрон  $e^-$  с зарядом  $-e$  сталкивается со своей античастицей — позитроном  $e^+$ , заряд которого положителен и равен  $+e$ . В результате рождаются два фотона  $\gamma$  (фотоны — нейтральные частицы, из которых состоит электромагнитное излучение). Легко убедиться, что реакция  $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$  удовлетворяет закону сохранения электрического заряда: полный заряд до и после реакции равен нулю. В то же время не наблюдалась, например, реакция распада  $e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ , в которой заряд не сохраняется. Электрон — самая легкая из заряженных частиц, и благодаря закону сохранения заряда ему просто не на что распадаться. Поэтому электрон стабилен, и это есть необходимая предпосылка стабильности атомов, молекул, вещества и нас с вами.

Между заряженными телами возникают особые силы взаимодействия, называемые *электрическими силами*. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные — притягиваются. Количественные характеристики электростатического взаимодействия зарядов и являются предметом настоящей главы.

## 15.2 Закон Кулона

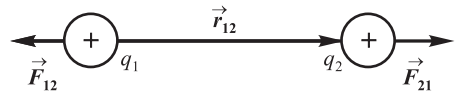
Пусть имеются два заряженных макроскопических тела, размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними. В этом случае каждое тело можно считать материальной точкой или *точечным зарядом*.

Французский физик Ш. Кулон экспериментально определил (1785), что

♦ *сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов в пустоте пропорциональна величине каждого из зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей эти заряды* (рис. 15.1):

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21}, \\ \vec{F}_{12} &= k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}. \end{aligned}} \quad \blacklozenge \quad (15.1)$$

**Рис. 15.1.** Электрические силы отталкивания между двумя одноименными зарядами  $q_1$  и  $q_2$



Надо сказать, что Кулон не был первым ученым, установившим закон взаимодействия зарядов, носящий теперь его имя: за 30 лет до него к такому же выводу пришел Б. Франклин. Более того, точность измерений Кулона уступала точности ранее проведенных экспериментов (Г. Кавендиш). Чтобы ввести количественную меру для определения точности измерений, предположим, что на самом деле закон взаимодействия зарядов обратно пропорционален не квадрату расстояния между ними, а какой-то другой степени:  $F \propto 1/r^{2\pm\delta}$ . Никто из ученых не возьмется утверждать, что  $\delta = 0$ ; правильное заключение должно звучать так: эксперименты показали, что  $\delta$  не превышает ... (и дальше стоит число — чем меньше, тем лучше). Результаты некоторых экспериментов приведены в табл. 15.1. Сам Кулон проверил закон обратных квадратов с точностью до

**Таблица 15.1.** Результаты прямых экспериментов по проверке закона Кулона

Эксперимент	Год	$\delta$
Робисон	1769	$< 0,06$
Кавендиш	1773	$< 0,02$
Максвелл	1873	$< 5 \cdot 10^{-5}$
Плимптон, Лоутон	1936	$< 2 \cdot 10^{-9}$
Барлетт и др.	1970	$< 1,3 \cdot 10^{-13}$
Уильямс и др.	1971	$< 3,0 \cdot 10^{-16}$

нескольких процентов. В таблице представлены результаты прямых лабораторных экспериментов. Косвенные данные, основанные на наблюдениях магнитных полей в космическом пространстве, приводят к еще более сильным ограничениям на величину  $\delta$ . Таким образом, закон Кулона взаимодействия точечных зарядов можно считать надежно установленным фактом. Но сказанное относится к большим расстояниям. Согласно квантовой электродинамике, на малых расстояниях (порядка  $10^{-13}$  м) все заряженные частицы окружены облаком так называемых *виртуальных частиц* — фотонов и электрон-позитронных пар, — взаимодействие с которыми вносит поправки в закон Кулона.

В СИ единица силы тока — ампер (А) — является основной, следовательно, единица заряда  $q$  оказывается производной. Как мы увидим в дальнейшем, сила тока  $I$  определяется как заряд, протекающий через поперечное сечение проводника в единицу времени:  $I = dq/dt$ . В СИ за единицу заряда принимается кулон (Кл) — электрический заряд, переносимый за 1 с через поперечное сечение проводника с током в 1 А. Используя связь между размерностями заряда и силы тока  $[q] = [I][t]$ , получаем для единицы заряда:  $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$ .

Коэффициент пропорциональности в законе Кулона имеет вид:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (15.2)$$

Параметр  $\epsilon_0$  называют *электрической постоянной*. Численное значение электрической постоянной

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}.$$

Поскольку  $\epsilon_0$  всегда входит в уравнения в комбинации  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ , удобнее запомнить численное значение

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,988 \cdot 10^9 \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Как и в случае элементарного заряда, величина электрической постоянной определена экспериментально с высокой точностью:

$$\epsilon_0 = (8,854\,187\,817 \pm 0,000\,000\,007) \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}.$$

Кулон — слишком большая единица для использования на практике. Например, два заряда в 1 Кл каждый, расположенные в вакууме на расстоянии 100 м друг от друга, отталкиваются с силой

$$F \approx 9 \cdot 10^9 \frac{1 \times 1}{100^2} = 900\,000 \text{ Н}.$$

Для сравнения: с такой силой давит на землю масса  $m = F/g \approx 90$  т. Приведем другой пример.

**Задача 15.73.** В теле человека положительный заряд протонов компенсируется отрицательным зарядом электронов. Предположим, что одна миллиардная часть электронов была каким-то образом перенесена с тела мужчины на тело женщины. Оценить, с какой силой мужчина и женщина будут притягиваться друг к другу на расстоянии 10 м.

**Решение.** Сначала надо оценить заряды, приобретенные нашими героями. Примем массу  $m$  людей за 70 кг. В основном эта масса определяется протонами и нейтронами, которые гораздо тяжелее электронов: масса протонов и нейтронов примерно одинакова

и равна  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг. Поэтому общее число протонов и нейтронов в теле человека можно оценить как  $m/m_p \approx 4,2 \cdot 10^{28}$ . Поскольку число протонов в ядрах приблизительно равно числу нейтронов, в теле человека имеется около  $N = m/(2m_p) \approx 2,1 \cdot 10^{28}$  протонов. Таково же количество электронов при полной нейтральности тела. По условию задачи, была перенесена одна миллиардная часть электронов, т. е. нескомпенсированным оказался заряд  $q = 10^{-9} Ne \approx 3,36$  Кл. По сравнению с предыдущим примером: 1) заряд увеличивается в 3,36 раза, что увеличивает силу притяжения в  $3,36^2 \approx 10$  раз; 2) расстояние уменьшается в 10 раз, что дополнительно увеличивает силу притяжения в сто раз. Поэтому сила будет в тысячу раз больше:  $F \approx 0,9 \cdot 10^9$  Н, что соответствует весу массы в 90 тыс. тонн! ■

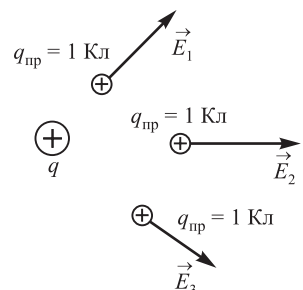
### 15.3 Электрическое поле. Напряженность

Вокруг отдельного электрического заряда всегда существует электрическое поле. Электрическое поле, созданное неподвижным зарядом (или системой неподвижных зарядов), называется *электростатическим*. Посредством электростатического поля осуществляется взаимодействие между зарядами. Само понятие поля оказалось весьма плодотворным и широко используется в современной физике. Появление поля означает, что что-то изменилось в окружающем нас пространстве. Математически поле описывается какой-то величиной, меняющейся от точки к точке. Например, можно рассмотреть поле скоростей в текущей жидкости. В каждой точке объема жидкости задан вектор скорости, который может меняться со временем (нестационарное течение), а может и быть постоянным (стационарное течение). Это пример векторного поля. К этому же типу полей относится и поле неподвижных электрических зарядов.

Если в некоторую точку пространства на расстоянии  $\vec{r}$  от заряда  $q$  внести другой заряд  $q_{пр}$  (назовем его «пробным» зарядом), то на него будет действовать электростатическая сила Кулона со стороны заряда  $q$ , обусловленная взаимодействием зарядов  $q$  и  $q_{пр}$ :

$$\vec{F} = q_{пр} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (15.3)$$

Силы, действующие на один и тот же пробный заряд, помещенный в различные точки пространства, будут отличаться и по величине, и по направлению (рис. 15.2). Легко видеть, что электрическое поле будет полностью охарактеризовано по величине и по направлению, если найти в каждой точке поля силу, действующую на единичный положительный пробный заряд  $q_{пр}$ .



**Рис. 15.2.** Векторы напряженности электрического поля заряда  $q$  в разных точках пространства





Рис. 15.3. Характерные значения напряженностей электрических полей в природе

♦ *Напряженностью электрического поля в какой-либо точке пространства называется вектор  $\vec{E}$ , который численно равен и совпадает по направлению с силой  $\vec{F}$ , действующей со стороны поля на помещенный в рассматриваемую точку единичный положительный заряд:*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}} \quad \blacklozenge \quad (15.4)$$

В соответствии с определением *напряженность электрического поля точечного заряда*  $q$  равна:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (15.5)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки местонахождения заряда  $q$ , создающего электрическое поле, в точку наблюдения. Сила, действующая со стороны поля на произвольный точечный заряд  $q_{\text{пр}}$ , равна  $\vec{F} = q_{\text{пр}}\vec{E}$ .

В СИ за единицу напряженности электрического поля принимают напряженность в такой точке поля, где на заряд, равный 1 Кл, действует сила в 1 Н. Таким образом, единица измерения напряженности электрического поля  $[E] = \text{Н/Кл}$ . Однако общепотребительным является эквивалентное наименование единицы напряженности поля — «вольт на метр» (В/м), о физическом смысле которого речь пойдет чуть позже. Примеры электрических полей, встречающихся в нашем мире, приведены на рис. 15.3.

Обратим внимание на сходство закона Кулона с законом всемирного тяготения (см. 6.1):

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Роль зарядов играют массы, а гравитационная постоянная  $G$  аналогична константе  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ . Можно ввести и вектор напряженности гравитационного поля как отношение силы  $\vec{F}$  к пробной массе  $m$ :

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = G \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Если  $M$  — масса Земли, а  $r$  — ее радиус, то  $|\vec{g}|$  есть не что иное, как хорошо знакомое ускорение свободного падения  $g$ .

**Задача 15.74.** Среднее расстояние между электроном и протоном в атоме водорода равно  $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$  м. Найти силы электростатического и гравитационного притяжения между ними и определить отношение этих сил.

**Решение.** Имеем из закона Кулона:

$$F_e = k \frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ Н.}$$

Закон всемирного тяготения дает:

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \times 1,67 \cdot 10^{-27}}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} = 3,6 \cdot 10^{-47} \text{ Н.}$$

Отношение сил  $F_g/F_e = 4,4 \cdot 10^{-40}$ . Этот расчет показывает, что в масштабах атомов и молекул силы гравитации намного меньше электростатических и их можно не принимать во внимание. Почему же в макромире, где мы обитаем, с законом гравитации мы знакомимся после первой же шишки на первых же шагах в детстве, а закон Кулона остается неизвестным (увы!) многим из наших сограждан, несмотря на его изучение в средней школе? Дело в том, что в макромире, как мы видели, положительные и отрицательные электрические заряды в телах полностью скомпенсированы, так что в обычной жизни мы имеем дело с относительно небольшими избыточными зарядами. Гравитирующие же массы имеют один знак, так что никакой компенсации масс не происходит, и когда хотя бы одна из них имеет астрономические размеры, ее поле тяготения невозможно не заметить. ■

## 15.4 Принцип суперпозиции полей

Сила, с которой данная система зарядов действует на некоторый точечный заряд, равна векторной сумме сил, с которыми действует на него каждый из зарядов системы. Отсюда следует, что электрическое поле системы зарядов определяется векторной суммой напряженности полей, создаваемых отдельными зарядами системы, т. е.

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i.$$

Сложение напряженностей электрических полей по правилу сложения векторов выражает так называемый **принцип суперпозиции** (термин «суперпозиция» означает «наложение»). В сущности свойство суперпозиции полей является следствием *линейности* уравнений электромагнетизма (уравнений Максвелла). Физический смысл этого свойства заключается в том, что электромагнитное поле создается покоящимися или движущимися электрическими зарядами, но само по себе «не заряжено» в том смысле, что оно не создает какого-либо дополнительного поля вокруг себя. Значит, поля различных зарядов «не мешают»

друг другу, и поэтому суммарное поле системы зарядов можно подсчитать как векторную сумму полей от каждого из них в отдельности. «Заряженные» поля также имеются в природе, примером может служить поле цветовых зарядов в квантовой хромодинамике — современной теории сильных взаимодействий элементарных частиц. Но такие теории намного сложнее электродинамики.

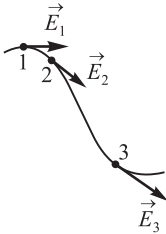
## 15.5 Силовые линии электрического поля

Электрическое поле можно задать, указав для каждой точки величину и направление вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Для наглядного изображения электрического поля используют силовые линии, или линии напряженности.

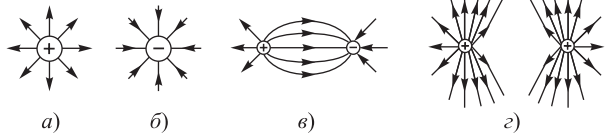
♦ *Линией напряженности электрического поля (силовой линией) называется такая линия, касательная к которой в каждой точке пространства совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля* (рис. 15.4). ♦

Число силовых линий, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную этим линиям, характеризует численное значение величины  $\vec{E}$  в данной области пространства. Конфигурация силовых линий позволяет судить об изменении направления и величины вектора  $\vec{E}$ .

Электрическое поле считается однородным ( $\vec{E} = \text{const}$ ), когда густота и направление силовых линий по всему объему поля сохраняются неизменными. Такое поле графически изображается равноотстоящими друг от друга параллельными прямыми линиями.



**Рис. 15.4.** Векторы напряженности поля касательны к силовым линиям



**Рис. 15.5.** Примеры силовых линий электрического поля различных систем зарядов

Линии напряженности электростатического поля всегда начинаются и заканчиваются на зарядах либо уходят в бесконечность: они имеют начало на положительном заряде (или в бесконечности) и конец на отрицательном заряде (или в бесконечности) (рис. 15.5). Линии напряженности в пространстве нигде не касаются и не пересекаются друг с другом (в противном случае  $\vec{E}$  была бы неоднозначной величиной).

## 15.6 Заряд в электрическом поле

Поведение заряда в заданном электрическом поле описывается вторым законом Ньютона:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E}$$

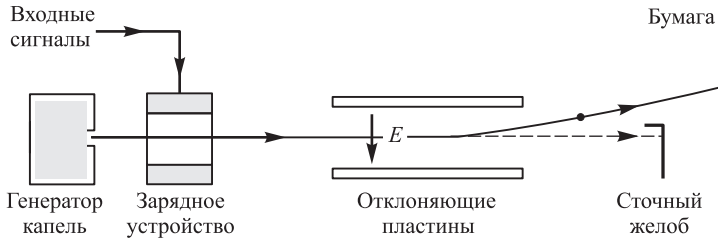


Рис. 15.6. Принципиальная схема струйного принтера

(здесь имеется в виду, что никакие другие силы на заряд не действуют; в противном случае в правую часть надо добавить соответствующие члены). Один из методов определения заряда электрона основан на наблюдении движения капелек в вертикальном электростатическом поле. Например, наблюдалась капелька радиусом  $R = 1,64$  мкм и плотностью  $\rho = 0,851$  г/см<sup>3</sup>. Было замечено, что она переставала падать в поле напряженностью  $E = 1,95 \cdot 10^5$  В/м. Это означало, что электростатическая сила  $qE$  компенсировала силу притяжения Земли  $mg$ . Масса капельки  $m = \rho (4\pi R^3/3) = 1,57 \cdot 10^{-14}$  кг. Отсюда находим заряд капельки  $q = mg/E = 7,9 \cdot 10^{-19}$  Кл, т. е. капелька несла пять электронных зарядов. Именно в таких экспериментах было обнаружено квантование электрического заряда и определена его минимальная величина  $e$ .

Движением заряженных частиц можно управлять, прилагая электрическое поле нужной величины. Так происходит, например, в электронно-лучевой трубке телевизора. Менее известно, что этот же принцип применен в струйных принтерах. Схема такого принтера показана на рис. 15.6. Сигнал, поступающий от компьютера, контролирует заряд, передаваемый капельке чернил в зарядном устройстве. Управляющие пластины создают электростатическое поле, которое отклоняет пролетающую капельку на нужный угол, так что она попадает в должное место на бумаге. Для печатания одной буквы используется около 100 капелек. Характерные диаметры капелек — 30 мкм, летят они со скоростью около 18 м/с и производятся источником в количестве 100 тыс. штук в секунду. Использование многоструйных устройств позволило довести скорость принтера до 50 тыс. знаков в секунду.

Расчеты электрических полей и движения зарядов имеют большое практическое значение. С некоторыми методами таких расчетов мы еще познакомимся.

## 15.7 Поток вектора напряженности

По определению,

♦ **поток вектора напряженности**  $\vec{E}$  через малую площадку  $d\vec{S}$  есть скалярное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $d\vec{S}$ . ♦

Элемент поверхности  $d\vec{S}$  — это вектор, направленный перпендикулярно элементарной площадке  $dS$  и численно равный ее площади. Таким образом, вектор элемента поверхности равен

$$d\vec{S} = \vec{n} dS, \quad (15.6)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к площадке  $dS$  в данной точке поверхности (рис. 15.7). Его направление задается правилом обхода контура площадки, а для замкнутых поверхностей совпадает с направлением *внешней* нормали.

Следовательно, поток вектора напряженности  $\vec{E}$  через площадку  $d\vec{S}$  запишется в виде:

$$d\Phi = (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = (\vec{E} \cdot d\vec{n})dS = E \cos \alpha dS = E_n dS, \quad (15.7)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$ ,  $E_n$  — нормальная к поверхности  $dS$  составляющая вектора  $\vec{E}$ .

Поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную поверхность  $S$  равен интегралу по поверхности:

$$\Phi = \int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS. \quad (15.8)$$

Поток вектора — величина скалярная (алгебраическая). Если величина нормальной составляющей  $E_n$  поля остается постоянной на всей поверхности  $S$ , то поток равен  $\Phi = E_n S$ .

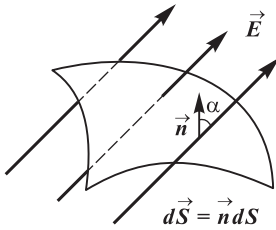
В сущности понятие потока вектора аналогично общежитейскому понятию потока, применяемому, например, к текущей жидкости. Пусть задано поле скоростей жидкости  $\vec{v}$  (скажем, идет дождь, и  $\vec{v}$  — скорость движения дождевых капель). Рассмотрим какую-нибудь площадку (например, ветровое стекло автомобиля). Введем аналогично вышеописанному поток вектора скорости жидкости через площадку  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ :  $d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{S} = v_n dS$ . Пусть мы имеем дело с дождем, плотность которого составляет  $\rho$  (масса влаги в единице объема воздуха). Возьмем произвольный интервал времени  $dt$  и подсчитаем количество воды, выпавшей за это время на нашу площадку  $S$ . Компоненты скоростей, параллельные площадке, не приводят к попаданию капель на нее, важна только нормальная компонента  $v_n$ . За время  $dt$  дождевые капли пролетают расстояние  $dl = v_n dt$ . Стало быть, за время  $dt$  на площадку попадут капли из объема  $dV = dl S = v_n S dt = \Phi dt$ . Масса  $dm$  выпавшей на площадку влаги равна тогда  $dm = \rho dV = \rho \Phi dt$ , т. е. поток  $\Phi$  вектора скорости в этом примере пропорционален массе воды, попадающей на площадку  $S$  в единицу времени:

$$\Phi = \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt}.$$

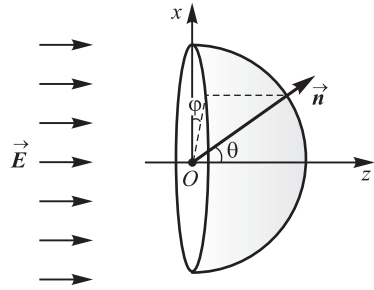
Когда-то электричество представляли себе как течение особого рода электрической жидкости. Поток вектора напряженности электрического поля в таком случае описывал бы количество этой жидкости, протекающей через площадку в единицу времени. Отсюда можно было бы найти давление, оказываемое жидкостью на площадку, и другие характеристики поля. Электрическая жидкость исчезла из науки, а понятие потока выжило. Аналогия с течением жидкости полезна для уяснения физического смысла этой величины.

**Задача 15.75.** Полусфера радиусом  $R$  с плоским основанием находится в постоянном однородном электрическом поле  $\vec{E}$ , направленном ортогонально основанию (рис. 15.8). Найти поток вектора напряженности: а) через основание; б) через поверхность полусферы.

**Решение.** Проще всего рассчитать поток  $\Phi_1$  через основание полусферы. Направим ось  $z$  вдоль поля. Направление вектора внешней нормали к основанию обратно направлению вектора  $\vec{E}$ . При этом  $\vec{E}$  одинаков во всех точках основания. Поток через основание



**Рис. 15.7.** Поток вектора напряженности поля  $\vec{E}$  через малую площадку  $dS$



**Рис. 15.8.** Пример расчета потока вектора напряженности электрического поля (к задаче 15.75)

получается равным взятому с обратным знаком произведению  $E$  на площадь основания:  $\Phi_1 = -\pi R^2 E$ .

Найдем теперь поток через поверхность полусферы. Используя сферические координаты — углы  $\theta$  и  $\varphi$  — для определения положения точки на полусфере, мы видим, что: 1)  $\vec{E} \cdot \vec{n} = E \cos \theta$  и 2)  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . Поэтому поток через элементарную площадку на полусфере равен  $d\Phi_2 = ER^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$ . Учитывая, что  $\cos \theta d\theta = d(\sin \theta)$ , а  $\sin \theta d(\sin \theta) = \frac{1}{2}d(\sin^2 \theta)$ , записываем поток в виде  $d\Phi_2 = \frac{1}{2}ER^2 d(\sin^2 \theta)$ . Отсюда находим полный поток:

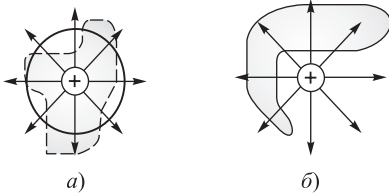
$$\Phi_2 = \frac{R^2 E}{2} \int_0^{\pi/2} d(\sin^2 \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2 E \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/2} = \pi R^2 E.$$

Мы получили, что поток через поверхность полусферы равен по абсолютной величине потоку через ее основание, так что с учетом знаков полный поток через замкнутую поверхность равен нулю:  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$ . Расчет подтверждает свойство силовых линий начинаться и заканчиваться на зарядах. В данном случае внутри объема, ограниченного полусферой и ее основанием, зарядов нет, так что сколько силовых линий выходит через поверхность полусферы, столько их и входит через ее основание. ■

## 15.8 Теорема Остроградского—Гаусса

Теорема Остроградского—Гаусса позволяет связать поток вектора напряженности с величиной зарядов. Поскольку строгий вывод теоремы Остроградского—Гаусса выходит за рамки данного курса, мы рассмотрим частный случай, который достаточно просто поддается обобщению. Определим поток вектора напряженности через произвольную воображаемую сферическую поверхность, в центре которой расположен точечный заряд.

Линии напряженности  $\vec{E}$  точечного заряда представляют собой совокупность радиальных прямых, направленных от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен (рис. 15.5, а, б). Поток вектора напряженности поля точечного заряда через сферическую поверхность радиусом  $r$ , центр которой совпадает



**Рис. 15.9.** Поток вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность, когда заряд находится внутри (а) и вне ее (б)

с положением заряда, равен:

$$\Phi = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} r^2 d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (15.9)$$

Здесь  $d\Omega$  — элемент телесного угла, и мы воспользовались значением полного телесного угла  $\int d\Omega = 4\pi$ .

Можно показать, что поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряд  $q$ , не зависит от формы поверхности и равен  $q/\epsilon_0$  так же, как и для сферы. Физический смысл этого утверждения опять-таки заключается в том, что силовые линии начинаются и кончаются на зарядах. Поэтому непрерывная (без разрывов) деформация поверхности (показана на рис. 15.9,а пунктиром) не изменит полного числа линий напряженности, выходящих наружу. Как следствие, поток через произвольную поверхность, охватывающую заряд, будет таким же, как и для сферы (см. рис. 15.9,а). Если же заряд находится вне ограниченной замкнутой поверхностью пространства, то линии напряженности пронизывают поверхность дважды (снаружи и изнутри), и в результате полный поток через поверхность, не охватывающую заряд (см. задачу 15.75), равен нулю (см. рис. 15.9,б).

Пусть теперь внутри данной замкнутой поверхности заключено произвольное число точечных зарядов любого знака. В силу принципа суперпозиции суммарная напряженность поля будет представлять собой векторную сумму напряженностей полей каждого из зарядов:  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ .

Полный поток напряженности поля через эту поверхность есть:

$$\Phi = \int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = \int_S \sum_i (\vec{E}_i \cdot \vec{n}) dS = \sum_i \int_S (\vec{E}_i \cdot \vec{n}) dS = \sum_i \Phi_i.$$

Используя (15.9), представляем потоки от отдельных зарядов системы как  $\Phi_i = q_i/\epsilon_0$  и получаем соотношение, известное как **теорема Остроградского—Гаусса**:

♦ *поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на  $\epsilon_0$ :*

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad \blacklozenge \quad (15.10)$$

Если полный заряд внутри поверхности равен нулю, то и поток через нее равен нулю. В частности, он равен нулю, если поверхность вообще не охватывает зарядов (все  $q_i = 0$ ), как это было, например, для полусферы в однородном постоянном электрическом поле. Подчеркнем еще раз, что речь идет о *воображаемых* поверхностях, очерченных вокруг зарядов; нет никакой необходимости, чтобы эти поверхности были реализованы в виде тех или иных металлических, пластиковых или других оболочек.

## 15.9 Плотность заряда

Так как элементарный заряд — заряд электрона — весьма мал, а макроскопические тела содержат очень большое количество элементарных зарядов, распределения зарядов внутри таких тел можно считать непрерывными. Это позволяет ввести понятие плотности заряда:

- 1) объемная плотность заряда:  $\rho_e = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta q / \Delta V$ , где  $\Delta V$  — элемент объема;
- 2) поверхностная плотность заряда  $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta q / \Delta S$ , где  $\Delta S$  — площадь элемента поверхности;
- 3) линейная плотность заряда:  $\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \Delta q / \Delta l$ , где  $\Delta l$  — элемент длины заряженной линии.

Здесь всюду  $\Delta q$  — заряд рассматриваемого элемента (объема, поверхности, линии). Использование представления о том или ином распределении зарядов по объему или поверхности тела вместе с принципом суперпозиции существенно расширяет наши возможности описания электрических полей.

**Задача 15.76.** Электрический заряд  $Q = 50$  нКл равномерно распределен по тонкому стержню длиной  $a = 15$  см. На продолжении оси стержня на расстоянии  $r = 10$  см от ближайшего его конца находится точечный заряд  $q = 100$  нКл (рис. 15.10). Определить силу  $F$  взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

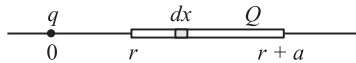


Рис. 15.10. Взаимодействие заряженного стержня с точечным зарядом

**Решение.** В этой задаче силу  $F$  нельзя определить, используя непосредственно закон Кулона (хотя бы потому, что неясно, что принять за расстояние от заряда до стержня). Поскольку, по условиям задачи, мы не имеем права считать, что  $a \ll r$ , применение закона Кулона, справедливого *только* для точечных зарядов, требует некоторых ухищрений. Условие равномерного распределения заряда означает, что линейная плотность  $\tau$  постоянна вдоль стержня и определяется как  $\tau = Q/a$ . Введем ось  $x$ , направив ее от заряда  $q$  (его местонахождение взято за начало координат) вдоль стержня. Тогда координата ближайшего конца стержня равна  $r$ , а дальнего —  $(r+a)$ . Рассмотрим участок стержня бесконечно малой длины  $dx$ . На нем находится электрический заряд  $dQ = (Q/a) dx$ . Здесь мы воспользовались данным выше определением линейной плотности заряда. Поскольку длина  $dx$  участка пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием  $x$  от него до заряда  $q$ , мы определяем силу взаимодействия  $dF$  этого



участка с зарядом  $q$  по закону Кулона:

$$dF = k \frac{dQ q}{x^2} = k \frac{q Q}{a} \frac{dx}{x^2}.$$

Теперь мы воспользуемся принципом суперпозиции и найдем сумму всех сил от различных таких участков, расположенных в разных точках  $x$ , где  $r \leq x \leq r+a$ . Задача облегчается тем, что все эти силы имеют одинаковое направление и потому векторная сумма может быть заменена на простую алгебраическую. А сумма бесконечного числа бесконечно малых сил  $dF$  является, как известно, интегралом:

$$F = \int dF = k \frac{qQ}{a} \int_r^{r+a} \frac{dx}{x^2} = k \frac{qQ}{a} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+a} \right) = k \frac{qQ}{r(r+a)}. \quad (15.11)$$

Подставляя сюда численные значения, находим

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{50 \cdot 10^{-9} \times 100 \cdot 10^{-9}}{0,1(0,1 + 0,15)} = 1,8 \cdot 10^{-3} = 1,8 \text{ мН}.$$

Видно, что при  $r \gg a$  выражение (15.11) для силы взаимодействия переходит в обычную формулу закона Кулона. ■

Разделив силу на заряд, получим напряженность  $E = F/q$  поля на оси стержня. Аналогичным методом можно в принципе рассчитать поле в произвольной точке. Более того, с помощью компьютера можно таким путем найти напряженность электрического поля в *любой* точке при *любом* распределении зарядов. Аналитически решить такую задачу в общем случае, конечно, невозможно. Но есть распределения зарядов, обладающие высокой степенью симметрии. Для них расчет полей особенно прост, даже проще, чем в рассмотренном примере. К таким задачам мы и переходим в следующем разделе.

## 15.10 Применение теоремы Остроградского—Гаусса

### Поле равномерно заряженной сферы

Поскольку сфера заряжена равномерно, все направления от ее центра равноправны. Иными словами, при любом вращении сферы вокруг центра в системе зарядов ничего не изменяется. Значит, не должно измениться при таком вращении и электрическое поле. Это может быть только в том случае, если направление вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  совпадает с направлением радиуса-вектора  $\vec{r}$ , а величина  $E = |\vec{E}|$  зависит только от  $r = |\vec{r}|$ . Такое поле называется центрально-симметричным, а силы (как известно из механики, см. раздел 4.4), называются центральными.

Для применения теоремы Остроградского—Гаусса мысленно опишем вокруг заряженной сферы воображаемую сферу большего радиуса  $r$  с тем же центром. Всюду на этой сфере величина напряженности поля  $E$  принимает одно и то же значение, а вектор  $\vec{E}$  ортогонален поверхности сферы. Коль скоро это так, величина потока вектора напряженности электрического поля рассчитывается без труда:  $\Phi = 4\pi r^2 E$ .

В силу теоремы Остроградского—Гаусса,

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (15.12)$$

где  $q$  — полный заряд на заряженной сфере. Отсюда

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > R. \quad (15.13)$$

Поле вне равномерно заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда, помещенного в ее центр. Вблизи поверхности сферы поле равно:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (15.14)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда сферы.

Внутри сферы поля нет, так как там отсутствуют заряды:

$$E = 0, \quad r < R.$$

### Поле бесконечно длинного заряженного цилиндра

Из соображений симметрии следует, что вектор напряженности поля  $\vec{E}$  в любой точке пространства должен быть направлен вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к оси цилиндра, а величина напряженности может зависеть только от расстояния  $r$  от оси цилиндра. Обращаем внимание: если ось  $z$  совпадает с осью цилиндра, то  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , в то время как в предыдущем разделе  $r$  было расстоянием до начала координат  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Найдем поток вектора напряженности электрического поля через воображаемую цилиндрическую поверхность радиусом  $r$  и длиной  $l$ , соосную нашему заряженному цилиндру. Поток через основания цилиндрической поверхности равен нулю, потому что силовые линии их не пересекают, будучи параллельными основаниям. Поток через боковую поверхность, как и для сферы, равен произведению напряженности  $E$  на площадь поверхности  $S = 2\pi r l$ , поскольку скалярное произведение  $\vec{E} \cdot \vec{n}$ , как следует из соображений симметрии, принимает одинаковое значение  $E$  во всех точках воображаемой цилиндрической поверхности:

$$\Phi = \int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = E \int_S dS = ES = E 2\pi r l. \quad (15.15)$$

При  $r > R$  (где  $R$  — радиус заряженного цилиндра) внутри воображаемой цилиндрической поверхности находится заряд  $q = \tau l$ , где  $\tau$  — линейная плотность заряда цилиндра длиной  $l$ . Согласно теореме Остроградского—Гаусса, получаем:

$$E 2\pi r l = \frac{\tau l}{\epsilon_0}. \quad (15.16)$$

Отсюда напряженность поля бесконечно длинного заряженного цилиндра на расстоянии  $r$  от его оси равна:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad r > R. \quad (15.17)$$

При  $r < R$  внутри воображаемой цилиндрической поверхности нет зарядов, и потому поле равно нулю.

## Поле бесконечной заряженной плоскости

Из соображений симметрии очевидно, что вектор напряженности поля должен быть направлен перпендикулярно плоскости (рис. 15.11), причем  $E$  может зависеть лишь от расстояния до нее.

Пусть плоскость пересечена воображаемой цилиндрической поверхностью с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями площадью  $\Delta S$ , параллельными ей. Пусть также основания расположены на одинаковом расстоянии от плоскости. Из соображений симметрии поток вектора напряженности поля через боковую поверхность равен нулю, так как линии напряженности поля ей параллельны. Напряженность поля на основаниях ортогональна им и одинакова по абсолютной величине:  $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = E$ . Поэтому полный поток равен

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = E(\Delta S + \Delta S) = 2E \Delta S. \quad (15.18)$$

Внутри воображаемой цилиндрической поверхности находится заряд  $q = \sigma \Delta S$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда на плоскости. По теореме Остроградского—Гаусса,  $\Phi = q/\varepsilon_0$ , и напряженность поля заряженной плоскости равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (15.19)$$

Итак, поле бесконечной равномерно заряженной плоскости однородно (не зависит от расстояния до нее) и перпендикулярно плоскости.

## Поле плоского конденсатора

Определим напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными разноименно с одинаковыми плотностями (модель плоского конденсатора). Как видно из рис. 15.12, напряженность поля между двумя бесконечными параллельными плоскостями, имеющими поверхностные плотности заряда  $(-\sigma)$  и  $(+\sigma)$ , равна сумме напряженностей полей, создаваемых обеими плоскостями, т. е.

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (15.20)$$

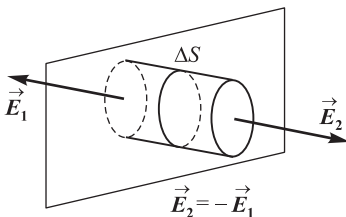


Рис. 15.11. Электрическое поле заряженной плоскости

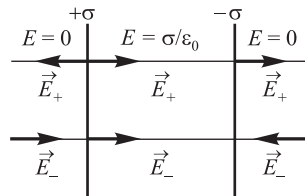


Рис. 15.12. Электрическое поле плоского конденсатора

Вне плоскостей векторы от каждой из них направлены в противоположные стороны и взаимно уничтожаются. Поэтому напряженность в пространстве вне плоскостей равна нулю ( $E = 0$ ).

## 15.11 Работа сил поля при перемещении заряда

Элементарная работа по перемещению вдоль вектора  $d\vec{l}$  точечного электрического заряда  $q_{\text{пр}}$  в электрическом поле с напряженностью  $\vec{E}$  в соответствии с определением работы силы  $\vec{F} = q_{\text{пр}}\vec{E}$  равна

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_{\text{пр}} E \cos \alpha dl, \quad (15.21)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{E}$  и  $d\vec{l}$ . Если  $dA > 0$ , то работа совершается электрическим полем, если  $dA < 0$ , то работа совершается против сил поля.

Работа сил поля при конечном перемещении заряда  $q_{\text{пр}}$  из точки  $a$  в точку  $b$  равна

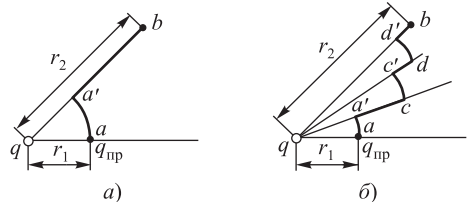
$$A = \int_a^b q_{\text{пр}} E \cos \alpha dl. \quad (15.22)$$

Докажем теперь, что *работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда, зависит не от траектории заряда, но лишь от его начального и конечного положений*. Пусть «пробный» заряд  $q_{\text{пр}}$  перемещается в поле заряда  $q$  из точки  $a$ , удаленной от  $q$  на расстояние  $r_1$ , в точку  $b$ , удаленную от  $q$  на расстояние  $r_2$ , по линии  $a - a' - b$  (рис. 15.13, а). Поле точечного заряда радиально, поэтому работа на участке  $a - a'$  не производится, так как перемещение заряда  $q_{\text{пр}}$  совершается перпендикулярно вектору  $\vec{E}$ . Следовательно, работа переноса «пробного» заряда от  $a$  к  $b$  равна:

$$A = \int_a^b E q_{\text{пр}} \cos \alpha dl = \frac{q q_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q q_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (15.23)$$

Выберем более сложную линию перемещения «пробного» заряда (рис. 15.13, б):  $a - a' - c - c' - d - d' - b$ . Траекторией его движения будет то дуга окружности, то радиус, причем при перемещении по дугам  $a - a'$ ,  $c - c'$ ,  $d - d'$  работа не совершается.

Каждый раз, когда путь идет по радиусу, интегрируется соотношение  $dr/r^2$ . По первому радиальному участку интеграл берется в пределах от  $r_1$  до  $r_c$ , по следующему от  $r_c$  до  $r_d$  и, наконец, от  $r_d$  до  $r_2$ . Сумма всех этих интегралов



**Рис. 15.13.** Вычисление работы по перемещению пробного заряда  $q_{\text{пр}}$  в поле заряда  $q$

равна общему интегралу в пределах от  $r_1$  до  $r_2$ , т. е. ответ получается тот же, что и в первом случае. Очевидно, что для пути, составленного из произвольного числа участков такого же вида, получится тот же результат. Поскольку любую траекторию можно составить из бесконечно малых участков этого же вида, мы приходим к общему заключению:

$$A = \int_a^b q_{\text{пр}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q_{\text{пр}}q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (15.24)$$

т. е. работа  $A$  не зависит от траектории перемещения заряда  $q_{\text{пр}}$  и определяется только его начальным и конечным положениями. Это, в свою очередь, означает что работа при перемещении  $q_{\text{пр}}$  по замкнутому контуру равна нулю:  $\oint dA = 0$ .

Мы показали это для поля, создаваемого точечным зарядом  $q$ , но, благодаря принципу суперпозиции, этот же вывод справедлив для поля любой системы неподвижных зарядов (т. е. для любого электростатического поля). Как известно из механики, поля, работа в которых не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положением тел, называются потенциальными. **Условие потенциальности электростатического поля** можно записать в виде  $\oint dA = 0$  или

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.} \quad (15.25)$$

Выражение  $\oint (\vec{E} \cdot d\vec{l})$  называется **циркуляцией** вектора  $\vec{E}$  по замкнутому контуру. Таким образом, условие потенциальности электрического поля неподвижных зарядов (или электростатического поля) можно сформулировать в следующем виде: **циркуляция вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  по любому замкнутому контуру равна нулю.**

Вывод о равенстве нулю циркуляции вектора  $\vec{E}$  несправедлив, если поле создается движущимися зарядами.

## 15.12 Потенциал электростатического поля

Итак, работа электростатических сил по перемещению пробного заряда  $q_{\text{пр}}$  из точки  $a$  в точку  $b$  не зависит от формы траектории, по которой движется заряд, а зависит от положения начальной и конечной точек траектории тела. Работа перемещения пробного заряда  $q_{\text{пр}}$  в поле другого точечного заряда  $q$  определяется формулой (15.24). Из механики известно, что тело, находящееся в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией, и работу сил поля по перемещению этого тела можно представить в виде разности потенциальных энергий в начале и в конце пути:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = -\Delta W. \quad (15.26)$$

Потенциальную энергию можно отсчитывать от любого уровня, так как физический смысл имеет лишь разность потенциальных энергий.

Если потенциальную энергию заряда  $q_{\text{пр}}$ , находящегося в точке, бесконечно удаленной от заряда  $q$ , создающего поле, принять за нуль ( $W_\infty = 0$ ), то потенциальная энергия  $W$  заряда  $q_{\text{пр}}$ , находящегося в какой-либо точке поля, будет

численно равна работе, совершаемой силами поля при перемещении заряда  $q_{\text{пр}}$  из этой точки поля в бесконечность:

$$W = \frac{q_{\text{пр}}q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad (15.27)$$

где  $r$  — расстояние между зарядами.

♦ **Потенциалом  $\varphi$  электростатического поля** называется физическая величина, равная отношению потенциальной энергии заряда  $q_{\text{пр}}$  в данной точке пространства, к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{W}{q_{\text{пр}}}. \quad \blacklozenge \quad (15.28)$$

Потенциал является энергетической характеристикой поля и равен работе, которую надо совершить против сил электрического поля при перенесении единичного положительного заряда из бесконечности, где потенциальная энергия условно считается равной нулю, в данную точку поля.

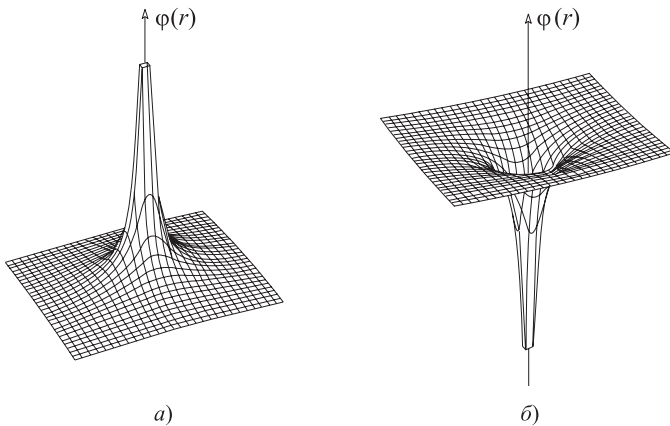
Таким образом, с учетом формул (15.27) и (15.28) потенциал точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (15.29)$$

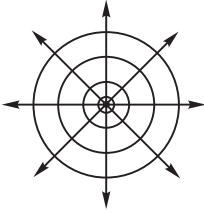
На рисунке 15.14 показан потенциал электрического поля точечного заряда, расположенного в начале координат, в зависимости от координат  $x, y$  при фиксированной третьей координате  $z = 0$ .

В силу введенного определения потенциала  $\varphi$  работа по перемещению заряда  $q_{\text{пр}}$  в электрическом поле из точки 1 в точку 2 определяется разностью потенциалов этих точек:

$$A = -q_{\text{пр}}\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (15.30)$$



**Рис. 15.14.** Вид кулоновского потенциала  $\varphi \propto 1/r$  вблизи положительного (а) и отрицательного (б) точечных зарядов  $q$ . В случае (а) положительный пробный заряд  $q_{\text{пр}}$  «натывается» на бесконечно высокий потенциальный барьер, препятствующий проникновению к центру. В случае (б) на положительный пробный заряд действует сила притяжения, и он стремится скатиться в образовавшуюся потенциальную яму



**Рис. 15.15.** Эквипотенциальные поверхности (сферы) и силовые линии поля положительного точечного заряда

Для наглядной интерпретации электрического поля наряду с силовыми линиями вводят *эквипотенциальные поверхности*. Совокупность точек, имеющих равный потенциал, образует так называемую эквипотенциальную поверхность, или поверхность равного потенциала  $\varphi = \text{const}$ . При перемещении заряда вдоль эквипотенциальной поверхности работа не совершается, так как  $\Delta\varphi = 0$ . Это означает, что вектор перемещения ортогонален вектору силы. Другими словами, силовые линии поля всюду ортогональны эквипотенциальным поверхностям (рис. 15.15).

Механическую аналогию мы уже разбирали в разделе 4.4, когда говорили о топографических картах, изогипсах (линиях равной высоты над уровнем моря) и ортогональных к ним линиях скорейшего спуска, описываемых градиентом скалярного поля.

### 15.13 Связь потенциала с напряженностью поля

Для выражения работы электростатического поля по перемещению заряда  $q_{\text{пр}}$  на пути  $d\vec{l}$  можно написать два выражения:

$$\begin{aligned} dA &= -q_{\text{пр}}d\varphi; \\ dA &= q_{\text{пр}}\vec{E} \cdot d\vec{l} = q_{\text{пр}}(E_x dx + E_y dy + E_z dz). \end{aligned} \quad (15.31)$$

Приравнивая правые части этих выражений и сокращая величину пробного заряда  $q_{\text{пр}}$ , получаем связь между потенциалом поля и вектором напряженности поля  $\vec{E}$ :

$$-d\varphi = E_x dx + E_y dy + E_z dz. \quad (15.32)$$

Согласно определению дифференциала  $d\varphi$ , компоненты электрического поля равны:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (15.33)$$

Вектор напряженности  $\vec{E}$  можно представить в виде суммы трех взаимно перпендикулярных векторов:

$$\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ &= -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi. \end{aligned} \quad (15.34)$$

Выражение, стоящее в скобках, является дифференциальным оператором, действующим на скаляр  $\varphi$ . Указанная процедура дифференцирования (как уже отмечалось в разделе 4.4 при рассмотрении потенциальной энергии в механике) носит название *градиент* и обозначается как  $\text{grad}$  или  $\nabla$ :

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla\varphi. \quad (15.35)$$

Таким образом,  $\blacklozenge$  *напряженность электрического поля равна взятому с обратным знаком градиенту потенциала поля.*  $\blacklozenge$  Знак «минус» в формуле (15.35) указывает на то, что вектор напряженности поля  $\vec{E}$  всегда направлен в сторону убывания потенциала. Пользуясь образом горного рельефа, можно сказать, что операция «градиент» — это математический метод определения направления скорейшего спуска по заданному профилю местности. И оброненный туристом мячик покатится, естественно, вниз под горку, т. е. в направлении скорейшего убывания потенциала.

Вспомним определение производной по направлению (4.30). При перемещении в электростатическом поле в произвольном направлении, заданном единичным вектором  $\vec{e}$ , проекция на него вектора напряженности  $\vec{E}$  дается выражением

$$E_e = \vec{e} \cdot \vec{E} = -\vec{e} \cdot \text{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial e}. \quad (15.36)$$

При перемещении в направлении, ортогональном вектору напряженности (когда  $\vec{e} \cdot \vec{E} = 0$ ), производная потенциала вдоль этого направления равна нулю, т. е. перемещение происходит вдоль эквипотенциальной поверхности. Это доказывает утверждение, что силовые линии всюду ортогональны эквипотенциальным поверхностям.

Единицы измерения для напряженности и потенциала легко установить, исходя из их определения. Размерность потенциала

$$[\varphi] = \frac{[A]}{[q]} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = 1 \text{ В (вольт)}. \quad (15.37)$$

В СИ за единицу потенциала принимается вольт. Потенциал в 1 вольт — это потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности заряда в 1 кулон нужно совершить работу в 1 джоуль. Из соотношений (15.31) следует также связь размерности напряженности электрического поля с размерностью потенциала, которая уже встречалась нам выше:  $[E] = [\varphi]/[L] = \text{В/м}$ .

## 15.14 Примеры расчета потенциала

Начнем с потенциалов систем, для которых мы уже знаем электрическое поле.

### Потенциал равномерно заряженной сферы

Поле вне сферы ( $r > R$ ) совпадает с полем точечного заряда [см. (15.13)], поэтому в этой области потенциалы сферы и точечного заряда также совпадают. Внутри сферы поле отсутствует, поэтому потенциал постоянен при  $r < R$ . Потенциал как энергетическая характеристика поля не может меняться скачком, т. е. потенциал



есть непрерывная функция. Поэтому внутри сферы он равен тому значению, которое имеет на ее поверхности. В итоге:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} \frac{1}{r}, & r \geq R, \\ \frac{1}{R}, & r \leq R. \end{cases} \quad (15.38)$$

### Потенциал длинного заряженного цилиндра

Здесь мы используем выражение (15.17) для поля вне цилиндра ( $r \geq R$ ) и связь (15.33) между полем и потенциалом. Потенциал поля цилиндра зависит от расстояния до его оси:  $\varphi(r) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2} = 0, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{x}{r}, \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{y}{r}, \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

В векторной форме эти равенства записываются как

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (15.39)$$

где  $\vec{r}$  — вектор, проведенный в точку наблюдения от оси цилиндра и ортогонально к ней (не путать с радиусом-вектором!).

Сравнивая с (15.17), находим уравнение для потенциала поля вне цилиндра

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (15.40)$$

Внутри цилиндра потенциал постоянен, и мы положим его равным нулю. Тогда

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right), & r \geq R, \\ 0, & r \leq R. \end{cases} \quad (15.41)$$

### Потенциалы заряженной плоскости и плоского конденсатора

Поле плоскости ортогонально к ней. Если это направление взять за ось  $x$ , то  $\vec{E} = \vec{i} \operatorname{sgn}(x) (\sigma/2\epsilon_0)$ . Здесь

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Из соотношения  $E_x = -d\varphi/dx$  получаем для потенциала:

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |x| + \varphi(0), \quad (15.42)$$

где  $\varphi(0)$  — произвольная постоянная интегрирования (потенциал плоскости).

Пусть плоский конденсатор образован положительно заряженной плоскостью, ортогональной оси  $x$  и пересекающей ее в точке  $x = 0$ , и параллельной ей отрицательно заряженной плоскостью, пересекающей ось  $x$  в точке  $x = d$ . Потенциал поля такой системы равен сумме потенциалов плоскостей:

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |x| + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |x - d| + \text{const}. \quad (15.43)$$

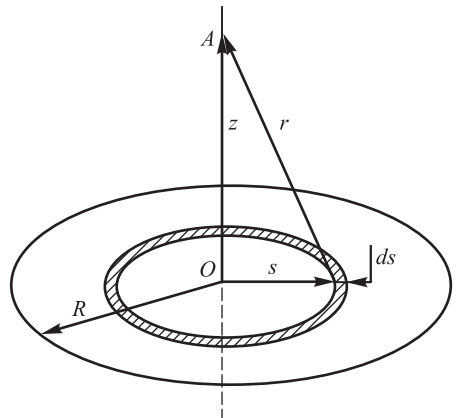
Выберем постоянную интегрирования так, чтобы потенциал левой пластины равнялся нулю:  $\varphi(x = 0) = 0$ , т. е.  $\text{const} = -(\sigma/2\varepsilon_0)d$ . Тогда выражение (15.43) можно записать в виде

$$\varphi = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} x, & 0 \leq x \leq d, \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d, & x \geq d. \end{cases} \quad (15.44)$$

### Потенциал поля заряженного диска

Зная потенциал поля точечного заряда (15.29), мы всегда можем вычислить потенциал поля, создаваемого любым распределением зарядов. Здесь снова на помощь приходит принцип суперпозиции (хотя практическая его реализация в других случаях может быть и нелегкой).

Найдем для примера потенциал электрического поля, создаваемого на оси диска радиусом  $R$ , равномерно заряженного с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  (рис. 15.16). Выделим на диске кольцо радиусом  $s$  и шириной  $ds$  (заштриховано на рисунке). Площадь кольца равна  $2\pi s ds$ , и потому на нем сосредоточен заряд  $dq = 2\pi\sigma s ds$ . Поскольку все элементы кольца находятся на одинаковом расстоянии  $r = \sqrt{s^2 + z^2}$  от точки наблюдения  $A$ , потенциал  $d\varphi$ , создаваемый



**Рис. 15.16.** К вычислению потенциала на оси заряженного диска

кольцом в точке  $A$ , находим, используя все ту же формулу (15.29) для потенциала точечного заряда:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{s ds}{\sqrt{s^2 + z^2}}.$$

Полный же потенциал поля, создаваемый всем диском в точке  $A$ , равен сумме потенциалов  $d\varphi$  от всех возможных колец с радиусами  $s$ , где  $0 \leq s \leq R$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R ds \frac{s}{\sqrt{s^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{s^2 + z^2} \Big|_0^R \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right). \end{aligned} \quad (15.45)$$

В пределе больших расстояний от центра диска  $z \gg R$  имеем разложение

$$\sqrt{R^2 + z^2} = |z| \sqrt{1 + R^2/z^2} \approx |z| \left( 1 + \frac{R^2}{2z^2} + \dots \right),$$

и формула для потенциала переходит в

$$\varphi = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 |z|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |z|},$$

где мы ввели полный заряд диска  $Q = \sigma\pi R^2$ . Мы получили уже знакомую формулу для потенциала точечного заряда (здесь  $|z|$  — расстояние до заряда, обозначенное в (15.29) как  $r$ ). Иными словами, на больших расстояниях поле диска совпадает с полем точечного заряда, как это и должно быть, поскольку издали диск действительно выглядит точкой.

Пользуясь общей формулой (15.34), мы можем найти напряженность электрического поля на оси диска, дифференцируя выражение (15.45):

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \operatorname{sgn}(z) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right). \quad (15.46)$$

Так как на оси потенциал не зависит от координат  $x, y$ , соответствующие компоненты поля равны нулю:  $E_x = E_y = 0$ .

## Поле и потенциал шара, равномерно заряженного по объему

Пусть дан шар радиусом  $R$  и ему сообщен заряд  $Q$ , равномерно распределенный по объему. Вследствие симметрии поле направлено по радиусам шара. Вне шара ( $r > R$ ) оно совпадает с полем точечного заряда. Проведем мысленно сферу радиусом  $r < R$  внутри шара. По теореме Остроградского—Гаусса, напряженность поля на поверхности сферы дается выражением  $E(r) = q(r)/4\pi\epsilon_0 r^2$ , где  $q(r)$  — заряд внутри сферы. Объемная плотность  $\rho$  заряда равна отношению полного заряда  $Q$  к объему шара:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}.$$

Заряд  $q(r)$  находим как произведение  $\rho$  на объем, ограниченный воображаемой сферой:

$$q(r) = \rho \frac{4\pi r^3}{3} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Подставляя  $q(r)$  в выражение  $E(r)$ , находим поле на расстоянии  $r < R$  от центра шара. В итоге получаем:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \begin{cases} \frac{r}{R}, & r \leq R, \\ \frac{R^2}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (15.47)$$

Напомним, что поле направлено по радиусу-вектору (в сторону убывания потенциала):  $\vec{E} = (\vec{r}/r) E$ .

Потенциал вне шара совпадает с потенциалом точечного заряда. Для потенциала внутри шара имеем уравнение

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r}{R},$$

откуда

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r^2}{2R} + \text{const.}$$

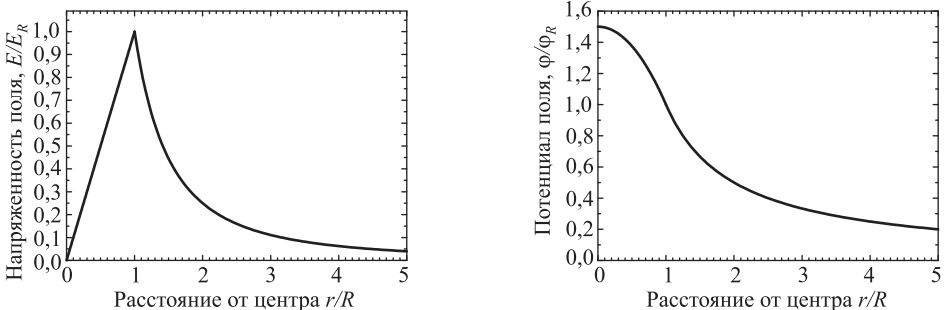
Чтобы при приближении к поверхности шара  $r \rightarrow R$  внешний и внутренний потенциалы совпали, постоянную интегрирования надо положить равной

$$\text{const} = \frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Получаем в итоге:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \times \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}, & r \leq R, \\ \frac{R}{r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (15.48)$$

Зависимости электрического поля и потенциала равномерно заряженного шара от относительного расстояния  $r/R$  показаны на рис. 15.17.



**Рис. 15.17.** Относительные напряженность (а) и потенциал (б) электрического поля равномерно заряженного шара радиусом  $R$ , выраженные в единицах напряженности  $E_R = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$  и потенциала  $\varphi_R = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$  на его поверхности ( $r = R$ )

### 15.15 Закон Кулона и размерность пространства

Пространство, в котором мы живем, имеет три измерения. Иными словами, нужны три координаты (например,  $x, y, z$  в декартовой или  $r, \theta, \varphi$  в сферической системах) для задания положения точки. Оказывается, число 3 тесно связано с формой закона Кулона. Мы видели, что теорема Остроградского—Гаусса следует из закона Кулона. Верно и обратное, закон Кулона можно вывести из теоремы Остроградского—Гаусса. Но эта теорема носит более общий характер, чем закон Кулона. В частности, она применима к пространствам с размерностью  $D$ , где  $D$  необязательно должно быть равно трем.

В самом деле, теорема в сущности утверждает, что силовые линии начинаются и заканчиваются на зарядах или уходят в бесконечность. Размерность пространства не играет здесь роли. Поэтому давайте предположим, что мы живем в пространстве с какой-то размерностью  $D$  и посмотрим, какой будет физика в этом странном мире. Возьмем точечный заряд и мысленно окружим его сферой радиусом  $r$ . Прежде чем продолжать знакомство с  $D$ -мерной физикой, условимся о терминологии.

Объем сферы будет измеряться в единицах  $m^D$ , подобно тому, как в нашем мире мы измеряем объем в  $m^3$ . Так, в двумерном пространстве роль объема играет наша площадь. Действительно, сфера — это геометрическое место точек пространства, равноудаленных от центра. Согласно этому определению, двумерная сфера — это окружность радиусом  $r$ , двумерные существа считали бы ее объемом то, что мы воспринимаем как площадь круга ( $\pi r^2$ ). В этом параграфе мы будем называть объемом сферы в  $D$ -мерном пространстве ту величину, которая пропорциональна  $r^D$ . Аналогично, площадь поверхности  $D$ -мерной сферы пропорциональна  $r^{D-1}$ . В двумерном пространстве это — длина окружности  $2\pi r$ , и именно ее двумерные существа воспринимали бы как площадь поверхности. В то же время, площадь поверхности в четырехмерном мире — это наши трехмерные объемы.

Итак, площадь сферы в  $D$ -мерном мире пропорциональна  $r^{D-1}$  (коэффициент пропорциональности сейчас нам неважен). Поток вектора напряженности электрического поля в таком мире пропорционален  $E r^{D-1}$  и должен быть пропорционален также величине электрического заряда внутри сферы (теорема Остроградского—Гаусса). Отсюда получаем, что

$$E = K \frac{q}{r^{D-1}}, \quad (15.49)$$

где  $K$  — некий коэффициент пропорциональности. Аналогичное выражение справедливо для гравитационного поля в  $D$ -мерном мире.

При  $D = 3$  получаем отсюда закон обратных квадратов  $E \propto r^{-2}$  (закон Кулона). При  $D = 2$  находим  $E \propto r^{-1}$ . На самом деле мы уже знакомы с таким поведением электрического поля. Именно такой закон (15.17) мы вывели для поля бесконечного заряженного цилиндра. Если как следует подумать и вспомнить расположение силовых линий цилиндра, то станет ясно, что ничего не зависит от координаты вдоль оси цилиндра. Таким образом, эта система имитирует электрическое поле в двумерном мире. Теперь легче понять, что

заряженная плоскость имитирует точечный заряд в одномерном мире: все зависит только от одной координаты — расстояния до плоскости. Но мы нашли выше, что электрическое поле от этого расстояния не зависит. И из формулы (15.49) при  $D = 1$  также следует, что напряженность  $E \propto r^0$ , т. е. постоянна. В четырехмерном же мире закон Кулона принял бы форму  $E \propto 1/r^3$ . Таким образом, закон обратных квадратов является прямым следствием трехмерности нашего мира.

Из выражения (15.49) следует поведение потенциала в  $D$ -мерном мире:

$$\varphi \propto \begin{cases} 1/r^{D-2}, & D \geq 3; \\ \ln r, & D = 2; \\ r, & D = 1. \end{cases} \quad (15.50)$$

Дифференцирование этих выражений (применение операций grad) действительно дает выражения для напряженности электрического поля в пространствах разной размерности.

