

Н. П. Калашников
М. А. Смондырев

ОСНОВЫ ФИЗИКИ



Упражнения
и задачи

УЧЕБНИК ДЛѢ ВЬШЕИ ШКОЛЫ

Н. П. Калашников, М. А. Смондырев

ОСНОВЫ ФИЗИКИ

Том 3

Упражнения
и задачи

2-Е ИЗДАНИЕ, ЭЛЕКТРОННОЕ



Москва
Лаборатория знаний
2023

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
К17

Серия основана в 2009 г.

Калашников Н. П.

К17 Основы физики : в 3 т. Т. 3 : Упражнения и задачи / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. — 2-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2023. — 387 с. — (Учебник для высшей школы). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-661-2 (Т. 3)

ISBN 978-5-93208-658-2

Задачник соответствует действующей программе дисциплины «Физика» для естественнонаучных и технических университетов. Книга входит в состав учебного комплекта, включающего также два тома учебника «Основы физики» тех же авторов.

По всем темам представлены основные уравнения и формулы, разбор решения интересных для практики задач, задачи для самостоятельной работы. Приведены варианты типовых расчетов и богатый справочный материал. В конце книги размещены ответы.

Для студентов естественнонаучных и инженерно-технических специальностей.

**УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73**

Деривативное издание на основе печатного аналога: Основы физики : в 3 т. Т. 3 : Упражнения и задачи / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. — М. : Лаборатория знаний, 2019. — 384 с. : ил. — (Учебник для высшей школы). — ISBN 978-5-00101-006-7 (Т. 3); ISBN 978-5-00101-003-6.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

ISBN 978-5-93208-661-2 (Т. 3)
ISBN 978-5-93208-658-2

© Лаборатория знаний, 2019

ПРЕДИСЛОВИЕ ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемый вашему вниманию сборник упражнений и задач по физике входит в состав учебно-методического комплекта, включающего также учебник «Основы физики» в двух томах. Авторский коллектив комплекта — д-р физ.-мат. наук Н. П. Калашников и д-р физ.-мат. наук М. А. Смондырев — авторитетные ученые и преподаватели высшей школы. Николай Павлович постарался подобрать в сборник самые яркие и оригинальные упражнения и задачи, иллюстрирующие основные физические законы и помогающие уяснить физический смысл и масштабы физических явлений. Михаил Александрович внес значительный вклад в разработку методических рекомендаций по решению задач. Ясность, четкость и доступность методического аппарата — основные и несомненные достоинства сборника.

Издательство выражает искреннюю признательность консультантам задачника — канд. физ.-мат. наук Ирине Яковлевне Иццоки и канд. физ.-мат. наук Андрею Станиславовичу Ольчаку за их мудрые и полезные советы.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Систематическое решение физических задач — необходимое условие успешного изучения курса физики. Решение задач помогает уяснить физический смысл явлений, закрепляет в памяти основные физические законы, прививает навыки практического применения теоретических знаний, знакомит с характерными масштабами явлений и порядками физических величин, встречающихся на практике.

При решении физических задач полезно придерживаться определенного порядка действий:

1. Слева записать исходные данные задачи вместе с их числовыми значениями, искомые в задаче величины и табличные значения используемых физических параметров.
2. Выразить исходные данные в Международной системе единиц (СИ). Исключение из этого правила допускается лишь для однородных величин, входящих в ответ в виде отношения: в таком случае они могут быть выражены в любой (но в одной и той же) системе единиц.
3. Сделать чертеж, схему или рисунок с обозначениями исходных данных в соответствии с условием задачи.
4. Установить физические законы, отвечающие содержанию задачи. Записать, из какого закона (законов), определения или физического соотношения можно найти искомую величину.
5. Решить задачу в общем виде, т. е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии.
6. Проверить размерности. Полученные единицы измерений должны совпадать с размерностями искомого в задаче величин.
7. Произвести вычисления.
8. Привести в ответе числовое значение с сокращенным наименованием единицы измерения.

Часть I

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

I.1. Кинематика материальной точки

I.1.A. Основные формулы

- Положение материальной точки в пространстве в момент времени t определяется радиус-вектором \vec{r} (рис. 1).

- Средняя скорость $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ (см. рис. 1).

Средняя путевая скорость $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, где Δs — путь, пройденный точкой за интервал времени Δt (см. рис. 1).

Мгновенная скорость $\vec{v} = \frac{dr}{dt}$.

- Мгновенное ускорение $\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$.

При криволинейном движении ускорение можно представить как сумму нормальной \vec{a}_n и тангенциальной \vec{a}_τ составляющих (рис. 2): $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Абсолютные значения этих ускорений

$$a_n = \frac{v^2}{R}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где R — радиус кривизны в данной точке траектории.

- Движение с постоянным ускорением

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}.$$

Проекция радиус-вектора \vec{r} на ось x имеет вид

$$r_x(t) = x(t) = x_0 + v_{0,x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Скорость точки при равнопеременном движении $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$.

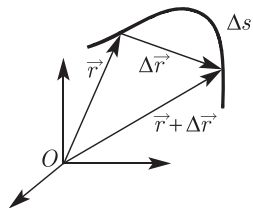


Рис. 1. Положение материальной точки в пространстве в момент времени t

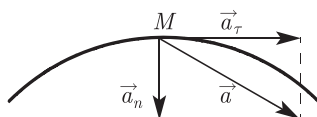


Рис. 2. Мгновенное ускорение при криволинейном движении

- При вращательном движении твердого тела вокруг фиксированной оси роль перемещения $\Delta \vec{r}$ играет вектор малого поворота на угол $\Delta \vec{\varphi}$. Он направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта.
- Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$.
- Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$.
- Равнопеременное вращение тела вокруг неподвижной оси

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Здесь знак вектора для угловых скорости и ускорения опущен, так как эти векторы коллинеарны, а ω и ε понимаются в алгебраическом смысле (с учетом их знаков).

- Связь угловых величин с линейными: путь, пройденный точкой по дуге окружности радиусом R , равен $\Delta s = R\Delta\varphi$, линейная скорость этой точки $v = \omega R$, тангенциальное ускорение точки $a_\tau = \varepsilon R$, нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, полное ускорение $a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.
- Частота вращения ν связана с угловой скоростью соотношением $\omega = 2\pi\nu$; период вращения (время одного оборота) $T = \frac{1}{\nu}$.

1.1.5. Примеры решения задач

ПРИМЕР 1. Автомобиль первую половину времени движется с постоянной скоростью $v_1 = 72$ км/ч, а вторую половину времени — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Найти среднюю путевую скорость v_{cp} автомобиля.

Решение. Введем обозначения: t_0 — момент начала движения, t_1 — момент смены скорости, t_2 — момент окончания движения. По условию $t_1 - t_0 = t_2 - t_1$, а полное время движения равно $(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) = t_2 - t_0 = 2(t_1 - t_0) = 2(t_2 - t_1)$. На первом этапе будет пройден путь $s_1 = v_1(t_1 - t_0) = v_1(t_2 - t_0)/2$, на втором — путь $s_2 = v_2(t_2 - t_1) = v_2(t_2 - t_0)/2$. Полный пройденный путь равен сумме этих путей:

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} (t_2 - t_0).$$

Согласно определению средней путевой скорости находим:

$$v_{cp} = \frac{s}{t_2 - t_0} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{72 + 40}{2} = 56 \text{ км/ч.}$$

ПРИМЕР 2. Решить аналогичную задачу, т. е. определить среднюю путевую скорость, если автомобиль двигался с той же скоростью v_1 первую половину пути (а не времени), а его вторую половину со скоростью v_2 .

Решение. В этом случае $s_1 = s_2 = s/2$. Время движения на первом участке пути $t_1 - t_0 = s_1/v_1 = s/(2v_1)$; на втором участке $t_2 - t_1 = s_2/v_2 = s/(2v_2)$. Полное время движения

$$t_2 - t_0 = (t_2 - t_1) + (t_1 - t_0) = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} = s \frac{v_1 + v_2}{2v_1 v_2},$$

откуда средняя скорость движения

$$v_{cp} = \frac{s}{t_2 - t_0} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 72 \cdot 40}{72 + 40} = 51,4 \text{ км/ч.}$$

ПРИМЕР 3. Положение объекта на прямой линии (ось x) в зависимости от времени дается уравнением $x = at + bt^2 + ct^3$, где $a = 3$ м/с, $b = -4$ м/с², $c = 1$ м/с³. Найти среднюю скорость объекта на временном интервале от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 4$ с. Сравнить полученное значение с мгновенными скоростями v_1 и v_2 в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

Решение. Координата объекта в момент времени $t_1 = 2$ с равна $x_1 = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = -2$ м. Аналогично, в момент времени $t_2 = 4$ с объект находится в точке с координатой $x_2 = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^3 = 12$ м. Перемещение $\Delta x = x_2 - x_1 = 14$ м произошло за время $\Delta t = t_2 - t_1 = 2$ с. Средняя скорость объекта на данном временном интервале равна $\langle v \rangle = \Delta x / \Delta t = 7$ м/с.

Для определения мгновенной скорости $v = dx/dt$ берем производную по времени: $v = a + 2bt + 3ct^2$, откуда $v_1 = 3 - 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = -1$ м/с и $v_2 = 3 - 2 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 4^2 = 19$ м/с.

ПРИМЕР 4. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x = A + Bt + Ct^2$, где $A = 5$ м, $B = 4$ м/с, $C = -1$ м/с². Найти: 1) максимальное значение координаты $x(t)$; 2) момент времени T , когда точка возвращается в то же место, где она была в начальный момент $t = 0$; 3) среднюю скорость $\langle v_x \rangle$ за интервал времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с; 4) среднюю путевую скорость v_{cp} за тот же интервал времени.

Построить графики зависимости от времени координаты x и пути s , пройденного точкой с момента $t = 0$.

Решение.

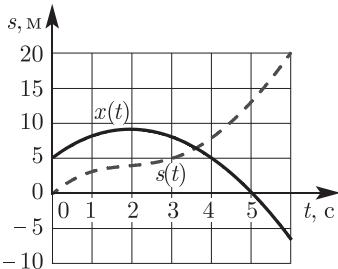
1) В момент $t = 0$ значение координаты равно $x(0) = A = 5$ м. Зависимость скорости от времени дается линейным уравнением $v(t) = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct$. В начальный момент времени скорость $v(0) = B = 4$ м/с положительна, т. е. точка движется в направлении возрастания координаты x и ее координата увеличивается. Скорость же с течением времени падает и в момент $t_{\max} = -\frac{B}{2C} = 2$ с обращается в нуль, а затем становится отрицательной. Это значит, что в момент t_{\max} точка остановилась, а затем стала двигаться в направлении уменьшения координаты x . Стало быть, в момент времени t_{\max} координата точки достигла своего максимального значения:

$$x_{\max} = A + Bt_{\max} + Ct_{\max}^2 = A - \frac{B^2}{4C} = 9 \text{ м.}$$

2) По условию задачи координаты точки в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ совпадают, т. е. $A = A + BT + CT^2$. Отсюда $T = -\frac{B}{C} = 4$ с.

3) Теперь находим положение точки в данные моменты времени t_1 и t_2 : $x_1 = x(t_1) = A + Bt_1 + Ct_1^2 = 8$ м; $x_2 = x(t_2) = A + Bt_2 + Ct_2^2 = -7$ м. Зная изменение координаты $\Delta x = x_2 - x_1 = -15$ м за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1 = 5$ с, определяем среднюю скорость за этот интервал времени:

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -3 \text{ м/с.}$$



t	0	1	2	3	4	5	6
x	5	8	9	8	5	0	-7
s	0	3	4	5	8	13	20

Рис. 3

4) График зависимости координаты от времени $x(t)$ представляет собой в данном случае параболу, обращенную выпуклостью вверх (коэффициент C отрицателен) и с вертикальной осью симметрии. Трех из уже найденных пар координат $(0, 5)$, $(4, 5)$, $(2, 9)$ достаточно для построения графика (сплошная линия на рис. 3). Видно, что в момент t_1 точка находится на восходящей ветви параболы, а в момент t_2 — на ее нисходящей ветви. Поэтому пройденный точкой путь Δs складывается из двух частей: $\Delta s_1 = x_{\max} - x_1 = 1$ м на отрезке времени от t_1 до t_{\max} и $\Delta s_2 = x_{\max} - x_2 = 9 - (-7) = 16$ м на отрезке времени от t_{\max} до t_2 . Полный

пройденный путь равен $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 17$ м, откуда средняя путевая скорость $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 17/5 = 3,4$ м/с. Заметим, что величина $v_{\text{ср}}$ всегда положительна.

К произвольному моменту времени $t \leq t_{\max}$ точка проходит путь $s(t) = x(t) - x(0) = Bt + Ct^2$. Эта часть графика представляет собой ту же параболу, все точки которой смещены вниз на величину $A = 5$ м. Если же произвольный момент времени $t \geq t_{\max}$, то пройденный путь складывается из пути $x_{\max} - x(0)$, пройденного за время от $t = 0$ до t_{\max} , и пути $x_{\max} - x(t)$, пройденного за время от t_{\max} до t . В результате для моментов времени $t \geq t_{\max}$ получаем следующее выражение для пройденного пути:

$$s(t) = 2x_{\max} - x(0) - x(t) = \frac{-B^2}{2C} - Bt - Ct^2.$$

График этой части представляет собой отражение относительно прямой $x = 9$ нисходящей ветви графика $x(t)$, все точки которой после отражения смещены по вертикали так, что обе найденные ветви графика $s(t)$ совпадают в точке t_{\max} . Подставляя числовые значения коэффициентов A, B, C , выражения для обеих ветвей функции $s(t)$ можно объединить в одно: $s(t) = 4 + (t - 2)|t - 2|$. Зависимость пройденного пути $s(t)$ от времени изображена на рис. 3 пунктирной линией.

Проверим наши вычисления средней путевой скорости. К моменту $t_1 = 1$ с пройденный путь равен $s(t_1) = 4 - 1 = 3$ м, к моменту $t_2 = 6$ с он составляет $s(t_2) = 20$ м. Поэтому путь, пройденный за интервал времени между t_1 и t_2 , равен $\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = 17$ м, что совпадает с полученным ранее результатом и приводит, естественно, к той же самой средней скорости.

ПРИМЕР 5. Материальная точка движется по прямой согласно уравнению

$$x(t) = A_1 t + A_2 t^3; \quad A_1 = 4 \text{ м/с}; \quad A_2 = -2 \text{ м/с}^3.$$

Найти положение, скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Положение точки $x(2) = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3 = -8$ м, ее скорость $v(t) = \dot{x}(t) = A_1 + 3A_2t^2$, поэтому $v(2) = 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2^2 = -20$ м/с. Ускорение $a(t) = \dot{v}(t) = 6A_2t$, отсюда $a(2) = -6 \cdot 2 \cdot 2 = -24$ м/с².

ПРИМЕР 6. Автомобиль движется по прямой из пункта A в пункт B , преодолевая это расстояние за время $T = 1$ ч. Известно, что скорость автомобиля меняется по закону $v(t) = v_0 \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)$, где время t отсчитывается с момента выезда из пункта A , а максимальная скорость автомобиля $v_0 = 80$ км/ч. Определить среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$ автомобиля и расстояние S между пунктами A и B .

Решение. Поскольку на заданном интервале времени скорость автомобиля всегда положительна, средняя путевая скорость в этой задаче совпадает со средней скоростью. Если отсчитывать расстояния от пункта A , то в момент времени t удаление автомобиля составит

$$x(t) = \int_0^t dtv(t) = v_0 \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) dt = \frac{v_0 T}{\pi} \left(1 - \cos\frac{\pi t}{T}\right).$$

Удаление в начальный момент равно нулю: $x(0) = 0$ м; удаление в момент прибытия в пункт B равно $x(T) = 2v_0T/\pi$. Отсюда следует, что расстояние между пунктами равно $S = x(T) - x(0) = 2v_0T/\pi \approx 50,9$ км, а средняя путевая скорость $v_{\text{ср}} = S/T = 2v_0/\pi \approx 50,9$ км/ч.

ПРИМЕР 7. Автомобиль движется по прямой из пункта A в пункт B , расстояние между которыми $S = 1$ км. Скорость автомобиля меняется в зависимости от пройденного пути s по закону $v(s) = v\sqrt{s/S}$, где $v = 72$ км/ч — скорость автомобиля в конце пути. Определить скорость автомобиля v_1 через время $t_1 = 1$ мин после начала движения, полное время в пути T и среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$.

Решение. Мгновенная скорость определяется как $v(s) = ds/dt$. Поскольку скорость задана как функция расстояния, разделим переменные $dt = ds/v(s)$, после чего проинтегрируем это соотношение:

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v(s)} = \frac{\sqrt{S}}{v} \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{2\sqrt{sS}}{v}.$$

Отсюда находим s и v как функции времени:

$$s(t) = \frac{v^2 t^2}{4S}; \quad v(t) = \dot{s}(t) = \frac{tv^2}{2S}.$$

Поскольку $t_1 = 1$ мин = $(1/60)$ ч, то легко определяем скорость $v_1 = v(t_1) = 72^2(1/60)/(2 \cdot 1) = 43,2$ км/ч. Из соотношения $s(T) = S$ находим полное время в пути: $T = 2S/v = 2/72 = 1/36$ ч = 1 мин 40 с. Средняя путевая скорость $v_{\text{ср}} = S/T = v/2 = 36$ км/ч.

ПРИМЕР 8. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 19,6$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту.

Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) наименьшую скорость тела во время движения; 2) координаты точки, в которой угол между направлениями скорости и ускорения $\beta = 45^\circ$; 3) тангенциальное и нормальное ускорения в начале и конце траектории, а также в ее высшей точке.

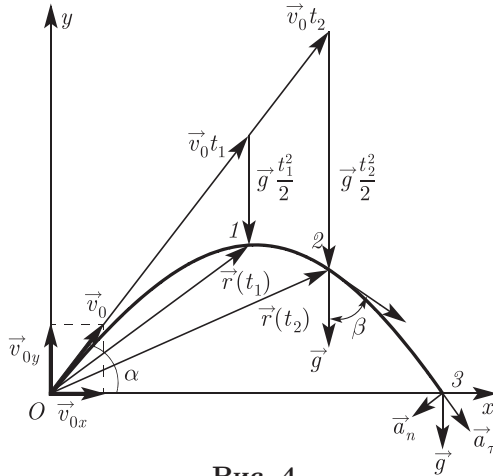


Рис. 4

Решение. Введем координатные оси, направленные по горизонтали (Ox) и вертикали (Oy), поместим начало координат в ту точку, где находилось тело в начальный момент времени (рис. 4). Движение в поле сил тяжести происходит с постоянным ускорением \vec{g} ($g_x = 0$; $g_y = -g$).

Скорость и перемещение тела определяются уравнениями

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}; \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} t.$$

В любой момент времени t радиус-вектор \vec{r} можно представить как сумму двух векторов: перемещения $\vec{v}_0 t$ в отсутствие силы тяжести и перемещения $\frac{\vec{g} t^2}{2}$ свободного падения в отсутствие начальной скорости.

Начальную скорость \vec{v}_0 разложим на две составляющие:

$$\vec{v} = \{v_0 \cos \alpha; \quad v_0 \sin \alpha\}$$

и запишем уравнения движения тела в проекциях на координатные оси:

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Соответственно для скорости имеем уравнения

$$v_x = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt,$$

т. е. движение в горизонтальном направлении происходит с постоянной скоростью, а движение в вертикальном направлении является равнопеременным. В момент времени $t_1 = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$ вертикальная

составляющая скорости обращается в нуль (точка 1 на рис. 4). Это и есть точка наивысшего подъема тела. В ней тело имеет наименьшую скорость $v_{\min} = v_x = v_0 \cos \alpha$. Подставляя числовые значения, находим $v_{\min} = 9,8$ м/с.

Поскольку ускорение направлено вертикально вниз, котангенс угла между скоростью и ускорением выражается как $\operatorname{ctg} \beta = -\frac{v_y}{v_x}$. Учитывая указанную зависимость компонент скорости от времени, находим момент времени, в который угол между скоростью и ускорением равен β :

$$t_\beta = \frac{v_0}{g} (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{ctg} \beta).$$

Подставляя этот момент времени в уравнения перемещения тела, получаем зависимость координат от β :

$$x_\beta = \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{ctg} \beta);$$

$$y_\beta = \frac{v_0^2}{2g} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta).$$

Используя исходные числовые значения, находим координаты точки 2, в которой $\beta = 45^\circ$: $x_2 = 26,8$ м, $y_2 = 9,8$ м.

Полное ускорение в любой точке траектории равно по модулю g и направлено вниз. Тангенциальное ускорение всегда направлено по касательной к траектории параллельно скорости. В высшей точке траектории (точка 1 на рис. 4) тангенциальное ускорение равно нулю ($a_\tau = a_x = 0$). Соответственно $a_n = g$. В конечной точке траектории (точка 3 на рис. 4) из треугольника ускорений $\vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{g}$ получаем

$$a_\tau = g \sin \alpha = 8,5 \text{ м/с}^2; \quad a_n = g \cos \alpha = 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Такие же соотношения справедливы и для начальной точки траектории (точка O на рис. 4).

ПРИМЕР 9. Автомашина начинает движение с нулевой скоростью по прямому пути сначала с ускорением $a = 5 \text{ м/с}^2$, затем движется равномерно и, наконец, замедляется до остановки с тем же по модулю ускорением a . Полное время движения $\tau = 25$ с. Средняя путевая скорость оказалась равной $v_{\text{ср}} = 72 \text{ км/ч}$. Сколько времени T автомашина двигалась равномерно? Найти скорость равномерного движения.

Решение. Обозначим через T' время, в течение которого автомобиль двигался равноускоренно. За это время он прошел расстояние $s_1 = aT'^2/2$ и набрал скорость $v_0 = aT'$. Двигаясь равнозамедленно, автомобиль затратит такое же время T' , чтобы его скорость уменьшилась до нуля, и пройдет такой же путь $s_3 = aT'^2/2$.

Полное время движения $\tau = T + 2T'$, откуда $T' = (\tau - T)/2$. Длина участка равномерного движения

$$s_2 = v_0 T = aT' T.$$

Складывая s_1 , s_2 , s_3 и подставляя выражение для времени ускорения T' , получаем полный пройденный путь

$$s = \frac{a(\tau - T)^2}{4} + \frac{aT(\tau - T)}{2} = \frac{a(\tau^2 - T^2)}{4}.$$

Разделив s на полное время движения, найдем среднюю путевую скорость:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{\tau} = \frac{a(\tau^2 - T^2)}{4\tau}.$$

Отсюда искомое время равномерного движения

$$T = \tau \sqrt{1 - \frac{4v_{\text{ср}}}{a\tau}}.$$

Подставим сюда значения a , τ и $v_{\text{ср}} = 72 \text{ км/ч} = 72 \cdot 1000 / (60 \cdot 60) = 20 \text{ м/с}$:

$$T = 25 \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 25}} = 15 \text{ с}.$$

Скорость равномерного движения равна

$$v_0 = a(\tau - T)/2 = 5(25 - 15)/2 = 25 \text{ м/с}.$$

ПРИМЕР 10. Тормозящий автомобиль движется по прямой. Абсолютная величина ускорения зависит от его текущей скорости по закону $a = a_0 \sqrt{v/v_0}$, где начальные (при $t = 0$) значения скорости и ускорения автомобиля равны $v_0 = 90 \text{ км/ч}$ и $a_0 = 10 \text{ м/с}^2$. Какой путь s пройдет автомобиль до остановки? За какое время T этот путь будет пройден?

Решение. Сначала найдем зависимость скорости автомобиля от времени. Поскольку автомобиль тормозит и a — абсолютная величина ускорения, имеем

$$\frac{dv}{dt} = -a = -a_0 \sqrt{\frac{v}{v_0}}.$$

Преобразуем, а затем проинтегрируем это уравнение:

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{a_0}{\sqrt{v_0}} dt \Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{a_0}{\sqrt{v_0}} \int dt + c \Rightarrow 2\sqrt{v} = -\frac{a_0}{\sqrt{v_0}} t + 2\sqrt{v_0}.$$

Значение произвольной постоянной интегрирования (второе слагаемое в правой части) выбрано так, чтобы удовлетворялось начальное условие $v = v_0$ при $t = 0$. Отсюда скорость

$$v = v_0 \left(1 - \frac{a_0 t}{2v_0}\right)^2.$$

При $t = 2v_0/a_0$ она обращается в нуль, поэтому до остановки пройдет время

$$T = \frac{2v_0}{a_0} = \frac{2 \cdot 25}{10} = 5 \text{ с}$$

(здесь используется значение $v_0 = 90 \text{ км/ч} = 25 \text{ м/с}$). Пройденный путь находим по общей формуле

$$S = \int_0^T v(t) dt = v_0 \int_0^{2v_0/a_0} \left(1 - \frac{a_0 t}{2v_0}\right)^2 dt.$$

Выполняя замену переменных $x = 1 - a_0 t / (2v_0)$, приводим интеграл к виду

$$s = \frac{2v_0^2}{a_0} \int_0^1 x^2 dx = \frac{2v_0^2}{3a_0} = \frac{2 \cdot 25^2}{3 \cdot 10} \approx 41,7 \text{ м}.$$

ПРИМЕР 11. Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте $h = 630$ км над поверхностью и облетает Землю за время $T = 97$ мин. Найти скорость v спутника и ускорение свободного падения g_h на этой высоте.

Решение. Зная период обращения спутника вокруг Земли $T = 97 \cdot 60 = 5,82 \cdot 10^3$ с, находим его угловую скорость $\omega = 2\pi/T = 1,08 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Радиус орбиты $R = R_{\oplus} + h = 7000$ км $= 7 \cdot 10^6$ м. Отсюда находим скорость $v = \omega R = 7560$ м/с и нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R = 8,16$ м/с². Поскольку спутник вращается равномерно, его нормальное ускорение совпадает с полным, которое и есть ускорение свободного падения g_h на этой высоте.

Решив эту задачу, можно сделать вывод: отношение ускорений свободного падения на высоте $h = 630$ км и на поверхности Земли $g_h/g = 8,16/9,81 = 0,83$ совпадает с отношением обратных квадратов радиуса орбиты и радиуса Земли $(R_{\oplus}/R)^2 = (6370/7000)^2 = 0,83$. Отсюда можно сделать вывод, что ускорение свободного падения обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли. Мы только что повторили открытый Ньютоном закон всемирного тяготения.

ПРИМЕР 12. Вращается диск радиусом $r = 20$ см. Зависимость угла поворота от времени описывается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ рад, $B = -1$ рад/с, $C = 0,1$ рад/с³. Определить тангенциальное a_{τ} , нормальное a_n и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени $t = 10$ с.

Решение. Угловую скорость диска находим дифференцированием:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Нормальное ускорение

$$a_n(t) = \omega^2(t)r = r(B + 3Ct^2)^2.$$

В момент $t = 10$ с

$$a_n(10) = 0,2(-1 + 3 \cdot 0,1 \cdot 10^2)^2 = 168,2 \text{ м/с}^2.$$

Линейная скорость точек на краю диска

$$v(t) = \omega(t)r = r(B + 3Ct^2).$$

Тангенциальное ускорение

$$a_{\tau}(t) = \frac{dv}{dt} = r6Ct.$$

В момент $t = 10$ с оно равно

$$a_{\tau}(10) = 0,2 \cdot 6 \cdot 0,1 \cdot 10 = 1,2 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение в тот же момент времени

$$a(10) = \sqrt{a_{\tau}^2(10) + a_n^2(10)} = \sqrt{1,2^2 + 168,2^2} \approx 168,2 \text{ м/с}^2.$$

ПРИМЕР 13. Маховик начал вращаться равноускоренно и за время $t = 10$ с достиг частоты вращения $\nu = 300$ об/мин. Определить угловое ускорение ε маховика и число оборотов N , которое он сделал за это время.

Решение. Так как движение равноускоренное, то угловая скорость зависит от времени по линейному закону $\omega(t) = \varepsilon t$ (в момент $t = 0$ маховик начал вращение). Разделив ее на угол 2π , соответствующий одному обороту, получим, что в момент t скорость вращения диска составляет $\nu(t) = \varepsilon t / (2\pi)$ оборотов в единицу времени. Нам дано значение $\nu(10) = 300$ об/мин $= 5$ об/с. Тогда

$$\varepsilon = \frac{2\pi\nu}{t} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 5}{10} = 3,14 \text{ рад/с}^2.$$

Если $N(t)$ — число оборотов, которые диск совершил к моменту времени t , то производная этой функции dN/dt и дает нам частоту вращения диска $\nu(t)$. Отсюда, обозначая переменную интегрирования через t' , имеем

$$N(t) = \int_0^t \nu(t') dt' = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^t t' dt' = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi} = \frac{\nu t}{2}.$$

К моменту $t = 10$ с тело совершит $N(10) = 5 \cdot 10/2 = 25$ оборотов.

1.1.В. Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.1.1. Три четверти пути тело двигалось со скоростью $v_1 = 2$ м/с, остаток пути — со скоростью $v_2 = 10$ м/с. Чему равна средняя путевая скорость $v_{\text{ср}}$?

Задача 1.1.2. Две трети пути автомобиль движется со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, четверть пути — со скоростью $v_2 = 10$ км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью $v_3 = 100$ км/ч. Чему равна средняя путевая скорость $v_{\text{ср}}$ автомобиля?

Задача 1.1.3. Машина прошла половину пути со скоростью $v_1 = 60$ км/ч. На оставшейся части пути она половину времени двигалась со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. С какой скоростью v_3 машина должна преодолеть последнюю часть пути, чтобы средняя путевая скорость оказалась равной $v_{\text{ср}} = 75$ км/ч?

Задача 1.1.4. Точка двигалась в течение времени $t_1 = 15$ с со скоростью $v_1 = 5$ м/с, в течение $t_2 = 10$ с со скоростью $v_2 = 8$ м/с и в течение $t_3 = 6$ с со скоростью $v_3 = 20$ м/с. Чему равна средняя путевая скорость $v_{\text{ср}}$ точки?

Задача 1.1.5. Движение точки по прямой задано уравнением $x = 2t - 0,5t^2$. Определить среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$ точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

Задача 1.1.6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = 6t - 0,125t^3$. Определить среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$ точки в интервале времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.

Задача 1.1.7. Корабль проходит расстояние $s_1 = 50$ км на восток за 45 мин, а затем поворачивает на юг и преодолевает расстояние

$s_2 = 100$ км за 1,5 ч. Определить: 1) величину вектора перемещения корабля; 2) величину вектора средней скорости; 3) среднюю путевую скорость.

Задача I.1.8. За 3,5 ч воздушный шар снесло на $s_1 = 21,5$ км к северу, затем на $s_2 = 9,7$ км к востоку, причем высота его подъема увеличилась на $h = 2,88$ км. Найти: 1) величину вектора его средней скорости; 2) угол β вектора средней скорости с горизонтальной плоскостью.

Задача I.1.9. Предполагается, что самолет, имеющий скорость $v = 550$ км/ч, должен лететь по прямой под углом $\varphi = 33,0^\circ$ к северу от направления на восток. Однако с севера дует постоянный ветер со скоростью $v_1 = 120$ км/ч. В каком направлении должен лететь самолет?

Задача I.1.10. Определить время полета самолета между двумя пунктами, находящимися на расстоянии $s = 500$ км, если скорость самолета относительно воздуха $v_0 = 100$ м/с, а скорость встречного ветра, направленного под углом $\alpha = 30^\circ$ к прямой, соединяющей эти пункты, равна $v_1 = 30$ м/с. Во сколько раз уменьшится время полета, если ветер будет попутным, а его скорость будет направлена под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению движения? Под каким углом к направлению движения должна быть направлена скорость самолета в обоих случаях?

Задача I.1.11. Велосипедист начал движение и в течение времени $t_1 = 5$ с ехал с ускорением $a = 1$ м/с², затем в течение следующих $t_2 = 6$ с двигался равномерно и последние 25 м — равнозамедленно до остановки. Найти среднюю скорость на всем пути.

Задача I.1.12. По прямолинейному шоссе ACD едет машина, которой необходимо за кратчайшее время добраться из пункта A в пункт B , расположенный в поле на расстоянии $l = 500$ м от дороги (рис. 5, а). Известно, что скорость машины по полю в $n = 2$ раза меньше скорости машины по шоссе. На каком расстоянии s от точки D следует свернуть с шоссе? Проанализировать роль расстояния L между пунктами A и D , находящимися на шоссе (рис. 5, б).

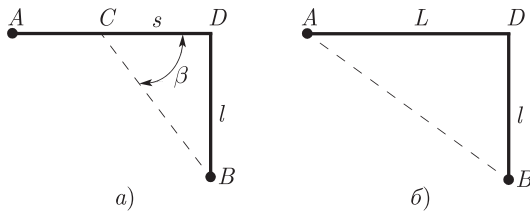


Рис. 5

Задача I.1.13. Зависимость пройденного точкой пути от времени задана уравнением $s = 0,14t^2 + 0,01t^3$ (здесь и далее в подобных задачах время измеряется в секундах, расстояние — в метрах). Определить: 1) через какое время t_1 ускорение точки будет равно $a = 1$ м/с²; 2) мгновенную скорость v_1 в этот момент времени; 3) среднюю путевую скорость v_{cp} за промежуток времени от $t = 0$ до t_1 .

Задача I.1.14. Положение объекта на прямой линии в зависимости от времени задается уравнением $x = at + bt^2 + ct^3$, где $a = -8$ м/с, $b = 6$ м/с², $c = -1$ м/с³. Найти среднюю скорость $\langle v \rangle$ объекта на временном интервале от $t_0 = 0$ с до $t_2 = 2$ с. Сравнить ее со средними скоростями $\langle v_1 \rangle$ на интервале от $t_0 = 0$ с до $t_1 = 1$ с и $\langle v_2 \rangle$ на интервале от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 2$ с.