Отсюда следуют любопытные выводы. Поскольку в одно- и двумерном мирах потенциалы растут на бесконечности, нужна бесконечно большая работа, чтобы развести два притягивающихся заряда. Это означает, что в мирах малой размерности возможно лишь финитное движение двух притягивающихся тел (зарядов, масс). Напомним, что финитным называется движение в ограниченной области пространства. Поэтому в мирах с  $D = 1, 2$  нельзя ионизировать атом, нельзя запустить спутник за пределы Солнечной системы и т. п. В таком мире не было бы химических реакций, не могли бы эволюционировать галактики и звезды. Словом, жизнь там была бы застойно скучна.

Можно было бы ожидать более приятного времяпрепровождения в многомерных ( $D \geq 4$ ) мирах. Увы, и это оказывается иллюзией. Исследование уравнения движения

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{K}{r^{D-1}}$$

приводит к выводу, что при  $D \geq 4$  в сущности отсутствует финитное движение: оно реализуется только для круговых орбит, да и то является неустойчивым — малейшее возмущение приводит к падению электрона (планеты) на притягивающий центр или его (ее) убеганию на бесконечно большое расстояние. Выходит, в таком мире атомы, планетные системы и все остальное вообще не могло бы образоваться. Никакой стабильности в мирах высшей размерности — вот альтернатива «застойным» маломерным мирам. Только при  $D = 3$  возможно как устойчивое финитное, так и инфинитное движения. Получается, что трехмерное пространство — единственно удобная форма существования и движения материи, по крайней мере, известных нам ее видов, которые мы изучаем в физике.

## Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон сохранения электрического заряда. Приведите примеры.
2. Сформулируйте закон Кулона.

3. Почему экспериментаторы никогда не решаются утверждать, что параметр  $\delta$  в модификации закона Кулона  $F \approx 1/r^{2\pm\delta}$  в точности равен нулю? Почему мы все-таки уверены в справедливости закона Кулона?
4. Дайте определение единицы электрического заряда.
5. Дайте определение вектора  $\vec{E}$  напряженности электрического поля.
6. Каковы единицы измерения напряженности электрического поля?
7. Сформулируйте принцип суперпозиции электростатических полей.
8. Дайте определение и сформулируйте основные свойства силовых линий электростатического поля.
9. Дайте определение и изобразите графически однородное и неоднородное электростатические поля.
10. Напишите выражения для потока вектора напряженности электрического поля через *a)* бесконечно малую площадку  $dS$ , *б)* через произвольную поверхность  $S$ .
11. Сформулируйте и запишите теорему Остроградского—Гаусса.
12. Изобразите графически силовые линии электрических полей следующих источников: *a)* точечного заряда (положительного и отрицательного), *б)* двух одноименных зарядов, *в)* двух разноименных зарядов, *г)* равномерно заряженной сферы, *д)* равномерно заряженной плоскости, *е)* двух одноименно заряженных плоскостей с одинаковой поверхностной плотностью заряда, *ж)* двух разноименно заряженных плоскостей с одинаковой абсолютной величиной поверхностной плотности заряда.
13. Постройте графики изменения напряженности электрического поля с расстоянием для следующих источников: *a)* равномерно заряженной сферы, *б)* равномерно заряженного бесконечного цилиндра, *в)* равномерно заряженной плоскости, *г)* плоского конденсатора.
14. Дайте определения протяженных зарядов (линейных, поверхностных, объемных) и соответствующих им плотностей  $\tau, \sigma, \rho$ .
15. Каковы размерности объемной, поверхностной и линейной плотностей заряда?
16. С помощью анализа размерностей выведите выражения для напряженности электрического поля, создаваемого теми же источниками, что и в вопросе 13. Сравните с точными выражениями, полученными в тексте. Объясните разницу.
17. Что такое потенциал электрического поля? Какова его связь с работой сил поля по перемещению заряда?
18. В каких единицах измеряется потенциал электрического поля?
19. Постройте графики изменения потенциала электрического поля, создаваемого теми же источниками, что и в вопросе 13.
20. С помощью анализа размерностей выведите выражения для потенциала электрического поля, создаваемыми теми же источниками, что и в вопросе 13. Сравните с точными выражениями, полученными в тексте. Объясните разницу.
21. Выведите выражения (15.42) и (15.44) для потенциалов заряженной плоскости и плоского конденсатора.
22. Какова связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля? Рассмотрите пример однородного поля в плоском конденсаторе и общий случай неоднородного поля.
23. Что такое эквипотенциальная поверхность? Как расположены силовые линии электростатического поля по отношению к эквипотенциальным поверхностям?

## Глава 16

# Проводники в электрическом поле

Все тела в природе по их электрическим свойствам можно условно разделить на две большие категории — хорошо пропускающие электрический ток (проводники) и практически не пропускающие ток изоляторы (диэлектрики). Термин «диэлектрик» был введен М. Фарадеем. Деление веществ на проводники и диэлектрики по их способности проводить ток достаточно условно. В сильных электрических полях даже хорошие диэлектрики пропускают электрический ток. Однако существуют вещества, занимающие промежуточное положение между проводниками и диэлектриками, которые проводят ток лишь при определенных условиях, т. е. обладают свойствами как проводников, так и диэлектриков. Они называются полупроводниками и будут рассмотрены во втором томе. Сейчас же нас интересует поведение проводников, помещенных в электростатическое поле.

### 16.1 Свободные заряды в проводниках

Электрические свойства тел зависят от их внутреннего строения. Так, в металлах при обычных условиях имеется много «свободных» электронов, оторвавшихся от ионов кристаллической решетки и почти беспрепятственно перемещающихся по объему металла. В отсутствие внешних полей движение свободных электронов совершенно хаотично. Включение сколь угодно малого внешнего электрического поля вызывает направленное движение электронов. Такие вещества, в которых при обычных условиях имеется достаточно много «свободных» носителей заряда, называются *проводниками*.

В отсутствие внешнего электрического поля внутри незаряженного проводника свободные заряды находятся в равновесии. Это означает, что заряд, переносимый «свободными» электронами через любое поперечное сечение проводника, в среднем равен нулю. Таким образом, внутри и вне уединенного незаряженного проводника среднее поле и, следовательно, средняя плотность зарядов равны нулю.

Сейчас нас интересуют ответы на три вопроса. Что произойдет, если изолированному проводнику сообщить некоторый избыточный заряд? Что произойдет, если изолированный незаряженный проводник поместить во внешнее электрическое поле? Наконец, каковы свойства *системы* заряженных проводников?



## 16.2 Электрическое поле заряженного проводника

Если к проводнику добавить (отнять) некоторое количество электронов, то он зарядится отрицательно (положительно). Рассмотрим *условия равновесия зарядов на проводнике*.

При равновесии зарядов их направленное движение внутри проводника отсутствует. Это означает, что поле внутри проводника равно нулю:  $E = 0$ . В противном случае ( $E \neq 0$ ) заряды должны были бы двигаться. Поскольку внутри проводника  $E = 0$ , по теореме Остроградского—Гаусса, объемная плотность зарядов внутри проводника равна нулю ( $\rho_e = dq/dV = 0$ ), а избыточные заряды могут быть расположены только на поверхности проводника. Это происходит потому, что одноименные заряды отталкиваются и стремятся расположиться как можно дальше друг от друга. Итак, *при равновесии внутри заряженного проводника нет объемных зарядов, а электрическое поле равно нулю*.

Ответим на вопрос: что будет, если в толще заряженного проводника имеется замкнутая внутренняя полость? Будут ли располагаться заряды также и на ее стенках? Исходя из качественных соображений, мы должны ответить отрицательно: заряды, отталкиваясь друг от друга, расположатся только на *внешней* поверхности проводника. К такому же выводу приводит теорема Остроградского—Гаусса. Если взять такую воображаемую поверхность, которая целиком находится в толще проводника и бесконечно близка к стенкам полости, то во всех точках этой поверхности поле равно нулю, и, следовательно, равен нулю поток вектора электрической напряженности. Значит, на стенках полости зарядов нет.

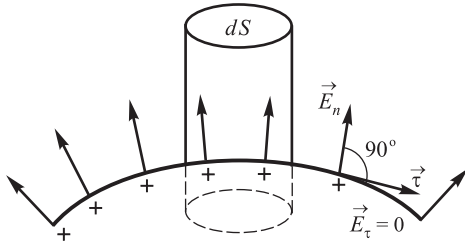
Отсутствие поля внутри заряженного проводника означает постоянство потенциала внутри него:  $\varphi = \text{const}$  поскольку  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi = 0$ . Таким образом, *потенциал на поверхности проводника также постоянен и равен по величине потенциалу в объеме проводника, т. е. поверхность проводника является эквипотенциальной*.

Электрические заряды, располагающиеся на поверхности проводника с некоторой плотностью  $\sigma$ , создают вне проводника электрическое поле. *Вблизи поверхности проводника напряженность поля направлена по нормали  $\vec{n}$  в каждой точке поверхности*, т. е.  $\vec{E} = \vec{n} E_n$ , так как силовые линии ортогональны эквипотенциальной поверхности.

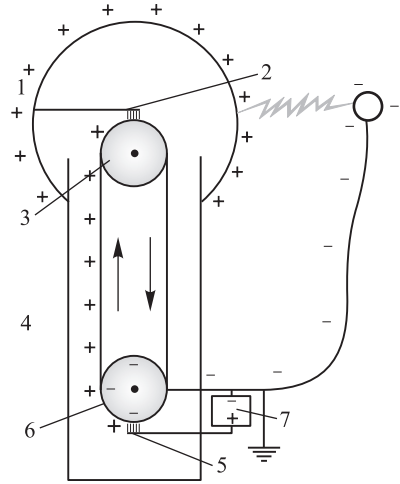
Для вычисления поля вблизи проводника снова используем теорему Остроградского—Гаусса. В качестве воображаемой поверхности возьмем поверхность бесконечно малого цилиндра, расположенного перпендикулярно проводнику так, что одно из его оснований находится вне проводника, а другое — внутри (рис. 16.1).

В этом случае поток через основание внутри проводника равен нулю, так как внутри проводника нет поля. Поток через боковые стенки также равен нулю, поскольку они параллельны вектору напряженности поля. Остается поток через основание площадью  $dS$  вне проводника. Тогда полный поток вектора электрической напряженности  $\vec{E}$  через поверхность цилиндра равен:

$$d\Phi = E_n dS. \quad (16.1)$$



**Рис. 16.1.** Электрическое поле у поверхности изолированного заряженного проводника



**Рис. 16.2.** Схема генератора Ван де Граафа (рисунок из Википедии)

Согласно теореме Остроградского—Гаусса,

$$d\Phi = \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dS = E_n dS,$$

откуда

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{16.2}$$

Таким образом, напряженность электрического поля вблизи поверхности заряженного проводника (с его внешней стороны) пропорциональна поверхностной плотности зарядов. Внутри проводника, напомним, поле равно нулю.

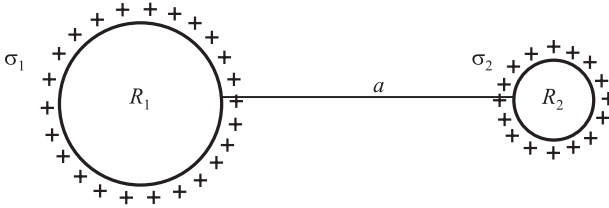
**Задача 16.77.** Исследования атмосферного электричества показали, что у земной поверхности существует стационарное электрическое поле со средней напряженностью  $E = 130 \text{ В/м}$ . Поле это направлено вниз. Пользуясь этими данными и предполагая, что Земля — проводник, оценить полный электрический заряд нашей планеты.

**Решение.** Сначала определим знак этого заряда. Так как поле направлено вниз, к Земле, а силовые линии начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных, мы заключаем, что заряд Земли отрицателен. Далее из уравнения (16.2) находим поверхностную плотность заряда:

$$\sigma = -\varepsilon_0 E = -8,85 \cdot 10^{-12} \times 130 = -1,15 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2.$$

Радиус Земли  $R_{\oplus} = 6370 \text{ км}$ , поэтому площадь ее поверхности  $S = 4\pi R_{\oplus}^2 = 5,10 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$ . Наконец, получаем полный электрический заряд Земли  $Q_{\oplus} = \sigma S = 587 \text{ ККл}$ ! ■

На свойстве зарядов располагаться на поверхности проводника основан принцип действия высоковольтного генератора, изобретенного американским физиком Р. Ван де Граафом (1929). В этом устройстве (рис. 16.2) положительные заряды, генерируемые источником 7 высоковольтного (20–30 кВ) напряжения, с помощью щетки 5 подаются на движущуюся ленту из изоляционного материала 4, надетую на вращающиеся



**Рис. 16.3.** Соединенные проволочкой шары моделируют проводник неправильной формы, поверхность которого имеет в разных точках различные радиусы кривизны. Поверхностная плотность заряда и напряженность электрического поля выше там, где больше кривизна поверхности:  $\sigma_2 > \sigma_1$  при  $R_2 < R_1$

цилиндры 3 и 6 и переносятся к снимающей щетке 2, которая соединена с внутренней поверхностью проводника 1, называемого кондуктором. Он выполнен в виде громадного полого металлического шара ( $R \sim 10$  м), поскольку утечка зарядов с проводника шаровой формы минимальна. По мере накопления на кондукторе зарядов потенциал его растет до тех пор, пока утечка зарядов не станет равна подводимому заряду. Удастся заметно уменьшить размеры собирающего электрода, помещая его в атмосферу сжатого газа, поскольку электрическая прочность газа (т. е. величина напряженности поля, при которой начинается разряд) возрастает с повышением давления. Предельная разность потенциалов, которую удается получить, составляя около  $10^7$  В. В прошлом генераторы Ван де Граафа широко применялись в ядерной физике для ускорения различных заряженных частиц. В настоящее время они используются в основном для изучения грозových разрядов, в учебных и прикладных целях.

Встречающиеся в быту проводники обычно имеют неправильную форму. Сообщенный им заряд растекается по поверхности так, чтобы во всех ее точках потенциал был одинаков. Если проводник не имеет сферической формы, то поверхностная плотность заряда и, стало быть, напряженность электрического поля вблизи проводника будут различными. Чтобы понять главную характерную особенность распределения заряда по поверхности проводника, рассмотрим два шара радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , находящихся на большом расстоянии  $a$  друг от друга ( $a \gg R_1, R_2$ ) и соединенных тонкой проволокой (рис. 16.3). Пусть этой системе, моделирующей проводник неправильной формы, сообщают заряд  $q$ . Из-за того что расстояние между шарами велико, можно считать, что они не влияют друг на друга и что заряды на них расположатся сферически симметрично. Тогда потенциалы шаров будут равны

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}, \quad (16.3)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — заряды на шарах. В электростатическом равновесии потенциалы соединенных проволокой шаров должны быть одинаковы. Приравняв  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и учитывая, что  $q_1 + q_2 = q$ , находим из уравнений (16.3) эти заряды:

$$q_1 = q \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad q_2 = q \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (16.4)$$

Из (16.4) можем теперь получить поверхностные плотности зарядов на шарах:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{q}{4\pi R_1(R_1 + R_2)}, \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{q}{4\pi R_2(R_1 + R_2)}. \quad (16.5)$$

Иначе говоря, поверхностные плотности и, значит, напряженности электрических полей вблизи шаров обратно пропорциональны радиусу кривизны поверхности:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (16.6)$$

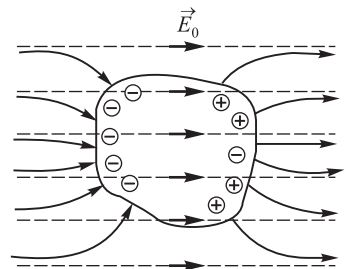
На этом свойстве основан, как известно, принцип действия громоотвода: накопившиеся во время грозы поверхностные заряды создают вблизи его острия высокую напряженность электрического поля. При напряженностях порядка 30 кВ/см наступает пробой воздуха и вокруг острия громоотвода возникает коронный разряд — свечение, напоминающее корону. Накопившиеся заряды стекают в воздух, значительно уменьшая вероятность возникновения разряда между тучей и строением. Но даже если молния все же ударит в заземленный громоотвод, вреда она не причинит, так как заряд уйдет в землю.

### 16.3 Проводники во внешнем электрическом поле

При внесении незаряженного проводника во внешнее электрическое поле свободные заряды начинают двигаться и через очень небольшое время (порядка  $10^{-14}$  с или даже меньше) приходят в равновесие. Создается стационарное распределение зарядов, при котором на одной стороне проводника образуется избыток отрицательных зарядов, а на другой — избыток положительных. Это явление называется *электростатической индукцией* (рис. 16.4).

Поле индуцированных (появившихся на поверхности проводника) зарядов полностью компенсирует внутри проводника внешнее поле. В противном случае внутри проводника происходило бы движение электрических зарядов и распределение не было бы стационарным. Итак, при равновесном состоянии суммарное поле (внешнее и индуцированных зарядов) внутри проводника равно нулю. Поэтому в отношении суммарного поля справедливы выводы, сделанные нами ранее для заряженных проводников в отсутствии внешнего поля.

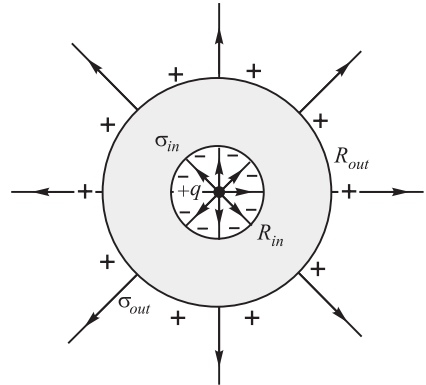
В частности, электрическое поле будет отсутствовать в полости, созданной внутри объема проводника. На свойстве проводников экранировать внешние поля (не пропускать их внутрь области, окруженной проводником) основывается электростатическая защита от действия внешних электростатических полей — так называемая *клетка Фарадея*, которая на английском называется также щитом Фарадея (*Faraday Shield*). На рисунке 16.5 изображен высоковольтный трансформатор, окруженный электростатической защитой. Отметим, что клетка Фарадея защищает и от переменных электрических полей, так как такие поля проникают в металл лишь на небольшие расстояния (*скин-эффект*).



**Рис. 16.4.** Появление индуцированных зарядов на поверхности проводника при воздействии на него внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$



**Рис. 16.5.** Использование клетки Фарадея на электростанции (фото из Википедии)



**Рис. 16.6.** Электрическое поле положительного заряда  $q$ , окруженного металлической оболочкой

Однако следует подчеркнуть, что замкнутый полый проводник экранирует полость внутри себя только от внешних зарядов и полей. Если внести заряды внутрь полости, то там появится и электрическое поле (при том, что в самом проводнике поле по-прежнему должно быть равно нулю). Суммарное поле вблизи проводника перпендикулярно его поверхности и равно

$$E = E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (16.7)$$

где  $\sigma$  — локальная плотность индуцированных зарядов (мы предполагаем, что проводник в целом не заряжен). На практике приходится решать следующую задачу. Дано некоторое внешнее поле. В него вносится проводник заданной формы. Надо найти распределение индуцированных на нем зарядов и те изменения суммарного поля вне проводника, к которым они приводят.

**Задача 16.78.** Дана сферическая металлическая оболочка с внутренним и внешним радиусами  $R_{in}$  и  $R_{out}$  соответственно. В центр полости помещен заряд  $q$ . Найти электрическое поле и потенциал системы, а также распределение зарядов на поверхности оболочки (рис. 16.6).

**Решение.** Благодаря сферической симметрии заряды расположатся на поверхностях оболочки с постоянной поверхностной плотностью:  $\sigma_{in}$  — на внутренней и  $\sigma_{out}$  — на внешней сторонах. Рассмотрим сначала поле внутри оболочки. Проведем воображаемую сферическую поверхность с радиусом  $r < R_{in}$ . Внутри нее находится только заряд  $q$ . Следовательно, поле в полости оболочки будет таким же, как и для изолированного заряда  $q$ . Возьмем теперь поверхность радиусом  $r$ , где  $R_{in} < r < R_{out}$ . Так как поле в металле отсутствует, равно нулю поток через нашу поверхность. Это значит, что полный заряд внутри нее равен нулю. Он складывается из заряда  $q$  и полного заряда на внутренней поверхности, который, стало быть, равен  $-q$ . В то же время, заряд на внутренней поверхности можно определить как  $\sigma_{in} 4\pi R_{in}^2$ , откуда следует  $\sigma_{in} = -q/(4\pi R_{in}^2)$ . Металлическая оболочка в целом была незаряженной, поэтому полный заряд  $-q$ , появившийся на ее внутренней поверхности, должен быть компенсирован полным зарядом  $+q$ , возникшим на внешней поверхности оболочки

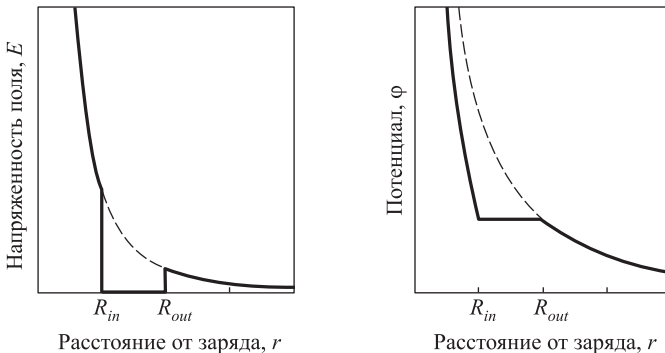
(сохранение электрического заряда). Поэтому плотность заряда  $\sigma_{out} = q/(4\pi R_{out}^2)$ . Проведем наконец воображаемую поверхность вне металлической оболочки ( $r > R_{out}$ ). Полный заряд внутри поверхности складывается из: 1) заряда  $q$ , 2) заряда  $-q$  на внутренней поверхности оболочки и 3) заряда  $q$  на ее внешней стороне. Поэтому внутри воображаемой поверхности находится заряд  $q + (-q) + q = q$ . Это значит, что электрическое поле вне оболочки снова совпадает с полем одиночного точечного заряда  $q$ . Итак, мы установили, что электрическое поле направлено по радиусу-вектору  $\vec{r}$  и по абсолютной величине равно

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} \frac{1}{r^2}, & r < R_{in}, \\ 0, & R_{in} < r < R_{out}, \\ \frac{1}{r^2}, & r > R_{out}. \end{cases} \quad (16.8)$$

Нам осталось найти потенциал в различных точках системы. Вне оболочки он совпадает с потенциалом точечного заряда:  $\varphi_{out}(r) = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ . На внешней поверхности оболочки потенциал равен  $\varphi_{out}(R_{out}) = q/(4\pi\epsilon_0 R_{out})$ . Поскольку внутри оболочки поля нет, потенциал сохраняет это значение во всех точках внутри металла. Внутри полости потенциал опять совпадает с потенциалом точечного заряда. Поскольку последний определен с точностью до константы, имеем  $\varphi_{in}(r) = C + q/(4\pi\epsilon_0 r)$ . Значение этого потенциала на внутренней поверхности оболочки  $\varphi_{in}(R_{in}) = C + q/(4\pi\epsilon_0 R_{in})$  должно совпасть со значением потенциала  $\varphi_{out}(R_{out})$  на внешней оболочке. Отсюда можно найти постоянную  $C$ . Получаем в итоге:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_{in}} + \frac{1}{R_{out}} \right), & r < R_{in}, \\ \frac{1}{R_{out}}, & R_{in} < r < R_{out}, \\ \frac{1}{r}, & r > R_{out}. \end{cases} \quad (16.9)$$

Графики зависимости напряженности поля и потенциала представлены на рис. 16.7. ■



**Рис. 16.7.** Напряженность и потенциал электрического поля заряда  $q$ , окруженного металлической оболочкой с внутренним радиусом  $R_{in}$  и внешним радиусом  $R_{out}$ . Пунктирные линии соответствуют характеристикам поля одиночного заряда в отсутствие оболочки

## 16.4 Емкость уединенной проводящей сферы

Энергию можно накапливать, поднимая груз (часы-ходики с кукушкой), закручивая пружину (обычные механические часы), сжимая газ (пневматическое оружие). Энергию можно также накапливать в виде электростатического поля. Для этого служат устройства, называемые *конденсаторами*. В самом грубом приближении любой конденсатор — это пара проводников (обкладок), между которыми создается некая разность потенциалов  $\Delta\varphi$ . Способность конденсатора накапливать энергию в форме электростатического поля характеризуется величиной его *емкости*. Сам этот термин восходит к временам, когда бытовало представление об электрической жидкости. Представим себе сосуд, который мы наполняем такой жидкостью. Ее уровень (перепад высот между дном сосуда и поверхностью жидкости) соответствует разности потенциалов  $\Delta\varphi$ , до которой заряжается конденсатор. А количество жидкости в сосуде — заряду  $q$ , сообщаемому конденсатору. В зависимости от формы сосуда при том же уровне (разности потенциалов) в него войдет больше или меньше жидкости (зарядов). Отношение  $C = q/\Delta\varphi$  и называется емкостью конденсатора.

Уединенные проводники также обладают емкостью. Роль второй обкладки играют при этом бесконечно удаленные точки пространства. Рассмотрим, например, заряженную сферу радиусом  $R$ . Вне сферы ( $r \geq R$ ) имеется кулоновское электрическое поле

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (16.10)$$

направленное вдоль радиуса. Потенциал, создаваемый заряженной сферой при  $r \geq R$ , дается выражением

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (16.11)$$

Внутри проводящей сферы  $E = 0$ , и, следовательно, потенциал во всех точках сферы постоянен и совпадает со значением потенциала на поверхности сферы:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (16.12)$$

Это значение в сущности является разностью потенциалов между поверхностью сферы и бесконечно удаленной точкой. По определению емкости,

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (16.13)$$

В СИ за единицу емкости принят фарад (в честь М. Фарадея): емкость такого проводника, которому для повышения потенциала на 1 В, необходимо сообщить заряд в 1 Кл:

$$1 \text{ Ф} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}}.$$

Соотношение для емкости уединенной сферы в вакууме  $C = 4\pi\epsilon_0 R$  показывает, что 1 Ф — это емкость шара с радиусом  $R = 9 \cdot 10^9$  м, что в 13 раз превышает радиус Солнца и в 1413 раз — радиус Земли. Таким образом, емкость Земли составляет примерно  $1/1413 \text{ Ф} \approx 700 \text{ мкФ}$ . Иными словами, 1 Ф — это огромная емкость (потому что 1 Кл — это гигантский заряд).

## 16.5 Конденсаторы

Повышения емкости проводника можно достигнуть не только увеличением его размеров, но и за счет приближения к нему другого проводника. Примерами могут служить плоский конденсатор, сферический конденсатор и др. Мы вычислим их емкости, исходя из данных определений и геометрии конденсатора.

**Плоский конденсатор.** Идеальный плоский конденсатор представляет собой две металлические параллельные пластины, линейные размеры которых много больше расстояния  $d$  между ними. Пусть площадь каждой из пластин равна  $S$  (рис. 16.8). На одну пластину помещен заряд  $(+q)$ , на другую  $(-q)$ . Если пластины достаточно велики, то их можно считать «бесконечными» в том смысле, что допустимо пренебречь «краевыми» эффектами — распределениями зарядов и конфигурациями полей вблизи их краев. Тогда заряды распределяются по внутренним поверхностям пластин практически равномерно, с постоянной плотностью  $\pm\sigma$ ,  $\sigma = q/S$ . Разность потенциалов между обкладками равна интегралу от напряженности поля, взятому по любому пути между ними:

$$\Delta\varphi = \int_1^2 E_l dl. \quad (16.14)$$

Поле, создаваемое двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными разноименно с одинаковыми плотностями, является однородным, и его напряженность равна  $E = \sigma/\varepsilon_0$  (см. (15.20)).

Напряженность поля в пространстве, окружающем пластины, можно считать равной нулю, если пренебречь краевыми эффектами. Интегрируя вдоль силовой линии (силовые линии, как мы знаем, ортогональны пластинам), получаем

$$\Delta\varphi = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{q}{\varepsilon_0 S} d. \quad (16.15)$$

Отсюда находим емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (16.16)$$

**Цилиндрический конденсатор.** Цилиндрический конденсатор представляет собой два коаксиальных длинных проводящих цилиндра радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) и длиной  $l$ . Предполагая, что  $l \gg R_2$ , мы и в этом случае пренебрегаем краевыми эффектами. Линейная плотность заряда на цилиндрах

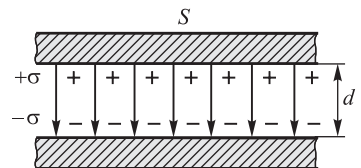


Рис. 16.8. Электрическое поле идеального плоского конденсатора



равна  $\tau = q/l$ . Мы уже вывели выражение (15.17) для электрического поля длинного заряженного цилиндра:

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l r}. \quad (16.17)$$

Электрическое поле направлено по радиусу цилиндров. Интегрируя по этому пути от одной обкладки к другой, находим разность потенциалов между обкладками:

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (16.18)$$

Отсюда следует выражение для емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (16.19)$$

В случае когда зазор между обкладками  $d = R_2 - R_1 \ll R_1$ , можно использовать первый член разложения логарифма в ряд Тейлора

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left( 1 + \frac{d}{R_1} \right) \approx \frac{d}{R_1},$$

что приводит к выражению

$$C = (2\pi R_1 l) \frac{\epsilon_0}{d}. \quad (16.20)$$

В скобках стоит произведение длины окружности цилиндра на его высоту, что равно площади поверхности цилиндра (площади обкладок). Таким образом, мы воспроизвели в этом пределе выражение (16.16) для емкости плоского конденсатора.

**Сферический конденсатор.** Сферический конденсатор образуется двумя концентрическими сферами радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Интегрируя вдоль радиуса уже хорошо знакомое выражение

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

получаем разность потенциалов между обкладками:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (16.21)$$

откуда

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (16.22)$$

Если внешний радиус бесконечно велик  $R_2 \rightarrow \infty$  (физически это значит, что  $R_2 \gg R_1$ ), то вычитаемым в знаменателе можно пренебречь, и мы приходим к

формуле (16.13) для емкости уединенной сферы. В обратном случае, когда зазор между обкладками  $d = R_2 - R_1 \ll R_1$ , можно положить в числителе  $R_2 \approx R_1$ . Замечая, что  $4\pi R_1^2$  есть площадь обкладок, мы приходим к формуле (16.16) для емкости плоского конденсатора.

**Задача 16.79.** Конденсатор, используемый в чипе запоминающего устройства компьютера, имеет емкость  $C = 55$  фФ и заряжается до  $\Delta\varphi = 5,3$  В. Каково число  $N$  избыточных электронов на его отрицательной обкладке? В какой массе воды полное число всех атомных электронов равно  $N$ ?

**Решение.** Заряд конденсатора равен  $q = C\Delta\varphi$ . Чтобы найти число избыточных электронов, надо разделить  $q$  на заряд электрона:  $N = C\Delta\varphi/e = 55 \cdot 10^{-15} \times 5,3/1,6 \cdot 10^{-19} = 1,8 \cdot 10^6$ . Миллион электронов — много это или мало? Для этого найдем массу воды с тем же числом электронов. Молекула воды  $\text{H}_2\text{O}$  содержит два атома  ${}^1_1\text{H}$  и один атом  ${}^{16}_8\text{O}$ , т. е. всего 10 электронов. Стало быть, в интересующей нас массе воды должно содержаться  $1,8 \cdot 10^5$  молекул. Число молекул в одном моле равно  $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ , т. е. надо взять  $\nu = 3 \cdot 10^{-19}$  моля. Молярная масса воды равна  $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, так что искомая масса составляет  $m = \nu M_{\text{H}_2\text{O}} = 5,4 \cdot 10^{-21}$  кг, т. е. крайне мала. Миллион частиц — много в мире электронов, но совсем мало в масштабах нашего мира. ■

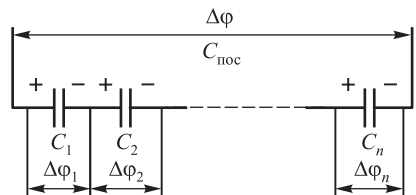
## 16.6 Соединения конденсаторов

Во многих случаях для получения нужной электроемкости конденсаторы объединяют в группу, которая называется батареей. Емкость батареи конденсаторов зависит от схемы соединения составляющих ее конденсаторов. Различают два вида соединения: последовательное и параллельное. Возможен также и смешанный тип соединения конденсаторов в батарею.

**Последовательное соединение.** При зарядке батареи (рис. 16.9) разность потенциалов распределится между отдельными конденсаторами и будет равна

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_n = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i. \quad (16.23)$$

Если первой обкладке батареи конденсаторов сообщается заряд  $+q$ , то на ее второй обкладке появится индуцированный заряд  $-q$ . Поскольку эта обкладка соединена с первой обкладкой второго конденсатора и поскольку действует закон сохранения заряда, на ней появится заряд  $+q$ . В свою очередь, это приведет к появлению заряда  $-q$  на другой обкладке второго конденсатора и т. д. В результате все последовательно соединенные конденсаторы будут заряжены одинаково, причем батарее мы сообщили только заряд  $q$ .



**Рис. 16.9.** Последовательное соединение конденсаторов

Разности потенциалов  $\Delta\varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_2$  и т. д. могут быть не равны между собой, так как емкости отдельных конденсаторов, вообще говоря, неодинаковы. Поэтому разность потенциалов на клеммах всей батареи находится как сумма напряжений  $\Delta\varphi_i = q/C_i$  на каждом из конденсаторов:

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (16.24)$$

В то же время,

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C_{\text{пос}}}, \quad (16.25)$$

где  $C_{\text{пос}}$  — емкость всей батареи. Следовательно, емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов определяется выражением:

$$\frac{1}{C_{\text{пос}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (16.26)$$

В частности, отсюда следует выражение для емкости батареи из двух последовательно соединенных конденсаторов:

$$C_{\text{пос}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (16.27)$$

**Параллельное соединение.** При параллельном соединении конденсаторов (рис. 16.10) разность потенциалов батареи равна разности потенциалов каждого отдельного конденсатора:

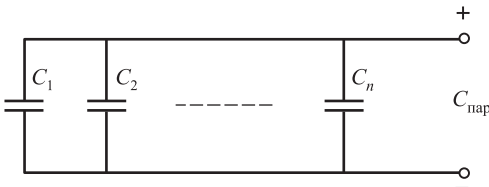
$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \dots = \Delta\varphi_n. \quad (16.28)$$

Заряжая такую батарею, мы сообщаем ей заряд  $q$ , часть которого попадет на обкладки первого конденсатора, часть — на обкладки второго и т. д. Вследствие закона сохранения электрического заряда полный заряд батареи параллельно соединенных конденсаторов будет равен сумме зарядов отдельных конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i. \quad (16.29)$$

Для каждого конденсатора можно написать соотношение

$$q_i = C_i \Delta\varphi_i = C_i \Delta\varphi, \quad (16.30)$$



**Рис. 16.10.** Параллельное соединение конденсаторов

которое подставим в выражение (16.29). Получаем:

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = \Delta\varphi \sum_{i=1}^n C_i. \quad (16.31)$$

В то же время,

$$q = \Delta\varphi C_{\text{пар}}, \quad (16.32)$$

где  $C_{\text{пар}}$  — емкость всей батареи. Получаем окончательно

$$C_{\text{пар}} = \sum_{i=1}^n C_i = C_1 + C_2 + \dots + C_n, \quad (16.33)$$

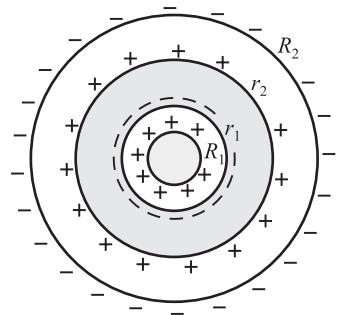
т. е. при параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

**Задача 16.80.** В сферический конденсатор с радиусами  $R_1 = 5$  см внутренней сферы и  $R_2 = 20$  см внешней сферы поместили сплошную сферическую проводящую оболочку с внутренним  $r_1 = 10$  см и внешним  $r_2 = 15$  см радиусами (рис. 16.11). Сравнить емкости прежнего и нового конденсаторов. Рассмотреть предельные случаи размеров оболочки, когда она: 1) бесконечно тонкая, 2) когда заполняет почти все пространство между внешней и внутренней сферами.

**Решение.** Емкость  $C_R$  прежнего конденсатора, чьими обкладками были сферы радиусами  $R_1, R_2$  дается формулой (16.22):

$$\begin{aligned} C_R &= 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ &= \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 20 \cdot 10^{-2}}{(20 - 5) \cdot 10^{-2}} = 7,4 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 7,4 \text{ пФ}. \end{aligned}$$

Как видно из рисунка, новый конденсатор представляет собой последовательное соединение двух сферических конденсаторов: образованного сферами радиусами  $R_1, r_1$



**Рис. 16.11.** Сферический конденсатор с проводящей оболочкой внутри эквивалентен двум последовательно соединенным сферическим конденсаторам (к задаче 16.80)

(его емкость обозначим  $C_1$ ) и  $r_2, R_2$  (его емкость будет  $C_2$ ). Имеем по той же формуле:

$$\begin{aligned} C_1 &= 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 r_1}{r_1 - R_1} \\ &= \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 10 \cdot 10^{-2}}{(10 - 5) \cdot 10^{-2}} = 1,11 \cdot 10^{-11} \text{ Ф} = 11,1 \text{ пФ}, \\ C_2 &= 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_2 R_2}{R_2 - r_2} \\ &= \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{15 \cdot 10^{-2} \times 20 \cdot 10^{-2}}{(20 - 15) \cdot 10^{-2}} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Ф} = 66,7 \text{ пФ}. \end{aligned} \quad (16.34)$$

Для емкости  $C$  последовательно соединенных конденсаторов получаем теперь

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 9,5 \text{ пФ}.$$

Емкость нового конденсатора оказалась больше емкости первоначального.

Формула, выражающая емкость такой батареи через радиусы обкладок конденсаторов, имеет вид

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2 r_1 r_2}{r_1 r_2 (R_2 - R_1) - R_1 R_2 (r_2 - r_1)}. \quad (16.35)$$

При бесконечно тонкой внутренней сфере ( $r_2 \rightarrow r_1$ ) заряды на ее поверхностях компенсируют друг друга, и мы должны получить формулу для емкости конденсатора  $C_R$  без внутренней оболочки, что и следует из формулы (16.35) при  $r_2 = r_1$ .

В обратном предельном случае, когда стенки внутренней оболочки близки к обкладкам первоначального конденсатора ( $r_1 = R_1 + d_1$ ,  $r_2 = R_2 - d_2$ ,  $d_1 \ll R_1$ ,  $d_2 \ll R_2$ ), формула (16.35) принимает вид

$$C \approx 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{d_1 R_2^2 + d_2 R_1^2}. \quad (16.36)$$

Площади поверхности сфер  $S_1 = 4\pi R_1^2$ ,  $S_2 = 4\pi R_2^2$ , так что (16.36) можно записать как

$$C \approx \varepsilon_0 \frac{S_1 S_2}{d_1 S_2 + d_2 S_1} \quad (16.37)$$

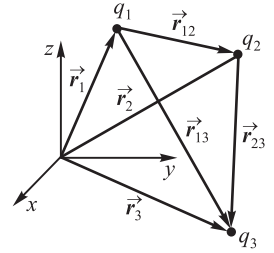
или

$$\frac{1}{C} \approx \frac{d_1 S_2 + d_2 S_1}{\varepsilon_0 S_1 S_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 S_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad (16.38)$$

где  $C_i = \varepsilon_0 S_i / d_i$ . Мы пришли к формуле для емкости двух последовательно соединенных плоских конденсаторов. ■

## 16.7 Энергия системы зарядов

Система заряженных тел обладает потенциальной энергией. Рассмотрим сначала два заряда  $q_1$  и  $q_2$ , находящиеся на расстоянии  $r_{12}$ . При удалении одного из зарядов на бесконечность сила взаимодействия между ними уменьшается до нуля. Для сближения зарядов на расстояние  $r_{12}$  необходимо совершить работу, которая идет на изменение потенциальной энергии системы. Пусть заряд  $q_1$  из



**Рис. 16.12.** К определению энергии системы электрических зарядов

бесконечности приближается к  $q_2$  на расстояние  $r_{12}$ . Работа по его перемещению равна:

$$A_1 = q_1 \varphi_1, \quad (16.39)$$

где  $\varphi_1$  — потенциал поля, создаваемого зарядом  $q_2$  в той точке, в которую перемещается заряд  $q_1$ , т. е.

$$A_1 = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (16.40)$$

Аналогично, можно считать, что из бесконечно удаленной точки приближался заряд  $q_2$ :

$$A_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (16.41)$$

Результаты оказались одинаковыми, поскольку одинаково конечное расположение зарядов. Следовательно, потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов равна

$$W = A_1 = A_2 = q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2, \quad (16.42)$$

или в симметричной форме

$$W = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2). \quad (16.43)$$

Теперь добавим к системе зарядов  $q_1$  и  $q_2$  третий заряд  $q_3$  (рис. 16.12), переносимый из бесконечности в точку, находящуюся от заряда  $q_1$  на расстоянии  $r_{13}$  и от заряда  $q_2$  на расстоянии  $r_{23}$ . Соответствующая работа будет равна:

$$A_3 = q_3 \varphi_3 = q_3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right), \quad (16.44)$$

где  $\varphi_3$  — потенциал поля зарядов  $q_1$  и  $q_2$  в точке, куда помещен заряд  $q_3$ .

Потенциальная энергия взаимодействия трех зарядов равна:

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right). \quad (16.45)$$

Перепишем полученное соотношение в виде:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ q_1 \left( \frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} \right) + q_2 \left( \frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{23}} \right) + q_3 \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) \right\}. \quad (16.46)$$

В симметричной форме записываем:

$$W = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2 + q_3 \varphi_3). \quad (16.47)$$

Ясно, что для произвольной системы зарядов имеем

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \quad (16.48)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал в точке, где находится заряд  $q_i$ , создаваемый всеми остальными зарядами, кроме  $q_i$ .

**Задача 16.81.** Две одноименно заряженные частицы с зарядами  $q_1$  и  $q_2$  и массами  $m_1$  и  $m_2$  пущены с большого расстояния навстречу друг другу по соединяющей их линии со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Определить наименьшее расстояние  $r_{\min}$ , на которое могут сблизиться частицы.

**Решение.** Сначала ответим на вопрос: почему вообще существует минимально возможное сближение частиц, почему они не могут столкнуться друг с другом? Ответ прост: частицы отталкиваются вследствие закона Кулона и потенциальная энергия взаимодействия при  $r \rightarrow 0$  возрастает до бесконечности. Начальной кинетической энергии частиц просто не хватит, чтобы преодолеть бесконечно высокий потенциальный барьер между ними (см. рис. 15.14). Рассмотрим процесс сближения частиц. По мере уменьшения расстояния  $r$  между ними растут силы отталкивания, тормозящие частицы. Скорость сближения — относительная скорость частиц — уменьшается и в какой-то момент становится равной нулю. В это мгновение частицы движутся как единое целое, их скорости одинаковы (мы обозначим их как  $v$ ). Это и есть момент наибольшего сближения. Далее под влиянием отталкивания частицы снова начнут расходиться и в конечном итоге удалятся друг от друга.

Проанализировав процесс, примем за уравнения. В начальном состоянии полный импульс частиц равен  $p = m_1 v_1 - m_2 v_2$  (мы считаем, что первая частица движется в положительном направлении). В момент наибольшего сближения частицы движутся с одинаковой скоростью  $v$  (скоростью их центра масс) и импульс системы равен  $p = v(m_1 + m_2)$ . Поскольку полный импульс сохраняется, находим скорости частиц в момент наибольшего сближения:

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (16.49)$$

Теперь применим закон сохранения энергии. В начальный момент, когда частицы находятся бесконечно далеко друг от друга, полная энергия  $W$  складывается из их кинетических энергий:

$$W = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (16.50)$$

В момент наибольшего сближения полная энергия равна сумме кинетических энергий частиц и потенциальной энергии кулоновского взаимодействия между ними:

$$W = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}. \quad (16.51)$$

Приравняв правые части равенств (16.50) и (16.51) и подставляя выражение (16.49) для скорости  $v$ , получаем в итоге соотношение

$$r_{\min} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{2}{(v_1 + v_2)^2}. \quad (16.52)$$

Эту формулу можно теперь применять к различным частным случаям. Например, если массы частиц одинаковы ( $m_1 = m_2$ ), то находим из (16.52)

$$r_{\min} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{m_1 (v_1 + v_2)^2}.$$

Если же масса второй частицы гораздо больше массы первой ( $m_2 \gg m_1$ ), то минимальное расстояние получается в два раза меньшим:

$$r_{\min} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{m_1(v_1 + v_2)^2}.$$

Объяснение: движение тяжелой частицы не меняется от взаимодействия с легкой, она будет продолжать двигаться с той же скоростью и после рассеяния. Поэтому вся кинетическая энергия относительного движения тратится на преодоление кулоновского отталкивания. При столкновении же с легкой частицей часть этой кинетической энергии идет на изменение ее импульса, так что на преодоление потенциального барьера остается меньше энергии. ■

## 16.8 Энергия заряженного проводника

Пусть имеется заряженный проводник и мы хотим увеличить его заряд от  $q$  до  $q + dq$ . Переносим заряд  $dq$  из бесконечности на поверхность проводника, потенциал которого равен  $\varphi$ , мы совершаем работу

$$dA = \varphi dq. \quad (16.53)$$

Поскольку потенциал заряженного проводника можно выразить через его емкость  $\varphi = q/C$ , величину работы можно записать как

$$dA = \frac{1}{C} q dq. \quad (16.54)$$

Совершаемая работа идет на изменение энергии проводника. Следовательно, при увеличении заряда проводника на величину  $dq$  его потенциальная энергия возрастает на величину:

$$dW = dA = \frac{q dq}{C}. \quad (16.55)$$

Интегрируя полученное соотношение, получим

$$W = \frac{q^2}{2C} + \text{const}. \quad (16.56)$$

Естественно считать энергию незаряженного проводника равной нулю. Тогда

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (16.57)$$

Представим себе электрон как проводящую сферу радиусом  $a_e$ . Согласно классической теории электричества, емкость электрона равна  $C_e = 4\pi\epsilon_0 a_e$ , тогда он должен обладать запасом электростатической энергии  $W = e^2/(2C_e) = e^2/(8\pi\epsilon_0 a_e)$ . В то же время, мы знаем из курса механики, что у электрона имеется энергия покоя  $m_e c^2$ , где  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — масса электрона, а  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света. Было очень соблазнительно отождествить половину энергии покоя с потенциальной энергией, запасенной в электрическом поле электрона (отнеся вторую половину к кинетической энергии неизвестного происхождения). Приравняв  $W$  и  $m_e c^2/2$ , находим так называемый *электромагнитный радиус электрона*:

$$a_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \times (3 \cdot 10^8)^2} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$



Как мы увидим в других частях курса, на гораздо больших расстояниях классическая теория перестает быть применимой, но выражение для электромагнитного радиуса электрона часто встречается в физике.

**Задача 16.82.** Найти электромагнитный радиус  $r_e$  электрона в модели, где он представляется в виде равномерно заряженного шарика.

**Решение.** Постоянная объемная плотность электрического заряда равна  $\rho = \frac{e}{(4\pi r_e^3/3)}$ ; тогда заряд  $dq$  в элементе объема  $d^3r$  запишем как  $dq = \rho d^3r$ . Применим к нашей модели общее выражение (16.48) для энергии системы зарядов и выражение (15.48) для потенциала равномерно заряженной сферы:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \varphi dq = \frac{\rho}{2} \int \varphi d^3r = \frac{\rho}{2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_e} 4\pi \int_0^{r_e} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2r_e^2} \right) r^2 dr = \\ &= \frac{\rho}{2} \frac{e}{\epsilon_0 r_e} \left( \frac{3}{2} \frac{r_e^3}{3} - \frac{1}{2r_e^2} \frac{r_e^5}{5} \right) r^2 dr = \frac{\rho e r_e^2}{5\epsilon_0} = \\ &= \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e}. \end{aligned} \quad (16.58)$$

Приравнявая  $W$  половине энергии покоя  $\frac{m_e c^2}{2}$  электрона, находим:

$$r_e = \frac{6}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 1,2a_e = 3,4 \cdot 10^{-15} \text{ м}. \quad (16.59)$$

В модели заряженного шарика радиус электрона получился на 20% большим, чем в модели заряженной сферы. ■

## 16.9 Энергия заряженного конденсатора

Процесс возникновения зарядов на обкладках конденсатора можно представить так, что от одной обкладки последовательно отнимают очень малые порции заряда  $dq$  и перемещают на другую обкладку. В этом случае можно записать соотношения, аналогичные формулам предыдущего раздела:

$$dA = dqU = \frac{1}{C} qdq. \quad (16.60)$$

Здесь  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов между обкладками, а  $q$  — заряд конденсатора в момент переноса  $dq$ . Чтобы зарядить незаряженный конденсатор некоторым конечным зарядом  $Q$ , требуется затратить работу

$$A = \frac{1}{C} \int_0^Q qdq = \frac{Q^2}{2C}. \quad (16.61)$$

Это и есть энергия, запасенная в конденсаторе. Ее можно выразить в виде:

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}}. \quad (16.62)$$

Выбор любой из этих эквивалентных формул диктуется условиями решаемой задачи. Заметим, что применение общей формулы (16.48) для энергии системы зарядов ведет к этим же выражениям:

$$W = \frac{1}{2} [(+Q)\varphi_1 + (-Q)\varphi_2] = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{QU}{2}. \quad (16.63)$$

В случае плоского конденсатора напряженность поля внутри него не зависит от расстояния между пластинами. Это позволяет взглянуть на процесс зарядки конденсатора с другой стороны. Предположим, что заряды  $\pm Q$  уже имеются на пластинах, которые расположены бесконечно близко друг от друга. Энергия в такой системе равна нулю, так как поверхностные заряды компенсируют друг друга. Станем отодвигать одну из обкладок. Со стороны другой обкладки на нее действует сила, равная произведению заряда обкладки  $Q$  на напряженность поля  $\sigma/(2\epsilon_0)$ , создаваемого *покоящейся* обкладкой (это поле в два раза меньше полного поля в конденсаторе):

$$F = \frac{Q\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2S\epsilon_0}. \quad (16.64)$$

При раздвижении пластин на расстояние  $d$  совершается работа  $A = Fd$  и такой же будет запасенная в конденсаторе энергия:

$$W = Fd = (Q^2/2) \frac{d}{S\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2C}.$$

## 16.10 Энергия электрического поля

Где же сосредоточена энергия электрического поля, запасенная в конденсаторе? Ответить на этот вопрос нам поможет только что проделанное умозрительное упражнение по зарядке плоского конденсатора «методом» раздвижения пластин. Мы совершали работу, энергия конденсатора увеличивалась, но что менялось в системе? Заряды на изолированных обкладках никуда не перетекали, напряженность электрического поля внутри конденсатора также не менялась. Изменился только объем пространства между пластинами (соответственно, емкость конденсатора и разность потенциалов). А в этом пространстве у нас ничего нет, кроме электрического поля. Значит, в каждом малом объеме пространства, пронизанного силовыми линиями поля, сосредоточена какая-то энергия. Чтобы ее найти, выразим энергию плоского конденсатора, явным образом выделив объем между обкладками.

Напряженность поля плоского конденсатора связана с разностью потенциалов между обкладками и величиной зазора  $d$  соотношением  $E = U/d$ . Запишем энергию плоского конденсатора в виде

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (Ed)^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} V, \quad (16.65)$$

где  $V = Sd$  — объем пространства между пластинами.

Так как поле в плоском конденсаторе однородно, *энергия распределена в пространстве с плотностью*

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (16.66)$$

Мы получили формулу, значение которой выходит далеко за пределы задач о конденсаторах. В сущности конденсаторы в этой формуле уже не видны: есть напряженность электрического поля (неважно, чем создаваемая), которая определяет плотность энергии, запасенную в каждой точке пространства.

Продemonстрируем это на примере поля равномерно заряженной сферы радиусом  $R$ . Как мы видели выше при вычислении электромагнитного радиуса электрона, энергия электростатического поля равна

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Получим этот же результат другим путем.

Напряженность поля во внешнем пространстве (при  $r > R$ ), как мы уже знаем, такая же, как и для точечного заряда. Поэтому плотность энергии поля равна

$$w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}. \quad (16.67)$$

Возьмем точку в пространстве, задаваемую в сферической системе координатами  $r, \theta, \phi$ , и выделим малый объем  $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$ . Электростатическая энергия, сосредоточенная в этом малом объеме, равна  $dW = w(r)dV$ . Полную энергию можно найти, интегрируя  $dW$  по всему пространству вне сферы:

$$\begin{aligned} W &= \int_{r \geq R} w(r)dV = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{r^2 dr}{r^4} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \\ &= \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} 4\pi \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} 4\pi \frac{1}{R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned} \quad (16.68)$$

Полученная ранее энергия заряженной сферы теперь вычислена по распределению энергии в окружающем пространстве! Это очень сильный результат, демонстрирующий, что электрическое поле не есть некая фикция или искусственный математический метод. Оно реально, оно содержит в себе энергию, которую можно измерить и употребить с пользой для себя. И это все происходит в вакууме! Проводники нужны нам как удобное хранилище для электрических зарядов, а поле и его энергия сосредоточены вне их. Значит, несмотря на отсутствие вещества, вакуум не так пуст, как это можно было бы себе представить. По крайней мере только что мы познакомились с одной из форм существования материи, отличной от обычного осоздаваемого вещества.

**Задача 16.83.** Получить выражение (16.58) для энергии электрона из формул (15.47).

**Решение.** Используя выражение для плотности электростатической энергии, получаем после простых интегрирований:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d^3r = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \int_0^\infty E^2 r^2 dr = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left( \int_0^{r_e} \frac{r^2}{r_e^6} r^2 dr + \int_{r_e}^\infty \frac{1}{r^4} r^2 dr \right) = \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_e} \left( \frac{1}{5} + 1 \right) = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e}. \end{aligned} \quad (16.69)$$

Естественно, мы получили тот же результат. Заметим, что из наших выкладок следует, что большая часть энергии равномерно заряженного шара приходится на окружающее его пространство: внутри шара сосредоточено лишь  $(0,2/1,2) \times 100\% = 16,7\%$  энергии. ■

На плотность энергии электростатического поля можно взглянуть и под другим углом. Согласно уравнению (16.64), на пластину плоского конденсатора со стороны другой пластины действует сила

$$F = \frac{Q\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}, \quad (16.70)$$

т. е. поле оказывает на пластину давление

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (16.71)$$

Здесь мы использовали связь  $E = \sigma/\varepsilon_0$  плотности заряда на металлической пластине и напряженности электрического поля вблизи ее поверхности. Этот результат также имеет общий характер: электростатическое поле оказывает на заряженную поверхность давление, равное плотности энергии поля. Причем это давление оказывается *отрицательным* (пластины конденсатора притягиваются), т. е. поле не «давит» на заряженную пластину, а «втягивает» ее в себя.

**Задача 16.84.** На мыльный пузырь радиусом  $r$  попадает заряд  $q$ , который распределяется равномерно по поверхности. Из-за отталкивания одноименных зарядов радиус пузыря увеличивается и становится равным  $R$ . Найти заряд  $q$ , если атмосферное давление равно  $p$ .

**Решение.** Поскольку температура внешней среды не изменилась, давление и объем пузыря связаны законом Бойля—Мариотта. Первоначально давление в мыльном пузыре равнялось атмосферному. После увеличения размера шара оно уменьшилось обратно пропорционально объему, т. е. кубу радиуса, и стало равно  $p' = p(r/R)^3$ . Но к этому давлению присоединяется теперь электростатическое давление  $p_{el} = \varepsilon_0 E^2/2$ , также стремящееся увеличить пузырь (внутри пузыря поле равно нулю). Электрическое поле вблизи внешней стороны поверхности заряженной сферы (пузыря) было нами подсчитано:  $E = q/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$ . Подставляя эти выражения в условие равновесия мыльного пузыря  $p = p' + p_{el}$ , получаем уравнение

$$p = p \frac{r^3}{R^3} + \frac{\varepsilon_0 q^2}{2(4\pi\varepsilon_0)^2 R^4},$$

откуда находим искомое выражение для заряда, попавшего на мыльный пузырь:

$$q^2 = 32\pi^2 \varepsilon_0 p R (R^3 - r^3). \quad \blacksquare \quad (16.72)$$

## Контрольные вопросы

1. Как распределяются электрический заряд и потенциал на заряженном проводнике, находящемся в своем собственном электростатическом поле? Как изменится ответ, если этот проводник помещен также и во внешнее электростатическое поле?
2. Объясните возникновение индуцированных зарядов при внесении проводника во внешнее электрическое поле.
3. Как мы видели в задаче 16.77, Земля обладает огромным электрическим зарядом. Почему нас не бьет током, когда мы бегаем босиком?

4. Объясните, почему пунктирная линия на рис. 16.7 частично совпадает со сплошной, а частично — нет.
5. Объясните принцип действия электростатической защиты.
6. Что можно сказать о разности потенциалов между точкой на поверхности заряженного металлического шара и точкой, расположенной внутри него?
7. Мы видели, что любой проводник сам по себе обладает емкостью. В чем преимущества конденсатора, состоящего из пары проводников?
8. Оцените из соображений размерности емкость уединенной сферы. Объясните, почему из тех же соображений не удастся оценить емкости конденсаторов любых рассмотренных типов с двумя обкладками.
9. Изменится ли емкость плоского конденсатора, если в воздушный зазор между обкладками вдвинуть тонкую металлическую пластину?
10. Изменится ли разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора, если одну из них заземлить?
11. Оцените энергию электростатического поля Земли.
12. Как изменится энергия плоского конденсатора, если расстояние между пластинами увеличить в два раза? Рассмотреть случаи, когда: *а*) конденсатор подсоединен к аккумулятору, так что на его обкладках поддерживается постоянная разность потенциалов; *б*) конденсатор полностью изолирован, так что на его обкладках сохраняется первоначальный электрический заряд.
13. Объясните физическую причину появления множителя  $1/2$  в формуле (16.48) для энергии произвольной системы зарядов.
14. В импульсной фотовспышке лампа питается от конденсатора емкостью  $C = 800$  мкФ, заряженного до напряжения  $U = 300$  В. Какова продолжительность вспышки, если ее средняя мощность  $P = 15$  кВт?
15. Три одинаковых конденсатора подключают к аккумулятору. В каком случае в конденсаторной батарее будет запасена большая энергия — при последовательном их соединении или при параллельном?
16. Какова размерность плотности энергии электрического поля?
17. Какие физические выводы можно сделать, вычислив энергию конденсатора путем интегрирования плотности энергии поля по его объему?

## Глава 17

# Электрическое поле в диэлектриках

### 17.1 Диэлектрическая проницаемость

Как уже отмечалось, в диэлектриках при обычных условиях «свободные заряды» практически отсутствуют, и потому они являются плохими проводниками электричества (изоляторами). Можно было бы подумать, что при помещении изолятора в электрическое поле вообще ничего не происходит. Однако это не так: эксперименты показали, что отсутствие «свободных зарядов» в диэлектриках вовсе не мешает им реагировать на внешнее электрическое поле. Еще М. Фарадей обнаружил, что если между обкладками конденсатора поместить диэлектрическую пластину, то емкость конденсатора возрастает. Когда изолятор заполняет все пространство между обкладками, емкость конденсатора возрастает в  $\varepsilon$  раз, где безразмерная величина  $\varepsilon > 1$  принимает разные значения для различных материалов. Эта величина называется *диэлектрической проницаемостью* данного вещества.

Рассмотрим снова плоский конденсатор. Зарядим его и вставим внутрь диэлектрическую пластину (рис. 17.1). Величины, относящиеся к конденсатору без диэлектрика, будем снабжать индексом 0. Так как заряд конденсатора не меняется при помещении в него диэлектрика, записываем соотношения

$$\begin{aligned} q &= C_0 U_0, & C_0 &= \frac{\varepsilon_0 S}{d}; \\ q &= CU, & C &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \end{aligned} \quad (17.1)$$

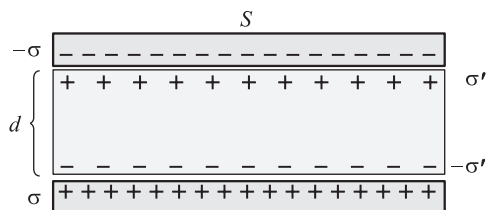


Рис. 17.1. Плоский конденсатор с диэлектрической пластиной между обкладками

Здесь мы использовали *экспериментальный* факт увеличения емкости конденсатора с диэлектриком в  $\varepsilon$  раз. Из соотношений (17.1) следует, что при том же заряде на обкладках разность их потенциалов  $U$  уменьшается в  $\varepsilon$  раз по сравнению с «пустым» конденсатором:  $U = U_0/\varepsilon$ . Поскольку поле в плоском конденсаторе однородно, получаем

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{d\varepsilon} = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Иными словами, присутствие диэлектрика между пластинами приводит к уменьшению напряженности электрического поля в конденсаторе.