Задача I.1.15. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = 4t + 8t^2 - 16t^3$ и $x_2 = 2t - 4t^2 + t^3$. В какой момент времени t_1 ускорения этих точек будут одинаковыми? Найти скорости v_1 и v_2 точек в этот момент.

Задача I.1.16. Движение двух материальных точек выражается уравнениями $x_1 = 20 + 4t - 4t^2$, $x_2 = 2 + t + 0,5t^2$. В какой момент времени t_1 скорости этих точек будут одинаковыми? Определить скорости v_1 и v_2 и ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент.

Задача I.1.17. Зависимость пройденного телом пути s от времени t задается уравнением $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$. Найти расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения.

Задача I.1.18. Замаскированный полицейский автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 80 км/ч, обогнал лихач, также движущийся с некоторой постоянной скоростью. Полисмен немедленно после обгона нажал на акселератор и, двигаясь с постоянным ускорением 2 м/с², догнал лихача через 6 с после обгона. Какова была скорость лихача?

Задача I.1.19. Замаскированный полицейский автомобиль, движущийся с постоянной скоростью $v_1 = 80$ км/ч, обогнал лихач, несущийся со скоростью 102 км/ч. Ровно через $\Delta t = 1$ с после обгона полисмен нажал на акселератор. Если ускорение полицейского автомобиля равно 2 м/с², то сколько времени понадобится полицейским, чтобы догнать лихача (будем полагать, что он движется с постоянной скоростью, а полицейский автомобиль способен разогнаться до достаточно большой скорости)?

Задача I.1.20. Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 50$ км/ч, врезается в дерево; передняя часть автомобиля деформируется, а тело водителя перемещается на $l = 0,7$ м и останавливается. Выразить среднее ускорение водителя во время этого столкновения в единицах величин, кратных ускорению свободного падения $g = 9,80$ м/с².

Задача I.1.21. В тот момент, когда опоздавший пассажир вбежал на платформу перрона, мимо него за время t_1 прошел предпоследний вагон. Последний вагон прошел мимо пассажира за время t_2 . На какое время t_0 опоздал пассажир к отходу поезда? Поезд двигался равноускоренно без начальной скорости.

Задача I.1.22. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0,5$ м/с². Определить полное ускорение a точки на участке кривой с радиусом кривизны $R = 3$ м, если точка движется на этом участке со скоростью $v = 2$ м/с.

Задача I.1.23. Уравнение вращения колеса радиусом $R = 0,5$ м имеет вид $\varphi = At + Bt^5$, где $A = 2$ рад/с, $B = 0,5$ рад/с⁵. Определить полное ускорение точки на ободе колеса в момент $t = 1$ с.

Задача I.1.24. Точка начинает движение по окружности радиусом $R = 10$ м. Пройденный ею путь зависит от времени по закону $s = At + Bt^3$, где $A = 8$ м/с, $B = 1$ м/с³. Определить скорость и полное ускорение точки в момент $t = 2$ с.

Задача I.1.25. По истечении времени $t = 2$ с после начала равноускоренного вращения вектор ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением линейной скорости этой точки. Найти угловое ускорение колеса.

Задача I.1.26. За время t колесо поворачивается на угол φ , зависящий от времени по закону $\varphi = 5,0t + 3,0t^2 - 4,5t^4$, причем φ измеряется в радианах, а t — в секундах. Определить: 1) среднюю скорость колеса; 2) среднее угловое ускорение за промежутки времени от $t = 2,0$ с до $t = 3,0$ с; 3) выражение для мгновенной угловой скорости ω ; 4) выражение для мгновенного углового ускорения ε ; 5) значения мгновенной угловой скорости и мгновенного углового ускорения в момент времени $t = 3,0$ с.

Задача I.1.27. Колесо диаметром 40 см вращается с постоянным ускорением так, что за 3,6 с частота вращения возрастает от 80 до 300 об/мин. Вычислить: 1) угловое ускорение колеса; 2) радиальную и тангенциальную составляющие вектора линейного ускорения точки на ободе колеса через 2,0 с после начала ускоренного движения колеса.

Задача I.1.28. Два резиновых диска расположены рядом друг с другом так, что их края соприкасаются. Первый диск радиусом $R_1 = 3,0$ см начинает вращаться с угловым ускорением $\varepsilon = 0,88$ рад/с² и заставляет вращаться второй диск радиусом $R_2 = 5,0$ см, причем второй диск вращается относительно первого диска без проскальзывания. Определить: 1) за какой промежуток времени второй диск достигает угловой скорости 33 об/мин, если в начальный момент он находился в покое; 2) угловое ускорение второго диска.

Задача I.1.29. Колеса автомобиля совершили 55 оборотов за промежуток времени, в течение которого скорость равномерно уменьшилась от 80 км/ч до 55 км/ч. Диаметр колеса равен 1,0 м. 1) Определить, чему было равно угловое ускорение колеса. 2) Если автомобиль продолжает замедляться в том же темпе, то сколько времени ему понадобится до полной остановки?

Задача I.1.30. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав $N = 50$ полных оборотов, оно изменило частоту вращения от $\nu_0 = 4$ с⁻¹ до $\nu_1 = 6$ с⁻¹. Определить угловое ускорение ε колеса.

Задача I.1.31. Колесо, вращаясь равноускоренно из состояния покоя, достигло угловой скорости $\omega = 125,6$ рад/с после того, как сделало $N = 314$ полных оборотов. Найти угловое ускорение колеса.

Задача I.1.32. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с². Через промежуток времени $t = 0,5$ с после начала движения полное ускорение точек на ободе колеса стало равно $a = 13,6$ м/с². Найти радиус колеса.

Задача I.1.33. Пуля пущена с начальной скоростью $v_0 = 200$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Определить максимальную высоту H подъ-

ема, дальность s полета, радиус R кривизны траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача I.1.34. Самолет, пролетая над зенитной батареей на высоте $H = 1$ км, начинает пикировать с выключенным двигателем на цель со скоростью $v_1 = 540$ км/ч, направленной под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Самолет сбивают из орудия выстрелом, произведенным в тот момент, когда он находился над батареей. Скорость снаряда при вылете из ствола орудия $v_2 = 600$ м/с. Определить, на каком расстоянии от батареи, считая по горизонтальному направлению, снаряд попал в самолет.

Задача I.1.35. Тело брошено со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найти радиус кривизны траектории через $t = 1$ с.

Задача I.1.36. На большой горизонтальной поверхности закреплена маленькая пушка, которая выстреливает снаряд со скоростью $v_0 = 50$ м/с. На расстоянии $l = 50$ м от пушки находится вертикальная стена высотой $h = 25$ м. Поставлена задача, чтобы снаряд упал как можно дальше за стеной. Под каким углом α к горизонту следует стрелять и как далеко улетит снаряд за стену? ($g = 10$ м/с², сопротивление воздуха не учитывать.)

Задача I.1.37. Тело брошено под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в начальный момент движения.

Задача I.1.38. Спортсмен толкает ядро с начальной скоростью $v_0 = 14,0$ м/с под углом $\alpha = 41^\circ$ к горизонту. Вычислить расстояние s , пройденное ядром по горизонтали. Ядро отрывается от руки спортсмена на высоте $h = 2,2$ м над землей. (Ускорение свободного падения равно $9,8$ м/с².)

Задача I.1.39. Центр воздушного шара радиусом R покоится на высоте $h = 3R$ над поверхностью земли. С какой минимальной начальной скоростью v_0 , под каким углом α и с какого расстояния S надо бросить с горизонтальной поверхности земли камушек, чтобы он перелетел через шар? Камушек не должен испытывать столкновения, изменяющие направление его движения.

1.2. Динамика материальной точки и тела, движущегося поступательно

1.2.A. Основные формулы

- Второй закон Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

где $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ — геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; $\vec{p} = m\vec{v}$ — ее импульс; n — количество сил, действующих на точку.

Если масса постоянна, то второй закон Ньютона классической механики может быть выражен формулой

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

- Если неизвестен точный закон, по которому изменяется полная сила $\vec{F}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i(t)$, действующая на тело, то можно использовать понятие средней силы $\langle \vec{F} \rangle$ за какой-то промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ от момента t_1 до момента t_2 :

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt.$$

Тогда уравнение второго закона Ньютона можно записать в виде

$$\Delta \vec{p} = \langle \vec{F} \rangle \Delta t,$$

где $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ — изменение импульса за тот же промежуток времени.

- Сила, действующая на материальную точку, движущуюся по кривой, может быть разложена на две составляющие — тангенциальную и нормальную.

Тангенциальная (или касательная) сила

$$\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau = m \frac{dv}{dt} \vec{\tau},$$

где $\vec{\tau}$ — единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Нормальная (или центростремительная) сила

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = m \frac{v^2}{R} \vec{n},$$

где R — радиус кривизны траектории; \vec{n} — единичный вектор, направленный по нормали к траектории.

- Сила трения скольжения

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu N \vec{e}_v,$$

где μ — коэффициент трения скольжения; N — абсолютная величина силы нормального давления; \vec{e}_v — единичный вектор в направлении скорости тела.

- Сила упругости

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\Delta l = -k(x - x_0),$$

где k — коэффициент жесткости; x — координата незакрепленного конца пружины; x_0 — она же для нерастянутой пружины. Знак «минус» показывает, что сила направлена в сторону, обратную деформации.

- Сила гравитационного взаимодействия

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r},$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}^2}$ — гравитационная постоянная; $r = |\vec{r}_{12}|$; \vec{r}_{12} — радиус-вектор тела 2 относительно тела 1. Знак «минус» указывает на притяжение тел.

- Закон сохранения импульса: *полный импульс замкнутой системы есть величина постоянная*, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const}.$$

- Применение закона сохранения импульса к соударению двух тел:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2,$$

где \vec{v}_i, \vec{u}_i ($i = 1, 2$) — скорости тел 1 и 2 до и после соударений соответственно.

- При неупругом ударе, когда тела слипаются после соударения, их общая скорость \vec{u} становится равной

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{I.2.1})$$

1.2.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 14. В лифте на пружинных весах подвешено тело массой $m = 10$ кг. Определить показания весов в трех случаях: 1) лифт покоится (или движется равномерно); 2) ускорение лифта направлено вертикально вверх и 3) вертикально вниз. Ускорение лифта $a = 2$ м/с².

Решение. На тело действуют две силы: сила земного тяготения $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} . Определить показания весов значит найти силу веса P тела, т. е. силу, с которой тело действует на пружину. Но по третьему закону Ньютона она равна абсолютному значению и противоположна по направлению силе реакции опоры \vec{N} , т. е. $\vec{P} = -\vec{N}$.

Теперь остается составить уравнение второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{P},$$

откуда

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

- 1) Когда тело покоится (или движется равномерно), $\vec{a} = 0$ и сила тяжести уравновешивается силой реакции опоры: $\vec{P} = m\vec{g}$, или $P = mg$.
- 2) Если лифт движется вверх с ускорением a , то направления \vec{g} и \vec{a} противоположны, так что $P = m(g + a)$. Иными словами, весы покажут бóльший вес тела (перегрузка), чем в состоянии покоя.
- 3) Если лифт движется вниз с ускорением $a \leq g$, то направления \vec{g} и \vec{a} одинаковы, так что $P = m(g - a)$. Здесь весы покажут меньший вес, чем в состоянии покоя. При свободном падении, когда лифт движется вниз с ускорением $a = g$, получаем $P = 0$ (состояние невесомости). При опускании лифта с еще бóльшим ускорением вес

становится отрицательным ($P < 0$): в этом случае тело не растягивает, а сжимает пружину весов.

Подставляя числовые данные, находим: 1) $P = 98$ Н; 2) $P = 118$ Н; 3) $P = 78$ Н.

ПРИМЕР 15. Лифт состоит из кабины, мотора, приводящего ее в движение, и противовеса (рис. 6). Масса кабины с грузкой $m = 1000$ кг, масса противовеса $M = 1400$ кг. Лифт поднимается с ускорением $a = 2$ м/с². Пренебрегая трением, массой троса и блоков и считая трос нерастяжимым, найти натяжения T_1 и T_2 троса. Чему равна сила T , действующая на мотор? Как изменятся силы, если лифт начнет опускаться с тем же ускорением?

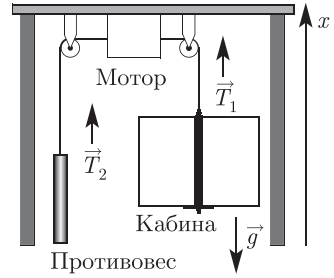


Рис. 6

Решение. Нерастяжимость троса означает, что длина его части между кабиной и противовесом остается неизменной. Следовательно, кабина и противовес движутся как единое целое — модули их скоростей и ускорений совпадают. Роль блоков сводится только к изменению направления действия сил и движения. Выберем положительное направление оси координат. На кабину (противовес) действует сила натяжения троса T_1 (T_2) и сила притяжения $-mg$ ($-Mg$), так что они движутся с ускорением a ($-a$). Имеем два уравнения движения:

$$ma = T_1 - mg; \quad -Ma = T_2 - Mg, \quad (I.2.2)$$

откуда

$$\begin{aligned} T_1 &= m(a + g) = 1000(2 + 9,8) = 11\,800 \text{ Н}; \\ T_2 &= M(g - a) = 1400(9,8 - 2) = 10\,920 \text{ Н}. \end{aligned} \quad (I.2.3)$$

Со стороны противовеса на мотор действует сила T_2 , направленная влево, а со стороны кабины — сила T_1 , направленная вправо. Результирующая сила $T = T_1 - T_2 = 880$ Н направлена вправо.

Чтобы найти силы при движении кабины вниз, достаточно изменить знак ускорения a в формулах (I.2.3):

$$\begin{aligned} T_1 &= m(g - a) = 1000(9,8 - 2) = 7800 \text{ Н}; \\ T_2 &= M(a + g) = 1400(2 + 9,8) = 16\,520 \text{ Н}; \\ T &= T_1 - T_2 = -8720 \text{ Н}. \end{aligned} \quad (I.2.4)$$

Отрицательный знак у силы, стремящейся сдвинуть мотор, означает, что она направлена в противоположную сторону по сравнению с предыдущим случаем.

Замечание. Часто предлагаемая задача о двух грузах на блоках отличается от решенной нами отсутствием мотора. Если трением и массой блоков можно пренебречь, то это приводит к равенству сил натяжения по обе стороны от троса.

ПРИМЕР 16. На шероховатой горизонтальной поверхности расположены $n = 10$ одинаковых кубов массой $m = 5$ кг каждый (рис. 7). Коэффициент трения о поверхность $\mu = 0,15$.

С какой силой T_1 надо тянуть первый куб, чтобы система двигалась с ускорением $a = 3$ м/с²? Чему равны при этом натяжения тросов, соединяющих кубы? Предполагается, что тросы нерастяжимы и их массой можно пренебречь.

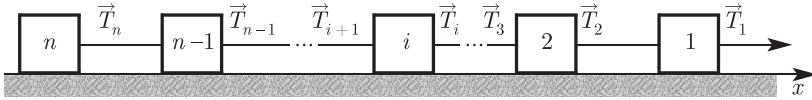


Рис. 7

Решение. Обозначения даны на рис. 7. На куб с номером i ($i = 1, 2, \dots, n$) в положительном направлении оси координат действует сила T_i , а в отрицательном — сила T_{i+1} (кроме последнего куба). Кроме того, на каждый куб в отрицательном направлении оси действует сила трения μmg . Записываем уравнения движения для каждого куба:

$$\begin{aligned} ma &= T_1 - T_2 - \mu mg; \\ ma &= T_2 - T_3 - \mu mg; \\ &\dots \\ ma &= T_i - T_{i+1} - \mu mg; \\ &\dots \\ ma &= T_{n-1} - T_n - \mu mg; \\ ma &= T_n - \mu mg. \end{aligned} \tag{I.2.5}$$

Начинаем решать уравнения с последнего: $T_n = m(a + \mu g)$. Подставляя это решение в предпоследнее уравнение, находим $T_{n-1} = 2m(a + \mu g)$. Повторяя процедуру, получаем $T_i = (n + 1 - i)m(a + \mu g)$ и при $i = 1$ имеем $T_1 = nm(a + \mu g)$. Подставляем числовые значения: $T_n = 5(3 + 0,15 \cdot 9,8) = 22,35$ Н; $T_i = 22,35(11 - i)$ Н; $T_1 = 223,5$ Н.

ПРИМЕР 17. Невесомый блок укреплен на верхней кромке наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 8). Через блок перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 2$ кг. Найти: 1) ускорение a , с которым движутся грузы; 2) натяжение T нити. Массу блока считать пренебрежимо малой, а нить — нерастяжимой и не проскальзывающей относительно блока. Коэффициент трения первого груза о наклонную плоскость $\mu = 0,1$, трением в блоке пренебречь.

Решение. Прежде всего надо уяснить роль введенных условий. Нерастяжимость нити означает одинаковость перемещений грузов, что ведет к одинаковости абсолютных величин их ускорений. Поскольку массой блока пренебрегаем и трение в нем с нитью отсутствует, силы натяжения обоих концов нити одинаковы.

Теперь составим уравнения второго закона Ньютона для каждого груза. На первый груз действуют сила тяжести $m_1 \vec{g}$, сила нормальной реакции опоры \vec{N} , сила натяжения нити \vec{T}_1 , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 8).

Соответственно второй закон Ньютона имеет вид

$$m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} = m_1 \vec{a}_1. \quad (\text{I.2.6})$$

На второй груз действуют сила тяжести $m_2 \vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T}_2 , поэтому второй закон Ньютона записывается как

$$m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2. \quad (\text{I.2.7})$$

Чтобы решить эти уравнения, надо перейти к их проекциям. Здесь и заключается «провокационность» данной задачи. В самом деле, заранее неизвестно, в какую сторону будут двигаться грузы. Возможны три альтернативных варианта: 1) первый груз спускается вдоль наклонной плоскости, а второй поднимается вверх; 2) второй груз опускается вниз и тащит первый груз вверх по наклонной плоскости; 3) грузы покоятся.

Рассмотрим здесь вариант 1. Именно этот вариант изображен на рис. 8 (сила трения направлена вверх вдоль наклонной плоскости, т. е. против движения первого груза). Чтобы перейти от векторных к скалярным величинам, выберем координатные оси. Для первого груза удобно направить ось x_1 вдоль наклонной плоскости, а ось y_1 ортогонально к ней (см. рис. 8). Проецируя уравнение (I.2.6) на направления осей x_1 и y_1 , получаем два уравнения

$$m_1 g \sin \alpha - T - \mu N = m_1 a; \quad (\text{I.2.8})$$

$$-m_1 g \cos \alpha + N = 0. \quad (\text{I.2.9})$$

Здесь используется соотношение $F_{\text{тр}} = \mu N$ и обозначение $|\vec{T}_1| = T$. В данном варианте ускорение первого груза направлено вдоль наклонной плоскости вниз, в положительном направлении оси x_1 ; модуль ускорения $|\vec{a}_1| = a$.

Из (I.2.9) находим $N = m_1 g \cos \alpha$. Подставляя это выражение в (I.2.8), получаем

$$m_1 g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - T = m_1 a. \quad (\text{I.2.10})$$

Уравнение движения второго груза записываем в проекциях на оси x_2, y_2 , которые удобно выбрать в горизонтальном и вертикальном направлениях (см. рис. 8). Проекция на ось x_2 дает тривиальное тождество ($0 = 0$), а проекция на ось y_2 имеет вид

$$-m_2 g + T = m_2 a. \quad (\text{I.2.11})$$

Здесь используется равенство натяжений нити по обе стороны блока (блок по условию невесомый): $|\vec{T}_2| = |\vec{T}_1| = T$. Второй груз движется

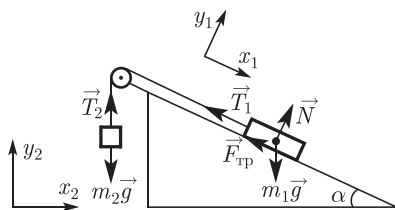


Рис. 8

в положительном направлении оси y_2 , а его ускорение равно ускорению первого груза.

Складывая почленно уравнения (I.2.10) и (I.2.11), взаимно уничтожаем неизвестную силу натяжения T и находим ускорение грузов:

$$a = g \frac{m_1(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{I.2.12})$$

Предполагается, что первый груз движется вдоль наклонной плоскости вниз, следовательно, величина a должна быть положительной, а это возможно при положительной величине числителя выражения (I.2.12), т. е. при определенном соотношении между параметрами задачи. А именно должно выполняться неравенство

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha \geq \frac{m_2}{m_1}. \quad (\text{I.2.13})$$

Подставим числовые данные задачи для проверки указанного условия. В левой части (I.2.13) получаем число $1/2 - 0,1\sqrt{3}/2 = 0,413$, а в правой части — число $2/5 = 0,4$. Таким образом, условие выполнено и можно подставить числовые данные для нахождения ускорения:

$$a = 9,81 \frac{5(0,5 - 0,1 \cdot 0,866) - 2}{7} = 0,094 \text{ м/с}^2.$$

Натяжение нити получим из формулы (I.2.11):

$$T = m_2(g + a) = 2(9,81 + 0,094) = 19,8 \text{ Н.}$$

ПРИМЕР 18. Решить пример 17, если массы грузов поменять местами: $m_1 = 2$ кг, а $m_2 = 5$ кг. Остальные условия задачи те же.

Решение. Для начала проверим выполнение условия (I.2.13). Так как в его левой части стоит то же самое число 0,413, а в правой части — число $5/2 = 2,5$, то это условие не выполняется, и наше предположение о реализации варианта 1 в этот раз оказалось неверным. Значит, надо решить задачу для варианта 2. Теперь грузы движутся в противоположном направлении, т. е. в проекциях уравнений движения надо изменить знак ускорения a . Но самое главное, сила трения также изменила знак и направлена теперь вдоль наклонной плоскости вниз. Можно решить задачу в соответствии с изложенным выше примером, но можно и сразу определить правильный ответ. Изменение знака силы трения учтем, изменив в (I.2.12) знак перед μ . Кроме этого, меняем общий знак перед всем выражением. Тогда

$$a = g \frac{m_2 - m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}. \quad (\text{I.2.14})$$

Поскольку модуль ускорения обозначен через a , он должен быть положительным, т. е. должно выполняться условие

$$\sin \alpha + \mu \cos \alpha \leq \frac{m_2}{m_1}. \quad (\text{I.2.15})$$

Подставим теперь числовые данные. В правой части стоит число $1/2 + 0,1\sqrt{3}/2 = 0,587$, а в левой — число $5/2 = 2,5$. Условие выпол-

няется, и теперь можно вычислить ускорения грузов:

$$a = 9,81 \frac{5 - 2(0,5 + 0,1 \cdot 0,866)}{7} = 5,36 \text{ м/с}^2.$$

Натяжение нити найдем из уравнения (I.2.11), в котором надо только не забыть поменять знак у a :

$$T = m_2(g - a) = 5(9,81 - 5,36) = 22,3 \text{ Н}.$$

Теперь ясно, что грузы будут покоиться (вариант 3), когда не выполнено ни одно из условий (I.2.13), (I.2.15), т. е. когда

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha \leq \frac{m_2}{m_1} \leq \sin \alpha + \mu \cos \alpha. \quad (\text{I.2.16})$$

Чтобы в этом убедиться, решим еще одну задачу для той же системы.

ПРИМЕР 19. Решить пример 17, если массы грузов $m_1 = 4,5$ кг, а $m_2 = 2$ кг. Остальные условия задачи те же. Чему равна и куда направлена сила трения?

Решение. Отношение масс $m_2/m_1 = 2/4,5 = 0,444$. Это число превышает 0,413 и меньше числа 0,587. Следовательно, варианты 1 и 2 не годятся для решения задачи. Поэтому будем искать условия, когда система находится в покое ($a = 0$). Рассмотрим вариант 3. В этом случае для силы трения используем формулу $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu N$, потому что сила трения покоя может не достичь своего максимального значения. Единственное, что нам известно, — это неравенство $|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq \mu N$. Проекция уравнений движения (I.2.6), (I.2.7) приобретают теперь вид

$$\begin{aligned} m_1 g \sin \alpha - T + F_{\text{тр}} &= 0; \\ N - m_1 g \cos \alpha &= 0; \\ T - m_2 g &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.2.17})$$

Здесь сила трения $F_{\text{тр}}$ понимается алгебраически: если ее знак положителен, то сила направлена вдоль наклонной плоскости вниз, если знак отрицателен — вверх. Подставляя выражения $T = m_2 g$ и $N = m_1 g \cos \alpha$ в первое из этих уравнений, находим силу трения:

$$F_{\text{тр}} = g(m_2 - m_1 \sin \alpha). \quad (\text{I.2.18})$$

Если

$$\frac{m_2}{m_1} \geq \sin \alpha, \quad (\text{I.2.19})$$

то сила трения положительна, т. е. направлена вниз. Если же

$$\frac{m_2}{m_1} \leq \sin \alpha, \quad (\text{I.2.20})$$

то сила трения отрицательна, т. е. направлена вверх.

Теперь найдем область применения полученного решения. Она задается упоминавшимся неравенством $|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq \mu N = \mu m_1 g \cos \alpha$. Когда выполнено неравенство (I.2.19), $|\vec{F}_{\text{тр}}| = F_{\text{тр}}$, т. е.

$g(m_2 - m_1 \sin \alpha) \leq \mu m_1 g \cos \alpha$. Отсюда вместе с (I.2.19) получаем, что при выполнении двойного неравенства

$$\sin \alpha \leq \frac{m_2}{m_1} \leq \sin \alpha + \mu \cos \alpha \quad (\text{I.2.21})$$

система находится в покое, причем сила трения направлена вниз. Когда же выполнено неравенство (I.2.20), $|\vec{F}_{\text{тр}}| = -F_{\text{тр}}$, т. е. $g(-m_2 + m_1 \sin \alpha) \leq \mu m_1 g \cos \alpha$. Отсюда вместе с (I.2.20) получаем, что при выполнении двойного неравенства

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha \leq \frac{m_2}{m_1} \leq \sin \alpha \quad (\text{I.2.22})$$

система находится в покое, причем сила трения направлена вверх. Ясно, что оба уравнения (I.2.21), (I.2.22) эквивалентны условию (I.2.16), которое мы уже угадали раньше.

Подставляя числовые данные, находим $F_{\text{тр}} = 9,8(2 - 4,5 \cdot 0,5) = -2,45$ Н. Сила отрицательна, т. е. направлена вдоль плоскости вверх, как и должно быть, поскольку отношение масс $0,444$ меньше $\sin 30^\circ = 0,5$.

I.2.B. Задачи для самостоятельной работы

Задача I.2.1. К нити подвешен груз массой $m = 2$ кг. Найти силу натяжения нити, если нить с грузом: 1) поднимать с ускорением $a = 3$ м/с²; 2) опускать с тем же ускорением.

Задача I.2.2. Масса лифта с пассажирами $m = 800$ кг. Найти, с каким ускорением и в каком направлении движется лифт, если известно, что натяжение троса: 1) $T_1 = 12\,000$ Н; 2) $T_2 = 6000$ Н.

Задача I.2.3. Судно идет вдоль экватора со скоростью V . Показать, что вес P тела, взвешиваемого на корабле, приблизительно равен $P = P_0(1 \pm 4\pi nV/g)$, где n — частота вращения Земли (в оборотах в секунду). Почему здесь имеются оба знака \pm ? Считается, что P_0 — вес тела, измеренный в условиях, когда судно находится в покое относительно Земли.

Задача I.2.4. Соппротивление воздуха, действующее на падающее тело, можно учесть с помощью приближенного выражения для ускорения $a = dv/dt = g - kv$, где k — постоянная. 1) Вывести формулу для скорости тела в зависимости от времени, предполагая, что движение начинается из состояния покоя ($v(0) = 0$ при $t = 0$). 2) Найти выражение для установившейся скорости, которая является максимально достижимой.

Задача I.2.5. Из-за вращения Земли с суточным периодом ускорение свободного падения на экваторе несколько меньше, чем оно было бы, если бы Земля не вращалась. Оценить величину этого эффекта. Какую долю он составляет от величины g ?

Задача I.2.6. Мяч массой $m = 0,2$ кг под действием удара приобретает скорость $v = 15$ м/с. Длительность удара $\Delta t = 0,02$ с. Определить среднее значение $\langle F \rangle$ силы удара.

Задача I.2.7. Согласно упрощенной модели сердца млекопитающего при каждом сокращении около 20 г крови ускоряется от скорости 0,25 м/с до скорости 0,35 м/с за время 0,1 с. Чему равна при этом средняя величина силы, развиваемой сердечной мышцей?

Задача I.2.8. Вертолет массой $m = 3,5$ т с ротором, диаметр d которого равен 18 м, висит в воздухе. С какой скоростью v ротор отбрасывает вертикально вниз струю воздуха? Диаметр струи считать равным диаметру ротора, плотность воздуха $\rho = 1,29$ кг/м³.

Задача I.2.9. Ракета массой $m = 1$ т поднимается с поверхности Земли вертикально вверх с ускорением $a = 2g$. Скорость струи газов из сопла $v = 1200$ м/с. Найти расход Q_m горючего в единицу времени.

Задача I.2.10. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с наклонной плоскости длиной $l = 2$ м за время $t = 2$ с. Определить коэффициент трения μ тела о плоскость. Угол наклона $\alpha = 30^\circ$.

Задача I.2.11. Материальная точка массой $m = 1$ кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиусом $R = 1,2$ м в течение времени $t = 2$ с. Найти изменение импульса $|\Delta\vec{p}|$ точки.

Задача I.2.12. Абсолютно упругий шар массой $m = 100$ г ударился по нормали о стену со скоростью $v = 15$ м/с и отскочил от нее с той же скоростью. Определить импульс p , полученный стеной.

Задача I.2.13. Определить импульс системы из двух тел, движущихся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями $v_1 = 3$ м/с и $v_2 = 4$ м/с; массы тел $m_1 = m_2 = 1$ кг.

Задача I.2.14. Диск радиусом $R = 40$ см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска стоит кубик. Принимая, что коэффициент трения $\mu = 0,4$, найти, при какой частоте вращения кубик соскользнет с диска.

Задача I.2.15. Самолет описывает петлю Нестерова радиусом $R = 200$ м. Во сколько раз сила F , с которой летчик давит на сиденье в нижней точке, больше нормального веса P летчика, если скорость самолета $v = 100$ м/с? (Считать, что ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².)

Задача I.2.16. Грузик, привязанный к шнуру длиной $l = 50$ см, описывает окружность в горизонтальной плоскости (рис. 9). Какой угол α образует шнур с вертикалью, если частота вращения $\nu = 1$ с⁻¹?

Задача I.2.17. Из ружья массой $m_1 = 5$ кг вылетает пуля массой $m_2 = 3$ г со скоростью $v_2 = 500$ м/с. Найти скорость отдачи ружья.

Задача I.2.18. Через блок перекинута нить, к концам которой подвешены гири массами $m_1 = m_2 = 1$ кг. Какую силу нужно приложить к одной из гирь, чтобы гири стали двигаться с ускорением $a = 3$ м/с²? Массой блока пренебречь.

Задача I.2.19. Автомобиль массой $m = 5000$ кг движется со скоростью $v = 10$ м/с по выпуклому мосту. Определить силу N давления автомобиля на мост в его верхней точке, если радиус кривизны моста $R = 50$ м.

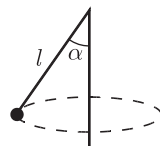


Рис. 9

Задача I.2.20. На столе стоит тележка массой $m_1 = 4$ кг. К тележке привязан шнур, перекинутый через блок. С каким ускорением будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирию массой $m_2 = 1$ кг?

Задача I.2.21. В гладкой сферической чаше лежит невесомый стержень с точечными массами на концах $m_1 = 0,80$ кг и $m_2 = 0,40$ кг. Длина стержня в $\sqrt{3}$ раза больше радиуса сферы. Определить, под каким углом к линии горизонта расположен стержень.

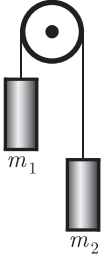


Рис. 10

Задача I.2.22. Каждый из двух грузов массами $m_1 = 1,2$ кг и $m_2 = 3,2$ кг, показанных на рис. 10, первоначально находится на высоте 1,6 м над землей, а блок — на высоте 4,8 м над землей. Какой наибольшей высоты достигнет самый легкий груз после того, как системе дадут возможность двигаться свободно?

Задача I.2.23. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Грузы массами $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок (см. рис. 8). Найти: 1) ускорение, с которым движутся грузы; 2) натяжение нити. В каком направлении движутся грузы? Трением в блоке, а также трением груза массой m_1 о наклонную плоскость пренебречь.

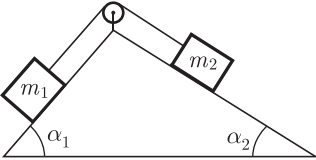


Рис. 11

Задача I.2.24. Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha_1 = 45^\circ$ и $\alpha_2 = 30^\circ$ (рис. 11). Грузы массами $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Найти: 1) ускорение, с которым движутся грузы; 2) натяжение нити. Трением грузов о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

Задача I.2.25. Шар массой $m_1 = 10$ кг, движущийся со скоростью $v_1 = 4$ м/с, сталкивается с шаром массой $m_2 = 4$ кг, скорость которого $v_2 = 12$ м/с. Считая удар прямым и неупругим, найти скорость u шаров после удара в двух случаях: 1) малый шар нагоняет большой шар, движущийся в том же направлении; 2) шары движутся навстречу друг другу.

Задача I.2.26. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием $M = 15$ т. Орудие стреляет вверх под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту в направлении пути. С какой скоростью u покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда $m = 20$ кг и он вылетает со скоростью $v = 600$ м/с?

Задача I.2.27. Снаряд массой $m = 10$ кг обладал скоростью $v = 200$ м/с в высшей точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая массой $m_1 = 3$ кг полетела со скоростью $v_1 = 400$ м/с в прежнем направлении. Найти направление движения и скорость второй части снаряда после разрыва.

Задача I.2.28. Снаряд, обладавший в высшей точке траектории скоростью $v = 300$ м/с, разорвался там на две равные по массе части.

Одна из них полетела вертикально вниз со скоростью $u_1 = 600$ м/с. Найти скорость \vec{u}_2 второй части снаряда после разрыва и угол α , который она составляет с горизонтом.

Задача I.2.29. Два конькобежца массами $m_1 = 80$ кг и $m_2 = 50$ кг, держась за концы длинного натянутого шнура, неподвижно стоят на льду один против другого. Один из них начинает укорачивать шнур, выбирая его со скоростью $v = 1$ м/с. С какими скоростями u_1 и u_2 будут двигаться конькобежцы по льду?

Задача I.2.30. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной колесиками. На одном конце доски стоит человек. Масса его $m_1 = 60$ кг, масса тележки $m_2 = 20$ кг. С какой скоростью u относительно пола будет двигаться тележка, если человек пойдет по ней со скоростью (относительно доски) $v = 1$ м/с? Чему равна скорость v_1 человека относительно пола? Массой колес пренебречь, трение не учитывать.

Задача I.2.31. При автомобильной катастрофе человек имеет реальные шансы выжить, если величина тормозящего ускорения не превышает $30g$. Вычислить силу, которая действует на человека массой 70 кг и сообщает такое ускорение. Какое расстояние при этом проходит автомобиль до полной остановки, если его скорость была 80 км/ч?

Задача I.2.32. Тяжелый стальной трос длиной L и массой M проходит через небольшой блок, не имеющий ни массы, ни трения в оси. 1) Если y — длина троса по одну сторону блока (т. е. с другой стороны свешивается часть троса длиной $L - y$), то каким будет ускорение троса в зависимости от y ? 2) Считая, что трос начинает движение из состояния покоя, когда по одну сторону блока свешивается его часть длиной y_0 , найти скорость v троса в момент, когда он целиком пройдет через блок и упадет с него. 3) Вычислить v при $y_0 = 2L/3$.

Задача I.2.33. На какой высоте над поверхностью Земли ускорение свободного падения будет равно половине величины ускорения свободного падения на ее поверхности? Считать, что радиус Земли равен 6,4 Мм.

Задача I.2.34. Четыре тела сферической формы, имеющие массу 8 кг каждое, расположены в вершинах квадрата со стороной 0,5 м. Рассчитать величину и направление силы гравитационного притяжения, действующей на одну из сфер со стороны остальных трех.

Задача I.2.35. Определить массу Солнца, используя значения периода обращения вокруг него Земли и ее расстояния от Солнца.

Задача I.2.36. Какими были бы земные сутки, если бы Земля вращалась так быстро, что тела на экваторе были бы невесомыми?

Задача I.2.37. Венера находится на среднем расстоянии от Солнца, равном $1,08 \cdot 10^8$ км. Оценить приближенно длительность венерианского года, учитывая, что Земля удалена от Солнца в среднем на $1,49 \cdot 10^8$ км.

Задача I.2.38. Используя второй закон Кеплера, показать, что отношение скоростей планет, когда они располагаются ближе всего к Солн-

цу и дальше всего от Солнца, равно обратному отношению расстояний от Солнца до ближайшей и самой далекой точек орбиты планеты: $v_{\min}/v_{\max} = d_{\max}/d_{\min}$. Учитывая, что расстояние от Земли до Солнца меняется в пределах $(1,47 - 1,52) \cdot 10^{11}$ м, вычислить v_{\min} и v_{\max} Земли при ее обращении вокруг Солнца.

1.3. Работа. Мощность. Энергия. Закон сохранения энергии

1.3.A. Основные формулы

- Работа, совершаемая постоянной силой,

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos \alpha,$$

где α — угол между направлениями векторов силы \vec{F} и перемещения $\Delta \vec{r}$.

- Работа переменной силы \vec{F} на пути s

$$A = \int_s F \cos \alpha \, ds.$$

- Мощность:

- средняя мощность за интервал времени Δt

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t} = F \langle v \rangle \cos \alpha;$$

- мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = Fv \cos \alpha.$$

- Энергия:

- кинетическая энергия тела, движущегося поступательно:

$$T = \frac{mv^2}{2};$$

- потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h :

$$U = mgh;$$

- потенциальная энергия упругой деформации тела

$$U = \frac{k(\Delta l)^2}{2},$$

где k — жесткость тела; Δl — абсолютная деформация.

- Закон сохранения *полной механической энергии в замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы:*

$$T + U = \text{const}.$$

- Применение законов сохранения энергии и импульса к столкновению абсолютно упругих тел: при центральном ударе скорости тел после соударения:

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}; \quad u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2},$$

где v_1 и v_2 — скорости шаров до удара.

- Применение законов сохранения энергии и импульса к абсолютно неупругому столкновению двух тел, движущихся до соударения со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 : после удара тела слипаются, их общая скорость дается выражением (1.2.1), а потери механической энергии составляют

$$Q = \frac{m_1 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (1.3.23)$$

1.3.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 20. Два шара массами $m_1 = 2,5$ кг и $m_2 = 1,5$ кг движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 6$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Определить: 1) скорости шаров после удара; 2) кинетические энергии шаров до и после удара; 3) энергию, затраченную на деформацию шаров при ударе. Удар считать прямым, неупругим.

Решение. После неупругого соударения шары движутся совместно с одинаковой скоростью u . Эта скорость определяется из закона сохранения импульса

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}.$$

Проецируем векторы скоростей на направление скорости первого шара, считая его положительным. Тогда скорость второго шара будет отрицательной и мы получим

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2,5 \cdot 6 - 1,5 \cdot 2}{2,5 + 1,5} = 3 \text{ м/с}.$$

Положительность u означает, что шары движутся в ту же сторону, куда двигался первый шар.

Кинетическую энергию шаров до удара определим по формуле

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{2,5 \cdot 36}{2} + \frac{1,5 \cdot 4}{2} = 48 \text{ Дж},$$

кинетическую энергию шаров после удара — по формуле

$$T = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = \frac{4 \cdot 9}{2} = 18 \text{ Дж}.$$

Энергия деформации равна разности энергий шаров до и после удара:

$$E = T_0 - T = 48 - 18 = 30 \text{ Дж}.$$

ПРИМЕР 21. Шар массой m_1 , движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1 , столкнулся с неподвижным шаром массой m_2 . Шары абсолютно упругие, удар прямой. Какую долю ε своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение. Пусть u_1 и u_2 — скорости шаров после соударения. Кинетическая энергия первого шара до удара

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2};$$

кинетические энергии шаров после удара равны соответственно

$$T_1' = \frac{m_1 u_1^2}{2}; \quad T_2' = \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Доля энергии ε , переданной первым шаром второму, выразится соотношением

$$\varepsilon = \frac{T_2'}{T_1'} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{u_2}{v_1} \right)^2. \quad (\text{I.3.24})$$

Как видно из (I.3.24), для определения ε надо найти u_2 .

При ударе абсолютно упругих тел одновременно выполняются два закона сохранения: 1) закон сохранения импульса и 2) закон сохранения механической энергии. Пользуясь этими законами, найдем u_2 .

По закону сохранения импульса, учитывая, что второй шар до удара покоился, имеем

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (\text{I.3.25})$$

В этом уравнении есть две неизвестные скорости шаров после удара. Закон сохранения энергии в механике дает второе уравнение

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (\text{I.3.26})$$

Решая совместно (I.3.25) и (I.3.26), находим скорость:

$$u_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}. \quad (\text{I.3.27})$$

Подставляя (I.3.27) в (I.3.24), получаем окончательный ответ:

$$\varepsilon = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (\text{I.3.28})$$

Как видно из соотношения (I.3.28), доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров. При этом массы m_1 и m_2 входят совершенно симметрично: доля передаваемой энергии не зависит от того, какой именно шар первоначально покоился. Если массы шаров равны, то ε достигает максимально возможного значения: при $m_1 = m_2$ получается $\varepsilon = 1$. Иными словами, первый шар передает всю свою энергию второму и, стало быть, после удара остается в состоянии покоя.

ПРИМЕР 22. Два неупругих шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг движутся со скоростями $v_1 = 8$ м/с и $v_2 = 4$ м/с соответственно. Найти увеличение внутренней энергии Q шаров, если: 1) меньший шар нагоняет большой; 2) шары движутся навстречу друг другу; 3) шары движутся под прямым углом друг к другу. Под каким углом α к направлению движения меньшего шара будут двигаться соединившиеся шары после удара?

Решение. Выберем ось x вдоль направления движения меньшего шара, а ось y вдоль направления движения другого шара (в случае 3).

В первом случае векторы скоростей имеют вид $\vec{v}_1 = v_1 \vec{i}$; $\vec{v}_2 = v_2 \vec{i}$. Подставляя в (I.3.23), находим:

$$Q = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (8 - 4)^2}{2(2 + 3)} = 9,6 \text{ Дж.}$$

Во втором случае $\vec{v}_1 = v_1 \vec{i}$; $\vec{v}_2 = -v_2 \vec{i}$, что дает

$$Q = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (8 + 4)^2}{2(2 + 3)} = 86,4 \text{ Дж.}$$

В третьем случае $\vec{v}_1 = v_1 \vec{i}$; $\vec{v}_2 = v_2 \vec{j}$, так что $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ и

$$Q = \frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)}{2(m_1 + m_2)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (8^2 + 4^2)}{2(2 + 3)} = 48 \text{ Дж.}$$

Скорость шаров после удара определяется по формуле (I.2.1). В третьем случае она равна:

$$\vec{u} = \frac{m_1 v_1 \vec{i} + m_2 v_2 \vec{j}}{m_1 + m_2} = (3,2 \vec{i} + 2,4 \vec{j}) \text{ м/с.}$$

Модуль скорости

$$u = \sqrt{3,2^2 + 2,4^2} = 4 \text{ м/с.}$$

Косинус искомого угла определяется скалярным произведением

$$\cos \alpha = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{u} = \frac{3,2}{4} = 0,8,$$

откуда $\alpha \approx 37^\circ$.

ПРИМЕР 23. Упруго сталкиваются два одинаковых шара, причем один из них покоится, а другой налетает на него со скоростью $v_1 = 0,5 \text{ м/с}$. После соударения этот шар отлетает под углом $\theta = 60^\circ$ к первоначальному направлению движения (рис. 12). В каком направлении полетит второй шар?

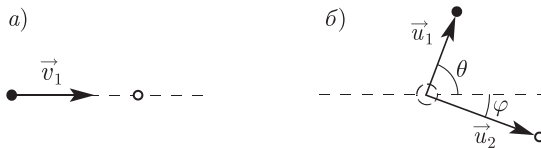


Рис. 12. Упругое рассеяние шаров: а — до удара; б — после удара

Решение. Здесь скорости неколлинеарны, и для законов сохранения энергии и импульса мы имеем векторные соотношения

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2; \tag{I.3.29}$$

$$\frac{m_1 \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 \vec{u}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{u}_2^2}{2},$$

где \vec{v}_1, \vec{v}_2 — скорости шаров до удара; \vec{u}_1, \vec{u}_2 — после удара.

Поскольку массы шаров одинаковы, закон сохранения энергии сводится к равенству суммы квадратов скоростей, а закон сохранения импульса — к равенству сумм скоростей до и после соударения:

$$\vec{v}_1^2 = \vec{u}_1^2 + \vec{u}_2^2; \quad (\text{I.3.30})$$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2. \quad (\text{I.3.31})$$

Из равенства (I.3.31) следует, что векторы \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{v}_1 образуют треугольник. Тогда из (I.3.30) вытекает, что этот треугольник прямоугольный, причем длины катетов равны u_1 , u_2 , а гипотенуза равна v_1 .

Вывод: при столкновении одинаковых шаров, один из которых покоится, угол разлета всегда составляет 90° . Следовательно, другой шар полетит под углом $\varphi = 90^\circ - \theta = 30^\circ$.

I.3.B. Задачи для самостоятельной работы

Задача I.3.1. Комета массой $m = 8,38 \cdot 10^{11}$ кг сталкивается с Землей, имея относительно нее скорость $v = 30$ км/с.

1) Найти энергию E взрыва и выразить ее в единицах тротилового эквивалента (т. е. указать количество тротила, выделяющего при взрыве ту же энергию). Энергия взрыва 1 кг тротила равна $W = 4,2$ МДж.

2) Оценить диаметр d образующегося при таком взрыве кратера. Обычно диаметр кратера пропорционален кубическому корню из энергии взрыва. Известно также, что взрыв водородной бомбы с тротильным эквивалентом 1 Мт приводит к образованию кратера диаметром 1 км.

Задача I.3.2. Рассчитать полную работу A , совершаемую вертолетом массой M , который поднимается на высоту h с ускорением, направленным вверх и равным $0,10g$.

Задача I.3.3. Вычислить работу, совершаемую на пути $s = 12$ м силой, равномерно возрастающей с пройденным расстоянием, если в начале пути сила $F(0) = 10$ Н, в конце пути $F(s) = 46$ Н.

Задача I.3.4. Камень брошен вверх под углом $\alpha = 60^\circ$ к плоскости горизонта. Кинетическая энергия камня в начальный момент $T_0 = 20$ Дж. Определить кинетическую T и потенциальную U энергии камня в высшей точке его траектории.

Задача I.3.5. Материальная точка массой $m = 2$ кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 10$ м, $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с², $D = -0,2$ м/с³. Найти мощность, развиваемую при движении в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с.

Задача I.3.6. Конькобежец массой $m_1 = 60$ кг, стоя на льду, бросил ядро массой $m_2 = 5$ кг и вследствие отдачи покатился назад со скоростью $v_1 = 1$ м/с. Определить работу A , совершаемую при бросании ядра.

Задача I.3.7. Тело массой $m_1 = 5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2 = 2,5$ кг. Суммарная кинетическая энергия этих тел после удара $T = 5$ Дж. Считая удар центральным и неупругим, найти кинетическую энергию первого тела до удара.

Задача 1.3.8. Масса одного автомобиля в 2 раза больше массы другого, а его кинетическая энергия равна половине кинетической энергии другого автомобиля. Когда оба автомобиля увеличили свою скорость на 3 м/с, их кинетическая энергия стала одинаковой. Чему были равны начальные скорости автомобилей?

Задача 1.3.9. Шар массой m испытывает упругое лобовое соударение с другим шаром (покоившимся до удара) и отлетает от него в сторону, противоположную первоначальному движению, со скоростью, равной одной трети начальной. Чему равна масса второго шара?

Задача 1.3.10. Показать, что в общем случае при упругом лобовом столкновении двух тел их скорости после столкновения имеют следующие значения:

$$u_1 = v_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) + v_2 \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right);$$

$$u_2 = v_1 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) + v_2 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right),$$

где v_1, v_2 — скорости тел до столкновения.

Задача 1.3.11. Два бильярдных шара с одинаковыми массами движутся под прямым углом друг к другу и сталкиваются в начале системы координат xOy . Первый шар двигался до этого со скоростью 3 м/с вверх вдоль оси Oy , а второй — вправо вдоль оси Ox со скоростью 4,5 м/с. После столкновения второй шар стал двигаться в положительном направлении вдоль оси Oy . В каком направлении будет двигаться после соударения первый шар и чему будут равны при этом скорости обоих шаров?

Задача 1.3.12. Показать, что при упругом столкновении налетающей частицы массой m_1 с покоящейся частицей-мишенью массой m_2 : 1) угол отклонения (рассеяния) θ налетающей частицы может принимать любые значения от 0 до 180° при $m_1 < m_2$; 2) максимальное значение угла θ_{\max} определяется выражением $\cos^2 \theta_{\max} = 1 - (m_2/m_1)^2$ при $m_1 > m_2$.

Задача 1.3.13. Груз массой $m = 3,5$ кг скользит по поверхности стола без трения со скоростью $v = 8$ м/с по направлению к другому (покоящемуся) телу массой $M = 6$ кг. Ко второму телу прикреплена пружина (пренебрежимо малой массы и подчиняющаяся закону Гука с коэффициентом упругости $k = 750$ Н/м) таким образом, что при соударении обоих грузов она сжимается (рис. 13). 1) Чему равно при этом максимальное сжатие пружины? 2) Чему равны конечные скорости грузов после соударения? 3) Было ли соударение упругим?

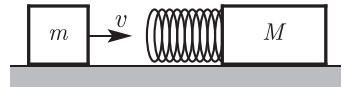


Рис. 13

Задача 1.3.14. Метеор массой около 10^8 кг сталкивается с Землей ($M = 6 \cdot 10^{24}$ кг) при скорости около 15 м/с и застревает в толще Земли. 1) Чему равна скорость «отдачи», полученная Землей? 2) Какая доля кинетической энергии метеора перешла в кинетическую энергию Земли? 3) На какую величину изменилась кинетическая энергия Земли в результате этого столкновения?

Задача I.3.15. В результате взрыва тело распадается на две части, масса одной из которых в 1,5 раза больше другой. Какую кинетическую энергию приобретает каждая часть, если в процессе взрыва выделилась энергия 4500 Дж?

Задача I.3.16. В результате полностью неупругого столкновения между двумя телами с одинаковыми массами и одинаковыми скоростями v до столкновения оба тела начинают двигаться со скоростью $v/3$. Чему был равен угол между направлениями их скоростей до столкновения?

Задача I.3.17. Из орудия массой $m_1 = 5 \cdot 10^3$ кг вылетает снаряд массой $m_2 = 100$ кг. Кинетическая энергия снаряда при вылете $T_2 = 7,5$ МДж. Какую кинетическую энергию получает орудие?

Задача I.3.18. Вагон массой $m = 20$ т, налетев на пружинный буфер, остановился, сжав пружину на $\Delta l = 10$ см. Найти скорость вагона, если жесткость пружины $k = 2 \cdot 10^6$ Н/м.

Задача I.3.19. Трос лифта обрывается, когда лифт массой 750 кг находится на высоте 25 м над мощной пружиной ($k = 4 \cdot 10^4$ Н/м), находящейся на дне шахты лифта. Вычислить: 1) работу, совершаемую силой тяжести, действующей на лифт, до того, как он ударится о пружину; 2) скорость лифта непосредственно перед соударением с пружиной; 3) величину сжатия пружины. (Заметим, что при этом совершается работа как пружиной, так и силой тяжести.)

Задача I.3.20. Пружина с коэффициентом упругости k сжата относительно своего недеформированного состояния на величину x_0 . На сколько изменится потенциальная энергия пружины, если ее сжать на величину x относительно недеформированного состояния?

Задача I.3.21. Вагон массой $m = 35$ т движется на упор со скоростью $v = 0,2$ м/с. При полном торможении вагона буферные пружины сжимаются на $\Delta l = 12$ см. Определить максимальную силу сжатия F_{\max} буферных пружин и продолжительность Δt торможения. (Указание: принять, что средняя сила торможения равна $2/3$ от ее максимального значения.)

Задача I.3.22. Сила, необходимая для сжатия горизонтальной пружины на величину x , записывается в виде $F(x) = 230x + 2,7x^3$, где x выражается в метрах, а F — в ньютонах. Если пружина была сжата на 2 м, то какую скорость она сообщит (после того, как ее отпустить) помещенному перед ней шарiku массой $m = 3$ кг?

Задача I.3.23. Пуля массой $m_1 = 10$ г вылетает со скоростью $u_1 = 300$ м/с из дула автоматического пистолета, масса затвора которого $m_2 = 200$ г. Затвор пистолета прижимается к стволу пружиной, жесткость которой $k = 25$ кН/м. На какое расстояние s отойдет затвор после выстрела? Пистолет считать неподвижным.

Задача I.3.24. Тело массой m подвешено к вертикальной пружине с коэффициентом жесткости k . 1) Найти расстояние, на которое тело опустится сразу после его прикрепления к пружине, если оно движется медленно и останавливается в положении равновесия. 2) Если дать телу возможность свободно падать после закрепления, то каким будет максимальное растяжение пружины?

Задача 1.3.25. Два неупругих шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг движутся со скоростями $v_1 = 8$ м/с и $v_2 = 4$ м/с соответственно. Найти работу A деформации шаров в двух случаях: 1) меньший шар нагоняет больший; 2) шары движутся навстречу друг другу.

Задача 1.3.26. Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь $s = 5$ м и приобрела скорость $v = 2$ м/с. Определить работу A силы, если масса вагонетки $m = 400$ кг и коэффициент трения $\mu = 0,01$.

Задача 1.3.27. Лыжник скатывается с холма с нулевой начальной скоростью и проезжает 30 м вниз по склону, составляющему 18° с горизонтом. 1) Чему равна скорость лыжника у подножия холма, если коэффициент трения равен $\mu = 0,08$? 2) Если у подножия холма имеется горизонтальная площадка, покрытая снегом с тем же коэффициентом трения, что и у поверхности холма, то на какое расстояние по ней укатится лыжник? Используйте энергетические соображения.

Задача 1.3.28. Тело массой $m = 1$ кг, брошенное с вышки в горизонтальном направлении со скоростью $v = 20$ м/с, через $t = 3$ с упало на землю. Определить кинетическую энергию T , которую имело тело в момент удара о землю.

Задача 1.3.29. На ракете, находящейся на расстоянии 6400 км от поверхности Земли и удаляющейся от нее со скоростью 1850 м/с, запускаются двигатели, которые выбрасывают газы со скоростью 1200 м/с (относительно ракеты). Каким должен быть расход газов (в килограммах в секунду), для того чтобы обеспечить ускорение $1,7$ м/с², если масса ракеты к этому моменту достигла значения 25 т?

Задача 1.3.30. Сани, наполненные песком, скользят без трения под уклон 30° . Песок высыпается из отверстия со скоростью 2 кг/с. Если движение начинается из состояния покоя с полной массой 40 кг (включаящей и массу саней, и массу песка), то какое время понадобится на то, чтобы сани прошли расстояние 120 м по наклонной плоскости?

Задача 1.3.31. Два груза массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 15$ кг подвешены на нитях длиной $l = 2$ м так, что соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол $\alpha = 60^\circ$ и отпущен. На какую высоту h поднимутся оба груза после удара? Удар грузов считать неупругим.

Задача 1.3.32. Пуля массой $m = 10$ г, летевшая со скоростью $v = 600$ м/с, попала в баллистический маятник (рис. 14) массой $M = 5$ кг и застряла в нем. На какую высоту h , откачнувшись после удара, поднялся маятник?

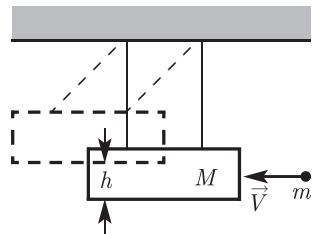


Рис. 14

Задача 1.3.33. Пуля массой 44 г попадает в деревянный брусок массой 15,4 кг, лежащий на горизонтальной поверхности прямо напротив ствола оружия. Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0,28$. После застревания пули брусок, прежде чем остановиться, проходит расстояние 18 м. Найти начальную скорость пули при вылете из ствола.

Задача I.3.34. Частица массой m , движущаяся со скоростью \vec{v}_0 вдоль оси x , внезапно «выстреливает» треть своей массы в направлении оси y со скоростью $2v_0$. Записать вектор скорости оставшейся части, выразив его через единичные векторы \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} .

Задача I.3.35. Двухступенчатая ракета массой 940 кг движется со скоростью $6,2 \cdot 10^3$ м/с относительно Земли. Затем происходит запланированный взрыв, в результате которого ракета разделяется на две части одинаковой массы, движущиеся с относительной скоростью $2,4 \cdot 10^3$ м/с вдоль линии первоначального движения ракеты. 1) Чему равны и как направлены скорости каждой части сразу после взрыва? 2) Какое количество энергии выделилось при взрыве?

Задача I.3.36. В баллистический маятник массой $M = 5$ кг попала пуля массой $m = 10$ г и застряла в нем. Найти скорость v пули, если маятник, отклонившись после удара, поднялся на высоту $h = 10$ см.

Задача I.3.37. Конькобежец массой $m_1 = 70$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m_2 = 3$ кг со скоростью $u_2 = 8$ м/с. На какое расстояние s откатится конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0,02$?

Задача I.3.38. Тело массой $m_1 = 5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2 = 2,5$ кг, которое после удара начинает двигаться и приобретает кинетическую энергию $T_2 = 5$ Дж. Считая удар центральным и упругим, найти кинетическую энергию первого тела до и после удара.

Задача I.3.39. На гладком горизонтальном столе находятся две пластмассовые шайбы одинаковых размеров, но различных масс. Одна из них (m_2) покоится, другая (m_1) налетает на нее, и между шайбами происходит удар. Каким должен быть этот удар и какими должны быть массы шайб, чтобы налетающая шайба после удара могла сразу остановиться?

Задача I.3.40. Определить работу растяжения двух соединенных последовательно пружин жесткостями $k_1 = 400$ Н/м и $k_2 = 250$ Н/м, если первая пружина растянулась при этом на $\Delta l_1 = 2$ см.

Задача I.3.41. Две пружины жесткостями $k_1 = 0,5$ кН/м и $k_2 = 1$ кН/м соединены параллельно. Определить потенциальную энергию U системы при абсолютной деформации $\Delta l = 4$ см. Какая потенциальная энергия запасена при этом в первой пружине, а какая — во второй?

Задача I.3.42. Пружина жесткостью $k = 500$ Н/м сжата силой $F = 100$ Н. Определить работу A внешней силы, дополнительно сжимающей пружину еще на $\Delta l = 2$ см.

Задача I.3.43. Велосипедист собирается въехать на холм высотой 100 м и уклоном 10° . 1) Считая массу велосипедиста вместе с машиной равной 80 кг, вычислить работу, которую необходимо совершить против силы тяжести. 2) Если при каждом полном обороте педалей велосипед должен продвигаться вперед на 5,1 м, то какую среднюю силу нужно приложить к педалям по касательной к их движению по окружности? Трением при вращении педалей и другими источниками потерь энергии пренебречь. Педали вращаются по окружности диаметром 36 см.

Задача 1.3.44. Какую работу A нужно совершить, чтобы пружину жесткостью $k = 800$ Н/м, сжатую на $\Delta l = 6$ см, сжать еще на $\Delta x = 8$ см?

Задача 1.3.45. По небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне массой $m_1 = 300$ кг, ударяет молот массой $m_2 = 8$ кг. Определить КПД η удара, если удар неупругий. (*Указание:* в данном случае полезной считать ту энергию, которая идет на деформацию железа.)

Задача 1.3.46. Определить КПД η неупругого удара бойка массой $m_2 = 0,5$ т, падающего на сваю массой $m_1 = 120$ кг. Полезной считать энергию, расходуемую на углубление сваи.

Задача 1.3.47. Насос должен поднимать 5 кг воды каждую секунду на высоту 4,2 м. Какой должна быть мощность двигателя у насоса?

Задача 1.3.48. Вода течет через плотину с расходом 750 кг/с и падает вертикально вниз на 130 м, прежде чем она ударяется о лопасти турбин. Вычислить: 1) скорость воды непосредственно перед соударением с лопатками турбин; 2) скорость, с которой механическая энергия падения передается лопаткам турбин. Считать, что при соударении с лопатками вода теряет 80% своей скорости, причем 12% первоначальной энергии преобразуется в тепловую.

Задача 1.3.49. Сила сопротивления движению автомобиля складывается из силы трения, которая почти не зависит от скорости, и силы лобового сопротивления воздуха, которая пропорциональна квадрату скорости. Для грузовика массой $m = 1,2$ т сила сопротивления дается эмпирической формулой $F_{\text{сопр}} = 300 + 1,8v^2$ (сила выражена в ньютонах, скорость — в метрах в секунду). 1) Найти мощность N , развиваемую двигателем при движении с постоянной скоростью $v = 80$ км/ч, если вся она идет на преодоление сопротивления. Выразить ее в лошадиных силах (1 л. с. = 736 Вт). 2) Какая дополнительная мощность ΔN потребуется для того, чтобы грузовик стал ускоряться с $a = 0,9$ м/с²?

Задача 1.3.50. Альпинист массой 70 кг взбирается на вершину горы высотой 3120 м. Восхождение совершается в течение 4 ч со стартовой площадки, находящейся на высоте 1850 м. Вычислить: 1) работу, совершаемую против силы тяжести; 2) среднюю мощность, развиваемую альпинистом (в ваттах и лошадиных силах); 3) требуемую скорость поступления энергии, если считать, что КПД человеческого организма составляет 15%.

Задача 1.3.51. Велосипедист съезжает с холма, имеющего уклон 6° , с постоянной скоростью 7 км/ч. Считая полную массу велосипедиста вместе с велосипедом равной 75 кг, найти мощность, которую нужно развить велосипедисту для того, чтобы с той же скоростью въехать на холм.

Задача 1.3.52. Вода ударяет в лопасти турбины генератора так, что скорость частиц воды после отражения имеет ту же величину, но обратное направление. Если удельный расход воды 60 кг/с, а скорость потока 16 м/с, то чему равна средняя сила, действующая на лопасти?

Задача I.3.53. В боровской модели атома водорода электрон удерживается на круговой орбите радиусом R вокруг ядра силой $F = -c/R^2$, где c — постоянная величина. Если электрон переходит с одной круговой орбиты радиусом $R = R_0$ на другую круговую орбиту радиусом $R = n^2 R_0$, где n — целое положительное число ($n > 1$), то чему будет равно изменение его полной механической энергии?

Задача I.3.54. Показать, что: 1) полная механическая энергия спутника массой m , обращающегося по орбите радиусом r вокруг Земли (масса Земли M), определяется выражением $E = -GMm/(2r)$; 2) кинетическая энергия фактически должна возрастать (если только орбита остается круговой), хотя сопротивление атмосферы приводит к постепенному уменьшению E с течением времени; 3) скорость спутника $v = \sqrt{GM/r}$.

Задача I.3.55. Расстояние между Землей и Солнцем в течение года изменяется в пределах $(1,471 \dots 1,521) \cdot 10^8$ км. Каким при этом будет изменение: 1) потенциальной энергии; 2) кинетической энергии; 3) полной энергии?

Задача I.3.56. Вывести формулу для максимальной высоты h , которой достигает ракета, если запустить ее вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью v_0 (радиус Земли R , ее масса M). На какую высоту поднимется ракета, если начальная скорость $v_0 = 8,2$ км/с? Сопротивлением воздуха и вращением Земли пренебречь.

Задача I.3.57. Метеор на высоте 720 км над поверхностью Земли имел скорость 85,1 м/с. После падения на Землю вертикально вниз он остановился, зарывшись в песок на глубину 3,25 м. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) скорость метеора в момент времени непосредственно перед ударом о песок; 2) работу, которую произведет песок при торможении метеора (масса метеора 575 кг); 3) среднюю силу, действующую на метеор со стороны песка; 4) количество выделившейся при ударе тепловой энергии.

1.4. Динамика твердого тела

1.4.A. Основные формулы

- Основной закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$M = \frac{d(J\omega)}{dt},$$

где M — момент силы; J — момент инерции тела; ω — угловая скорость.

В случае постоянного момента инерции тела

$$M = J\varepsilon,$$

где ε — угловое ускорение.

- Момент импульса тела, вращающегося относительно оси:

$$L = J\omega.$$

- Момент силы F относительно оси вращения

$$M = F_{\perp} l,$$

где F_{\perp} — проекция силы F на плоскость, перпендикулярную оси вращения; l — плечо силы F (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

- Момент силы относительно начала координат

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}],$$

где \vec{r} — радиус-вектор точки приложения силы.

- Момент инерции некоторых тел:
 - материальной точки: $J = mr^2$, где r — расстояние от точки до оси;
 - шара относительно оси, проходящей через его центр: $J = \frac{2}{5} mr^2$, где r — радиус шара;
 - однородного цилиндра (диска) относительно его оси: $J = \frac{1}{2} mr^2$, где r — радиус основания цилиндра (диска);
 - обруча относительно оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через его центр: $J = mr^2$, где r — радиус обруча;
 - тонкого стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести стержня и перпендикулярной ему: $J = \frac{1}{12} ml^2$, где l — длина стержня.

- Теорема Штейнера

$$J = J_0 + ma^2,$$

где J — момент инерции тела относительно произвольной оси; J_0 — момент инерции тела относительно воображаемой оси, параллельной заданной, но проходящей через центр инерции тела; a — расстояние между этими осями.

- Момент импульса материальной точки с импульсом \vec{p} относительно начала координат

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}],$$

где \vec{r} — радиус-вектор материальной точки.

- Закон сохранения момента импульса системы тел

$$\sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \text{const},$$

где \vec{L}_i — момент импульса тела с номером i , входящего в состав системы.

- Закон сохранения момента импульса для тела, вращающегося относительно оси, момент инерции которого меняется:

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2,$$

где J_1 и J_2 — начальный и конечный моменты инерции; ω_1 и ω_2 — начальная и конечная угловые скорости тела.

- Работа

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi},$$

где $d\vec{\varphi}$ — вектор элементарного угла поворота тела.

- Кинетическая энергия:

- тела, вращающегося относительно неподвижной оси:

$$T = \frac{J\omega^2}{2};$$

- тела, катящегося по плоскости,

$$T = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

1.4.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 24. Найти момент инерции J тонкого однородного кольца радиусом $r = 20$ см и массой $m = 100$ г относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр r .