Уменьшение разности потенциалов между обкладками и увеличение емкости конденсатора мы наблюдали в решенной выше задаче о сферическом конденсаторе с металлической оболочкой между обкладками. Там причина уменьшения разности потенциалов была ясна: на оболочке наводились индуцированные заряды, которые компенсировали внешнее поле от обкладок. Соответственно, электрическое поле существовало только в пространстве, не занятом оболочкой. Если бы оболочка заняла весь объем конденсатора, разность потенциалов между обкладками и поле внутри него стали бы равными нулю, а емкость, соответственно, увеличилась бы до бесконечности.

В диэлектрике нет проводящих слоев, но идея возникновения на его поверхности каких-то дополнительных зарядов (их называют в этом случае *поляризационными*) кажется привлекательной из-за возможности объяснить экспериментальные факты. Поэтому мы принимаем *макроскопическую модель*, которая, разумеется, должна быть обоснована впоследствии на микроскопическом уровне и проверена на практике вместе со всеми ее следствиями. Мы предположим, что при помещении диэлектрика в электрическое поле на его поверхности возникают поляризационные заряды с плотностью  $\sigma'$ . Поляризационные заряды создают в диэлектрике дополнительное электрическое поле  $E'$ , направленное противоположно полю от зарядов на обкладках (см. рис. 17.1). Это и объясняет меньшую величину результирующего поля  $E$  по сравнению с полем  $E_0$ . Действительно, для однородных изотропных диэлектриков изменение поля в среде сводится только к изменению его величины:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}, \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}' = \varepsilon \vec{E} + \vec{E}'. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Отсюда мы находим, какая часть результирующего поля создается поляризационными зарядами, а какая — зарядами на обкладках:

$$\vec{E}' = -(\varepsilon - 1) \vec{E} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \vec{E}_0. \quad (17.3)$$

Отрицательный знак указывает на противоположное направление поля поляризационных зарядов. Зная связь поверхностной плотности зарядов с напряженностью создаваемого ими поля

$$|\vec{E}_0| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad |\vec{E}'| = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0},$$

**Таблица 17.1.** Значения диэлектрической проницаемости для некоторых веществ

Диэлектрик	$\epsilon$	Диэлектрик	$\epsilon$
Гелий	1,00007	Жидкий гелий	1,047
Водород	1,00027	Жидкий водород	1,23
Азот	1,00058	Жидкий азот	1,43
Лед	16	Вода	81,1
Бумага	3,5	Этиловый спирт	25,1
Фарфор	6,5	Трансформаторное масло	4,5
Титанат стронция	310	Глицерин	56,2

находим

$$\sigma' = \sigma \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}. \quad (17.4)$$

Заметим, что случаю проводника соответствует предел  $\epsilon \rightarrow \infty$ . Действительно, тогда  $\sigma' = \sigma$ , а поле внутри материала полностью компенсируется:

$$\vec{E}' = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \vec{E}_0 \rightarrow -\vec{E}_0, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \rightarrow 0.$$

При отсутствии диэлектрика ( $\epsilon = 1$ ),  $\sigma' = 0$ ,  $E' = 0$ , и мы возвращаемся к прежним формулам электростатики в вакууме. Значения  $\epsilon$  для некоторых диэлектриков приведены в табл. 17.1 (для газов — при нормальных условиях).

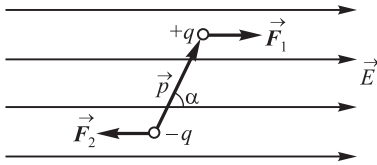
Обратите внимание: одни и те же вещества при разных условиях имеют совершенно различные диэлектрические свойства. Значит, для их объяснения необходимо построить теорию на микроуровне, исходящую из свойств атомов и молекул.

## 17.2 Электрический диполь

Чтобы понять механизм поведения диэлектриков в поле на микроскопическом уровне, нам надо сначала объяснить, как может электрически нейтральная система реагировать на внешнее электрическое поле. Простейший случай — полное отсутствие зарядов — нас не интересует. Мы знаем наверняка, что в диэлектрике имеются электрические заряды — в составе атомов, молекул, ионов кристаллической решетки и т. д. Поэтому мы рассмотрим следующую по простоте конструкции электронейтральную систему — два равных по величине и противоположных по знаку точечных заряда  $+q$  и  $-q$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга. Такая система называется *электрическим диполем*. Основной характеристикой диполя является *электрический дипольный момент*. Введем вектор  $\vec{l}$ , направленный от отрицательного заряда ( $-q$ ) к положительному ( $+q$ ), тогда вектор  $\vec{p}$ , называемый электрическим моментом диполя, определяется как

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (17.5)$$





**Рис. 17.2.** Силы, действующие на электрический диполь, помещенный во внешнее поле

Рассмотрим поведение диполя во внешнем поле  $\vec{E}$  (рис. 17.2). Пусть направление дипольного момента составляет с вектором  $\vec{E}$  угол  $\alpha$ . На положительный заряд диполя действует сила, совпадающая по направлению с  $\vec{E}$  и равная  $\vec{F}_1 = q\vec{E}$ , а на отрицательный — противоположно направленная и равная  $\vec{F}_2 = -q\vec{E}$ . Вращающий момент этой пары сил равен

$$M = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha. \quad (17.6)$$

Так как  $ql = p$ , то  $M = pE \sin \alpha$  или в векторных обозначениях  $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ . (Напомним, что символ  $[\vec{a}, \vec{b}]$  означает векторное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .) Таким образом, при неизменном дипольном моменте молекулы ( $p = \text{const}$ ) механический момент, действующий на нее, пропорционален напряженности  $\vec{E}$  внешнего электрического поля и зависит от угла между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ .

Под действием момента сил  $\vec{M}$  диполь поворачивается, при этом совершается работа

$$dA = M d\alpha = pE \sin \alpha d\alpha, \quad (17.7)$$

которая идет на увеличение потенциальной энергии. Отсюда следует изменение  $dW$  потенциальной энергии, связанное с поворотом диполя:

$$dW = pE \sin \alpha d\alpha.$$

Следовательно, потенциальная энергия диполя в электрическом поле равна

$$W = -pE \cos \alpha + \text{const},$$

или

$$\boxed{W = -pE \cos \alpha = -\vec{p} \cdot \vec{E}}, \quad (17.8)$$

если положить  $\text{const} = 0$ .

Из рис. 17.2 видно, что внешнее электрическое поле стремится повернуть диполь таким образом, чтобы вектор его электрического момента  $\vec{p}$  совпал по направлению с вектором  $\vec{E}$ . В этом случае  $\alpha = 0$ , а следовательно, и  $M = 0$ . В то же время, при  $\alpha = 0$  потенциальная энергия диполя во внешнем поле принимает минимальное значение  $W_{\text{min}} = -pE$ , что соответствует положению устойчивого равновесия. При отклонении диполя от этого положения снова возникает механический момент, который возвращает диполь в первоначальное положение. Другое положение равновесия, когда дипольный момент направлен против поля ( $\alpha = \pi, M = 0$ ), не является устойчивым. Потенциальная энергия в

этом случае принимает максимальное значение  $W_{\max} = pE$ , и при небольших отклонениях от такого положения возникающие силы не возвращают диполь назад, а еще больше отклоняют его.

В случае неоднородного поля на рассматриваемый диполь будет действовать еще и равнодействующая сила  $\vec{F}_{\text{равн}}$ , стремящаяся его сдвинуть. Мы рассмотрим здесь частный случай. Направим ось  $x$  вдоль поля  $\vec{E}$ . Пусть диполь под действием поля уже повернулся вдоль силовой линии, так что отрицательный заряд находится в точке с координатой  $x$ , а положительный заряд расположен в точке с координатой  $x+l$ . Представим себе, что величина напряженности поля зависит от координаты  $x$ . Тогда равнодействующая сила  $F$  равна

$$F = F_1 + F_2 = qE(x+l) - qE(x) = q \frac{\partial E}{\partial x} l = p \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (17.9)$$

Такой же результат может быть получен из общего соотношения  $F_x = -\partial W/\partial x$ , где энергия  $W$  определена в (17.8). Если  $E$  — растущая функция  $x$ , то  $\partial E/\partial x > 0$  и равнодействующая сил положительна. Это значит, что она стремится втянуть диполь в область возрастающего поля. Этим объясняется известный эффект, когда нейтральные кусочки бумаги притягиваются к наэлектризованной расческе. В плоском конденсаторе с однородным полем они остались бы неподвижными.

В реальных веществах не часто встречаются диполи, образованные только двумя зарядами. Обычно мы имеем дело с более сложными системами. Но понятие электрического дипольного момента применимо и к системам со многими зарядами. В этом случае он определяется как

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i, \quad (17.10)$$

где  $q_i, \vec{r}_i$  — величина заряда с номером  $i$  и его местоположение соответственно. В случае двух зарядов  $q_1 = q, q_2 = -q$  мы приходим к прежнему выражению  $\vec{p} = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = q\vec{l}$ . Пусть наша система электрически нейтральна. В ней есть положительные заряды, величины которых и местоположения мы обозначим верхним индексом «+», а индексом «-» снабдим абсолютные величины отрицательных зарядов и их радиусы-векторы. Тогда выражение (17.10) записывается в виде

$$\vec{p} = \sum_i q_i^+ \vec{r}_i^+ - \sum_i q_i^- \vec{r}_i^-. \quad (17.11)$$

Электрическая нейтральность системы означает равенство полного положительного заряда и суммы абсолютных величин всех отрицательных зарядов:

$$q = \sum_i q_i^+ = \sum_i q_i^-. \quad (17.12)$$

Введем понятие «центра зарядов» — положительных  $\vec{R}^+$  и отрицательных  $\vec{R}^-$ :

$$\vec{R}^+ = \frac{\sum_i q_i^+ \vec{r}_i^+}{\sum_i q_i^+}, \quad \vec{R}^- = \frac{\sum_i q_i^- \vec{r}_i^-}{\sum_i q_i^-}. \quad (17.13)$$

Выражения (17.13) аналогичны формулам для центра масс в механике, и потому мы назвали их центрами положительных и отрицательных зарядов соответственно. С этими обозначениями и с учетом соотношения (17.12) записываем электрический дипольный момент (17.11) системы зарядов в виде

$$\boxed{\vec{p} = q(\vec{R}^+ - \vec{R}^-) = q\vec{L}}, \quad (17.14)$$

где  $\vec{L}$  — вектор, проведенный из центра отрицательных зарядов в центр положительных зарядов. Смысл нашего упражнения заключается в демонстрации, что *любую систему зарядов можно представить как некий эквивалентный диполь*.

Полный заряд электронейтральной системы зарядов равен нулю, и потому на больших расстояниях ее электрическое поле ведет себя как поле диполя и убывает быстрее, чем кулоновское поле точечного заряда. Найдем этот закон, т. е. электрическое поле диполя. Если положительный заряд  $q$  расположен в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}^+$ , а отрицательный  $-q$  — в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}^-$ , то их суммарное электрическое поле в вакууме равно суперпозиции полей каждого из них:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}^+}{|\vec{r} - \vec{r}^+|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}^-}{|\vec{r} - \vec{r}^-|^3} \right). \quad (17.15)$$

На больших расстояниях от диполя  $r \gg r^+, r^-$  можно разложить выражение в (17.15) по степеням отношений  $r^+/r$  и  $r^-/r$ , пренебрегая их квадратами:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}^+|^{-3} &= (r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}^+ + r^{2+})^{-3/2} \approx r^{-3} \left( 1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}^+}{r^2} \right)^{-3/2} \approx \frac{1}{r^3} \left( 1 + \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}^+}{r^2} \right), \\ \frac{\vec{r} - \vec{r}^+}{|\vec{r} - \vec{r}^+|^3} &\approx \frac{\vec{r} - \vec{r}^+}{r^3} \left( 1 + \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}^+}{r^2} \right) \approx \frac{1}{r^3} \left( \vec{r} - \vec{r}^+ + \vec{r} \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}^+}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (17.16)$$

Заменяя в (17.16) индексы «+» на «-», мы получим аналогичное выражение для второго слагаемого в (17.15). Вычитая одно из другого, получаем

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \vec{r}^- - \vec{r}^+ + \vec{r} \frac{3\vec{r} \cdot (\vec{r}^+ - \vec{r}^-)}{r^2} \right). \quad (17.17)$$

Вектор  $\vec{l} = \vec{r}^+ - \vec{r}^-$  направлен от отрицательного заряда к положительному, и потом произведение  $\vec{p} = q\vec{l}$  есть дипольный момент системы.

В итоге приходим к окончательному выражению для поля электрического диполя  $\vec{p}$  в вакууме:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}}, \quad (17.18)$$

где введено обозначение  $\vec{n} = \vec{r}/r$  для единичного вектор в направлении радиуса-вектора точки наблюдения. Действительно, поле диполя  $E \propto 1/r^3$ , т. е. убывает быстрее кулоновского.

## 17.3 Поляризация диэлектриков

Под действием внешнего электрического поля диэлектрики поляризуются. Процессы, происходящие в диэлектрике, можно понять, исходя из представлений о диэлектрике как о среде, состоящей из попарно связанных разноименных зарядов. В отличие от проводников в диэлектриках нет «свободных» зарядов, которые под действием внешнего поля могут двигаться по всему объему образца. Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, прочно связаны между собой и способны перемещаться только в пределах своей молекулы (или атома), т. е. на расстоянии порядка  $10^{-9} - 10^{-10}$  м.

Диэлектрик может рассматриваться как система электрических диполей. Воздействие внешнего электрического поля на диэлектрик является результатом реакции этой системы диполей (или соответствующего ей эквивалентного диполя). Такое представление оказывается достаточным для объяснения большинства процессов, относящихся к диэлектрикам. Различают три вида *поляризации* диэлектриков: *электронную, ионную и дипольную*.

За меру поляризации диэлектриков принимается **вектор поляризации**  $\vec{P}$ , который представляет собой отношение дипольного электрического момента диэлектрика к его объему:

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (17.19)$$

Здесь  $\vec{p}_i$  — вектор дипольного момента молекулы,  $N$  — число дипольных молекул, содержащихся в объеме  $V$  диэлектрика.

Так как размерность дипольного момента в СИ  $[p] = \text{Кл} \cdot \text{м}$ , то вектор поляризации измеряется в  $\text{Кл}/\text{м}^2$ . Его размерность совпадает с размерностью поверхностной плотности зарядов. Это наводит на мысль, что вектор поляризации связан с плотностью поляризационных зарядов, возникающих на поверхности диэлектрика, помещенного во внешнее поле.

### Электронная поляризация

Атомы представляют собой положительно заряженные ядра, окруженные облачком электронов. При помещении атома в электрическое поле его электронное облачко немного смещается относительно ядер. Вследствие раздвижения центров положительных и отрицательных зарядов у атома появляется электрический дипольный момент — возникает **электронная поляризация**, которая при выключении внешнего поля полностью исчезает. С ней сходна **ионная поляризация** в ионных кристаллах (например, в кристаллах соли  $\text{NaCl}$ ). Под действием поля положительно заряженные ионы натрия  $\text{Na}^+$  и отрицательно заряженные ионы хлора  $\text{Cl}^-$  смещаются в разные стороны из своих равновесных положений, из-за чего каждая элементарная ячейка кристалла приобретает электрический дипольный момент. Аналогичные явления происходят и в отдельных молекулах при смещении ядер входящих в них атомов и изменении равновесных расстояний между ними. Такой механизм называют часто «упругой поляризацией».

Более или менее очевидно, что дипольный момент диэлектрика, появляющийся вследствие упругой поляризации, пропорционален величине внешнего электрического поля. Понять это можно, рассматривая поведение потенциальной энергии  $U(x)$  взаимодействия двух разноименно заряженных частиц, где  $x$  — расстояние между ними. Пусть равновесному состоянию соответствует расстояние  $x = 0$  (частицы находятся в одной точке и дипольный момент отсутствует). При малых отклонениях от положения равновесия разлагаем энергию в ряд Тейлора:

$$U(x) \approx U(0) + x \frac{dU}{dx}(0) + \frac{x^2}{2} \frac{d^2U}{dx^2}(0) + \dots$$

Мы замечаем, что: 1) первая производная в точке равновесия  $x = 0$  равна нулю; 2) вторая производная в этой точке положительна (обозначим ее буквой  $k$ ). Оба этих условия соответствуют положению устойчивого равновесия. Таким образом, вблизи равновесия любая потенциальная энергия ведет себя как

$$U(x) \approx U(0) + \frac{kx^2}{2}.$$

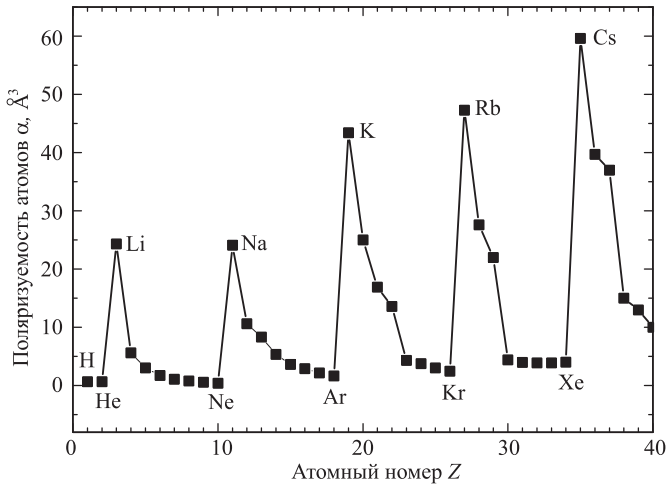
Соответственно, при отклонении от этого положения возникает сила

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx,$$

подобная силе упругости при растяжении пружины. Если заряды  $\pm q$  «соединены» такой «пружиной», то при наложении поля  $E$  новое равновесное расстояние между частицами будет определяться соотношением  $kx_E = qE$ . В результате находим величину возникшего дипольного момента  $p = qx_E = (q^2/k)E$ . Индуцированный внешним полем дипольный момент атома (молекулы) можно записать в виде

$$p = \alpha \varepsilon_0 E, \quad (17.20)$$

где коэффициент  $\alpha$  называется **поляризуемостью** атома (молекулы). Он имеет размерность объема, т. е. куба длины. Единственный параметр размерности длины — это размер самого атома (молекулы). Значит, по порядку величины поляризуемость равна объему атома. Поскольку характерные размеры атомов составляют несколько ангстремов ( $1 \text{ \AA} = 0,1 \text{ нм} = 10^{-10} \text{ м}$ ), поляризуемость должна быть порядка  $\alpha \approx 10^{-30} \text{ м}^3 \approx 1 \text{ \AA}^3$ . На рисунке 17.3 показана электронная поляризуемость некоторых атомов первых периодов таблицы Менделеева. Видно, что поляризуемость наиболее высока у одновалентных щелочных металлов и наиболее низка у благородных газов. Здесь очевидна связь поляризуемости с валентностью элемента, что вполне естественно: если электронную конфигурацию легко деформировать, то и оторвать внешний электрон от атома тоже нетрудно. И наоборот, электронные оболочки последних элементов группы более устойчивы к внешним воздействиям. Периодичность свойств электронного облака накладывается на общий рост поляризуемости с ростом атомного номера элемента, что тоже понятно: чем дальше внешние электроны от ядра, тем легче меняется форма облачка под действием внешнего поля. Умножая индуцированный полем дипольный момент атома (молекулы) на их концентрацию  $n = N/V$  (где  $N$  —



**Рис. 17.3.** Поляризуемость  $\alpha$  свободных атомов химических элементов нескольких первых групп как функция атомного номера  $Z$  (экспериментальные данные по <http://tinyurl.com/j6q9xwy>)

полное число таких объектов в объеме  $V$  системы), получаем поляризацию единицы объема диэлектрика — **вектор поляризации**

$$\vec{P} = \alpha n \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (17.21)$$

### Ориентационная (дипольная) поляризация

Этот вид поляризации обусловлен наличием у молекул собственного дипольного момента.

У симметричных молекул ( $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$  и т. п.), называемых **неполярными**, в отсутствие внешнего поля центры положительных и отрицательных зарядов совпадают ( $\vec{R}^+ = \vec{R}^-$ ), так что дипольный момент равен нулю. У неполярных молекул под действием электрического поля возникает упругая (электронная или ионная) поляризация, рассмотренная выше.

У некоторых несимметричных молекул ( $\text{CO}$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{NH}$  и т. п.), называемых **полярными**, центры зарядов сдвинуты друг относительно друга, так что такая молекула имеет собственный постоянный дипольный момент. Векторы дипольных моментов отдельных молекул в обычном состоянии из-за теплового движения ориентированы хаотически, поэтому при отсутствии внешнего электрического поля сами дипольные моменты не могут создать собственного электрического поля внутри образца. В результате суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю. При наложении внешнего поля оно частично выстраивает дипольные моменты молекул параллельно вектору  $\vec{E}$  (тепловое движение этому, естественно, противодействует), так что образец в целом приобретает отличный от нуля дипольный момент. Такая поляризация называется **ориентационной**. В этом случае вектор поляризации также пропорционален напряженности внешнего поля.

Покажем это. Потенциальная энергия электрического диполя  $p_e$  в электрическом поле  $E$  дается выражением

$$W = -\vec{p}_e \cdot \vec{E} = -p_e E \cos \theta, \quad (17.22)$$

где  $\theta$  — угол между диполем и напряженностью электрического поля. Вследствие теплового движения диполи ориентированы хаотично, но в этом мире хаоса все же царит некоторый порядок — распределение Больцмана. Поэтому концентрация  $n(\theta)$  диполей, направленных под углом  $\theta$  к полю, записывается в виде

$$n(\theta) = C e^{-W/(k_B T)} = C e^{\gamma \cos \theta}, \quad \gamma = \frac{p_e E}{k_B T}. \quad (17.23)$$

Нормировочная постоянная  $C$  определяется из условия, что интеграл от распределения Больцмана  $n(\theta)$  по полному телесному углу должен дать концентрацию  $n$  частиц:

$$n = \int n(\theta) d\Omega = 2\pi C \int_0^\pi e^{\gamma \cos \theta} \sin \theta d\theta = 2\pi C \int_{-1}^1 e^{\gamma x} dx = 4\pi C \frac{\text{sh} \gamma}{\gamma}, \quad (17.24)$$

где гиперболический синус определен как

$$\text{sh} \gamma = \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{2}. \quad (17.25)$$

Таким образом, нормированное распределение диполей имеет вид

$$n(\theta) = \frac{n}{4\pi} \frac{\gamma}{\text{sh} \gamma} e^{\gamma \cos \theta}. \quad (17.26)$$

Теперь вычисляем величину вектора поляризации. Очевидно, что он направлен вдоль поля, поэтому достаточно усреднить проекцию дипольного момента на направление  $\vec{E}$ :

$$P = \int p_e \cos \theta n(\theta) d\Omega = \frac{p_e n}{2} \frac{\gamma}{\text{sh} \gamma} \int_{-1}^1 e^{\gamma x} x dx. \quad (17.27)$$

Интеграл легко берется по частям, и мы приходим к выражению

$$P = p_e n L(\gamma), \quad L(\gamma) = \text{cth} \gamma - \frac{1}{\gamma}. \quad (17.28)$$

Функция  $L(\gamma)$  — так называемая функция Ланжевена, показывающая среднее значение косинуса угла между диполем и вектором  $\vec{E}$ , а гиперболический котангенс  $\text{cth} \gamma$  определяется как

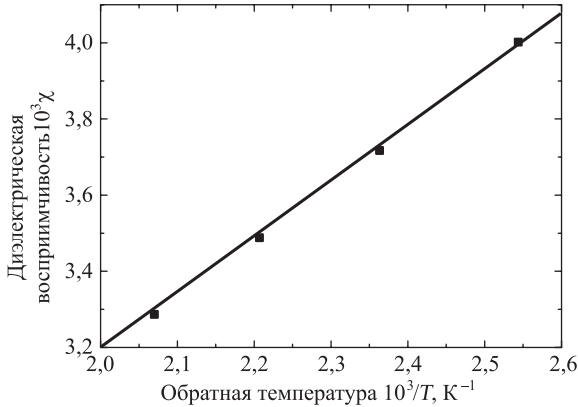
$$\text{cth} \gamma = \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{e^\gamma - e^{-\gamma}}. \quad (17.29)$$

В сильных полях (порядка мегавольт и выше)  $\gamma \gg 1$ , так что функция Ланжевена  $L(\gamma) \approx 1$  и

$$P = p_e n. \quad (17.30)$$

Это так называемое состояние насыщения, когда все дипольные моменты структурных элементов вещества выстроены вдоль поля.

В обычных полях из-за малости дипольных моментов молекул  $\gamma \ll 1$ , и функцию Ланжевена можно разложить в ряд по степеням малого параметра  $\gamma$ , ограничившись лишь первым ненулевым членом ряда:  $L(\gamma) \approx \gamma/3$ , где параметр  $\gamma$ , напомним, определяется уравнением (17.23).



**Рис. 17.4.** Значения восприимчивости водяного пара, измеренные в диапазоне температур от  $20^\circ \text{C}$  до  $210^\circ \text{C}$ . Экспериментальные точки хорошо описываются линейной функцией, наклон которой рассчитан по формуле (17.32)

Мы доказали, что в обычных электрических полях возникающий дипольный момент образца пропорционален напряженности электрического поля и в случае ориентационной (дипольной) поляризации диэлектрика:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (17.31)$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности  $\chi$  (его называют **диэлектрической восприимчивостью**) дается выражением

$$\chi = \frac{p_e^2 n}{3 \varepsilon_0 k_b T}. \quad (17.32)$$

Линейная зависимость  $\chi$  от обратной температуры называется **законом Кюри**.

Закон Кюри подтверждается экспериментами. Например, дипольный момент молекулы воды  $p_e = 6,14 \cdot 10^{-30}$  Кл · м. Измерения диэлектрической восприимчивости водяного пара проводились<sup>1</sup> при плотности пара  $\rho = 0,4181$  кг/м<sup>3</sup>, полученные экспериментальные данные показаны на рис. 17.4.

Учитывая, что молярная масса воды  $\mu = 18,016$  г/моль, а число Авогадро  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>, находим концентрацию молекул:

$$n = \frac{\rho N_A}{\mu} = \frac{0,4181 \times 6,022 \cdot 10^{23}}{18,016 \cdot 10^{-3}} = 1,40 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}. \quad (17.33)$$

Подставляя численные данные в (17.32), получаем

$$\chi = \frac{1,46 \text{ K}}{T}. \quad (17.34)$$

Наклон линейной функции (сплошная линия на рис. 17.4) рассчитан по формуле (17.32); видно хорошее совпадение с экспериментом.

<sup>1</sup>R. Sanger, O. Steiger und K. Gachter. *Helvetica Physica Acta* **5**, 200 (1932).



## Поляризация жидких диэлектриков

Найденные нами общие формулы для диэлектрической восприимчивости справедливы для газов: мы не учитывали влияния молекул друг на друга, что допустимо для систем, где частицы не слишком плотно упакованы. Но общий вывод остается справедливым и для конденсированных сред (жидкостей и твердых тел): во внешнем электрическом поле единица объема диэлектрика приобретает дипольный момент  $\vec{P}$ .

Молекулы в жидкостях по-прежнему обладают электронной поляризуемостью, но теперь в электрическое поле, действующее на отдельную молекулу, дает вклад поляризация молекул, находящихся в ее окружении.

Чтобы рассчитать поляризуемость молекулы в этом случае, рассмотрим сначала поле  $\vec{E}_b$  равномерно поляризованного шара радиусом  $R$ . Эту систему можно смоделировать двумя равномерно и разноименно заряженными шарами с центрами в точках  $\vec{r}^+$  и  $\vec{r}^-$ , причем расстояние между центрами шаров  $l$  мало по сравнению с их радиусами и расстоянием до точки наблюдения ( $l \ll R, r$ ).

Поле внутри равномерно заряженного шара с зарядом  $Q$  дается формулой (15.47):

$$\vec{E}_b = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{Q}{V} \frac{\vec{r}}{3\epsilon_0}. \quad (17.35)$$

Применим теперь (17.35) для расчета поля внутри сдвинутых шаров, положение центров которых описывается радиусами-векторами  $\vec{r}^+$  для положительного заряда и  $\vec{r}^-$  для отрицательного:

$$\vec{E}_b^+ = \frac{Q}{V} \frac{\vec{r} - \vec{r}^+}{3\epsilon_0}, \quad \vec{E}_b^- = -\frac{Q}{V} \frac{\vec{r} - \vec{r}^-}{3\epsilon_0}. \quad (17.36)$$

Результирующее поле находится как векторная сумма  $\vec{E}_b = \vec{E}_b^+ + \vec{E}_b^-$ :

$$\vec{E}_b = \frac{Q}{V} \frac{\vec{r}^- - \vec{r}^+}{3\epsilon_0} = -\frac{Q}{V} \frac{\vec{l}}{3\epsilon_0}, \quad (17.37)$$

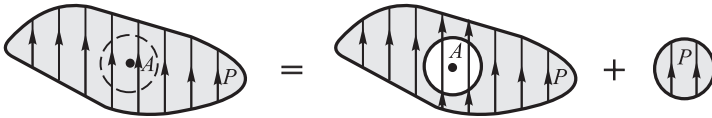
где вектор  $\vec{l} = \vec{r}^+ - \vec{r}^-$  направлен от центра отрицательных зарядов к центру положительных. Дипольный момент сдвинутых шаров равен тогда  $\vec{p} = Q\vec{l}$ , его же можно выразить через вектор поляризации:  $\vec{p} = \vec{P}V$ . Отсюда получаем выражение для электрического поля внутри равномерно поляризованного шара:

$$\vec{E}_b = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}. \quad (17.38)$$

Теперь мы готовы к расчету поля, действующего на атом диэлектрической жидкости. Можно представить этот атом помещенным в сферическую полость внутри диэлектрика. Поле  $\vec{E}_s$  в этой полости легко найти, если сообразить, что его сумма с полем  $\vec{E}_b$  равномерно поляризованного шара дает поле  $\vec{E}$  внутри однородного диэлектрика (см. рис. 17.5, взятый из книги<sup>2</sup>). Отсюда

$$\vec{E}_s = \vec{E} - \vec{E}_b = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}. \quad (17.39)$$

<sup>2</sup>Р. Фейнман, Р. Лейтон и М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. В 10 т. Т. 5. Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1966. С. 222.



**Рис. 17.5.** Поле в любой точке  $A$  диэлектрика можно представить в виде суммы поля равномерно поляризованного шара, мысленно «изъятюго» из среды, и поля образовавшейся на его месте сферической полости

Именно поле  $\vec{E}_s$  создает электронную поляризацию молекулы жидкого диэлектрика, и именно выражение (17.39) мы должны подставить в формулу (17.21):

$$\vec{P} = \alpha n \varepsilon_0 \vec{E}_s = \alpha n \varepsilon_0 \left( \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \right). \quad (17.40)$$

Отсюда легко находим

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \chi = \frac{\alpha n}{1 - \alpha n / 3}. \quad (17.41)$$

Выражение (17.41) для диэлектрической восприимчивости носит название *формулы Клаузиуса–Моссотти*. При малой поляризуемости молекулы  $\alpha n \ll 1$ , и знаменатель в этой формуле можно положить равным единице. Тогда мы приходим к выражению (17.21) для вектора поляризации газа.

В следующем разделе мы получим формулу связи диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости вещества:  $\varepsilon = 1 + \chi$ . Формула Клаузиуса–Моссотти позволяет предсказать диэлектрическую проницаемость жидкости, если она известна для этого же вещества в газообразном состоянии. Например, диэлектрическая проницаемость азота  $N_2$  при температуре  $t = 20^\circ C$  и давлении  $p = 0,1$  МПа равна  $\varepsilon_\Gamma = 1,00058$ . Концентрацию молекул находим из уравнения состояния идеального газа:  $n_\Gamma = p / (k_B T) = 2,47 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Отсюда, воспользовавшись формулой (17.41) вычисляем поляризуемость молекулы азота:

$$\alpha = \chi_\Gamma / n_\Gamma = (\varepsilon_\Gamma - 1) / n_\Gamma = 2,35 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

Плотность жидкого азота равна  $\rho_{ж} = 0,808 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , молярная масса азота  $\mu_{N_2} = 0,028 \text{ кг/моль}$ , откуда получаем массу молекулы азота  $m_{N_2} = \mu_{N_2} / N_A$  и концентрацию молекул в жидком состоянии  $n_{ж} = \rho_{ж} / m_{N_2} = \rho_{ж} N_A / \mu_{N_2} = 1,74 \cdot 10^{28}$ , что в 703,5 раза больше концентрации молекул азота в газообразном состоянии. Предполагая, что поляризуемость  $\alpha$  молекул азота остается той же самой, получаем  $n_{ж} \alpha = 0,408$ , откуда по формуле Клаузиуса–Моссотти следует предсказание для величины диэлектрической проницаемости жидкого азота:

$$\varepsilon_{ж} = 1 + \frac{n_{ж} \alpha}{1 - n_{ж} \alpha / 3} = 1,47. \quad (17.42)$$

Экспериментальное значение  $\varepsilon_{N_2} = 1,43$ .

Заметим, что формула Клаузиуса–Моссотти получена для *электронной поляризации неполярных молекул*. Объяснение поведения в жидкости молекул с дипольными моментами требует более сложной теории.

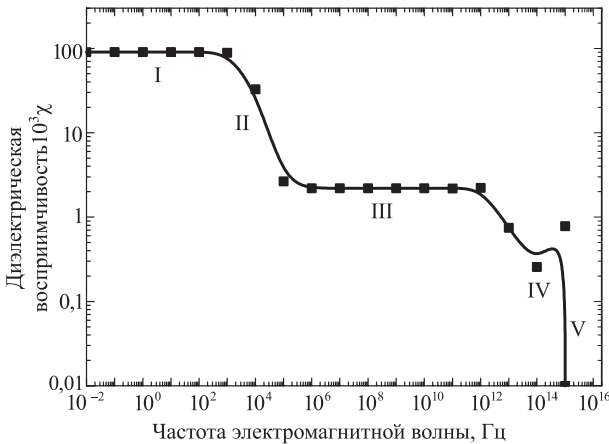
Подводя итоги данного раздела, сформулируем основные выводы и обсудим полученные результаты.

Внешнее электрическое поле либо *создает* дипольные моменты атомов и молекул, либо *ориентирует* существующие у них дипольные моменты. В результате диэлектрик приобретает определенный макроскопический дипольный момент. В слабых полях вектор поляризации  $\vec{P}$  пропорционален напряженности внешнего электрического поля. Это объясняется тем, что в случае упругой поляризации с увеличением  $\vec{E}$  растут дипольные моменты отдельных атомов  $\vec{p}_i$ , а при ориентационной поляризации увеличивается степень ориентации дипольных моментов  $\vec{p}_i$  вдоль поля.

Линейная зависимость (17.31) имеет место лишь в простейших случаях однородных изотропных диэлектриков, где диэлектрическая восприимчивость является скаляром. В более сложных материалах направление вектора поляризации может не совпасть с направлением внешнего поля. В этом случае диэлектрическая восприимчивость представляется тензором второго ранга.

Кроме того, в сильных полях надо уже учитывать члены, пропорциональные высшим степеням напряженности поля  $E$ , которыми мы пренебрегли при разложении функции Ланжевена. И это уже область нелинейной оптики.

В полную поляризацию диэлектрика в принципе могут давать вклад все три различных механизма. Однако редко бывает, чтобы все механизмы поляризации были одинаково значимы. Экспериментально вклад каждой доли можно найти, измеряя диэлектрические проницаемости при разных частотах электромагнитной волны. При малых частотах (статическое поле, которым мы сейчас занимаемся) вклад дают все три механизма поляризации (рис. 17.6). При повышении частоты первым исчезнет вклад ориентационной части: молекулы не будут успевать



**Рис. 17.6.** Экспериментальные данные (по сайту <http://tinyurl.com/juzfhhbf>) для зависимости диэлектрической восприимчивости льда при  $t = 0^\circ\text{C}$  от частоты электромагнитной волны; указаны диапазоны частот: I — статические и низкочастотные поля, II — область длинных и средних радиоволн, III — короткие и ультракороткие радиоволны, IV — инфракрасная область, V — ультрафиолетовая область

поворачиваться, следуя быстро изменяющемуся электрическому полю волны. Переход к новому режиму осуществляется обычно при частотах радиодиапазона. При дальнейшем росте частоты исчезнет вклад ионной части: ионы более инерционны, нежели электроны. В диапазоне оптических частот доминирует электронная доля поляризации. При переходе к еще более высоким частотам — за ультрафиолетовой областью — даже электронные облачка не будут успевать следовать за изменениями электрического поля, и поляризация диэлектрика исчезнет.

## 17.4 Вектор электрического смещения

Разобравшись с поведением диэлектрика на микроскопическом уровне, вернемся к плоскому конденсатору на рис. 17.1. Откуда же взялись поляризационные заряды на поверхности диэлектрической пластины между обкладками?

Теперь мы знаем, что во внешнем поле, создаваемом обкладками, единица объема диэлектрика приобретает дипольный момент  $\vec{P}$ . Скажем, положительные заряды смещаются по направлению поля (вверх на рис. 17.1), а отрицательные — вниз. При полной однородности поля и диэлектрика объемные нескомпенсированные заряды внутри диэлектрика не появляются. Но такой сдвиг приводит к возникновению нескомпенсированных зарядов на поверхности диэлектрической пластины. Дипольный момент диэлектрической пластины равен  $VP$ , где  $V = Sd$  — ее объем. В то же время, полный поверхностный заряд на пластине равен  $Q = \sigma' S$ , а расстояние между центрами положительных и отрицательных зарядов равно  $d$  (см. рис 17.1). Поэтому дипольный момент пластины можно также записать как  $Qd = \sigma' Sd = \sigma' V$ . Из равенства  $VP = \sigma' V$  находим связь поверхностной плотности поляризационных зарядов с поляризацией:  $\sigma' = P$ .

Напряженность  $E$  суммарного поля внутри диэлектрика меньше напряженности поля  $E_0$ , создаваемого обкладками. Именно поле  $E$  действует на молекулы диэлектрика, именно его они «чувствуют», как раз это поле  $E$  фигурирует в соотношении (17.31), и потому  $\sigma' = P = \chi \varepsilon_0 E$ . Используем формулу (17.3), связывающую поле  $E'$  поляризационных зарядов с суммарным полем  $E$ :

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{\chi \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = \chi E = (\varepsilon - 1) E.$$

Отсюда находим связь диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости:

$$\boxed{\varepsilon = 1 + \chi.} \quad (17.43)$$

В общем случае вектор поляризации  $\vec{P}$  не параллелен вектору напряженности суммарного поля  $\vec{E}$ : в анизотропных диэлектриках вектор поляризации повернут на некоторый угол относительно поля. Однако мы всегда можем записать соотношение:

$$\varepsilon_0 \vec{E}_0 = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}). \quad (17.44)$$

Величину  $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  принято называть специальным термином «вектор электрического смещения» (вектор индукции) и обозначать через  $\vec{D}$ . Следовательно,  $\vec{D}$  определяется равенством:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}_0. \quad (17.45)$$

В рассмотренном здесь частном случае линейной зависимости поляризации от поля  $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$  вектор электрического смещения равен

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (17.46)$$

Соотношение  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$  имеет место для бесконечных однородных изотропных диэлектриков, в других же случаях вектор  $\vec{D}$  не параллелен  $\vec{E}$ , так как ему не параллелен вектор поляризации  $\vec{P}$ . Поле вектора  $\vec{D}$  можно графически изобразить линиями электрического смещения, которые определяются аналогично линиям напряженности электрического поля.

Найдем размерность электрического смещения  $D$ . В соответствии с формулой (17.46) вектор электрического смещения точечного заряда  $q$  в вакууме равен

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

т. е.  $\vec{D}$  имеет размерность поверхностной плотности заряда: Кл/м<sup>2</sup>.

## 17.5 Электростатика однородных изотропных диэлектриков

Применим теорему Остроградского—Гаусса к электрическому полю в диэлектрике. Поток вектора напряженности через замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов (свободных и поляризационных), находящихся внутри ограниченного этой поверхностью объема:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sum q + \sum q'), \quad (17.47)$$

где  $\sum q'$  – поляризационные заряды. Это выражение неудобно, так как в него входят поляризационные заряды, которые, в свою очередь, зависят от напряженности электрического поля в данной точке диэлектрика.

Рассмотрим теперь поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность  $S$ :

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS. \quad (17.48)$$

Запишем выражение для поля поляризационных зарядов в виде  $\vec{E}' = -\vec{P}/\varepsilon_0$ . Тогда

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E}', \quad (17.49)$$

откуда

$$\Phi_D = \varepsilon_0 \oint_S (E_n - E'_n) dS = \varepsilon_0 \left( \frac{1}{\varepsilon_0} (\sum q + \sum q') - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q' \right) = \sum q.$$

Итак, мы получили, что

$$\boxed{\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum q,} \quad (17.50)$$

где  $\sum q$  — алгебраическая сумма **свободных** зарядов, окруженных поверхностью  $S$ . Подчеркнем, что линии вектора  $\vec{D}$  могут начинаться и заканчиваться на свободных зарядах, но не на поляризационных. Следует обратить внимание на отсутствие в правой части множителя  $1/\varepsilon_0$ , который имеется в аналогичном выражении для потока вектора напряженности в вакууме. Теорема Остроградского—Гаусса в форме (17.50) справедлива в любой диэлектрической среде — однородной и неоднородной, изотропной или анизотропной.

Из теоремы Остроградского—Гаусса для точечного заряда  $q$  внутри диэлектрика следует:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (17.51)$$

Вектор  $\vec{D}$  не определяет силу, действующую на заряд со стороны внешнего электрического поля. Силовой характеристикой по-прежнему является напряженность электрического поля  $\vec{E}$ , т. е.  $\vec{F} = q\vec{E}$ . При линейной зависимости  $\vec{D}$  от  $\vec{E}$  для вычисления силы можно воспользоваться соотношением  $\vec{E} = \vec{D}/(\varepsilon_0\varepsilon)$ , откуда  $\vec{F} = q\vec{D}/(\varepsilon_0\varepsilon)$ .

Получим теперь закон Кулона для таких диэлектриков. Свободный заряд  $q_2$  создает в диэлектрике электрическое смещение  $D_2 = q_2/4\pi r^2$ , откуда следует выражение для силы взаимодействия с другим свободным зарядом  $q_1$ :

$$F = q_1 E_2 = q_1 \frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \quad (17.52)$$

Соответственно, изменится выражение для потенциала, создаваемого свободным зарядом  $q$ :

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon r}. \quad (17.53)$$

Вследствие этого в формулах для работы по перемещению свободного заряда в поле и энергии взаимодействия свободных зарядов также появится множитель  $1/\varepsilon$ . Итак, по сравнению с аналогичными формулами для систем зарядов в вакууме для диэлектриков нужно произвести замену  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0\varepsilon$ . Поскольку приведенные выражения (при  $\varepsilon = 1$ ) являлись основным источником всех прочих соотношений, выведенных нами для вакуума, мы немедленно получаем выражения для емкостей плоского (16.16), цилиндрического (16.19) и сферического (16.22) конденсаторов, заполненных диэлектриком:

$$\boxed{\begin{aligned} C &= \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}; \\ C &= \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}; \\ C &= 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \end{aligned}} \quad (17.54)$$

Для объемной плотности энергии электрического поля (16.66) теперь можно написать выражение

$$\boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}}, \quad (17.55)$$

которое может быть представлено в векторной форме:

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}. \quad (17.56)$$

В отличие от (17.55) это соотношение имеет более общий характер и справедливо также и для анизотропных диэлектриков, где векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  не параллельны.

Энергетические закономерности в диэлектрических средах иллюстрируются двумя следующими задачами.

**Задача 17.85.** Емкость плоского конденсатора на рис. 17.1 равна  $C = 111$  пФ. Диэлектрик — фарфор ( $\epsilon = 6,5$ ). Конденсатор зарядили до разности потенциалов  $U = 600$  В и отключили от источника тока. Какую работу надо совершить, чтобы вынуть диэлектрическую пластину из конденсатора?

**Решение.** При удалении пластины емкость уменьшится в  $\epsilon$  раз и станет равной  $C_0 = C/\epsilon$ . При зарядке конденсатора ему был сообщен заряд  $Q = CU$ . Начальная энергия электрического поля в конденсаторе равна  $W_0 = CU^2/2$ . Поскольку заряд на отключенном конденсаторе не меняется при удалении пластины, запасенная в нем энергия станет равной

$$W_f = \frac{Q^2}{2C_0} = \frac{C^2 U^2}{2C_0} = \frac{\epsilon C U^2}{2}.$$

Поскольку энергия *увеличилась* в  $\epsilon$  раз, на удаление пластины затрачена работа

$$\begin{aligned} A &= W_f - W_0 = \frac{(\epsilon - 1) C U^2}{2} = \\ &= \frac{(6,5 - 1) \times 111 \cdot 10^{-12} \times (600)^2}{2} \approx 110 \text{ мкДж}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Задача 17.86.** Найти изменение энергии конденсатора из предыдущей задачи при условии, что источник питания не отключается при удалении пластины. Какая работа совершается при удалении пластины в этом случае?

**Решение.** Начальная энергия поля  $W_0$  дается тем же выражением, что и в задаче 17.85. На конденсаторе поддерживается постоянная разность потенциалов, так что после удаления пластины запасенная в нем энергия равна

$$W_f = \frac{C_0 U^2}{2} = \frac{C U^2}{2\epsilon}.$$

В этом случае энергия в конденсаторе *уменьшилась*:

$$\begin{aligned} \Delta W &= W_f - W_0 = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{C U^2}{2} \\ &= -\frac{6,5 - 1}{6,5} \times \frac{111 \cdot 10^{-12} \times (600)^2}{2} = -16,9 \text{ мкДж}. \end{aligned}$$

В процессе участвует и источник напряжения. Заряд на конденсаторе  $Q_0 = CU$  при вынимании диэлектрика уменьшится и станет равным  $Q_f = C_0 U = CU/\epsilon$ , так что изменение заряда

$$\Delta Q = Q_f - Q_0 = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} C U.$$

Заряд  $|\Delta Q|$  перетек с положительно заряженной обкладки конденсатора на отрицательно заряженную *через* источник питания, т. е. в направлении, обратном приложенному напряжению. На это израсходована энергия

$$\Delta W' = |\Delta Q| U = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} C U^2.$$

Сравнивая  $\Delta W'$  с выражением для  $\Delta W$ , мы видим, что ровно половина необходимой энергии поступила за счет уменьшения энергии в конденсаторе. Другая половина и есть работа по выниманию пластины:

$$A = \Delta W' - |\Delta W| = |\Delta W| = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{CU^2}{2} = 16,9 \text{ мкДж.}$$

Любопытно, что при отключенном источнике питания удалить диэлектрик оказалось в  $\varepsilon$  раз труднее. ■

В обоих рассмотренных случаях надо затратить работу, чтобы вытащить диэлектрическую пластину. Это находится в согласии с нашим общим выводом, что в неоднородном электростатическом поле диполь втягивается в ту область, где поле сильнее.

## 17.6 Условия на границе раздела двух диэлектриков

Бесконечно протяженных однородных диэлектриков в природе не существует. На практике часто приходится иметь дело с образцами, состоящими из нескольких однородных диэлектриков с разными  $\varepsilon$  и разделенными резкой границей. В этом случае при определении полей  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  во всем пространстве следует учитывать соответствующие *граничные условия*.

Поместим в поле  $\vec{E}_0$  два диэлектрика с различными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . На границе раздела двух сред выделим небольшой плоский участок площадью  $S$  (рис. 17.7). В силу различия  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  поверхностные плотности поляризационных зарядов обоих диэлектриков будут разными:  $\sigma'_1 \neq \sigma'_2$ . Следовательно, на поверхности, по которой соприкасаются диэлектрики, возникает избыточный связанный заряд  $q_{\text{изб}}$ , обусловленный разницей в значениях  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$ . Поскольку линии вектора электрического смещения  $\vec{D}$  могут начинаться и заканчиваться *только* на свободных зарядах, они проходят через границу раздела диэлектриков, не прерываясь, а лишь претерпевая излом.

Граничные условия для вектора  $\vec{D}$  можно определить по теореме Остроградского—Гаусса: поток вектора  $\vec{D}$  через замкнутую поверхность параллелепипеда на рис. 17.7 должен быть равен нулю, так как на границе раздела отсутствуют свободные заряды. Поскольку высоту  $h$  параллелепипеда мы устремляем к нулю,

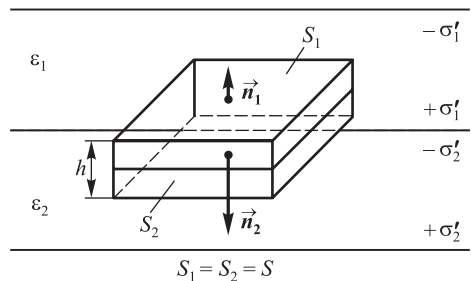


Рис. 17.7. Поляризационные заряды на границе раздела двух диэлектриков



поток вектора  $\vec{D}$  записывается как

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S (D_{2n} - D_{1n}) dS = 0. \quad (17.57)$$

Так как площади верхней и нижней граней параллелепипеда произвольны, должно быть равно нулю подинтегральное выражение в (17.57), т. е. на границе раздела двух диэлектриков нормальная составляющая вектора электрического смещения непрерывна (рис. 17.8):

$$\boxed{D_{2n} = D_{1n}}. \quad (17.58)$$

Нормальная составляющая вектора электрической напряженности, наоборот, терпит скачок. Для плоской пластины однородного диэлектрика  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ , и тогда можно записать

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n},$$

откуда следует

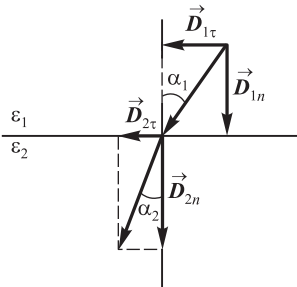
$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (17.59)$$

Электрическое поле внутри диэлектрика является суперпозицией двух полей: внешнего  $\vec{E}_0$ , создаваемого свободными зарядами, и дополнительного  $\vec{E}'$ , обусловленного связанными зарядами:  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ . Поля  $\vec{E}'_1$  и  $\vec{E}'_2$ , порожденные связанными зарядами в первом и втором диэлектриках, направлены по нормали к поверхности раздела диэлектриков (рис. 17.8), следовательно, вклады в тангенциальную составляющую вектора  $\vec{E}$  давать не могут, откуда

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

Учитывая связь  $\vec{D}$  с  $\vec{E}$ , находим скачок тангенциальной составляющей вектора электрического смещения (см. рис. 17.8):

$$\boxed{\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}. \quad (17.60)$$



**Рис. 17.8.** Преломление линий вектора электрического смещения на границе раздела двух диэлектриков

Учтем теперь, что тангенс угла между вектором электрического смещения и нормалью к поверхности дается отношением тангенциальной и нормальной составляющих

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}. \quad (17.61)$$

Из соотношений (17.58), (17.60) и (17.61) вытекает закон преломления линий вектора электрического смещения, проходящего через границу раздела двух диэлектриков:

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}. \quad (17.62)$$

## Контрольные вопросы

1. Что такое поляризационные заряды?
2. Что называется электрическим диполем? Чему равен электрический момент диполя? Объясните поведение диполя в однородном электрическом поле.
3. Как действует на диполь внешнее неоднородное электрическое поле?
4. Объясните механизмы различных видов поляризации диэлектрика во внешнем электрическом поле.
5. Что такое вектор поляризация диэлектрика? От чего он зависит?
6. Как связаны диэлектрическая проницаемость и диэлектрическая восприимчивость вещества?
7. Как зависит от температуры диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, состоящего из полярных молекул?
8. Объясните ход кривой зависимости диэлектрической восприимчивости от частоты электромагнитного поля.
9. Каковы особенности применения теоремы Остроградского—Гаусса к диэлектрической среде?
10. Дайте определение вектора электрического смещения. Какова его размерность?
11. Объясните поведение линий вектора электрического смещения.
12. Какие изменения надо внести в закон Кулона и другие формулы электростатики в вакууме, если мы имеем дело с диэлектриками?
13. Металлический проводник опустили в керосин и зарядили. После этого его вынули с помощью изоляторов, и поместили в воду. Изменилась ли емкость проводника?
14. Выведите выражение для емкости слоистого плоского конденсатора, заполненного  $n$  слоями диэлектрика толщиной  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_i$ . Слои параллельны обкладкам.

15. Выведите выражение для емкости «поперечного» слоистого плоского конденсатора, заполненного  $n$  слоями диэлектрика площадью  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_i$ . Толщина каждого слоя одинакова и равна  $d$ . Слои ортогональны обкладкам.
16. В плоский воздушный конденсатор вставляется диэлектрическая пластина. Энергия конденсатора меняется, т. е. совершается работа. Кто ее совершает?
17. Тот же вопрос, если пластина удаляется из конденсатора.

## Глава 18

# Постоянный электрический ток

### 18.1 Сила тока и плотность тока в проводнике

Всякое упорядоченное движение заряженных частиц называется *электрическим током*. За направление тока условно принимают направление движения положительных зарядов. В проводниках часть электронов не связана с определенными атомами и может свободно перемещаться по всему объему вещества. В отсутствие приложенного к проводнику электрического поля такие свободные электроны (электроны проводимости) движутся хаотично, часто сталкиваясь с неподвижными атомами и изменяя при этом направление своего движения. Через любое сечение проводника в одну сторону проходит столько же электронов, сколько и в противоположную. Поэтому результирующего переноса электронов через такое сечение нет, и электрический ток равен нулю. Если же к концам проводника приложить разность потенциалов, то под действием сил электрического поля свободные заряды в проводнике начнут двигаться из области большего потенциала в область меньшего (подразумевается движение положительных зарядов).

Различают несколько видов электрического тока. Предположим, что имеется макроскопическое заряженное тело (например, шар), которое перемещается в пространстве. Так как вместе с телом будут перемещаться заряды, возникает направленное движение зарядов, т. е. электрический ток. Такой ток, связанный с движением макроскопических тел, называется *конвекционным* (переносным) током. Если внутри какого-то тела упорядоченно перемещается некоторое число заряженных частиц вследствие того, что в нем создается электрическое поле, то такой ток называется *током проводимости*.

Электрический ток характеризуется *силой тока*  $I$ .

◆ **Сила тока** — это заряд, проходящий через поперечное сечение проводника в единицу времени

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad \blacklozenge \quad (18.1)$$

Если за любые равные промежутки времени через любое сечение проводника проходят одинаковые заряды, то такой ток называется постоянным, и тогда заряд, протекший за время  $t$ , может быть найден как

$$q = It. \quad (18.2)$$

◆ Величину  $j$ , равную заряду, проходящему через единицу площади поперечного сечения проводника за единицу времени, называют **плотностью тока**. ◆  
 С учетом определения силы тока плотность тока через данное сечение  $\Delta S$  может быть выражена через силу тока  $\Delta I$ , протекающего через это сечение:

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S}. \quad (18.3)$$

При равномерном распределении потока зарядов по всей площади сечения проводника плотность тока равна

$$j = \frac{I}{S} = \frac{\Delta q}{S \Delta t}. \quad (18.4)$$

В СИ силу тока измеряют в амперах (А), это одна из основных единиц. Уравнение (18.1) связывает единицы измерения силы тока и заряда:  $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$ . Единицей плотности тока служит  $1 \text{ А/м}^2$ . Это очень большая величина, на практике обычно имеют дело с более мелкими единицами, например  $1 \text{ А/мм}^2$ .

Плотность тока можно выразить через объемную плотность зарядов  $\rho_e$  и скорость их движения  $\vec{v}$  (рис. 18.1). Полный заряд, проходящий за время  $dt$  через некоторую поверхность  $S$ , перпендикулярную вектору скорости  $\vec{v}$ , равен:

$$dq = \rho_e v dt S. \quad (18.5)$$

Так как  $dq/(S dt)$  есть плотность тока  $j$ , можно записать:

$$j = \rho_e v. \quad (18.6)$$

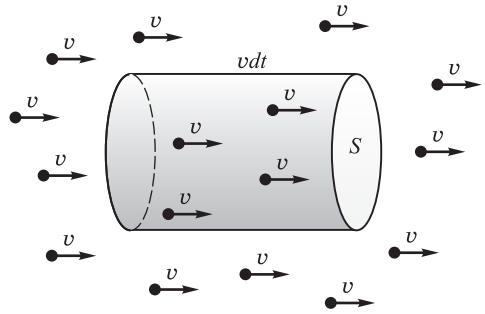
Поскольку скорость  $\vec{v}$  есть векторная величина, плотность тока также должна быть вектором (в отличие от силы тока  $I$ , являющейся скаляром). Кроме того, удобно выразить плотность заряда  $\rho_e$  через концентрацию заряда  $n$  — число носителей заряда в единице объема:  $\rho_e = en$ . В итоге получим

$$\vec{j} = en\vec{v}. \quad (18.7)$$

Следует подчеркнуть, что плотность тока — более фундаментальная величина, нежели сила тока. Зная плотность тока, мы знаем распределение течения заряда по проводнику. Силу тока всегда можно вычислить по его плотности. Соотношение (18.4) может быть обращено: если взять бесконечно малый элемент площади  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , то сила тока через него определится как  $dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ . Соответственно, силу тока через любую поверхность  $S$  можно найти интегрированием:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (18.8)$$

Что же понимать под скоростью заряда  $\vec{v}$ , если таких зарядов — множество и они заведомо не движутся все одинаково? В отсутствие внешнего электрического поля скорости носителей тока  $\vec{v}_i, i = 1, 2, \dots, N$  распределены хаотично, подчиняясь общим закономерностям статистической физики. При наложении поля возникает некоторая дрейфовая скорость  $\vec{v} = \langle \vec{v}_i \rangle$  (средняя скорость направленного движения зарядов под действием поля), которая будет отлична от нуля.



**Рис. 18.1.** Связь плотности тока  $\vec{j}$  с дрейфовой скоростью  $\vec{v}$  носителей заряда. За время  $dt$  через площадку  $S$  пройдут все заряды из объема  $dV = vdtS$ , откуда находим полный заряд  $dq$  (18.5) и плотность тока (18.7)

Приведем аналогию. Когда вода вырывается из шланга и мы интересуемся, какое ее количество поступает в единицу времени на клумбу, нам надо знать скорость струи и поперечное сечение шланга. И нас совершенно не волнуют скорости отдельных молекул, хотя они и очень велики, намного больше скорости струи, как мы убедились в предыдущей части курса.

Если в веществе возможно движение зарядов разного знака, то полная плотность тока определяется векторной суммой плотностей токов зарядов каждого знака. Важно подчеркнуть, что дрейфовые скорости положительных и отрицательных зарядов противоположны по направлению: положительные заряды движутся вдоль электрического поля, отрицательные — в противоположном направлении. Но их плотности токов, как следует из (18.7), имеют одно направление, поскольку знаки зарядов  $e$  и  $-e$  также различны.

Как уже указывалось, в отсутствие электрического поля движение зарядов происходит хаотично и не создает результирующего тока. Если электронам, прилагая электрическое поле, сообщить даже малую скорость дрейфа, то из-за наличия в проводниках огромного количества свободных электронов возникает значительный ток. Поскольку дрейфовая скорость носителей тока создается электрическим полем, имеет место пропорциональность  $\vec{v} \propto \vec{E}$ , так что и плотность тока будет пропорциональна вектору напряженности:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}.} \quad (18.9)$$

Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называют *удельной проводимостью* (электропроводностью) вещества. Проводимость связывает напряженность поля в данной точке с установившейся скоростью «течения» носителей заряда. Она может зависеть от локальных свойств проводника вблизи этой точки (т.е. от строения вещества), но не зависит от формы и размеров проводника в целом. Соотношение (18.9) носит название **закона Ома для плотности тока в проводнике** (его называют также **законом Ома в дифференциальной форме**).