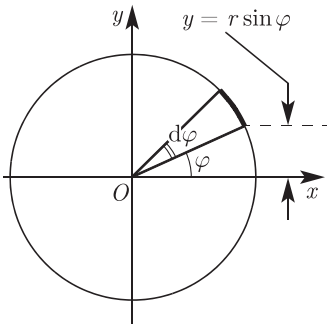


Рис. 15

Решение. Найдем момент инерции кольца относительно оси Ox . Для этого разобьем кольцо на бесконечно малые участки массой dm (один из них выделен на рис. 15). Поскольку кольцо однородно, массу выделенного участка найдем, разделив полную массу на угол 2π и умножив на $d\varphi$:

$$dm = \frac{m d\varphi}{2\pi}.$$

Расстояние этого участка от оси Ox равно $y = r \sin \varphi$. Так как участок кольца массой dm можно считать материальной точкой,

то момент инерции этого участка относительно оси Ox равен

$$dJ_{(x)} = y^2 dm = \frac{mr^2}{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Сложив моменты инерции всех участков, проинтегрируем полученное выражение в пределах от 0 до 2π . В результате получим момент инерции $J_{(x)}$ всего кольца относительно оси Ox :

$$J_{(x)} = \frac{mr^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{mr^2}{2\pi} \pi = \frac{mr^2}{2}.$$

Подставив числовые значения, найдем

$$J_{(x)} = \frac{0,1 \cdot 0,2^2}{2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ясно, что вследствие симметрии момент инерции кольца относительно оси Oy будет тем же самым. Отсюда получаем

$$J_{(x)} + J_{(y)} = mr^2 = J_{(z)},$$

где $J_{(z)}$ — момент инерции кольца относительно оси Oz , проходящей через центр кольца и перпендикулярной его плоскости.

Полученное соотношение между моментами инерции $J_{(x)}$, $J_{(y)}$, $J_{(z)}$ является частным случаем теоремы о моментах инерции плоской фигуры (см. учебник¹, т. 1, п. 5.2).

ПРИМЕР 25. Если полярные льды растают из-за общего потепления климата, океан станет глубже в среднем на $h = 30$ м. Оценить, на сколько при этом изменится продолжительность суток.

Решение. Обозначим через ω нынешнюю угловую частоту суточного вращения Земли, а через J современное значение ее момента инерции. Угловой момент количества движения $L = J\omega$ должен сохраняться: $\Delta L = \Delta J\omega + J\Delta\omega = 0$. Отсюда $\Delta\omega = -\omega(\Delta J/J)$. Угловая частота связана с продолжительностью дня T соотношением $\omega = 2\pi/T$, так что $\Delta\omega = -2\pi\Delta T/T^2$. В результате получаем

$$\Delta T = T \frac{\Delta J}{J}.$$

Для простоты можно представить, что талая вода покрывает всю поверхность земного шара, в связи с чем его радиус увеличился на $\Delta R = (2/3)h = 20$ м (океан занимает $2/3$ поверхности Земли). Момент инерции шара дается соотношением $J = 0,4MR^2$, а его изменение при увеличении радиуса составляет $\Delta J = 0,4M(2R\Delta R) = 2J(\Delta R/R)$. Отсюда вытекает, что

$$\Delta T = T \frac{2\Delta R}{R} = (24 \cdot 60 \cdot 60) \frac{2 \cdot 20}{6,4 \cdot 10^6} = 0,5 \text{ с},$$

т. е. продолжительность суток увеличится на полсекунды.

ПРИМЕР 26. Маховик в виде диска массой $m = 50$ кг и радиусом $r = 20$ см был раскручен до частоты вращения $\nu_1 = 480$ мин⁻¹ и затем предоставлен самому себе. Вследствие трения маховик остановился. Считая момент M сил трения постоянным, найти его для двух случаев: 1) маховик остановился через $\Delta t = 50$ с; 2) маховик до полной остановки сделал $N = 200$ оборотов.

Решение. По основному закону динамики вращательного движения изменение момента импульса вращающегося тела равно произведению среднего момента силы, действующего на тело, на время действия этого момента.

С л у ч а й 1. Поскольку момент силы предполагается постоянным, $\langle M \rangle = M$ и

$$M\Delta t = J\Delta\omega = J(\omega_2 - \omega_1),$$

где J — момент инерции маховика; ω_2 и ω_1 — начальная и конечная угловые скорости соответственно.

¹ См.: Калашников Н. П., Смондырев М. А. Основы физики. — М.: Лаборатория знаний, 2017. — Т. 1, 2. (Далее в тексте будут ссылки на данный учебник.)

Так как $\omega_2 = 0$ и $\omega_1 = 2\pi\nu_1$, то

$$M = -\frac{2\pi J\nu_1}{\Delta t}.$$

Так как $J = mr^2/2$, то

$$M = -\frac{\pi mr^2\nu_1}{\Delta t} = -\frac{3,14 \cdot 50 \cdot 0,2^2 \cdot 8}{50} = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

(здесь $\nu_1 = 480 \text{ мин}^{-1} = 480/60 \text{ с}^{-1} = 8 \text{ с}^{-1}$). Знак «минус» показывает, что момент силы трения оказывает тормозящее действие.

С л у ч а й 2. В условии дано число оборотов, сделанных маховиком до остановки, т. е. его угловое перемещение $\Delta\varphi = 2\pi N$. Используем формулу, выражающую связь работы с изменением кинетической энергии:

$$A = \Delta T = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} = -\frac{J(2\pi\nu_1)^2}{2} = -m(\pi r\nu_1)^2.$$

В то же время работа при вращательном движении определяется по формуле $A = M\Delta\varphi = 2\pi MN$. Приравнявая эти два выражения для работы, получаем

$$M = -\frac{\pi m(r\nu_1)^2}{2N} = -\frac{3,14 \cdot 50(0,2 \cdot 8)^2}{2 \cdot 200} = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

ПРИМЕР 27. Какой момент количества движения $L_{\text{сут}}$ соответствует суточному вращению Земли?

Решение. Период вращения Земли вокруг собственной оси равен $T = 24 \text{ ч} = 86\,400 \text{ с}$, значит, угловая скорость суточного вращения равна $\omega_{\text{сут}} = 2\pi/T = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Момент инерции Земли относительно ее диаметра равен $J_{\text{з}} = (2/5)M_{\text{з}}R_{\text{з}}^2 = 0,4 \cdot 5,98 \cdot 10^{24}(6,37 \cdot 10^6)^2 = 9,7 \cdot 10^{37} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Отсюда момент количества движения равен $L_{\text{сут}} = J_{\text{з}}\omega_{\text{сут}} = (9,7 \cdot 10^{37})(7,27 \cdot 10^{-5}) = 7,1 \cdot 10^{33} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

ПРИМЕР 28. Какой момент количества движения $L_{\text{год}}$ ассоциируется с вращением Земли вокруг Солнца?

Решение. Период вращения $T = 1 \text{ год} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ с}$, угловая скорость $\omega_{\text{год}} = 2\pi/T = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Расстояние от Земли до Солнца намного превышает размеры Земли, так что в этом случае Землю можно считать материальной точкой. Ее момент инерции определяется как $J_{\text{год}} = M_{\text{з}}L_{\text{з}}^2$, где $L_{\text{з}}$ — расстояние от Земли до Солнца. Подставляя числовые данные: $J_{\text{год}} = 5,98 \cdot 10^{24}(1,48 \cdot 10^{11})^2 = 1,31 \cdot 10^{47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Орбитальный момент количества движения равен $L_{\text{год}} = J_{\text{год}}\omega_{\text{год}} = (1,31 \cdot 10^{47})(1,99 \cdot 10^{-7}) = 2,6 \cdot 10^{40} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

ПРИМЕР 29. Два одинаковых груза массой $M = 1,5 \text{ кг}$ каждый соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, имеющий форму цилиндра (рис. 16). Масса блока $m = 200 \text{ г}$, его радиус $r = 5 \text{ см}$. Трением между грузом и столом и трением в оси блока можно

пренебречь. Найти ускорения грузов, угловое ускорение блока и натяжения нитей. Проскальзывание нити в блоке отсутствует.

Решение. Выберем положительное направление движения грузов слева направо и вниз. Условие нерастяжимости нити означает, что оба груза движутся с одинаковым ускорением a . Так как по условию нить не скользит относительно блока, это означает, что угловое ускорение блока связано с линейным ускорением грузов:

$$a = \varepsilon r. \tag{1.4.32}$$

Силы натяжения нитей действуют в противоположные стороны на грузы (большие стрелки) и на блок (маленькие стрелки). Уравнения движения грузов

$$Ma = N_1; \quad Ma = Mg - N_2. \tag{1.4.33}$$

Уравнение движения блока

$$J\varepsilon = (N_2 - N_1)r. \tag{1.4.34}$$

Учитывая (1.4.32) и выражение для момента инерции цилиндра $J = mr^2/2$, это уравнение можно записать в виде

$$\frac{m}{2} a = N_2 - N_1. \tag{1.4.35}$$

Подставляем в (1.4.35) выражение сил N_1, N_2 через ускорение a , полученные из (1.4.33):

$$\frac{m}{2} a = M(g - 2a). \tag{1.4.36}$$

Отсюда ускорение грузов

$$a = g \frac{M}{2M + m/2} = 9,8 \frac{1,5}{2 \cdot 1,5 + 0,2/2} = 4,74 \text{ м/с}^2. \tag{1.4.37}$$

Угловое ускорение $\varepsilon = a/r = 4,74/0,05 = 94,8 \text{ рад/с}^2$. Натяжения нитей находятся после подстановки (1.4.37) в (1.4.33):

$$\begin{aligned} N_1 &= Mg \frac{M}{2M + m/2} = 1,5 \cdot 4,74 = 7,11 \text{ Н;} \\ N_2 &= Mg \frac{M + m/2}{2M + m/2} = 1,5 \cdot 9,8 \frac{1,5 + 0,2/2}{2 \cdot 1,5 + 0,2/2} = 7,59 \text{ Н.} \end{aligned} \tag{1.4.38}$$

Если бы можно было пренебречь массой блока, то грузы двигались бы с ускорением $a_0 = g/2 = 4,9 \text{ м/с}^2$, а натяжения нитей были бы одинаковыми по обе стороны блока и равны $N_0 = Mg/2 = 7,35 \text{ м/с}^2$.

ПРИМЕР 30. Однородный шар массой $M_1 = 20 \text{ кг}$ вращается без трения на вертикальной оси, проходящей через его диаметр (рис. 17). На «экватор» шара намотана невесомая нерастяжимая нить, другой конец которой перекинут через цилиндрический блок массой $m = 1 \text{ кг}$

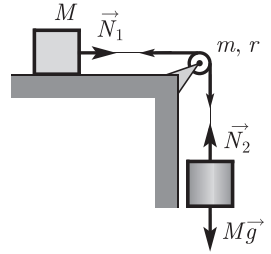


Рис. 16

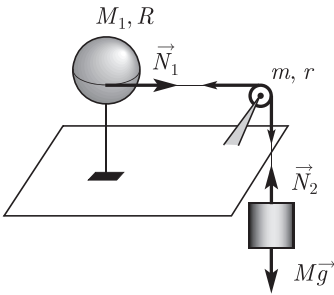


Рис. 17

и привязан к грузу массой $M = 10$ кг. Какую скорость будет иметь груз, опустившись на расстояние $h = 1$ м? Проскальзывание нити в блоке отсутствует, трением в осях пренебречь.

Решение. В этой задаче не требуется решать уравнения движения. Здесь надо применить лишь закон сохранения энергии. Предварительно учтем связи в этой системе. Нерастяжимость нити и отсутствие проскальзывания означает связь

скорости груза с угловыми скоростями вращения шара Ω и блока ω :

$$v = \Omega R = \omega r,$$

откуда

$$\Omega = \frac{v}{R}; \quad \omega = \frac{v}{r}. \tag{I.4.39}$$

При опускании груза на расстояние h его потенциальная энергия уменьшается на величину Mgh . Эта энергия тратится на: 1) кинетическую энергию вращения шара; 2) кинетическую энергию вращения блока и 3) кинетическую энергию поступательного движения груза. Для суммы этих кинетических энергий имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{J_{\text{шар}}\Omega^2}{2} + \frac{J_{\text{блок}}\omega^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{2M_1R^2}{5} \frac{v^2}{2R^2} + \frac{mr^2}{2} \frac{v^2}{2r^2} + \frac{Mv^2}{2} = \\ &= v^2 \left(\frac{M_1}{5} + \frac{m}{4} + \frac{M}{2} \right) = v^2 \left(\frac{4M_1 + 5m + 10M}{20} \right). \end{aligned} \tag{I.4.40}$$

Приравняв T к Mgh , находим искомую скорость:

$$v = \sqrt{\frac{20Mgh}{4M_1 + 5m + 10M}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10 \cdot 9,8 \cdot 1}{4 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10}} = 3,25 \text{ м/с}. \tag{I.4.41}$$

При свободном падении груза ($M_1 = m = 0$) мы бы получили $v_0 = \sqrt{2gh} = 4,43$ м/с.

1.4.В. Задачи для самостоятельной работы

Задача I.4.1. Определить момент инерции J кольца массой $m = 50$ г и радиусом $r = 10$ см относительно оси, касательной к кольцу.

Задача I.4.2. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом $r = 5$ см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой $m = 0,4$ кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь $s = 1,8$ м за время $t = 3$ с. Определить момент инерции J маховика.

Задача I.4.3. Шар массой $2,4$ кг, закрепленный на конце легкого стержня, вращается по горизонтальной окружности радиусом $1,5$ м. Вычислить: 1) момент инерции шара; 2) момент силы, необходимый для того, чтобы шар вращался с постоянной угловой скоростью, если со стороны воздуха на шар действует сила сопротивления $0,020$ Н.

Задача I.4.4. Чему равен радиус инерции колеса массой 13,6 кг, если под действием момента силы $3,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ оно из состояния покоя за 10 с ускоряется до 600 об/мин?

Задача I.4.5. Карусель из состояния покоя ускоряется за 34 с до угловой скорости 3 рад/с. Предполагается, что карусель представляет собой однородный диск радиусом 8 м и массой 31 000 кг. Вычислить необходимый для этого момент сил.

Задача I.4.6. Определить момент инерции тонкого стержня длиной $l = 30 \text{ см}$ и массой $m = 100 \text{ г}$ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) его конец; 2) его середину; 3) точку, отстоящую от конца стержня на одну треть его длины.

Задача I.4.7. Человек стоит на платформе, которая может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, и ловит мяч массой $m = 0,4 \text{ кг}$, летящий прямо на него в горизонтальном направлении со скоростью $v = 20 \text{ м/с}$. Траектория мяча проходит на расстоянии $l = 0,8 \text{ м}$ от вертикальной оси вращения платформы. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться платформа с человеком, поймавшим мяч? Считать, что суммарный момент инерции человека и платформы $J = 6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Задача I.4.8. Однородный диск радиусом $r = 0,2 \text{ м}$ и массой $m = 5 \text{ кг}$ вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости от времени дается выражением $\omega = A + Bt$, где $A = 4 \text{ рад/с}$, $B = 8 \text{ рад/с}^2$. Найти касательную силу, приложенную к ободу диска.

Задача I.4.9. Платформа начинает вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0,5 \text{ рад/с}^2$ и через время $t = 15 \text{ с}$ приобретает момент импульса $L = 73,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$. Найти кинетическую энергию платформы через время $t_2 = 20 \text{ с}$ после начала движения.

Задача I.4.10. Диск массой $m = 2 \text{ кг}$ катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью $v = 4 \text{ м/с}$. Найти кинетическую энергию диска.

Задача I.4.11. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия шара $T = 14 \text{ Дж}$. Определить кинетическую энергию поступательного и вращательного движений шара.

Задача I.4.12. Вычислить кинетическую энергию T_{\oplus} суточного вращения Земли. (*Указание:* нашу планету можно в этом случае считать однородным шаром радиусом $R_{\oplus} = 6400 \text{ км}$ и плотностью $\rho_{\oplus} = 5,5 \text{ г/см}^3$.) Если предположить, что эту энергию можно использовать для бытовых нужд, то на какое время t ее хватит при условии потребления мощности 1 кВт каждым из 6,38 млрд жителей Земли?

Задача I.4.13. Платформа в виде диска радиусом $r = 1 \text{ м}$ вращается по инерции с частотой $\nu_1 = 6 \text{ мин}^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса которого $m = 80 \text{ кг}$. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы $J_0 = 120 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Задача I.4.14. Вал массой $m = 100$ кг и радиусом $r = 5$ см вращается с частотой $\nu = 8\text{ с}^{-1}$. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой $N = 40$ Н, под действием которой вал остановился через время $t = 10$ с. Определить коэффициент трения.

Задача I.4.15. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом $r = 2$ м, стоит человек. Масса платформы $M = 200$ кг, масса человека $m = 80$ кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью $v = 2$ м/с относительно платформы.

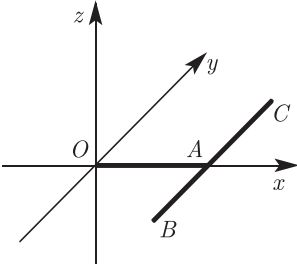


Рис. 18

Задача I.4.16. Два однородных тонких стержня: OA длиной $l_1 = 40$ см и массой $m_1 = 900$ г и BC длиной $l_2 = 24$ см и массой $m_2 = 400$ г — скреплены под прямым углом (рис. 18). Точка A находится в середине стержня BC . Определить момент инерции $J_{(y)}$ системы стержней относительно оси Oy , проходящей через конец стержня OA и лежащей в плоскости стержней.

Задача I.4.17. Найти момент инерции $J_{(x)}$ той же системы (см. рис. 18) относительно

оси Ox , проходящей вдоль стержня OA .

Задача I.4.18. Найти момент инерции $J_{(z)}$ той же системы (см. рис. 18) относительно оси Oz , проходящей через конец стержня OA (точка A) и ортогональной ему и оси Oy . Используя результаты задач I.4.16, I.4.17, убедиться в справедливости теоремы о моментах инерции плоской фигуры.

Задача I.4.19. Ротор центрифуги, вращавшийся с частотой 10 000 об/мин, останавливается под действием момента силы трения $0,2$ Н·м. Если масса ротора 4,3 кг, а его радиус 0,07 м, то сколько оборотов совершит ротор до полной остановки? За какой промежуток времени ротор полностью остановится?

Задача I.4.20. Через блок перекинута веревка, на концах которой закреплены грузы массами 3,2 и 3,4 кг. Блок представляет собой однородный цилиндр радиусом 3 см и массой 0,8 кг. 1) Если бы блок вращался без трения, то какое ускорение было бы у обоих грузов? 2) Чему равен средний момент силы трения в блоке, если известно, что более тяжелый груз, движущийся с направленной вниз скоростью 0,2 м/с, приходит в состояние покоя через 6,2 с?

Задача I.4.21. Вычислить момент инерции тонкого обруча радиусом R_0 и массой m относительно: 1) оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости обруча; 2) оси, касательной к внешнему краю обруча.

Задача I.4.22. Два однородных цилиндрических диска радиусами R_1 и R_2 помещены друг за другом так, что соприкасаются плоскими поверхностями и их центры совмещены. Диски имеют одинаковую толщину и изготовлены из материала одной и той же плотности. Найти

выражение для момента инерции системы относительно оси, проходящей через центры дисков перпендикулярно их плоским поверхностям, через радиусы R_1 и R_2 и полную массу системы M .

Задача 1.4.23. Определить момент инерции однородного куба массой m и длиной ребра a относительно оси, проходящей через центр масс куба и перпендикулярно одной из его граней.

Задача 1.4.24. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязаны грузики массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 110$ г. С каким ускорением a будут двигаться грузики, если масса блока $m = 400$ г? Как изменилось бы ускорение, если бы масса блока была пренебрежимо мала? Трение при вращении блока ничтожно мало, проскальзывание шнура отсутствует.

Задача 1.4.25. Тонкий стержень длиной $l = 50$ см и массой $m = 400$ г вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с² вокруг оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно его длине. Определить вращающий момент M .

Задача 1.4.26. Два шара массой $M = 2$ кг каждый присоединены к концам тонкого невесомого стержня длиной $l = 50$ см. Стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. На один из шаров со скоростью $v = 3$ м/с падает пластилиновый шарик массой $m = 50$ г и прилипает к нему (рис. 19, а). 1) Чему равна угловая скорость ω системы сразу после падения шарика? 2) Каким будет отношение η кинетической энергии системы сразу после соударения к кинетической энергии шарика? 3) На какой угол φ повернется стержень до момента его остановки и начала обратного движения (рис. 19, б)?

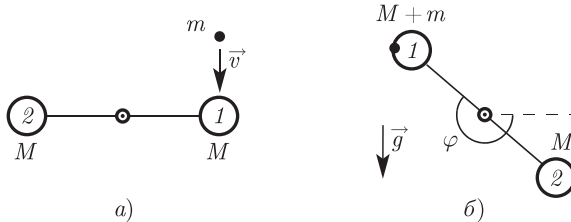


Рис. 19

Задача 1.4.27. Карандаш длиной $l = 15$ см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую ω и линейную v скорости будет иметь в конце падения: 1) середина карандаша; 2) верхний его конец? Считать, что трение настолько велико, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

Задача 1.4.28. Обруч, однородный диск и однородный шар скатываются без проскальзывания с наклонной плоскости высотой $h = 1$ м. Массы всех тел и их радиусы равны. Чему равны конечные скорости тел?

Задача 1.4.29. Карусель диаметром 4,5 м свободно вращается с угловой скоростью 0,70 рад/с; ее полный момент инерции равен 1750 кг·м².

Стоящие на земле четыре человека массой 65 кг каждый одновременно прыгают на край карусели. Чему после этого будет равна угловая скорость карусели? Какой была бы угловая скорость карусели, если бы те же люди, стоящие сначала на карусели, в некоторый момент прыгнули на землю?

Задача I.4.30. Момент инерции ротора центрифуги равен $4 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Какое количество энергии потребуется, чтобы из состояния покоя привести его во вращение с частотой 10 000 об/мин?

Задача I.4.31. Шест высотой 5 м удерживается в равновесии и стоит вертикально на одном из своих концов. Чему будет равна при падении скорость верхнего конца шеста непосредственно перед тем, как он коснется земли? Считать, что нижний конец шеста не скользит.

Задача I.4.32. Полый цилиндр (или обруч) катится по горизонтальной поверхности со скоростью $v = 3,4 \text{ м/с}$ и достигает основания наклонной плоскости с углом наклона 20° . 1) Как далеко вкатится цилиндр на наклонную плоскость? 2) Как долго он будет находиться на наклонной плоскости, прежде чем скатится с нее назад к основанию?

Задача I.4.33. При выключении двигателя вращающаяся однородная цилиндрическая платформа массой 180 кг и радиусом 4,7 м замедляется, и за 18 с угловая скорость платформы уменьшается от 3,2 об/с до нуля. Вычислить приближенно мощность двигателя (в л. с.), необходимую для поддержания постоянной скорости вращения 3,2 об/с.

Задача I.4.34. Одной из возможностей конструирования экологически чистого автомобиля является использование запасующего энергию тяжелого маховика. Предположим, что масса автомобиля с маховиком составляет 1400 кг; масса однородного цилиндрического маховика 240 кг, его диаметр 1,5 м. Автомобиль должен проходить расстояние 300 км, не нуждаясь в «раскрутке» маховика. 1) Сделать следующие разумные предположения: средняя тормозящая сила трения равна 500 Н; разгон из состояния покоя до скорости 90 км/ч требует 20 оборотов маховика с ускорением, причем затраты энергии маховика при подъеме автомобиля вверх равны по величине возврату энергии маховику при спуске. Показать, что при этом полная энергия, которую следует запастись в маховике, составляет около $1,6 \cdot 10^8 \text{ Дж}$. 2) Чему равна угловая скорость маховика, когда он полностью «заряжен» энергией? 3) Какое время понадобится на то, чтобы полностью «зарядить» маховик энергией перед поездкой, используя двигатель мощностью 150 л. с.?

Задача I.4.35. Небольшой шар радиусом $r = 5 \text{ см}$ катится без скольжения по круговому желобу радиусом $R_0 = 30 \text{ см}$ (рис. 20). Шар начинает скатываться с высоты R_0 над поверхностью земли, которой касается дно желоба. На каком расстоянии S от дна желоба упадет шар на землю, если он отрывается от желоба, пройдя по нему дугу, стягиваемую углом $\alpha = 135^\circ$?

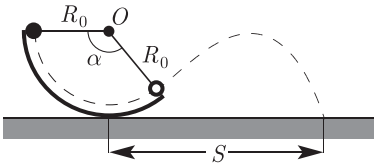


Рис. 20

1.5. Релятивистская механика

1.5.A. Основные формулы

В специальной теории относительности рассматриваются только инерциальные системы отсчета.

Во всех задачах считается, что оси y, y' и z, z' параллельны, а скорость V «штрихованной» системы координат K' относительно «нештрихованной» K направлена вдоль общей оси xx' (рис. 21).

Величина $c = 299\,792\,458$ м/с $\approx 3 \times 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме. Частица называется *релятивистской*, если скорость частицы сравнима со скоростью света, и *нерелятивистской*, если $v \ll c$.

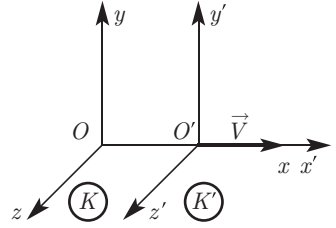


Рис. 21. «Штрихованная» и «нештрихованная» системы координат

- Релятивистское сокращение длины стержня, параллельного оси Ox' :

$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

где l_0 — длина стержня в системе координат K' , относительно которой стержень покоится (собственная длина); l — длина того же стержня, измеренная в системе K , относительно которой он движется со скоростью V .

- Релятивистское замедление хода часов

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

где Δt_0 — промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы K' , измеренный по часам этой системы (собственное время); Δt — промежуток времени между двумя теми же событиями, измеренный по часам системы K .

- Релятивистское сложение скоростей (в частном случае движения частиц параллельно оси Ox)

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2},$$

где v' — скорость тела относительно системы K' ; V — скорость системы K' относительно системы K ; v — скорость тела относительно системы K .

- Релятивистское выражение для импульса частицы, движущейся со скоростью \vec{v} :

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

- Релятивистское выражение для скорости частицы, имеющей импульс \vec{p} :

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}.$$

- Полная энергия релятивистской частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Величина $E_0 = mc^2$ называется *энергией покоя*.

- Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$T = E - mc^2.$$

- Связь полной энергии с импульсом релятивистской частицы

$$\sqrt{E^2 - p^2c^2} = mc^2.$$

Для частиц с нулевой массой (фотонов)

$$E = pc.$$

- Связь кинетической энергии с импульсом релятивистской частицы

$$p^2c^2 = T(T + 2mc^2).$$

1.5.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 31. Космический корабль, двигавшийся со скоростью, на один процент меньшей скорости света, провел в полете один год по часам космонавтов. Сколько времени прошло на Земле? При расчете пренебречь временем разгона корабля до указанной скорости и временем его торможения при посадке.

Решение. Скорость корабля по условию равна $V = 0,99c$. Подставляя это значение в формулу для релятивистского сокращения времени, находим при $\Delta t_0 = 1$ год:

$$\Delta t = \frac{1 \text{ год}}{\sqrt{1 - 0,99^2}} \approx 7,1 \text{ год}.$$

ПРИМЕР 32. Космический корабль движется со скоростью $V = 0,9c$ по направлению от центра Земли. Какое расстояние l пройдет этот корабль в системе отсчета, связанной с Землей (K -система), за промежуток времени $\Delta t' = 1$ с, отсчитанный по часам, находящимся в космическом корабле (K' -система)? На какую величину l' возросло расстояние корабля от Земли с точки зрения космонавтов? Суточным вращением Земли и ее движением вокруг Солнца пренебречь.

Решение. Итак, в космическом корабле прошло время $\Delta t'$, по часам же на Земле прошло время

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

За это время корабль удалится от Земли на расстояние

$$l = V\Delta t = \frac{V\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Подставляя числовые данные, получаем

$$l = \frac{0,9 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1}{\sqrt{1 - 0,9^2}} = 6,19 \cdot 10^8 \text{ м} = 619 \text{ Мм.}$$

С точки зрения космонавтов Земля удаляется с той же скоростью V , так что за время $\Delta t'$ расстояние до нее возрастет на

$$l' = V\Delta t' = 0,9 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1 = 2,7 \cdot 10^8 \text{ м} = 270 \text{ Мм.}$$

Различие этих расстояний — иная форма релятивистского сокращения длины.

ПРИМЕР 33. Два ускорителя выбрасывают навстречу друг другу частицы со скоростями $|v| = 0,9c$. Определить относительную скорость $u_{\text{отн}}$ сближения частиц в системе отсчета, движущейся вместе с одной из них.

Решение. С точки зрения наблюдателя в лабораторной системе отсчета частицы сближаются со скоростью $2|v| = 1,8c$. Это не противоречит выводу специальной теории относительности (СТО) о невозможности движения со скоростью, большей скорости света: здесь мы имеем дело с двумя объектами, каждый из которых движется медленнее скорости света. Если же наблюдатель «сидит» на одной из частиц, то он увидит, что другая частица приближается к нему со скоростью

$$u_{\text{отн}} = \frac{0,9c + 0,9c}{1 + (0,9c)(0,9c)/c^2} = \frac{1,8c}{1,81} = 0,994c.$$

ПРИМЕР 34. Кинетическая энергия электрона $T = 1$ МэВ. Определить скорость электрона. (*Указание:* электронвольт (эВ) — внесистемная единица энергии; $1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Дж.)

Решение. Учитывая, что масса электрона $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ кг, найдем его энергию покоя:

$$m_e c^2 = 8,187 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,511 \cdot 10^6 \text{ эВ} = 0,511 \text{ МэВ.}$$

Это значение можно использовать при решении задач.

Релятивистская формула для кинетической энергии электрона

$$T = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

позволяет найти скорость электрона в долях скорости света:

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{(T/m_e c^2)(2 + T/m_e c^2)}}{1 + T/m_e c^2}.$$

Подставляя числовые данные, находим

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{(1/0,511)(2 + 1/0,511)}}{1 + 1/0,511} = \frac{\sqrt{2 \cdot 0,511 + 1}}{1,511} = 0,941.$$

По этой формуле можно проводить вычисления в любых единицах энергии, так как наименования единиц в отношении $T/m_e c^2$ в правой части формулы сокращаются.

Теперь легко найти, что $v = 0,941 \cdot 3 \cdot 10^8 = 282 \text{ Мм/с}$.

Чтобы определить, является ли частица с кинетической энергией T релятивистской или нерелятивистской, достаточно сравнить кинетическую энергию частицы с ее энергией покоя. Если $T \ll mc^2$, то частицу можно считать нерелятивистской. В нашем случае кинетическая энергия электрона почти вдвое превосходит его энергию покоя. Соответственно применение релятивистских формул необходимо. Критерий малости кинетической энергии по сравнению с энергией покоя эквивалентен критерию малости скорости частицы по сравнению со скоростью света.

ПРИМЕР 35. Импульс релятивистской частицы $p = mc$. С какой скоростью движется частица? Чему равны полная и кинетическая энергии частицы?

Решение. Мы уже достаточно опытны, чтобы понять, что ответ не есть c . В самом деле, надо применить релятивистское соотношение между скоростью и импульсом:

$$v = \frac{mc \cdot c}{\sqrt{(mc)^2 + m^2c^2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = 0,707c.$$

Энергия частицы также определяется по релятивистской формуле:

$$E = \sqrt{(mc)^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{2}mc^2;$$

$$T = E - mc^2 = (\sqrt{2} - 1)mc^2 \approx 0,414mc^2.$$

1.5.В. Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.5.1. Ракета движется относительно земного наблюдателя со скоростью $v = 0,99c$. Какое время пройдет по часам земного наблюдателя, если по часам в ракете прошло 10 лет?

Задача 1.5.2. Два космических корабля стартуют с Земли в противоположных направлениях, каждый со скоростью $0,50c$ относительно Земли. 1) Чему равна скорость первого космического корабля относительно второго? 2) Чему равна скорость второго космического корабля относительно первого?

Задача 1.5.3. С космического корабля, удаляющегося от Земли со скоростью $0,66c$, под прямым углом к направлению полета (с точки зрения наблюдателя, находящегося на борту корабля) запущен беспилотный модуль со скоростью $0,82c$. Чему равна скорость модуля и под каким углом к направлению движения первого космического корабля он летит с точки зрения наблюдателя на Земле?

Задача 1.5.4. Предположим, что космический корабль массой 20 000 кг разогнан до скорости $0,25c$. 1) Чему равна его кинетическая энергия? 2) На сколько процентов вы ошибетесь, если при вычислении кинетической энергии воспользуетесь классической формулой?

Задача 1.5.5. Стержень длиной L_0 покоится относительно системы отсчета K и расположен под углом θ к оси Ox . В системе K' , движущейся вправо со скоростью $\vec{v} = V\vec{i}$ относительно системы отсчета K , определить: 1) длину L стержня; 2) угол θ' , который он образует с осью Ox' .

Задача I.5.6. Ракета движется относительно Земли со скоростью $v = 0,6c$. Во сколько раз замедлится ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

Задача I.5.7. Ваша знакомая проносится мимо вас в своем скоростном спортивном автомобиле со скоростью $0,760c$. По вашим измерениям машина имеет длину $5,80$ м и высоту $1,45$ м. 1) Чему равны длина и высота машины в состоянии покоя? 2) Сколько секунд, как вам кажется, прошло по часам на руке вашей знакомой, если ваши часы отсчитали 20 с? 3) С какой скоростью вы, по мнению вашей знакомой, пронеслись мимо нее? 4) Сколько секунд, с ее точки зрения, прошло по вашим часам за то время, пока часы вашей знакомой отсчитали 20 с?

Задача I.5.8. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями $v_1 = 0,6c$ и $v_2 = 0,9c$ вдоль одной прямой. Определить их относительную скорость u в двух случаях: 1) частицы движутся в одном направлении; 2) частицы движутся в противоположных направлениях.

Задача I.5.9. С какой скоростью должен лететь π -мезон, чтобы пролететь до распада 20 м? Среднее время жизни π -мезона в покое $2,6 \cdot 10^{-8}$ с.

Задача I.5.10. Возбужденный ион, вылетая из ускорителя, испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость v_γ фотона относительно ускорителя, если скорость иона относительно ускорителя $v_i = 0,8c$.

Задача I.5.11. 1) Чему равна скорость электрона, если его энергия в $10\,000$ раз превосходит его энергию покоя (такие скорости достигнуты в Стэнфордском линейном ускорителе SLAC)? 2) Электроны в ускорителе SLAC летят в цилиндре длиной 3 км. Чему равна длина этого цилиндра в системе отсчета электронов?

Задача I.5.12. Покажите, что энергия частицы (эВ) с зарядом e в синхротроне в релятивистском пределе ($V \approx c$) определяется соотношением $E = Brc$, где B — индукция магнитного поля, r — радиус орбиты (в единицах СИ).

Задача I.5.13. π -Мезон с массой m_π распадается в покое на μ -мезон (мюон) с массой m_μ и нейтрино с нулевой массой покоя. Покажите, что кинетическая энергия мюона $T_\mu = (m_\pi - m_\mu)^2 c^2 / 2m_\pi$.

Задача I.5.14. Найти скорость частицы, если ее кинетическая энергия составляет половину энергии покоя.

Задача I.5.15. Чему равна масса объекта, энергия покоя которого равна полной энергии протона, движущегося со скоростью $v = 0,75c$?

Задача I.5.16. При какой скорости энергия тела на 1% превышает его энергию покоя?

Задача I.5.17. Электрон движется со скоростью $v = 0,6$ с. Определить релятивистский импульс p электрона.

Задача I.5.18. Вычислить кинетическую энергию и импульс протона, летящего со скоростью $8,3 \cdot 10^7$ м/с. На сколько процентов вы ошибетесь, если воспользуетесь классическими формулами? Масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Задача I.5.19. Импульс релятивистской частицы $p = mc$. Определить скорость частицы (в долях скорости света).

Задача I.5.20. Определить скорость v электрона, если его кинетическая энергия: 1) $T = 4$ МэВ; 2) $T = 1$ кэВ. В каком из этих случаев можно было бы применить нерелятивистскую формулу $T = mv^2/2$?

Задача I.5.21. Определить кинетическую энергию T релятивистской частицы (в единицах mc^2), если ее импульс $p = mc$.

Задача I.5.22. Импульс релятивистской частицы $p = mc$. Под действием внешней силы импульс частицы увеличился в 2 раза. Во сколько раз возрастет при этом энергия частицы: 1) кинетическая; 2) полная?

Часть II

ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

II.1. Законы идеальных газов. Молекулярно-кинетическая теория газов

II.1.A. Основные формулы

- Уравнение Клапейрона—Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где $R = 8,31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная; m — масса газа; μ — молярная масса.

- Закон Дальтона

$$p = \sum_i p_i,$$

где p — давление смеси газов; p_i — парциальное давление i -го компонента смеси.

- Молярная масса смеси газов

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n \nu_i},$$

где m_i — масса i -го компонента смеси; $\nu_i = m_i/\mu_i$ — количество вещества i -го компонента смеси; n — число компонентов.

- Число молекул, содержащихся в теле:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A,$$

где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ — число Авогадро.

- Основное уравнение кинетической энергии газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle,$$

где n — концентрация молекул (их число в единице объема); $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.

- Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну молекулу идеального газа:

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} k_B T,$$

где i — сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы; $k_B = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

- Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nk_B T.$$

- Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом поле)

$$n = n_0 e^{-U/k_B T},$$

где n — концентрация частиц; n_0 — концентрация частиц в точках, где $U = 0$; U — их потенциальная энергия.

В частности, в однородном поле силы земного притяжения

$$n = n_0 e^{-mgh/k_B T} = n_0 e^{-\mu gh/RT},$$

где m — масса молекулы; μ — молярная масса газа.

- Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом поле) в поле центробежной силы

$$n(r) = n_0 \frac{2kT}{m\omega^2 R_0^2} \frac{e^{-\frac{m\omega^2 R_0^2}{2kT} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)}}{1 - e^{-\frac{m\omega^2 R_0^2}{2kT}}} = n_0 \frac{2RT}{\mu\omega^2 R_0^2} \frac{e^{-\frac{\mu\omega^2 R_0^2}{2RT} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)}}{1 - e^{-\frac{\mu\omega^2 R_0^2}{2RT}}},$$

где ω — угловая скорость вращения; r — расстояние от оси вращения; R_0 — радиус цилиндра, в котором вращается газ.

- Барометрическая формула

$$p(z) = p_0 e^{-\mu gz/(RT)}.$$

- Наиболее вероятная скорость молекул газа

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

- Среднеквадратичная скорость молекул газа

$$v_{\text{КВ}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

- Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n},$$

где d — эффективный диаметр молекул; n — их концентрация.

- Нормальные условия для газа: давление $p = 1$ атм = 760 мм рт. ст. = 101,3 кПа; температура $T = 0^\circ\text{C} = 273$ К; молярный объем $V_m = 22,4$ л.

II.1.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 36. Найти молярную массу μ смеси, содержащей 21% (по массе) кислорода и 79% азота.

Решение. Количество вещества в смеси газов равно сумме количества вещества каждого из компонентов: $\nu = \nu_{\text{O}_2} + \nu_{\text{N}_2}$, т. е.

$$\nu = \frac{m_{\text{O}_2}}{\mu_{\text{O}_2}} + \frac{m_{\text{N}_2}}{\mu_{\text{N}_2}}.$$

Молярная масса μ смеси есть отношение массы m смеси к количеству вещества ν :

$$\mu = \frac{m}{\frac{m_{\text{O}_2}}{\mu_{\text{O}_2}} + \frac{m_{\text{N}_2}}{\mu_{\text{N}_2}}} = \frac{1}{\frac{w_{\text{O}_2}}{\mu_{\text{O}_2}} + \frac{w_{\text{N}_2}}{\mu_{\text{N}_2}}}.$$

Здесь $w_{\text{O}_2} = \frac{m_{\text{O}_2}}{m} = 0,21$ — весовая доля кислорода; $w_{\text{N}_2} = \frac{m_{\text{N}_2}}{m} = 0,79$ — весовая доля азота. (Данные в условии задачи.)

Молярные массы кислорода и азота находим с помощью таблицы Менделеева: $\mu_{\text{O}_2} = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\mu_{\text{N}_2} = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Подставляя эти числовые значения, получаем

$$\mu = \frac{1}{0,21/0,032 + 0,79/0,028} = 28,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Данная смесь газов близка по составу к обычному воздуху.

ПРИМЕР 37. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle E_{\text{вращ}} \rangle$ вращательного движения, приходящуюся на одну молекулу кислорода, при температуре $T = 286$ К, а также кинетическую энергию $W_{\text{вращ}}$ вращательного движения всех молекул этого газа массой $m = 4$ г.

Решение. Известно, что на каждую степень свободы молекул газа приходится одинаковая средняя энергия $k_B T/2$.

Так как молекула кислорода является двухатомной, а следовательно, обладает двумя вращательными степенями свободы, средняя кинетическая энергия вращательного движения, приходящаяся на одну молекулу кислорода, равна

$$\langle E_{\text{вращ}} \rangle = 2 \frac{1}{2} k_B T = k_B T.$$

Подставив в эту формулу значения k_B и T , получим

$$\langle E_{\text{вращ}} \rangle = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 286 = 3,95 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Средняя кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа выражается соотношением $W_{\text{вращ}} = N \langle E_{\text{вращ}} \rangle$, где число молекул газа

$$N = N_A \frac{m}{\mu}.$$

В результате

$$W_{\text{вращ}} = N_A \frac{m}{\mu} \langle E_{\text{вращ}} \rangle = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 3,95 \cdot 10^{-21} = 297 \text{ Дж.}$$

II.1.B. Задачи для самостоятельной работы

Задача II.1.1. В сосуде объемом $V = 0,01 \text{ м}^3$ при температуре $T = 280 \text{ К}$ содержится смесь газов: азота массой $m_1 = 7 \text{ г}$ и водорода массой $m_2 = 1 \text{ г}$. Определить давление смеси газов.

Задача II.1.2. Баллон объемом $V = 30 \text{ л}$ содержит смесь водорода и гелия при температуре $T = 300 \text{ К}$ и давлении $p = 831 \text{ кПа}$. Масса смеси равна $m = 24 \text{ г}$. Определить массу водорода m_1 и массу гелия m_2 .

Задача II.1.3. Определить концентрацию n молекул идеального газа при температуре $T = 300 \text{ К}$ и давлении $p = 1 \text{ МПа}$.

Задача II.1.4. Определить массу золотого слитка, в котором содержится то же количество атомов, что и в слитке железа массой 1 кг .

Задача II.1.5. Определить давление p идеального газа при двух значениях температуры газа: 1) $T = 3 \text{ К}$ и 2) $T = 1 \text{ кК}$. Концентрация молекул газа $n = 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

Задача II.1.6. Воздушный пузырек на дне озера глубиной 16 м имеет объем $1,1 \text{ см}^3$. Температура на дне равна 5°C , а на поверхности — 16°C . Определить объем пузырька в тот момент, когда он достигнет поверхности воды.

Задача II.1.7. Кубический сосуд объемом $8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ заполнен воздухом при атмосферном давлении и температуре 20°C . Сосуд закрыт и нагрет до температуры 150°C . Какая результирующая сила будет действовать на каждую из граней кубического сосуда?

Задача II.1.8. Метеорит пробивает в обшивке космического корабля отверстие, площадь которого $S = 1 \text{ мм}^2$. Объем жилых помещений корабля $V = 10^3 \text{ м}^3$, температура воздуха в них $t = 27^\circ\text{C}$ при давлении $p = 10^5 \text{ Па}$, молярная масса воздуха $\mu = 29 \text{ г/моль}$. Оценить запас времени, имеющийся у космонавтов для надевания скафандров.

Задача II.1.9. Оценить число ударов молекул воздуха внутри комнаты о поверхность оконного стекла площадью $\Delta S = 1 \text{ м}^2$ за интервал времени $\Delta t = 1 \text{ с}$. Температура воздуха в комнате $t = 27^\circ\text{C}$, давление $p = 10^5 \text{ Па}$, молярная масса воздуха $\mu = 29 \text{ г/моль}$.

Задача II.1.10. Какое количество N молекул находится в комнате объемом $V = 50 \text{ м}^3$ при температуре $T = 300 \text{ К}$ и давлении $p = 10^5 \text{ Па}$?

Задача II.1.11. Аквалангист, находясь на глубине 12 м , вдохнул воздух и заполнил им весь объем своих легких, равный $5,5 \text{ л}$. До какого объема расширятся его легкие, если он быстро вынырнет на поверхность? Благоразумно ли поступать таким образом?

Задача II.1.12. Сколько молекул выдыхает человек, если при одном вдохе он получает $1,0 \text{ л}$ воздуха?

Задача II.1.13. Самое низкое давление, получаемое с помощью самой совершенной вакуумной техники, приблизительно равно 10^{-12} Н/м^2 . Сколько молекул содержится при таком давлении в 1 см^3 при температуре 0°C ?

Задача II.1.14. Дом имеет объем 600 м^3 . 1) Чему равна масса воздуха внутри дома при температуре 0°C ? 2) Если температура повысилась до 25°C , то какая масса воздуха войдет в дом или выйдет из него?

Задача П.1.15. Баллон содержит азот массой $m = 2$ г при температуре $T = 280$ К. Определить суммарную кинетическую энергию $W_{\text{пост}}$ поступательного движения всех молекул газа.

Задача П.1.16. Чему равна кинетическая энергия W молекул двухатомного газа, заключенного в сосуд объемом $V = 2$ л и находящегося под давлением $p = 1,5 \cdot 10^5$ Па?

Задача П.1.17. Давление газа $p = 1$ МПа, концентрация молекул этого газа $n = 10^{10}$ см⁻³. Определить температуру T газа и среднюю кинетическую энергию $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ поступательного движения его молекул. Выразить последнюю в джоулях и электронвольтах.

Задача П.1.18. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ поступательного движения и среднее значение $\langle E \rangle$ полной кинетической энергии в расчете на одну молекулу водяного пара при температуре $T = 600$ К (ответ выразить в джоулях и электронвольтах). Найти кинетическую энергию $W_{\text{пост}}$ поступательного движения всех молекул пара, содержащего $\nu = 1$ кмоль количества вещества.

Задача П.1.19. Определить среднее значение $\langle E \rangle$ полной кинетической энергии, приходящейся на одну молекулу гелия, кислорода и водяного пара при температуре $T = 400$ К. Результат выразить в джоулях и электронвольтах.

Задача П.1.20. Определить кинетическую энергию $\langle E_1 \rangle$, приходящуюся в среднем на одну степень свободы молекул азота при температуре $T = 1$ кК, а также среднюю кинетическую энергию поступательного $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ и вращательного $\langle E_{\text{вращ}} \rangle$ движения и среднее значение полной кинетической энергии $\langle E \rangle$ в расчете на одну молекулу. Результаты выразить в джоулях и электронвольтах.

Задача П.1.21. При какой температуре средняя кинетическая энергия $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ поступательного движения молекул идеального газа равна 25,8 мэВ?

Задача П.1.22. Определить количество вещества ν и число N молекул газа, содержащегося в колбе объемом $V = 240$ см³ при температуре $T = 290$ К и давлении $p = 50$ кПа.

Задача П.1.23. Имеются два сосуда с одним и тем же газом при одинаковой температуре. Плотность газа в первом сосуде $\rho_1 = 80$ кг/м³, во втором $\rho_2 = 20$ кг/м³. Объем первого сосуда в $n = 3$ раза меньше объема второго. Определить, какая плотность газа ρ будет в сосуде, полученном при соединении двух исходных сосудов.

Задача П.1.24. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$, приходящуюся на одну молекулу водяного пара при температуре $T = 500$ К. Результат выразить в джоулях и электронвольтах.

Задача П.1.25. Смесь кислорода и азота находится в сосуде под давлением $p = 1$ МПа. Определить парциальные давления p_{O_2} и p_{N_2} газов, если масса кислорода составляет 20% массы смеси.

Задача П.1.26. Какую площадь S водной поверхности покрывает нефтяная пленка при растекании 1 т нефти? Толщина пленки d равна 20 молекулярным слоям, средняя молярная масса нефти $\mu = 1000$ кг/моль,

плотность нефти $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$. Для простоты считать, что молекулы нефти имеют форму кубиков.

Задача II.1.27. Сколько понадобится нефти, чтобы покрыть мономолекулярной пленкой всю водную поверхность Земли (см. задачу II.1.26)? Радиус Земли $R_{\oplus} = 6400 \text{ км}$, океаны занимают $2/3$ площади поверхности Земли.

Задача II.1.28. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу $m = 10^{-18} \text{ г}$. Во сколько раз уменьшится их концентрация n при увеличении высоты на $\Delta h = 10 \text{ м}$? Температура воздуха $T = 300 \text{ К}$.

Задача II.1.29. На какой высоте h над поверхностью Земли атмосферное давление в 2 раза меньше, чем на ее поверхности? Считать, что температура воздуха $T = 290 \text{ К}$ не изменяется с высотой. Молярная масса воздуха $\mu = 29 \text{ г/моль}$ (см. пример 36).

Задача II.1.30. Ротор центрифуги радиусом $r = 0,2 \text{ м}$ заполнен газообразным соединением урана с фтором UF_6 при температуре $T = 100 \text{ К}$. Уран состоит из двух изотопов ^{235}U и ^{238}U . Доля w_0 атомов изотопа ^{235}U в центре ротора составляет 0,7% (природный уран). Определить долю w этого изотопа в обогащенном уране вблизи стенок ротора, если он вращается с угловой скоростью $\omega = 10^4 \text{ рад/с}$.

Задача II.1.31. Самая низкая температура в космосе составляет $T = 2,7 \text{ К}$. Чему равна среднеквадратичная скорость молекул водорода при такой температуре?

Задача II.1.32. Раскаленная атмосфера Солнца (его корона) имеет температуру $T = 2 \cdot 10^6 \text{ К}$ и давление $p = 0,03 \text{ Па}$. Чему равна среднеквадратичная скорость свободных электронов в короне (масса электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$)?

Задача II.1.33. Найдено, что наиболее вероятная скорость молекул газа при температуре T_1 совпадает со среднеквадратичной скоростью тех же молекул при температуре газа T_2 . Вычислить отношение T_2/T_1 .

Задача II.1.34. В глубинах космоса летает очень большой сосуд, в котором хаотически движутся маленькие стальные шарики, одна половина которых имеет диаметр d , а другая половина — диаметр $2d$. Шарики упруго сталкиваются между собой и со стенками сосуда, потерь энергии при этом нет. Какие удары происходят чаще — больших шариков о большие или маленьких шариков о маленькие? Каким будет отношение чисел первых и вторых ударов?

Задача II.1.35. Средняя длина свободного пробега молекул азота при нормальных условиях равна $\lambda = 0,8 \cdot 10^{-5} \text{ см}$. Чему равен эффективный диаметр молекул?

Задача II.1.36. Пятнадцать сферических горошин диаметром $d = 1 \text{ см}$ помещены в сосуд объемом $V = 1 \text{ л}$. Сосуд начинают встряхивать. Чему равна средняя длина свободного пробега горошин?

Задача II.1.37. Оценить максимально допустимое давление в кинескопе длиной 45 см, если 98% всех электронов должны попасть на экран, не столкнувшись ни с одной молекулой воздуха.

Задача II.1.38. Экспериментально измеренная средняя длина свободного пробега молекул углекислого газа при нормальных условиях приблизительно равна $\lambda_{\text{CO}_2} = 5,6 \cdot 10^{-8}$ м. Оценить диаметр молекулы углекислого газа. Сделать то же самое для гелия, в котором $\lambda_{\text{He}} \approx 0,25$ мкм при нормальных условиях.

Задача II.1.39. Космический корабль, возвращающийся с Луны, входит в атмосферу Земли со скоростью около 40 000 км/ч. Молекулы (предположим, что это азот) ударяются о нос космического корабля с такой же скоростью. Какой температуре соответствует эта скорость движения молекулы?

II.2. Физические основы термодинамики

II.2.A. Основные формулы

- Первое начало термодинамики для бесконечно малых изменений

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

т. е. при получении системой количества теплоты δQ часть ее тратится на изменение внутренней энергии dU , а остаток — на совершение работы δA . При конечных изменениях параметров системы

$$Q_{1 \rightarrow 2} = U_{12} + A_{1 \rightarrow 2},$$

где $Q_{1 \rightarrow 2}$ и $A_{1 \rightarrow 2}$ — количество полученной теплоты и совершенная работа при переходе системы из состояния 1 в состояние 2. Эти величины зависят от пути перехода.

Величина U_{12} есть изменение внутренней энергии системы; она зависит только от начального 1 и конечного 2 состояний системы, но не от способа перехода от одного к другому.

- Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{i}{2} pV = \frac{pV}{\gamma - 1},$$

где i — эффективное число степеней свободы молекул газа; μ — молярная масса газа; $\gamma = (i + 2)/i$ — показатель адиабаты.

- Показатель адиабаты смеси газов

$$\gamma = 1 + \frac{\sum_i \nu_i}{\sum_i \nu_i / (\gamma_i - 1)},$$

где ν_i — количество вещества i -го компонента; γ_i — его показатель адиабаты.

- Изохорный процесс ($V = \text{const}$)

$$A_{1 \rightarrow 2} = 0;$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = U_{12} = \frac{V(p_2 - p_1)}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} R \frac{(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}.$$

- Изобарный процесс ($p = \text{const}$).

Работа, совершаемая газом:

$$A_{1 \rightarrow 2} = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

Изменение внутренней энергии

$$U_{12} = \frac{p(V_2 - V_1)}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} R \frac{(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}.$$

Количество теплоты, переданное газу:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p(V_2 - V_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

- Изотермический процесс ($T = \text{const}$).

Работа, совершаемая газом:

$$A_{1 \rightarrow 2} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Изменение внутренней энергии $U_{12} = 0$. Количество теплоты, переданное газу: $Q_{1 \rightarrow 2} = A_{1 \rightarrow 2}$.

- Адиабатный процесс ($\delta Q = 0$).

Уравнение Пуассона для адиабатного процесса

$$pV^\gamma = \text{const} \quad \text{или} \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

Работа, совершаемая газом при адиабатном расширении:

$$A_{1 \rightarrow 2} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = -\frac{m}{\mu} R \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Изменение внутренней энергии $U_{12} = -A_{1 \rightarrow 2}$.

- Теплоемкость C системы зависит от: 1) свойств системы; 2) количества вещества в ней; 3) совершаемого процесса:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = C(T_2 - T_1).$$

- Молярная теплоемкость: c_m — теплоемкость одного моля; удельная теплоемкость c — теплоемкость единицы массы. Связь между ними определяется соотношением

$$c_m = c\mu.$$

- Молярная и удельная теплоемкости:

○ при постоянном объеме

$$c_{m,V} = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{i}{2} R; \quad c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu};$$

○ при постоянном давлении

$$c_{m,p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R = \frac{i+2}{2} R; \quad c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}.$$

Уравнение Майера

$$c_{m,p} - c_{m,V} = R.$$

- Показатель адиабаты

$$\frac{c_{m,p}}{c_{m,V}} = \frac{c_p}{c_V} = \gamma.$$

- Термический КПД теплового двигателя

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1},$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 — количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику; $A = Q_1 - Q_2$ — работа, совершенная рабочим телом.

- Коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta_C = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}},$$

где T_{\max} — температура нагревателя; T_{\min} — температура холодильника.

- Холодильные установки:

- холодильный коэффициент:

$$\eta' = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2},$$

где Q_1 — количество теплоты, отданное нагревателю; Q_2 — количество теплоты, полученное от холодильника;

- коэффициент полезного действия холодильной установки

$$\eta_{\text{хол}} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_2 + A} = \frac{\eta'}{1 + \eta'};$$

- холодильник Карно

$$\eta' = \frac{T_2}{T_1 - T_2}; \quad \eta_{\text{хол}} = \frac{T_2}{T_1},$$

где $T_1(T_2)$ — абсолютная температура нагревателя (холодильника).

II.2.5. Примеры решения задач

ПРИМЕР 38. Какое количество теплоты поглощают $m = 200$ г водорода, нагреваясь от $T_1 = 0^\circ\text{C}$ до $T_2 = 100^\circ\text{C}$ при постоянном давлении? Чему равен прирост внутренней энергии газа? Какую работу совершает газ?

Решение. Количество теплоты Q , поглощаемое газом при изобарическом нагревании, определяется по формуле

$$Q = mc_p \Delta T,$$

где m — масса нагреваемого газа; c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении; $\Delta T = T_2 - T_1$ — изменение температуры газа.

Как известно,

$$c_p = \frac{i + 2}{2\mu} R,$$

где i — число степеней свободы молекулы газа; μ — масса одного моля газа.

Подставив выражение для c_p в формулу для Q , получим

$$Q = \frac{m}{\mu} R \frac{i+2}{2} \Delta T = \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot \frac{5+2}{2} \cdot 100 = 291 \text{ кДж.}$$

Внутренняя энергия газа выражается формулой

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT,$$

так что ее изменение равно

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 100 = 208 \text{ кДж.}$$

Работу расширения газа найдем по формуле, выражающей первое начало термодинамики:

$$A = Q - \Delta U = 291 - 208 = 83 \text{ кДж.}$$

Работу, совершаемую газом, можно определить также по формуле

$$A = \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 100 = 83 \text{ кДж.}$$

ПРИМЕР 39. Найти показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 10$ г и водород массой $m_2 = 4$ г.

Решение. Показатель адиабаты смеси газов дается формулой

$$\gamma = 1 + \frac{\sum_i \nu_i}{\sum_i \nu_i / (\gamma_i - 1)}.$$

Количества веществ различных компонентов смеси определяем из соотношения

$$\nu_i = \frac{m_i}{\mu_i}.$$

В нашем случае $\nu_1 = 10 \cdot 10^{-3} / (4 \cdot 10^{-3}) = 2,5$ моля и $\nu_2 = 4 \cdot 10^{-3} / (2 \cdot 10^{-3}) = 2$ моля. Для одноатомного гелия $\gamma_1 = 5/3$, а для двухатомного водорода $\gamma_2 = 7/5$. Подставляя эти значения в формулу для γ , находим

$$\gamma = 1 + \frac{2,5 + 2}{2,5 \cdot 3/2 + 2 \cdot 5/2} = 1 + \frac{9}{17,5} = 1,51.$$

ПРИМЕР 40. Давление в автомобильной шине объемом $V = 0,3$ м³ равно $p_0 = 1,5$ атм. Шина накачивается насосом с емкостью хода поршня $\Delta V = 3 \cdot 10^{-3}$ м³ до давления $p_N = 2$ атм. Сколько ходов поршня N потребуются, если процесс накачки происходит достаточно медленно, так что система сохраняет температуру окружающей среды? Атмосферное давление принять равным $p_a = 1$ атм.

Решение. Сначала из уравнения состояния определяем массу воздуха, перекачиваемую за один ход поршня в шину:

$$\Delta m = p_a \Delta V \frac{\mu}{RT_0}, \quad (\text{II.2.1})$$

где T_0 — температура окружающей среды.

Аналогично начальная масса воздуха в шине

$$m_0 = p_0 V \frac{\mu}{RT_0}. \quad (\text{II.2.2})$$

После N ходов поршня масса воздуха в шине станет равной

$$m_N = m_0 + N\Delta m = (p_0 V + Np_a \Delta V) \frac{\mu}{RT_0}, \quad (\text{II.2.3})$$

а давление в ней определится из уравнения состояния

$$p_N V = \frac{m_N}{\mu} RT_0, \quad (\text{II.2.4})$$

откуда

$$p_N = p_0 + Np_a \frac{\Delta V}{V}. \quad (\text{II.2.5})$$

Из этого уравнения нетрудно найти число ходов поршня:

$$N = \frac{p_N - p_0}{p_a} \frac{V}{\Delta V}. \quad (\text{II.2.6})$$

Подставляя числовые данные в (II.2.6), учтем, что в данном случае нет необходимости переводить единицы измерения давления из атмосфер в паскали, поскольку в ответ входит только безразмерная комбинация давлений:

$$N = \frac{2 - 1,5}{1} \frac{0,3}{3 \cdot 10^{-3}} = 50.$$

Отметим, что результат не зависит от температуры T_0 .

II.2.B. Задачи для самостоятельной работы

Задача II.2.1. Один моль идеального газа совершает цикл (замкнутый процесс), состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 22). Температуры в точках 1 и 3 равны T_1 и T_3 соответственно. Определить работу ΔA , совершенную газом за цикл, если точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

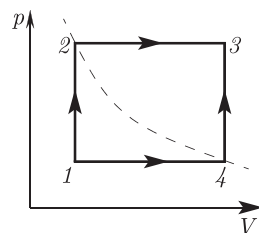


Рис. 22

Задача II.2.2. Азот массой $m = 5$ кг, нагретый на $\Delta T = 150$ К, сохранил неизменный объем. Найти количество теплоты Q , сообщаемое газу; изменение ΔU его внутренней энергии; совершенную газом работу A .

Задача II.2.3. Газ, занимавший объем $V = 12$ л под давлением $p = 100$ кПа, был изобарно нагрет от температуры $T_1 = 300$ К до температуры $T_2 = 400$ К. Найти работу A расширения газа.

Задача II.2.4. Азот находится в закрытом сосуде объемом $V = 3$ л при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $p_1 = 300$ кПа. После нагревания давление в сосуде стало $p_2 = 2,5$ МПа. Определить температуру T_2 азота после нагревания и количество теплоты Q , сообщенное азоту.

Задача II.2.5. При изобарном расширении двухатомного газа была совершена работа $A = 160$ Дж. Найти количество теплоты Q , сообщенное газу.

Задача II.2.6. Чему равна внутренняя энергия $\nu = 3$ моль идеального двухатомного газа при температуре 600 К, если все степени свободы активны?

Задача II.2.7. Азот массой $m = 200$ г расширяется изотермически при температуре $T = 280$ К, причем объем газа увеличивается в 2 раза. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа; работу A , совершенную при расширении газа; количество теплоты Q , полученное газом.

Задача II.2.8. Известно, что теплоемкость порции газа может быть практически какой угодно в зависимости от процесса, в котором участвует газ. Подберем такой процесс, что теплоемкость порции гелия в количестве 1 моль составляет 20 Дж/К. При этом моль гелия в сосуде с поршнем увеличил свою температуру на 10 К. Расширялся при этом газ или сжимался? Какую работу он совершил?

Задача II.2.9. Известно, что теплоемкость порции газа может быть практически какой угодно в зависимости от процесса, в котором участвует газ. Подберем такой процесс, что теплоемкость порции гелия в количестве 1 моль составляет 5 Дж/К. При этом моль гелия в сосуде с поршнем увеличил свой объем, совершив работу $\Delta A = 20$ Дж. Найти изменение температуры газа и подведенное тепло.

Задача II.2.10. Идеальный газ сжимается при постоянном давлении 2 атм от объема 10 л до объема 2 л (при этом какое-то количество теплоты уходит из системы и температура понижается). Затем газу сообщается некоторое количество теплоты таким образом, что объем газа не меняется, а его давление и температура повышаются до тех пор, пока температура не станет равна начальной. Вычислить: 1) полную работу, совершаемую над газом; 2) полное количество теплоты, сообщенное газу.

Задача II.2.11. Какое количество теплоты нужно сообщить 12 м³ азота, который первоначально находился при температуре 20 °С, чтобы его объем удвоился при постоянном давлении 1 атм?

Задача II.2.12. В эластичный сосуд поместили 800 моль азота N₂ при давлении 1 атм. Газ нагрели от 40 до 180 °С. Вычислить: 1) количество теплоты, сообщенное газу; 2) работу, совершенную газом; 3) изменение внутренней энергии.

Задача II.2.13. При очень низких температурах молярная теплоемкость многих веществ пропорциональна кубу абсолютной температуры:

$$c_p = k \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3$$

(это соотношение иногда называют законом Дебая). Для каменной соли температура Дебая $\theta_D = 281$ К и $k = 1940$ Дж/(моль · К). Определить количество теплоты, необходимое для нагревания 3,5 моль этого вещества от температуры 12 К до температуры 38 К.

Задача II.2.14. Один моль идеального газа при давлении 1,0 атм и температуре 580 К участвует в процессе, в котором его давление

увеличивается линейно с температурой. Конечные значения температуры и давления равны соответственно 720 К и 1,6 атм. Определить: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу, совершенную газом; 3) количество теплоты, сообщенное газу. Для определенности считать, что газ обладает пятью активными степенями свободы.

Задача II.2.15. Для поддержания неизменной температуры воды в сосуде в него капают горячую воду из чайника, температура которой 80 °С. (Капли быстро смешиваются с водой сосуда, лишняя вода вытекает из сосуда через верх.) При температуре окружающей среды 20 °С для поддержания температуры в сосуде равной 50 °С приходится капать 10 раз в минуту. Какая температура установится в сосуде, если капать в 2 раза чаще? А если капать в 2 раза реже? Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур.

Задача II.2.16. В кухне на столе стоит стакан, в который налили 200 г воды и бросили несколько кусочков льда. В воду погружен термометр, и мы можем наблюдать за его показаниями по мере таяния льда. Первые $\tau_1 = 20$ мин температура не менялась, затем она начала возрастать и за время $\tau_2 = 5$ мин увеличилась на 2 °С. Сколько льда было в стакане? Удельную теплоту плавления льда принять равной 330 кДж/кг, удельная теплоемкость воды составляет 4,2 кДж/(кг · К).

Задача II.2.17. При изотермическом расширении газа, имеющего объем $V = 2 \text{ м}^3$, его давление меняется от $p_1 = 500 \text{ кПа}$ до $p_2 = 400 \text{ кПа}$. Найти совершенную при расширении работу.

Задача II.2.18. Водород при нормальных условиях имел объем $V_1 = 100 \text{ м}^3$. На сколько изменилась внутренняя энергия газа при адиабатическом увеличении его объема до $V_2 = 150 \text{ м}^3$?

Задача II.2.19. Два грамма гелия, расширяясь адиабатически, совершили работу $\Delta A = 300 \text{ Дж}$. Определить изменение внутренней энергии и температуры гелия.

Задача II.2.20. Показать, что работа, совершаемая газом, который медленно (адиабатически) расширяется от состояния (p_1, V_1) до состояния (p_2, V_2) , определяется выражением

$$\Delta A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}.$$

Задача II.2.21. Воздух, занимавший объем $V_1 = 10 \text{ л}$ при давлении $p_1 = 100 \text{ кПа}$, был адиабатически сжат до объема $V_2 = 1 \text{ л}$. Определить давление p_2 после сжатия.

Задача II.2.22. Определить работу A адиабатического расширения водорода массой $m = 4 \text{ г}$, если температура газа понизилась на $\Delta T = 10 \text{ К}$.

Задача II.2.23. В сосуде под поршнем находится некоторое количество разреженного газа при давлении $p_0 = 80 \text{ кПа}$. Газу сообщают $\Delta Q = 1 \text{ кДж}$ энергии в виде тепла, и он расширяется при постоянном давлении. При этом его внутренняя энергия изменяется от начального значения $U_1 = 13,3 \text{ кДж}$ до конечного значения $U_2 = 13,9 \text{ кДж}$. Найти разность конечного и начального объемов газа в этом процессе.