Чтобы понять порядки величин, оценим дрейфовую скорость носителей заряда в одном из наиболее распространенных материалов — меди. Возьмем для примера силу тока  $I = 1$  А и пусть площадь поперечного сечения провода составляет  $1 \text{ мм}^2 = 10^{-6} \text{ м}^2$ . Тогда плотность тока равна  $j = 10^6 \text{ А/м}^2$ . Теперь воспользуемся соотношением (18.7):  $v = j/(ne)$ . Носителями зарядов являются электроны ( $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл), и нам осталось оценить их концентрацию  $n$ . В таблице Менделеева медь помещается в первой группе элементов, у нее один

валентный электрон, который может быть отдан в зону проводимости. Поэтому число «свободных» электронов примерно совпадает с числом атомов. Берем из справочника плотность меди  $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Молярную массу меди найдем из таблицы Менделеева:  $\mu_{\text{Cu}} = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ . Отношение  $\rho_{\text{Cu}}/\mu_{\text{Cu}}$  — число молей в  $1 \text{ м}^3$ . Умножая на число Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ , получаем число атомов в единице объема, т. е. концентрацию электронов

$$n = N_A \frac{\rho_{\text{Cu}}}{\mu_{\text{Cu}}} = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{8,9 \cdot 10^3}{63,5 \cdot 10^{-3}} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Теперь находим искомую оценку дрейфовой скорости электронов:

$$v = \frac{j}{ne} = \frac{10^6}{8,4 \cdot 10^{28} \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ м/с} \approx 27 \text{ см/ч}.$$

Для сравнения: тепловые скорости электронов при  $20^\circ\text{C}$  составляют

$$v_T \sim \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 293}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,15 \cdot 10^5 \text{ м/с} = 115 \text{ км/с}.$$

## 18.2 Закон сохранения заряда

Возьмем произвольную воображаемую замкнутую поверхность  $S$ , которую в разных направлениях пересекают движущиеся заряды. Мы видели, что полный ток через поверхность выражается как

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dt},$$

где  $dq$  — заряд, пересекающий поверхность за время  $dt$ . Обозначим через  $q'$  заряд, находящийся внутри поверхности. Его можно выразить через плотность заряда  $\rho_e$ , проинтегрированную по всему объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью:

$$q' = \int_V \rho_e dV, \text{ откуда } \frac{dq'}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV.$$

Из фундаментального закона природы — **закона сохранения заряда** — следует, что заряд  $dq$ , вышедший через поверхность за время  $dt$ , уменьшит заряд  $q'$  внутри поверхности на эту же величину, т. е.  $dq' = -dq$  или

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dq'}{dt}.$$

Подставляя сюда выписанные выражения для скорости изменения зарядов, получаем математическое соотношение, выражающее **закон сохранения заряда в интегральной форме**:

$$\boxed{\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV.} \quad (18.10)$$

Напомним, что интегрирования ведутся по произвольной поверхности  $S$  и ограниченному ею объему  $V$ .

По форме закон аналогичен уравнению непрерывности для текущей жидкости. Вместо плотности заряда надо подставить плотность  $\rho$  жидкости, а роль плотности тока будет играть плотность потока массы:  $\vec{j} = \rho\vec{v}$ . Выберем в качестве объема  $V$  часть трубки тока, ограниченной «донышками» с площадями сечений  $S_1$  и  $S_2$ . Скорость жидкости параллельна стенкам трубки тока и ортогональна основаниям. Поэтому в левой части уравнения (18.10) останутся только интегрирования по донышкам трубки тока, так как поток через стенки равен нулю:

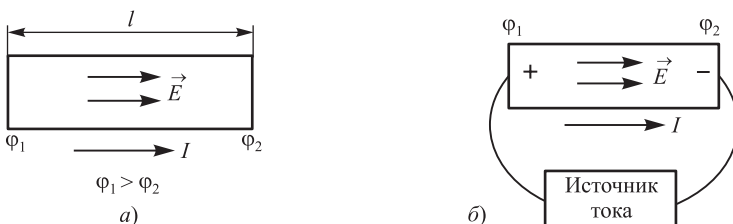
$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j_1 S_1 - j_2 S_2.$$

Так как жидкость несжимаема, ее плотность не меняется и  $j_1 = \rho v_1$ ,  $j_2 = \rho v_2$ , а правая часть (18.10) равна нулю ( $\partial\rho/\partial t = 0$ ). Отсюда и следует та форма уравнения непрерывности  $S_1 v_1 = S_2 v_2$ , которую мы обсуждали в первой части курса, говоря о течении жидкости.

### 18.3 Сторонние силы

Если на концах однородного проводника длиной  $l$  создана разность потенциалов  $\Delta\varphi$ , то она порождает внутри него электрическое поле  $\vec{E}$ , направленное, согласно общей формуле (15.35), в сторону падения потенциала. При этом в проводнике возникает электрический ток, который идет от большего потенциала  $\varphi_1$  к меньшему  $\varphi_2$  (рис. 18.2, а). Движение (положительных) зарядов от  $\varphi_1$  к  $\varphi_2$  приводит к выравниванию потенциалов во всех точках. Электрическое поле в проводнике при этом исчезает, и ток прекращается. Очевидно, обязательным условием существования тока является наличие разности потенциалов (напряжения)  $U = \varphi_1 - \varphi_2 \neq 0$ , а для ее поддержания необходимо иметь специальное устройство, с помощью которого будет происходить разделение зарядов на концах проводника. Такое устройство называется источником тока. Таким образом, для получения тока требуется наличие замкнутой цепи и источника тока (рис. 18.2, б).

Гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы, электрические генераторы — примеры источников тока. Источник тока выполняет одновременно и вторую задачу — он замыкает электрическую цепь, по которой можно



**Рис. 18.2.** Для возникновения тока необходима разность потенциалов на концах проводника (а); чтобы ее поддерживать, нужен источник тока (б)



было бы осуществить непрерывное движение зарядов. Ток течет по внешней части (проводнику) и по внутренней (источнику тока). Источник тока имеет два полюса: положительный, с более высоким потенциалом, и отрицательный, с более низким потенциалом. При разомкнутой внешней цепи на отрицательном полюсе источника тока образуется избыток электронов, а на положительном — недостаток. Разделение зарядов в источнике тока производится с помощью внешних, так называемых *сторонних*, сил, направленных против электрических сил, действующих на разноименные заряды *внутри* самого источника тока. Природа сторонних сил может быть самой различной: механической, химической, тепловой, биологической и т. д.

## 18.4 Электродвижущая сила

Итак, перемещение заряда по замкнутому проводнику под действием источника тока происходит за счет сил неэлектростатического происхождения — сторонних сил. Электростатические силы не могут обеспечить движение зарядов по замкнутому контуру из-за своего потенциального характера (работа по замкнутому контуру равна нулю). Электростатические силы перемещают положительный заряд в направлении более низкого потенциала. Сторонние силы действуют внутри источника тока и могут перемещать заряды в сторону более высокого потенциала. При этом они совершают работу  $A_{\text{ст}}$ . Эта работа складывается из электрической части  $A_{\text{эл}}$ , связанной с перемещением заряда от отрицательного к положительному полюсу источника тока, а также и из работы  $A_{\text{сопр}}$ , которая затрачивается на преодоление механических сил сопротивления среды источника:

$$A_{\text{ст}} = A_{\text{эл}} + A_{\text{сопр}}. \quad (18.11)$$

◆ *Отношение работы сторонних сил при перемещении точечного заряда вдоль всей цепи, включая и источник тока, к заряду, называется электродвижущей силой (ЭДС) источника тока:*

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q} = \frac{A_{\text{эл}} + A_{\text{сопр}}}{q}. \quad \blacklozenge \quad (18.12)$$

Работа против сил электрического поля равна

$$A_{\text{эл}} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU. \quad (18.13)$$

Отсюда следует, что разность потенциалов (напряжение) между полюсами источника тока всегда меньше его ЭДС:

$$U = \mathcal{E} - \frac{A_{\text{сопр}}}{q}. \quad (18.14)$$

Если цепь разомкнута и ток не идет, то  $A_{\text{сопр}} = 0$  и  $U = \mathcal{E}$ , т. е. ЭДС источника тока при разомкнутой внешней цепи равна напряжению между его полюсами.

## 18.5 Закон Ома для однородного участка цепи

Выше отмечалось, что плотность тока пропорциональна величине напряженности электрического поля:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Почему же мы приняли, что в проводниках

средняя скорость зарядов постоянна и пропорциональна полю, а не возрастает неограниченно? Действительно, свободные заряды вне проводника под действием однородного внешнего поля получали бы ускорение  $\vec{a} = e\vec{E}/m$ . Таким образом, направленная скорость зарядов вдоль поля (или против поля, если заряды отрицательные) возрастала бы со временем. Тогда и плотность тока также росла бы со временем:  $\vec{j} = \rho\vec{v} = \rho\vec{a}t$ . Однако внутри проводника свободные заряды испытывают столкновения с атомами проводника. За время «свободного полета»  $\tau$  между двумя столкновениями заряд в проводнике приобретает скорость вдоль внешнего электрического поля:  $\vec{v} = e\vec{E}\tau/m$ . После очередного столкновения направленная скорость теряется. Затем, до следующего столкновения, происходит новое наращивание направленной скорости. Поэтому в среднем направленная скорость движения заряда постоянна и определяется средней скоростью, приобретаемой им между двумя последовательными столкновениями.

На участке электрической цепи длиной  $dl$  напряженность поля связана с потенциалом обычным соотношением  $d\varphi = -E dl$ . Следовательно, можно записать:

$$d\varphi = -\frac{jdl}{\sigma} = -\frac{jSdl}{\sigma S} = -I \frac{dl}{\sigma S}. \quad (18.15)$$

Здесь  $\sigma$  и  $S$  — проводимость и площадь поперечного сечения проводника в том месте, где находится выбранный нами бесконечно малый элемент  $dl$ . Из (18.15) видно, что потенциал изменяется вдоль проводника, а вот сила тока  $I$  будет постоянна на всей длине  $l$  проводника: при стационарном «течении» зарядов — сколько их входит через одно сечение проводника, столько и выходит через другое. Это также следствие закона сохранения заряда.

Интегрируя соотношение (18.15) вдоль проводника от точки 1 до точки 2, мы можем тогда вынести силу тока за знак интеграла:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_1^2 d\varphi = I \int_1^2 \frac{dl}{\sigma S}. \quad (18.16)$$

Под знаком интеграла находится величина, которая не зависит от силы тока в цепи и напряжения на концах проводника, а определяется лишь его геометрическими размерами, формой и материалом. Эта величина называется **сопротивлением** проводника между точками 1 и 2:

$$R = \int_1^2 \frac{dl}{\sigma S} = \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl. \quad (18.17)$$

Величина  $\rho = 1/\sigma$ , обратная удельной проводимости, называется **удельным сопротивлением вещества**. В случае однородного проводника постоянного сечения отношение  $\rho/S$  можно вынести из-под знака интеграла в (18.17), и тогда

$$\boxed{R = \frac{\rho l}{S}}. \quad (18.18)$$

В СИ за единицу сопротивления принимают 1 Ом, т.е. сопротивление однородного (без ЭДС) участка цепи, по которому протекает ток в 1 А при

Таблица 18.1. Удельные сопротивления некоторых проводников

Проводники	Al	Cu	Au	Fe	Нихром
$\rho$ (Ом · м)	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$	$112 \cdot 10^{-8}$

напряжении на его концах в 1 В:  $[R] = [U]/[I] = 1 \text{ В}/1 \text{ А} = 1 \text{ Ом}$ . В соответствии с (18.18) удельное сопротивление измеряется в СИ в единицах Ом · м.

Удельное сопротивление  $\rho$  вещества характеризует проводящую способность материала, оно различно для разных веществ и существенно зависит от температуры проводника. Однако  $\rho$  не зависит от формы и размеров проводника. Мы не вынесли  $\rho$  за знак интеграла в (18.17), потому что встречаются цепи, отдельные участки которых составлены из различных материалов. В этом случае  $\rho$  будет зависеть от переменной интегрирования  $l$ . Значения удельного сопротивления для некоторых веществ приведены в таблице 18.1. Обращает внимание, что в целом удельные сопротивления металлов близки друг к другу, что свидетельствует об общности механизма проводимости. Удельные же сопротивления плохих проводников и изоляторов варьируются в широких пределах. Например, для морской воды  $\rho \sim 0,3 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , для влажной земли  $\rho \sim 10^2 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , для стекла  $\rho \sim 10^{11} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , для янтаря  $\rho \sim 10^{18} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

Подстановка (18.17) в выражение (18.16) приводит к линейной зависимости между напряжением  $U$  на однородном участке цепи и током  $I$ :

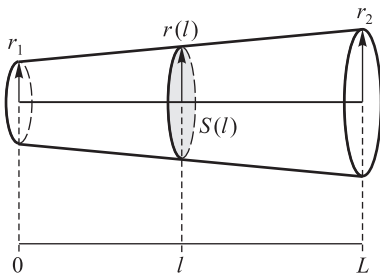
$$\boxed{U = IR}, \quad (18.19)$$

которую называют **законом Ома в интегральной форме**.

**Задача 18.87.** Проводник из меди имеет форму усеченного конуса с радиусами оснований  $r_1 = 1 \text{ мм}$  и  $r_2 = 2 \text{ мм}$ . Длина проводника  $L = 10 \text{ см}$ . Найти его сопротивление.

**Решение.** Зависимость радиуса проводника  $r(l)$  от расстояния  $l$ , отсчитываемого от меньшего основания, показана на рис. 18.3. Математически эта зависимость выражается линейным законом:

$$r(l) = r_1 + (r_2 - r_1) \frac{l}{L}. \quad (18.20)$$



**Рис. 18.3.** К вычислению сопротивления проводника конической формы

Площадь сечения  $S(l)$  на расстоянии  $l$  можно найти как  $S(l) = \pi r^2(l)$ . Тогда из формулы (18.17) следует:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho}{\pi} \int_0^L \frac{dl}{(r_1 + (r_2 - r_1) \frac{l}{L})^2} = \left. -\frac{\rho}{\pi} \frac{L}{r_2 - r_1} \frac{1}{r_1 + (r_2 - r_1) \frac{l}{L}} \right|_0^L = \\ &= \frac{\rho}{\pi} \frac{L}{r_2 - r_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\rho L}{\pi r_1 r_2}. \end{aligned} \quad (18.21)$$

Подставляя численные значения, находим

$$R = \frac{1,7 \cdot 10^{-8} \times 10^{-1}}{3,14 \times 10^{-3} \times 2 \cdot 10^{-3}} = 2,7 \cdot 10^{-4} = 0,27 \text{ мОм. } \blacksquare$$

## 18.6 Последовательное и параллельное соединение проводников

При последовательном соединении, согласно закону сохранения заряда, через сопротивления проходит одинаковый заряд за одно и то же время, поэтому токи во всех сопротивлениях одинаковы:  $I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$ . Падения напряжения на первом проводнике  $U_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ , на втором  $U_2 = \varphi_2 - \varphi_3$  и т. д. (рис. 18.4). Сумма падений напряжения на всех сопротивлениях равна напряжению  $U$  на концах цепи:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \varphi_1 - \varphi_n. \end{aligned} \quad (18.22)$$

По закону Ома для участка цепи запишем:

$$U_1 = IR_1, \quad U_2 = IR_2, \quad \dots, \quad U_n = IR_n. \quad (18.23)$$

Таким образом:

$$U = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n). \quad (18.24)$$

В то же время,  $U = IR_{\text{посл}}$ , где  $R_{\text{посл}}$  — общее сопротивление цепи при последовательном соединении. Следовательно,

$$\boxed{R_{\text{посл}} = \sum_{i=1}^n R_i.} \quad (18.25)$$

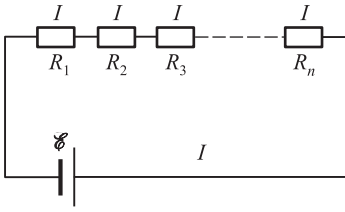
Таким образом, при последовательном соединении полное сопротивление цепи равно сумме отдельных сопротивлений, а падение напряжения на отдельных сопротивлениях пропорционально этим сопротивлениям:

$$U_1 : U_2 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n. \quad (18.26)$$

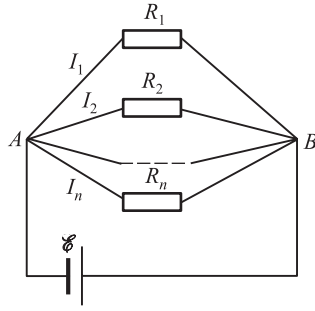
При параллельном соединении (рис. 18.5) напряжение  $U$  на участке  $AB$  будет одинаковым для каждого отдельного сопротивления, т. е.

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n. \quad (18.27)$$

Из закона сохранения заряда следует, что при разветвлении цепи часть зарядов может пойти по ее отдельным участкам, но полное количество заряда, пришед-



**Рис. 18.4.** Последовательное соединение проводников



**Рис. 18.5.** Параллельное соединение проводников.

шего к точке разветвления, должно равняться сумме всех зарядов, вышедших из нее. Иными словами, ток  $I$  равен сумме токов

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} \\ &= U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right). \end{aligned} \quad (18.28)$$

В то же время, сила тока на всем участке равна  $I = U/R_{\text{пар}}$ , где  $R_{\text{пар}}$  — общее сопротивление цепи при параллельном соединении. Следовательно,

$$\frac{1}{R_{\text{пар}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (18.29)$$

Токи в отдельных сопротивлениях обратно пропорциональны этим сопротивлениям:

$$I_1 : I_2 : \dots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \dots : \frac{1}{R_n}. \quad (18.30)$$

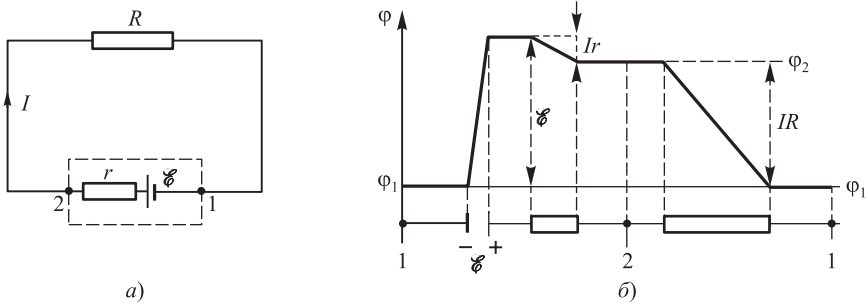
## 18.7 Закон Ома для замкнутой цепи

Как следует из (18.13), работа против сил поля внутри источника тока при перемещении зарядов между его полюсами выражается через падение напряжения на внешнем сопротивлении  $R$ :  $A_{\text{эл}} = qU$ . Для замкнутой электрической цепи работа против сил сопротивления среды источника  $A_{\text{сопр}}$  приводит к падению напряжения  $U_{\text{сопр}}$  внутри источника, так что  $A_{\text{сопр}} = qU_{\text{сопр}}$ . Приписав источнику тока *внутреннее сопротивление*  $r$ , записываем падение напряжения на внутреннем участке цепи в соответствии с законом Ома:

$$U_{\text{внутр}} = Ir. \quad (18.31)$$

Как следует из (18.12), при замкнутой внешней цепи (рис. 18.6) ЭДС источника тока  $\mathcal{E}$  равна сумме падений напряжения на внутреннем сопротивлении источника и во внешней цепи:

$$\mathcal{E} = Ir + U = Ir + IR. \quad (18.32)$$



**Рис. 18.6.** Замкнутая цепь (а), состоящая из активного сопротивления  $R$  и источника тока (показан пунктирным прямоугольником) с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ . Распределение потенциала вдоль цепи показано справа (б): сумма падений напряжения на внутреннем сопротивлении и нагрузке (внешней цепи) равна ЭДС источника тока; напряжение на зажимах источника (точки 1 и 2) равно  $\varphi_2 - \varphi_1$  и меньше ЭДС на величину  $Ir$  падения напряжения на внутреннем сопротивлении

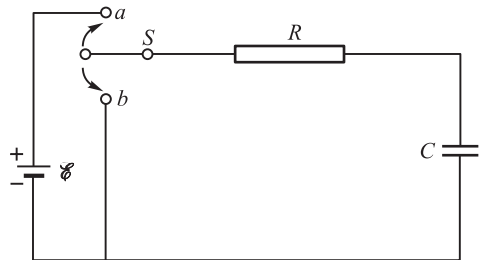
Отсюда получаем *закон Ома для замкнутой цепи*

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \tag{18.33}$$

Видно, что внешнее и внутреннее сопротивления можно рассматривать как два сопротивления, соединенных последовательно.

## 18.8 Зарядка и разрядка конденсатора

В этом разделе мы рассмотрим вопросы зарядки и разрядки конденсатора. Электрическая цепь показана на рис. 18.7. Переключатель  $S$  позволяет подсоединять и отсоединять источник тока, внутренним сопротивлением которого пренебрегаем.



**Рис. 18.7.** Цепь для зарядки и разрядки конденсатора

Пусть сначала конденсатор емкостью  $C$  не заряжен, и мы перебрасываем выключатель в положение  $a$ . По цепи пойдет зависящий от времени ток  $i(t)$ , переносящий положительный заряд на верхнюю пластину конденсатора<sup>1</sup>. Обозначим

<sup>1</sup>Ток зарядки и разрядки конденсатора не является постоянным, но рассматривается в данной главе, поскольку его изменение обычно происходит достаточно медленно.

заряд на этой пластине в момент  $t$  через  $q(t)$ . Напряжение на конденсаторе можно найти: 1) как разницу между ЭДС и падением напряжения на нагрузке  $\mathcal{E} - iR$  и 2) как отношение заряда к емкости  $q/C$ . Приравнивая эти выражения, получаем первое уравнение процесса зарядки:

$$\mathcal{E} - iR = \frac{q}{C}. \quad (18.34)$$

Согласно закону сохранения заряда, изменение заряда  $q$  на обкладках конденсатора происходит только из-за наличия тока  $i$ . Поэтому второе уравнение процесса имеет вид:

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (18.35)$$

Подставим (18.35) в (18.34):

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (18.36)$$

Мы видим, что у этого уравнения имеется стационарное решение (постоянный заряд на конденсаторе):  $q_{\text{стац}} = C\mathcal{E}$ . При таком заряде на конденсаторе напряжение на нем равно ЭДС источника тока и ток по цепи не идет:  $i_{\text{стац}} = dq_{\text{стац}}/dt = 0$ . Введем отклонение  $y$  заряда на конденсаторе от его стационарного значения:  $y = q - C\mathcal{E}$ , или  $q = C\mathcal{E} + y$ . Подставляя это соотношение в (18.36), находим уравнение для функции  $y(t)$ :

$$R \frac{dy}{dt} + \frac{y}{C} = 0. \quad (18.37)$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$y = y_0 e^{-t/(RC)},$$

где  $y_0$  — произвольная постоянная интегрирования (значение  $y$  в начальный момент времени). Отсюда находим заряд на конденсаторе:

$$q = C\mathcal{E} + y_0 e^{-t/(RC)}.$$

Нам осталось использовать начальное условие: в момент  $t = 0$  конденсатор был не заряжен:  $q(0) = C\mathcal{E} + y_0 = 0$ . Отсюда находим  $y_0 = -C\mathcal{E}$  и окончательно

$$q = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-t/(RC)}\right). \quad (18.38)$$

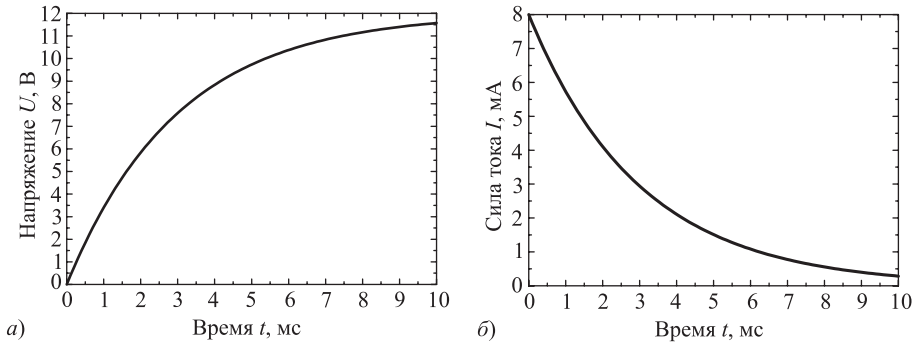
Дифференцируя  $q(t)$  по времени, находим ток в цепи:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/(RC)}. \quad (18.39)$$

Напряжение на конденсаторе  $U(t) = q(t)/C$  без труда получается из (18.38):

$$U = \mathcal{E} \left(1 - e^{-t/(RC)}\right). \quad (18.40)$$

Таким образом, по мере роста заряда и напряжения на конденсаторе ток в цепи уменьшается. При этом заряд конденсатора стремится к своему стационарному значению  $C\mathcal{E}$ , а напряжение — к ЭДС источника тока. Величина  $\tau = RC$  имеет размерность времени и определяет характерное время процесса зарядки. За время  $\tau$  ток в цепи уменьшается в  $e \approx 2,72$  раза. На рисунке 18.8 показана



**Рис. 18.8.** Графики зависимости напряжения на конденсаторе (а) и тока в цепи (б) при зарядке конденсатора емкостью  $C = 2$  мкФ через активное сопротивление  $R = 1,5$  кОм от источника тока с ЭДС  $\mathcal{E} = 12$  В

зависимость напряжения на конденсаторе и тока в цепи для конкретных значений  $R = 1,5$  кОм,  $C = 2$  мкФ,  $\mathcal{E} = 12$  В. Характерное время процесса равно при этих значениях  $\tau = 3$  мс. Из рисунков видно, что уже при временах порядка  $t \sim 3\tau$  конденсатор почти полностью заряжается.

Рассмотрим теперь процесс разрядки конденсатора. Зарядив его до какого-то заряда  $q_0$  (или, что то же самое, до начального напряжения  $U_0 = q_0/C$ ), мы перебрасываем переключатель в положение  $b$  (см. рис. 18.7). Конденсатор начнет разряжаться, а по цепи пойдет ток. Мы имеем те же самые уравнения за исключением того, что в цепь не включен источник тока. Поэтому в этом случае надо положить  $\mathcal{E} = 0$  в уравнении (18.36). Тогда оно совпадет с уравнением (18.37) для  $y(t)$ , так что решения для процесса разрядки конденсатора нам уже известны:

$$q = q_0 e^{-t/(RC)}, \quad U = U_0 e^{-t/(RC)}, \quad i = -\frac{U_0}{R} e^{-t/(RC)}. \quad (18.41)$$

Эти величины быстро уменьшаются с течением времени: за характерный промежуток времени  $\tau = RC$  заряд конденсатора, напряжение на нем и ток в цепи падают в 2,72 раза. Отрицательный знак в выражении для тока означает, что ток при разрядке течет в направлении, обратном току при зарядке конденсатора.

## 18.9 Правила Кирхгофа

На практике очень часто встречаются сложные (разветвленные) электрические цепи, для расчета которых удобно использовать правила, сформулированные немецким физиком Г. Кирхгофом (1845).

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда и того естественного требования, чтобы при стационарных процессах ни в одной точке проводника не накапливались и не уменьшались заряды. Это правило относится к узлам, т. е. к таким точкам в разветвленной цепи, в которой сходится не менее трех проводников.



**Первое правило Кирхгофа:** алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю, т. е. количество зарядов, приходящих в данную точку в единицу времени, равно количеству зарядов, уходящих из данной точки за то же время:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (18.42)$$

При этом токи, подходящие к узлу и отходящие от него, имеют противоположные знаки.

Второе правило Кирхгофа является обобщением закона Ома и относится к любому замкнутому контуру разветвленной цепи.

**Второе правило Кирхгофа:** в любом замкнутом контуре цепи алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления соответствующих участков контура равна алгебраической сумме ЭДС в контуре:

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i. \quad (18.43)$$

Правила Кирхгофа позволяют определить силу и направление тока в любой части разветвленной цепи, если известны сопротивления ее участков и включенные в них ЭДС. Число уравнений, составляемых по первому и второму правилам Кирхгофа, должно равняться числу искомых величин. Используя первое правило Кирхгофа для разветвленной цепи, содержащей  $m$  узлов и  $n$  ветвей (участков), можно написать  $(m - 1)$  независимых уравнений, а используя второе правило,  $(n - m + 1)$  независимых уравнений.

Приведем пример расчета токов в разветвленной цепи (рис. 18.9). Направления действия ЭДС показаны светлыми стрелками. В этой цепи у нас имеется два узла — точки  $b$  и  $d$  ( $m = 2$ ), и три ветви — участок  $bad$  с током  $i_1$ , участок  $bd$  с током  $i_2$  и участок  $bcd$  с током  $i_3$  ( $n = 3$ ). Значит, мы можем написать одно ( $m - 1 = 2 - 1 = 1$ ) уравнение на основе первого правила Кирхгофа и два ( $n - m + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ ) уравнения на основе второго правила Кирхгофа. Как же это делается на практике?

**Шаг первый.** Выберем направления токов, текущих в каждой из ветвей цепи. Как эти направления выбрать — совершенно неважно. Если мы угадали, в окончательном результате значение этого тока получится положительным, если нет и направление должно быть обратным — значение этого тока получится отрицательным. В нашем примере мы выбрали направления токов, как показано

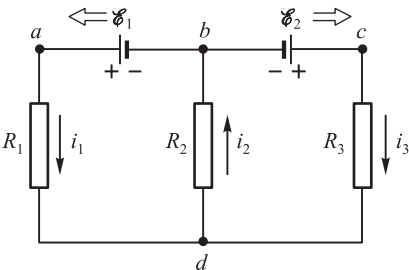


Рис. 18.9. Пример разветвленной цепи

на рисунке. Важно подчеркнуть, что направления действия ЭДС не произвольны, они определяются способом подключения полюсов источников тока.

**Шаг второй.** Записываем первое правило Кирхгофа для всех узлов, кроме одного (в последнем узле, выбор которого произволен, это правило будет выполняться автоматически). В нашем случае мы можем записать уравнение для узла  $b$ , куда входит ток  $i_2$  и выходят токи  $i_1$  и  $i_3$ :

$$i_2 - i_1 - i_3 = 0. \quad (18.44)$$

**Шаг третий.** Нам осталось написать уравнения (в нашем случае — два) для второго правила Кирхгофа. Для этого надо выбрать два независимых замкнутых пути. В рассматриваемом примере имеются три такие возможности: путь по левому контуру  $badb$ , путь по правому контуру  $bcdb$  и путь вокруг всей цепи  $badcb$ . Достаточно взять любые два из них, для третьего второе правило Кирхгофа будет выполнено автоматически. Направление обхода контура роли не играет, но при обходе ток будет браться со знаком плюс, если он течет в направлении обхода, и со знаком минус, если ток течет в противоположном направлении. Это же относится к знакам ЭДС.

Возьмем для начала контур  $badb$ . Мы выходим из точки  $b$  и движемся против часовой стрелки. На нашем пути встретятся два тока,  $i_1$  и  $i_2$ , направления которых совпадают с выбранным направлением обхода. ЭДС  $\mathcal{E}_1$  также действует в этом же направлении. Поэтому второе правило Кирхгофа для этого участка цепи записывается как

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 = \mathcal{E}_1. \quad (18.45)$$

В качестве второго замкнутого пути для разнообразия выберем путь  $badcb$  вокруг всей цепи. На этом пути мы встречаем два тока  $i_1$  и  $i_3$ , из которых первый войдет со знаком плюс, а второй — со знаком минус. Мы встретимся также с двумя ЭДС, из которых  $\mathcal{E}_1$  войдет в уравнения со знаком плюс, а  $\mathcal{E}_2$  — со знаком минус. Уравнение для этого замкнутого пути имеет вид:

$$i_1 R_1 - i_3 R_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2. \quad (18.46)$$

**Шаг четвертый.** Мы нашли три уравнения для трех неизвестных токов в цепи. Решение произвольной системы линейных уравнений описывается в курсе математики. Для наших целей (цепь достаточно проста) можно просто выразить  $i_3$  через  $i_1$  из уравнения (18.46) и  $i_2$  через  $i_1$  из уравнения (18.45):

$$i_3 = i_1 \frac{R_1}{R_3} - \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_3}, \quad i_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_2} - i_1 \frac{R_1}{R_2}. \quad (18.47)$$

Подставим (18.47) в уравнение первого правила Кирхгофа (18.44). Теперь оно содержит лишь неизвестное  $i_1$ , которое находится без труда:

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R_3) - \mathcal{E}_2 R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \quad (18.48)$$

Подставляя это выражение в (18.47), находим токи  $i_2$ ,  $i_3$ :

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{\mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}, \\ i_3 &= \frac{\mathcal{E}_2(R_1 + R_2) - \mathcal{E}_1 R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \end{aligned} \quad (18.49)$$

**Шаг пятый.** В найденные формулы подставляют численные значения, коль скоро они заданы. Подсчитаем для примера токи в нашей цепи при одинаковых сопротивлениях  $R_1 = R_2 = R_3 = 10$  Ом, но разных ЭДС:  $\mathcal{E}_1 = 12$  В,  $\mathcal{E}_2 = 1,5$  В. Имеем:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{12 \times (10 + 10) - 1,5 \times 10}{3 \cdot 10^2} = 0,75 \text{ А}, \\ i_2 &= \frac{12 \times 10 + 1,5 \times 10}{3 \cdot 10^2} = 0,45 \text{ А}, \\ i_3 &= \frac{1,5 \times (10 + 10) - 12 \times 10}{3 \cdot 10^2} = -0,3 \text{ А}. \end{aligned} \quad (18.50)$$

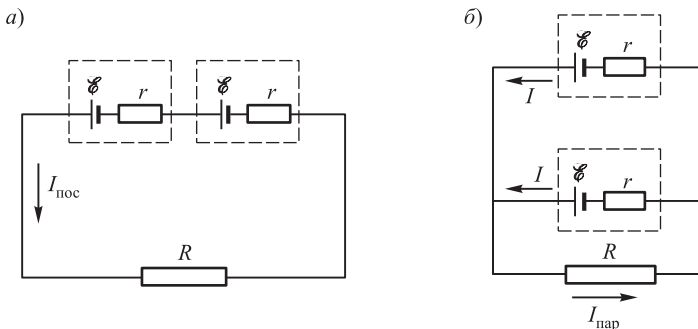
Последнее значение получилось отрицательным при данных численных характеристиках цепи. Значит, на самом деле направление тока обратно показанному на рисунке. Это естественно: мощный левый источник посылает ток 0,75 А, часть которого (0,45 А) ответвляется в среднюю ветвь, а остаток ( $-0,3$  А) продолжает течь в том же направлении, чему не может воспрепятствовать маломощная правая батарея.

**Примечание.** Правила Кирхгофа позволяют в принципе рассчитать сколь угодно сложные цепи. Но вычисления могут быть довольно громоздкими. Поэтому рекомендуется сначала поискать возможную симметрию цепи. Иногда из соображений симметрии более или менее очевидно, что какие-то токи равны между собой или какие-то напряжения равны нулю (и тогда данный участок цепи можно исключить из рассмотрения). Если такое возможно, вычисления существенно упрощаются.

В нашем примере мы пренебрегли внутренним сопротивлением источников тока. При их наличии они также должны включаться в уравнения второго правила Кирхгофа.

**Задача 18.88.** Два источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  соединяются в батарею. Возможны два варианта соединения — последовательное и параллельное (рис. 18.10). При каком соединении ток в нагрузке  $R$  будет наибольшим?

**Решение.** Расчет особенно прост для последовательного соединения: уравнение первого правила Кирхгофа отсутствует, так как в цепи нет узлов. Единственное уравнение



**Рис. 18.10.** Последовательное (а) и параллельное (б) соединение источников тока (к задаче 18.88)

второго правила дает

$$I_{\text{пос}} = \frac{2\varepsilon}{R + 2r}. \quad (18.51)$$

Для упрощения расчета параллельного соединения примем во внимание, что из соображений симметрии токи через источники должны быть равны и совпадать по направлению. Тогда первое правило Кирхгофа дает

$$2I - I_{\text{пар}} = 0. \quad (18.52)$$

Второе правило Кирхгофа, записанное для пути через нижний источник и нагрузку, имеет вид:

$$Ir + I_{\text{пар}}R = \varepsilon. \quad (18.53)$$

Отсюда следует, что

$$I_{\text{пар}} = \frac{2\varepsilon}{2R + r}. \quad (18.54)$$

Сравнивая (18.51) и (18.54), находим, что при  $R > r$  ток последовательной батареи больше ( $I_{\text{пос}} > I_{\text{пар}}$ ), а при  $R < r$  он меньше ( $I_{\text{пос}} < I_{\text{пар}}$ ) тока от параллельной батареи. При равенстве внутреннего сопротивления и нагрузки  $R = r$  обе батареи дают одинаковый ток. ■

## 18.10 Закон Джоуля—Ленца

Предположим, что на концах участка проводника имеется разность потенциалов  $U = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$ . Перемещаясь из точки 2 с большим потенциалом в точку 1, где потенциал меньше, положительный заряд  $\Delta q$  теряет энергию  $\Delta W = \Delta q U$ . По определению для постоянного тока  $I = \Delta q / \Delta t$ , тогда  $\Delta q = I \Delta t$  и теряемая энергия (или работа сил электрического поля) равна  $\Delta W = IU \Delta t$ . Куда же девается эта энергия? Она не переходит в кинетическую энергию заряда, так как при постоянном токе дрейфовая скорость зарядов неизменна. Вспомним, что заряд не ускоряется из-за столкновений с атомами кристаллической решетки проводника. Значит, если в проводнике течет ток и проводник неподвижен, то работа сил электрического поля расходуется на нагревание проводника. Сталкиваясь с частицами проводника, носитель заряда передает им свою энергию, которую получает от поля. Поэтому работа поля над зарядами переходит, в конечном счете, в энергию теплового (хаотического) движения атомов проводника, т. е. происходит нагревание проводника.

Таким образом, работа  $\Delta W$ , произведенная за время  $\Delta t$ , выделяется в проводнике в виде теплоты  $\Delta Q$ :

$$\Delta Q = IU \Delta t = I^2 R \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t. \quad (18.55)$$

Данная формула носит название *закона Джоуля—Ленца*. Закон установлен Дж. Джоулем (1841) и независимо от него русским физиком Э. Х. Ленцем (1842). В СИ работа и теплота измеряются в джоулях:

$$[Q] = [I][U][t] = 1\text{А} \cdot 1\text{В} \cdot 1\text{с} = 1\text{ Дж}.$$

**Задача 18.89.** Пусть конденсатор емкостью  $C$ , заряженный до разности потенциалов  $U$ , разряжается через сопротивление  $R$ . Найти полное количество теплоты, выделившееся на нагрузке.

**Решение.** Формула (18.41) представляет ток разрядки как функцию времени. Подставляем его в (18.55) и интегрируем по  $t$ :

$$Q = \int_0^{\infty} i^2(t)R dt = \frac{U^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/(RC)} dt = \frac{U^2}{R} \frac{RC}{2} = \frac{CU^2}{2}.$$

Как и следовало ожидать, в теплоту перешла вся энергия электрического поля, запасенная первоначально в конденсаторе. ■

Найдем тепловую мощность  $P$  (количество теплоты, выделяемой в единицу времени):

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (18.56)$$

Теплота выделяется по всему объему проводника. Найдем теперь плотность тепловой мощности, т. е. мощность, выделяемую в единице объема. Представим себе линейный проводник с постоянным сечением  $S$  и длиной  $l$ . Тогда напряжение на концах проводника можно выразить через напряженность электрического поля в нем:  $U = El$ . С другой стороны, сопротивление проводника равно  $R = \rho l/S = l/(\sigma S)$  (напомним, что  $\sigma$  — проводимость данного вещества, обратная его удельному сопротивлению  $\rho$ ). Отсюда находим

$$P = \frac{U^2}{R} = E^2 l^2 \frac{\sigma S}{l} = (Sl)\sigma E^2 = V\sigma E^2. \quad (18.57)$$

Таким образом, плотность тепловой мощности равна

$$w = \frac{P}{V} = \sigma E^2 = \vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (18.58)$$

где  $\vec{j}$  — плотность тока. Мы вывели эту формулу для линейного проводника, но она верна и в общем случае тоже. Для проводников сложной формы или составленных из разных материалов выделяемую в единицу времени теплоту можно подсчитать, интегрируя плотность тепловой мощности по всему объему проводника:

$$W = \int_V w dV = \int_V (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV = \int_V \sigma E^2 dV. \quad (18.59)$$

## 18.11 Классическая теория металлов

В начале столетия был экспериментально доказан тот факт, что носителями тока в металлах являются свободные электроны. Исходя из этих представлений, немецкий физик П. Друде создал (1900) классическую электронную теорию проводимости металлов, усовершенствованную затем другими физиками. Внутренняя структура металлов характеризуется кристаллической решеткой (рис. 18.11). В узлах решетки расположены положительные ионы, представляющие собой атомы металла, лишённые одного или нескольких валентных электронов и поэтому заряженные положительно. Эти положительные ионы способны совершать лишь небольшие тепловые колебания около своих положений равновесия в узлах кристаллической решетки. В пространстве между ионами практически свободно

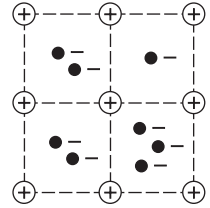


Рис. 18.11. Схема кристаллической решетки металла

движутся оторвавшиеся от атомов и «обобщественные» кристаллом валентные электроны, образуя так называемый *электронный газ*. Согласно теории Друде, электроны в кристаллической решетке ведут себя во многом подобно идеальному газу, поэтому можно использовать для описания их поведения известные формулы кинетической теории газов.

В отсутствие внешнего поля любые направления скорости электронов, находящихся в хаотическом тепловом движении, равновероятны, следовательно, средняя плотность тока равна нулю, и можно сказать, что электронный газ в целом покоится по отношению к положительным ионам решетки. Согласно классической термодинамике, средняя энергия поступательного теплового движения молекул любого газа зависит лишь от температуры  $T$ , но не от химической природы и молекулярной массы газа и равна

$$\frac{mv_T^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T. \quad (18.60)$$

Отсюда находим среднеквадратичную скорость хаотического движения частиц:

$$v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}. \quad (18.61)$$

Мы видели, что для комнатных температур  $v_T \sim 10^5$  м/с. При наличии внешнего электрического поля электроны в металле будут обладать также некоторой средней (дрейфовой) скоростью  $\vec{v}$  направленного движения против внешнего поля  $\vec{E}$ . Согласно приведенным в разделе 18.1 оценкам, скорость  $v$  на много порядков меньше скорости  $v_T$ .

Если рассматривать «электронный» газ в металле как идеальный газ, то тепловое движение электронов в кристаллической решетке можно охарактеризовать средней длиной свободного пробега  $\lambda$ , т. е. средним расстоянием, которое проходят свободные электроны в металле между двумя последовательными столкновениями с ионами решетки. Среднее время между двумя столкновениями  $\tau = \lambda/v_T$ . Так как  $v \ll v_T$ , можно считать, что ни  $\tau$ , ни  $\lambda$  не меняются при наложении электрического поля  $E$ .

## Закон Ома

Во внешнем электрическом поле  $E$  на электрон действует сила  $F = eE$ , вследствие чего он приобретает ускорение  $a = F/m = eE/m$ . Будем считать, что при столкновении с ионом электрон теряет свою скорость направленного движения:  $v_{\min} = 0$ . Далее он начинает ускоряться электрическим полем и к следующему

столкновению приобретает скорость  $v_{\max} = a\tau = eE\tau/m$ . Следовательно, средняя скорость направленного движения  $v$  за период между двумя столкновениями, т. е. за время  $\tau$ , составляет

$$v = \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2} = \frac{eE\tau}{2m} = \frac{eE\lambda}{2mv_T}. \quad (18.62)$$

Из (18.7) получаем связь плотности тока с напряженностью поля:

$$\vec{j} = ne\vec{v} = \frac{ne^2\lambda}{2mv_T} \vec{E}. \quad (18.63)$$

Сопоставляя полученное для  $\vec{j}$  выражение с законом Ома (18.9), приходим к выражениям для удельной проводимости  $\sigma$  и удельного сопротивления  $\rho = 1/\sigma$ :

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv_T}, \quad \rho = \frac{2mv_T}{ne^2\lambda}. \quad (18.64)$$

Приведем численные оценки. Во второй части курса мы нашли формулу связи (14.6) длины свободного пробега с эффективным сечением  $s_{ion}$  рассеивающего центра (иона) и концентрацией этих центров:  $\lambda \sim 1/(s_{ion}n_{ion})$ . Для металлов, как мы уже обсуждали, концентрация ионов примерно совпадает с концентрацией свободных электронов:  $n_{ion} \approx n$ . С учетом этого подставляем выражение для  $\lambda$  в формулу (18.64), получаем

$$\rho = \frac{2mv_T s_{ion}}{e^2}. \quad (18.65)$$

Оценку для сечения  $s_{ion}$  находим, зная порядок диаметров атомов  $d_a \sim 10^{-10}$  м, откуда

$$s_{ion} = \frac{\pi d_a^2}{4} \approx d_a^2 \sim 10^{-20} \text{ м}^2.$$

Скорость хаотического движения была оценена как  $v_T \sim 10^5$  м/с. Получаем теперь из (18.65):

$$\rho \sim \frac{2 \times 9 \cdot 10^{-31} \times 10^5 \times 10^{-20}}{(1,6 \cdot 10^{-19})^2} \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}. \quad (18.66)$$

Полученная оценка действительно воспроизводит порядок величины удельных сопротивлений металлов, представленных в табл. 18.1 в разд. 18.5.

## Закон Джоуля—Ленца

При столкновении с ионом, как мы предположили, электрон передает ему набранную за время  $\tau$  энергию дрейфа

$$W_e = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \frac{eE\tau}{m} \right)^2 = \frac{e^2 E^2 \tau^2}{2m}.$$

Умножая  $W_e$  на концентрацию электронов  $n$  и деля на время  $\tau$ , получаем тепловую энергию, передаваемую единице объема проводника в единицу времени (плотность мощности):

$$w = \frac{ne^2\tau}{2m} E^2 = \frac{ne^2\lambda}{2mv_T} E^2 = \sigma E^2. \quad (18.67)$$

Последнее равенство в этой цепочке получено с использованием выражения (18.64) для  $\sigma$ . В результате мы вывели закон Джоуля—Ленца (18.58) из микроскопической теории.

### Закон Видемана—Франца

Металлы, наряду с высокой электропроводностью, характеризуются также и большой теплопроводностью. В 1853 г. немецкие физики Г. Видеман и Р. Франц установили эмпирический закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности  $\kappa$  к коэффициенту электропроводности  $\sigma$  для всех металлов приблизительно одинаково. В 1882 г. датчанин Л. Лоренц (не путать с голландцем Хендриком Лоренцом, одним из создателей теории относительности) обнаружил, что это отношение пропорционально абсолютной температуре. Теплопроводность металлов значительно превышает теплопроводность диэлектриков, из чего можно заключить, что теплопроводность в металлах в основном обусловлена электронным газом, а не его кристаллической решеткой. Для коэффициента теплопроводности электронного газа в металле можно заимствовать выражение из кинетической теории газов

$$\kappa = \frac{1}{3} nm v_T \lambda C_V, \quad (18.68)$$

где произведение  $nm$  концентрации электронов на их массу подставлено вместо плотности электронного газа.

Удельная теплоемкость одноатомного газа равна

$$C_V = \frac{3}{2} \frac{k_B}{m}. \quad (18.69)$$

Подставляя это значение в выражение для  $\kappa$ , получим:

$$\kappa = \frac{1}{2} n k_B v_T \lambda. \quad (18.70)$$

Разделив  $\kappa$  на  $\sigma$ , получим:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{k_B m v_T^2}{e^2}.$$

Поскольку  $m v_T^2 / 2 = 3 k_B T / 2$ , приходим к соотношению

$$\boxed{\frac{\kappa}{\sigma} = LT}, \quad (18.71)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  (его называют числом Лоренца) определяется лишь фундаментальными постоянными  $k_B$  и  $e$ :

$$L = 3 \left( \frac{k_B}{e} \right)^2. \quad (18.72)$$

**Закон Видемана—Франца**, выражаемый формулами (18.71) и (18.72), является сильным свидетельством в пользу модели свободных электронов, ответственных и за электропроводность, и за теплопроводность в металлах. Но самое любопытное состоит в том, что соотношение (18.72) лишь случайно неплохо согласуется с экспериментом. На самом деле в двух местах классическая теория существенно расходится с квантовой, но



оба этих больших расхождения удачно компенсируют друг друга. Для числа Лоренца квантовая теория дает результат, близкий к (18.72):

$$L = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 = 2,45 \cdot 10^8 \text{ Вт} \cdot \text{Ом} \cdot \text{К}^{-2}. \quad (18.73)$$

Существенно то, что вытекающая из классической теории проводимости металла зависимость удельного сопротивления от температуры  $\rho(T) \sim v_T \sim \sqrt{T}$  не согласуется с экспериментом. И здесь объяснение смогла дать только квантовая теория.

## Контрольные вопросы

1. Что называется электрическим током?
2. Назовите условия, необходимые для появления и существования электрического тока в проводящей среде.
3. Что такое дрейфовая скорость носителей заряда?
4. Объясните разницу между плотностью тока и силой тока.
5. Что такое проводимость вещества?
6. Подводящие провода толще, чем спирали нагревательных приборов. Почему?
7. Подумайте, почему при малой дрейфовой скорости носителей тока лампочка вспыхивает сразу же, как только щелкает выключатель. Оцените, через какое время после замыкания рубильника в Москве вспыхнет лампочка во Владивостоке.
8. Что такое сторонние силы в источниках тока? Приведите примеры.
9. Дайте определение ЭДС источника тока.
10. Объясните разницу между сопротивлением проводника и его удельным сопротивлением.
11. Сформулируйте закон Ома в дифференциальной и интегральной формах. Какой из них носит более общий характер и почему?
12. Сформулируйте закон Ома для замкнутой цепи. Объясните, что такое внутреннее сопротивление источника тока.
13. Нарисуйте графики зависимости напряжения на конденсаторе и силы тока в цепи при его разрядке.
14. Сформулируйте закон Джоуля—Ленца.
15. Выведите выражение для КПД источника тока.
16. Источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  замкнут на внешнее сопротивление  $R$ . Выведите выражение для мощности, выделяемой на сопротивлении  $R$ , и покажите, что она достигает максимального значения при  $R = r$ .
17. Пусть имеется неограниченное количество одинаковых источников тока. Можно ли, соединяя их последовательно, получить сколь угодно большую силу тока в цепи?
18. Два одинаковых источника тока соединены в батарею. В каком случае внутреннее сопротивление всей батареи больше, когда источники соединены последовательно или параллельно?
19. Сформулируйте основные положения классической теории электропроводности металлов.

## Глава 19

# Частицы в магнитном поле

Еще в глубокой древности было известно, что некоторые минералы, например магнитный железняк (химический состав 31% — Fe, 69% — O), способны притягиваться друг к другу, а также притягивать к себе кусочки железа. Такие тела называются магнитами. Наибольшей силой притяжения обладают противоположные концы магнита, которые называются магнитными полюсами.

Знания античного мира о магнитах были минимальны. Практическое применение магниты нашли в средневековье, когда появился исключительно важный прибор — компас. Изобретатель его неизвестен. Бытовало мнение, что компас, давным-давно изобретенный в Китае, был завезен в Европу итальянцем Марко Поло (1254–1324). Однако есть письменные европейские источники XII в., где уже описывается употребление компаса, а его изобретение приписано арабам. В некоторых китайских источниках примерно того же времени изобретение компаса приписывается неведомым иноземным мореходам. Как бы то ни было, магнитная стрелка, помещенная на острие и способная свободно вращаться вокруг вертикальной оси, позволила совершить множество географических открытий.

### 19.1 Магнитная индукция

Магнитная стрелка в каждой точке поверхности Земли (при отсутствии помех) принимает строго определенное направление: одним концом она приблизительно указывает в направлении геофизического севера, а другим — на юг. Конец магнитной стрелки, который указывает на север, условно называется северным ( $N$ ), а противоположный — южным ( $S$ ).

Если в некоторой области пространства на магнитную стрелку действуют силы, стремящиеся установить ее в определенном направлении, то мы говорим, что там имеется магнитное поле. Поведение стрелки компаса в магнитном поле (Земли или любого другого источника) позволяет ввести *линии магнитного поля* по аналогии с силовыми линиями электрического поля. В каком-то смысле это даже легче сделать: стрелка сама указывает направление линии магнитного поля в точке, где она находится. Основной характеристикой магнитного поля является *вектор магнитной индукции*  $\vec{B}$ , касательный к линии магнитного поля,

проходящей через данную точку. Величина вектора магнитной индукции пропорциональна силе, которая действует на северный конец бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в данную точку. В различных точках поля индукция по величине и направлению имеет различные значения. **Линии магнитной индукции**, в отличие от линий электростатического поля, всегда замкнуты. Принято считать, что линии магнитного поля постоянного магнита выходят из его северного полюса, входят в южный и замыкаются внутри магнита (рис. 19.1).

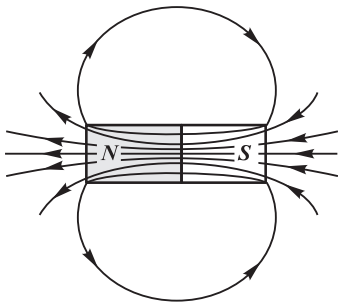
На основании опыта установлено, что разноименные полюса притягиваются, одноименные отталкиваются. В этом смысле взаимодействие магнитов похоже на взаимодействие заряженных тел. Поведение стрелки компаса означает, что существует земной магнетизм, подобно тому, как существует гравитационное поле Земли, обусловленное ее массой. Поскольку обращаемый к северу конец стрелки назвали северным полюсом, а притягиваются разноименные полюса, то вблизи северного географического полюса Земли находится *южный* магнитный. Иными словами, магнитное поле Земли имеет направление с географического юга на север (на рис. 19.2 буквы *N* и *S* обозначают магнитные, а не географические полюса Земли).

Электростатическое поле  $\vec{E}$  порождается электрическими зарядами и воздействует на них, что символически изобразим как

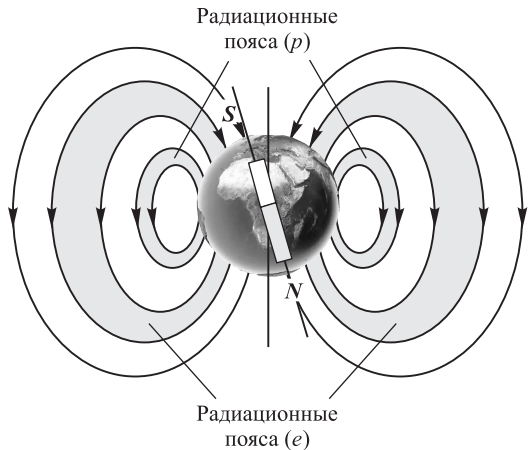
$$\text{электрический заряд} \implies \vec{E} \implies \text{электрический заряд.}$$

Два полюса магнита наводят на мысль о симметричном соотношении

$$\text{магнитный заряд} \implies \vec{B} \implies \text{магнитный заряд.}$$

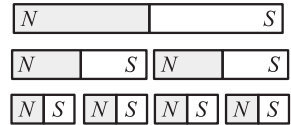


**Рис. 19.1.** Линии поля (магнитной индукции) постоянно-го магнита



**Рис. 19.2.** Магнитное поле Земли: северный магнитный полюс *N* находится вблизи южного географического. Показаны радиационные пояса Земли: (*p*) внутренний (протонный) и (*e*) внешний (электронный), где благодаря магнитному полю задерживаются заряженные частицы космических лучей

**Рис. 19.3.** При попытке разделить магнит на два разноименных магнитных заряда (монополя) оказывается, что каждая из частей по-прежнему обладает двумя полюсами



Оказалось, однако, что симметрия между магнитными и электрическими явлениями не столь прямолинейна. Если отдельные тела можно зарядить либо только положительно, либо только отрицательно, поскольку существуют элементарные носители электрических зарядов разных видов, то отделить один из магнитных полюсов от противоположного невозможно. Если разрезать на две части магнит, то каждая часть будет снова вести себя как самостоятельный магнит, имеющий на своих концах противоположные полюсы (рис. 19.3).

Что произойдет, если при делении дойти до того, что разбить магнит на отдельные атомы? Можно ли тогда отделить северный полюс от южного? Нет, даже отдельные атомы ведут себя как микроскопические, но тем не менее «полноценные» магниты с северным и южным полюсами. Оказывается, что даже отдельные элементарные частицы (например, электроны) представляют собой микромагниты. В настоящее время отсутствуют какие-либо экспериментальные доказательства того, что в природе могут существовать отдельные магнитные заряды (монополи), подобные электрическим. Оказалось, что магнитное поле порождается движущимися электрическими зарядами и, в свою очередь, оказывает воздействие на них, так что наша схема принимает вид:

$$\text{движущийся элек-} \implies \vec{B} \implies \text{движущийся элек-} \quad (19.1)$$

$$\text{трический заряд} \quad \text{трический заряд.}$$

Мы уже видели, что электрический ток представляет собой движение огромного количества электрических зарядов. Поэтому неудивительно, что первые экспериментальные наблюдения связи электрических и магнитных явлений были реализованы по схеме

$$\text{электрический ток} \implies \vec{B} \implies \text{электрический ток.} \quad (19.2)$$

Если понимать под стрелкой экспериментальное подтверждение указанной связи, то первую из них (порождение магнитного поля током) «провел» датский ученый Г. Х. Эрстед.

В 1820 г. Эрстедом было экспериментально установлено, что проводники, по которым текут токи, также взаимодействуют с магнитной стрелкой. Положение магнитной стрелки, помещенной около проводника с током, изменяется с изменением величины и направления тока, но стрелка совершенно не реагирует на неподвижные электрические заряды. Отсюда можно сделать вывод, что способностью создавать магнитное поле обладают лишь движущиеся электрические заряды (электрический ток), а вокруг неподвижных зарядов существует только электростатическое поле. *Магнитное поле*, возникающее в пространстве около проводников с током, как и электрическое поле, обусловленное неподвижными зарядами, является одним из видов материи. Как мы вскоре увидим, магнитное поле наряду с рядом физических свойств характеризуется энергией.

## 19.2 Сила Лоренца

Вторая стрелка в нашей схеме (19.2) — действие магнитного поля на ток — была реализована также в 1820 г. в экспериментах Ж. Био, Ф. Савара и А. Ампера. Поскольку ток есть движение большого числа элементарных зарядов, естественно рассмотреть наиболее простую систему — один движущийся заряд. Сила, с которой магнитное поле действует на движущийся со скоростью  $\vec{v}$  заряд  $q$ , пропорциональна величине магнитного поля, т. е. вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ , скорости заряда  $\vec{v}$  и величине самого заряда  $q$ . Эксперименты показали, что эта сила ортогональна как скорости заряда, так и вектору магнитной индукции (именно поэтому линии магнитной индукции, совпадающие по направлению с вектором  $\vec{B}$  в каждой точке поля, не называют «силовыми» линиями).

Сила, действующая на движущийся в магнитном поле заряд, называется *силой Лоренца* и определяется векторным произведением

$$\boxed{\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}.} \quad (19.3)$$

Согласно этому выражению, сила Лоренца перпендикулярна плоскости, где расположены векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ , а ее направление для положительного заряда определяется по правилу буравчика (правого винта). Модуль силы Лоренца равен

$$F_L = q v B \sin \alpha, \quad (19.4)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Приведенные соотношения можно использовать для измерения величины и направления вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  (так же как соотношение  $\vec{F} = q\vec{E}$  является в сущности определением вектора напряженности электрического поля). Отсюда следует размерность магнитной индукции в СИ:

$$[B] = [F][q]^{-1}[v]^{-1} = \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ с}}{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ м}} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}} = 1 \text{ Тл}.$$

Эта единица именуется теслой по имени выдающегося инженера-электротехника и изобретателя Н. Тесла (1856–1943). Тесла — большая величина, магниты с полем 8–10 Тл относятся к рекордным.

Поскольку сила Лоренца  $\vec{F}_L$  всегда направлена перпендикулярно к скорости движения частицы  $\vec{v}$ , она не совершает работы. Следовательно, кинетическая энергия заряженной частицы при движении в магнитном поле не изменяется, т. е. не меняется величина скорости частицы. Сила Лоренца изменяет лишь направление вектора  $\vec{v}$ , т. е. сообщает частице нормальное ускорение.