Задача II.2.24. Автомобильная шина накачана до давления $p_1 = 220$ кПа при температуре $T_1 = 290$ К. Во время движения она нагрелась до температуры $T_2 = 330$ К и лопнула. Считая процесс, происходящий после повреждения шины, адиабатным, определить изменение температуры ΔT вышедшего из нее воздуха. Внешнее давление воздуха равно $p_a = 100$ кПа.

Задача II.2.25. В сосуде объемом $V = 10$ л находится гелий под давлением $p_1 = 10^5$ Па. Стенки сосуда могут выдержать внутреннее давление $p_2 = 10^6$ Па. Определить, какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу в этом сосуде.

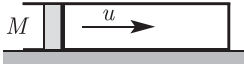


Рис. 23

Задача II.2.26. На рис. 23 показан горизонтальный неподвижный цилиндр, в котором находится 1 моль одноатомного идеального газа, давление которого равно p_0 , а температура T_0 . Поршень массой M может свободно перемещаться в цилиндре и в начальный момент удерживается в неподвижном состоянии. Масса газа много меньше массы поршня. Внешним импульсным воздействием поршню сообщается скорость u . Определить максимальную температуру газа при дальнейшем движении поршня по инерции. Система теплоизолирована, теплоемкостями поршня, сосуда, а также внешним давлением и трением пренебречь.

Задача II.2.27. Разность удельных теплоемкостей некоторого двухатомного газа равна $c_p - c_V = 260$ Дж/кг. Найти молярную массу μ газа и его удельные теплоемкости c_p и c_V . О каком газе идет речь?

Задача II.2.28. Найти молярные теплоемкости $c_{m,V}$, $c_{m,p}$ и показатель адиабаты γ смеси газов, содержащей кислород и аргон, если количества вещества того и другого газа в смеси одинаковы.

Задача II.2.29. Определить удельные теплоемкости c_V , c_p и показатель адиабаты γ смеси газов, содержащей $V_1 = 5$ л водорода и $V_2 = 3$ л гелия. Газы находятся при одинаковых условиях.

Задача II.2.30. Доказать, что касательная к любой точке графика адиабатического процесса на pV -диаграмме имеет больший наклон, чем соответствующая касательная к кривой изотермического процесса.

Задача II.2.31. В результате кругового процесса газ совершил работу $A = 1$ Дж и передал холодильнику количество теплоты $Q_2 = 4,2$ Дж. Определить термический КПД η цикла.

Задача II.2.32. Совершая замкнутый цикл, газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 4$ кДж. Какую работу A совершил газ в результате протекания всего цикла, если термический КПД цикла $\eta = 0,1$?

Задача II.2.33. Газ, совершающий цикл Карно, отдает холодильнику $2/3$ количества теплоты Q_1 , полученного от нагревателя. Температура холодильника $T_2 = 280$ К. Определить температуру T_1 нагревателя.

Задача II.2.34. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура T_1 нагревателя в 3 раза выше абсолютной температуры T_2 холодильника. Нагреватель отдал газу количество теплоты $Q_1 = 42$ кДж. Какую работу A совершил газ?

Задача II.2.35. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура T_1 нагревателя в 4 раза выше абсолютной температуры T_2 холодильника. Какую долю теплоты, получаемой за один цикл от нагревателя, газ отдает холодильнику?

Задача II.2.36. Двигатель, который работает с КПД, равным половине максимального значения (КПД цикла Карно), имеет температуры нагревателя и холодильника, равные соответственно 525°C и 290°C . Двигатель совершает работу, имея мощность 850 кВт . Какое количество теплоты он отдает в течение часа?

Задача II.2.37. Тепловой двигатель, работающий по идеальному циклу Карно, использует нагреватель при 610°C и имеет КПД, равный 27% . Какой должна быть температура нагревателя при той же температуре холодильника, чтобы КПД повысился до 35% ?

Задача II.2.38. Газ совершает цикл Карно. Температура холодильника $T_2 = 280\text{ К}$. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя повысится от $T_1 = 400\text{ К}$ до $T_1' = 600\text{ К}$?

Задача II.2.39. На рис. 24 изображена pV -диаграмма для обратимого теплового двигателя, в котором в качестве рабочего тела используется 1 моль аргона (одноатомный идеальный газ) при температуре $T_1 = 300\text{ К}$. Точки 2 и 3 лежат на изотерме $T = 450\text{ К}$. Процесс 1–2 протекает при постоянном объеме, процесс 3–1 — при постоянном давлении. Чему равен КПД η этого двигателя?

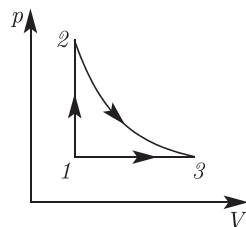


Рис. 24

Задача II.2.40. Тепловой двигатель производит 7250 Дж теплоты, совершая полезную работу 2250 Дж . Чему равен КПД этого двигателя?

Задача II.2.41. Изобретатель предлагает проект создания тепловой машины, которая за определенный интервал времени забирает $Q_1 = 110\text{ МДж}$ тепла из нагревателя при температуре $T_1 = 415\text{ К}$, производит работу $A = 16,7\text{ кВт} \cdot \text{ч}$ и температура холодильника которой равна $T_2 = 212\text{ К}$. Вложили ли бы вы деньги в инвестирование этого проекта?

Задача II.2.42. В дизельном двигателе воспламенение достигается не за счет свечи зажигания, а за счет адиабатического сжатия воздуха до температуры, превышающей температуру воспламенения дизельного топлива, которое впрыскивается в цилиндр двигателя в точке максимального сжатия. Предположим, что воздух поступает в цилиндр при температуре 300 К и занимает объем V_1 , а затем адиабатически сжимается до объема V_2 при температуре 560°C . Считая, что воздух ведет себя как идеальный газ, для которого $c_p/c_V = 1,4$, определить степень сжатия V_1/V_2 воздуха в двигателе.

Задача II.2.43. Идеальный двухатомный газ в количестве 5 моль расширяется адиабатически от объема $V_1 = 0,121\text{ м}^3$ до объема $V_2 = 0,750\text{ м}^3$. Начальное давление $p_1 = 1\text{ атм}$. Определить: 1) начальную T_1 и конечную T_2 температуры; 2) изменение внутренней

энергии; 3) работу, совершенную над газом; 4) количество теплоты, теряемое газом. Предполагается, что молекулы не колеблются.

Задача II.2.44. Тепловая электростанция производит работу в форме электроэнергии с КПД $\eta = 40\%$ и выходной мощностью $P = 850$ МВт. Для отвода отработанного тепла используются охлаждающие трубы. Какой объем воздуха (в км³) нагревается ежедневно, если допустимое повышение температуры воздуха составляет $7,5^\circ\text{C}$? Скажется ли это существенно на местном климате? Если бы нагретый воздух образовал слой толщиной 200 м, то какую площадь он покрыл бы за сутки (24 ч) работы станции? Теплоемкость воздуха при постоянном давлении $c_p = 7$ кал/(моль · К).

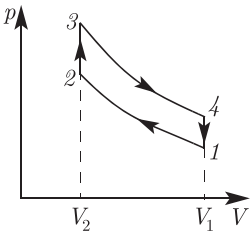


Рис. 25

Задача II.2.45. Действие двигателя внутреннего сгорания можно приближенно представить как обратимый цикл, называемый циклом Отто (рис. 25). Участки цикла 2–3 и 4–1 соответствуют постоянному объему, а участки 1–2 и 3–4 являются адиабатическими. 1) Какие из этих участков соответствуют стадиям сжатия, сгорания газов, рабочего хода и выпуска в двигателе внутреннего сгорания? (На диаграмме стадия впуска не изображена.) 2) Показать, что если

в качестве рабочего тела используется идеальный газ, то (идеализированный) КПД двигателя определяется как $\eta = (V_1/V_2)^{1-\gamma}$, где $\gamma = c_p/c_v$. 3) Определить КПД η двигателя при степени сжатия $V_1/V_2 = 6$, считая рабочее тело двухатомным идеальным газом (например, N_2 или O_2).

Задача II.2.46. Представим себе, что вблизи одного из земных полюсов, где температура окружающей среды равна -40°C , пробурили глубокую скважину до глубины, где температура составляет 800°C . Чему равен теоретический предел для КПД η тепловой машины, работающей в этом интервале температур?

Задача II.2.47. Пусть воображаемая тепловая машина задачи II.2.46 используется для растапливания льда, т. е. превращения его в холодную воду при температуре 0°C . Чему равен максимальный КПД установки в этом случае? Чему равна скорость таяния льда $\Delta m/\Delta t$, если его удельная теплоемкость $c = 2,09$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления $\lambda = 335$ кДж/кг, а выходная мощность тепловой машины составляет $P = 100$ МВт?

Задача II.2.48. Мотор холодильника совершает работу $A = 150$ Дж, отбирая из морозильной камеры количество теплоты $Q_2 = 560$ Дж. Каковы холодильный коэффициент η' и КПД η холодильника? Какое количество теплоты Q_1 поступило в кухню?

Задача II.2.49. Производя кубики льда, холодильник забрал из морозильной камеры с температурой -12°C количество теплоты, равное 177 кДж. Холодильный коэффициент $\eta' = 5,7$, в комнате поддерживается температура 26°C . Найти КПД установки и определить, какое количество теплоты передано в комнату и какую работу надо затратить для функционирования холодильника. Сравнить полученные

холодильный коэффициент и КПД η с аналогичными величинами для холодильника Карно, работающего в том же интервале температур.

Задача II.2.50. Кондиционер работает между температурами $t_2 = 21^\circ\text{C}$ и $t_1 = 33^\circ\text{C}$. Его холодильный коэффициент составляет 14% от коэффициента холодильника Карно, работающего в том же интервале температур, причем мощность охлаждающего потока составляет $\Delta Q_2/\Delta t = 1,2$ кВт. Чему равна мощность мотора, приводящего в действие кондиционер?

Задача II.2.51. Оценить, какую работу должен совершить человек, чтобы компенсировать съеденный кусок пирога калорийностью 400 ккал.

Задача II.2.52. В тонкостенной пластиковой бутылке находится $m_0 = 1$ кг переохлажденной воды. В бутылку бросили сосульку массой $m_1 = 100$ г, имеющую ту же температуру, что и вода в бутылке. После установления теплового равновесия в бутылке оказалось $m_2 = 900$ г жидкости. Какую температуру имела переохлажденная вода? Удельные теплоемкости воды и льда равны $c_1 = 4200$ Дж/(кг·К) и $c_2 = 2100$ Дж/(кг·К) соответственно, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг. Теплоемкостью бутылки и потерями тепла пренебречь.

Задача II.2.53. Водяной нагреватель может производить 7500 кал/ч. Сколько воды сможет он нагреть в течение часа от 20 до 60°C ?

Задача II.2.54. Стекланный термометр массой 45 г показывает 19°C . Затем его помещают в 220 мл воды. После того как вода и термометр приходят в состояние термодинамического равновесия, показание термометра оказывается равным $38,5^\circ\text{C}$. Чему была равна начальная температура воды?

Задача II.2.55. В результате физической работы средней интенсивности человек массой 70 кг производит 200 ккал/ч. Считая, что 20% этой теплоты переходит в полезную работу, а остальные 80% — в теплоту, вычислите, на сколько повысится температура тела человека через 1 ч при условии, что теплота не рассеивается в окружающей среде.

Задача II.2.56. Во время физических упражнений человек может выделить 360 ккал/ч за счет испарения пота с кожного покрова. Какое количество воды теряет при этом человек?

Задача II.2.57. Конькобежец массой 55 кг, движущийся со скоростью 8,5 м/с, скользит по льду и останавливается. Если лед находится при температуре 0°C и 50% теплоты, произведенной в результате трения, поглощается льдом, то какое количество льда растает?

Часть III

ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

III.1. Закон Кулона. Взаимодействие заряженных тел. Напряженность электрического поля. Электрическое смещение. Теорема Остроградского—Гаусса

III.1.A. Основные формулы

- Закон Кулона

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},$$

где \vec{F}_{12} — сила действия первого точечного электрического заряда Q_1 на второй заряд Q_2 ; \vec{r}_{12} — вектор, соединяющий заряды и направленный от Q_1 к Q_2 ; $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ — расстояние между зарядами; ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды; $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$ — электрическая постоянная.

- Электрический заряд любого тела кратен элементарному электрическому заряду $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл (квантование электрического заряда):

$$Q = \pm Ne,$$

где N — целое число.

- Алгебраическая сумма зарядов изолированной системы постоянна (закон сохранения электрического заряда):

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \text{const.}$$

- Напряженность электрического поля является его силовой характеристикой, которая определяет величину и направление силы, действующей на единичный положительный точечный заряд (пробный) $Q_{\text{пр}}$, помещенный в данную точку пространства:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_{\text{пр}}}.$$

- Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом Q в точке наблюдения:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

где \vec{r} — радиус-вектор, проведенный из точки, где находится заряд Q , в точку наблюдения.

- Принцип суперпозиции: напряженность электрического поля системы зарядов \vec{E} равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым отдельным зарядом системы \vec{E}_i , т. е.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i.$$

В частном случае двух зарядов $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ абсолютное значение напряженности результирующего поля определяется выражением

$$E = |\vec{E}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha},$$

где α — угол между \vec{E}_1 и \vec{E}_2 .

- Теорема Остроградского—Гаусса: полный поток вектора напряженности электрического поля в вакууме через замкнутую поверхность произвольной формы численно равен алгебраической сумме электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 , т. е.

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i.$$

- Вектор \vec{D} электрического смещения (электрическая индукция) в бесконечном однородном диэлектрике определяется соотношением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}.$$

- Теорема Остроградского—Гаусса для вектора \vec{D} : поток вектора электрической индукции через любую замкнутую поверхность, охватывающую свободные заряды Q_1, Q_2, \dots, Q_N , равен

$$\Phi_D = \oint_S (\vec{D} \cdot \vec{n}) \, dS = \sum_{i=1}^N Q_i.$$

- Напряженность электрического поля, создаваемого металлической сферой радиусом R , несущей заряд Q , на расстоянии r от ее центра:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\epsilon r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

- Напряженность электрического поля, создаваемого в вакууме равномерно заряженным шаром радиусом R , несущим полный заряд Q , на расстоянии r от его центра:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{\epsilon R^3}, & 0 \leq r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\epsilon R^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

- Напряженность электрического поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью на расстоянии r от ее оси:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\tau}{\epsilon r},$$

где $\tau = \Delta Q / \Delta l$ — линейная плотность заряда.

- Напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon},$$

где $\sigma = \Delta Q / \Delta S$ — поверхностная плотность заряда.

- Напряженность электрического поля между параллельными бесконечными равномерно и разноименно заряженными пластинами с одинаковой по абсолютной величине поверхностной плотностью σ заряда

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon}.$$

Эта формула дает электрическое поле в средней части плоского конденсатора при условии, что расстояние между пластинами много меньше линейных размеров самих пластин.

III.1.Б. Примеры решения задач

Здесь и далее предполагается, что заряды находятся в вакууме ($\epsilon = 1$), если в условии не оговорено иное.

ПРИМЕР 41. Два заряда $Q_1 = 9Q$ и $Q_2 = -Q$ находятся на расстоянии $l = 20$ см друг от друга. Где надо поместить третий заряд Q_3 , чтобы силы, действующие на него со стороны зарядов Q_1 и Q_2 , уравновесились?

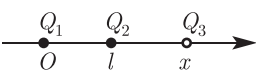


Рис. 26

Решение. Две силы, действующие на заряд Q_3 , направлены по линиям, соединяющим его с зарядами Q_1 и Q_2 . Найдем точку, где бы эти силы уравновесились. Для этого прежде всего необходимо, чтобы они были коллинеарны. Это, в свою очередь, означает, что заряд Q_3 должен быть помещен на линии, соединяющей заряды Q_1 и Q_2 (рис. 26).

Проведем ось Ox вдоль этой линии. Поместим начало координат в точку расположения заряда Q_1 . Теперь остается найти координату x заряда Q_3 из условия, что полная сила, действующая на него со

стороны зарядов Q_1 и Q_2 равна нулю.

стороны Q_1 и Q_2 , равна нулю. Поскольку мы свели задачу к одномерной, вместо векторов у нас будут фигурировать алгебраические силы, знак которых зависит от их направления относительно оси. На рис. 26 изображена одна из возможных ситуаций, когда координата $x > l$. На самом деле может случиться и так, что $0 < x < l$ (заряд Q_3 должен быть помещен между Q_1 и Q_2) или $x < 0$ (заряд Q_3 должен быть помещен слева от заряда Q_1). Заранее это неизвестно, но должно получиться как результат решения задачи.

Всегда полезно представить себе возможные решения задачи на качественном уровне (хотя бы для последующей проверки своих результатов). В условии не заданы знаки зарядов Q и Q_3 , поэтому представим для определенности, что они положительны. Если заряд Q_3 помещается между зарядами Q_1 и Q_2 , то он будет притягиваться к отрицательному заряду Q_2 и отталкиваться от положительного заряда Q_1 . Обе силы действуют в одном направлении, и их сумма никак не может равняться нулю. Если же заряд Q_3 помещен справа от Q_2 (см. рис. 26) или слева от Q_1 , то действующие на него силы имеют разные направления и при определенном соотношении между их абсолютными величинами могут взаимно скомпенсироваться.

Однако при помещении заряда Q_3 слева от Q_1 имеем следующую ситуацию: заряд Q_3 расположен к Q_1 ближе, чем к Q_2 , а абсолютная величина Q_1 превышает абсолютную величину Q_2 . Оба эти фактора действуют «в одну сторону», так что сила со стороны Q_1 заведомо больше силы со стороны Q_2 , и они никак не могут скомпенсироваться, хотя и имеют разные направления. Эти соображения недействительны при помещении Q_3 справа от заряда Q_2 : меньшая величина последнего по сравнению с Q_1 при меньшем же расстоянии до Q_3 вполне может вылиться в одинаковость действующих на Q_3 сил.

Итак, нам следует ожидать, что искомая координата x будет превышать значение l . Получим теперь количественное решение задачи. Сила F_{13} , действующая на заряд Q_3 со стороны заряда Q_1 , задается законом Кулона:

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_3 x}{\epsilon |x|^3} = \frac{Q Q_3}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{9x}{|x|^3}.$$

Аналогично выражение для силы F_{23} , действующей на Q_3 со стороны Q_2 :

$$F_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_3 (x-l)}{\epsilon |x-l|^3} = - \frac{Q Q_3}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{(x-l)}{|x-l|^3}.$$

Если эти силы уравновешиваются ($F_{13} + F_{23} = 0$), то должно выполняться равенство

$$\frac{9x}{|x|^3} - \frac{(x-l)}{|x-l|^3} = 0. \quad (\text{III.1.1})$$

Заметим, что в уравнение не вошли заряды Q , Q_3 , равно как и диэлектрическая проницаемость среды ϵ , — ответ задачи от этих параметров не будет зависеть.

Рассмотрим два случая.

1. При $0 < x < l$ оба слагаемых F_{13} , F_{23} имеют одинаковые знаки и равенство $F_{13} + F_{23} = 0$ не выполняется. В случае $x > l$ можно снять

знаки модулей:

$$\frac{9}{x^2} - \frac{1}{(x-l)^2} = 0.$$

Это условие в результате сводится к квадратному уравнению

$$8x^2 - 18lx + 9l^2 = 0,$$

которое имеет два корня: $x = 3l/2$ и $x = 3l/4$. Но это уравнение получено при условии $x > l$, которому один из корней не удовлетворяет. Поэтому пока оставим только решение $x = 3l/2$.

2. При $x < 0$ также можно избавиться от знаков модулей, учитывая, что при $x < 0$ имеем $x/|x|^3 = -1/x^2$ и $(x-l)/|x-l|^3 = -1/(x-l)^2$. Подставляя эти выражения в (III.1.1), получим уравнение

$$-\frac{9}{x^2} + \frac{1}{(x-l)^2} = 0,$$

которое совпадает с уравнением предыдущего случая. Корни его уже известны, но ни один из них не удовлетворяет условию $x < 0$.

Таким образом, в соответствии с качественными рассуждениями получено единственное решение задачи: $x = 3l/2 = 30$ см, т. е. заряд Q_3 действительно должен располагаться справа от Q_2 .

ПРИМЕР 42. Каким должен быть заряд Q_3 в примере 41, чтобы все электрические силы, действующие на заряды системы, равнялись нулю?

Решение. Мы уже знаем, куда надо поместить заряд Q_3 , чтобы действующая на него сила была равна нулю. Поместим его в эту точку ($x = 3l/2$). Теперь надо так выбрать величину этого заряда, чтобы были равны нулю силы, действующие на Q_1 и Q_2 . Сила F_{31} , действующая на заряд Q_1 со стороны Q_3 , определяется по третьему закону Ньютона:

$$F_{31} = -F_{13} = -\frac{QQ_3}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{4}{l^2}$$

(мы уже подставили сюда найденное выше значение $x = 3l/2$). Сила же F_{21} , действующая на Q_1 со стороны заряда Q_2 , определяется законом Кулона:

$$F_{21} = \frac{9QQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{1}{l^2}.$$

Условие $F_{21} + F_{31} = 0$ приводит к уравнению $9Q^2/4 - QQ_3 = 0$, откуда находим $Q_3 = 9Q/4$. Из третьего закона Ньютона автоматически следует, что при этом сила, действующая на заряд Q_2 , также равна нулю:

$$\begin{aligned} F_{12} + F_{32} &= -F_{21} - F_{23} = -F_{21} - (F_{31} + F_{13}) - F_{23} = \\ &= -(F_{21} + F_{31}) - (F_{13} + F_{23}) = 0, \end{aligned}$$

поскольку в скобках стоят равные нулю силы, действующие на Q_1 и Q_3 .

ПРИМЕР 43. Пусть в углах квадрата со стороной a помещены электрические заряды Q_i (рис. 27). Найти силу, действующую на заряд Q_1 в левом нижнем углу. Положить $Q = 0,1$ мкКл; $a = 5$ см.

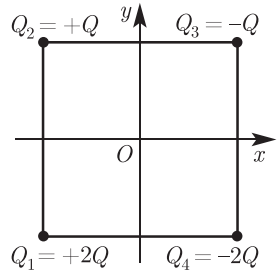


Рис. 27

Решение. Подобные задачи можно решать разными способами, исходя из геометрии системы. Ниже представлен не самый короткий, но зато самый общий и надежный метод. Поместим начало координат в центр квадрата (точка O) и направим оси, как показано на рис. 27. Пронумеруем точки в соответствии с индексом находящихся в них зарядов. Запишем теперь радиус-векторы углов квадрата в координатной форме $\{x, y\}$:

$$\vec{r}_1 = \left\{ -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right\}; \quad \vec{r}_2 = \left\{ -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right\}; \quad \vec{r}_3 = \left\{ \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right\}; \quad \vec{r}_4 = \left\{ \frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right\}. \quad (\text{III.1.2})$$

Силы, действующие на заряд Q_1 , определяются по закону Кулона:

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2,3,4} \frac{Q_1 Q_i}{r_{i1}^2} \frac{\vec{r}_{i1}}{r_{i1}}, \quad (\text{III.1.3})$$

где $\vec{r}_{i1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_i$. Имея в виду выражения (III.1.2), получаем для векторов, соединяющих заряды 2, 3, 4 с зарядом 1:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{21} &= a\{0, -1\}; & \vec{r}_{31} &= a\{-1, -1\}; & \vec{r}_{41} &= a\{-1, 0\}; \\ r_{21} &= a; & r_{31} &= a\sqrt{2}; & r_{41} &= a. \end{aligned} \quad (\text{III.1.4})$$

Подставляем выражения (III.1.4) в формулу (III.1.3) вместе с выражениями для зарядов Q_i :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2Q^2}{a^2} \{0, -1\} - \frac{2Q^2}{2a^2\sqrt{2}} \{-1, -1\} - \frac{4Q^2}{a^2} \{-1, 0\} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} \left\{ 4 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.1.5})$$

Абсолютную величину искомой силы находим по теореме Пифагора:

$$F_1 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{\left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{21 + 2\sqrt{2}}. \quad (\text{III.1.6})$$

Подставляя числовые значения, получаем $F_1 = 0,176$ Н. Направление этой силы задается единичным вектором

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{F}_1}{F_1} = \frac{1}{\sqrt{21 + 2\sqrt{2}}} \left\{ 4 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \{0,964, -0,265\}. \quad (\text{III.1.7})$$

Иными словами, сила F_1 направлена почти по Ox , отклоняясь от нее вниз (отрицательный знак второй компоненты вектора) на угол

$$\varphi = \text{arctg}(0,275) = 15,4^\circ.$$

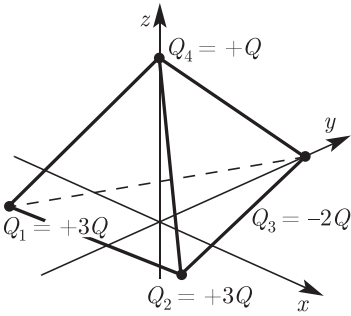


Рис. 28

основы, выпишем компоненты $\{x, y, z\}$ радиус-векторов вершин тетраэдра:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \left\{ -\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0 \right\}; & \vec{r}_2 &= \left\{ \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0 \right\}; \\ \vec{r}_3 &= \left\{ 0, \frac{a\sqrt{3}}{3}; 0 \right\}; & \vec{r}_4 &= \left\{ 0, 0, \frac{a\sqrt{6}}{3} \right\}. \end{aligned} \tag{III.1.8}$$

Векторы $\vec{r}_{i4} = \vec{r}_4 - \vec{r}_i$, проведенные из углов треугольника в основании ($i = 1, 2, 3$) к вершине тетраэдра, имеют одинаковую длину a , но разные направления:

$$\vec{r}_{14} = a \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}; \quad \vec{r}_{24} = a \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}; \quad \vec{r}_{34} = a \left\{ 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}. \tag{III.1.9}$$

Теперь записываем закон Кулона:

$$\begin{aligned} \vec{F}_4 &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(3 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\} + 3 \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\} - 2 \left\{ 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\} \right) = \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left\{ 0, \frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{6}}{3} \right\}, \end{aligned} \tag{III.1.10}$$

откуда для абсолютной величины искомой силы имеем (в вакууме)

$$F_4 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{19} = 98,1 \text{ Н.}$$

ПРИМЕР 44. Пусть в углах правильного тетраэдра с ребром a помещены электрические заряды Q_i , показанные на рис. 28.

Найти силу, действующую на заряд Q_4 в вершине тетраэдра. Положить $Q = 5 \text{ мкКл}$, $a = 10 \text{ см}$.

Решение. Поместим центр координат в центре треугольника, лежащего в основании, и проведем координатные оси, как показано на рис. 28. При решении подобных задач никуда не деться от геометрии, и, чтобы не излагать здесь ее

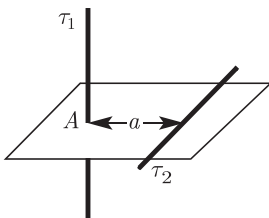


Рис. 29

ПРИМЕР 45. Две взаимно перпендикулярные бесконечно длинные нити, несущие равномерно распределенные заряды с линейными плотностями τ_1 и τ_2 , находятся на расстоянии a друг от друга (рис. 29). Как зависит сила взаимодействия нитей от расстояния a ?

Решение. Сначала обсудим решение этой задачи методом анализа размерностей (см. учебник, т. 1, п. 1.3). Сила взаимодействия нитей может зависеть от плотностей заряда на них, расстояния между нитями и электрической постоянной, т. е. искомая формула имеет вид

$$F = C(\tau_1\tau_2)^p \varepsilon_0^q a^r, \quad (\text{III.1.11})$$

где C — безразмерная постоянная (число).

Заметим, что вследствие симметричного расположения нитей плотности заряда на них могут входить только симметричным образом, в одинаковых степенях. Размерности входящих сюда величин в СИ известны:

$$[F] = LMT^{-2}; \quad [\tau] = QL^{-1}; \quad [\varepsilon_0] = Q^2M^{-1}L^{-3}T^2; \quad [a] = L. \quad (\text{III.1.12})$$

По сравнению с механикой здесь появилась новая величина — размерность Q электрического заряда. Подставляя выражения (III.1.12) в формулу (III.1.11), получаем уравнение для размерностей

$$LMT^{-2} = [QL^{-1}]^{2p} [Q^2M^{-1}L^{-3}T^2]^q L^r = Q^{2p+2q} L^{-2p-3q+r} M^{-q} T^{2q}. \quad (\text{III.1.13})$$

Приравнивая степени при M и T в обеих частях уравнения (III.1.13), получаем $q = -1$. В левой части нет величины размерности заряда, откуда следует, что $p + q = 0$, или $p = 1$. Наконец, приравнивая степени при размерности длины, получаем уравнение $1 = -2p - 3q + r = 1 + r$, откуда следует, что $r = 0$. Окончательно имеем

$$F = C \frac{\tau_1\tau_2}{\varepsilon_0}. \quad (\text{III.1.14})$$

Таким образом, оказывается, что сила взаимодействия нитей не зависит от расстояния между ними. Напомним, что безразмерную постоянную C невозможно определить методом анализа размерностей.

В сущности, уже получен ответ на вопрос задачи, но приведем также и точное ее решение, которое позволит найти C . На рис. 30 показан вид сверху на плоскость, содержащую нить τ_2 ; точкой A отмечено сечение плоскостью чертежа нити τ_1 . Напряженность электрического поля, создаваемого нитью τ_1 в точке, где находится элемент dy второй нити, равна

$$E = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (\text{III.1.15})$$

На элемент нити dy действует сила

$$dF = EdQ = E\tau_2 dy. \quad (\text{III.1.16})$$

Нас, однако, интересует лишь компонента $dF_x = dF \cos \alpha$ этой силы вдоль оси x , ибо вертикальная составляющая компенсируется точно такой же силой, действующей на симметричный элемент нити внизу. Выразим все расстояния через угол α :

$$r = \frac{a}{\cos \alpha}; \quad y = a \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow dy = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha. \quad (\text{III.1.17})$$

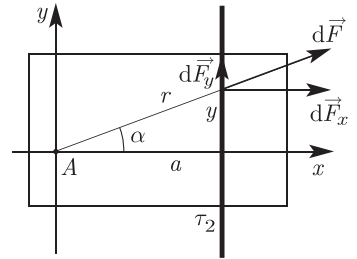


Рис. 30

Получаем в результате выражение для составляющей силы, действующей на элемент dy :

$$dF_x = \frac{\tau_1 \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 a} \tau_2 \cos \alpha \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\epsilon_0} d\alpha. \quad (\text{III.1.18})$$

Интегрируя это выражение по углу α в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, находим полную силу, действующую на нить:

$$F = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\epsilon_0}. \quad (\text{III.1.19})$$

Снова убеждаемся, что сила взаимодействия нитей в данной задаче не зависит от расстояния a между ними. Кроме того, мы определили в этот раз безразмерную постоянную $C = 1/2$.

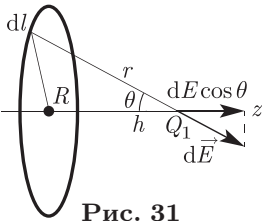


Рис. 31

ПРИМЕР 46. Кольцо радиусом R несет равномерно распределенный заряд Q . Чему равна сила взаимодействия кольца с точечным зарядом Q_1 , расположенным на оси кольца на расстоянии h от его центра (рис. 31)?

Решение. По условию заряд Q равномерно распределен на кольце радиусом R . Разделив Q на длину окружности, получим линейную плотность заряда на кольце $\tau = Q/(2\pi R)$. Вы-

делим на кольце элемент длиной dl . Его заряд равен

$$dQ = \tau dl = \frac{Q}{2\pi R} dl.$$

В точке Q_1 этот элемент создает электрическое поле

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dl}{2\pi R}.$$

Нас интересует лишь продольная (вдоль оси кольца z) компонента поля, ибо при суммировании вкладов всех элементов кольца только она отлична от нуля:

$$dE_z = dE \cos \theta = dE \frac{h}{r} = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{dl}{2\pi R} = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 (h^2 + R^2)^{3/2}} \frac{dl}{2\pi R}. \quad (\text{III.1.20})$$

Интегрируя по dl , находим электрическое поле на оси кольца на расстоянии h от его центра:

$$E_z = \int dE_z = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 (h^2 + R^2)^{3/2}} \frac{1}{2\pi R} \int dl = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 (h^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (\text{III.1.21})$$

Отсюда находим искомую силу взаимодействия кольца с зарядом Q_1 :

$$F = \frac{Q_1 Q h}{4\pi\epsilon_0 (h^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (\text{III.1.22})$$

Обсудим полученный результат. При больших расстояниях до кольца ($h \gg R$) величиной радиуса кольца под знаком радикала пренебрегаем и получаем приближенное выражение

$$F \approx \frac{Q_1 Q}{4\pi\epsilon_0 h^2}.$$

Это неудивительно, так как на больших расстояниях кольцо выглядит точечным зарядом Q , и сила взаимодействия определяется обычным законом Кулона. На малых расстояниях ситуация резко меняется. Так, при помещении пробного заряда Q_1 в центр кольца ($h = 0$) сила взаимодействия равна нулю. Это тоже неудивительно: в этом случае заряд Q_1 притягивается с равной силой всеми элементами кольца, и действие этих сил взаимно компенсируется.