Если заряд движется в области, где существует и электрическое, и магнитное поля, то на него действует полная сила (ее тоже называют силой Лоренца)

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.} \quad (19.5)$$

Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях лежит в основе многих явлений, происходящих во Вселенной. Так, например, заряженные частицы космических лучей, взаимодействуя с магнитным полем Земли,

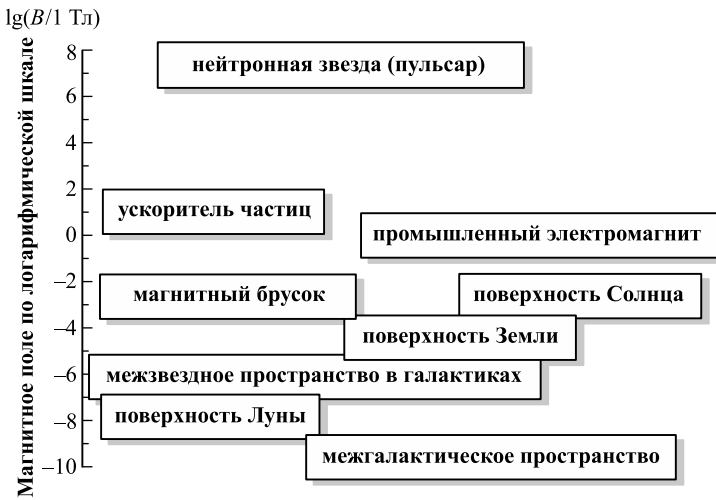


Рис. 19.4. Характерные магнитные поля в природе

вызывают много интересных явлений, в том числе полярные сияния. Земное магнитное поле способно захватывать заряженные частицы, попадающие из космоса в окрестность Земли, в результате чего возникли окружающие Землю радиационные пояса (см. рис. 19.2).

Изучение движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях сделало возможным определять удельные заряды этих частиц (т. е. отношение заряда к их массе) и отсюда получать ценные сведения о природе частиц и о тех процессах, в которых они возникают.

Воздействие на потоки электронов и других заряженных частиц электрических и магнитных полей используется для управления этими потоками, что лежит в основе различных физических приборов от электронных трубок до самых современных ускорителей заряженных частиц. Примеры магнитных полей, встречающихся в нашем мире, приведены на рис. 19.4.

### 19.3 Движение заряда в однородном магнитном поле

Если начальная скорость заряженной частицы  $\vec{v}$  перпендикулярна магнитному полю ( $\vec{v} \perp \vec{B}$ ), то в (19.4)  $\sin \alpha = 1$  и под действием силы Лоренца частица будет двигаться по окружности постоянного радиуса  $R$  (рис. 19.5):

$$F_L = qvB. \quad (19.6)$$

Действительно, сила Лоренца  $\vec{F}_L$  в этом случае направлена по радиусу к центру окружности и вызывает радиальное ускорение. По второму закону Ньютона, имеем  $F_L = ma_r = mv^2/r$ , следовательно, можем записать уравнение

$$m \frac{v^2}{R} = qvB, \quad (19.7)$$

из которого легко получить выражение для угловой скорости частицы:

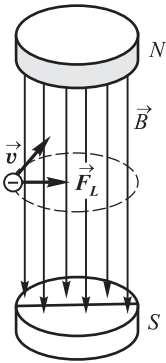
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}. \quad (19.8)$$

Если  $q$ ,  $m$  и  $B$  — постоянные величины, то угловая скорость, а следовательно, и период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (19.9)$$

тоже являются постоянными величинами, не зависящими от энергии частицы. От скорости движения частицы зависит только радиус орбиты

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (19.10)$$



**Рис. 19.5.** Движение отрицательно заряженной частицы в однородном магнитном поле

Сила Лоренца направлена к центру. Направление вращения частицы зависит от знака ее заряда. Если смотреть вдоль магнитного поля, то отрицательно заряженная частица будет вращаться по часовой стрелке (см. рис. 19.5), а положительно заряженная — наоборот, против часовой стрелки.

Если же начальная скорость частицы параллельна вектору магнитной индукции, то сила Лоренца равна нулю. Частица будет продолжать двигаться в том же направлении прямолинейно и равномерно.

Наконец, в общем случае можно представить себе, что частица влетает в область однородного магнитного поля со скоростью  $\vec{v}$ , составляющей угол  $\theta$  с направлением магнитного поля. Эту скорость можно разложить на компоненту  $v_{\parallel} = v \cos \theta$ , направленную вдоль поля, и компоненту  $v_{\perp} = v \sin \theta$ , ортогональную полю. Соответственно, движение частицы является суперпозицией (наложением) двух движений: равномерного вдоль поля со скоростью  $v \cos \theta$  и вращения по окружности с постоянной угловой скоростью  $\omega = qB/m$ . Траектория частицы, таким образом, является спиралью с радиусом  $R$  и шагом  $h = v_{\parallel}T$ :

$$R = \frac{mv \sin \theta}{qB},$$

$$h = (v \cos \theta)T = \frac{2\pi mv \cos \theta}{qB} = 2\pi R \operatorname{ctg} \theta. \quad (19.11)$$

**Задача 19.90.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 2$  Тл движется протон. Его траектория представляет собой винтовую линию с радиусом  $R = 10$  см и шагом  $h = 60$  см. Определить скорость и кинетическую энергию протона. Какую ускоряющую разность потенциалов  $U$  прошел протон перед тем, как влететь в магнитное поле?

**Решение.** Из уравнений (19.11) находим угол между скоростью протона и полем:

$$\operatorname{tg} \theta = 2\pi \frac{R}{h},$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi R/h)^2}}, \quad (19.12)$$

откуда

$$\begin{aligned} v &= \frac{eBh}{2\pi m \cos \theta} = \frac{eB}{2\pi m} \sqrt{h^2 + (2\pi R)^2} = \\ &= \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 2}{2\pi \times 1,67 \cdot 10^{-27}} \times \sqrt{0,6^2 + (2\pi \times 0,1)^2} = 2,65 \cdot 10^7 \text{ м/с.} \end{aligned} \quad (19.13)$$

Кинетическая энергия протона

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \times (2,65 \cdot 10^7)^2}{2} = 5,86 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.} \quad (19.14)$$

Мы могли использовать нерелятивистскую формулу для энергии, так как скорость протона много меньше скорости света.

Если протон ускорялся электрическим полем, то при прохождении разности потенциалов  $\Delta\varphi$  он приобрел энергию  $e\Delta\varphi$ . Отсюда находим разность потенциалов:

$$\Delta\varphi = \frac{W_{\text{к}}}{e} = \frac{5,86 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,66 \cdot 10^6 \text{ В} = 3,66 \text{ МВ.} \quad \blacksquare \quad (19.15)$$

Джоуль — слишком большая единица энергии в мире элементарных частиц. Здесь используют внесистемную единицу — электронвольт (эВ). По определению, 1 эВ — это энергия, приобретаемая электроном (или любой частицей с таким же по модулю зарядом) при прохождении разности потенциалов 1 В. В решенной задаче можно сказать, что кинетическая энергия протона равна 3,66 МэВ (мегаэлектронвольт). Связь электронвольта с джоулем очевидна: 1 эВ =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

## 19.4 Некоторые применения магнитного поля

### Циклотрон

Независимость периода обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле от ее скорости положена в основу работы ускорителя заряженных частиц, называемого *циклотроном*. В циклотроне заряженная частица, помещенная между полюсами электромагнита, многократно проходит через электрическое поле, каждый раз увеличивая свою энергию на величину от нескольких сотен до нескольких тысяч электронвольт. С увеличением скорости частицы (с ростом ее энергии) радиус орбиты увеличивается, поэтому частица в циклотроне будет двигаться по спирали.

Циклотрон состоит из двух электродов в виде половинок круглой невысокой коробки (рис. 19.6). Электроды называются дуантами из-за сходства их формы с заглавной латинской буквой D. Дуанты заключены в откачиваемый корпус (вакуум  $\sim 10^{-5}$  мм рт. ст.), который помещен между полюсами большого электромагнита. Поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно плоскости дуантов. На дуанты подается переменное напряжение, снимаемое с полюсов генератора высокой частоты.

Вблизи центра магнита в промежутке между дуантами располагается источник заряженных частиц — ионов. Положительный ион, вылетающий из источника в то время, когда электрод 2 имеет отрицательный потенциал, приобретает некоторую скорость и в плоскости дуанта 2 описывает полуокружность



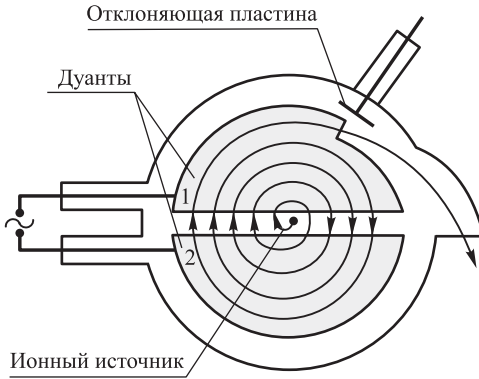


Рис. 19.6. Схема циклотрона

постоянного радиуса, так как внутри дуанта электрическое поле отсутствует. К моменту выхода электрона из дуанта 2 при помощи высокочастотного генератора изменяется направление электрического поля на обратное: дуант 1 приобретает отрицательный потенциал, а дуант 2 — положительный. Поэтому ион вновь ускорится и внутри дуанта 1 опишет полуокружность уже большего радиуса (но время прохождения полуокружности останется неизменным!). Двигаясь в резонансе с высокочастотным электрическим полем, ионы будут по спирали приближаться к краю магнита, причем их энергия будет расти после каждого прохождения частицей ускоряющей щели между дуантами. Пучок ускоренных ионов выходит из циклотрона с помощью отклоняющего электрода, на который подается высокий отрицательный потенциал.

Циклотрон используется в качестве ускорителя заряженных частиц и многозарядных положительных ионов. Но имеются причины принципиального характера, которые ограничивают возможности значительного увеличения энергии ионов в циклотроне. Период обращения заряженной частицы в постоянном магнитном поле пропорционален массе частицы:  $T = 2\pi m/(qB)$  (19.9). Однако в ускорителях, где частицы разгоняются до скоростей, близких к скорости света, приходится учитывать релятивистское выражение для импульса частицы. Тогда уравнение движения будет иметь вид:

$$\frac{mv^2}{R\sqrt{1-v^2/c^2}} = qvB,$$

откуда для радиуса орбиты получаем

$$R = \frac{mv}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{Wv}{qBc^2}.$$

Здесь мы использовали выражение для релятивистской энергии

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

которую обозначили как  $W$ , чтобы не возникало путаницы с напряженностью электрического поля  $E$ . Находим тогда для периода обращения:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi W}{qBc^2}.$$

При малых кинетических энергиях  $W \approx mc^2$ , и мы возвращаемся к прежней формуле (19.9). Однако по мере ускорения частиц период обращения растет вместе с энергией, тогда как период высокочастотного поля в циклотроне не изменяется. В результате при каждом очередном попадании в ускоряющую щель частицы будут опаздывать, приобретая все меньшую энергию, пока не начнут попадать в тормозящее поле. Поэтому для достижения больших энергий частиц используется два приема:

- с увеличением периода обращения частицы уменьшают частоту изменения потенциала дуантов. Ускорители, в которых используется этот принцип, называются *фазотронами*;
- по мере роста энергии частицы увеличивают магнитное поле при неизменной частоте ускоряющего электрического поля. Действительно, если отношение  $W/B$  сохранить неизменным, т. е. с ростом энергии частицы плавно увеличивать магнитную индукцию поля, то период обращения частицы тоже будет постоянным. На этом принципе работают *синхротроны* и *синхрофазотроны*.

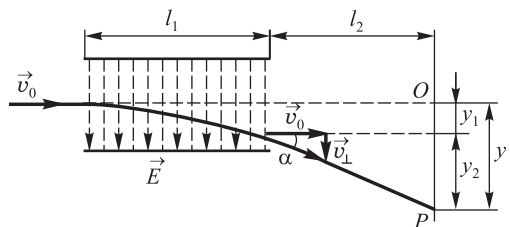
## Определение заряда и массы электрона

Известно, что на заряженную частицу в однородном электрическом поле действует сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Под действием этой силы заряженная частица, перемещаясь в пространстве вдоль линий напряженности электрического поля от потенциала  $\varphi_1$  до потенциала  $\varphi_2$ , приобретает энергию:

$$W = Fl = qEl = -q\Delta\varphi = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (19.16)$$

где  $l$  — путь, пройденный частицей от точки с потенциалом  $\varphi_1$  к точке с потенциалом  $\varphi_2$ .

Рассмотрим заряженную частицу, движущуюся в пространстве со скоростью  $\vec{v}_0$  и попадающую в перпендикулярное однородное электрическое поле ( $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$ ), причем область поля имеет протяженность  $l_1$  (рис. 19.7). В отсутствие поля частица попала бы в точку  $O$  на экране. На частицу же в поле  $\vec{E}$  действует сила



**Рис. 19.7.** Движение заряженной частицы в отклоняющем электрическом поле

$\vec{E}$ , направленная перпендикулярно скорости  $\vec{v}_0$ , из-за чего частица приобретает ускорение  $\vec{a} = (q/m)\vec{E}$ , где  $q/m$  — удельный заряд частицы. За время пролета области поля  $t = l_1/v_0$  частица сместится по вертикали на расстояние

$$y_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{qE}{m} \frac{l_1^2}{2v_0^2} \quad (19.17)$$

и приобретет составляющую скорости  $\vec{v}_\perp$ , перпендикулярную направлению начальной скорости  $v_0$ :

$$v_\perp = a_\perp t = \frac{qE}{m} \frac{l_1}{v_0}.$$

Далее частица, вылетевшая из области поля, движется свободно, имея скорость  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_0$ , направленную под углом  $\alpha$  к первоначальной, причем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_\perp}{v_0} = \frac{qE}{m} \frac{l_1}{v_0^2}.$$

За время подлета к экрану частица успеет сместиться еще на расстояние

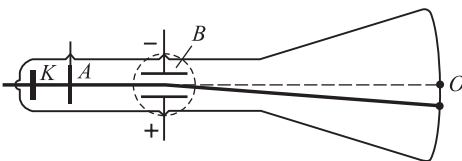
$$y_2 = l_2 \operatorname{tg}\alpha = \frac{qE}{m} \frac{l_1 l_2}{v_0^2}, \quad (19.18)$$

как следует из геометрических соображений (см. рис. 19.7). В конечном итоге она попадает в точку  $P$  экрана, отстоящую от  $O$  на расстояние

$$y = y_1 + y_2 = \frac{qE}{m} \frac{l_1^2 + 2l_1 l_2}{2v_0^2}. \quad (19.19)$$

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы: частицы с одинаковой скоростью и одинаковым удельным зарядом  $q/m$  отклоняются одинаково; чем больше скорость частицы, тем меньше они отклоняются; отклонение уменьшается с уменьшением удельного заряда частицы (т. е. разные частицы будут попадать в различные точки экрана).

В 1897 г. Дж. Дж. Томсон впервые определил удельный заряд электрона  $e/m$  почти по такой схеме, используя газоразрядную трубку (рис. 19.8). Электронный пучок проходил через отверстие в аноде и попадал в область однородного электрического поля конденсатора и перпендикулярного ему магнитного поля, создаваемого катушкой с током (на рис. 19.8 показана пунктирной окружностью). При выключении обоих полей, пучок электронов, двигаясь в направлении начальной скорости  $\vec{v}_0$ , создавал светящееся пятно в точке  $O$  флуоресцирующего экрана. Включение магнитного поля вызывало смещение светящегося пятна на экране. Затем, подбирая величину напряженности  $\vec{E}$  электрического



**Рис. 19.8.** Газоразрядная трубка, использованная для определения отношения  $e/m$  для электрона

поля конденсатора, можно было добиться, чтобы пучок электронов не смещался относительно точки  $O$ . В этом случае действие на электроны электрического и магнитного полей взаимно компенсировали друг друга, т. е. выполнялось условие:

$$eE = ev_0B. \quad (19.20)$$

Зная напряженности полей, можно определить скорость электронов  $v_0 = E/B$ . Меняя поля и измеряя смещение светящегося пятна на экране, по скорости электронов и геометрическим размерам установки определяли удельный заряд электрона. Томсон получил  $e/m = 1,7 \cdot 10^{11}$  Кл/кг, что можно сравнить с современным значением  $e/m = 1,602 \cdot 10^{-19} / 9,109 \cdot 10^{-31} = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг.

## Масс-спектрометры

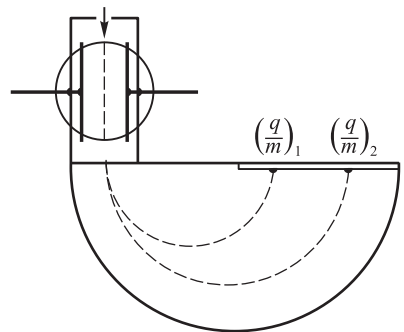
Для определения удельного заряда широко используются также приборы, называемые масс-спектрометрами или масс-спектрографами. Различие в названии приборов связано с различным способом регистрации ионов: при помощи электронных схем (масс-спектрометры) или при помощи фотографических пластинок (масс-спектрографы).

Различные типы этих приборов основаны на использовании фокусирующих свойств электрических и магнитных полей по отношению к заряженным частицам. Заряженные частицы (ионы или ядра) ускоряются электрическим полем (рис. 19.9). После прохождения разности потенциалов  $U$  кинетическая энергия частиц равна:

$$\frac{mv^2}{2} = qU, \quad (19.21)$$

где  $q = Ze$  — заряд иона (или ядра),  $m$  — масса иона,  $v$  — его скорость. Попадая в вакуумную камеру с однородным магнитным полем напряженностью  $H$ , перпендикулярной начальной скорости частицы, она описывает полукруг (под влиянием силы Лоренца). Радиус окружности, по которой движется заряженная частица (ион) в магнитном поле, находится из условия:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB. \quad (19.22)$$



**Рис. 19.9.** Схема действия масс-спектрографа

Описав половину окружности, ионы попадают на фотопластинку на расстоянии  $2R$  от щели. Решая совместно два уравнения — (19.21) и (19.22), получим:

$$\frac{q}{m} = \frac{2U}{B^2 R^2}. \quad (19.23)$$

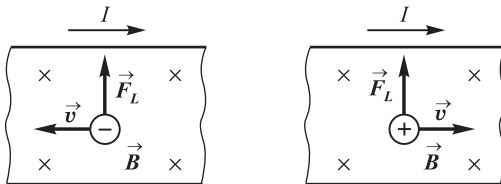
Следовательно, ионы каждого сорта (определяемые значением  $q/m$ ) в зависимости от величины отклоняющего магнитного и ускоряющего электрического полей попадают на фотопластинку в некоторое определенное место, характеризующееся величиной радиуса  $R$ . Зная параметры прибора, величины  $B$  и  $U$ , можно найти удельные заряды ионов.

## 19.5 Эффект Холла

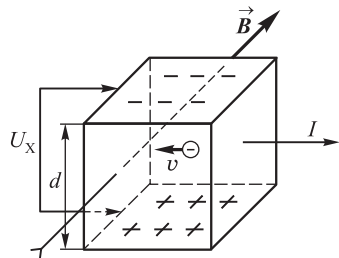
В 1880 г. Э. Холл обнаружил, что в проводнике, помещенном в магнитное поле, возникает разность потенциалов в направлении, перпендикулярном вектору магнитной индукции  $\vec{B}$  и направлению тока  $I$ . Объясняется это действием силы Лоренца на заряды, движущиеся в проводнике.

На рисунке 19.10 изображена пластина проводника, которую пронизывает однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , направленное перпендикулярно чертежу от нас (обозначено крестиками). У отрицательных зарядов вектор скорости  $\vec{v}$  и ток  $I$  направлены в противоположные стороны, для положительных зарядов направления скорости и тока совпадают. Применяя правило буравчика, находим, что сила Лоренца в обоих случаях направлена к верхней грани пластины. Следовательно, носители зарядов, независимо от их вида, накапливаются на верхней грани пластины.

Эффект Холла наблюдается в металлах и полупроводниках. В металлах и полупроводниках  $n$ -типа, где носителями зарядов являются электроны, на верхней грани пластины скапливаются избыточные отрицательные заряды, а нижняя грань заряжается положительно (рис. 19.11). В полупроводниках  $p$ -типа, где носителями являются так называемые дырки, имеющие положительный заряд, верхняя грань заряжается положительно, а нижняя — отрицательно.



**Рис. 19.10.** Сила Лоренца, действующая на носители тока в образце, помещенном в магнитное поле: независимо от их знака сила имеет одно и то же направление



**Рис. 19.11.** Эффект Холла заключается в возникновении поперечного напряжения  $U_X$ , если проводник с током помещен в магнитное поле

Так как  $\vec{B} \perp \vec{v}$ ,

$$F_L = qvB. \quad (19.24)$$

Заряды, скопившиеся на верхней и нижней гранях пластины, создают электрическое поле напряженностью  $\vec{E}_X$ , которое в свою очередь воздействует на электрические заряды

$$\vec{F}_{эл} = q\vec{E}_X. \quad (19.25)$$

Когда устанавливается стационарное распределение зарядов в поперечном сечении проводника, эти две силы уравниваются друг друга:  $F_{эл} = F_L$ , т. е.  $qvB = qE_X$ , откуда

$$E_X = vB. \quad (19.26)$$

Заметим, что здесь автоматически выполняется соотношение между скоростью зарядов и полями  $E_X$  и  $B$ , с которым мы только что познакомились, обсуждая опыты Томсона по измерению удельного заряда электрона. При выполнении соотношения (19.26) заряд движется прямолинейно и равномерно в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Из формулы плотности тока  $j = qnv$  находим скорость упорядоченного движения зарядов при равновесном протекании тока:

$$v = \frac{j}{qn}. \quad (19.27)$$

Таким образом, для напряженности поперечного (холловского) электрического поля получаем:

$$E_X = \frac{B}{qn}j. \quad (19.28)$$

Следовательно, при расстоянии между гранями пластины  $d$  напряжение между ними равно

$$U_X = dE_X = d\frac{j}{(qn)}B = R_X djB, \quad (19.29)$$

где  $R_X = 1/(qn)$  — коэффициент пропорциональности, называемый **постоянной Холла**. Плотность носителей зарядов (электронов) в металле  $n \sim 10^{28} \text{ м}^{-3}$ , откуда  $R_X \sim 10^{-9} \text{ м}^3/\text{Кл}$ . Для полупроводников  $R_X \sim 0,1 \text{ м}^3/\text{Кл}$  (из-за малой концентрации носителей).

Эффект Холла — один из эффективных методов изучения свойств носителей зарядов в металлах и полупроводниках. Полная его интерпретация требует привлечения квантовой механики.

## 19.6 Закон Ампера

Теперь мы готовы к обсуждению взаимодействия тока с магнитным полем. Эксперименты, проведенные в 1820 г., показали, что на проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует сила. Откуда же она берется? Обсуждая эффект Холла, мы видели, что сила электрического поля  $E_X$  уравнивает силу Лоренца, действующую на электроны. Но холловское поле  $E_X$  действует также и на кристаллическую ионную решетку вещества, т. е. на проводник в целом. На рисунке 19.11 поле  $E_X$  направлено вверх, ортогонально току и магнитной индукции. Туда же будет направлена и сила, действующая

на проводник. Найдем ее величину. Если поперечное сечение проводника равно  $S$ , а его длина (в направлении тока) есть  $dl$ , то в данном объеме  $dV = Sdl$  сосредоточено  $dN = n dV = nSdl$  электронов проводимости. Их полный заряд равен  $dQ = edN = enSdl$ . В силу нейтральности проводника в целом таков же по абсолютной величине и полный заряд ионов кристаллической решетки. Используя формулу (19.28), находим суммарную силу, действующую на отостов кристаллической решетки рассматриваемой части проводника:

$$dF_A = E_X dQ = \frac{Bj}{en} enSdl = IBdl, \quad (19.30)$$

где мы выразили плотность тока через его силу:  $I = jS$ . Обращаем внимание, что в эту формулу не вошли характеристики конкретных носителей заряда, но лишь полный ток через проводник.

У нас внешнее магнитное поле было ортогонально току. В общем случае направление тока будем характеризовать вектором  $d\vec{l}$ , имеющим длину  $dl$  и направленным по току. В холловскую напряженность электрического поля дает вклад только компонента магнитного поля  $\vec{B}_\perp$ , ортогональная вектору  $d\vec{l}$ . Эта компонента равна по величине  $B_\perp = B \sin \alpha$ , где  $\alpha$  есть угол между  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ . Тогда для величины силы имеем:

$$dF_A = IB \sin \alpha dl. \quad (19.31)$$

Учитывая направление этой силы (правило буравчика), можем записать ее в векторной форме:

$$\boxed{d\vec{F}_A = I d\vec{l} \times \vec{B}.} \quad (19.32)$$

Произведение тока  $I$  на вектор  $d\vec{l}$  элемента проводника называется **элементом тока**. Таким образом, мы получили выражение для силы, действующей на элемент тока.

Для определения полной силы, действующей на проводник, надо проинтегрировать (19.32) вдоль его длины, учитывая зависимость магнитного поля от положения элемента. Такое интегрирование становится тривиальным для прямолинейного проводника в однородном магнитном поле:

$$\boxed{\vec{F}_A = I \vec{l} \times \vec{B}.} \quad (19.33)$$

Сказанное проиллюстрировано на рис. 19.12. Указанное направление силы  $\vec{F}_A$  соответствует тому случаю, когда ток течет «на нас» перпендикулярно  $\vec{B}$  (направление тока показано точкой).

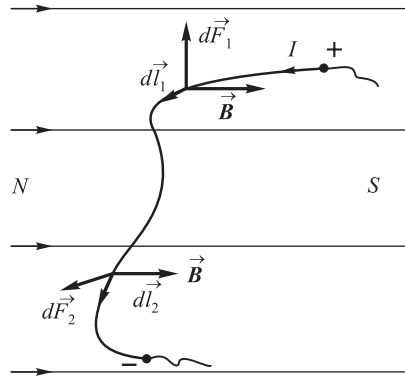
Выражение (19.32) носит название **закона Ампера**, а сила  $d\vec{F}_A$  (или  $\vec{F}_A$ ) называется **силой Ампера**. Подчеркнем еще раз: направление силы Ампера  $d\vec{F}_A$  определяется правилом векторного произведения. В общем случае проводника произвольной формы и магнитного поля различной конфигурации силы, действующие на различные элементы проводника, различаются как величиной, так и направлением (рис. 19.13).

Формула (19.31) позволяет определить величину магнитной индукции по максимальной силе Ампера  $dF_{A,\max}$  (в этом случае  $\sin \alpha = 1$ ), действующей на элемент  $dl$  проводника с током  $I$ :

$$B = \frac{dF_{A,\max}}{I dl}.$$



**Рис. 19.12.** Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле



**Рис. 19.13.** В общем случае силы, действующие на различные элементы проводника, различаются как величиной, так и направлением

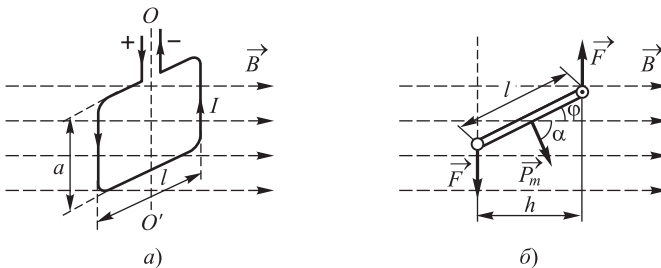
Таким образом, величина магнитной индукции численно равна максимальной силе, действующей на единичный элемент тока.

### 19.7 Контур с током в магнитном поле

Пусть контур с током помещен в магнитное поле, причем он может вращаться вокруг вертикальной оси  $OO'$  (рис. 19.14, а). Силы Ампера, действующие на стороны контура длиной  $l$ , перпендикулярны к ним и к магнитному полю и поэтому направлены вертикально: они лишь деформируют контур, стремясь растянуть его. Стороны, имеющие длину  $a$ , перпендикулярны  $\vec{B}$ , так что на каждую из них действует сила  $F = BIa$ . Эти силы стремятся повернуть контур таким образом, чтобы его плоскость стала ортогональной  $\vec{B}$ . Момент пары сил (рис. 19.14,б) равен

$$M = Fh = Fl \cos \varphi = BIal \cos \varphi, \tag{19.34}$$

где  $h = l \cos \varphi$  — плечо пары сил, а  $\varphi$  — угол между вектором  $\vec{B}$  и стороной  $l$ .



**Рис. 19.14.** Силы, действующие на контур с током в магнитном поле: а — ось вращения контура  $OO'$  лежит в плоскости рисунка; б — вид сверху на тот же контур — вдоль вертикальной оси  $OO'$



Величина, численно равная произведению силы тока  $I$ , протекающего в контуре, на площадь контура ( $S = al$ ) называется *магнитным моментом*  $P_m$ :

$$P_m = IS. \quad (19.35)$$

Таким образом, мы можем записать момент пары сил в виде:

$$M = BP_m \cos \varphi. \quad (19.36)$$

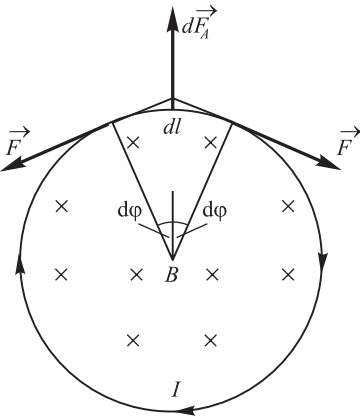
Магнитный момент контура с током — векторная величина. Направление  $\vec{P}_m$  совпадает с положительным направлением нормали к плоскости контура, которое опять же определяется правилом буравчика: если рукоятка вращается по направлению тока в контуре, то поступательное движение буравчика показывает направление вектора  $\vec{P}_m$ . Введем в формулу (19.36) угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{P}_m$  и  $\vec{B}$ . Справедливо соотношение  $\cos \varphi = \sin(\pi/2 - \varphi) = \sin \alpha$ . Следовательно,

$$\boxed{M = P_m B \sin \alpha \quad \text{и} \quad \vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}}, \quad (19.37)$$

т. е. момент сил  $\vec{M}$ , действующий на контур с током в однородном магнитном поле, записан в виде векторного произведения магнитного момента  $\vec{P}_m$  контура и индукции магнитного поля  $\vec{B}$ . При  $\alpha = \pi/2$  величина момента сил максимальна:  $M_{\max} = BP_m$ . Опять-таки прозрачна аналогия с электростатикой: говоря об электрическом диполе, мы получили выражение для момента сил, действующих на него со стороны электрического поля:  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ , где  $\vec{p}$  — электрический дипольный момент.

Как следует из формулы (19.35), размерность магнитного момента равна произведению размерности тока на размерность площади:  $[P_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2$ . Выражение (19.37) позволяет записать размерность магнитного момента в эквивалентном виде. Вспоминая из курса механики, что размерность момента сил  $[M] = [FL] = \text{Дж}$ , получаем  $[P_m] = [M]/[B] = \text{Дж}/\text{Тл}$ .

**Задача 19.91.** По тонкому проводу в виде кольца радиусом  $R = 30$  см течет ток  $I = 100$  А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено однородное магнитное поле  $B = 20$  мТл. Найти силу, растягивающую кольцо.



**Рис. 19.15.** Силы, растягивающих кольцо с током в магнитном поле (к задаче 19.91)

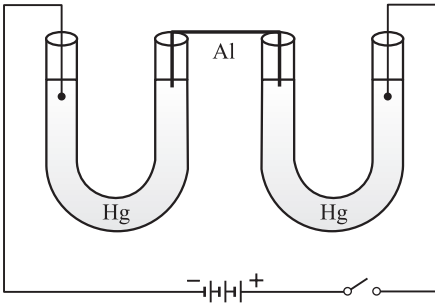
**Решение.** Пусть магнитное поле направлено от нас за плоскость рис. 19.15 (показано крестиками), а ток идет по часовой стрелке. Выделим элемент проводника длиной  $dl$ , видимый из центра под углом  $2d\varphi$  ( $dl = 2Rd\varphi$ ). На него действует сила Ампера  $dF_A = IBdl = 2IBRd\varphi$ , направленная по радиусу кольца. Кроме того, из-за растяжения кольца на концы элемента действуют силы натяжения  $F$ , которые и требуется найти в задаче. Проекция этих сил на радиус равна  $2F \sin(d\varphi) \approx 2F d\varphi$ . Приравнявая эту проекцию силе Ампера  $dF_A$ , находим:

$$F = IBR = 100 \times 20 \cdot 10^{-3} \times 0,3 = 0,6 \text{ Н. } \blacksquare$$

## Контрольные вопросы

1. Объясните физический смысл вектора магнитной индукции. В каких единицах измеряется магнитная индукция?
2. Вблизи географических полюсов магнитные компасы работают плохо и практически непригодны. Почему?
3. В одном из первых старинных трактатов по магнетизму описан следующий опыт. Если бить молотком по железной полосе, расположенной в направлении с севера на юг, то она намагнитится. Объясните это явление. Как будут расположены магнитные полюсы на намагниченной таким образом полосе?
4. Изобразите линии магнитной индукции от намагниченного бруска железа.
5. Имеются два внешне одинаковых железных бруска, причем один из них намагничен, а второй — нет. Как определить, какой из брусков магнит, не пользуясь дополнительными приборами и приспособлениями?
6. Что такое сила Лоренца? Чем определяется ее направление?
7. Электрон пересекает некоторую область пространства по прямолинейной траектории. Можно ли утверждать, что в этой области нет магнитного поля?
8. Электрон пересекает некоторую область пространства и отклоняется от прямолинейной траектории. Можно ли утверждать, что в этой области есть магнитное поле?
9. Вертикально на Землю в ее экваториальной плоскости падает из космоса пучок протонов. В какую сторону он будет отклоняться магнитным полем Земли (север, юг, восток, запад)?
10. Какие из частиц пучка сильнее отклоняются магнитным полем: быстрые или более медленные?
11. Электрон движется в однородном магнитном поле. Чему равна работа силы, действующей на него со стороны поля?
12. Что такое электронвольт?
13. На покоящуюся заряженную частицу начинают действовать два постоянных поля (электрическое и магнитное), направленные ортогонально. Опишите качественно движение частицы.
14. Объясните принципиальную схему опыта по измерению удельного заряда электрона.
15. В чем заключается эффект Холла?
16. Сформулируйте закон Ампера.

17. Полный заряд проводника, даже если по нему течет ток, равен нулю. Почему тогда на проводник с током действует сила со стороны магнитного поля?
18. Для гашения электрической дуги, образующейся при размыкании цепи с большим током, часто вблизи рубильника располагают электромагнит так, чтобы силовые линии его магнитного поля были перпендикулярны возникающей дуге. Объясните, почему это приводит к цели.
19. Две стеклянные U-образные трубки (рис. 19.16), наполненные ртутью, соединены отрезком толстой алюминиевой проволоки. Как должен быть расположен сильный постоянный магнит, чтобы при замыкании цепи проволока взлетела вверх?



**Рис. 19.16.** Иллюстрация действия силы Ампера (к вопросу 19)

20. Дайте определение магнитного момента витка с током. Какова размерность магнитного момента?
21. Как изменится ответ задачи 19.91, если сменить направление тока на противоположное?

## Глава 20

# Магнитное поле в вакууме

### 20.1 Магнитное поле движущегося заряда

В конце предыдущей главы мы рассмотрели виток с током и ассоциировали с ним вектор магнитного момента  $\vec{P}_m = \vec{n}IS$ , где  $\vec{n}$  — нормаль к плоскости витка, направление которой задается правилом буравчика. Момент сил  $\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$  стремится повернуть виток. Чтобы увеличить угол  $\alpha$  между магнитным моментом витка и направлением поля, надо совершить работу  $dA = M d\alpha = P_m B \sin \alpha d\alpha$ , которая увеличивает потенциальную энергию витка:  $dW = dA$ . Отсюда

$$W = -P_m B \cos \alpha = -\vec{P}_m \cdot \vec{B}. \quad (20.1)$$

Энергия достигает своего минимума, когда магнитный момент витка становится параллельным вектору магнитного поля ( $\alpha = 0$ ); антипараллельное положение ( $\alpha = \pi$ ) соответствует неустойчивому равновесию. Все это означает, что виток с током ведет себя подобно магнитной стрелке (магнитному диполю). Недаром формула (20.1) для потенциальной энергии витка с током в магнитном поле так похожа на формулу (17.8) для потенциальной энергии диполя в электрическом поле. К тому же виток с током невозможно разделить на два независимых полюса — северный и южный. Мы пришли к гипотезе Ампера: все магнитные явления в конечном итоге имеют происхождение в элементарных токах, текущих в структурных единицах вещества.

Магнитная стрелка не только прибор, регистрирующий внешнее магнитное поле, она сама является маленьким магнитом, создающим свое собственное поле. Значит, и виток с током должен создавать свое собственное магнитное поле, подобное полю стрелки. Следовательно, любой электрический ток в проводнике создает вокруг него магнитное поле. В частности, такое поле должен создавать движущийся электрический заряд.

Сейчас мы попробуем угадать, какое магнитное поле порождается зарядом  $q$ , движущимся со скоростью  $\vec{v}$ . Отправной точкой нам послужит симметрия между электрическими и магнитными явлениями. Вспомним то, что мы уже знаем. Чтобы получить силу, действующую на заряд в электростатическом поле, мы умножаем величину заряда на вектор напряженности поля:  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Чтобы

получить силу Лоренца, действующую со стороны магнитного поля на движущийся заряд, мы тоже производим операцию умножения: векторно умножаем  $q\vec{v}$  на магнитную индукцию:  $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ . Применим тот же прием для угадывания магнитного поля движущегося заряда.

Электрическое поле покоящегося точечного заряда равно

$$\vec{E} = q \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Заменим  $q$  на вектор  $q\vec{v}$ , электрическое поле — на магнитное, а операцию обычного умножения — на векторное. Получаем:

$$\vec{B} \sim \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Мы не поставили здесь знака равенства, так как у нас не все в порядке с размерностью в левой и правой частях уравнения. Из выражения для силы Лоренца следует, что размерность магнитной индукции равна  $[B] = [F][q]^{-1}[v]^{-1}$ . Размерность же правой части уравнения равна  $[E][v] = [F][q]^{-1}[v]$ . Чтобы размерности обеих частей совпали, правую часть надо разделить на квадрат какой-то скорости. Скорость частицы у нас уже использована, и остается единственная возможность — фундаментальная физическая постоянная, скорость света  $c$ :

$$\vec{B} = \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi c^2 \epsilon_0 r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (20.2)$$

Мы ввели здесь новую константу  $\mu_0$ , связанную с  $\epsilon_0$  соотношением

$$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2. \quad (20.3)$$

Ее называют магнитной постоянной; численное значение ее оказывается равным

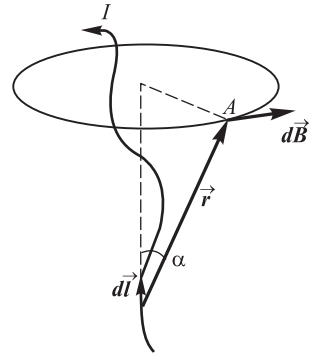
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{А}}. \quad (20.4)$$

Конечно, выражение (20.2) получено лишь по аналогии и не может рассматриваться, как строго выведенное. Однако посмотрим, к каким следствиям оно приведет, и сравним эти следствия с экспериментом.

## 20.2 Закон Био—Савара—Лапласа

Возьмем элемент тока  $I d\vec{l}$  (рис. 20.1). Мы рассматриваем линейные проводники, поперечные размеры которых много меньше длины проводника. Поэтому в любой точке по длине проводника вектор элемента тока  $I d\vec{l}$  всегда совпадает по направлению с вектором  $\vec{j}$  плотности тока и дрейфовой скорости  $\vec{v}$  положительных зарядов. Полный заряд носителей тока в этом элементе равен  $dq = enS dl$ , где  $n$  — концентрация носителей,  $e$  — заряд каждого носителя, а  $S$  — поперечное сечение проводника. Подставим этот заряд в выражение (20.2):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{enS dl [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$



**Рис. 20.1.** Магнитное поле, создаваемое элементом тока

Сила тока дается выражением  $I = enSv$ , откуда

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (20.5)$$

Вектор  $\vec{r}$  проведен от элемента тока к точке наблюдения.

Соответственно, модуль вектора  $d\vec{B}$  равен

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (20.6)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением данного элемента тока  $Id\vec{l}$  и радиусом-вектором  $\vec{r}$ . Полученное соотношение (20.5) в точности совпадает с законом, экспериментально установленным Ж.-Б. Био и Ф. Саваром и сформулированным П.-С. Лапласом (1820).

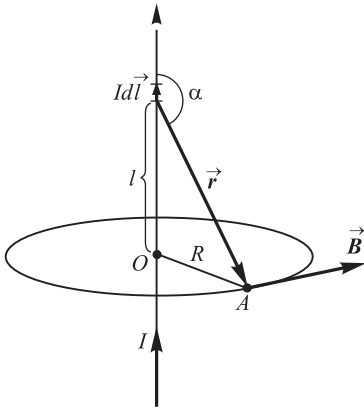
**Закон Био—Савара—Лапласа** (20.5) определяет магнитную индукцию  $\vec{B}$  в любой точке магнитного поля, создаваемого постоянным электрическим током, текущим по проводнику любой формы (см. рис. 20.1). Для этого надо проинтегрировать соотношение (20.5) вдоль всего проводника. При этом поля от различных элементов тока векторно складываются, т. е. используется принцип суперпозиции для магнитных полей.

### 20.3 Магнитное поле прямолинейного проводника с током

Вычислим поле, создаваемое током, текущим по тонкому прямолинейному проводу бесконечной длины. Напряженность магнитного поля в произвольной точке A (рис. 20.2), создаваемого элементом тока  $Id\vec{l}$ , равна

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha dl}{r^2}. \quad (20.7)$$

Поля от различных элементов тока имеют одинаковое направление (по касательной к окружности радиусом  $R$ , лежащей в плоскости, ортогональной проводнику). Значит, мы можем складывать (интегрировать) абсолютные величины  $dB$ :



**Рис. 20.2.** Магнитное поле прямолинейного проводника с током

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha \, dl}{r^2}. \quad (20.8)$$

Выразим  $r$  и  $\sin \alpha$  через переменную интегрирования  $l$ :

$$r = \sqrt{R^2 + l^2}, \quad \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}}.$$

Тогда (20.8) переписывается в виде:

$$B = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \cdot \frac{l}{R^2 \sqrt{R^2 + l^2}} \Big|_{l=-\infty}^{l=\infty}.$$

Таким образом,

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}. \quad (20.9)$$

Напомним выражение для электрического поля тонкой нити, заряженной с линейной плотностью заряда  $\tau$ :

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Сходство выражений очевидно: мы имеем ту же зависимость от расстояния до нити (тока), линейная плотность заряда заменилась на силу тока. Но направления полей различны. Для нити электрическое поле направлено по радиусам. Линии магнитной индукции бесконечного прямолинейного проводника с током образуют систему концентрических окружностей, охватывающих проводник. Направления этих линий образуют с направлением тока правовинтовую систему.

### 20.4 Магнитное поле на оси кругового тока

Напряженность магнитного поля на оси кругового тока (рис. 20.3,а), создаваемого элементом тока  $I d\vec{l}$ , равна:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi r^2},$$

поскольку в данном случае  $d\vec{B} \perp \vec{r}$ . При интегрировании по витку вектор  $d\vec{B}$  будет описывать конус, так что в результате «выживет» только компонента поля вдоль оси  $Oz$ . Поэтому достаточно просуммировать величину

$$dB_z = dB \cos \alpha = dB \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + h^2)^{3/2}} dl. \quad (20.10)$$

Интегрирование  $B = \oint dB_z$  выполняется тривиально, так как подынтегральная функция не зависит от переменной  $l$ , а  $\oint dl = 2\pi R$ . Соответственно, полная магнитная индукция на оси витка равна:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{(1 + h^2/R^2)^{3/2}}. \quad (20.11)$$

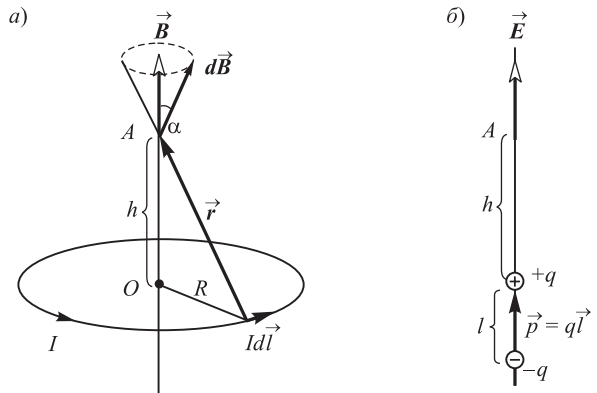
В частности, в центре витка ( $h = 0$ ) поле равно

$$B|_{h=0} = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (20.12)$$

На большом расстоянии от витка ( $h \gg R$ ) можно пренебречь единицей под радикалом в знаменателе формулы (20.11):

$$B|_{h \rightarrow \infty} \approx \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{h^3} = \frac{\mu_0 I (\pi R^2)}{2\pi h^3} = \frac{\mu_0 P_m}{2\pi h^3}. \quad (20.13)$$

Здесь мы использовали выражение для магнитного момента витка  $P_m$ , равное произведению  $I$  на площадь витка  $\pi R^2$ . Магнитное поле образует с круговым



**Рис. 20.3.** Магнитное поле на оси кругового тока (а) и электрическое поле на оси диполя (б)



током правовинтовую систему, так что (20.13) можно записать в векторной форме:

$$\boxed{\vec{B}|_{h \rightarrow \infty} \approx \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi h^3}}. \quad (20.14)$$

Для сравнения рассчитаем поле электрического диполя (рис. 20.3, б). Электрические поля от положительного и отрицательного зарядов равны, соответственно,

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2}, \quad E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (h+l)^2},$$

так что результирующее поле

$$E = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l(l+2h)}{h^2(l+h)^2}. \quad (20.15)$$

На больших расстояниях ( $h \gg l$ ) имеем отсюда

$$E|_{h \rightarrow \infty} \approx \frac{ql}{2\pi\epsilon_0 h^3} = \frac{d}{2\pi\epsilon_0 h^3}. \quad (20.16)$$

Здесь мы ввели электрический дипольный момент  $d = ql$ . Поле  $E$  параллельно вектору дипольного момента, так что (20.16) можно записать в векторной форме:

$$\vec{E}|_{h \rightarrow \infty} \approx \frac{\vec{d}}{2\pi\epsilon_0 h^3}. \quad (20.17)$$

Аналогия с (20.14) прозрачна.

**Задача 20.92.** Электрон в атоме водорода движется вокруг протона по окружности радиусом  $a_B = 53$  пм (эту величину называют радиусом Бора по имени одного из создателей квантовой механики, который первым вычислил радиус орбиты теоретически). Найти силу эквивалентного кругового тока и магнитную индукцию  $B$  поля в центре окружности.

**Решение.** Заряды электрона и протона одинаковы по величине ( $e$ ) и противоположны по знаку. На электрон действует сила кулоновского притяжения протона, создающая центростремительное ускорение:

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B^2} = m\omega^2 a_B.$$

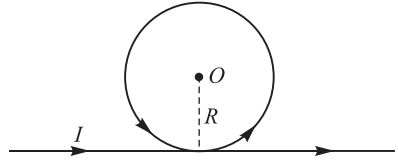
Отсюда находим угловую скорость вращения электрона:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{F}{ma_B}} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ma_B^3}} = \\ &= \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \times (53 \cdot 10^{-12})^3}} = 4,12 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Период обращения  $T = 2\pi/\omega = 1,52 \cdot 10^{-16}$  с. Если представить себе воображаемую площадку, ортогональную траектории электрона, то за время  $T$  через нее проходит заряд  $e$ . Поэтому сила эквивалентного тока равна

$$I = \frac{e}{T} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,52 \cdot 10^{-16}} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 1,05 \text{ мА}.$$

**Рис. 20.4.** Проводник с током, образующий кольцеобразную петлю (к задаче 20.93)



Скорость движения электрона равна  $v = \omega a_B = 2,18 \cdot 10^6$  м/с. Движущийся заряд создает в центре орбиты магнитное поле (см. уравнение (20.2) с учетом  $\vec{v} \perp \vec{r}$ )

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{a_B^2} = 10^{-7} \times \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 2,18 \cdot 10^6}{(53 \cdot 10^{-12})^2} = 12 \text{ Тл.}$$

Этот же результат можно получить с помощью выражения (20.12) для поля в центре витка с током:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a_B} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 1,05 \cdot 10^{-3}}{2 \times 53 \cdot 10^{-12}} = 12 \text{ Тл.} \blacksquare$$

**Задача 20.93.** Бесконечно длинный тонкий проводник с током  $I = 50$  А имеет кольцеобразную петлю радиусом  $R = 10$  см (рис. 20.4). Найти магнитную индукцию в центре петли.

**Решение.** Магнитное поле в центре петли создается: 1) бесконечно длинным прямолинейным проводом и 2) кольцевым витком. Поле от провода направлено ортогонально плоскости рисунка «на нас», его величина равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Поле, создаваемое кольцеобразной частью проводника, имеет то же направление и равно

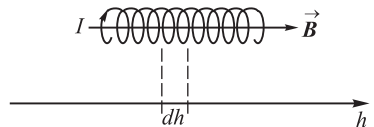
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Суммарное поле

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{R} \frac{\pi + 1}{2\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 50}{0,1} \frac{\pi + 1}{2\pi} = (\pi + 1) \cdot 10^{-4} = 414 \text{ мкТл.} \blacksquare$$

## 20.5 Магнитное поле соленоида

♦ **Соленоидом** называется цилиндрическая катушка, состоящая из большого числа витков провода, образующих винтовую линию ♦ (рис. 20.5).



**Рис. 20.5.** Магнитное поле соленоида

Если витки намотаны вплотную, то соленоид — это система круговых токов, имеющих одну ось.

Если считать соленоид достаточно длинным, то магнитное поле внутри соленоида однородно и направлено параллельно оси. Вне соленоида вдали от краев магнитное поле также направлено параллельно оси, но в обратном направлении. На больших расстояниях от оси оно убывает по закону  $B \sim 1/h^3$ , т. е. является очень слабым. Если витки соленоида намотаны не столь плотно, то вне соленоида существует еще очень незначительное поле, аналогичное полю прямолинейного проводника.

Подсчитаем поле внутри соленоида. Возьмем элемент соленоида длиной  $dh$ , находящийся на расстоянии  $h$  от точки наблюдения. Если катушка имеет  $n$  витков на единицу длины, то в выделенном элементе содержится  $n dh$  витков. Согласно формуле (20.11), этот элемент создает магнитное поле

$$dB = ndh \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (20.18)$$

Интегрируя по всей длине соленоида, получаем:

$$B = \frac{n\mu_0 IR^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{n\mu_0 IR^2}{2} \cdot \frac{h}{R^2 \sqrt{R^2 + h^2}} \Big|_{h=-\infty}^{h=\infty}. \quad (20.19)$$

Таким образом, поле в бесконечно длинном соленоиде дается выражением:

$$\boxed{B = \mu_0 n I.} \quad (20.20)$$

На практике соленоиды бесконечно длинными не бывают. Для иллюстрации решим следующие задачи.

**Задача 20.94.** Найти магнитное поле в середине соленоида конечной длины  $l$ . Сравнить с полем бесконечно длинного соленоида. При каких условиях разница составляет менее 0,5%?

**Решение.** Магнитное поле в средней точке оси соленоида конечной длины  $l$  дается тем же интегралом (20.19), но с другими пределами интегрирования:

$$\begin{aligned} B_c &= \int dB = \frac{n\mu_0 IR^2}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dh}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{n\mu_0 IR^2}{2} \cdot \frac{h}{R^2 \sqrt{R^2 + h^2}} \Big|_{h=-l/2}^{h=l/2} = \\ &= \mu_0 n I \frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}. \end{aligned} \quad (20.21)$$

Если длина соленоида много больше его диаметра ( $l \gg 2R$ ), мы возвращаемся к формуле для поля в бесконечно длинном соленоиде:  $B_\infty = \mu_0 n I$ . Относительная разница этих двух значений равна

$$\delta = \frac{B_\infty - B_c}{B_\infty} = 1 - \frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4R^2/l^2}}.$$

По условию эта разница мала:  $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$ , т. е. мало отношение диаметра соленоида к его длине:  $2R/l \ll 1$ . Поэтому можно разложить квадратный корень:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 4R^2/l^2}} \approx 1 - \frac{2R^2}{l^2}.$$

Отсюда

$$\delta \approx \frac{2R^2}{l^2} \quad \text{или} \quad \frac{R}{l} \approx \sqrt{\frac{\delta}{2}}.$$

Подставляя численное значение  $\delta$ , находим, что разница будет менее половины процента при выполнении соотношения:

$$\frac{R}{l} \leq \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3}}{2}} = 0,05.$$

Иными словами, соленоид может рассматриваться как бесконечно длинный, если его длина в двадцать или более раз превышает радиус. ■

**Задача 20.95.** Найти магнитное поле  $B_e$  в крайней торцевой точке оси соленоида конечной длины  $l$ . Сравнить с результатом предыдущей задачи.

**Решение.** Магнитное поле в торцевой точке оси соленоида конечной длины  $l$  дается тем же интегралом (20.19), но теперь пределы интегрирования будут выглядеть иначе:

$$\begin{aligned} B_e &= \int dB = \frac{n\mu_0 IR^2}{2} \int_0^l \frac{dh}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{n\mu_0 IR^2}{2} \cdot \frac{h}{R^2 \sqrt{R^2 + h^2}} \Big|_{h=0}^{h=l} \\ &= \mu_0 nI \frac{l}{2\sqrt{R^2 + l^2}}. \end{aligned} \quad (20.22)$$

Отношение полей в средней и крайней точках оси соленоида равно

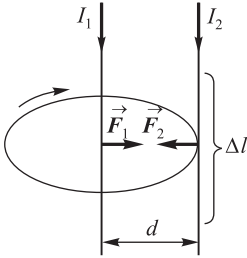
$$\frac{B_e}{B_c} = \sqrt{\frac{R^2 + l^2/4}{R^2 + l^2}}.$$

Это отношение всегда меньше единицы (поле на торце меньше поля в середине соленоида). При  $l \gg R$  имеем  $B_e/B_c \approx 1/2$ . Этот результат легко понять. Представим себе бесконечный соленоид, который мысленно рассекаем пополам в точке наблюдения. Можно считать, что поле в этой точке создается двумя одинаковыми «полубесконечными» соленоидами, расположенными по разные стороны от нее. Ясно, что при удалении одного из них точка наблюдения становится торцом оставшегося «полубесконечного» соленоида, а магнитная индукция в ней уменьшится именно в два раза.

Это так называемый *краевой эффект*. Задача демонстрирует, что недостаточно выполнения соотношения  $l \gg R$ , чтобы пользоваться формулами для бесконечно длинного соленоида; надо еще, чтобы точка наблюдения находилась далеко от его концов. ■

## 20.6 Взаимодействие двух проводников с током

Применим закон Ампера для вычисления силы взаимодействия двух длинных прямолинейных проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$ , находящихся на расстоянии  $d$



**Рис. 20.6.** Силы, действующие между двумя проводниками с током

друг от друга (рис. 20.6). Проводник с током  $I_1$  создает кольцевое магнитное поле, величина которого в месте нахождения второго проводника равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}. \quad (20.23)$$

Это поле направлено «на нас» ортогонально плоскости рисунка. Элемент второго проводника  $\Delta l$  испытывает со стороны этого поля действие силы Ампера:

$$F_2 = B_1 I_2 \Delta l. \quad (20.24)$$

Подставляя (20.23) в (20.24), получим:

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \Delta l. \quad (20.25)$$

При параллельных токах сила  $F_2$  направлена к первому проводнику (притяжение), при антипараллельных — в обратную сторону (отталкивание).

Аналогично на элемент  $\Delta l$  проводника 1 действует магнитное поле, создаваемое проводником с током  $I_2$  в точке пространства с элементом  $\Delta l$  с силой  $F_1$ . Рассуждая таким же образом, находим, что  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , т.е. в этом случае выполняется третий закон Ньютона. Итак, сила взаимодействия двух прямолинейных бесконечно длинных параллельных проводников, рассчитанная на элемент длины  $\Delta l$  проводника, пропорциональна произведению сил токов  $I_1$  и  $I_2$ , протекающих в этих проводниках, и обратно пропорциональна расстоянию между ними. В электростатике по аналогичному закону взаимодействуют две длинные заряженные нити.

На основании формулы (20.25) устанавливается единица силы тока — *ампер*, являющаяся одной из основных единиц в СИ: ампер ( $A$ ) — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

**Задача 20.96.** По двум тонким проводам, изогнутым в виде одинаковых колец радиусом  $R = 10$  см, текут одинаковые токи  $I = 10$  А в каждом. Плоскости колец параллельны, а центры лежат на ортогональной к ним прямой. Расстояние между центрами равно  $d = 1$  мм. Найти силы взаимодействия колец.

**Решение.** В этой задаче не должно смущать, что мы знаем лишь закон взаимодействия длинных прямолинейных проводников. Поскольку расстояние между кольцами много меньше их радиуса, взаимодействующие элементы колец «не замечают» их кривизны. Поэтому сила взаимодействия дается выражением (20.25), куда вместо  $\Delta l$  надо подставить длину окружности колец  $\Delta l = 2\pi R$ . Получаем тогда:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 R}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 10^2 \times 0,1}{10^{-3}} = 4\pi \cdot 10^{-3} = 12,6 \text{ мН.} \blacksquare$$

## 20.7 Поток вектора магнитной индукции

♦ **Потоком вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  (магнитным потоком) через малую поверхность площадью  $dS$  называется скалярная физическая величина, равная**

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_n dS = B dS \cos(\widehat{\vec{B}, \vec{n}}), \quad (20.26)$$

где  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ ,  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к площадке  $dS$ , а  $B_n$  — проекция вектора  $\vec{B}$  на нормаль. ♦

Магнитный поток  $\Phi_B$  через произвольную поверхность  $S$  равен

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_n dS. \quad (20.27)$$

Отсутствие в природе магнитных зарядов приводит к тому, что линии вектора  $\vec{B}$  не имеют ни начала, ни конца, поэтому для любой замкнутой поверхности количество таких линий, входящих в нее и выходящих из нее, одинаково. Следовательно, поток вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю, т. е. для любого магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности  $S$  выполняется условие

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (20.28)$$

Формула (20.28) выражает **теорему Остроградского—Гаусса для вектора  $\vec{B}$** : ♦ **поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.** ♦

Подчеркнем еще раз: эта теорема является математическим выражением того факта, что в природе отсутствуют магнитные заряды, на которых начинались бы и заканчивались линии магнитной индукции, как это имело место в случае напряженности электрического поля  $\vec{E}$  точечных зарядов.

Это свойство существенным образом отличает магнитное поле от электрического. Линии магнитной индукции замкнуты, поэтому число линий, входящих в некоторый объем пространства, равно числу линий, выходящих из объема. Если входящие потоки брать с одним знаком, а выходящие — с другим, то суммарный

поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность будет равен нулю.

Поток вектора магнитной индукции  $\Phi_B$  измеряется в веберах (Вб):

$$[\Phi_B] = [B] [S] = 1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2.$$

## 20.8 Вихревой характер магнитного поля. Закон полного тока

Отличие магнитного поля от электростатического проявляется также в значении величины, которую мы называем *циркуляцией* — интеграла от векторного поля по замкнутому пути. В электростатике равен нулю интеграл  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , взятый по произвольному замкнутому контуру. Это связано с потенциальностью электростатического поля, с тем фактом, что работа по перемещению заряда в электростатическом поле не зависит от формы траектории, а определяется положением начальной и конечной точек, а для замкнутого пути эта работа равна нулю.

Посмотрим, как обстоит дело с аналогичной величиной для магнитного поля. Возьмем замкнутый контур, охватывающий прямой ток, и вычислим для него циркуляцию вектора  $\vec{B}$ , т. е. величину

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}. \quad (20.29)$$

По формуле (20.9) магнитная индукция, создаваемая прямолинейным проводником с током на расстоянии  $R$  от проводника, равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Рассмотрим случай, когда контур, охватывающий прямой ток, лежит в плоскости, перпендикулярной току, и представляет собой окружность радиусом  $R$  с центром на проводнике. В этом случае циркуляция вектора  $\vec{B}$  по этой окружности равна:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R. \quad (20.30)$$

Отсюда получаем

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (20.31)$$

Можно показать, что результат для циркуляции вектора магнитной индукции не меняется при непрерывной деформации контура, если при этой деформации контур не пересекает линий тока. Тогда в силу принципа суперпозиции циркуляция вектора магнитной индукции по пути, охватывающему несколько токов, пропорциональна их алгебраической сумме:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i.} \quad (20.32)$$

Если выбранный контур не охватывает токов, то циркуляция  $\vec{B}$  по нему равна нулю. Соотношение (20.32) называется **законом полного тока**.

При вычислении алгебраической суммы токов следует учитывать знак тока: положительным будем считать ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Воспользовавшись соотношением  $I = \int_S j_n dS$  между силой тока  $I$  через любую поверхность  $S$  и плотностью тока  $\vec{j}$ , для циркуляции вектора  $\vec{B}$  можно записать:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S j_n dS, \quad (20.33)$$

где  $S$  — любая поверхность, опирающаяся на данный контур  $L$ .