Поскольку при $h = 0$ и при $h \rightarrow \infty$ электрическое поле равно нулю, где-то при промежуточном значении h электрическое поле кольца максимально. Найдем эту точку, дифференцируя уравнение (III.1.21) по расстоянию h :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dh} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dh} \frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(h^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{3h^2}{(h^2 + R^2)^{5/2}} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - 2h^2}{(h^2 + R^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.1.23})$$

Приравнявая производную нулю, находим точку $h = R/\sqrt{2}$, где поле максимально. Оно в этой точке равно:

$$E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

ПРИМЕР 47. Сплошной непроводящий шар радиусом R обладает полным зарядом Q , причем плотность этого заряда распределена в объеме по линейному закону $\rho = br$. Найти напряженность электрического поля на расстоянии r от центра шара.

Решение. Выразим сначала постоянную b через параметры Q и R . Полный заряд шара находим интегрированием по его объему V :

$$Q = \int_V \rho(r) dV = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr = 4\pi b \int_0^R r^3 dr = \pi b R^4, \quad (\text{III.1.24})$$

откуда получаем выражение для постоянной

$$b = \frac{Q}{\pi R^4}. \quad (\text{III.1.25})$$

Выполнив интегрирование лишь для внутренней части сферы радиусом r , найдем заряд $Q(r)$ внутри нее:

$$Q(r) = 4\pi b \int_0^r r^3 dr = \pi b r^4 = Q \frac{r^4}{R^4}. \quad (\text{III.1.26})$$

По теореме Остроградского—Гаусса напряженность электрического поля внутри шара

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q r^2}{4\pi\epsilon_0 R^4}, \quad r \leq R. \quad (\text{III.1.27})$$

Напряженность же поля вне шара определяется тем же выражением, что и для точечного заряда:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r \geq R. \quad (\text{III.1.28})$$

На поверхности шара оба выражения (III.1.27) и (III.1.28) дают, естественно, одинаковый результат

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

III.1.B. Задачи для самостоятельной работы

Закон Кулона

Задача III.1.1. Заряд Q разделен на две части: $Q - q$ и q , которые помещены на некотором расстоянии L друг от друга. При каком отношении q/Q сила Кулона между частями будет максимальной?

Задача III.1.2. Частица с зарядом $Q = 4e$ может распадаться: 1) на две частицы с равными зарядами $Q_1 = 2e$ или 2) на две частицы с зарядами $Q_1 = 3e$ и $Q_2 = e$. Найти отношение сил кулоновского отталкивания в этих случаях при одинаковом расстоянии между продуктами распада.

Задача III.1.3. Два одинаковых металлических шарика притягивают друг друга с силой $F_1 = 0,108$ Н при расстоянии между ними $l = 50$ см. После того как шарики были на какое-то время соединены проводником, они стали отталкивать друг друга с силой $F_2 = 0,036$ Н. Какими были начальные заряды Q_1, Q_2 на шариках?

Задача III.1.4. Два одинаковых металлических шарика отталкивают друг друга с силой $F_1 = 0,036$ Н при расстоянии между ними $l = 50$ см. После того как шарики были на какое-то время соединены проводником, они стали отталкивать друг друга с силой $F_2 = 0,108$ Н. Какими были начальные заряды Q_1, Q_2 на шариках?

Задача III.1.5. На каком расстоянии друг от друга должны находиться два электрона, чтобы сила их электрического отталкивания была равна весу каждого из них на поверхности Земли?

Задача III.1.6. На каком расстоянии друг от друга находятся два протона, если сила их электрического отталкивания равна весу каждого из них на поверхности Земли? Масса протона $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$ кг.

Задача III.1.7. Точечные заряды $+88, -55$ и $+70$ мкКл расположены на одной прямой с интервалом $0,75$ м. Найти силы, действующие на каждый заряд со стороны двух других.

Задача III.1.8. Точечные заряды $+88, +55$ и $+70$ мкКл расположены на одной прямой с интервалом $0,75$ м. Найти силы, действующие на каждый заряд со стороны двух других.

Задача III.1.9. Заряды $Q_1 = -8$ мкКл и $Q_2 = 1,8$ мкКл находятся на расстоянии $l = 11,8$ см друг от друга. Где поместить третий заряд, чтобы действующая на него сила была равна нулю?

Задача III.1.10. Заряды $Q_1 = 8$ мкКл и $Q_2 = 1,8$ мкКл находятся на расстоянии $l = 11,8$ см друг от друга. Где поместить третий заряд, чтобы действующая на него сила была равна нулю?

Задача III.1.11. В боровской модели атома водорода электрон массой m удерживается на круговой орбите радиуса r вокруг ядра (протона) электрической силой

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2},$$

где e — электрический заряд электрона и протона, а ϵ_0 — электрическая постоянная.

В этой модели разрешены не все орбиты, а лишь те, для которых момент импульса L электрона составляет целое кратное величины \hbar — постоянной Планка: $L = n\hbar$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ — целое положительное число. Показать, что возможные радиусы орбит электрона определяются выражением

$$r = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{me^2}.$$

Задача III.1.12. В вершинах квадрата со стороной 1,15 м помещены одинаковые заряды $+5$ мкКл. Определить величину и направление силы, действующей на каждый заряд.

Задача III.1.13. В вершинах квадрата со стороной 1,15 м помещены два заряда по $+5$ мкКл и два заряда по -5 мкКл, причем одноименные заряды расположены на диагоналях квадрата. Определить величину и направление силы, действующей на каждый заряд.

Задача III.1.14. В вершинах квадрата со стороной 1,15 м помещены два заряда по $+5$ мкКл и два заряда по -5 мкКл, причем на диагоналях квадрата расположены разноименные заряды. Определить величину силы, действующей на каждый заряд.

Задача III.1.15. Шесть одинаковых зарядов $Q = 4$ мкКл связаны нитями одинаковой длины $l = 15$ см. В результате кулоновского отталкивания они образуют правильный плоский шестиугольник. Седьмой заряд той же величины помещается в центре этого шестиугольника (рис. 32). Определить натяжение T нитей.

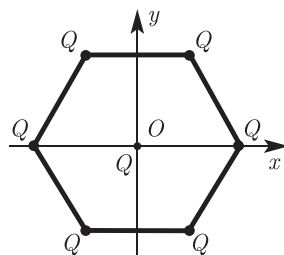


Рис. 32

Задача III.1.16. Шесть одинаковых зарядов $Q = 4$ мкКл связаны нитями одинаковой длины $l = 15$ см с седьмым таким же зарядом. В результате кулоновского отталкивания они располагаются в вершинах правильного плоского шестиугольника (рис. 33). Определить натяжение T нитей.

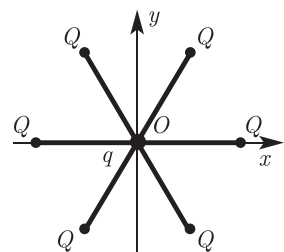


Рис. 33

Задача III.1.17. В вершинах при основании тетраэдра, фигурирующего в примере 44, помещены одинаковые заряды $Q = 5$ мкКл (см. рис. 28). Определить величину и направление силы, действующей на каждый заряд.

Задача III.1.18. В вершинах при основании тетраэдра, фигурирующего в примере 44, помещены три одинаковых заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 3$ мкКл, а четвертый заряд равен $Q_4 = -3$ мкКл (см. рис. 28). Определить величину и направление силы, действующей на отрицательный заряд.

Задача III.1.19. В вершинах при основании тетраэдра, фигурирующего в примере 44, помещены три одинаковых заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 3$ мкКл, а четвертый заряд равен $Q_4 = -3$ мкКл (см. рис. 28). Определить величину силы, действующей на каждый из положительных зарядов.

Задача III.1.20. Лепестки электроскопа представляют собой проводящие нити длиной $l = 60$ см, на которых подвешены одинаковые шарики массой $m = 25$ г. В начальном положении шарики соприкасаются и нити вертикальны. При сообщении электроскопу заряда Q нити отклоняются на угол $\alpha = 30^\circ$ от вертикали. Чему равен заряд Q ?

Задача III.1.21. Три одинаковых проводящих шарика массой $m = 0,2$ г подвешены на одинаковых нитях длиной $l = 0,2$ м, привязанных к одной точке. Когда шарикам сообщили одинаковые заряды Q , они разошлись так, что каждая нить отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$, а углы между нитями также оказались одинаковыми и равными $\beta = 60^\circ$. Определить величину заряда Q , сообщенного каждому шарiku.

Задача III.1.22. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/м. В центре кольца находится точечный заряд $Q = 0,4$ мкКл. Определить силу, растягивающую кольцо (взаимодействием зарядов кольца между собой пренебречь).

Задача III.1.23. По тонкому полукольцу радиусом $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. В центре кривизны полукольца находится точечный заряд $Q = 20$ нКл. Чему равна сила взаимодействия полукольца с зарядом?

Задача III.1.24. Тонкая прямолинейная нить длиной $l = 20$ см равномерно заряжена с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. На расстоянии $a = 10$ см от нити, напротив ее середины, находится точечный заряд $Q = 1$ нКл. Какая сила действует на заряд со стороны нити?

Задача III.1.25. Полубесконечная прямолинейная нить расположена вдоль оси x и начинается в точке $x = 0$. Нить заряжена равномерно с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. В точке с координатами $x = 0$, $y = a$ ($a = 50$ см) находится точечный заряд $Q = 0,1$ мкКл. Найти величину и направление силы F , действующей на заряд.

Напряженность электрического поля

Задача III.1.26. Протон неподвижно висит в электрическом поле напряженностью E вблизи поверхности Земли. Определить E .

Задача III.1.27. Электрон неподвижно висит в электрическом поле напряженностью E вблизи поверхности Земли. Определить E .

Задача III.1.28. Заряд $Q = 1$ мкКл распределен равномерно по кольцу радиусом $R = 5$ см. Чему равна напряженность поля на оси кольца на расстоянии $h = 7$ см от его центра?

Задача III.1.29. Чему равна максимальная напряженность электрического поля на оси симметрии системы в задаче III.1.28?

Задача III.1.30. Заряд $Q = 0,01$ мкКл распределен равномерно по диску радиусом $R = 2,5$ см. Чему равна напряженность поля на оси диска на расстоянии $h = 12$ см от его плоскости?

Задача III.1.31. Заряд $Q = 0,01$ мкКл распределен равномерно по диску радиусом $R = 2,5$ см. Чему равна напряженность поля в центре диска?

Задача III.1.32. Чему равна напряженность электрического поля в углах квадрата задачи III.1.12?

Задача III.1.33. Чему равна напряженность электрического поля в углах квадрата задачи III.1.13?

Задача III.1.34. Чему равна напряженность электрического поля в углах квадрата задачи III.1.14?

Задача III.1.35. Два длинных тонких прямолинейных провода расположены параллельно на расстоянии d друг от друга. Провода равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью τ и $-\tau$. Проведем плоскость симметрии и отметим на ней точку наблюдения. Пусть расстояние от этой точки до плоскости, в которой лежат провода, равно h . Показать, что электрическое поле в этой точке дается выражением $E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{8d}{d^2 + 4h^2}$.

Теорема Остроградского—Гаусса

Задача III.1.36. Круг радиусом $R = 15$ см помещен в однородное электрическое поле напряженностью $E = 360$ В/м. Чему равен поток вектора напряженности сквозь круг, если его плоскость: 1) перпендикулярна силовым линиям; 2) составляет угол $\beta = 45^\circ$ с ними; 3) параллельна силовым линиям?

Задача III.1.37. Точечный заряд $Q = 5$ мкКл помещен в центр куба с длиной ребра $l = 9$ см. 1) Чему равен поток вектора напряженности через одну грань куба? 2) Как изменится ответ, если линейные размеры куба увеличить в 2 раза?

Задача III.1.38. Из куба с длиной ребра $l = 18$ см выходит поток вектора напряженности электрического поля $\Phi_E = 1,45 \cdot 10^3$ Нм²/Кл. Какой заряд находится внутри куба? Как изменится ответ, если линейные размеры куба уменьшить в 2 раза?

Задача III.1.39. По плоскому квадратному листу со стороной $l = 20$ см равномерно распределен заряд $Q = 35$ мКл. Оценить напряженность электрического поля над листом на расстоянии: 1) $h = 1,0$ см; 2) $h = 15$ м.

Задача III.1.40. По поверхности сферы радиусом $R = 20$ см равномерно распределен заряд $Q = 35$ мКл. Оценить напряженность электрического поля на расстоянии: 1) $r = 1$ см; 2) $r = 15$ м — от поверхности сферы.

Задача III.1.41. Две концентрические сферы радиусами $R_1 = 1$ см и $R_2 = 2$ см несут равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 1,0$ нКл/м² и $\sigma_2 = -0,5$ нКл/м² соответственно. Найти напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r = 3$ см и $r = 1,5$ см от центра сфер. Объем между сферами заполнен стеклом ($\varepsilon = 10$).

Задача III.1.42. Две концентрические сферы радиусами $R_1 = 1$ см и $R_2 = 2$ см несут равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 1$ нКл/м² и $\sigma_2 = 0,5$ нКл/м² соответственно. Найти напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r = 3$ см и $r = 1,5$ см от центра сфер. Объем между сферами заполнен парафином ($\varepsilon = 2,2$).

Задача III.1.43. Две концентрические сферы радиусами $R_1 = 1$ см и $R_2 = 2$ см несут равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = -0,5$ нКл/м² и $\sigma_2 = 1$ нКл/м² соответственно. Найти напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r = 3$ см и $r = 1,5$ см от центра сфер. Объем между сферами заполнен эбонитом ($\varepsilon = 3,3$).

Задача III.1.44. Две концентрические сферы радиусами $R_1 = 1$ см и $R_2 = 2$ см несут равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = -0,5$ нКл/м² и $\sigma_2 = -1$ нКл/м² соответственно. Найти напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r = 3$ см и $r = 1,5$ см от центра сфер. Объем между сферами заполнен фарфором ($\varepsilon = 6,5$).

Задача III.1.45. Две длинные тонкостенные коаксиальные трубки радиусами $R_1 = 2$ см и $R_2 = 4$ см несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями $\tau_1 = 1$ нКл/м и $\tau_2 = -0,5$ нКл/м. Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r = 3$ см и $r = 5$ см от оси трубок. Объем между трубками заполнен эбонитом ($\varepsilon = 3,3$).

Задача III.1.46. Две длинные тонкостенные коаксиальные трубки радиусами $R_1 = 2$ см и $R_2 = 4$ см несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями $\tau_1 = 1$ нКл/м и $\tau_2 = 0,5$ нКл/м. Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r = 3$ см и $r = 5$ см от оси трубок. Объем между трубками заполнен фарфором ($\varepsilon = 6,5$).

III.2. Потенциал. Энергия системы электрических зарядов. Работа по перемещению заряда в поле. Электрический диполь. Электроемкость. Конденсаторы. Энергия заряженного проводника. Энергия электрического поля

III.2.A. Основные формулы

- *Потенциалом электрического поля* называется физическая величина, равная отношению потенциальной энергии, которую приобретает положительный заряд $Q_{\text{пр}}$, если его перенести из бесконечности в данную точку пространства, к величине этого заряда, т. е.

$$\varphi = \frac{W}{Q_{\text{пр}}}.$$

Размерность потенциала $[\varphi] = [W]/[Q] = \text{Дж/Кл} = \text{В}$ (вольт).

- Потенциал электрического поля на расстоянии r от точечного заряда Q

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

- Потенциал равномерно заряженной сферы радиусом R , несущей полный заряд Q :

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}, & 0 \leq r \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}, & r \geq R. \end{cases}$$

- Потенциал шара, равномерно заряженного по объему (в вакууме):

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), & 0 \leq r \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq R. \end{cases}$$

- Принцип суперпозиции: потенциал φ поля, создаваемого системой зарядов Q_1, Q_2, \dots, Q_N , равен сумме потенциалов φ_i полей, создаваемых каждым из этих зарядов по отдельности, т. е. $\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i$.
- Энергия системы точечных зарядов Q_1, Q_2, \dots, Q_N :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i,$$

где φ_i — потенциал поля в точке нахождения заряда Q_i , создаваемого всеми остальными $N - 1$ зарядами (кроме самого Q_i).

- Связь потенциала с напряженностью поля:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Эти соотношения для компонент \vec{E} можно записать в векторной форме:

$$\vec{E} = -\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\text{grad } \varphi = -\vec{\nabla} \varphi,$$

что, в сущности, является определением векторной операции «градиент». Для сферически симметричного поля, когда φ зависит только от модуля r радиус-вектора \vec{r} , эти формулы упрощаются:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Для однородного поля, вектор напряженности которого в любой точке имеет одну и ту же величину и направление, выражения еще более упрощаются:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

где φ_1, φ_2 — потенциалы двух точек; d — расстояние между эквипотенциальными плоскостями, проходящими через эти точки.

- Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда Q из точки 1 с потенциалом φ_1 в точку 2 с потенциалом φ_2 , не зависит от формы пути, а определяется лишь начальным и конечным положениями заряда:

$$A = Q (\varphi_1 - \varphi_2) \text{ или } A = \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}).$$

Условие потенциальности электрического поля (возможности ввести потенциал для его описания): циркуляция вектора напряженности по любому замкнутому контуру равна нулю, т. е.

$$\oint (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0.$$

- Система двух одинаковых по абсолютной величине, но противоположных по знаку зарядов Q и $-Q$ называется диполем. Диполь характеризуется электрическим дипольным моментом $\vec{p} = |Q|\vec{l}$, где \vec{l} — вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному. Предполагается, что расстояние от диполя до точки наблюдения много больше расстояния между зарядами.
- Электрический дипольный момент системы N зарядов

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N Q_i \vec{r}_i,$$

где \vec{r}_i — радиус-вектор заряда Q_i .

- Механический момент силы, действующий на диполь в электрическом поле:

$$\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}]; \quad M = pE \sin \alpha,$$

где α — угол между векторами \vec{p} и \vec{E} .

- Потенциальная энергия диполя, зависящая от его ориентации в электрическом поле:

$$W = -(\vec{p} \cdot \vec{E}) = -pE \cos \alpha.$$

- В неоднородном электрическом поле, кроме механического момента (пары сил, поворачивающих диполь), на него действует также сила $\vec{F} = -\text{grad } W$, стремящаяся втянуть диполь в область более сильного поля. В простейшем случае, когда вектор \vec{E} всюду направлен вдоль оси x , а величина поля зависит только от одной координаты x , сила также направлена вдоль этой оси и равна

$$F = F_x = p_x \frac{\partial E}{\partial x} = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha.$$

- Электрическая емкость уединенного проводника

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta \varphi},$$

где ΔQ — заряд, сообщенный проводнику; $\Delta \varphi$ — изменение потенциала проводника, вызванное этим зарядом.

Размерность электроемкости $[C] = \text{Кл/В} = \text{Ф}$ (фарад).

- Емкость уединенной проводящей сферы радиусом R

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R.$$

- Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d},$$

где S — площадь его пластин (обкладок); d — расстояние между обкладками (предполагается, что d много меньше линейных размеров пластин).

- Емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

где R_2 и R_1 — радиусы внешней и внутренней сфер соответственно.

- Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = 2\pi\epsilon_0\epsilon \frac{l}{\ln(R_2/R_1)},$$

где l — длина внешнего и внутреннего цилиндров; R_2 и R_1 — их радиусы соответственно (предполагается, что $l \gg R_2$).

- Емкость конденсаторов, соединенных последовательно: $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$;
параллельно: $C = \sum_{i=1}^n C_i$.

- Энергия заряженного проводника

$$W = \frac{1}{2} Q\varphi = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q^2}{2C},$$

где Q — заряд на проводнике; φ — его потенциал; C — его емкость.

- Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C},$$

где U — разность потенциалов на его обкладках.

- Энергия электрического поля, приходящаяся на единицу объема (плотность энергии):

$$\omega = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2}{2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{\vec{D}^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ — вектор электрического смещения (или электрической индукции).

- Плотность энергии равномерно заряженной сферы радиусом R и зарядом Q , находящейся в вакууме:

$$\omega(r) = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}.$$

Полная электростатическая энергия этой сферы

$$W = \int_{r \geq R} \omega(r) dV = \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 R}.$$

III.2.5. Примеры решения задач

Далее будем считать, что заряды находятся в вакууме, если не оговорено обратное.

ПРИМЕР 48. Проводящий диск радиусом R вращается с угловой скоростью ω . Учитывая, что ток в проводнике переносится электронами, определить разность потенциалов между осью диска и его периферией.

Решение. Сначала оценим результат с помощью анализа размерностей (см. учебник, т. 1, п. 1.3). В нашем распоряжении заряд электрона ($[e] = Q$) и его масса ($[m_e] = M$), угловая скорость ($[\omega] = T^{-1}$) и радиус диска ($[R] = L$). Искомая формула должна иметь вид

$$U = m^a e^b \omega^c R^d. \quad (\text{III.2.29})$$

Размерность разности потенциалов $[U] = \text{Дж/Кл} = ML^2T^{-2}Q^{-1}$. Подставляя размерности в формулу (III.2.29), получаем

$$ML^2T^{-2}Q^{-1} = M^a Q^b T^{-c} L^d, \quad (\text{III.2.30})$$

откуда следуют уравнения (они же в данном случае — решение задачи)

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 2, \quad d = 2, \quad (\text{III.2.31})$$

т. е.

$$U = C \frac{m_e \omega^2 R^2}{e}. \quad (\text{III.2.32})$$

Решаем теперь задачу точно. Для того чтобы электрон, находящийся внутри диска на расстоянии r от оси, двигался по окружности, на него

должна действовать центробежная сила $F = m_e \omega^2 r$, которая обеспечивается перераспределением концентрации электронов в диске, создающей радиальное электрическое поле E . Условие равновесия электрона

$$m_e \omega^2 r = eE = -e \frac{d\varphi}{dr}.$$

Разделим переменные и возьмем интегралы от обеих частей:

$$-\int_{\varphi_0}^{\varphi_R} d\varphi = \frac{m_e \omega^2}{e} \int_0^R r dr,$$

где φ_0 (φ_R) — потенциал в центре (на периферии) диска.

В результате получаем для разности потенциалов

$$U = \varphi_0 - \varphi_R = \frac{m_e \omega^2 R^2}{2e} = \frac{m_e v^2}{2e},$$

где v — линейная скорость точек на периферии диска.

Полученная формула может быть использована для экспериментального определения отношения заряда электрона к его массе. Однако практически это крайне затруднительно. Приведем оценку: заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Скорость на периферии диска примем равной 300 м/с. Разность потенциалов, возникающая между осью и периферией диска, окажется при этом равной $2,6 \cdot 10^{-7}$ В. Такое напряжение в движущейся системе измерить весьма сложно.

ПРИМЕР 49. Сферическая капля воды, несущая электрический заряд $Q = 30$ пКл, имеет на поверхности потенциал $\varphi = 500$ В. Чему равен радиус R капли? Каким будет значение потенциала φ_2 на поверхности новой сферической капли, образовавшейся при слиянии двух прежних? Какова зависимость потенциала на поверхности новой капли, образовавшейся при слиянии нескольких старых, от их числа n ?

Решение. Потенциал на поверхности заряженной сферы (или шара — в данном случае это дает одинаковый результат)

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

откуда радиус капли

$$R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \varphi} = \frac{(9 \cdot 10^9)(30 \cdot 10^{-12})}{500} = 0,54 \cdot 10^{-3} = 0,54 \text{ мм.}$$

При слиянии n капель объемами $4\pi R^3/3$ образуется новая капля радиусом R_n и увеличенным в n раз объемом:

$$n \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R_n^3 \Rightarrow R_n = n^{1/3} R.$$

Новая капля будет нести также и увеличенный заряд: $Q_n = nQ$. Отсюда находим для потенциала на ее поверхности:

$$\varphi_n = \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n} = n^{2/3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = n^{2/3} \varphi.$$

При слиянии двух капель получаем для потенциала $\varphi_2 = 2^{2/3} \varphi = 794$ В.

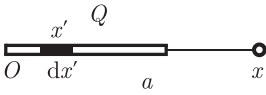


Рис. 34

ПРИМЕР 50. Тонкий стержень длиной a несет заряд Q , равномерно распределенный по его длине. Найти выражение для потенциала электрического поля на оси стержня (рис. 34).

Решение. Выделим на стержне элемент длиной dx' , расположенный в точке с координатой x' . Расстояние до точки наблюдения (координата $x > a$) равно $x - x'$. Линейная плотность заряда на стержне $\tau = Q/a$, так что выделенный элемент несет заряд $dq = \tau dx' = Q dx'/a$. Он создает в точке x потенциал

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(x-x')} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{dx'}{x-x'}. \quad (\text{III.2.33})$$

Для определения полного потенциала надо просуммировать вклады всех элементов стержня:

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^a \frac{dx'}{x-x'} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{x}{x-a}. \quad (\text{III.2.34})$$

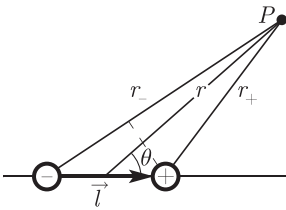


Рис. 35

ПРИМЕР 51. Найти потенциал диполя в точке P (рис. 35). Используя полученное выражение, определить электрическое поле диполя.

Решение. Потенциал диполя находится как сумма потенциалов, создаваемых двумя точечными зарядами:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_+} - \frac{Q}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}. \quad (\text{III.2.35})$$

Пространственные размеры большей части диполей в природе очень малы: гораздо меньше расстояний, на которых их наблюдают. Поэтому мы предполагаем, что $l \ll r$. Тогда (см. рис. 35) $r_- - r_+ \approx l \cos \theta$, $r_+ r_- \approx r^2$, и вместо выражения (III.2.35) получаем

$$\varphi \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (\text{III.2.36})$$

где мы учли, что Ql равно дипольному моменту p . Здесь θ — угол между плечом диполя \vec{l} и радиус-вектором \vec{r} , проведенным в точку наблюдения. В векторном виде это выражение записывается как

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}. \quad (\text{III.2.37})$$

Чтобы найти электрическое поле, надо применить дифференцирование по радиус-вектору (операцию «градиент»).

Компонента поля вдоль оси x

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (\text{III.2.38})$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial (\vec{p} \cdot \vec{r})}{\partial x} = p_x \text{ и } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},$$

получаем

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_x}{r^3} + \vec{p} \cdot \vec{r} \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p_x}{r^3} - 3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{x}{r^5} \right). \quad (\text{III.2.39})$$

Аналогичные выражения получаются для других компонент \vec{E} . В векторном виде уравнение (III.2.39) записывается как

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}}{r^3} - 3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^5} \right). \quad (\text{III.2.40})$$

Вводя обозначение $\vec{n} = \vec{r}/r$ для единичного вектора в направлении точки наблюдения, переписываем (III.2.37) и (III.2.40) в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{r^2}; \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{p}}{r^3}. \quad (\text{III.2.41})$$

Возводя выражение для \vec{E} в квадрат, получаем формулу для модуля напряженности электрического поля

$$E = \sqrt{\vec{E}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{p^2 + 3(\vec{n} \cdot \vec{p})^2}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \quad (\text{III.2.42})$$

ПРИМЕР 52. Даны два диполя с моментами \vec{p}_1 и \vec{p}_2 . Найти потенциальную энергию их взаимодействия и установить, при какой взаимной ориентации она будет наименьшей.

Решение. Первый диполь создает электрическое поле

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{p}_1}{r^3}.$$

В этом поле второй диполь имеет потенциальную энергию

$$W = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \vec{n})(\vec{p}_2 \cdot \vec{n})}{r^3}. \quad (\text{III.2.43})$$

Напомним, что \vec{n} — это единичный вектор, направленный от первого диполя ко второму. Вводя углы θ_i ($i = 1, 2$) между дипольными моментами \vec{p}_i и вектором \vec{n} и учитывая, что угол между дипольными моментами равен $\theta_1 - \theta_2$, переписываем (III.2.43) в виде

$$W = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3\cos\theta_1 \cos\theta_2]. \quad (\text{III.2.44})$$

Исследуем на минимум выражение в квадратных скобках. Сначала приравняем нулю его первые производные по углам θ_1, θ_2 . Дифференцируя выражение по θ_1 , получаем уравнение

$$-\sin(\theta_1 - \theta_2) + 3\sin\theta_1 \cos\theta_2 = 0. \quad (\text{III.2.45})$$

Дифференцируя по θ_2 , находим второе уравнение

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) + 3\cos\theta_1 \sin\theta_2 = 0. \quad (\text{III.2.46})$$

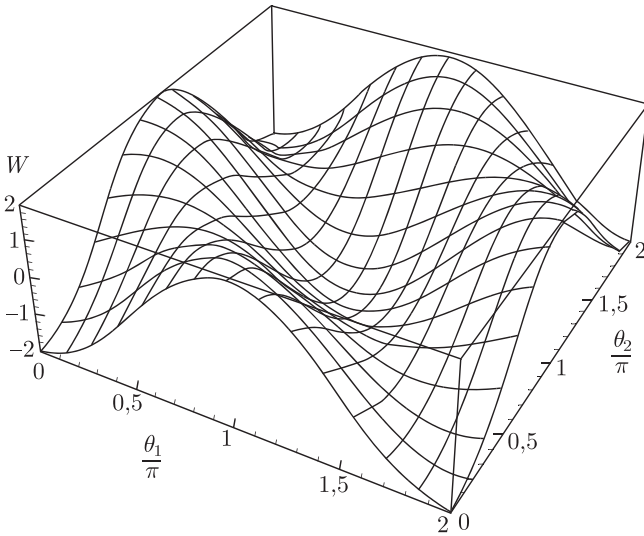


Рис. 36

Используя известную тригонометрическую формулу

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1,$$

получаем уравнения

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 &= 0; \\ 2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 &= 0, \end{aligned} \tag{III.2.47}$$

откуда, в свою очередь, следует другая пара уравнений

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 \cos \theta_2 &= 0; \\ \sin \theta_2 \cos \theta_1 &= 0. \end{aligned} \tag{III.2.48}$$

Теперь имеем два случая: либо $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = 0$, либо $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 0$. В первом случае имеем четыре варианта решений: $(\theta_1 = 0, \theta_2 = 0)$; $(\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi)$; $(\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0)$; $(\theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi)$. Во втором случае также четыре варианта: $(\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \pi/2)$; $(\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = 3\pi/2)$; $(\theta_1 = 3\pi/2, \theta_2 = \pi/2)$; $(\theta_1 = 3\pi/2, \theta_2 = 3\pi/2)$.

Далее необходимо найти те из комбинаций, которые действительно дают минимум потенциальной энергии W (что проще всего сделать подстановкой найденных углов в (III.2.44)). Сразу приведем ответ: потенциальная энергия минимальна при $\theta_1 = \theta_2 = 0$ и $\theta_1 = \theta_2 = \pi$. Иными словами, диполи стремятся встать параллельно друг другу вдоль соединяющей их линии. Зависимость потенциальной энергии W от углов θ_1, θ_2 показана на рис. 36. По осям x, y отложены значения углов θ_1, θ_2 в единицах π , а по оси z — значения потенциальной энергии W в единицах $p_1 p_2 / (4\pi \epsilon_0 r^3)$, т. е. значения выражения в квадратных скобках уравнения (III.2.44). Отчетливо видны глобальные минимумы потенциальной энергии, когда диполи параллельны друг другу и вектору \vec{n} (угловые точки поверхности) и когда направление обоих

диполей заменено на обратное (средняя точка поверхности). Из него видно, что другие решения не дают минимума W , так как соответствуют максимумам или седловым точкам.

Пример 53. В пространство между пластинами плоского конденсатора влетает частица, движущаяся параллельно пластинам вдоль оси конденсатора (рис. 37). Начальную кинетическую энергию частица получила, пройдя ускоряющую разность потенциалов U_0 . Под действием поля конденсатора частица отклоняется к одной из пластин (в зависимости от знака заряда) и в конечном итоге попадает на нее. Это расстояние l можно измерить. Известно также расстояние d между пластинами и напряжение U на конденсаторе. Можно ли по этим данным установить тип частицы (найдя ее удельный заряд, т. е. отношение заряда Q к массе m)?

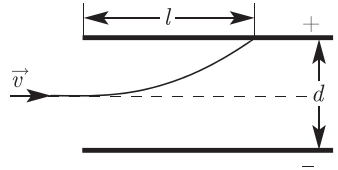


Рис. 37

Решение. Решим задачу сначала методом размерностей (см. учебник, т. 1, п. 1.3). Пройденное расстояние должно быть функцией параметров задачи:

$$l = d^a U_0^b U^c Q^x m^y. \tag{III.2.49}$$

Вспоминая, что произведение потенциала на заряд дает энергию, размерность которой $[W] = [ML^2T^{-2}]$, получаем $[U] = [ML^2T^{-2}Q^{-1}]$. Подставляя эту размерность в (III.2.49), получаем уравнение

$$L = L^a [ML^2T^{-2}Q^{-1}]^{(b+c)} Q^x M^y. \tag{III.2.50}$$

Сравнивая размерности в обеих частях (III.2.50), приходим к уравнениям

$$1 = a + 2(b + c); \quad 0 = y + b + c; \quad 0 = x - b - c; \quad 0 = -2(b + c). \tag{III.2.51}$$

Последнее уравнение, следующее из отсутствия в левой части величины размерности времени, сразу дает $b + c = 0$, или $c = -b$. После этого немедленно находим $a = 1$; $y = 0$; $x = 0$. Подставляя найденные значения в (III.2.49), получаем

$$l = d \left(\frac{U_0}{U} \right)^b. \tag{III.2.52}$$

Произвольная степень (показатель степени b определить не удалось) означает, что результат зависит от произвольной функции безразмерного отношения U_0/U :

$$l = d \cdot f \left(\frac{U_0}{U} \right). \tag{III.2.53}$$

Вид этой функции пока неизвестен: если в задачу входят величины одинаковой размерности, то функцию их отношения с помощью анализа размерности найти, естественно, не удастся. Но уже можно ответить на вопрос задачи: в ответ не вошли параметры, характеризующие частицу, — ни ее масса, ни ее заряд. Все частицы при заданных условиях будут отклоняться одинаково, и использовать схему, описанную в условии задачи, для их идентификации, нельзя.