Итак, **циркуляция вектора магнитной индукции отлична от нуля, если контур, по которому она берется, охватывает ток**. Магнитное поле нельзя характеризовать потенциалом, потому что работа по замкнутому контуру в таком поле зависит от формы пути. Такие поля называются **вихревыми**. Наиболее наглядно разницу потенциального и вихревого полей можно представить по картине линий поля. Силовые линии электростатического поля похожи на ежей: они начинаются и кончаются на зарядах (либо уходят в бесконечность). Линии магнитной индукции никогда не напоминают «ежей»: они всегда замкнуты и охватывают текущие токи.

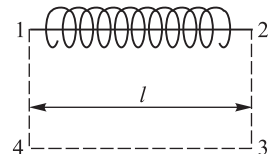
Для иллюстрации применения теоремы о циркуляции найдем другим методом уже известное нам магнитное поле бесконечного соленоида. Возьмем прямоугольный контур 1-2-3-4 (рис. 20.7) и вычислим циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по этому контуру:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l}. \quad (20.34)$$

Второй и четвертый интегралы равны нулю в силу перпендикулярности векторов  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ . Третий интеграл можно положить равным нулю, ввиду малости магнитного поля вне соленоида. Поэтому:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl. \quad (20.35)$$

Рассмотренный контур охватывает суммарный, или полный, ток  $nI$ , где  $n$  — число витков соленоида, приходящееся на единицу длины,  $I$  — сила тока в



**Рис. 20.7.** Применение теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$  к определению магнитного поля соленоида



соленоиде. Следовательно,  $Bl = \mu_0 n l I$  или  $B = \mu_0 n I$ . Мы воспроизвели результат (20.20), воспользовавшись законом полного тока и обойдясь без интегрирования магнитных полей, создаваемых отдельными витками.

## 20.9 Преобразования Лоренца для электромагнитного поля

Связь между электричеством и магнетизмом не исчерпывается сходством ряда соотношений. В сущности оба этих поля суть разные проявления единого *электромагнитного* поля. В курсе механики мы говорили о принципе относительности, о том, что все законы природы должны быть инвариантными при переходе из одной инерциальной системы отсчета к другой. Однако электрическое и магнитное поля сами по себе по отдельности явно не удовлетворяют этому принципу. Действительно, находясь в инерциальной системе отсчета  $K$ , возьмем заряд  $q$ , движущийся прямолинейно и равномерно со скоростью  $\vec{v}$ . Он создает кулоновское электрическое поле и, помимо этого, магнитное поле, вектор индукции которого дается выражением (20.2). Свяжем с зарядом систему отсчета  $K'$ , которая также будет инерциальной. В этой системе отсчета заряд покоится, и создаваемое им поле будет чисто электростатическим.

Выходит, электрическое и магнитное поля не имеют абсолютного характера. При переходе к другой системе отсчета они должны преобразовываться друг через друга. Вспомним преобразования Лоренца для пространственных координат и времени:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (20.36)$$

Не забудем, что аналогичные преобразования связывают импульс и энергию частицы в разных системах отсчета:

$$p_x = \frac{p'_x + VE'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad E = \frac{E' + Vp'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (20.37)$$

Станем ли мы теперь удивляться, что электрическое и магнитное поля в разных системах отсчета также связаны преобразованиями Лоренца:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \frac{E'_y + VB'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & E_z &= \frac{E'_z - VB'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \\ B_x &= B'_x, & B_y &= \frac{B'_y - VE'_z/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & B_z &= \frac{B'_z + VE'_y/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (20.38)$$

Напомним, что величины со штрихом относятся к системе отсчета  $K'$ , которая движется относительно системы  $K$  вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ .

Вывод формул (20.38) преобразований полей выходит за рамки нашего курса. Заметим лишь, что они отличаются от преобразований для пространства-времени или энергии-импульса: там не менялись компоненты радиуса-вектора и импульса,

ортогональные вектору скорости  $\vec{V}$  системы отсчета  $K'$ , здесь не меняются компоненты полей вдоль линии движения  $K'$  (т. е. вдоль оси  $Ox$ ).

Зададим себе вопрос: пусть в лабораторной системе отсчета  $K$  имеется электрическое поле  $\vec{E}$  и нет магнитного ( $\vec{B} = 0$ ). В каком случае наблюдатель в движущейся системе отсчета  $K'$  тоже будет наблюдать лишь чисто электрическое поле  $\vec{E}'$  без примеси магнитного ( $\vec{B}' = 0$ )? Ответ следует из формул (20.38) при подстановке туда нулевых значений для  $\vec{B}$  и  $\vec{B}'$ : из второго уравнения сразу вытекает  $E'_y = E'_z = 0$ , а из первого —  $E_y = E_z = 0$ . Иными словами, такое возможно, когда электрическое поле (необязательно однородное) направлено вдоль движения системы отсчета  $K'$ .

Уравнения электромагнетизма изначально были инвариантны относительно этих преобразований, так что теория относительности вполне безболезненно совместилась с электромагнитной теорией, в то время как классическая механика подверглась существенной ревизии. Вместо обоснования справедливости преобразований (20.38), что выходит за рамки нашего курса, мы познакомимся еще с одним их следствием.

Поскольку мы пока занимаемся в основном нерелятивистской физикой, упростим преобразования Лоренца для случая, когда скорость системы отсчета  $K'$  много меньше скорости света:  $V \ll c$ . В этом случае, как уже отмечалось, квадратные корни  $\sqrt{1 - V^2/c^2} \approx 1$  и преобразования (20.38) принимают вид:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= E'_y + VB'_z, & E_z &= E'_z - VB'_y; \\ B_x &= B'_x, & B_y &= B'_y - VE'_z/c^2, & B_z &= B'_z + VE'_y/c^2. \end{aligned} \quad (20.39)$$

Эти уравнения можно записать в векторной форме:

$$\vec{E} = \vec{E}' - [\vec{V}, \vec{B}'], \quad \vec{B} = \vec{B}' + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}']. \quad (20.40)$$

Вернемся к нашей заряженной частице, покоящейся в системе  $K'$ . В этой системе магнитное поле отсутствует ( $\vec{B}' = 0$ ), а электрическое поле дается законом Кулона:

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \vec{r}'.$$

Поскольку предполагается, что  $V \ll c$ , мы используем преобразования Галилея для пространственных координат и временных интервалов, так что радиус-вектор, проведенный от частицы в точку наблюдения, одинаков в обеих системах отсчета:  $\vec{r} = \vec{r}'$ . Подставляя указанные выражения для  $\vec{B}'$ ,  $\vec{E}'$  в формулы преобразования (20.40), получаем:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad \vec{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\vec{V}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\vec{V}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (20.41)$$

Здесь мы использовали соотношение (20.3):  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ . Первое уравнение — обычное кулоновское поле заряда  $q$ , второе — магнитное поле движущегося заряда (20.2). Таким образом, даже классический магнетизм — это проявление

релятивистских эффектов. Электрическое и магнитное поля оказываются неразрывно связанными друг с другом в *единое электромагнитное поле*, конкретное проявление которого зависит от системы отсчета.

**Задача 20.97.** Самолет летит горизонтально со скоростью  $v = 250$  м/с в магнитном поле Земли  $B = 50$  мкТл, направленном вертикально вниз. Какое электромагнитное поле будут наблюдать пассажиры самолета?

**Решение.** Направим ось  $Ox$  лабораторной системы отсчета  $K$ , связанной с Землей, вдоль маршрута самолета, так что его скорость запишется в виде  $\vec{v} = \vec{e}_x v$ . Ось  $Oz$  направим вертикально вверх, так что магнитная индукция описывается вектором  $\vec{B} = -B\vec{e}_z$ . Нам надо найти электрическое и магнитное поля в движущейся системе отсчета  $K'$ , связанной с самолетом. Поскольку скорость самолета много меньше скорости света, мы можем применить формулы (20.40). Для удобства, однако, мы используем обратные формулы, получаемые заменой штрихованных величин на нештрихованные и изменением знака скорости:  $\vec{V} = -\vec{v}$ :

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}], \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}]. \quad (20.42)$$

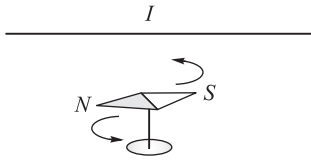
Так как в лабораторной системе электрического поля нет ( $\vec{E} = 0$ ), из второго уравнения сразу следует, что  $\vec{B}' = \vec{B}$ : магнитное поле для авиапассажиров останется тем же, что и для проводивших их в полет родственников. Однако в самолете появится еще и электрическое поле. Его напряженность, как вытекает из первого уравнения, равна:

$$\vec{E}' = [\vec{v}, \vec{B}] = -vB[\vec{e}_x, \vec{e}_z] = \vec{e}_y vB. \quad (20.43)$$

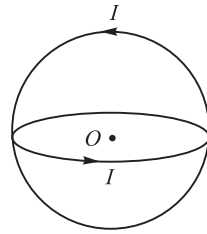
Мы использовали здесь тот факт, что векторное произведение двух ортов дает третий орт:  $[\vec{e}_x, \vec{e}_z] = -\vec{e}_y$ . Таким образом, в самолете будет наблюдаться электрическое поле напряженностью  $E = vB = 250 \times 50 \cdot 10^{-6}$  В/м = 12,5 мВ/м, направленное вдоль оси  $Oy$ , т. е. вдоль крыльев, от левого крыла к правому. При размахе крыльев  $l = 60$  м на их концах создается разность потенциалов  $\Delta\varphi = El = 0,75$  В — величина небольшая, но доступная измерениям. ■

## Контрольные вопросы

1. Какие поля создает движущийся электрический заряд?
2. Сформулируйте закон Био—Савара—Лапласа.
3. Определите направление тока, если магнитная стрелка, поднесенная к проводнику (рис. 20.8), отклоняется в указанном направлении.
4. Разведчик обнаружил двухпроводную линию постоянного тока. Как, имея вольтметр и компас, он определил, в каком направлении находится электростанция?
5. По полюму медному цилиндру течет ток в направлении, параллельном его оси. Изобразите силовые линии магнитного поля вне и внутри цилиндра.
6. По двум большим кругам сферической поверхности радиусом  $R$  — вертикальному и горизонтальному — идут токи одной и той же величины  $I$ . Их направления указаны на рис. 20.9 стрелками. Каковы величина и направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в центре сферы  $O$ ?

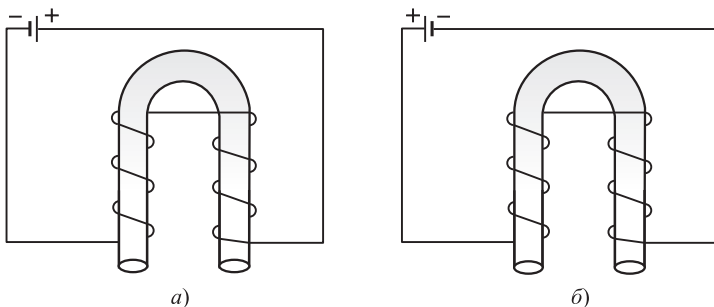


**Рис. 20.8.** Отклонение магнитной стрелки вблизи проводника с током (к вопросу 3)



**Рис. 20.9.** Круговые токи  $I$  создают магнитное поле в точке  $O$  (к вопросу 6)

7. Какие полюсы получаются на концах электромагнита, изображенного на рис. 20.10,а?
8. Тот же вопрос при другом направлении тока в обмотке электромагнита (рис. 20.10,б).
9. Параллельно проводу с током летит пучок электронов, причем направление скорости электронов совпадает с направлением тока. Будет ли этот пучок притягиваться к проводу или отталкиваться от него?
10. Почему два параллельных катодных пучка (электроны летят в одном направлении) отталкиваются друг от друга?
11. Как взаимодействуют соседние витки соленоида, когда по ним течет постоянный ток?
12. Дайте определение потока вектора магнитной индукции. В каких единицах он измеряется?
13. Чему равен поток вектора магнитной индукции через некоторую замкнутую поверхность  $S$ ? Объясните физический смысл ответа.
14. Какое свойство отличает линии магнитной индукции от силовых линий электрического поля.



**Рис. 20.10.** Электромагниты с разными направлениями тока в обмотке (к вопросу 7)

15. Что такое циркуляция вектора магнитной индукции?
16. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру.
17. Найдите магнитное поле, создаваемое прямолинейным бесконечным проводником с током, с помощью закона полного тока.

## Глава 21

# Магнитное поле в веществе

*Магнетиками* называются вещества, приобретающие во внешнем магнитном поле магнитные свойства. По существу, все тела в природе так или иначе реагируют на внешнее магнитное поле, и в этом смысле являются магнетиками. Иными словами, во внешнем магнитном поле все материалы способны создавать собственное магнитное поле (намагничиваться).

### 21.1 Магнетики

При этом в магнетике собственное магнитное поле складывается с внешним полем, следовательно вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  в магнетике будет равен сумме векторов магнитной индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$  и магнитной индукции собственного поля магнетика  $\vec{B}'$ :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (21.1)$$

Магнитная индукция  $\vec{B}$  характеризует магнитное поле в веществе и связана с магнитной индукцией  $\vec{B}_0$  в вакууме соотношением:  $\vec{B} = \mu \vec{B}_0$ . Безразмерная величина  $\mu$  называется *магнитной проницаемостью*. Вообще говоря, поле  $\vec{B}'$  не обязательно параллельно внешнему полю и не обязательно пропорционально ему, но в дальнейшем, как и при рассмотрении диэлектриков, мы ограничиваемся случаем линейной, однородной и изотропной среды.

Все магнетики в зависимости от характера реакции на внешнее магнитное поле можно разделить на три группы:

1) парамагнетики, у которых  $\mu > 1$  и вектор магнитной индукции собственного магнитного поля  $\vec{B}'$  направлен в ту же сторону, что и вектор внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$ ;

2) диамагнетики, у которых  $\mu < 1$ , а векторы  $\vec{B}_0$  и  $\vec{B}'$  направлены в противоположные стороны;

3) ферромагнетики, у которых  $\mu \gg 1$ .

Явления диамагнетизма и парамагнетизма связаны с возникновением в телах магнитного момента. В парамагнетиках этот момент ориентирован по внешнему полю  $\vec{B}_0$  и усиливает его собственным полем  $\vec{B}'$ . В неоднородных внешних полях парамагнитные тела втягиваются в область более сильного поля, подобно

электрическому диполю. Поэтому парамагнетики притягиваются к магниту. Диамагнетики, наоборот, выталкиваются из области более сильного поля, потому что индуцированный в них магнитный момент направлен противоположно внешнему полю и ослабляет его.

Как показывает опыт, вектор магнитной индукции собственного поля пара- и диамагнетика пропорционален вектору магнитной индукции внешнего поля  $\vec{B}_0$ :

$$\vec{B}' = \chi_m \vec{B}_0. \quad (21.2)$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности  $\chi_m$  называется **магнитной восприимчивостью** вещества. У диамагнитных веществ магнитная восприимчивость является отрицательной величиной ( $\chi_m < 0$ ), у парамагнитных — положительной ( $\chi_m > 0$ ). У ферромагнетиков магнитная восприимчивость  $\chi_m \gg 1$  и зависит от магнитной индукции внешнего поля  $\vec{B}_0$ , поэтому зависимость собственного поля ферромагнетика от внешнего поля более сложна.

Результирующее магнитное поле в присутствии магнетика равно:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \chi_m \vec{B}_0. \quad (21.3)$$

Сравнивая с (21.1), получим формулу, аналогичную соответствующему выражению (17.43) для диэлектриков:

$$\mu = 1 + \chi_m. \quad (21.4)$$

Отсюда находим связь собственного поля с внешним:

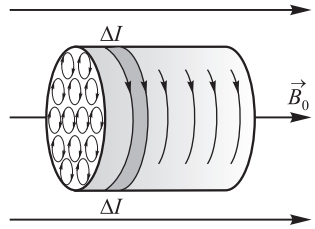
$$\vec{B}' = (\mu - 1)\vec{B}_0 = \frac{\mu - 1}{\mu} \vec{B}. \quad (21.5)$$

## 21.2 Вектор намагничивания

Для объяснения намагничивания тел Ампер предположил, что в атомах и молекулах вещества циркулируют круговые токи — молекулярные токи. Каждый такой ток создает в окружающем пространстве магнитное поле. В силу хаотической ориентации магнитных моментов отдельных молекулярных токов суммарный магнитный момент тела равен нулю. Под действием внешнего магнитного поля магнитные моменты молекулярных токов приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, вследствие чего вещество намагничивается — его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля, возникает дополнительное поле  $\vec{B}'$ .

Не вдаваясь пока в обсуждение природы молекулярных токов, получим соотношения, аналогичные тем, что были выведены для диэлектриков. Каждый молекулярный ток имеет магнитный момент  $\vec{P}_m$ . Намагничение магнетика естественно охарактеризовать магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют **вектором намагничивания**, или **намагниченностью**, и обозначают  $\vec{J}$ . В общем случае вектор намагничивания в данной точке определяется векторной суммой

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \vec{P}_{m,i}. \quad (21.6)$$



**Рис. 21.1.** Молекулярные токи в магнетике, помещенном в магнитное поле  $\vec{B}_0$ , создают собственное поле, подобное полю соленоида с током  $I$

Здесь  $V$  — элементарный объем магнетика, взятый в окрестности рассматриваемой точки,  $\vec{P}_{m,i}$  — магнитные моменты отдельных молекулярных токов, а  $n$  — число молекулярных токов в объеме  $V$ . Так как размерность магнитного момента  $[P_m] = [I][S] = \text{A} \cdot \text{м}^2$ , вектор намагничивания  $\vec{J}$  измеряется в А/м:  $[J] = \text{A} \cdot \text{м}^2/\text{м}^3 = \text{A}/\text{м}$ .

Поляризуемость диэлектрика (электрический дипольный момент единицы объема) связывалась с возникновением поверхностных зарядов, которые изменяли электрическое поле в среде. Аналогично этому, намагниченность магнетика приводит к возникновению поверхностных токов, что меняет магнитное поле. На рисунке 21.1 показан образец магнетика, помещенный во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$ . Молекулярные токи, показанные на торце образца, ориентированы так, что их магнитные моменты выстроились параллельно вектору  $\vec{B}_0$ . Видно, что токи в толще магнетика компенсируют друг друга. Нескомпенсированными оказываются только токи вблизи боковой поверхности образца. Складываясь, они приводят к круговым поверхностным токам (показаны стрелками). Такая система эквивалентна соленоиду. В формуле для напряженности поля соленоида  $B = \mu_0 n I$  величина  $n$  есть число витков на единицу длины соленоида:  $n = \Delta N / \Delta l$ . С другой стороны, произведение  $\Delta I = I \Delta N$  есть полный ток через элемент длиной  $\Delta l$ . Поэтому формула для соленоида применима к нашему магнетик, если заменить произведение  $nI$  на линейную плотность поверхностного тока  $\Delta I / \Delta l$ . Получаем тогда для напряженности поля  $B'$ , создаваемого молекулярными токами:

$$B' = \mu_0 \frac{\Delta I}{\Delta l}. \quad (21.7)$$

В то же время, магнитный момент элемента поверхностного тока длиной  $\Delta l$  равен

$$\Delta P_m = \Delta I S, \quad (21.8)$$

где  $S$  — поперечное сечение образца. По определению намагниченности,

$$J = \frac{\Delta P_m}{\Delta V} = \frac{\Delta P_m}{S \Delta l} = \frac{\Delta I}{\Delta l}. \quad (21.9)$$

Сравнивая (21.7) и (21.9), находим связь вектора намагниченности с полем, создаваемым молекулярными токами:

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}. \quad (21.10)$$

С учетом (21.1) и (21.5) можем записать:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}, \\ \vec{J} &= (\mu - 1) \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \end{aligned}} \quad (21.11)$$



### 21.3 Напряженность магнитного поля

В диэлектриках, помимо силовой характеристики электрического поля  $\vec{E}$ , мы ввели также вспомогательную величину — вектор электрического смещения  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ . Для простейших бесконечных однородных диэлектриков справедливо соотношение  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ . Для магнетиков аналогичным образом также вводится вспомогательная величина — напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (21.12)$$

(обратите внимание на разные знаки, с которыми входят  $\vec{P}$  для диэлектриков и вектор  $\vec{J}$  для магнетиков). С учетом полученных выше соотношений

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \left( 1 - \frac{\mu - 1}{\mu} \right),$$

так что

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}. \quad (21.13)$$

Размерность  $H$  совпадает с размерностью  $J$ ; в СИ величина  $H$  измеряется в А/м. В вакууме, где  $\mu = 1$ ,  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ .

Подчеркнем, что аналогом вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  является именно вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ , а векторы  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  играют вспомогательную роль. Следует избегать ложных иллюзий, вызванных исторически закрепившимся названием для вектора  $\vec{H}$ . В терминах  $\vec{H}$  полученные соотношения принимают вид:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= (\mu - 1)\vec{H} = \chi_m \vec{H}, \\ \vec{B}' &= \mu_0(\mu - 1)\vec{H} = \chi_m \mu_0 \vec{H}, \\ \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{J}), \end{aligned} \quad (21.14)$$

где  $\chi_m$  — магнитная восприимчивость магнетика. Смысл введения вспомогательной величины  $\vec{H}$  станет ясен при рассмотрении циркуляции магнитной индукции в веществе.

### 21.4 Циркуляция вектора напряженности магнитного поля в веществе

Мы видели, что циркуляция магнитной индукции в вакууме определялась током, пронизывающим выбранный контур  $L$ :  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$ . Аналогичное

выражение, естественно, справедливо и для циркуляции вектора  $\vec{B}$  в веществе, но циркуляция собственного поля магнетика  $\oint_L \vec{B}'$  приведет к появлению в правой части суммы молекулярных токов, которые нам неизвестны. Это крайне неудобно. Положение спасает введенный вектор напряженности магнитного поля

$\vec{H}$ . Из определения (21.12) и соотношения (21.10) следует:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B} - \vec{B}'}{\mu_0} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad (21.15)$$

так что циркуляция вектора напряженности магнитного поля определяется только макроскопическими токами в системе:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu_0} \oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i = I, \quad (21.16)$$

где  $I$  — полный макроскопический ток через контур  $L$ . Его можно выразить через плотность тока  $\vec{j}$  через любую поверхность  $S$ , «натянутую» на контур  $L$ :

$$\boxed{\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}}, \quad (21.17)$$

где  $d\vec{S} = \vec{n}dS$ , а вектор  $\vec{n}$  — единичный нормальный вектор к элементарной площади  $dS$ .

Для иллюстрации применения полученных формул вычислим магнитную индукцию в соленоиде с линейной плотностью витков  $n$  и силой тока  $I$ , если витки намотаны на сердечник с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найдем циркуляцию вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  по тому же контуру, что и прежде (см. рис. 20.7). Ответ нам, в сущности, известен:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = nI$$

(ср. с формулой (20.35)). Контур охватывает тот же суммарный ток  $nI$ , и (21.16) приводит к равенству:  $H = nI$ . Используя теперь связь  $B = \mu_0\mu H$ , получаем

$$\boxed{B = \mu_0\mu nI}. \quad (21.18)$$

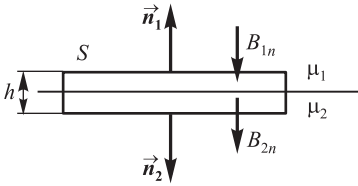
По сравнению с выражением (20.20) для соленоида без сердечника, здесь появился дополнительный множитель  $\mu$ .

## 21.5 Неоднородные магнетики

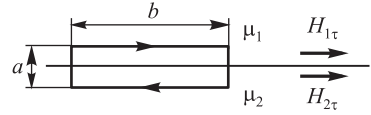
В общем случае параметры магнетика могут меняться от точки к точке. На практике часто приходится иметь дело с образцами, состоящими из нескольких однородных магнетиков с различными значениями  $\mu$ . В этом случае для определения магнитного поля во всем пространстве следует учесть условия на границе раздела разных магнетиков.

Рассмотрим некоторый участок раздела двух магнетиков высотой  $h$  и равными основаниями  $S_1 = S_2 = S$ , который в пределе может считаться плоским (рис. 21.2). Применим к этому участку теорему Остроградского—Гаусса:

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (21.19)$$



**Рис. 21.2.** Применение теоремы Остроградского—Гаусса для магнитной индукции на границе раздела двух магнетиков



**Рис. 21.3.** Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по контуру на границе раздела двух магнетиков

Потоком  $\vec{B}$  через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь, так как высоту  $h$  будем считать бесконечно малой, тогда полный поток вектора магнитной индукции через поверхность всего участка раздела будет складываться из потоков через верхнее и нижнее основания этого участка. Сложив эти два потока, получим

$$\Phi_B = B_{1n}S_1 - B_{2n}S_2 = 0, \quad (21.20)$$

откуда следует, что

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}. \quad (21.21)$$

Полученное соотношение можно переписать в виде:

$$\mu_1\mu_0 H_{1n} = \mu_2\mu_0 H_{2n}, \quad (21.22)$$

откуда

$$\boxed{\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}}. \quad (21.23)$$

Результат означает, что нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля на поверхности раздела двух разнородных магнетиков терпит скачок, а нормальная составляющая вектора магнитной индукции на любой поверхности непрерывна.

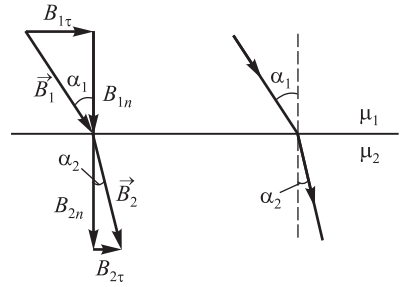
Граничные условия для тангенциальных составляющих определяются из требования: циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна нулю  $\oint \vec{H} d\vec{l} = 0$  (рис. 21.3). Поскольку ширина контура  $a$  пренебрежимо мала, вкладом, вносимым в циркуляцию сторонами, перпендикулярными к поверхности раздела, можно пренебречь. Тогда для циркуляции вектора  $\vec{H}$  получим равенство  $(H_{1\tau} - H_{2\tau})b = 0$ , из которого следует:

$$\boxed{H_{1\tau} = H_{2\tau}}. \quad (21.24)$$

Тангенциальная составляющая вектора напряженности магнитного поля непрерывна на границе раздела двух магнетиков. Напротив, тангенциальная составляющая вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред терпит разрыв:

$$\boxed{\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}. \quad (21.25)$$

Сопоставляя полученные результаты для магнитного поля с аналогичными результатами для электростатического поля, можно отметить, что при переходе



**Рис. 21.4.** Преломление линий магнитной индукции на границе раздела двух магнетиков

через границу раздела двух сред вектор  $\vec{B}$  ведет себя подобно вектору  $\vec{D}$ , а вектор  $\vec{H}$  — подобно вектору  $\vec{E}$ .

На рисунке 21.4 показано поведение линий вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ : при пересечении границы двух магнетиков линии вектора  $\vec{B}$  преломляются. Учитывая, что тангенсы углов падения и преломления определяются отношениями ( $\text{tg } \alpha_i = B_{i\tau}/B_{in}$ ), получаем из (21.21) и (21.25) закон преломления линий магнитной индукции

$$\boxed{\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}} \quad (21.26)$$

## 21.6 Происхождение молекулярных токов

Как известно, магнитный момент контура с током равен  $P_m = IS$ . Электрон, движущийся в атоме по круговой орбите, можно условно уподобить контуру с током и считать, что электрон образует круговой ток, сила которого  $I = e\nu$ , где  $e$  — заряд электрона,  $\nu$  — число оборотов электрона в секунду. Следовательно, магнитный момент такого контура равен

$$P_m = IS = e\nu\pi r^2, \quad (21.27)$$

где  $r$  — радиус электронной орбиты.

Произведение длины окружности  $2\pi r$  на частоту вращения  $\nu$  есть линейная скорость движения электрона на орбите  $v = 2\pi r\nu$ , откуда  $\nu = v/2\pi r$  и

$$P_m = \frac{evr}{2}. \quad (21.28)$$

Величина  $P_m$  называется **орбитальным магнитным моментом** электрона. Направление вектора  $\vec{P}_m$  образует с направлением тока (т. е. с направлением движения положительных зарядов) правовинтовую систему. Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса

$$L = m_e vr, \quad (21.29)$$

где  $m_e$  — масса электрона. Вектор  $\vec{L}$  называют **орбитальным механическим моментом** электрона. Он также образует с направлением движения электрона правовинтовую систему, но, поскольку электрон заряжен отрицательно, направления векторов  $\vec{P}_m$  и  $\vec{L}$  противоположны.

Отношение магнитного момента элементарной частицы к ее механическому моменту называется *магнитомеханическим (или гиромагнитным) отношением*. Для электрона оно равно

$$\frac{P_m}{L} = -\frac{e}{2m_e}. \quad (21.30)$$

Кроме орбитальных моментов электрон обладает собственным механическим  $L_s$  и магнитным  $P_{m,s}$  моментами, для которых магнитомеханическое отношение в два раза больше:

$$\frac{P_{m,s}}{L_s} = -\frac{e}{m_e}. \quad (21.31)$$

Собственный механический момент (спин) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент являются неотъемлемыми свойствами электрона, как его масса и заряд. Аналогичную картину имеем и для других элементарных частиц. Природа спина будет обсуждена при изучении основ квантовой механики. Отметим только, что в очень грубом приближении его можно связать с вращением частицы вокруг собственной оси.

Спин элементарных частиц оказывается целым или полуцелым кратным фундаментальной постоянной физики — приведенной *постоянной Планка*  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. В частности, для электрона  $L_s = \hbar/2$ , поэтому просто говорят, что спин электрона равен половине или одной второй<sup>1</sup>. Соответственно, собственный магнитный момент электрона равен

$$P_{m,s} = -\frac{e}{m_e} L_s = -\frac{e\hbar}{2m_e}.$$

Величину  $\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 0,927 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл называют *магнетон Бора*. Следовательно, собственный момент электрона равен одному магнетону Бора. Как показывается в квантовой механике, орбитальный механический момент может принимать значения, кратные постоянной Планка:  $L = n\hbar$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . С учетом (21.30) получаем, что наименьший отличный от нуля орбитальный магнитный момент равен  $|P_m| = e\hbar/(2m_e) = \mu_B$ . Таким образом, магнетон Бора — наименьшая единица магнитного момента.

Результирующий магнитный момент атома образуется в результате векторного сложения магнитных моментов всех элементарных частиц, содержащихся в атоме. Картина еще более усложняется при рассмотрении совокупностей молекул и атомов.

## 21.7 Диамagnetики

Опыт показывает, что в диамagnetных материалах, помещенных во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$ , возникает внутреннее поле, направленное навстречу намагничивающему полю. В атомах диамagnetных веществ результирующие магнитные моменты, как орбитальные, так и спиновые, равны нулю. Поэтому в отсутствие внешнего поля магнитный момент диамagnetного атома и всего диамagnetика

<sup>1</sup>Строго говоря,  $\hbar/2$  — не спин, а его проекция, но подобные тонкие различия мы обсудим во втором томе в главе о квантовой механике.

равен нулю. Когда диамагнитное вещество помещают во внешнее магнитное поле, то под действием этого поля каждый диамагнитный атом приобретает магнитный момент. Природа этого явления в классической теории электромагнетизма объясняется прецессией электронных орбит атомов в магнитном поле.

Пусть электрон вращается вокруг протона по круговой орбите радиусом  $r$  с угловой скоростью  $\omega_0$ . Сила кулоновского притяжения протона создает центростремительное ускорение. По второму закону Ньютона,

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \omega_0^2 r, \tag{21.32}$$

откуда получаем для угловой скорости

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}}. \tag{21.33}$$

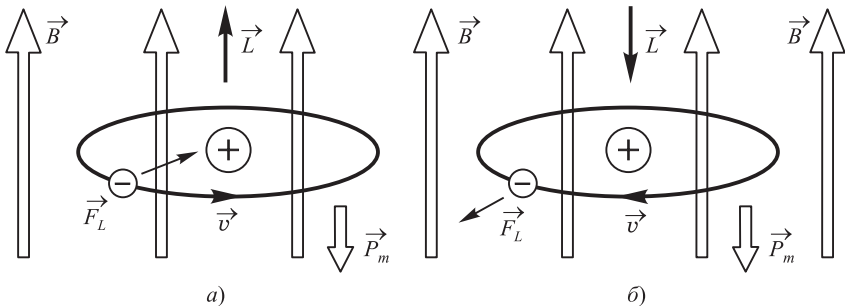
Вектор угловой скорости (и орбитального углового момента  $\vec{L} = m_e r^2 \vec{\omega}_0$ ) ортогонален плоскости орбиты, а его направление определяется по правилу буравчика. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, электрон в атоме можно уподобить круговому току, характеризуемому магнитным моментом  $\vec{P}_m$ , который из-за отрицательного заряда электрона направлен противоположно орбитальному угловому моменту  $\vec{L}$ :

$$\vec{P}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = -\frac{e\vec{\omega}_0}{2} r^2. \tag{21.34}$$

Пусть теперь наш атом помещается в магнитное поле  $\vec{B}_0$ , направленное ортогонально плоскости орбиты электрона параллельно вектору углового момента  $\vec{L}$  (рис. 21.5, а). На электрон тогда будет действовать еще и сила Лоренца, направленная по радиусу к центру орбиты и увеличивающая центростремительное ускорение. Угловая скорость вращения  $\omega$  определится из уравнения

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + evB_0 = m_e \omega^2 r. \tag{21.35}$$

Учитывая связь  $v = \omega r$  линейной скорости с угловой и выражение (21.33) для угловой скорости вращения в отсутствие магнитного поля, уравнение (21.35) можно переписать



**Рис. 21.5.** При помещении атома в магнитное поле, электрон, вращающийся вокруг ядра, меняет свою угловую скорость из-за действия силы Лоренца. Вследствие этого у атома возникает дополнительный магнитный момент  $P_m$ , всегда направленный против поля, независимо от направления вращения электрона

в виде

$$\omega^2 - 2\omega\omega_L - \omega_0^2 = 0, \quad (21.36)$$

где  $\omega_L$  — *ларморова частота*

$$\omega_L = \frac{eB_0}{2m_e}. \quad (21.37)$$

Решение получившегося квадратного уравнения тривиально:

$$\omega = \omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}. \quad (21.38)$$

Обычно  $\omega_L \ll \omega_0$ . Для численной оценки мы примем модель Бора для атома водорода, известную из школьного курса физики (впрочем, мы ее еще вспомним во втором томе нашего курса). Радиус электронной орбиты равен тогда *радиусу Бора*  $a_B = 5,3 \cdot 10^{-11}$  м. Подставляя в (21.33) значения электрического заряда и массы электрона, получаем оценку  $\omega_0 \approx 4 \cdot 10^{16}$  рад/с. Для оценки ларморовой частоты возьмем значение магнитной индукции  $B_0 = 8$  Тл, достигаемое в самых сильных сверхпроводящих магнитах Большого адронного коллайдера Европейской организации ядерных исследований (ЦЕРН) в Женеве (см. *LHC* в разделе 9.15). Получаем тогда  $\omega_L = 0,7 \cdot 10^{12}$  рад/с. Разница с  $\omega_0$  на четыре порядка позволяет упростить выражение (21.38):

$$\omega \approx \omega_0 + \omega_L. \quad (21.39)$$

Увеличение угловой скорости вращения означает увеличение магнитного момента, т. е. добавление к  $P_m$  дополнительного магнитного момента  $P'_m$ , направленного в ту же сторону, что и  $P_m$ , т. е. *против внешнего поля*  $B$ . Из формулы (21.34) следует, что величина этого момента равна

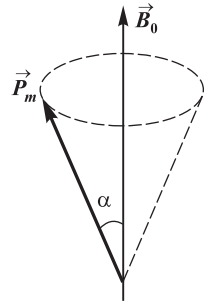
$$P'_m = -\frac{e\omega_L}{2}r^2 = -\frac{e^2B_0}{4m_e}r^2. \quad (21.40)$$

Рассмотрим теперь случай, когда орбитальный момент электрона и магнитное поле антипараллельны, т. е. направлены в противоположные стороны (рис. 21.5, б). В этом случае сила Лоренца направлена по радиусу наружу и уменьшает центростремительное ускорение, так что вместо (21.38) мы получим соотношение

$$\omega \approx \omega_0 - \omega_L. \quad (21.41)$$

Уменьшение угловой скорости вращения можно интерпретировать как появление дополнительного тока, текущего в обратном направлении к основному и создающего дополнительный магнитный момент  $P'_m$ , направленный против  $P_m$ , т. е. снова против внешнего магнитного поля.

В общем случае произвольного расположения орбиты на электрон во внешнем магнитном поле действует вращательный момент  $\vec{M} = [\vec{P}_m \times \vec{B}_0]$ , стремящийся установить орбитальный момент электрона  $\vec{P}_m$  по направлению поля  $\vec{B}_0$ . Под действием этого момента  $\vec{M}$  вектор орбитального момента электрона  $\vec{P}_m$ , перпендикулярный к плоскости электронной орбиты, прецессирует, описывая конус вокруг направления  $\vec{B}_0$  (рис. 21.6). Угол  $\alpha$  наклона  $\vec{P}_m$  к внешнему полю  $\vec{B}_0$  остается постоянным, угловая скорость прецессии равна ларморовой частоте  $\omega_L$ . Это движение сродни прецессии оси волчка в поле сил тяжести (см. раздел 5.6), где угловая скорость прецессии при определенных условиях также не зависит от угла наклона гироскопа. Для атома внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$  играет ту же роль, что сила тяжести  $m\vec{g}$  — для гироскопа.



**Рис. 21.6.** Прецессия орбитального магнитного момента электрона вокруг вектора магнитной индукции  $\vec{B}_0$  внешнего поля

Важно, что ларморова частота прецессии не зависит ни от радиуса орбиты, ни от скорости электрона и потому одинакова для всех электронов в атоме. Обращаем также внимание, что направление возникающего магнитного момента не зависит даже от знака заряда вращающейся частицы. Если рассмотреть «антиводород» (положительно заряженный позитрон, вращающийся вокруг отрицательно заряженного антипротона), то направления орбитальных угловых моментов останутся теми же, как на рисунке 21.5, но магнитные моменты сменят направления на противоположные. При наложении магнитного поля сила Лоренца также сменит знак, и это приведет к тому, что магнитные моменты, возникающие из-за прецессии, по-прежнему направлены против породившего их внешнего магнитного поля. Это является частным случаем проявления *правила Ленца*, которое рассматривается в следующей главе.

В парамагнитных атомах с собственным магнитным моментом влияние прецессии незаметно. Но прецессия становится существенной для диамagnetных атомов. Пусть в диамagnetном атоме содержится  $Z$  электронов (мы пронумеруем их индексом  $i$ ) с равным нулю полным магнитным моментом (спиновым и орбитальным) и пусть каждый из них вращается по орбите со средним квадратом расстояния до оси (параллельной магнитному полю), равным  $r_i'^2$ . Как следует из (21.40), при наложении внешнего магнитного поля этот атом приобретет магнитный момент

$$P'_m = -\frac{e^2 B_0}{4m_e} \sum_{i=1}^N r_i'^2. \quad (21.42)$$

При хаотичном расположении орбит одинаковы средние значения квадратов координат ( $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$ ), так что среднее значение квадрата расстояния электрона до какой-либо оси (пусть до оси  $z$ ) равно

$$r'^2 = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = \frac{2}{3} (\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle) = \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle,$$

где  $\langle r^2 \rangle$  — среднее значение квадрата расстояния электрона от атомного ядра. Тогда (21.42) можно записать в виде

$$P'_m = -\frac{e^2 B_0}{6m_e} \sum_{i=1}^Z \langle r_i'^2 \rangle. \quad (21.43)$$



Если концентрация атомов равна  $n$ , то намагниченность  $J = nP'_m$ , а магнитная восприимчивость  $\chi_m = \mu_0 J/B_0$  такого вещества равна

$$\chi_m = -\frac{e^2 \mu_0 n}{6m_e} \sum_{i=1}^Z r_i^2. \quad (21.44)$$

Для оценки порядка величины магнитной восприимчивости диамагнитных атомов мы заменим сумму средних квадратов расстояний до атомного ядра на квадрат радиуса Бора, а концентрацию положим равной числу Лошмидта  $n = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$  (концентрация молекул идеального газа при нормальных условиях). Получаем тогда  $\chi_m \approx 5 \cdot 10^{-10}$ . Сравним этот результат с экспериментальными данными: при нормальных условиях магнитная восприимчивость водорода  $\chi_m \approx -1,8 \cdot 10^{-10}$ , а азота  $\chi_m = -6,3 \cdot 10^{-10}$ . Применим нашу формулу к кристаллу алмаза. Масса молекулы углерода  $m_C = \mu_C/N_A = 2 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$ , плотность алмаза  $\rho \approx 3500 \text{ кг/м}^3$ , отсюда находим концентрацию атомов  $n = \rho/m_C \approx 1,8 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$ , что в  $0,7 \cdot 10^4$  раз больше числа Лошмидта. Во столько же раз оценка магнитной восприимчивости алмаза получается большей, чем для газов:  $\chi_m \approx 4,4 \cdot 10^{-6}$ . Экспериментальное значение  $\chi_m = 1,8 \cdot 10^{-6}$ .

Таким образом, *у диамагнитных веществ во внешнем магнитном поле  $\vec{B}_0$  возникает противоположное индуцированное магнитное поле  $\vec{B}'$ , которое ослабляет внешнее:  $B = B_0 - B'$ , т. е.  $\chi_m < 0$  и  $\mu < 1$* . И хотя квантовая механика внесла существенные изменения в наши представления о строении атома, классическая теория дает правильные по порядку величины оценки магнитной восприимчивости диамагнитных веществ.

## 21.8 Парамагнетики

Поведение парамагнетиков во внешнем магнитном поле определяется тем, что *молекулы парамагнитного вещества создают собственное магнитное поле, поскольку у парамагнетиков векторная сумма орбитальных и спиновых моментов электронов не равна нулю*. В отсутствие внешнего магнитного поля эти магнитные микрополя молекул тепловым движением ориентированы в пространстве хаотически (аналогично ориентации диполей в полярных диэлектриках), и поэтому суммарное собственное магнитное макрополе парамагнетика равно нулю. При помещении парамагнитного вещества во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$  магнитные моменты атомов приобретают преимущественную ориентацию вдоль поля  $\vec{B}_0$ , которая тем больше, чем больше  $B_0$ , причем эффект с увеличением температуры уменьшается. В результате во внешнем магнитном поле суммарное собственное магнитное поле парамагнетика  $\vec{B}$  отлично от нуля и направлено вдоль внешнего поля  $\vec{B}_0$ .

Следовательно, *парамагнетик, помещенный во внешнее магнитное поле, усиливает это поле:  $B = B_0 + B'$ , т. е.  $\chi_m > 0$  и  $\mu > 1$* .

Следует отметить, что диамагнитный эффект имеет место для всех веществ без исключения, в том числе и для парамагнетиков, однако величина диамагнитного эффекта существенно меньше парамагнитного, и в этом случае его можно не учитывать.

Из описанного механизма намагничивания очевидно, что диамагнитный эффект не зависит от температуры, а парамагнитный — зависит, поскольку тепловое движение атомов и молекул нарушает преимущественную ориентацию их магнитных моментов по внешнему магнитному полю. В классической теории зависимость магнитной восприимчивости  $\chi_m$  парамагнетиков от температуры рассчитывается по той же схеме, что и ориентационная поляризуемость диэлектрика (см. раздел (17.3)). Потенциальная энергия взаимодействия магнитного момента  $p_m$  атома или молекулы с внешним полем зависит от их взаимной ориентации:

$$W_m = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}_0 = -p_m B_0 \cos \theta. \quad (21.45)$$

Распределение молекул по углам дается формулой Больцмана

$$n(\theta) = C \exp(-W_m/k_B T),$$

откуда для вектора намагничивания (среднего магнитного момента единицы объема) имеем выражение, аналогичное (17.28):

$$\vec{J} = \vec{p}_m n L(\gamma_m). \quad (21.46)$$

Здесь  $L(x)$  — функция Ланжевена

$$L(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x},$$

а параметр

$$\gamma_m = \frac{p_m B_0}{k_B T}. \quad (21.47)$$

«Пограничное» значение этого параметра  $\gamma_m = 1$  дает оценку, какие температуры следует считать низкими или высокими. Магнитные моменты атомов и молекул имеют порядок магнетона Бора:  $p_m \approx \mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл, постоянная Больцмана  $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Отсюда получаем  $T/B_0 = \mu_B/k_B \approx 0,67$  К/Тл или  $B_0/T \approx 1,5$  Тл/К. При любых созданных человеком полях комнатные температуры  $T \approx 300$  К можно считать высокими ( $\gamma_m \ll 1$ ). Даже при температуре кипения азота  $T = 77,4$  К «пограничное» значение магнитной индукции  $B_0 = 77,4 \times 1,5 = 116$  Тл на порядок превосходит поля, которые умеет создавать человек, так что даже такую температуру следует считать высокой для обсуждаемого явления парамагнетизма. И лишь в области очень низких температур 1–4 К магнитные поля порядка нескольких тесла можно считать сильными. Тогда  $\gamma_m \gg 1$ , функция Ланжевена стремится к единице и мы имеем состояние насыщения ( $J = p_m n$ ) — все элементарные магнетики молекул выстроились в одном направлении вдоль поля. В слабых же полях (или, что то же самое, при высоких температурах), когда  $\gamma_m \gg 1$ , функция Ланжевена  $L(\gamma_m) \approx \gamma_m/3$  и мы получаем для намагничивания

$$J = \frac{p_m^2 n B_0}{3k_B T}. \quad (21.48)$$

Отсюда следует **закон Кюри** для магнитной восприимчивости  $\chi_m = \mu_0 J/B_0$ :

$$\chi_m = \frac{C}{T}. \quad (21.49)$$

### Постоянная Кюри

$$C = \frac{\mu_0 p_m^2 n}{3k_B} \quad (21.50)$$

зависит от характеристик вещества.

Приведем численный пример. Кислород — парамагнетик, его молекулы имеют магнитный момент  $p_m = 2,8\mu_B = 2,6 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл. Концентрация молекул при нормальных условиях дается числом Лошмидта:  $n = 2,7 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>. Магнитная постоянная  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$  Н/А<sup>2</sup>, постоянная Больцмана  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Отсюда получаем значение постоянной Кюри:  $C = 5,6 \cdot 10^{-4}$  К. При комнатной температуре  $T = 293$  К закон Кюри дает значение магнитной восприимчивости  $\chi_m = 1,9 \cdot 10^{-6}$ . Экспериментальное значение  $\chi_m = 1,5 \cdot 10^{-7}$  на порядок меньше полученной теоретической оценки. И все же это значение на несколько порядков больше, чем магнитная восприимчивость диамагнетиков, и классическая теория эту разницу улавливает. Как принято говорить у физиков, классическая модель парамагнетиков демонстрирует качественное согласие с экспериментом.

Однако этот раздел мы завершаем обескураживающим замечанием: классическая физика *принципиально* не может объяснить магнетизм — это сугубо квантовое явление. Хотя изложенные выше результаты выглядят правдоподобными и даже близки к результатам квантовой механики, существует теорема, доказанная Нильсом Бором в 1911 г. и, независимо, Хендрикой Йоганной ван Лёвен в 1919 г. в их диссертациях, что корректное применение классической статистики должно привести к нулевой намагниченности. Физическая природа этой теоремы связана с тем, что сила Лоренца не производит работы и потому распределение энергии в системе не зависит от магнитного поля. Соответственно, все результаты должны получиться такими же, как в отсутствие внешнего магнитного поля.

## 21.9 Ферромагнетизм

**Ферромагнетики** — вещества, в которых возможно возникновение и сохранение намагниченности даже в отсутствие внешнего магнитного поля. К ним относятся три переходных металла (железо, кобальт и никель), несчетное число их сплавов и шесть редкоземельных металлов группы лантаноидов (гадолиний, тербий, диспрозий, гольмий, эрбий, туллий). Как и у парамагнитных материалов, у ферромагнетиков собственное поле при намагничивании *усиливает* внешнее поле ( $\chi_m > 0$ ). Но ферромагнитные вещества обладают рядом отличительных свойств:

- магнитная проницаемость ферромагнетиков очень велика (у железа, например,  $\chi_m \approx \mu \approx 5000$ , но есть сплавы с еще большими значениями  $\chi_m \approx \mu \approx 50000$ );
- магнитная проницаемость ферромагнетика имеет, как правило, сложную зависимость от напряженности внешнего поля, т. е. зависимость  $B$  от  $H$  нелинейная;
- намагниченность ферромагнетиков имеет необратимый характер и сохраняется после снятия внешнего поля (*остаточное намагничивание*), причем зависимость  $\vec{B}$  от  $\vec{H}$  имеет специфический вид, называемый *петлей гистерезиса* (от греч. *hysteresis* — отстающий);
- намагниченность ферромагнетиков возникает и может поддерживаться даже в отсутствие внешнего магнитного поля;

- ферромагнитные свойства проявляются при температурах ниже определенного критического значения  $T_C$ , называемого *температурой Кюри*, а при  $T > T_C$  ферромагнетик превращается в парамагнетик.

## Модель Вейсса

Классическая модель ферромагнетизма, предложенная французским физиком П. Вейссом (1907), относится к классу моделей *самосогласованного поля*. С подобным подходом мы уже встретились, когда рассматривали жидкий диэлектрик (см. раздел 17.3). Вейсс предположил, что в ферромагнетике на магнитный момент атома действует не только внешнее поле  $\vec{B}_0$ , но и некое молекулярное магнитное поле<sup>2</sup>, создаваемое магнитными моментами всех других атомов образца. Вполне естественно считать, что это молекулярное поле пропорционально вектору намагниченности. Таким образом, согласно Вейссу, магнитные диполи ферромагнетика находятся в эффективном магнитном поле

$$\vec{B}_{\text{эфф}} = \vec{B} + b\vec{J}, \quad (21.51)$$

где  $b$  — коэффициент пропорциональности (*постоянная Вейсса*). Именно это поле надо подставить в аргумент  $\gamma_m$  функции Ланжевена в формулах (21.46) и (21.47) вместо поля  $B_0$ .

Далее нам придется частично использовать результаты квантовой механики. Довольно быстро стало ясно, что ферромагнетизм связан не с орбитальными магнитными моментами атомов, а с их спинами. А для спинов — свойства сугубо квантового — уж никак не годится использовать классическую статистику Больцмана. Применение же квантовой статистики (мы с ней познакомимся во втором томе курса) приводит к замене функции Ланжевена  $L(x)$  на одну из функций Бриллюэна  $L_S(x)$  в зависимости от полного спина  $S$  атома данного вещества. Функция Ланжевена соответствует пределу бесконечно большого спина ( $S \rightarrow \infty$ ). А в простейшем случае, когда спин атома определяется спином одного электрона ( $S = 1/2$ ), соответствующая функция Бриллюэна является обычным гиперболическим тангенсом:

$$L_{1/2}(x) = \text{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad (21.52)$$

Таким образом, уравнения «подправленной» модели Вейсса принимают вид:

$$J = p_m n L_{1/2}(x), \quad x = \frac{p_m B_{\text{эфф}}}{k_B T}. \quad (21.53)$$

В сильных полях функция Бриллюэна стремится к единице, и намагничивание достигает насыщения:

$$J_{\text{нас}} = p_m n. \quad (21.54)$$

Система функциональных уравнений (21.53) записывается в виде:

$$J = J_{\text{нас}} \text{th}x, \quad J = \frac{nk_B T}{J_{\text{нас}} b} x - \frac{B_0}{b}. \quad (21.55)$$

<sup>2</sup>Впервые представление о молекулярном поле, обуславливающим спонтанное намагничивание ферромагнетика, ввел в 1892 г. русский физик Б. Л. Розинг, более известный как изобретатель первой системы передачи телевизионных изображений с помощью электронно-лучевой трубки.

Легко убедиться, что в модели Вейсса намагниченность может существовать даже в отсутствие внешнего магнитного поля. Полагая  $B_0 = 0$ , получаем из (21.55):

$$J = J_{\text{нас}} \text{th} x, \quad J = \frac{nk_B T}{J_{\text{нас}} b} x. \quad (21.56)$$

При малых значениях аргумента  $\text{th} x \approx x$ , причем наклон касательной к ее графику максимален именно в этой точке. Поэтому отличное от нуля решение уравнений (21.56) существует лишь при условии

$$J_{\text{нас}} > \frac{nk_B T}{J_{\text{нас}} b}. \quad (21.57)$$

Это соотношение можно переписать как условие  $T < T_C$ , где

$$T_C = \frac{J_{\text{нас}}^2 b}{nk_B}. \quad (21.58)$$

Для упрощения записи введем безразмерные отношения  $j = J/J_{\text{нас}}$  и  $\tau = T/T_C$ . Тогда при температурах ниже критической ( $\tau < 1$ ) уравнение для относительной намагниченности  $j_0$  в отсутствие внешнего поля принимает вид:

$$j_0 = \text{th}(j_0/\tau). \quad (21.59)$$

Поведение кривой намагничивания вблизи нулевой и критической температур следует из асимптотических свойств функции Ланжевена. Вблизи  $T = 0$  аргумент гиперболического тангенса в (21.59) велик и

$$\text{th} x \approx 1 - 2e^{-2x}. \quad (21.60)$$

Тогда из (21.59) следует приближенное уравнение

$$j_0 \approx 1 - 2e^{-2/\tau}, \quad \text{или} \quad J_0 \approx J_{\text{нас}} \left(1 - 2e^{-2T_C/T}\right). \quad (21.61)$$

Наоборот, вблизи критической температуры аргумент  $x$  мал (мало намагничивание) и мы используем разложение в ряд Тейлора

$$\text{th} x \approx x - \frac{x^3}{3} + O(x^5). \quad (21.62)$$

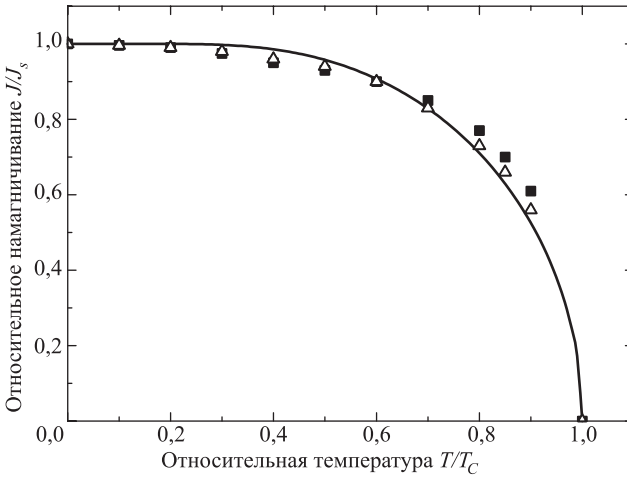
Тогда уравнение (21.59) может быть приближенно записано как

$$j_0 \approx \frac{j_0}{\tau} - \frac{j_0^3}{3\tau^3}. \quad (21.63)$$

Отсюда легко находим

$$j_0 \approx \sqrt{3(1-\tau)}, \quad \text{или} \quad J_0 \approx J_{\text{нас}} \sqrt{3 \frac{T_C - T}{T_C}}. \quad (21.64)$$

В промежуточной области трансцендентное уравнение (21.59) решается численно, зависимость намагничивания от температуры показана на рис. 21.7. Таким образом, модель Вейсса описывает два важных свойства ферромагнетика — существование критической температуры  $T_C$  (температуры Кюри) и спонтанное намагничивание образца в отсутствие внешнего магнитного поля.



**Рис. 21.7.** Намагничивание ферромагнетика может существовать даже в отсутствие внешнего магнитного поля при температуре ниже температуры Кюри  $T_C$ . Показаны экспериментальные данные для железа (черные квадратики) и никеля (светлые треугольники). Видно хорошее согласие с теоретической кривой

Обратимся теперь к уравнению (21.55), которое также запишем для безразмерных величин  $j = J/J_{\text{нас}}$  и  $\tau = T/T_C$ :

$$j = \text{th}x, \quad j = \tau x - \beta, \quad \beta = \frac{B_0}{bJ_{\text{нас}}}. \quad (21.65)$$

При высоких температурах  $T \gg T_C$  намагниченность  $J$  стремится к нулю, т. е.  $x \ll 1$ . Снова используем в (21.65) асимптотику гиперболического тангенса в нуле:

$$j \approx x, \quad j = \tau x - \beta, \quad (21.66)$$

откуда

$$j \approx \frac{\beta}{\tau - 1}, \quad \text{или} \quad J = \frac{B_0 T_C}{b(T - T_C)}. \quad (21.67)$$

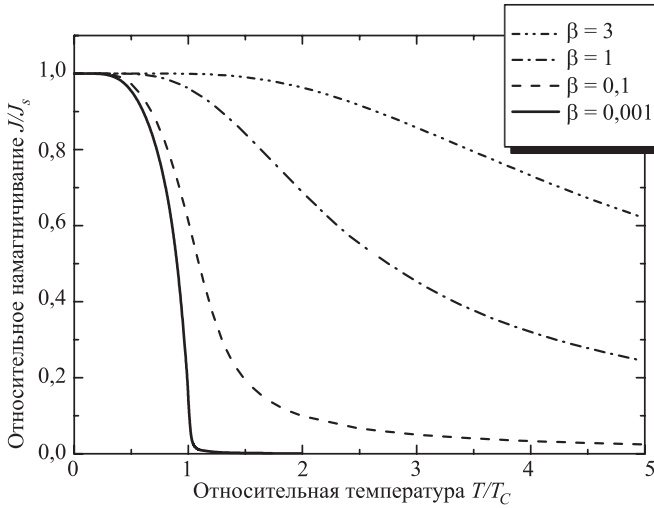
Для магнитной восприимчивости  $\chi_m = \mu_0 J/B_0$  получаем отсюда **закон Кюри—Вейсса**

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C}, \quad (21.68)$$

где постоянная  $C$  выражается через параметры модели:

$$C = \frac{\mu_0 T_C}{b}. \quad (21.69)$$

Тем самым мы убедились, что модель Вейсса описывает превращение ферромагнетика в парамагнетик при температурах выше критической. На рисунке 21.8 показана зависимость относительной намагниченности от температуры при разных значениях внешнего магнитного поля. Чем сильнее поле, тем больше элементарных магнетиков ориентируются вдоль него и тем сильнее надо нагреть



**Рис. 21.8.** Относительное намагничивание ферромагнетика как функция температуры для разных значений внешнего магнитного поля. Сплошная линия ( $\beta = 0,001$ ) демонстрирует, что даже очень слабое поле сглаживает излом кривой намагничивания вблизи температуры Кюри, который существует при  $B_0 = 0$

вещество, чтобы хаотическое тепловое движение свело намагничивание к нулю. При уменьшении поля кривая зависимости намагниченности от температуры стремится к кривой спонтанной намагниченности, показанной на рис. 21.8. Но сколь бы мало ни было внешнее поле  $B_0$ , оно сглаживает резкий переход, наблюдаемый в точке  $T = T_C$  при  $B_0 = 0$ . Такое поведение типично для так называемых *фазовых переходов второго рода*, сопровождающихся изменением упорядоченности системы.

Поскольку намагничивание зависит от магнитного поля нелинейно, магнитную восприимчивость в этом случае определяют как производную  $J$  по внешнему полю:

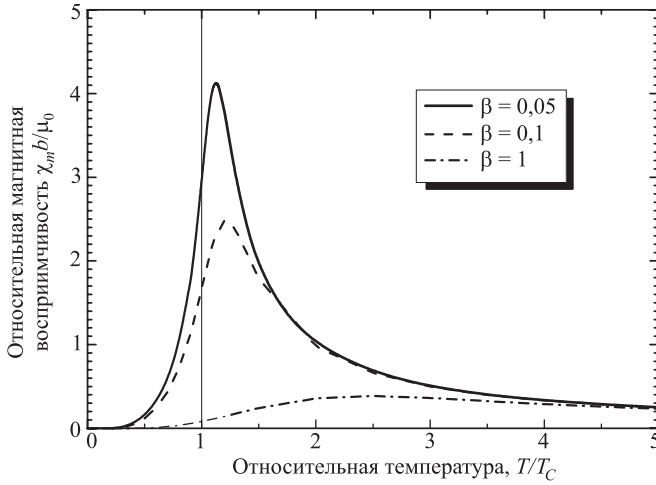
$$\chi_m = \mu_0 \frac{dJ}{dB_0}. \quad (21.70)$$

Таким образом, магнитная восприимчивость ферромагнетиков зависит как от температуры, так и от внешнего поля. Из уравнений (21.55) следует, что

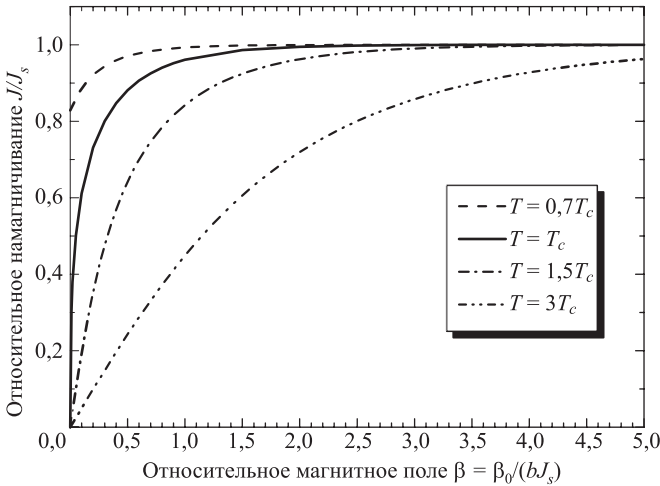
$$\chi_m = \frac{\mu_0/b}{(T/T_C)\text{ch}^2(x) - 1}, \quad x = \frac{T_C}{T} \cdot \frac{J + B_0/b}{J_{\text{нас}}}. \quad (21.71)$$

График зависимости  $\chi_m$  от температуры показан на рис. 21.9. Чем слабее внешнее поле, тем острее и выше пик, смещающийся при этом к точке  $T = T_C$ . При высоких температурах асимптотическое поведение всех кривых одинаково, так как постоянная Кюри  $C$  (21.69) не зависит от  $B_0$ .

На рисунке 21.10 показана зависимость намагничивания от внешнего поля при некоторых температурах. Обращаем внимание, что при  $T < T_C$  графики начинаются со значения спонтанного намагничивания при нулевом внешнем



**Рис. 21.9.** Зависимость магнитной восприимчивости ферромагнетика от температуры при некоторых значениях внешнего магнитного поля. Тонкая вертикальная линия соответствует температуре  $T = T_C$



**Рис. 21.10.** Зависимость намагничивания ферромагнетика от внешнего поля (кривые намагничивания) при некоторых температурах; кривые для  $T < T_C$  начинаются со значений спонтанного намагничивания при нулевом внешнем поле

поле (см. уравнение (21.59)). С ростом магнитной индукции  $B_0$  намагничивание приближается к насыщению по экспоненциальному закону, но тем медленнее, чем выше температура.



Таблица 21.1. Температура Кюри для некоторых ферромагнетиков

Элемент	Fe	Co	Ni	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm
$T_C$ , К	1044	1388	627,4	289	230	179	132	85	58

В таблице 21.1 приведены значения температуры Кюри для некоторых ферромагнетиков.

## Обменная энергия

Какова же физическая природа молекулярного поля Вейсса, что именно упорядочивает магнитные моменты структурных единиц вещества? Первой приходит в голову идея отдать эту направляющую и организующую роль взаимодействиям магнитных дипольных моментов атомов. Но магнитное взаимодействие на несколько порядков слабее электростатического и такая роль ему просто не по плечу, что понял еще сам Вейсс. Эксперименты указывали также на то, что в ферромагнетиках упорядочиваются спиновые магнитные моменты, а не орбитальные, которые будто бы игнорируются гипотетическим молекулярным полем Вейсса. Ответ был найден лишь в рамках квантовой механики через 20 лет после появления модели Вейсса, и он оказался неожиданным: никакого молекулярного поля не существует, а за упорядочение отвечает *принцип Паули*, запрещающий двум электронам находиться в одном состоянии.

Согласно квантовой механике, электроны в атомах не являются точечными частицами, вращающимися по орбитам вокруг атомного ядра. Они, скорее, могут быть представлены как облачка, размазанные в пространстве. Представим себе два покоящихся атома водорода, удаленных на большое расстояние, и пусть энергия электронов в них равна  $W_1$  и  $W_2$ , так что полная энергия системы  $W = W_1 + W_2$ . Начнем теперь сблизить наши атомы. По мере сближения в игру вступят электростатические силы взаимодействия между электронными облачками. Энергия этого взаимодействия, как оказалось, состоит из двух частей. Одна из них ( $Q$ ) выглядит как сумма энергий кулоновского взаимодействия различных частей электронных облачков. Другая зависит от квадрата полного спина электронов ( $A\vec{S}^2$ ) и классического аналога не имеет. Коэффициент  $A$  называется *обменным интегралом*, и формулы для него выглядят так, будто электроны часть времени проводят в своем облачке, а часть — в чужом, так что невозможно сказать, каким электроном создается данное облачко, какому атому «принадлежит» данный электрон. Электроны «коллективизируются», атомы как бы обмениваются электронами (или, что то же самое, электроны будто обмениваются состояниями). Но на самом деле электроны по облачкам не гуляют, ни в каких процессах обмена не участвуют, и обменная энергия — тоже часть энергии электростатического взаимодействия электронов с ядрами и друг с другом. Просто принцип Паули требует, чтобы эти облачка имели определенную симметрию в зависимости от спина всей системы.

Таким образом, полная энергия системы запишется в виде

$$W_S = W_1 + W_2 + Q - A\vec{S}^2, \quad (21.72)$$

где индекс  $S$  указывает на зависимость энергии от полного спина системы. Численное значение коэффициента  $A$  зависит от степени перекрытия электронных облачков наших электронов. Учитывая, что полный спин равен сумме спинов электронов ( $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ ), записываем полную энергию системы в виде

$$W_S = W_1 + W_2 + Q - A\vec{S}_1^2 - A\vec{S}_2^2 - 2A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2. \quad (21.73)$$

**Таблица 21.2.** Зависимость магнитных свойств кристаллической решетки некоторых элементов от отношения  $a/d$  диаметра  $a$  атома к диаметру  $d$  его незаполненной оболочки

Элемент	$a$ , нм	$d$ , нм	$a/d$	Ферромагнетик?
Марганец	0,252	0,171	1,47	Нет
Железо	0,250	0,153	1,63	Да
Кобальт	0,251	0,138	1,82	Да
Никель	0,250	0,127	1,97	Да
Платина	0,277	0,225	1,23	Нет
Гадолиний	0,335	0,108	3,10	Да

Последнее слагаемое выглядит как взаимодействие двух спинов, хотя никакого нового взаимодействия, кроме электростатического, здесь нет. В случае параллельных спинов электронов полный спин системы равен единице, если же спины электронов направлены в разные стороны, то полный спин равен нулю. Энергии этих состояний различаются:

$$\begin{aligned} W_0 &= W_1 + W + 2 + Q - AS_1^2 - AS_2^2 + 2AS_1S_2, \\ W_1 &= W_1 + W + 2 + Q - AS_1^2 - AS_2^2 - 2AS_1S_2. \end{aligned} \quad (21.74)$$

Здесь в первой строке записана энергия состояния с  $S = 0$ , а во второй — с  $S = 1$ . Поскольку система всегда выбирает состояние с низшей энергией, все зависит от знака обменного интеграла  $A$ . В природе встречаются оба случая.

Так, в атоме гелия при переходе одного из электронов в возбужденное состояние обменный интеграл оказывается положительным. Это значит, что состояние с полным спином  $S = 1$  (ортогелий) имеет меньшую энергию, чем возбужденное состояние со спином  $S = 0$  (парагелий). Получается, что в природе как будто имеются два сорта атомов гелия с разными свойствами — различаются их спектры излучения и магнитные свойства (ортогелий — парамагнетик, парагелий — диамагнетик). Наблюдаемый спектр гелия объяснил в 1926 г. В. Гейзенберг, который и выдвинул концепцию обменного взаимодействия<sup>3</sup>.

А вот при объединении двух атомов водорода в молекулу обменный интеграл отрицателен, и потому энергетически более выгодно состояние с нулевым полным спином. Электронные облачка таких «спаренных» электронов располагаются между атомными ядрами и притягивают их к себе, преодолевая кулоновское отталкивание протонов и обеспечивая тем самым стабильность молекулы. Теорию ковалентной связи на примере молекулы водорода создали в 1927 г. В. Гайтлер и Ф. Лондон.

В кристаллах возможны обе ситуации. Необходимое условие для возникновения ферромагнетизма — наличие спинового магнитного момента у атомов. Как известно, электроны в атомах располагаются на оболочках и подоболочках, которые, если пойти по таблице Менделеева, заполняются последовательно от нижней к верхней. Спин и магнитный момент заполненных подоболочек равен нулю, так что магнитный момент атома создается электронами на незаполненных подоболочках.

Но атомы сами по себе не бывают ферромагнитными, ферромагнетизм — коллективный эффект, он может появиться только у кристаллической решетки. Если расстояния между соседними атомами решетки малы (как в молекуле водорода), то обменный интеграл отрицателен и конфигурация с параллельными спинами энергетически

<sup>3</sup>Независимо от Гейзенберга теорию ферромагнетизма на основе обменного взаимодействия разработал в 1928 г. советский ученый Я. И. Френкель.

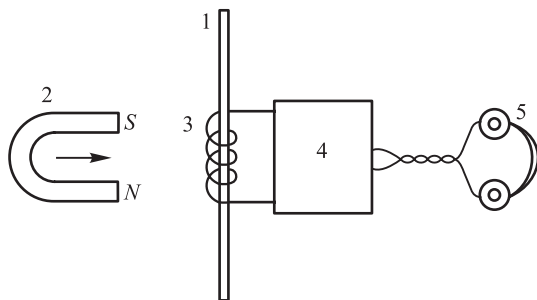
невыгодна. Но обменный интеграл становится положительным, если отношение постоянной кристаллической решетки  $a$  (т. е. диаметр атома при плотной упаковке) к среднему диаметру  $d$  незаполненной подболочки превышает 1,5. Отсюда следует, что ферромагнетизм может возникнуть у веществ, атомы которых имеют незаполненные *внутренние* подболочки. Последовательный порядок заполнения подболочек нарушается, начиная с четвертого периода, где у так называемых переходных металлов появляются незаполненные внутренние подболочки с некомпенсированными магнитными моментами. В этом периоде как раз и находятся железо, кобальт и никель, кристаллы которых проявляют ферромагнитные свойства. Однако в том же периоде таблицы Менделеева кристаллы соседей этих элементов (марганец, хром, ванадий) ферромагнетиками не являются, несмотря на то что у них также имеются незаполненные внутренние оболочки. Но у атомов этих элементов отношение  $a/d$  недостаточно велико (табл. 21.2 из книги<sup>4</sup>, где сравниваются магнитные свойства элементов четвертого и шестого периодов таблицы Менделеева). Марганец, ближайший сосед железа по таблице Менделеева, тоже имеет большой спиновый магнитный момент, но из-за малости межатомного расстояния ферромагнетиком не является. А в сплавах с сурьмой и мышьяком расстояния между атомами марганца возрастают, так что обменный интеграл становится положительным, и эти сплавы уже являются ферромагнетиками.

Однако слишком большие межатомные расстояния также препятствуют возникновению ферромагнетизма, так как обменный интеграл быстро убывает с увеличением расстояния между центрами перекрывающихся электронных облачков. Можно сказать, что существование ферромагнетизма (как и многое в нашем мире) — результат счастливой случайности.

## Домены и гистерезис

В ферромагнитных кристаллах благодаря обменному взаимодействию спиновые магнитные моменты соседних атомов выстраиваются в одном направлении, достигая насыщения при температурах, заметно меньших температуры Кюри. Почему же тогда существуют ненамагниченные образцы железа, кобальта и никеля, для которых низкими являются уже комнатные температуры (см. табл. 21.1) и где ничто не мешает спонтанному намагничиванию? Изучение строения ферромагнетиков показало, что ферромагнетик состоит из множества спонтанно намагниченных областей с линейными размерами порядка  $10^{-3}$ – $10^{-4}$  см, которые называются *доменами* (от англ. *domain* — территория, зона, область). Намагничивание каждого домена достигает насыщения, все его магнитные моменты повернуты в одну сторону и создают большой магнитный момент всего домена. Но в отсутствие внешнего поля магнитные моменты доменов расположены хаотически, так что суммарный магнитный момент образца ферромагнетика равен нулю. Между доменами с разной ориентацией моментов существует тонкая область — стенка домена толщиной около двухсот атомных слоев, где моменты постепенно поворачиваются в другую сторону. Во внешнем магнитном поле магнитные моменты доменов выстраиваются вдоль поля, во много раз усиливая его. Чем сильнее внешнее поле, тем большее число доменов ориентированы вдоль него. Домены с ориентацией магнитных моментов вдоль поля увеличиваются в объеме и «захватывают» домены с другой ориентацией моментов, ломая стенки

<sup>4</sup>Л. В. Киренский. Ферромагнетизм и его применение. М.: Учпедгиз, 1957. С. 32.

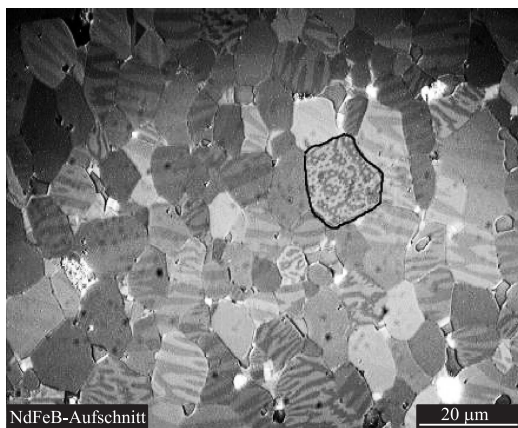


**Рис. 21.11.** Схема опыта Баркгаузена, доказавшего реальность существования доменов в ферромагнетиках

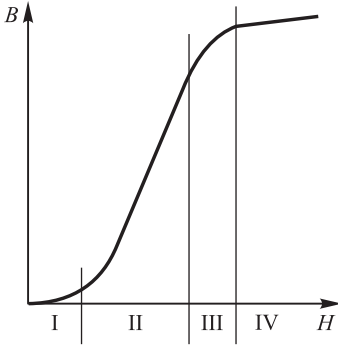
между ними. В сильных полях  $H$  порядка нескольких сотен А/м намагниченность достигает насыщения уже для всего образца. Прямым доказательством существования доменов, ранее открытых Вейссом теоретически, «на кончике пера», стал опыт немецкого физика Г. Баркгаузена (1919).

Схема опыта показана на рис. 21.11. Если к железному стержню 1 медленно приближать постоянный магнит 2, то стержень намагничивается и растет магнитный поток через намотанную на него катушку 3, сделанную из проводника. Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея (см. следующую главу), в катушке наводится ЭДС. Эта ЭДС меняется скачкообразно при каждой перестройке доменов. Если подсоединить катушку к усилителю 4, на выходе которого поставить наушники телефона или динамики, то эти скачки намагничивания («скачки Баркгаузена») проявятся в виде щелчков. По чьему-то образному выражению, мы слышим «хруст костей парамагнетика». На кривой зависимости намагничивания от внешнего поля скачки проявятся в виде небольших зубчиков. Современная техника позволяет увидеть домены в микроскопы (рис. 21.12).

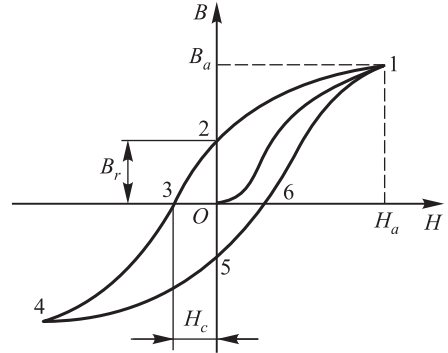
Типичный ход кривой намагничивания показан на рис. 21.13 для образца, полностью размагниченого. Энергия взаимодействия  $W_m = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -MB \cos \vartheta$  магнитного момента  $\vec{M}$  домена с внешним полем  $\vec{B}$  может меняться как за счет роста самого домена при том же намагничивании  $J$  ( $\vec{M} = \vec{J}V$ ), так и за счет поворота его магнитного момента (изменения угла  $\vartheta$ ). Домены — довольно



**Рис. 21.12.** Микрокристаллы в сплаве NdFeB, применяемом в неодимовых магнитах. Светлые и темные полосы, видимые в каждой грануле с помощью магнитооптического микроскопа Керра, — это магнитные домены. Из Википедии



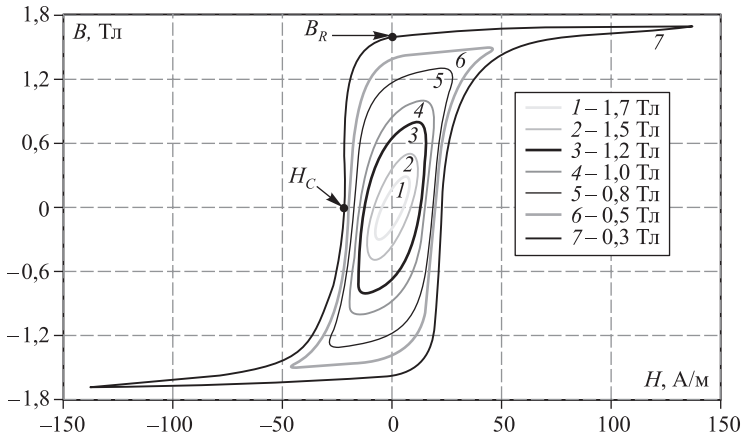
**Рис. 21.13.** Кривая намагничивания для образца, предварительно полностью размагниченного. Показаны области разных процессов, происходящих с доменами во внешнем поле напряженностью  $H$



**Рис. 21.14.** Зависимость магнитной индукции  $B$  ферромагнетика от напряженности магнитного поля  $H = B_0/\mu_0$  (петля гистерезиса). При  $H > H_a$  (вне предельной кривой намагниченности) зависимость  $B(H)$  будет линейной

крупные образования и повернуть их моменты не так просто. Поэтому в слабых полях первым делом начинает изменяться объем доменов. Энергетически более выгодные домены начинают расти за счет соседних доменов с менее выгодным расположением моментов. Сначала рост происходит путем деформации (изгибания) стенок доменов (область I). При снятии поля стенки возвращаются в прежнее равновесное положение, поэтому эта область называется областью обратимого намагничивания. В более сильных полях происходит резкое возрастание намагничивания (область II). В этой области рост объема энергетически выгодных доменов происходит уже за счет ломки стенок и «захвата территории» соседних, менее удачливых доменов с невыгодной ориентацией магнитных моментов. Именно в этой области наблюдаются скачки Баркгаузена. В сильных полях рост намагничивания происходит уже в основном за счет поворота магнитного момента доменов (область III). Наконец, образец достигает насыщения (область IV), где намагничивание уже перестает зависеть от внешнего поля, и магнитная индукция растет линейно:  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + J_{\text{нас}})$ . Во всех этих случаях расположение и изменение размеров доменов определяются условиям минимума энергии системы. Но в энергию системы помимо энергии взаимодействия магнитных моментов домена с внешним полем дает вклад и энергия доменных стенок, на энергию влияет также анизотропия кристалла (по одним направлениям намагничивание происходит легче, по другим — труднее), и даже форма образца (длинный и тонкий образец намагнитить вдоль оси легче, чем короткий и толстый). Поэтому задача расчета намагничивания кристалла весьма непростая.

При изменении напряженности  $\vec{H}$  внешнего поля зависимость  $\vec{B} = f(\vec{H})$  имеет вид, изображенный на рисунке 21.14. Это явление называется **магнитным гистерезисом**. Сначала  $H = 0$  и  $B = 0$ , затем при медленном (квазистатическом) увеличении  $H$  до некоторого значения  $H_a$  магнитная индукция образца, который не был первоначально намагничен, возрастает по кривой 0–1 до значения  $B_a$ . Начнем плавно уменьшать напряженность внешнего магнитного поля,



**Рис. 21.15.** Семейство петель гистерезиса, полученных для образца из стали при сигнале частотой 50 Гц с разными амплитудами, так что остаточное магнитное поле  $B_R$  менялось в пределах от 0,3 Тл до 1,7 Тл. Показана также точка  $H_C$  — коэрцитивная сила. График из Википедии

тогда намагничивание будет изменяться по кривой 1–2, а не по первоначальной кривой 0–1. В результате, когда напряженность внешнего поля станет равной нулю, намагничивание образца не исчезает и характеризуется величиной  $B_r$ , которая называется *остаточной индукцией*. Намагничивание имеет при этом значение  $J_r$ , называемое *остаточным намагничиванием*.

Как уже говорилось, домены — достаточно крупные образования, и тепловое движение не в состоянии разрушить остаточную индукцию. Для этого надо приложить обратное внешнее поле. Магнитная индукция становится равной нулю (точка 3 на рис. 21.14) под действием противоположно направленного поля  $H_c$ . Напряженность поля  $H_c$  называется *коэрцитивной силой*. Увеличивая противоположно направленное внешнее поле до значения  $H_a$ , мы придем в точку 4 и, снова сменив направление поля, по кривой 4–5–6–1 вернемся в точку 1. При повторении цикла при тех же максимальных значениях внешнего поля  $H_a$  мы пройдем по той же самой петле. Первоначальный участок 0–1 может быть получен лишь при полном размагничивании образца.

При увеличении амплитуды  $H_a$  меняющегося внешнего поля  $H$  площадь петля гистерезиса также увеличивается (рис. 21.15). Такие петли называют *частными петлями гистерезиса*. Но когда амплитуда приложенного внешнего поля становится больше величины поля, при котором достигается насыщение намагниченности ( $H_a > H_{\text{нас}}$ ), петля перестает меняться, и ее называют *предельной петлей гистерезиса*.

Итоги этой главы мы подведем цитатой из поэмы Джона Апдайка «Танцы твердых тел» (пер. Нины Воронель):

Ферромагнитных свойств ясна причина —  
 Непарный Электрон в них виноват:  
 Все Атомы по направлению Спины,  
 Глядящего вперед или назад,

Построены, как войско на парад,  
Во Внешнем Поле, разрушая Стены,  
Сливаются соседние Домены.  
Так создает Гармонию Вселенной  
Ничтожных Сил суммарный результат.

## Контрольные вопросы

1. Какие вещества называются магнетиками?
2. Что такое магнитная проницаемость  $\mu$  и магнитная восприимчивость  $\chi_m$  вещества?
3. Как классифицируются магнетики в зависимости от величины  $\mu$  и/или  $\chi_m$ ?
4. Дайте определение намагничивания  $\vec{J}$  вещества.
5. Что такое напряженность магнитного поля? Каков ее аналог в электростатике?
6. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$  в веществе.
7. Получите закон преломления линий напряженности магнитного поля.
8. Дайте определение орбитального магнитного момента электрона в атоме.
9. Что такое гиромагнитное отношение? Чему оно равно для орбитального и спинового моментов?
10. Объясните физические причины диамагнетизма веществ. Почему диамагнетизм не проявляется в пара- и ферромагнетиках?
11. Объясните физические причины парамагнетизма?
12. Что такое ферромагнетики? Объясните ход кривой намагниченности и явление гистерезиса.

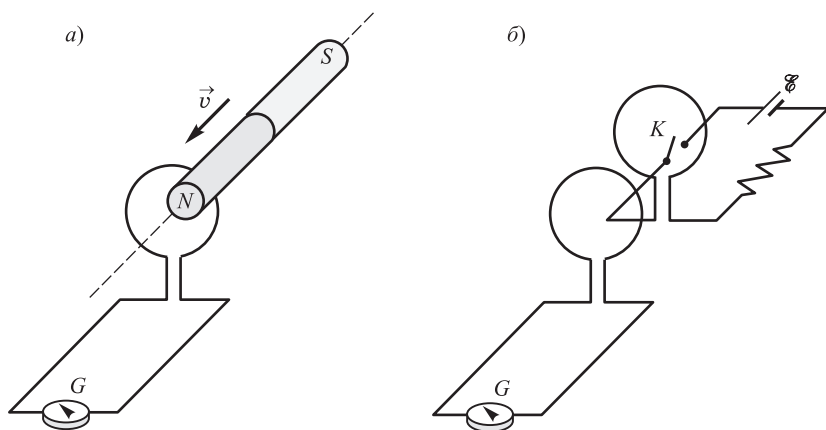
## Глава 22

# Электромагнитная индукция

Электромагнитная индукция была открыта в 1831 г. М. Фарадеем и Дж. Генри. Идея явления также лежит в симметрии между электрическими и магнитными силами. Если через виток, помещенный в магнитное поле, пропускать ток, то на виток начинает действовать момент сил, поворачивающий его. Что будет, если поворачивать виток в магнитном поле? Не возникнет ли при этом электрический ток? Как мы увидим, дело обстоит именно так. На этой основе работают все генераторы переменного тока, снабжающие нас электроэнергией.

### 22.1 Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Чтобы познакомиться поближе с явлением электромагнитной индукции, рассмотрим два опыта (рис. 22.1). На левом рисунке изображен проволочный виток, под-



**Рис. 22.1.** ЭДС индукции возникает в проволочном витке, когда *а)* к нему приближается постоянный магнит; *б)* когда меняется ток в соседнем витке



соединенный к гальванометру  $G$ . Если приближать к витку постоянный магнит, стрелка гальванометра отклонится: по витку пройдет ток. При неподвижном же магните ничего не происходит. На правом рисунке вблизи такого же витка с гальванометром помещен другой виток. Если замкнуть ключ  $K$ , то по правому витку пойдет электрический ток. В этот момент стрелка гальванометра отклонится, зарегистрировав импульс тока в левом витке. То же самое произойдет при размыкании ключа  $K$ .

В обоих случаях виток с гальванометром не был подсоединен к источнику тока. Тем не менее ток в нем появился, что свидетельствует о возникновении какой-то электродвижущей силы. Ее называют **ЭДС электромагнитной индукции**. Рассмотренные опыты приводят к выводу, что ЭДС индукции возникает, когда что-то в системе меняется.

Обратимся к одному из возможных вариантов изменений в системе — перемещению одного из ее проводников. Поскольку на проводник с током действует сила, при его перемещении будет совершаться работа. Рассмотрим устройство на рис. 22.2. Пусть отрезок проводника с током  $I$  длиной  $l$  перемещается из положения 1 в положение 2 под действием силы Ампера

$$F_A = BI l. \quad (22.1)$$

Работа поля по перемещению проводника на расстояние  $\Delta x$ , равна

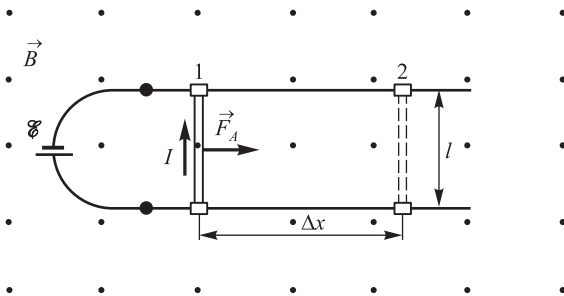
$$\Delta A = F_A \Delta x = BI l \Delta x. \quad (22.2)$$

Произведение  $l \Delta x = \Delta S$  есть элемент площади, которую пересек отрезок проводника при перемещении из положения 1 в положение 2. Таким образом,

$$\Delta A = BI \Delta S = I \Delta \Phi, \quad (22.3)$$

где  $\Delta \Phi$  — изменение потока вектора магнитной индукции через площадь, охватываемую током. Токи, текущие в проводнике, так или иначе замкнуты. Если перемещать или деформировать контур с током во внешнем магнитном поле, то полная работа определится суммированием (интегрированием) элементарных работ:

$$A_{12} = \int_1^2 I d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (22.4)$$



**Рис. 22.2.** Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Здесь  $\Phi_1$  ( $\Phi_2$ ) — значения потока магнитной индукции в начальном (конечном) состоянии контура с током (мы предполагали, что ток в контуре при деформации не меняется). Согласно (22.4), работа, совершаемая магнитным полем по перемещению в нем проводника с неизменяющимся током  $I = \text{const}$ , пропорциональна силе тока в проводнике и потоку вектора магнитной индукции сквозь поверхность, заметаемую проводником при его движении.

**Задача 22.98.** По кольцу радиусом  $R = 10$  см, сделанному из тонкого гибкого провода, течет ток  $I = 100$  А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено магнитное поле  $B = 0,1$  Тл. Направление поля совпадает с индукцией собственного магнитного поля кругового тока. Определить работу  $A$  внешних сил, которую надо затратить, чтобы превратить кольцо в квадрат. Работой против упругих сил пренебречь. Ток в кольце поддерживается постоянным. Как изменится результат, если внешнее поле будет иметь противоположное направление?

**Решение: 1-й способ.** Площадь кольца равна  $\pi R^2$ , так что поток магнитной индукции через кольцо равен  $\Phi_1 = \pi R^2 B$ . При деформации кольца в квадрат его периметр не изменится, так что сторона квадрата в четыре раза меньше длины окружности кольца:  $a = 2\pi R/4 = \pi R/2$ . Его площадь равна  $a^2 = \pi^2 R^2/4$ , а магнитный поток  $\Phi_2 = \pi^2 R^2 B/4$ . Поэтому величина работы

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = \pi R^2 IB \left( \frac{\pi}{4} - 1 \right).$$

Подставляем численные значения:

$$A = -\pi \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \times 100 \times 0,1 \times (0,1)^2 = -0,0674 \text{ Дж} = -67,4 \text{ мДж}.$$

Работа получилась отрицательной, т. е. ее надо совершить *против* сил поля. Действительно, при правовинтовом (по условию) расположении тока и внешнего поля сила Ампера стремится растянуть кольцо, т. е. увеличить его площадь. Превращая кольцо в квадрат, мы уменьшаем площадь, т. е. совершаем работу против сил поля.

Если поле имеет обратный знак, то эту работу совершит сила Ампера и она будет положительной. При решении задачи в этом случае поток внешнего поля обратен нормали к контуру, заданной направлением тока. Поэтому  $\Phi_1 = -\pi R^2 B$ ,  $\Phi_2 = -\pi^2 R^2 B/4$ , и для работы  $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$  получится та же общая формула.

**Решение: 2-й способ.** Как известно, магнитный момент витка с током равен  $P_m = IS$ , а его потенциальная энергия в магнитном поле определяется выражением  $W = -\vec{P}_m \cdot \vec{B}$ . При правовинтовом расположении тока и магнитного поля угол между векторами  $\vec{P}_m$  и  $\vec{B}$  равен нулю, так что  $W = -P_m B = -IBS$ . Разность потенциальных энергий при деформации витка равна

$$\Delta W = W_2 - W_1 = IB(S_1 - S_2) = \pi IBR^2 \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Поскольку  $\Delta W > 0$ , потенциальная энергия при деформации увеличилась, на что надо затратить работу *против* сил поля. При изменении направления поля угол между ним и магнитным моментом равен  $\pi$ , так что  $W = P_m B = IBS$ , и  $\Delta W = IB(S_2 - S_1) < 0$ .

Естественно, мы получили те же результаты, что и при первом способе решения. ■

**Задача 22.99.** Виток с током  $I = 20$  А свободно установился в однородном магнитном поле  $B = 0,016$  Тл. Радиус витка равен  $R = 5$  см. Определить работу, которую надо совершить, чтобы повернуть виток на углы  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = \pi$ ,  $\alpha_3 = 2\pi$  относительно оси, совпадающей с диаметром.

**Решение.** Если в начальном положении виток установился свободно, значит его магнитный момент параллелен вектору  $\vec{B}$ . Поток через плоскость витка положителен и равен  $\Phi_1 = \pi R^2 B$ . При повороте витка на угол  $\alpha$  поток станет равным  $\Phi_2 = \pi R^2 \vec{B} \cdot \vec{n} = \pi R^2 B \cos \alpha$ . Совершаемая при этом работа

$$A(\alpha) = I(\Phi_2 - \Phi_1) = -\pi I B R^2 (1 - \cos \alpha).$$

Отсюда находим:

$$A(\pi/2) = -\pi I B R^2 = -\pi \times 20 \times 0,016 \times (0,05)^2 = -2,51 \text{ мДж};$$

$$A(\pi) = -2\pi I B R^2 = -5,03 \text{ мДж};$$

$$A(2\pi) = 0.$$

При углах поворота  $\alpha < \pi$  работа отрицательна: контур находится в состоянии устойчивого равновесия, и надо затратить усилия против сил поля, чтобы вывести его оттуда. Но при  $\alpha > \pi$  контур уже сам стремится к положению равновесия, так что работа будет совершаться силами поля, и это частично компенсирует затраченную прежде работу. При полном обороте ( $\alpha = 2\pi$ ) работа сил поля в точности равна работе внешних сил, так что полная работа оказывается равной нулю.

Эту задачу также можно решить другим способом — в терминах потенциальной энергии взаимодействия магнитного момента с полем. ■

## 22.2 Электродвижущая сила индукции

### Закон Фарадея

Применим теперь к рассмотренной системе закон сохранения энергии. Пусть  $d\Phi$  — изменение магнитного потока при небольшом перемещении проводника за время  $dt$ . Совершенная работа равна  $dA = Id\Phi$ . За счет какого источника совершается эта работа? В окружающем пространстве ничего не изменилось. Единственная доступная энергия черпается из источника тока. Если его ЭДС равна  $\mathcal{E}$ , то за время  $dt$  источник израсходует энергию  $\mathcal{E}Idt$ . Эта энергия тратится на выделение теплоты на сопротивлении  $R$  и на работу по перемещению проводника:

$$\mathcal{E}Idt = I^2 R dt + Id\Phi. \quad (22.5)$$

Разделив обе части на  $Idt$  и перенося слагаемое с потоком в левую часть равенства, получаем:

$$\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt} = IR. \quad (22.6)$$

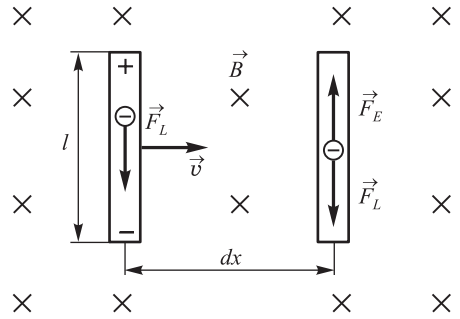
В этом уравнении нетрудно узнать закон Ома: в правой части стоит падение напряжения на сопротивлении, а в левой должна стоять сумма всех действующих в цепи ЭДС. Поэтому уравнение можно переписать в виде

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = IR, \quad (22.7)$$

где

$$\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}}. \quad (22.8)$$

**Рис. 22.3.** Возникновение на концах проводника, движущегося в магнитном поле, разности потенциалов, равной ЭДС индукции



Это соотношение есть математическая запись **закона электромагнитной индукции — закона Фарадея**.

В чем же физическая причина возникновения ЭДС индукции в данном случае? Рассмотрим почти такую же систему, но без источника тока и без замкнутой цепи. Пусть отрезок проводника длиной  $l$  движется со скоростью  $\vec{v}$  перпендикулярно вектору магнитной индукции  $\vec{B}$  (рис. 22.3). Магнитное поле однородно и линии магнитной индукции  $\vec{B}$  перпендикулярны чертежу и направлены от нас. На свободные электроны в проводнике действует сила Лоренца (направление которой определяется правилом буравчика):

$$F_L = evB, \quad (22.9)$$

где  $e$  — заряд электрона. Под влиянием силы Лоренца произойдет перемещение зарядов и на концах проводника возникнет некоторая разность потенциалов  $\Delta\varphi$ . Возникшее электрическое поле  $\vec{E}$  будет препятствовать передвижению зарядов, и их дальнейшее движение прекратится, когда сила со стороны индуцированного электрического поля  $\vec{F}_E = e\vec{E}$  будет равна по величине, но противоположна по направлению силе Лоренца  $\vec{F}_L$ .

Таким образом, получаем:

$$eE = evB \implies E = vB. \quad (22.10)$$

Так как  $\Delta\varphi = El$ ,

$$\Delta\varphi = vBl. \quad (22.11)$$

Скорость проводника  $v = dx/dt$ , а произведение  $l dx = dS$  есть площадь поверхности, «заметаемая» проводником за время  $dt$ . Получаем, следовательно,

$$\Delta\varphi = \frac{dx}{dt} Bl = \frac{BdS}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (22.12)$$

Мы пришли к той же формуле (22.8), так как разность потенциалов на концах разомкнутого проводника равняется ЭДС индукции. (Напомним, что и для обычного источника тока разность потенциалов на его клеммах при разомкнутой цепи равна ЭДС.) Поскольку сила Лоренца, действующая на отрицательно заряженные частицы (электроны), направлена на рис. 22.3 вниз, на нижнем

конце проводника скапливается избыток отрицательного заряда, а на верхнем — положительного. Следовательно, потенциал верхнего конца выше потенциала нижнего. Впрочем, о знаке ЭДС индукции мы поговорим особо.

Напомним, что ранее мы решили задачу 20.97 о самолете, летящем в вертикальном магнитном поле. Нетрудно заметить, что она идентична только что рассмотренной проблеме движения проводника. И из преобразований Лоренца мы получили тогда в точности те же результаты, что и сейчас: ср. формулы (22.10) и (20.43). Таким образом, и закон сохранения энергии, и уравнение динамики заряда в магнитном поле, и даже релятивистские преобразования Лоренца для электромагнитного поля приводят к тому же закону Фарадея — в физике (как и вообще в мире) все взаимосвязано.

Выражение (22.8) для ЭДС индукции имеет очень общий вид: в него не вошли никакие конкретные характеристики движения: скорость проводника, его длина и т. п. Все определяется только скоростью изменения потока вектора магнитной индукции. При этом совершенно неважно, каким путем мы изменяем этот поток. Можно деформировать виток, перемещать его или просто увеличивать магнитную индукцию. Именно последний вариант реализовался в опытах, которые мы обсуждали в начале этой главы. Механизм возникновения ЭДС индукции может быть разным, но конечный результат будет описываться тем же уравнением (22.8), которое носит название *закона Фарадея*.

**Задача 22.100.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,4$  Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной  $l = 10$  см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов  $U$  на концах стержня при частоте вращения  $\nu = 16$  с<sup>-1</sup>.

**Решение.** За время  $dt$  стержень повернется на угол  $d\varphi = 2\pi\nu dt$  и «заметет» сектор площадью

$$dS = \pi l^2 \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{l^2 d\varphi}{2} = \pi \nu l^2 dt.$$

Разность потенциалов равна скорости изменения потока вектора магнитной индукции через поверхность, заметаемую проводником:

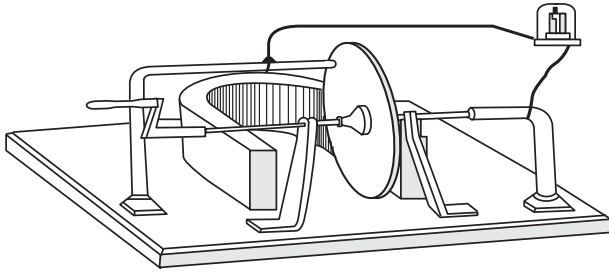
$$U = \frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} = \pi \nu l^2 B = \pi \times 16 \times 0,1^2 \times 0,4 = 0,2 \text{ В.} \quad \blacksquare$$

Решенная задача имеет прямое отношение к *диску Фарадея* — устройству, изображенному на рис. 22.4. Подобные устройства называют *униполярными электрическими машинами* — название неудачное, но бытующее по историческим причинам. Диск Фарадея преобразует в электричество механическую энергию вращения ручки. Его КПД низок, но он сыграл свою роль в истории установления законов электромагнетизма. А возможно, что диску Фарадея еще найдется применение: по сообщениям в Интернете, в Австралии в 1989 г. действовал униполярный генератор, вырабатывавший ток 1,5 МА при напряжении 800 В.

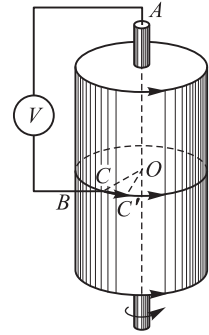
При вращении за ручку металлического диска радиусом  $R$ , помещенного между полюсами подковообразного постоянного магнита, между его центром и ободом создается разность потенциалов  $U$ . Его величину легко найти с помощью выражения (19.5) для полной силы Лоренца

$$\vec{F}_L = e \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

При разомкнутой цепи ток через диск не идет, следовательно полная сила Лоренца, действующая на электроны в металле, равна нулю, откуда получаем для электрического



**Рис. 22.4.** Диск Фарадея. Фрагмент старинной гра-  
вюры 1852 г. с изображением различных приборов из  
лаборатории М. Фарадея



**Рис. 22.5.** Во вращающемся магните создается раз-  
ность потенциалов между  
осью и поверхностью

поля внутри диска выражение

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}. \quad (22.13)$$

При вращении диска с угловой скоростью  $\omega$  линейная скорость электронов, находящихся на расстоянии  $r$  от центра, направлена по касательной к траекториям точек диска и равна  $v = \omega r$ . Она ортогональна вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ , так что сила Лоренца, действующая на электрон, направлена по радиусу и равна  $F_L = e\omega r B$ . Отсюда находим напряженность электрического поля:

$$E(r) = \omega r B. \quad (22.14)$$

В то же время, радиальное электрическое поле можно найти как градиент потенциала ( $E = d\varphi/dr$ ), откуда получаем для разности потенциалов между центром диска Фарадея и его ободом

$$U = \int_0^R E(r) dr = \frac{1}{2} \omega R^2 B = \pi \nu R^2 B, \quad (22.15)$$

где угловая скорость выражена через частоту вращения ( $\omega = 2\pi\nu$ ). Мы получили другим путем ту же самую формулу, что и в задаче о вращающемся металлическом стержне, что не удивительно.

Удивительно другое: при вращении постоянного цилиндрического магнита вокруг собственной оси (рис. 22.5) между его осью  $A$  и поверхностью  $B$  также возникает разность потенциалов. Явление так называемой *униполярной индукции* — возникновение ЭДС в намагниченном проводящем теле, движущемся не вдоль оси намагничивания, — последовательно объясняется лишь специальной теорией относительности. Пусть магнит движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $V$ . В связанной с ним системе отсчета он создает только магнитное поле  $\vec{B}'$ , электрического поля  $\vec{E}'$  в этой системе отсчета вовсе нет. В лабораторной же системе отсчета, согласно преобразованиям Лоренца, движущийся магнит создает как магнитное, так и электрическое поле. При небольших скоростях магнита созданное им магнитное поле не меняется ( $\vec{B} = \vec{B}'$ ), а электрическое дается выражением  $\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B}'$ . Из соотношения (22.13) следует, что аналогичное электрическое поле возникает при вращении диска Фарадея в постоянном магнитном поле, только тогда формула для электрического поля была получена из

силы Лоренца. Дальнейший расчет дословно повторяет уже выполненный для диска Фарадея и приводит к тому же результату.

При вращении диска Фарадея вместе с закрепленным на нем магнитом тоже возникает разность потенциалов — так называемый *парадокс Фарадея*. Этот результат, инстинктивно отвергаемый так называемым здравым смыслом (ибо диск относительно магнита покоится), объясняется специальной теорией относительности. Эти примеры еще раз доказывают связь магнетизма с релятивистской физикой или, говоря более общо, демонстрируют, насколько тесно все переплетено и взаимосвязано в науке.

Нобелевский лауреат И. Е. Тамм пишет: «В прошлом веке долго шла оживленная дискуссия по вопросу об униполярной индукции, связанная с попытками истолковать это явление в том смысле, что линии магнитного поля, возбуждаемого магнитом, вращаются вместе с магнитом вокруг его оси. В движении силовых линий, пересекающих неподвижный проводник  $AVB$ , и усматривалась причина возникновения в этом проводнике электродвижущих сил индукции. Нечего и говорить, что такая интерпретация не выдерживает никакой критики: силовые линии являются лишь вспомогательным понятием, служащим для описания поля, а не какими-либо материальными образованиями, отдельные элементы которых можно было бы индивидуализировать, связывать их с определенными источниками поля (невозможность чего особенно ясна, например, в случае наложения полей двух магнитов — подвижного и неподвижного), следить за их перемещением в пространстве и т. д.»<sup>1</sup>

Остается добавить, что в наше время Интернет дал дополнительные возможности для продолжения этих дискуссий. Униполярная индукция частенько становилась (и продолжает становиться) предметом всевозможных спекуляций о возможности построить вечный двигатель, получить даровую энергию в количестве, большем чем затраченная, и т. п.

## Потокоцепление

Закон Фарадея применим не только к отдельному контуру или витку, но и к катушке, которую можно рассматривать как  $N$  витков, соединенных последовательно. В этом случае суммарная ЭДС будет в  $N$  раз больше, чем ЭДС отдельного витка, т. е.

$$\mathcal{E}_i = - \sum_i \frac{d\Phi_i}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt}, \quad (22.16)$$

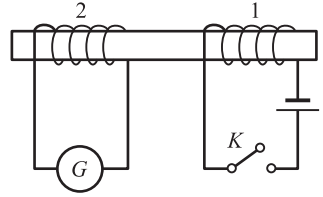
где величина  $\Psi = \sum_i \Phi_i = N\Phi$  называется *потокоцеплением*, или *полным магнитным потоком* ( $\Psi$  измеряется в тех же единицах, что и  $\Phi$ , т. е. в веберах).

**Задача 22.101.** Магнитная индукция поля между полюсами магнита генератора равна  $B = 0,8$  Тл. Ротор имеет  $N = 100$  витков площадью  $S = 400$  см<sup>2</sup>. Определить частоту вращения якоря, если максимальная ЭДС индукции равна  $\mathcal{E}_{i,\max} = 200$  В.

**Решение.** Угол между магнитным полем и нормалью к плоскости витков изменяется по закону  $\alpha = 2\pi\nu t$ . Полный магнитный поток через катушку в момент времени  $t$  равен  $\Psi = NBS \cos \alpha = NBS \cos(2\pi\nu t)$ . Дифференцируя поток по времени, получаем:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Psi}{dt} = 2\pi\nu NBS \sin(2\pi\nu t).$$

<sup>1</sup>И. Е. Тамм. «Основы теории электричества». 8-е изд. М.: Наука, 1966. С. 550.



**Рис. 22.6.** Железный сердечник как магнитопровод между двумя катушками

Максимальное значение синуса равно единице, следовательно максимальное значение ЭДС индукции равно

$$\mathcal{E}_{i,\max} = 2\pi\nu NBS,$$

откуда

$$\nu = \frac{\mathcal{E}_{i,\max}}{2\pi NBS} = \frac{200}{2\pi \times 100 \times 0,8 \times 400 \cdot 10^{-4}} = 9,95 \text{ с}^{-1}. \blacksquare$$

ЭДС индукции возникает не только при перемещении замкнутого контура в магнитном поле или перемещении магнита относительно неподвижного контура. Пусть имеются две катушки с общим железным сердечником, выполняющим функцию магнитопровода (рис. 22.6). При разомкнутой цепи магнитный поток в системе равен нулю. При замыкании ключа  $K$  через катушку 1 пойдет ток, который создаст магнитное поле, так что катушка 2 будет пронизываться магнитным потоком  $\Phi$ . Поэтому при замыкании ключа за время  $\Delta t$  нарастания тока до стационарного значения поток через катушку 2 меняется на величину  $\Delta\Phi = \Phi - 0 = \Phi$ . Соответственно, в ней возникает ЭДС  $\mathcal{E}_i = -N\Delta\Phi/\Delta t$  ( $N$  — число витков в катушке 2) и идет индукционный ток, который регистрирует гальванометр  $G$ .

Когда возрастание тока в катушке 1 прекратится, поток магнитной индукции станет постоянным и ЭДС будет равна нулю. Ток в катушке 2 также перестанет идти, и стрелка гальванометра вернется в исходное положение. Такая же картина будет наблюдаться и при размыкании цепи катушки 1, только стрелка гальванометра отклонится в другую сторону, что свидетельствует об изменении направления тока в катушке 2.

Если через катушку 1 пропускать переменный ток, то по цепи катушки 2 пойдет переменный ток той же частоты. Этот принцип широко используется в трансформаторной технике.

### Заряд, протекающий в контуре при изменении магнитного потока

Пусть контур имеет сопротивление  $R$  и пусть магнитный поток через него меняется по какому-то закону. Возникающая в контуре ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt$  вызывает в контуре ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Заряд  $dq$ , протекший в контуре за время  $dt$ , связан с током:  $dq = Idt = -d\Phi/R$ . Интегрируя, получаем для заряда  $Q$ , протекшего по контуру при изменении



потока:

$$Q = \frac{|\Delta\Phi|}{R}$$

(мы используем модуль изменения потока, так как направление перетекания заряда нам сейчас не важно). Отсюда следует связь единицы измерения магнитного потока с зарядом и сопротивлением:  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Ом} = 1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{Ом} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$ .

**Задача 22.102.** Проволочное кольцо радиусом  $r = 10$  см лежит на столе. Какой заряд  $Q$  протечет по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую. Сопротивление кольца  $R = 3$  Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна  $B_n = 50$  мкТл.

**Решение.** Начальный поток магнитной индукции через кольцо равен  $\Phi_1 = \pi r^2 B_n$ . После переворачивания кольца величина потока будет той же, но силовые линии входят теперь с другой стороны кольца:  $\Phi_2 = -\Phi_1 = -\pi r^2 B_n$ . Искомый заряд равен

$$Q = \frac{|\Phi_1 - \Phi_2|}{R} = \frac{2\pi r^2 B_n}{R} = \frac{2\pi \times 0,1^2 \times 50 \cdot 10^{-6}}{3} = 1,05 \text{ мкКл.} \blacksquare$$

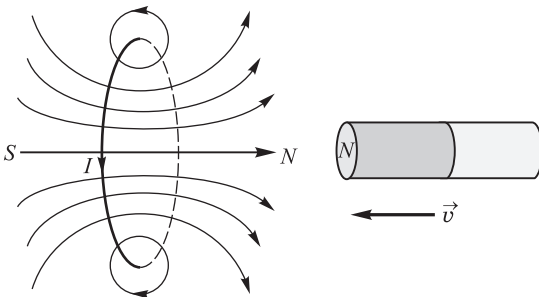
## Правило Ленца

В 1833 г. Э. Х. Ленц сформулировал правило:

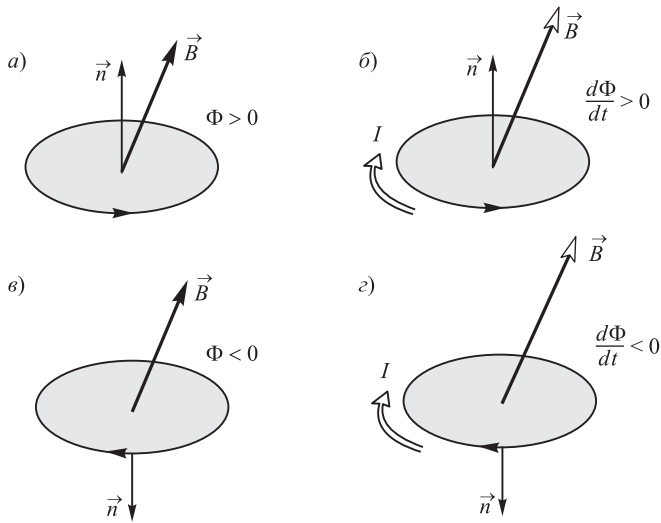
♦ *индукционный ток всегда имеет такое направление, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, пронизывающего контур.* ♦

Физически **правило Ленца** связано с законом сохранения энергии, как мы убедились при выводе закона Фарадея.

Рассматривая рисунок 22.3, мы видели, что избыточный положительный заряд накапливался на верхнем конце проводника. Следовательно, в то короткое время, пока движение зарядов в проводнике не прекратилось, индукционный ток тек снизу вверх. По правилу буравчика (поворот ручки от направления тока к направлению поля), сила Ампера была направлена налево, препятствуя движению проводника направо. В опыте, когда постоянный магнит приближается к витку, индуцированный ток также создает противодействующее магнитное поле (рис. 22.7).



**Рис. 22.7.** При приближении постоянного магнита к проволочному витку в последнем возникает индукционный ток  $I$ , направление которого таково, что порождаемое им собственное магнитное поле препятствует перемещению магнита



**Рис. 22.8.** Иллюстрация применения правила Ленца: изменение направления обхода контура не меняет знака ЭДС индукции в законе Фарадея

Математически правило Ленца отображается знаком минус в уравнении (22.8) закона Фарадея. Обсудим подробнее эту связь. Здесь могут возникнуть трудности с определением знака потока вектора магнитной индукции. Когда мы имели дело с замкнутыми поверхностями в электростатике, положительное направление задавалось внешней нормалью. Когда незамкнутая поверхность «натянута» на контур с *уже текущим* током, направление тока задает положительное направление нормали по правилу буравчика. С этим мы познакомились уже при решении задач о нахождении работы по деформированию контура. Но как быть в случае использования закона Фарадея, когда поверхность не замкнута, а направление тока нам неизвестно и мы только хотим его определить?

Рассмотрим рисунок 22.8. На нем показан контур, пронизываемый линиями магнитной индукции внешнего поля  $\vec{B}$ . Выберем положительное направление обхода контура против часовой стрелки (верхний ряд). При постоянном магнитном поле, указанном выборе положительного направления обхода контура и остром угле между нормалью  $\vec{n}$  к контуру и вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  магнитный поток через контур положителен:  $\Phi > 0$  (а). Если магнитное поле увеличивается, то положительный поток через контур также растет, и потому  $d\Phi/dt > 0$  (б). Из закона Фарадея следует тогда, что ЭДС индукции и, следовательно, индукционный ток отрицательны. Это значит, что ток течет в обратном направлении по отношению к выбранному пути обхода контура, т. е. по часовой стрелке.

Выберем теперь иное положительное направление обхода контура — по часовой стрелке (нижний ряд на рис. 22.8). Поток магнитного поля отрицателен, потому что угол между  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$  — тупой, так что его косинус отрицателен (в).

При увеличении поля абсолютная величина потока растет, но он отрицателен, следовательно  $d\Phi/dt < 0$  (з). Из закона Фарадея следует тогда, что ЭДС и индукционный ток положительны. Это значит, что направление тока совпадает с выбранным направлением обхода контура, т. е. ток течет по часовой стрелке.

Мы показали, что направление индукционного тока *не зависит* от выбора положительного направления обхода контура. В обоих рассмотренных случаях индукционный ток тек одинаково, и его направление можно определить по правилу Ленца (ср. с рис. 22.7).

Индукционные токи возникают не только в проволочных витках, но и в толще массивных проводников. В этом случае их называют *вихревыми токами*, или *токами Фуко*. Из-за малого сопротивления проводников они могут достигать большой силы. По правилу Ленца, вихревые токи также действуют против причины, их вызывающей. На этом основана идея электромагнитных демпферов, успокаивающих колеблющиеся части приборов (стрелки гальванометров и т. п.). На подвижной части прибора укрепляется металлическая полоска, находящаяся в поле сильного магнита. При движении системы токи Фуко тормозят ее, но они отсутствуют при покоящейся стрелке и не препятствуют ее установлению на нужном значении (в отличие от сил трения). Тепловое действие токов Фуко используется в индукционных печах при плавке металла или приготовлении пицци. Такая печь в сущности является большой катушкой, питаемой высокочастотным током большой силы. Катушка создает переменный магнитный поток через помещенный в печь образец, а возникающие токи Фуко разогревают последний.

## 22.3 Явление самоиндукции

### Индуктивность

Рассмотрим катушку с током  $I$ . Этот ток создает собственное поле, пронизывающее все витки катушки. Это поле, как следует из закона Био—Савара—Лапласа, пропорционально силе тока:  $B \sim I$ . Очевидно, что полный магнитный поток через все витки катушки (потокосцепление) пропорционален, как и магнитный поток через каждый виток, силе тока в катушке:  $\Psi \sim I$ . Введем коэффициент пропорциональности  $L$ :

$$\boxed{\Psi = LI.} \quad (22.17)$$

Этот коэффициент  $L$  называется *индуктивностью* (катушки или контура). Он определяется формой и размерами контура, а также свойствами окружающей среды. Единица измерения индуктивности  $L$  в СИ следует из определения:

$$[L] = \frac{[\Psi]}{[I]} = \frac{1 \text{ Вб}}{1 \text{ А}} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot \text{Ом}}{\text{Кл}/\text{с}} = 1 \text{ Ом} \cdot \text{с}.$$

Эта единица получила название генри (Гн).

Явление самоиндукции вызывает токи замыкания и размыкания. Собственное магнитное поле в цепи постоянного тока изменяется в моменты замыкания или

размыкания цепи. Это означает, что в такие моменты в цепи должна возникать ЭДС самоиндукции. Направление токов самоиндукции следует из правила Ленца. При замыкании цепи ЭДС самоиндукции вызывает ток, препятствующий увеличению основного тока в цепи, а при размыкании ток самоиндукции пытается поддержать основной ток.

Выведем формулу для ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ . Для этого надо продифференцировать потокосцепление по времени:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -\left(L\frac{dI}{dt} + \frac{dL}{dt}I\right). \quad (22.18)$$

Если контур не меняет свою геометрическую конфигурацию, то индуктивность прямо от времени не зависит. Но если контур помещен в среду, то на его индуктивность будут влиять магнитные свойства среды и тогда индуктивность может, вообще говоря, зависеть от тока, т. е.  $L = L(I)$  и тогда

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dI} \frac{dI}{dt}.$$

Подставляя это выражение в (22.18), имеем для неподвижного контура в среде:

$$\mathcal{E}_s = -\left(L + \frac{dL}{dI}\right) \frac{dI}{dt}. \quad (22.19)$$

Наконец, если индуктивность не зависит и от тока, получаем

$$\boxed{\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}}. \quad (22.20)$$

ЭДС самоиндукции в цепи прямо пропорциональна скорости изменения силы тока в этой цепи.

### Индуктивность соленоида

Будем считать катушку длинной, а магнитное поле внутри нее — однородным. Пропустим через такой соленоид ток  $I$ . Тогда магнитная индукция внутри соленоида равна, как мы знаем,  $B = \mu_0 \mu n I$ , где  $\mu$  — магнитная проницаемость сердечника, а  $n$  — число витков на единицу длины. Полное число витков в катушке равно  $N = nl$ , где  $l$  — ее длина. Пусть  $S$  — площадь поперечного сечения соленоида. По определению потокосцепление равно

$$\Psi = N\Phi = NBS = N\mu_0 \mu n IS = \mu_0 \mu n^2 IV, \quad (22.21)$$

где  $V$  — объем соленоида:  $V = Sl$ . Согласно определению индуктивности (22.17) получаем для индуктивности соленоида:

$$\boxed{L = \mu_0 \mu n^2 V}. \quad (22.22)$$

### Токи замыкания и размыкания

При замыкании или размыкании цепи (т. е. в случаях, когда ток в цепи меняется по величине) в ней вследствие явления самоиндукции возникают дополнительные токи, которые, по правилу Ленца, всегда направлены так, чтобы воспрепятствовать причине их вызывающей, т. е. чтобы воспрепятствовать изменению основного тока в цепи. Следовательно, при замыкании цепи ЭДС самоиндукции будет замедлять скорость нарастания тока, а при размыкании, напротив, замедлять скорость уменьшения тока в ней.

Рассмотрим цепь, состоящую из резистора, катушки индуктивности и источника тока (рис. 22.9, *a*). Будем считать, что в сопротивление  $R$  уже включены соединенные с ним последовательно внутреннее сопротивление источника и сопротивление катушки. Ясно, что при постоянном токе его сила будет определяться по закону Ома  $I = \mathcal{E}/R$ . При разомкнутом ключе ток не идет. Что будет, если ключ замкнуть, перебросив его из положения 1 в положение 2?

Обозначим через  $i$  мгновенное значение силы тока в цепи ( $i$  будет функцией времени). В каждый данный момент времени также справедлив закон Ома:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_s = iR, \quad (22.23)$$

где мы учли наличие в цепи двух ЭДС: источника тока и самоиндукции (ЭДС самоиндукции возникает в катушке при изменении тока через нее). Подставим сюда выражение (22.20), предполагая, что индуктивность не зависит от тока. Получаем в результате дифференциальное уравнение для тока в цепи:

$$L \frac{di}{dt} + iR = \mathcal{E}. \quad (22.24)$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$L \int \frac{di}{\mathcal{E} - iR} = \int dt \implies -\frac{L}{R} \ln(\mathcal{E} - iR) = t + \text{const.}$$

Отсюда следует общее решение уравнения (22.24):

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (22.25)$$

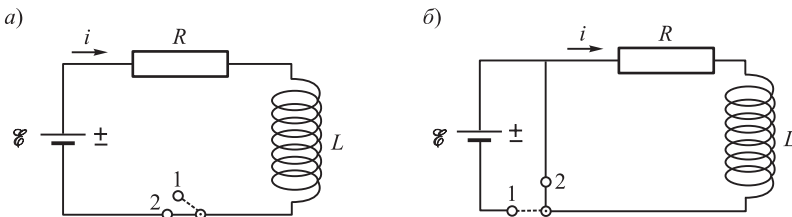


Рис. 22.9. Токи замыкания (*a*) и размыкания (*b*) в цепи с индуктивностью

Постоянную интегрирования (const) определяем из начального условия, что в момент времени  $t = 0$  (замыкание ключа) тока в цепи еще не было:  $i(0) = 0$ . Тогда  $\text{const} = \mathcal{E}/R$ , и окончательное решение для *тока замыкания в цепи с индуктивностью  $L$*  имеет вид:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (22.26)$$

Величина  $\tau = L/R$  имеет размерность времени и определяет характерный временной масштаб явления. Сначала ток растет от нулевого значения линейно, затем скорость роста начинает уменьшаться и ток стремится к своему предельному значению  $i(\infty) = \mathcal{E}/R$ , равному току в этой же цепи в отсутствие индуктивности. Практически предельное значение тока достигается за времена порядка  $(3-5)\tau$ .

Рассмотрим теперь рис. 22.9,б. Сначала ключ находился в положении 1, и в цепи шел ток  $I = \mathcal{E}/R$ . При перебрасывании ключа в положение 2 источник тока отключается от цепи, и ток  $i$  начинает уменьшаться. Закон Ома для замкнутого участка цепи имеет теперь вид:

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0. \quad (22.27)$$

В отличие от (22.24) в разомкнутой цепи больше нет ЭДС  $\mathcal{E}$  и действует только ЭДС самоиндукции. Уравнение (22.27) интегрируется еще легче:

$$i(t) = \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (22.28)$$

Начальный ток в цепи равен  $i(0) = \mathcal{E}/R$ , так что имеем окончательно для *тока размыкания цепи с индуктивностью  $L$* :

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (22.29)$$

**Задача 22.103.** К источнику с внутренним сопротивлением  $r = 2$  Ом подключают катушку индуктивностью  $L = 0,5$  Гн и сопротивлением  $r_s = 8$  Ом. Найти время  $T$ , в течение которого после замыкания цепи ток в катушке достигнет значения, отличающегося от максимального на  $\eta = 1\%$ .

**Решение.** В этой задаче полное сопротивление цепи  $R = r + r_s$ . Согласно (22.26), ток в момент времени  $T$  равен

$$i(T) = i_{\max} \left(1 - e^{-\frac{r+r_s}{L}T}\right).$$

По условию задачи,

$$\eta = \frac{i_{\max} - i(T)}{i_{\max}} = 1 - \frac{i(T)}{i_{\max}} = e^{-\frac{r+r_s}{L}T},$$

откуда

$$T = \frac{L}{r + r_s} \ln \left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{0,5}{2 + 8} \ln \left(\frac{1}{0,01}\right) = 0,23 \text{ с. } \blacksquare$$

## 22.4 Энергия магнитного поля

Обратимся снова к процессу замыкания цепи на рис. 22.9,а. Умножая правую и левую части уравнения (22.24) на  $idt$ , получим:

$$\mathcal{E}idt = i^2 Rdt + iLdi. \quad (22.30)$$

Левая часть уравнения (22.30) выражает работу, совершаемую источником тока за время  $dt$ . В правой части первое слагаемое есть величина работы, расходуемой на выделение джоулевой теплоты в проводнике. Ясно, что перед нами — уравнение закона сохранения энергии в рассматриваемой цепи. Каков же смысл второго слагаемого? Оно связано с катушкой, о чем свидетельствует множитель  $L$ , и представляет собой работу, затраченную на преодоление противодействия ЭДС самоиндукции. На что же расходуется эта работа? В процессе замыкания цепи в катушке создается магнитное поле. Значит, указанная работа аккумулируется именно в катушке как запасенная в ней энергия магнитного поля. Ток возрастает от нуля до некоторого установившегося значения  $I$ . Поэтому полная энергия поля в катушке равна

$$W = L \int_0^I idi = \frac{LI^2}{2}. \quad (22.31)$$

Поскольку  $LI = \Psi$ , этот же результат можно записать в виде:

$$W = \frac{\Psi I}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}. \quad (22.32)$$

Эти формулы очень похожи на выражения для энергии конденсатора как функции его заряда или разности потенциалов на обкладках. Мы помним, что их можно привести к виду, где явно выделен объем конденсатора. Это позволило нам связать плотность энергии электрического поля с его напряженностью. Выполним аналогичную программу и для магнитного поля.

Индуктивность соленоида дается выражением (22.22):  $L = \mu_0 \mu n^2 V$ . Магнитная индукция в соленоиде определяется по формуле (20.20):  $B = \mu_0 \mu n I$ . Выразим отсюда плотность числа витков в соленоиде через магнитное поле в нем в формулу (22.21) для индуктивности соленоида:

$$L = \mu_0 \mu \left( \frac{B}{\mu_0 \mu I} \right)^2 V = \frac{B^2}{\mu_0 \mu I^2} V.$$

Подставим это выражение в (22.31) для энергии магнитного поля в катушке:

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V. \quad (22.33)$$

Мы достигли своей цели: параметры соленоида, с которого мы начали, не присутствуют в этой формуле. Мы выразили все величины через магнитную

индукцию поля, и энергия в катушке оказалась пропорциональной ее объему. Отсюда следует выражение для плотности энергии магнитного поля:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}. \quad (22.34)$$

Вспоминая связь напряженности магнитного поля с магнитной индукцией  $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$ , находим эквивалентные представления для *плотности энергии магнитного поля*:

$$w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}. \quad (22.35)$$

Для магнитного поля в вакууме следует положить во всех этих формулах  $\mu = 1$ . Нетрудно заметить сходство (22.35) с аналогичными формулами (17.55), (17.56) для электрического поля.

**Задача 22.104.** Сравнить энергии, содержащиеся в объеме  $V = 1$  л, если он пронизан: 1) однородным электрическим полем с напряженностью  $E = 100$  кВ/м; 2) однородным магнитным полем с индукцией  $B = 1$  Тл.

**Решение.** Энергия электрического поля равна:

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \times (10^5)^2}{2} \times 10^{-3} = 4,43 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} = 44,3 \text{ мкДж}.$$

Энергия магнитного поля равна:

$$W_B = \frac{B^2}{2\mu_0} V = \frac{1^2}{2 \times 4\pi \cdot 10^{-7}} \times 10^{-3} = 397,9 \text{ Дж}.$$

Оба указанных поля считаются достаточно сильными, но могут быть созданы без особых проблем. Задача демонстрирует, что практически выгоднее накапливать энергию в магнитном поле: в данном примере отношение энергий равно:

$$\frac{W_B}{W_E} = 9 \cdot 10^6. \quad \blacksquare$$

## 22.5 Электромагнитная пушка — рельсотрон

Впервые проект электромагнитной пушки был предложен во Франции в 1918 г. Принципиальная схема рельсотрона показана на рисунке 22.2, с помощью которого мы рассматривали движение проводника в магнитном поле. В проекте пушки на проводящих «рельсах» использовался проводящий снаряд, и вся установка помещалась в магнитное поле. При пропускании тока по «рельсам» снаряд-проводник ускорялся силой Ампера. Установки такого рода по их принципу действия можно отнести к униполярным электрическим машинам (моторам), обсуждавшимся в разделе 22.2 в конце параграфа о законе Фарадея.

В конце Второй мировой войны серьезный рабочий проект электромагнитной пушки для противовоздушной обороны был разработан в Германии. В нем также использовалось внешнее постоянное магнитное поле. Военными было выдано даже техническое задание, согласно которому дульная скорость снаряда должна была достигать 2000 м/с.



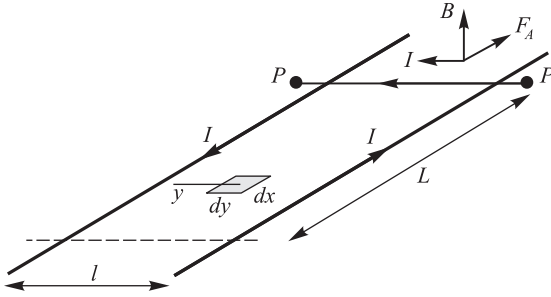


Рис. 22.10. Принцип действия рельсотрона

Батарея из шести пушек, установленных на стандартных лафетах для зениток, должна была производить 12 выстрелов в минуту. Но это орудие не было построено. После войны документация попала к американцам, была изучена, и в своем отчете эксперты в 1947 г. сделали пессимистический вывод, что принципиально идея осуществима, но для функционирования одного орудия нужны источники электроэнергии, способные осветить половину Чикаго.

В 1962 г. в Австралии для научных целей ускорения микрочастиц использовалась электромагнитная пушка, питавшаяся от мощного униполярного генератора, выдававшего короткие импульсы тока большой силы порядка мегаампер.

Наконец, в 2008 г. военно-морской флот США провел испытания электромагнитной пушки, которая ускорила снаряд массой 3,2 кг до скорости около 2,4 км/с (что в семь раз превышает скорость звука). На английском это оружие называется *railgun* («рельсовая пушка»), в русском прижилось название «рельсотрон». Главное отличие данной реализации от предыдущих проектов — отсутствие внешнего магнитного поля, вместо которого используется собственное поле токов, текущих по «рельсам».

Рассмотрим принцип действия рельсотрона. Возьмем систему из двух бесконечно длинных проводников с круговым сечением радиусом  $r$ , подключенных к источнику напряжения (рис. 22.10). Расстояние между центрами рельсов равно  $l$ , причем  $l \gg r$ . На рельсах лежит снаряд  $P$ , проводящий ток и замыкающий цепь. Пусть по проводникам и снаряду течет ток  $I$ . Он создает магнитное поле  $B$ , направленное вертикально вверх (см. рис. 22.10). Со стороны магнитного поля, порождаемого проводниками, на ток в снаряде действует сила Ампера  $F_A$  (19.32), толкающая снаряд вперед. Найдем скорость  $V$  снаряда, которую он приобретет, пройдя расстояние  $L$  (начальное положение снаряда показано на рисунке пунктиром). Трением и сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Сначала рассчитаем поток вектора магнитной индукции через бесконечно малую площадку с линейными размерами  $dx \times dy$ , расположенную на расстоянии  $y$  от левого рельса (и на расстоянии  $l - y$  от правого). Величина магнитного поля на выделенной площадке дается законом Био—Савара—Лапласа (20.9), так что поток через нее равен:

$$d\Phi = B dx dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{l - y} \right) dx dy. \quad (22.36)$$

Теперь интегрируем это выражение по всей площади, «покрытой» снарядом при его перемещении на расстояние  $L$ :

$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^L dx \int_r^{l-r} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{l-y} \right) dy = \frac{\mu_0 I}{\pi} L \ln \frac{l-r}{r} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi} L \ln \frac{l}{r}. \quad (22.37)$$

Согласно формуле (22.4), источник питания совершает работу  $\Delta A = I\Delta\Phi$ , которая в пренебрежении потерями идет на кинетическую энергию  $mV^2/2$  снаряда. Отсюда получаем для скорости снаряда выражение

$$V \approx \sqrt{\frac{2L}{m} \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \ln \frac{l}{r}}. \quad (22.38)$$

В то же время, работу сил поля можно записать как  $F_A L$ , откуда получаем выражение для средней силы Ампера, действующей на снаряд:

$$F_A = \frac{I\Delta\Phi}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \ln \frac{l}{r}. \quad (22.39)$$

Найдем время разгона снаряда  $t$ . Средняя скорость движения определяется как  $v = L/t$ . При постоянном ускорении средняя скорость  $v$  равна половине максимальной:  $v = V/2$ , откуда находим время разгона:

$$t = \frac{2L}{V}. \quad (22.40)$$

Приведем численный пример. При  $r = 1$  см,  $d = 1$  м,  $L = 10$  м,  $m = 10$  г и  $I = 100$  кА получаем оценки для скорости и времени разгона:

$$V = \sqrt{\frac{2 \times 10}{0,01} \times \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 100000^2}{\pi} \ln \frac{1}{0,01}} = 6070 \text{ м/с.}$$

$$t = \frac{2 \times 10}{6000} = 3,3 \text{ мс.} \quad (22.41)$$

Кинетическая энергия снаряда  $W = mV^2/2 = 184$  кДж, развиваемая пушкой мощность  $N = W/t = 56$  МВт, сила Ампера  $F_A = W/L = 18,4$  кН, а ускорение  $a = F_A/m = 1,8 \cdot 10^6$  м/с<sup>2</sup>.

Способность рельсотрона разгонять небольшие массы до высоких скоростей делают его новым видом оружия. Такому снаряду не нужна взрывчатка — благодаря огромной скорости он обладает гигантской пробивной силой. Сообщалось, что во время испытаний мягкая полимерная пуля пробивала толстые металлические плиты: ее кинетическая энергия была столь высока, что при ударе происходил настоящий взрыв. Но потопить корабль такая пуля не сможет, а при повышении массы снаряда хотя бы до одного килограмма, т. е. в 100 раз по сравнению с оценками (22.41), дульная скорость упадет в десять раз — до 600 м/с (зависимость  $V \propto 1/\sqrt{m}$ ). Чтобы сохранить прежнюю сверхвысокую скорость вылета снаряда, надо поднять силу тока в 10 раз, т. е. до 1 МА. В принципе этого можно достичь в импульсном режиме. Тогда кинетическая энергия снаряда возросла бы до 18,4 МДж, сила Ампера — до 1,84 МН (что эквивалентно весу массы 190 т — пары железнодорожных вагонов с полной нагрузкой), а развиваемая пушкой мощность составила бы  $N = 5,6$  ГВт.

В прессе сообщалось о планах оснастить электромагнитными и лазерными пушками новейший эсминец военно-морского флота США «Замволт» (*Zumwalt*), спущенный на воду в 2013 г. и начавший ходовые испытания в декабре 2015 г. (рис. 22.11). Однако пока в списке вооружений корабля есть только обычные артиллерийские установки (см. <http://tinyurl.com/mcck3m3>).

Достоинства этого вида оружия определяются сверхвысокой дульной скоростью снаряда, которая, как полагают, может достигать 10 км/с. Отсюда уже вытекают и большая дальность прямого выстрела (до 8–9 км) и большая дальность полета снаряда (до 400 км). Можно отметить безопасность боеприпасов, в которых не используются



**Рис. 22.11.** Эсминец Zumwalt.  
US Navy Photo

взрывчатые вещества, что повышает живучесть корабля. Немалое значение имеет и экономика: по оценкам, стоимость выстрела рельсотрона существенно ниже стоимости аналогичной по дальности ракеты корабельного базирования и составляет 25 тыс. долларов США против 1 млн.

К недостаткам можно отнести в первую очередь громоздкость и недостаточную мощность существующих источников питания. Действующие прототипы боевых рельсотронов обслуживаются батареями конденсаторов, занимающими целые комнаты. Именно поэтому их предполагается использовать на кораблях и в стационарных огневых установках. Быстрый износ рельсов и креплений (на рельсы тоже действует расталкивающая их сила Ампера), низкая скорострельность (в перспективе собираются довести ее до 6–10 выстрелов в минуту), мощный шумовой эффект, сравнимый с раскатом грома, — дополнительные факторы, относящиеся к минусам данного типа оружия.

## Контрольные вопросы

1. Какая сила совершает работу при перемещении проводника с током в магнитном поле?
2. Как связана эта работа с током в проводнике и изменением магнитного потока?
3. Сформулируйте закон Фарадея для ЭДС индукции.
4. Приведите не менее трех примеров с разными физическими причинами возникновения ЭДС индукции.
5. Горизонтальный медный диск вращается по часовой стрелке, если смотреть сверху. Из-за наличия магнитного поля Земли в диске возникает ЭДС индукции. В каком месте диска — в центре или на окружности — потенциал будет выше? Зависит ли ответ от места, где проводится этот опыт?
6. Закрытый проводящий контур в виде прямоугольника движется поступательно в однородном магнитном поле. Зависит ли величина ЭДС индукции от направления движения контура?
7. Шасси автомобиля и оси колес образуют замкнутый проводящий контур. Индуцируется ли в нем ток при движении автомобиля? Если «нет», то почему? Если «да», то в каких случаях?

8. Проволочная рамка вращается в однородном магнитном поле вокруг оси, параллельной силовым линиям. Возникнет ли в ней индукционный ток?
9. Плоскости двух круговых проводников взаимно перпендикулярны (рис. 22.12). Будет ли в проводнике  $A$  возникать индукционный ток при изменениях тока в проводнике  $B$ ?
10. Проволочная рамка падает в поле постоянного магнита (рис. 22.13). Укажите направления индукционных токов при прохождении ею положений  $A, B, C$ .
11. Одна сторона проволочной прямоугольной рамки совмещена с прямолинейным проводом, по которому идет ток. Рамка делает вокруг этой стороны полный оборот. Возникнет ли в ней индукционный ток?
12. Сформулируйте правило Ленца. Приведите пример его применения.
13. Объясните с помощью правила Ленца, почему при помещении в магнитное поле диамагнетик намагничивается против поля.
14. В каком направлении потечет индукционный ток в проволочном кольце в опыте, изображенном на рис. 22.14?
15. Переменное сопротивление реостата в левом контуре на рис. 22.15 возрастает с постоянной скоростью. В каком направлении течет индукционный ток в правом контуре?
16. Что такое ЭДС самоиндукции и индуктивность контура? В каких единицах измеряется индуктивность?

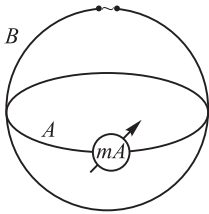


Рис. 22.12. К вопросу 9

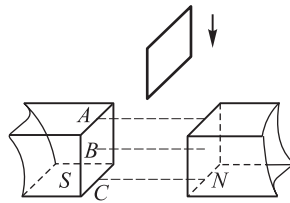


Рис. 22.13. К вопросу 10

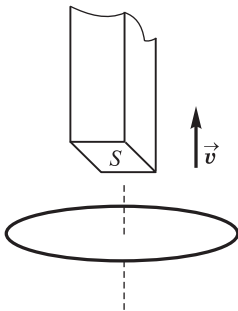


Рис. 22.14. К вопросу 14

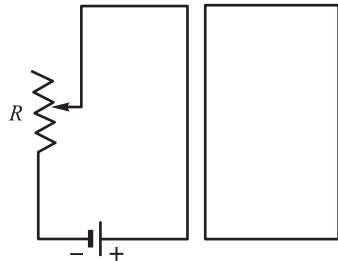


Рис. 22.15. К вопросу 15

17. Нарисуйте график изменения тока при замыкании цепи с индуктивностью. Какую долю составляет ток в цепи по отношению к максимально возможному значению через время  $t = 5\tau$  ( $\tau = L/R$ )?
18. Почему искра, возникающая при размыкании рубильника, не возникает, если параллельно рубильнику включить конденсатор?
19. Какова напряженность электрического поля в вакууме, плотность энергии которого такая же, как и у магнитного поля в вакууме с индукцией  $B = 1$  Тл?
20. Магнитное поле используется гораздо чаще электрического в различных бытовых приборах (моторах, генераторах и т. п.), осуществляющих преобразование энергии из электромагнитной формы в механическую. Почему?

## Глава 23

# Уравнения Максвелла

Мы приступаем к завершающей главе этой части. Ее материал подводит итоги нашего знакомства с основами электрических и магнитных явлений. Для простоты мы будем рассматривать поля в вакууме.

### 23.1 Вихревое электрическое поле

Итак, подведем итоги того, что мы уже успели изучить. Все наши формулы могут быть выведены из нескольких утверждений.

**Утверждение 1.** *Электростатическое поле создается зарядами. Силовые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах.*

Математической формулировкой этого утверждения является теорема Остроградского—Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_e dV. \quad (23.1)$$

В правой части стоит интеграл от плотности зарядов по произвольному объему, который равен полному заряду внутри него. В левой части — поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем. Как мы видели, в этом уравнении содержится, в частности, закон Кулона взаимодействия двух точечных электрических зарядов.

**Утверждение 2.** *Магнитные заряды отсутствуют в природе.*

Математической формулировкой этого утверждения также является теорема Остроградского—Гаусса, в правой части которой стоит ноль:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (23.2)$$

**Утверждение 3\*.** *Электростатическое поле потенциально: в нем нет замкнутых силовых линий.*

Математически это выражается как равенство нулю циркуляции электростатического поля по произвольному контуру:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (23.3)$$

**Утверждение 4\*.** *Магнитное поле является вихревым.*

Математическим выражением этого утверждения является теорема о циркуляции вектора магнитной индукции:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (23.4)$$

В левой части стоит циркуляция магнитного поля по произвольному замкнутому пути  $L$ , а в правой — интеграл от плотности полного тока по произвольной поверхности  $S$ , «натянутой» на этот контур. Этот интеграл равен сумме токов, пронизывающих поверхность  $S$ . В этом уравнении содержится закон Био—Савара—Лапласа.

Эти четыре уравнения надо дополнить выражением для силы Лоренца, действующей на движущиеся заряды со стороны электромагнитных полей:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.} \quad (23.5)$$

Внимательный читатель заметит, что два последних утверждения помечены звездочками и не обведены рамочкой. Это сделано не случайно: данные утверждения подлежат модификации. Дело в том, что с тех пор, как мы сформулировали эти четыре утверждения, мы познакомились еще с одним явлением — электромагнитной индукцией. Оно пока еще не нашло отражения в выписанных уравнениях. Сделаем это.

Если магнитный поток через проводящий виток  $L$  меняется, то в витке возникает ЭДС индукции. Что это означает? Заряды, находящиеся в проводнике, будут испытывать действие силы, связанной с этой ЭДС. Но сила, действующая на заряд, означает появление какого-то электрического поля. Циркуляция этого поля по периметру витка как раз и равна по определению ЭДС индукции:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_i. \quad (23.6)$$

Отличие циркуляции от нуля означает, что данное электрическое поле не потенциально, а имеет вихревой характер, подобно магнитному полю. Но если такое поле появилось, то в чем тогда роль витка? Виток — это не более чем удобный детектор для регистрации вихревого электрического поля по возникшему индукционному току. Для того, чтобы расстаться с витком окончательно, выразим ЭДС индукции через поток магнитного поля. Перепишем закон Фарадея в виде:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (23.7)$$

Объединяя уравнения (23.6) и (23.7), приходим к модифицированному утверждению.

**Утверждение 3.** *Изменяющееся магнитное поле приводит к возникновению вихревого электрического поля.*

Математически это выражается в виде уравнения

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (23.8)$$

В этом уравнении содержится закон электромагнитной индукции Фарадея.

Здесь надо проявить немного осторожности: раз у нас появилось дополнительное электрическое поле, не изменит ли оно первое утверждение? По счастью, ответ отрицателен: поток вихревого поля через замкнутую поверхность равен нулю, так что это поле не даст вклада в левую часть уравнения (23.1).

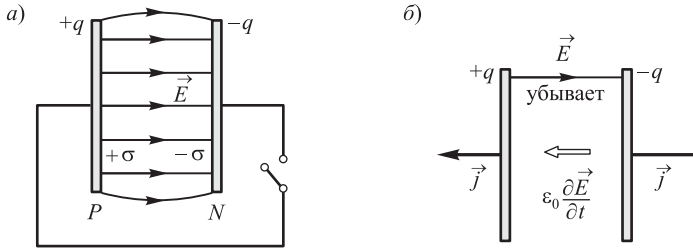
Казалось бы, мы учли уже все явления, с которыми знакомы. Почему же тогда мы поместили четвертое уравнение как требующее модификации? Дело в том, что теперь нарушена симметрия между электрическими и магнитными явлениями. Предположим, что в системе нет ни зарядов, ни токов. Может ли существовать тогда электромагнитное поле? Ответ мы знаем из современной жизни: может! Существуют же электромагнитные волны, которые распространяются в космосе и не требуют для этого никакой среды. В отсутствие зарядов и токов первые два уравнения (23.1) и (23.2) вполне симметричны. Этого нельзя сказать о второй паре уравнений. Электрическое (вихревое) поле можно породить без зарядов, просто изменением магнитного поля? Почему же магнитное поле нельзя породить не токами, а изменением электрического поля?

## 23.2 Ток смещения

Дж. К. Максвелл был первым, кто задался вопросом о модификации четвертого утверждения. Никаких экспериментальных фактов, к этому подводящих, в то время известно не было. Из четвертого утверждения следует, что токи, порождающие вихревое магнитное поле, должны быть замкнутыми, они нигде не могут прерываться. Действительно, на один и тот же контур  $L$  можно «натянуть» множество поверхностей  $S$ . Пусть, скажем, мы выберем две из них —  $S_1$  и  $S_2$ . Так как левая часть (23.4) для них одинакова, то будут равны и правые части. Это значит, что весь ток, вошедший через  $S_1$ , должен выйти через поверхность  $S_2$ . Так с обычными токами и происходит. Но бывают нестационарные процессы, когда в каких-то точках меняется плотность электрического заряда. Линии тока будут кончаться в этих местах, и войдя внутрь поверхности, охватывающей такие точки, наружу уже не выйдут, что противоречит нашему выводу.

Чтобы проиллюстрировать подобные случаи, рассмотрим уже знакомый процесс разрядки конденсатора. Пусть имеются две пластины с зарядами  $+q$  и  $-q$ . Пока цепь разомкнута, равные и разноименные заряды создают в пространстве между пластинами постоянное электрическое поле. Ток по проводам не идет, и вокруг цепи нет магнитного поля (рис. 23.1, а).





**Рис. 23.1.** Ток смещения в конденсаторе: начальное состояние конденсатора (а); в процессе разрядки конденсатора скорость изменения вектора электрического смещения  $\partial \vec{D}/\partial t = \epsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$  направлена в ту же сторону, что и вектор плотности  $\vec{j}$  тока проводимости и равна ему по величине (б)

При замыкании ключа начнется разрядка конденсатора, и во внешней цепи через соединяющий пластины проводник потечет ток, направленный от пластины  $P$  к  $N$ . Уменьшение заряда на пластине на величину  $dq$  означает, что это же количество электричества протечет по проводу, подсоединенному к пластине (закон сохранения заряда). Поэтому плотность тока проводимости в непосредственной близости от поверхности обкладок будет определяться выражением:

$$j = \frac{\dot{q}}{S} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{q}{S} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (23.9)$$

Когда по проводу пошел ток, возникло магнитное поле. Однако в пространстве между пластинами никакого тока в обычном понимании нет — там происходит только изменение электрического поля. Получается, что ток проводимости не замкнут: он начинается на одной из пластин и кончается на другой. Благодаря этому заряд на пластинах меняется.

Рассмотрим, что происходит в пространстве между пластинами (рис. 23.1, б). Напряженность поля внутри конденсатора  $E = \sigma/\epsilon_0$ . Следовательно, при разрядке конденсатора

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (23.10)$$

Мы получили, что скорость изменения поля в конденсаторе численно равна плотности тока проводимости.

Так как вектор электрического смещения поля направлен от положительной пластины  $P$  к отрицательной  $N$ , то при разрядке конденсатора скорость изменения электрической индукции отрицательна и направлена в сторону, противоположную  $\vec{E}$ . Таким образом, направление вектора  $\epsilon_0(\partial \vec{E}/\partial t)$  совпадает с направлением тока в цепи, в которую включен конденсатор.

Поэтому величину  $\epsilon_0(\partial \vec{E}/\partial t)$  можно рассматривать как продолжение тока проводимости в той области, где заведомо нет движения зарядов. Максвелл назвал величину  $\epsilon_0(\partial \vec{E}/\partial t)$  *плотностью тока смещения*:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (23.11)$$

Так как численные значения плотности тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$  и плотности тока проводимости  $\vec{j}$  равны, то, следовательно, линии плотности тока проводимости внутри проводника непрерывно переходят в линии плотности тока смещения между пластинами (обкладками конденсатора).

Если ввести понятие полного тока, который включает в себя сумму тока проводимости и тока смещения, то для его плотности имеем

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (23.12)$$

На примере конденсатора мы обнаружили, что полный ток будет замкнут: его линии продолжаются, нигде не прерываясь (даже в пространстве между пластинами конденсатора). По этому своему свойству именно полный ток должен стоять в правой части уравнения (23.4). В этом и состояла идея Максвелла. В результате мы приходим к видоизмененному утверждению 4\*:

**Утверждение 4.** *Вихревое магнитное поле создается полным током, т. е. токами проводимости и изменяющимся электрическим полем.*

Математическим выражением этого утверждения является уравнение, получаемое при подстановке плотности полного тока (23.12) в (23.4):

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (23.13)$$

Таким образом, Максвелл предсказал новое явление, обратное электромагнитной индукции. Эксперимент подтвердил, что магнитное поле действительно может создаваться изменяющимся электрическим полем.

## 23.3 Векторные поля

Четыре уравнения (23.1), (23.2), (23.8) и (23.13) называются *уравнениями Максвелла в интегральной форме*. Однако существует и другая форма математической записи этих утверждений в виде дифференциальных уравнений, гораздо более удобных для вычислений. Чтобы перейти к ней, необходимо напомнить некоторые результаты, касающиеся дифференциальных операций над векторными полями. Если в каждой точке пространства  $\vec{r}$  задан некоторый вектор  $\vec{a}(\vec{r})$ , то вся совокупность таких векторов образует *векторное поле*. Примерами векторных полей служат поле скоростей течения жидкости, поле вектора электрической напряженности и т. д. Дифференциальным оператором, действующим на векторные поля, является уже знакомый нам оператор «набла»  $\vec{\nabla}$  с компонентами, являющимися производными по координатам. В прямоугольной декартовой системе координат он записывается как

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (23.14)$$

При действии оператора «набла» на какое-то скалярное поле  $\varphi(\vec{r})$  мы получаем градиент этого поля:

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi. \quad (23.15)$$

В определенном смысле с оператором «набла» можно обращаться как с обычным вектором (но проявляя осторожность, имея дело с произведениями полей). При его действии на какое-то векторное поле  $\vec{a}$  возможны два варианта — скалярное произведение и векторное. При скалярном произведении «наблы» и поля  $\vec{a}$  мы получаем **дивергенцию векторного поля**:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (23.16)$$

В результате применения дивергенции к векторному полю мы получаем скалярное поле.

**Задача 23.105.** Найти  $\operatorname{div}(p\vec{a})$ , где  $p$  — скалярное поле, а  $\vec{a}$  — векторное.

**Решение.** Используем оператор «набла» и правила дифференцирования произведения:

$$\operatorname{div}(p\vec{a}) = \vec{\nabla} \cdot (p\vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \operatorname{grad} p + p \operatorname{div} \vec{a}. \quad \blacksquare \quad (23.17)$$

При векторном произведении «наблы» на поле  $\vec{a}$  мы приходим к новому векторному полю, ортогональному первоначальному. Это поле называется **ротором векторного поля**  $\vec{a}$ . В декартовых координатах ротор векторного поля  $\vec{a}$  записывается в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (23.18)$$

Векторное произведение любого вектора на себя равно нулю:  $\vec{b} \times \vec{b} = 0$ . Если под вектором  $\vec{b}$  понимать оператор «набла», действующий на какое-то скалярное поле  $\varphi$ , то получим, что последовательность операций градиента и ротора тождественно дает ноль:  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$  для любого поля  $\varphi$ . Для смешанного произведения векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{a}$  справедливо равенство  $\vec{b} \cdot [\vec{b} \times \vec{a}] = 0$ , так как векторное произведение  $[\vec{b} \times \vec{a}]$  ортогонально вектору  $\vec{b}$ . Если вместо вектора  $\vec{b}$  подставить сюда  $\vec{\nabla}$ , то придем к тождеству  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$  для любого поля  $\vec{a}$ . Из этих утверждений вытекает важная **теорема Гельмгольца**: *любое векторное поле может быть представлено в виде суммы двух других векторных полей, причем у одного из них будет равен нулю ротор, а у другого — дивергенция*:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_d + \vec{a}_r, \\ \operatorname{rot} \vec{a}_d &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{a}_r = 0, \\ \operatorname{div} \vec{a} &= \operatorname{div} \vec{a}_d \quad \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot} \vec{a}_r. \end{aligned} \quad (23.19)$$

Пусть теперь нам дан интеграл по некоторому объему  $V$  от дивергенции какого-то поля  $\vec{a}$ . **Теорема о дивергенции** (она же теорема Остроградского—Гаусса) позволяет свести этот объемный интеграл к интегралу по замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей данный объем:

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}} \quad (23.20)$$

( $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , а  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к элементу поверхности  $dS$ ).

Для иллюстрации применения теоремы о дивергенции выведем **закон Архимеда** для погруженного в жидкость тела любой формы, не ограничиваясь при этом предположением о несжимаемости жидкости. Закон Паскаля имеет вид:

$$\operatorname{grad} p = \rho \vec{g}. \quad (23.21)$$

Здесь  $p$  — давление в жидкости,  $\rho$  — ее плотность, а  $\vec{g}$  — вектор ускорения свободного падения. Умножим это уравнение скалярно на произвольный постоянный вектор  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} \cdot \text{grad} p = \rho \vec{a} \cdot \vec{g}. \quad (23.22)$$

Так как дивергенция постоянного вектора равна нулю, то левую часть этого уравнения, согласно (23.17), можно представить как дивергенцию произведения  $p$  и  $\vec{a}$ . Тогда

$$\text{div}(p\vec{a}) = \rho \vec{a} \cdot \vec{g}. \quad (23.23)$$

Проинтегрируем теперь обе части (23.23) по объему тела, погруженного в жидкость, и применим к левой части теорему о дивергенции:

$$\int_V \text{div}(p\vec{a}) dV = \vec{a} \cdot \oint_S p d\vec{S} = \vec{a} \cdot \int_V \rho \vec{g} dV. \quad (23.24)$$

Ввиду произвольности вектора  $\vec{a}$ , приходим к векторному равенству:

$$\oint_S p d\vec{S} = \int_V \rho \vec{g} dV. \quad (23.25)$$

Это и есть закон Архимеда. В самом деле, на элемент  $d\vec{S}$  поверхности тела со стороны жидкости действует сила  $d\vec{F} = -\vec{n} p dS$ , где  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к элементу  $dS$ . Тогда действующая на тело выталкивающая сила равна интегралу от  $d\vec{F}$  по поверхности тела, погруженного в жидкость:

$$\vec{F}_A = - \oint_S p d\vec{S}. \quad (23.26)$$

Выражение  $\rho dV$  есть масса  $dm$  жидкости в элементарном объеме  $dV$ . Тогда полная масса вытесненной телом жидкости равна

$$m_V = \int_V \rho dV. \quad (23.27)$$

Комбинируя уравнения (23.25), (23.26) и (23.27), получаем

$$\vec{F}_A = -m_V \vec{g}, \quad (23.28)$$

где знак «минус» означает, что выталкивающая сила направлена против силы тяжести.

**Теорема о циркуляции** (она же теорема Стокса) позволяет свести интеграл от вектора  $\vec{a}$  вдоль замкнутой кривой (вдоль контура)  $L$ , к интегралу по поверхности  $S$ , опирающейся на этот контур:

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad (23.29)$$

( $d\vec{l}$  — элемент контура  $L$ , имеющий длину  $dl$  и направленный по касательной к нему).

Если мы применим теорему Стокса (23.29) к полю  $\vec{a}_d$ , ротор которого равен нулю, то получим, что циркуляция этого вектора по любому замкнутому контуру также равна нулю. Это значит, что интеграл  $\int_1^2 \vec{a}_d \cdot d\vec{l}$  между двумя произвольными точками 1 и 2 не зависит от пути интегрирования. Это позволяет ввести потенциал  $\varphi$  такого поля:  $\vec{a}_d = -\text{grad } \varphi$ , так как  $\text{rot } \vec{a}_d = 0$ . Поэтому *безвихревые* поля, ротор которых всюду равен нулю, являются *потенциальными* полями.

Поле  $\vec{a}_r$  с равной нулю дивергенцией называется *соленоидальным* или *вихревым* полем. Такое поле можно представить в виде ротора некоторого другого поля:

$\vec{a}_r = \text{rot } \vec{A}$ , пользуясь тождеством  $\text{div rot } \vec{a}_r = 0$ . Применим к такому полю теорему о дивергенции (23.20):

$$\oint_S \vec{a}_r \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{a}_r \, dV = \int_V \text{div rot } \vec{A} \, dV = 0. \quad (23.30)$$

Мы получили, что поток соленоидального поля через любую замкнутую поверхность  $S$  всегда равен нулю, т. е. линии поля нигде не начинаются и нигде не заканчиваются, следовательно сколько их вошло внутрь поверхности  $S$ , столько же и вышло назад.

## 23.4 Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Теперь мы готовы к преобразованию уравнений Максвелла от интегральной формы к дифференциальной. Выпишем их еще раз:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_e \, dV; & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0; \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}; & \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int_S \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (23.31)$$

В левой части первого уравнения стоит поток вектора электрической напряженности через замкнутую поверхность  $S$ . Мы преобразуем его в объемный интеграл с помощью теоремы Остроградского—Гаусса (23.20) и получим уравнение

$$\int_V \text{div } \vec{E} \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_e \, dV. \quad (23.32)$$

Объемные интегралы слева и справа равны всегда, независимо от выбранного объема  $V$ , по которому идет интегрирование. Это значит, что равны их подинтегральные функции:

$$\boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}}. \quad (23.33)$$

Аналогично преобразуется второе уравнение Максвелла с той разницей, что в правой части стоит ноль:

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}. \quad (23.34)$$

Применяя к третьему уравнению теорему Стокса о циркуляции (23.29), записываем его в виде равенства поверхностных интегралов:

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (23.35)$$

Поверхностные интегралы слева и справа берутся по произвольным поверхностям  $S$ , поэтому их равенство означает, что равны их подинтегральные функции:

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}. \quad (23.36)$$

Аналогичным образом преобразуется и последнее уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (23.37)$$

Теперь мы понимаем, что дивергенция (по латыни это значит «расхождение») описывает конфигурацию силовых линий типа «ежа», расходящихся из точек, где имеются электрические заряды ( $\rho_e \neq 0$ ). Слово «ротор» в переводе не нуждается, оно явно ассоциируется с вращением. Эта операция описывает вихревые поля вокруг их источников — токов или переменных электрических полей.

Применяя теорему о дивергенции к уравнению (18.10), мы получаем **закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме**:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}. \quad (23.38)$$

Смысл его совершенно ясен: плотность электрического заряда уменьшается в тех точках, откуда вытекает электрический ток.

В конечном итоге от уравнений Максвелла (23.31) в интегральной форме мы перешли к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме, связывающим значения полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и их производных по времени со значениями плотностей заряда и тока в этой же точке. Согласно общим математическим теоремам, рассмотренным в предыдущем разделе, электрическое поле потенциально, а магнитное — соленоидально. Уравнения Максвелла в вакууме — фундаментальные уравнения физики. Чтобы получить уравнения электродинамики в средах, надо использовать дополнительные уравнения, описывающие свойства этих сред, а они настолько разнообразны, что единой системы уравнений получить невозможно. Для простых однородных сред с постоянными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей в уравнениях надо произвести стандартную замену:  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon$ ,  $\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu$  и дополнить уравнение  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  (для металлов). Но получившаяся система уравнений уже не будет носить столь фундаментального характера, как уравнения Максвелла для вакуума.

Четыре интегральных уравнения и четыре дифференциальных эквивалентны. Все явления электромагнетизма в вакууме можно полностью описать этими четырьмя уравнениями, являющимися обобщением экспериментальных фактов. У самого Максвелла они выглядели сложнее и более громоздко. Современную форму им придали О. Хевисайд и Г. Герц (ок. 1884 г.). Мы не можем отказать себе в удовольствии воспроизвести их рядом хотя бы как часть шутки, опубликованной в одном из журналов в дни юбилея Максвелла:

**«И сказал Бог:**

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}; & \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \text{div } \vec{B} &= 0; & \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (23.39)$$

**И стал свет».**

В этой шутке упоминается свет — электромагнитное излучение определенного диапазона частот. Предсказание электромагнитных волн стало одним из величайших достижений теории Максвелла. Представим, что заряды и токи отсутствуют и посмотрим на уравнения Максвелла (23.39). Видно, что если поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  — не статические, т. е. зависят от времени, то имеется вихревое электрическое и магнитное поля (соответствующие роторы отличны от нуля). Распространение полей без зарядов и токов — это и есть электромагнитные волны, в чем мы убедимся во втором томе нашего курса. И можно углядеть в уравнениях намек на скорость их распространения: туда входит комбинация  $\varepsilon_0\mu_0$ , равная обратному квадрату скорости света. Даже сам Максвелл не подозревал, что в его уравнениях таятся электромагнитные волны — их открыл Генрих Герц. Вот его вдохновенные слова об уравнениях Максвелла:

«Трудно избавиться от чувства, что эти математические формулы живут независимой жизнью и обладают своим собственным интеллектом, что они мудрее, чем мы сами, мудрее даже, чем их первооткрыватели, и что мы извлекаем из них больше, чем было заложено в них первоначально.»

## Контрольные вопросы

1. Можно ли создать электрическое поле с замкнутыми силовыми линиями?
2. Можно ли создать магнитное поле с незамкнутыми силовыми линиями?
3. Что такое ток смещения?
4. Из постоянных  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  можно построить еще и величину с размерностью сопротивления (его называют иногда *сопротивлением вакуума*). Найдите эту комбинацию и вычислите сопротивление вакуума.
5. Какие из уравнений Максвелла потребовалось бы изменить, если бы в природе были обнаружены свободные магнитные заряды (монополи)?

# Оглавление

От издательства . . . . .	3
<b>Часть I Физические основы механики</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1 Измерения физических величин</b>	<b>7</b>
1.1 О разнице вопросов «как?» и «почему?» . . . . .	7
1.2 Единицы измерения . . . . .	9
1.3 Анализ размерностей . . . . .	12
1.4 Система отсчета . . . . .	16
1.5 Алгебра векторов . . . . .	17
Контрольные вопросы . . . . .	21
<b>Глава 2 Кинематика материальной точки</b>	<b>23</b>
2.1 Абстракция в механике . . . . .	23
2.2 Перемещение . . . . .	24
2.3 Скорость . . . . .	26
2.4 Вычисление пройденного пути и перемещения . . . . .	28
2.5 Ускорение . . . . .	30
2.6 Ускорение при криволинейном движении . . . . .	31
2.7 Движение тела, брошенного под углом к горизонту . . . . .	34
2.8 Вращение абсолютно твердого тела . . . . .	40
Угловая скорость, угловое ускорение . . . . .	41
Связь угловых и линейных скоростей и ускорений . . . . .	43
Связь между векторами $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ . . . . .	44
Контрольные вопросы . . . . .	45
<b>Глава 3 Динамика материальной точки</b>	<b>47</b>
3.1 Принцип инерции Галилея и первый закон Ньютона . . . . .	47
3.2 Второй и третий законы Ньютона . . . . .	48
3.3 Механические силы . . . . .	54
Сила тяжести и вес . . . . .	54
Сила упругости . . . . .	55
Сила трения . . . . .	57
Сила сопротивления среды . . . . .	58



3.4	Движение тела, брошенного под углом к горизонту в среде с сопротивлением . . . . .	61
3.5	Закон сохранения импульса . . . . .	63
3.6	Центр масс . . . . .	65
3.7	Инерциальные системы отсчета и принцип относительности Галилея . . . . .	67
3.8	Уравнение Мещерского . . . . .	69
	Контрольные вопросы . . . . .	73
<b>Глава 4</b>	<b>Работа и энергия</b>	<b>75</b>
4.1	Работа силы . . . . .	75
4.2	Кинетическая энергия . . . . .	78
4.3	Мощность . . . . .	79
4.4	Потенциальная энергия . . . . .	81
	Векторный анализ: скалярное поле . . . . .	83
	Потенциальное поле сил . . . . .	85
	Консервативные силы . . . . .	86
	Постоянное однородное поле сил тяжести . . . . .	88
	Поле центральных сил . . . . .	89
4.5	Закон сохранения энергии . . . . .	90
4.6	Условия равновесия механической системы . . . . .	93
4.7	Примеры применения законов сохранения . . . . .	95
	Абсолютно неупругое столкновение двух шаров . . . . .	96
	Абсолютно упругое столкновение двух шаров . . . . .	97
	Абсолютно упругое отражение шара от движущейся стенки . . . . .	98
	Контрольные вопросы . . . . .	101
<b>Глава 5</b>	<b>Динамика твердого тела</b>	<b>103</b>
5.1	Закон сохранения момента импульса . . . . .	103
5.2	Динамика вращения вокруг неподвижной оси . . . . .	106
	Уравнение движения . . . . .	107
	Момент инерции . . . . .	109
	Теорема Штейнера . . . . .	111
5.3	Работа внешних сил при вращении твердого тела . . . . .	114
5.4	Плоское движение твердого тела . . . . .	115
5.5	О принципе работы колеса . . . . .	122
	Передвижение груза с помощью катка . . . . .	122
	Качественное рассмотрение работы колеса . . . . .	124
	Количественная теория колеса . . . . .	125
5.6	Гироскопы . . . . .	127
	Факты о гироскопах . . . . .	127
	Элементарная теория гироскопа . . . . .	128
	Гироскопический эффект и гироскопические силы . . . . .	131
	Контрольные вопросы . . . . .	135

<b>Глава 6</b>	<b>Закон всемирного тяготения</b>	<b>137</b>
6.1	Законы Кеплера . . . . .	137
6.2	Гравитационные силы . . . . .	139
6.3	Характерные астрономические масштабы . . . . .	139
6.4	Принцип эквивалентности масс . . . . .	142
6.5	Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия . . .	143
6.6	Космические скорости . . . . .	144
	«Темные звезды» Джона Мичелла . . . . .	146
6.7	Гравитационный маневр . . . . .	146
	Контрольные вопросы . . . . .	150
<b>Глава 7</b>	<b>Неинерциальные системы отсчета</b>	<b>151</b>
7.1	Силы инерции . . . . .	151
7.2	Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета . . . . .	152
7.3	Центробежная сила инерции . . . . .	153
7.4	Сила Кориолиса . . . . .	155
	Контрольные вопросы . . . . .	158
<b>Глава 8</b>	<b>Элементы механики жидкостей и газов</b>	<b>159</b>
8.1	Закон Паскаля . . . . .	159
8.2	Закон Архимеда . . . . .	163
8.3	Уравнение непрерывности . . . . .	165
8.4	Уравнение Бернулли . . . . .	167
8.5	Движение тел в среде с сопротивлением . . . . .	170
	Уравнения движения . . . . .	170
	Число Рейнольдса . . . . .	171
	Коэффициент сопротивления . . . . .	173
	Контрольные вопросы . . . . .	175
<b>Глава 9</b>	<b>Элементы специальной теории относительности</b>	<b>177</b>
9.1	Анализ преобразований Галилея . . . . .	177
9.2	Опыт Майкельсона—Морли . . . . .	179
9.3	Преобразования Лоренца . . . . .	181
9.4	Постулаты Эйнштейна. Некоторые эффекты специальной теории относительности . . . . .	183
	Инвариантность интервала . . . . .	184
	Замедление времени . . . . .	185
	Сокращение длины . . . . .	186
	Одновременность и последовательность событий . . . . .	186
9.5	Пространство-время Минковского . . . . .	188
9.6	Сложение скоростей по Лоренцу . . . . .	191
9.7	Опыт Физо . . . . .	194
9.8	Явление аберрации . . . . .	195
9.9	Форма объектов, движущихся с релятивистскими скоростями .	197
9.10	Релятивистское выражение для импульса . . . . .	199

9.11	Релятивистское выражение для кинетической энергии . . . . .	202
9.12	Полная энергия тела . . . . .	203
9.13	Частицы с нулевой массой . . . . .	205
9.14	Релятивистская формула Циолковского . . . . .	206
9.15	Ускорители на встречных пучках . . . . .	209
	Контрольные вопросы . . . . .	212

## **Часть II Основы термодинамики и статистической физики 213**

### **Глава 10 Идеальный газ 215**

10.1	Состояние системы и эмпирическая температура . . . . .	215
	Общие положения молекулярно-кинетической теории . . . . .	215
	Состояние системы и нулевое начало термодинамики . . . . .	216
	Температура . . . . .	218
10.2	Уравнение Клапейрона—Менделеева . . . . .	220
10.3	Кинетическая теория идеальных газов . . . . .	224
10.4	Закон равнораспределения энергии . . . . .	227
10.5	Смеси газов . . . . .	229
	Контрольные вопросы . . . . .	231

### **Глава 11 Энергия и работа в термодинамике 233**

11.1	Первое начало термодинамики . . . . .	233
11.2	Работа идеального газа в различных процессах . . . . .	235
11.3	Теплоемкость системы . . . . .	237
11.4	Адиабатный процесс . . . . .	241
11.5	Уравнение Ван-дер-Ваальса для реальных газов . . . . .	243
	Контрольные вопросы . . . . .	253

### **Глава 12 Второе начало термодинамики и энтропия 255**

12.1	Циклы и КПД тепловых машин . . . . .	255
12.2	Цикл Карно . . . . .	257
12.3	Двигатель внутреннего сгорания . . . . .	261
12.4	Внутреннеобратимая тепловая машина . . . . .	263
12.5	Второе начало термодинамики . . . . .	265
12.6	Абсолютная термодинамическая температура . . . . .	268
12.7	Энтропия . . . . .	270
	Изменение энтропии в процессах с идеальным газом . . . . .	271
	Энтропия и цикл Карно . . . . .	273
	Возрастание энтропии . . . . .	275
12.8	Статистический смысл энтропии . . . . .	278
	Вывод формулы Больцмана Планком . . . . .	281
12.9	Термодинамические потенциалы . . . . .	283
	Энтальпия . . . . .	284
	Свободная энергия . . . . .	285
	Свободная энергия Гиббса . . . . .	286
	Эффект Джоуля—Томсона . . . . .	287

Уравнение Клапейрона—Клаузиуса . . . . .	289
Контрольные вопросы . . . . .	290
<b>Глава 13 Распределение молекул по скоростям и координатам</b>	<b>291</b>
13.1 О закономерностях в мире хаоса . . . . .	291
Функция распределения . . . . .	292
Элементы теории вероятностей . . . . .	293
Распределение Пуассона . . . . .	296
13.2 Распределение молекул по скоростям . . . . .	300
Функция распределения молекул по скоростям . . . . .	301
Распределение Максвелла . . . . .	302
13.3 Характерные скорости молекул . . . . .	305
Наиболее вероятная скорость . . . . .	305
Распределение молекул по величинам безразмерной скорости . . . . .	306
Средняя арифметическая скорость . . . . .	307
Среднеквадратичная скорость . . . . .	308
Эксперимент по проверке распределения Максвелла . . . . .	309
13.4 Распределение молекул по координатам . . . . .	310
Барометрическая формула . . . . .	310
Политропная модель атмосферы . . . . .	313
Распределение Больцмана . . . . .	314
13.5 Распределение Максвелла—Больцмана . . . . .	316
Распределение по энергиям для многоатомных молекул . . . . .	316
Скорость химических реакций . . . . .	317
13.6 Адиабатный процесс в молекулярно-кинетической теории . . . . .	318
Контрольные вопросы . . . . .	320
<b>Глава 14 Явления переноса</b>	<b>321</b>
14.1 Столкновения молекул . . . . .	321
Свидание в лесу, ежик в тумане и атомная бомба . . . . .	326
14.2 Законы процессов переноса . . . . .	329
14.3 Кинетическая теория переноса . . . . .	334
Диффузия . . . . .	334
Теплопроводность . . . . .	336
Вязкость . . . . .	337
14.4 Броуновское движение . . . . .	338
Задача о блуждающем матросе . . . . .	338
Броуновское движение и диффузия . . . . .	340
Численные оценки для броуновского движения . . . . .	343
Контрольные вопросы . . . . .	344
<b>Часть III Основы классической теории электромагнетизма</b>	<b>345</b>
<b>Глава 15 Электрическое поле в вакууме</b>	<b>347</b>
15.1 Электрические свойства тел . . . . .	347
15.2 Закон Кулона . . . . .	349

15.3	Электрическое поле. Напряженность . . . . .	351
15.4	Принцип суперпозиции полей . . . . .	353
15.5	Силовые линии электрического поля . . . . .	354
15.6	Заряд в электрическом поле . . . . .	354
15.7	Поток вектора напряженности . . . . .	355
15.8	Теорема Остроградского—Гаусса . . . . .	357
15.9	Плотность заряда . . . . .	359
15.10	Применение теоремы Остроградского—Гаусса . . . . .	360
	Поле равномерно заряженной сферы . . . . .	360
	Поле бесконечно длинного заряженного цилиндра . . . . .	361
	Поле бесконечной заряженной плоскости . . . . .	362
	Поле плоского конденсатора . . . . .	362
15.11	Работа сил поля при перемещении заряда . . . . .	363
15.12	Потенциал электростатического поля . . . . .	364
15.13	Связь потенциала с напряженностью поля . . . . .	366
15.14	Примеры расчета потенциала . . . . .	367
	Потенциал равномерно заряженной сферы . . . . .	367
	Потенциал длинного заряженного цилиндра . . . . .	368
	Потенциалы заряженной плоскости и плоского конденсатора . . . . .	368
	Потенциал поля заряженного диска . . . . .	369
	Поле и потенциал шара, равномерно заряженного по объему . . . . .	370
15.15	Закон Кулона и размерность пространства . . . . .	372
	Контрольные вопросы . . . . .	373
<b>Глава 16</b>	<b>Проводники в электрическом поле</b>	<b>375</b>
16.1	Свободные заряды в проводниках . . . . .	375
16.2	Электрическое поле заряженного проводника . . . . .	376
16.3	Проводники во внешнем электрическом поле . . . . .	379
16.4	Емкость уединенной проводящей сферы . . . . .	382
16.5	Конденсаторы . . . . .	383
16.6	Соединения конденсаторов . . . . .	385
16.7	Энергия системы зарядов . . . . .	388
16.8	Энергия заряженного проводника . . . . .	391
16.9	Энергия заряженного конденсатора . . . . .	392
16.10	Энергия электрического поля . . . . .	393
	Контрольные вопросы . . . . .	395
<b>Глава 17</b>	<b>Электрическое поле в диэлектриках</b>	<b>397</b>
17.1	Диэлектрическая проницаемость . . . . .	397
17.2	Электрический диполь . . . . .	399
17.3	Поляризация диэлектриков . . . . .	403
	Электронная поляризация . . . . .	403
	Ориентационная (дипольная) поляризация . . . . .	405
	Поляризация жидких диэлектриков . . . . .	408
17.4	Вектор электрического смещения . . . . .	411
17.5	Электростатика однородных изотропных диэлектриков . . . . .	412

17.6	Условия на границе раздела двух диэлектриков . . . . .	415
	Контрольные вопросы . . . . .	417
<b>Глава 18</b>	<b>Постоянный электрический ток</b>	<b>419</b>
18.1	Сила тока и плотность тока в проводнике . . . . .	419
18.2	Закон сохранения заряда . . . . .	422
18.3	Сторонние силы . . . . .	423
18.4	Электродвижущая сила . . . . .	424
18.5	Закон Ома для однородного участка цепи . . . . .	424
18.6	Последовательное и параллельное соединение проводников . . . . .	427
18.7	Закон Ома для замкнутой цепи . . . . .	428
18.8	Зарядка и разрядка конденсатора . . . . .	429
18.9	Правила Кирхгофа . . . . .	431
18.10	Закон Джоуля—Ленца . . . . .	435
18.11	Классическая теория металлов . . . . .	436
	Закон Ома . . . . .	437
	Закон Джоуля—Ленца . . . . .	438
	Закон Видемана—Франца . . . . .	439
	Контрольные вопросы . . . . .	440
<b>Глава 19</b>	<b>Частицы в магнитном поле</b>	<b>441</b>
19.1	Магнитная индукция . . . . .	441
19.2	Сила Лоренца . . . . .	444
19.3	Движение заряда в однородном магнитном поле . . . . .	445
19.4	Некоторые применения магнитного поля . . . . .	447
	Циклотрон . . . . .	447
	Определение заряда и массы электрона . . . . .	449
	Масс-спектрометры . . . . .	451
19.5	Эффект Холла . . . . .	452
19.6	Закон Ампера . . . . .	453
19.7	Контур с током в магнитном поле . . . . .	455
	Контрольные вопросы . . . . .	457
<b>Глава 20</b>	<b>Магнитное поле в вакууме</b>	<b>459</b>
20.1	Магнитное поле движущегося заряда . . . . .	459
20.2	Закон Био—Савара—Лапласа . . . . .	460
20.3	Магнитное поле прямолинейного проводника с током . . . . .	461
20.4	Магнитное поле на оси кругового тока . . . . .	463
20.5	Магнитное поле соленоида . . . . .	465
20.6	Взаимодействие двух проводников с током . . . . .	467
20.7	Поток вектора магнитной индукции . . . . .	469
20.8	Вихревой характер магнитного поля. Закон полного тока . . . . .	470
20.9	Преобразования Лоренца для электромагнитного поля . . . . .	472
	Контрольные вопросы . . . . .	474

<b>Глава 21</b>	<b>Магнитное поле в веществе</b>	<b>477</b>
21.1	Магнетики . . . . .	477
21.2	Вектор намагничивания . . . . .	478
21.3	Напряженность магнитного поля . . . . .	480
21.4	Циркуляция вектора напряженности магнитного поля в ве- ществе . . . . .	480
21.5	Неоднородные магнетики . . . . .	481
21.6	Происхождение молекулярных токов . . . . .	483
21.7	Диамагнетики . . . . .	484
21.8	Парамагнетики . . . . .	488
21.9	Ферромагнетизм . . . . .	490
	Модель Вейсса . . . . .	491
	Обменная энергия . . . . .	496
	Домены и гистерезис . . . . .	498
	Контрольные вопросы . . . . .	502
<b>Глава 22</b>	<b>Электромагнитная индукция</b>	<b>503</b>
22.1	Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле	503
22.2	Электродвижущая сила индукции . . . . .	506
	Закон Фарадея . . . . .	506
	Потокосцепление . . . . .	510
	Заряд, протекающий в контуре при изменении магнитного по- тока . . . . .	511
	Правило Ленца . . . . .	512
22.3	Явление самоиндукции . . . . .	514
	Индуктивность . . . . .	514
	Индуктивность соленоида . . . . .	515
	Токи замыкания и размыкания . . . . .	516
22.4	Энергия магнитного поля . . . . .	518
22.5	Электромагнитная пушка — рельсотрон . . . . .	519
	Контрольные вопросы . . . . .	522
<b>Глава 23</b>	<b>Уравнения Максвелла</b>	<b>525</b>
23.1	Вихревое электрическое поле . . . . .	525
23.2	Ток смещения . . . . .	527
23.3	Векторные поля . . . . .	529
23.4	Уравнения Максвелла в дифференциальной форме . . . . .	532
	Контрольные вопросы . . . . .	534

*Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"*

*Учебное электронное издание*

Серия: «Учебник для высшей школы»

**Калашников Николай Павлович**  
**Смондырев Михаил Александрович**

## **ОСНОВЫ ФИЗИКИ**

В трех томах

Том 1

Ведущие редакторы *И. Я. Иццоки, Т. Г. Хохлова*

Художники *В. Е. Шкерин, В. А. Прокудин*

Корректор *Д. И. Мурадян*

Оригинал-макет подготовлен *М. А. Смондыревым* в пакете  $\text{\LaTeX}$  2 $\epsilon$

Подписано к использованию 20.04.21.

Формат 150×225 мм

Издательство «Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: [info@pilotLZ.ru](mailto:info@pilotLZ.ru), <http://www.pilotLZ.ru>



Данный учебник открывает двухтомное издание «Основы физики» и входит в единый комплект, включающий также сборник задач и упражнений тех же авторов. Предыдущее издание учебника в составе других учебных материалов выдвинуто на соискание премии Правительства Российской Федерации в области образования. Настоящее издание переработано и существенно дополнено. В первом томе, помимо основных законов механики, термодинамики и электромагнетизма, представлены многие другие интересные темы, которые обычно не включаются в учебники.

Учебник соответствует программе дисциплины «Физика» для естественно-научных и технических университетов и не имеет аналогов по фундаментальности подхода, с одной стороны, и по живости и доступности изложения, с другой.

**КАЛАШНИКОВ Николай Павлович.** Профессор, доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой общей физики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (НИЯУ МИФИ). Автор более 380 научных трудов и 14 монографий.



Основными направлениями научных исследований профессора Калашникова являются: ядерная физика, взаимодействия быстрых заряженных частиц с веществом, физика твердого тела в экстремальных состояниях.

С 2012 г. является директором агентства по аккредитации образовательных программ инженерных специальностей.

**СМОНДЫРЕВ Михаил Александрович.** Профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ, Дубна), профессор Московского авиационного института (Национального исследовательского университета).



В сферу научных интересов входят вопросы теории элементарных частиц и твердого тела. Автор и переводчик целого ряда научно-популярных книг и статей.

Лауреат премии Ленинского комсомола и премий ОИЯИ - Международной межправительственной научно-исследовательской организации.