Приведем теперь точное решение задачи. Начальную скорость частицы находим из соотношения

$$\frac{mv^2}{2} = QU_0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2QU_0}{m}}. \quad (\text{III.2.54})$$

В конденсаторе частица находится под действием электрического поля $E = U/d$ и приобретает поперечное ускорение $a = QU/(md)$. Расстояние $d/2$ до попадания на пластину она пройдет за время t :

$$\frac{d}{2} = \frac{QU}{md} \frac{t^2}{2}, \quad (\text{III.2.55})$$

откуда время полета

$$t = d\sqrt{\frac{m}{QU}}. \quad (\text{III.2.56})$$

В продольном направлении за это время частица пролетит расстояние

$$l = vt = \sqrt{\frac{2QU_0}{m}} d\sqrt{\frac{m}{QU}} = d\sqrt{2\frac{U_0}{U}}. \quad (\text{III.2.57})$$

Мы приходим к тому же выводу о независимости l от характеристик частицы (см. (III.2.53)). Кроме того, найдена функция f , которая не была определена в нашем предварительном результате.

ПРИМЕР 54. Найти силу взаимодействия между пластинами плоского конденсатора (расстояние между пластинами x много меньше линейных размеров обкладок).

Решение. Приведем два решения этой задачи.

1) При данном условии задачи каждую пластину можно считать бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда $\sigma = Q/S$. Поэтому одна обкладка создает поле $E = Q/(2S\epsilon_0)$, которое действует на заряды другой обкладки. Если выделить на второй обкладке элемент площади ds , то на нем будет сосредоточен заряд $dQ = ds(Q/S)$, на который действует сила

$$dF = -EdQ = \frac{Q}{2S\epsilon_0} ds \frac{Q}{S} = -ds \frac{Q^2}{2S^2\epsilon_0}.$$

Отрицательный знак силы указывает здесь на взаимное притяжение разноименно заряженных пластин. Силы, действующие на разные элементы второй обкладки, направлены в одну сторону, так что интегрирование для определения их результирующей выполняется элементарно:

$$F = \int dF = -\frac{Q^2}{2S^2\epsilon_0} \int ds = -\frac{Q^2}{2S\epsilon_0}.$$

2) Энергия электрического поля в конденсаторе дается формулой $W = Q^2/(2C)$. Если подставить в нее выражение для емкости плоского конденсатора $C = \epsilon_0 S/x$, получим

$$W = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 S}.$$

Учитывая связь потенциальной энергии и силы взаимодействия, получаем тот же результат:

$$F = - \frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}.$$

Пример 55. В широкий сосуд с водой ($\epsilon = 81$) вертикально опускаются пластины плоского конденсатора, подсоединенного к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов $U = 6$ кВ (рис. 38). Расстояние между пластинами $d = 0,5$ см. На какую высоту h поднимется жидкость между пластинами конденсатора? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с². Жидкость несжимаема. Поверхностное натяжение пренебрежимо мало.

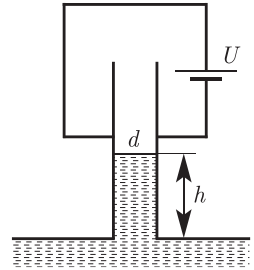


Рис. 38

Решение. Рассматриваемая система включает в себя заряженный конденсатор (при постоянном напряжении U на обкладках), источник постоянного напряжения и диэлектрическую жидкость, находящуюся в поле силы тяжести.

Устойчивое состояние любой системы характеризуется минимумом энергии. Найдем полную энергию W нашей системы, которая складывается из энергии электрического поля конденсатора $W_{эл}$, потенциальной энергии поднятой жидкости $W_{ж}$ и энергии источника постоянного напряжения W_U .

Рассмотрим каждое слагаемое отдельно. Емкость нашего конденсатора равна сумме емкостей конденсатора с диэлектрической жидкостью высотой h и воздушного конденсатора высотой $(H - h)$:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 Lh}{d} + \frac{\epsilon_0 L(H - h)}{d} = \frac{\epsilon_0 LH}{d} + \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)Lh}{d}, \quad (III.2.58)$$

где H — высота пластин конденсатора; L — их длина.

До опускания пластин в жидкость электрическая емкость была равна

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 LH}{d}.$$

Так как диэлектрическая проницаемость жидкости ($\epsilon = 81$) больше единицы, то $C > C_0$. Увеличение емкости конденсатора связано с перетеканием заряда за счет работы, совершаемой источником напряжения:

$$\Delta Q = Q' - Q = CU - C_0U = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)Lh}{d} U. \quad (III.2.59)$$

Таким образом, электрическая энергия, запасенная в конденсаторе, составляет (см. учебник т. 1, гл. 16, формула (16.62))

$$W_{эл} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 LH}{2d} U^2 + \frac{\epsilon_0 L(\epsilon - 1)h}{d} U^2. \quad (III.2.60)$$

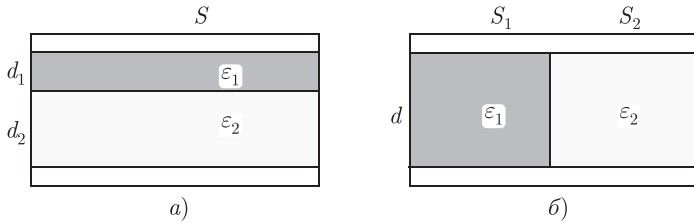


Рис. 39

Потенциальная энергия поднятой жидкости массой $m = \rho Ldh$, центр тяжести которой находится на высоте $h/2$, равна

$$W_{\text{ж}} = \rho Ldhg \frac{h}{2} = \rho Ldgh^2/2. \tag{III.2.61}$$

Обозначим исходную энергию источника напряжения через W_0 . При касании пластинами конденсатора поверхности жидкости происходит перетекание заряда ΔQ (см. (III.2.59)), следовательно, источник затрачивает часть своей энергии на совершение работы

$$\Delta A = \Delta QU = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)Lh}{d} U^2. \tag{III.2.62}$$

Очевидно, оставшаяся энергия источника напряжения составляет

$$W_U = W_0 - \Delta A = W_0 - \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)Lh}{d} U^2.$$

Тогда полная энергия рассматриваемой системы

$$W(h) = W_{\text{эл}} + W_{\text{ж}} + W_U = W_0 + \frac{\epsilon_0 LH}{2} U^2 + \rho \frac{Ldg}{2} h^2 - \frac{U^2 \epsilon_0(\epsilon - 1)Lh}{2d}.$$

Приравняем нулю производную полной энергии по высоте h :

$$\frac{dW(h)}{dh} = - \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)LU^2}{2d} + \rho Ldgh = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая система будет обладать минимальной полной энергией при высоте жидкости

$$h_1 = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)U^2}{2d^2 \rho g} = \frac{(8,85 \cdot 10^{-12})(81 - 1)(6 \cdot 10^3)^2}{2(5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10^3 \cdot 9,8} = 0,05 \text{ м} = 5 \text{ см}.$$

ПРИМЕР 56. Между пластинами плоского конденсатора находятся два слоя диэлектриков: слюды с $\epsilon_1 = 7$ и толщиной $d_1 = 0,3$ мм и эбонита с $\epsilon_2 = 3$ и толщиной $d_2 = 0,7$ мм (рис. 39, а). Площади пластин равны $S = 20 \text{ см}^2$. Найти емкость конденсатора.

Решение. Легко видеть, что в сущности у нас последовательно соединены два конденсатора с емкостями

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 S}{d_2}.$$

Соответственно искомая емкость

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2} = \frac{(8,85 \cdot 10^{-12}) (20 \cdot 10^{-4})}{0,3 \cdot 10^{-3}/7 + 0,7 \cdot 10^{-3}/3} = 64,1 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 64,1 \text{ пФ}.$$

ПРИМЕР 57. Найти емкость конденсатора, если между теми же пластинами помещены те же диэлектрики, поровну заполняющие объем конденсатора (рис. 39, б).

Решение. Здесь мы имеем дело с параллельно соединенными конденсаторами, площадь пластин которых уменьшена в 2 раза: $S_1 = S_2 = S/2$, а расстояние между пластинами одинаково и равно $d = d_1 + d_2$. Поэтому искомая емкость

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{2(d_1 + d_2)} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{2(d_1 + d_2)} = \frac{\varepsilon_0 S (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2(d_1 + d_2)} = \frac{(8,85 \cdot 10^{-12})(20 \cdot 10^{-4})(7 + 3)}{2(0,3 \cdot 10^{-3} + 0,7 \cdot 10^{-3})} = 88,5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 88,5 \text{ пФ}.$$

III.2.B. Задачи для самостоятельной работы

Потенциал. Энергия системы зарядов

Задача III.2.1. При разряде молнии переносится заряд $Q = 30$ Кл, причем разность потенциалов между концами молнии достигает значения $U = 35$ МВ. Какая энергия при этом выделяется? Выразить ответ также в единицах тротилового эквивалента (при взрыве 1 кг тротила выделяется 4,2 МДж).

Задача III.2.2. Чему равен потенциал на поверхности ядра золота? Радиус ядра $R = 6,2 \cdot 10^{-15}$ м, атомный номер золота $Z = 79$.

Задача III.2.3. Какой разностью потенциалов надо ускорить свободный протон, чтобы он достиг поверхности ядра железа? Атомный номер железа $Z = 26$, радиус ядра $R = 4,0 \cdot 10^{-15}$ м.

Задача III.2.4. Два протона находятся на поверхности ядра урана в диаметрально противоположных точках. Чему равна энергия их электростатического взаимодействия, если радиус ядра $R = 7,5 \cdot 10^{-15}$ м? Ответ выразить в электронвольтах.

Задача III.2.5. Протон и электрон в атоме водорода находятся на расстоянии $a = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м друг от друга. Чему равна потенциальная энергия W их электростатического взаимодействия? Чему равна кинетическая энергия T электрона? Какую работу A надо совершить, чтобы вырвать электрон из атома? Ответы выразить в электронвольтах.

Задача III.2.6. Согласно модели кварков протон состоит из двух u -кварков с положительным зарядом $2e/3$ и d -кварка с отрицательным зарядом $-e/3$. Предположим, что расстояния между всеми кварками $l = 1,32 \cdot 10^{-15}$ м. Найти потенциальную энергию взаимодействия u -кварков и полную энергию электростатического взаимодействия кварков в протоне. Ответ выразить в электронвольтах.

Задача III.2.7. Согласно модели кварков нейтрон состоит из двух d -кварков с отрицательным зарядом $-e/3$ и u -кварка с положительным зарядом $2e/3$. Предположим, что расстояние между всеми кварками $l = 1,32 \cdot 10^{-15}$ м. Найти энергию электростатического взаимодействия d -кварков и полную потенциальную энергию электростатического взаимодействия кварков в нейтроне. Ответ выразить в электронвольтах.

Задача III.2.8. Заряды $Q_1 = -8,0$ мкКл и $Q_2 = 1,8$ мкКл находятся на расстоянии $l = 11,8$ см друг от друга. Найти точку на линии, соединяющей заряды, где потенциал равен нулю.

Задача III.2.9. Поле создано двумя точечными зарядами $Q_1 = +3Q$ и $Q_2 = -2Q$, находящимися на расстоянии $l = 10$ см друг от друга. Найти геометрическое место точек, в которых потенциал равен нулю. (Указание: провести произвольную плоскость через линию, соединяющую заряды, и найти на ней линию, где $\varphi = 0$, затем использовать аксиальную симметрию системы относительно оси, проходящей через заряды.)

Задача III.2.10. Поле создано двумя точечными зарядами $Q_1 = +2Q$ и $Q_2 = -Q$, находящимися на расстоянии $l = 12$ см друг от друга. Найти геометрическое место точек, в которых потенциал равен нулю. См. указание к задаче III.2.9.

Задача III.2.11. Электрическое поле у поверхности Земли $E = 130$ В/м направлено вниз. Чему равен потенциал поверхности Земли? Радиус Земли $R_{\oplus} = 6400$ км, наличие ионосферы с положительным зарядом, компенсирующим заряд Земли, не учитывать.

Задача III.2.12. Если в задаче III.2.11 учесть, что на высоте $h = 50$ км располагается ионосфера с положительным зарядом, равным заряду Земли, то чему равна разность потенциалов между поверхностью Земли и ионосферой?

Задача III.2.13. Каким может быть минимальный радиус шара электростатического генератора, чтобы его можно было зарядить до 30 кВ без возникновения разряда в воздухе? Каков будет при этом заряд на шаре? Пробой в воздухе при нормальном атмосферном давлении возникает при поле $E_0 = 3$ МВ/м.

Электрический диполь

Задача III.2.14. Показать, что на оси диполя с плечом l (т. е. на линии, проходящей через оба заряда) на расстоянии r от него электрическое поле имеет напряженность $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} (r \gg l)$. Куда направлено это поле?

Задача III.2.15. Показать, что на линии, ортогональной плечу диполя и проходящей через его центр, на расстоянии r от диполя электрическое поле имеет напряженность $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (r \gg l)$. Куда направлено это поле?

Задача III.2.16. Найти силу взаимодействия F точечного заряда $Q = 5$ нКл и диполя с моментом $p = 3 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Заряд Q находится на оси диполя на расстоянии 20 см от каждого заряда диполя.

Задача III.2.17. Найти силу взаимодействия F точечного заряда $Q = 3$ нКл и диполя с моментом $p = 5 \cdot 10^{-30}$ Кл · м. Заряд Q находится на линии, ортогональной плечу диполя, на расстоянии 20 см от каждого заряда диполя.

Задача III.2.18. Молекула аммиака имеет постоянный электрический дипольный момент $p = 4,77 \cdot 10^{-30}$ Кл · м. Вычислить электрический потенциал, создаваемый молекулой аммиака на расстоянии $r = 52$ нм вдоль оси диполя.

Задача III.2.19. Какое электрическое поле создает молекула аммиака в той же точке (см. задачу III.2.18)?

Задача III.2.20. Дипольный момент молекулы соляной кислоты HCl равен $p = 3,4 \cdot 10^{-30}$ Кл · м. Расстояние между атомами $l = 0,1$ нм. Чему равен результирующий заряд Q каждого атома? Является ли он целым кратным элементарного заряда e ? Подумайте над объяснением результата.

Задача III.2.21. Электрический дипольный момент молекулы HF равен $p = 6,4 \cdot 10^{-30}$ Кл · м. Расстояние между атомами $l = 92$ пм. Чему равен результирующий заряд Q каждого атома? Является ли он целым кратным элементарного заряда e ? Подумайте над объяснением результата.

Задача III.2.22. Две молекулы воды находятся на расстоянии 10 нм друг от друга, так что их дипольные моменты $p = 0,62 \cdot 10^{-29}$ Кл · м параллельны и расположены вдоль соединяющей их прямой. Какую энергию надо затратить, чтобы развернуть дипольные моменты молекул в противоположные стороны?

Конденсаторы

Задача III.2.23. Чему равна емкость Солнца (радиус $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8$ м), если считать его сферическим конденсатором?

Задача III.2.24. Чему равна емкость Луны (радиус $R_{\zeta} = 1740$ км), если считать ее сферическим конденсатором?

Задача III.2.25. Чему равна емкость капли радиусом $R = 0,54$ мм? Какой будет емкость новой капли, образовавшейся при слиянии девяти таких капель?

Задача III.2.26. Необходимо изготовить плоский конденсатор емкостью $C = 2,0$ Ф. Каким должен быть линейный размер квадратных обкладок с воздушным промежутком $d = 4,5$ мм между ними?

Задача III.2.27. Чему равна емкость двух квадратных пластин со стороной $a = 5,5$ см, разделенных слоем парафина ($\epsilon = 2,2$) толщиной $d = 1,8$ мм?

Задача III.2.28. Чему равна емкость двух плоских круговых обкладок радиусом $r = 8,2$ см, разделенных слоем слюды ($\epsilon = 7$) толщиной $d = 1,3$ мм?

Задача III.2.29. Чему равна емкость единицы длины коаксиального телевизионного кабеля, если радиус внутреннего проводника $r_1 = 0,15$ мм, а внешнего — $r_2 = 2,1$ мм?

Задача III.2.30. Чему равна емкость C сферического конденсатора, образованного поверхностью Земли ($R_{\oplus} = 6380$ км) и ионосферой, расположенной на высоте $h = 50$ км? Сравнить с емкостью C_{\oplus} Земли как уединенного шара.

Задача III.2.31. Чтобы перенести точечный заряд $Q = 0,2$ мКл с одной обкладки конденсатора емкостью $C = 60$ мкФ на другую, надо совершить работу $A = 16$ мДж. Какой заряд Q находится на каждой из обкладок?

Задача III.2.32. На конденсаторе емкостью $C_1 = 3$ мкФ находится заряд $Q = 6$ мКл. Конденсатор замыкается на другой, незаряженный конденсатор емкостью $C_2 = 5$ мкФ. Как распределяются заряды на конденсаторах? Каким будет напряжение на них?

Задача III.2.33. Конденсатор емкостью $C_1 = 2,5$ мкФ заряжают до напряжения $U_1 = 35$ В. Отключив конденсатор от источника напряжения, его замыкают на другой конденсатор емкостью C_2 . При этом напряжение на первом падает до величины $U = 16$ В. Чему равна емкость C_2 ?

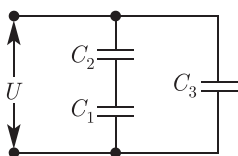


Рис. 40

Задача III.2.34. Конденсаторы емкостями $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 4$ мкФ соединены последовательно и включены параллельно третьему конденсатору емкостью $C_3 = 2$ мкФ (рис. 40). Чему равна емкость C цепи? Каково напряжение на каждом конденсаторе, если к цепи приложено напряжение $U = 50$ В?

Задача III.2.35. Конденсаторы емкостями $C_1 = 4$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ соединены последовательно и включены параллельно третьему конденсатору емкостью $C_3 = 4,0$ мкФ (см. рис. 40). Чему равна емкость C цепи? Каков заряд на каждом конденсаторе, если к цепи приложено напряжение $U = 50$ В?

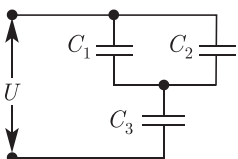


Рис. 41

Задача III.2.36. Конденсаторы емкостями $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 4$ мкФ соединены параллельно и включены последовательно третьему конденсатору емкостью $C_3 = 2$ мкФ (рис. 41). Чему равна емкость C цепи? Каково напряжение на каждом конденсаторе, если к цепи приложено напряжение $U = 50$ В?

Задача III.2.37. Конденсаторы емкостями $C_1 = 4$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ соединены параллельно и включены последовательно третьему конденсатору емкостью $C_3 = 4$ мкФ (см. рис. 41). Чему равна емкость C цепи? Каков заряд на каждом конденсаторе, если к цепи приложено напряжение $U = 50$ В?

Задача III.2.38. Емкость одного из участков электронной схемы необходимо уменьшить от 3600 до 1000 нФ. Какую емкость надо подключить к этому участку, чтобы добиться желаемого результата, ничего более в цепи не меняя? Как следует подключить дополнительный конденсатор?

Задача III.2.39. Имеются три конденсатора емкостями 2000 пФ, 5000 пФ и 0,010 мкФ. Какую наибольшую и наименьшую емкости можно из них составить? Как следует соединить для этого конденсаторы?

Энергия электрического поля

Задача III.2.40. Какая плотность электростатической энергии запасена в воздухе из-за наличия поля с напряженностью $E = 130$ В/м вблизи поверхности Земли? Чему равна полная энергия в «конденсаторе», образованном поверхностью Земли ($R_{\oplus} = 6400$ км) и ионосферой (расположена на высоте $h = 50$ км)?

Задача III.2.41. Найти энергию изолированной сферы радиусом $R = 10$ см, заряженной до потенциала $\varphi = 8$ кВ.

Задача III.2.42. Определить изменение массы сферического проводника радиусом $R = 1$ м, если ему сообщить заряд $Q = 85$ мкКл. Как изменится масса из-за: а) потери электронов; б) увеличения полной энергии ($E = mc^2$)?

Задача III.2.43. Какая энергия запасена конденсатором емкостью 200 пФ, если к нему приложено напряжение 200 В?

Задача III.2.44. Какая потребуется емкость, чтобы запастись энергией 1 кВт·ч при напряжении на конденсаторе 10 кВ?

Задача III.2.45. Два конденсатора емкостями 2 и 4 мкФ соединены параллельно и подсоединены к источнику с напряжением 300 В. Чему равна суммарная энергия, запасенная в конденсаторах?

Задача III.2.46. Два конденсатора емкостями 2 и 4 мкФ соединены последовательно и подсоединены к источнику с напряжением 300 В. Какова суммарная энергия, запасенная в конденсаторах?

Задача III.2.47. Какая энергия запасена в цепи задачи III.2.34?

Задача III.2.48. Какая энергия запасена в цепи задачи III.2.35?

Задача III.2.49. Какая энергия запасена в цепи задачи III.2.36?

Задача III.2.50. Какая энергия запасена в цепи задачи III.2.37?

Задача III.2.51. Имеются три конденсатора емкостями $C_1 = 2000$ пФ, $C_2 = 5000$ пФ и $C_3 = 0,010$ мкФ, соединенные параллельно. Какая энергия будет запасена в каждом из них и во всей цепи при приложении к ней напряжения 2 кВ?

Задача III.2.52. Имеются три конденсатора емкостями $C_1 = 2000$ пФ, $C_2 = 5000$ пФ и $C_3 = 0,010$ мкФ, соединенные последовательно. Какая энергия будет запасена в каждом из них и во всей цепи при приложении к ней напряжения 2 кВ?

Задача III.2.53. Имеется цилиндрический конденсатор с радиусами коаксиальных цилиндров $R_1 = 5$ см и $R_2 = 10$ см. На обкладки подано напряжение $U = 250$ В. Какая энергия запасена на единицу длины конденсатора?

III.3. Постоянный электрический ток. Проводимость

III.3.A. Основные формулы

- Сила тока есть скалярная величина, численно равная количеству электричества, переносимого через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

В СИ силу тока измеряют в амперах (А). Это одна из основных единиц; производные единицы $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$ и $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}/(\text{А} \cdot \text{с}) = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/(\text{А} \cdot \text{с}^3)$.

- Заряд, прошедший за время t через поперечное сечение проводника, может быть найден интегрированием силы тока по времени:

$$Q = \int_0^t I(t) dt.$$

Для постоянного тока $I(t) = I$ и $Q = It$.

- Плотность электрического тока есть векторная величина:

$$\vec{j} = en\vec{u},$$

где e — заряд носителя электрического тока (в металлах — электрона); n — число носителей тока в единице объема (т. е. их концентрация); \vec{u} — скорость упорядоченного движения носителей тока (дрейфовая скорость).

Численно плотность тока равна заряду, проходящему в единицу времени через единицу площади поперечного сечения проводника. Размерность плотности тока $[j] = \text{Кл}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}) = \text{А}/\text{м}^2$.

- Сила тока через любую поверхность S

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS,$$

где \vec{n} — вектор единичной нормали к поверхности в данной точке.

- Закон Ома для плотности тока (закон Ома в дифференциальной форме) в проводнике

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

где σ — удельная проводимость (обратная величина $\rho = 1/\sigma$ называется *удельным сопротивлением вещества проводника*); \vec{E} — напряженность электрического поля в проводнике.

Размерность удельной проводимости $[\sigma] = \text{А}/(\text{м} \cdot \text{В})$. Отношение $1 \text{ В}/1 \text{ А}$ называется *омом* [Ом], так что $[\sigma] = 1/(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ и $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$. Размерность сопротивления $[R] = \text{Ом} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/(\text{А}^2 \cdot \text{с}^3)$.

Замечание: не путать удельную проводимость с поверхностной плотностью заряда, традиционно обозначаемой той же буквой σ .

- Сопротивление R проводника между точками 1 и 2 находится интегрированием вдоль проводника между этими точками:

$$R = \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl.$$

Для однородного проводника с постоянными значениями удельного сопротивления ρ и площади поперечного сечения S отсюда следует:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где l — длина проводника.

- Зависимость удельного сопротивления от температуры

$$\rho = \rho[1 + \alpha(t - t_0)],$$

где ρ , ρ_0 — удельные сопротивления при температурах t , t_0 соответственно.

Обратим внимание, что в этой формуле стоит разность температур, так что совершенно все равно, какую температурную шкалу использовать — Кельвина или Цельсия.

Размерность температурного коэффициента сопротивления α есть $[\alpha] = \text{°C}^{-1}(\text{K}^{-1})$. В качестве начальной точки обычно выбирается $t_0 = 20 \text{°C}$.

- Закон Ома для участка цепи

$$U = IR,$$

где U и I — напряжение и ток на участке цепи; R — сопротивление этого участка.

- Закон Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где \mathcal{E} — ЭДС всех источников тока в цепи; R — внешнее сопротивление цепи; r — внутреннее сопротивление источников тока; эти сопротивления можно считать соединенными последовательно.

- Сопротивление проводников:
 - последовательное соединение

$$R_{\text{послед}} = \sum_{i=1}^n R_i,$$

- параллельное соединение

$$\frac{1}{R_{\text{пар}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i},$$

где R_i — сопротивление i -го проводника; n — количество сопротивлений.

- Правила Кирхгофа:

- первое правило является следствием закона сохранения заряда: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0,$$

где n — число токов, сходящихся в узле.

При этом токи, подходящие к узлу и выходящие из него, имеют противоположные знаки;

- второе правило обобщает закон Ома: в любом замкнутом контуре цепи алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления соответствующих участков контура равна алгебраической сумме ЭДС в контуре:

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_i,$$

где n — число элементов контура; m — число источников тока в нем. При этом токи считаются положительными, если их направление совпадает с направлением обхода контура; аналогичным образом определяются знаки ЭДС.

- Работа, совершаемая электрическим полем и сторонними силами в участке цепи постоянного тока за время dt :

$$dA = IU dt.$$

- Закон Джоуля—Ленца

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt,$$

где dQ — количество теплоты, выделяющейся в участке цепи за время dt . Закон Джоуля—Ленца справедлив при условии, что участок цепи неподвижен и в нем не совершаются химические превращения.

Замечание: не путать количество теплоты с электрическим зарядом, традиционно обозначаемым той же буквой Q .

- Мощность тока

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

- Закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме:

$$w = \vec{j} \vec{E} = \sigma E^2,$$

где w — объемная плотность мощности.

III.3.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 58. Объемный расход воды при поливе сада из шланга составляет $Q_V = 0,5$ л/с. Оценить силу тока отрицательных зарядов в этом потоке.

Решение. Пусть μ — молярная масса жидкости ($\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль для H_2O), ρ — ее плотность ($\rho = 10^3$ кг/м³ для воды). Тогда поток

молекул через поперечное сечение шланга:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{Q_V \rho}{\mu} N_A,$$

где N_A — число Авогадро.

Подставим в эту формулу числовые значения:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}) (10^3 \text{ кг}/\text{м}^3)}{18 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}} 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} = 1,67 \cdot 10^{25} \frac{1}{\text{с}}.$$

Такое число молекул в единицу времени вылетает из шланга. Каждая молекула воды содержит десять электронов: восемь в атоме кислорода и по одному в каждом атоме водорода, т. е. заряд носителя тока в данном случае составляет $Q_1 = 10e$, так что искомый ток

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q_1 \frac{dN}{dt} = (10 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}) \left(1,67 \cdot 10^{25} \frac{1}{\text{с}} \right) = 27 \text{ МА}.$$

Этот гигантский ток отрицательных зарядов компенсируется таким же током положительных зарядов атомных ядер, входящих в молекулу воды, так что полный ток через шланг конечно же равен нулю.

ПРИМЕР 59. Оценить среднюю скорость упорядоченного движения электронов в медном проводнике, по которому течет ток плотностью $j = 25 \text{ А}/\text{см}^2$.

Решение. Искомую скорость можно найти из соотношения $v = j/(en)$, т. е. остается оценить концентрацию носителей заряда в медном проводнике. Атомы металлов обычно отдают свои валентные электроны в зону проводимости, где они движутся почти свободно, создавая электрический ток при приложении к проводнику электрического поля. Медь — элемент первой группы, так что число свободных электронов примерно равно числу атомов. Концентрацию последних найдем, разделив плотность меди $\rho_m = 8,93 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ на ее молярную массу $\mu = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$ (получив тем самым число молей в единице объема) и затем умножив на число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$:

$$n = \frac{\rho_m}{\mu} N_A = \frac{(8,93 \cdot 10^3)(6,02 \cdot 10^{23})}{64 \cdot 10^{-3}} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

После этого получим искомую скорость

$$v = \frac{25 \cdot 10^4}{(1,6 \cdot 10^{-19})(8,4 \cdot 10^{28})} = 1,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}/\text{с} = 6,7 \text{ см}/\text{ч}.$$

ПРИМЕР 60. Конец алюминиевой проволоки диаметром $d_{\text{Al}} = 2 \text{ мм}$ и длиной $l_{\text{Al}} = 1 \text{ м}$ припаян к концу медной проволоки диаметром $d_{\text{Cu}} = 1 \text{ мм}$ и длиной $l_{\text{Cu}} = 2 \text{ м}$. К концам этой составной проволоки приложено напряжение $U = 1,5 \text{ В}$. Найти ток через составную проволоку и плотность тока в каждом из ее элементов.

Решение. В таблице П.9 приложения находим удельные сопротивления алюминия и меди: $\rho_{\text{Al}} = 25 \text{ нОм} \cdot \text{м}$; $\rho_{\text{Cu}} = 15,5 \text{ нОм} \cdot \text{м}$.

Сопротивление проволоки

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{4l}{\pi d^2},$$

откуда

$$R_{Al} = 25 \cdot 10^{-9} \frac{4 \cdot 1}{3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 7,96 \cdot 10^{-3} \text{ Ом};$$

$$R_{Cu} = 15,5 \cdot 10^{-9} \frac{4 \cdot 2}{3,14 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 3,95 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление $R = R_{Al} + R_{Cu} = 4,75 \cdot 10^{-2}$ Ом, а полный ток $I = U/R = 31,6$ А. Плотности тока получим, разделив I на площади поперечных сечений проводников:

$$j_{Al} = \frac{4I}{\pi d_{Al}^2} = \frac{4 \cdot 31,6}{3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 10 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2 = 1 \text{ кА/см}^2;$$

$$j_{Cu} = \frac{4I}{\pi d_{Cu}^2} = \frac{4 \cdot 31,6}{3,14 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 40,2 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2 = 4 \text{ кА/см}^2.$$

ПРИМЕР 61. Какая мощность выделяется в элементах цепи примера 60?

Решение. В алюминиевой проволоке выделяемая мощность

$$P_{Al} = I^2 R_{Al} = 31,6^2 \cdot 7,96 \cdot 10^{-3} = 7,95 \text{ Вт},$$

в медной $P_{Cu} = I^2 R_{Cu} = 31,6^2 \cdot 3,95 \cdot 10^{-2} = 39,4$ Вт. Полную выделяемую мощность найдем для разнообразия по формуле $P = U^2/R = = 1,5^2/(4,75 \cdot 10^{-2}) = 47,4$ Вт (что, конечно, можно было бы получить простым сложением $P = P_{Al} + P_{Cu}$).

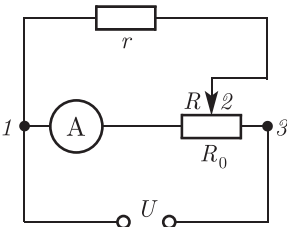


Рис. 42

ПРИМЕР 62. К потенциометру, сопротивление которого R_0 , и соединенному с ним амперметру подключен источник постоянного напряжения U (рис. 42). Между движком потенциометра (точка 2) и его концом (точка 1) включено сопротивление r . Как изменяются показания амперметра при перемещении движка от одного конца потенциометра к другому? Сопротивление амперметра предполагается ничтожно малым.

Решение. Если R — сопротивление потенциометра между точками 1 и 2, то сопротивление между точками 2 и 3 равно $R_0 - R$. Тогда имеем параллельно включенные сопротивления R и r и подключенное к ним последовательно сопротивление $R_0 - R$, так что полное сопротивление цепи

$$R_0 - R + \frac{rR}{r + R} = \frac{R_0r + R_0R - R^2}{r + R},$$

поэтому полный ток в цепи

$$I = U \frac{r + R}{R_0r + R_0R - R^2}.$$

Отсюда находим напряжение между точками 2 и 3:

$$U_{23} = I(R_0 - R) = U \frac{R_0 r + R_0 R - rR - R^2}{R_0 r + R_0 R - R^2}.$$

Напряжение между точками 1 и 2

$$U_{12} = U - U_{23} = U \frac{rR}{R_0 r + R_0 R - R^2}.$$

Значит, сила тока через амперметр

$$I_0 = \frac{U_{12}}{R} = U \frac{r}{R_0 r + R_0 R - R^2}.$$

В знаменателе стоит выражение, график которого (парабола) обращен выпуклостью вверх. Следовательно, знаменатель имеет максимум, а ток I_0 — минимум в вершине этой параболы. Для определения этой точки приравняем нулю производную:

$$\frac{d}{dR} (R_0 r + R_0 R - R^2) = R_0 - 2R = 0,$$

откуда находим $R = R_0/2$. Поэтому минимальное значение тока

$$I_{0,\min} = U \frac{r}{R_0 r + R_0^2/4} = \frac{U}{R_0} \cdot \frac{1}{1 + R_0/(4r)}.$$

При смещении движка потенциометра влево ($0 \leq R \leq R_0/2$) ток через амперметр монотонно растет и достигает значения $I_0(R=0) = U/R_0$. Аналогично ток растет при смещении движка вправо ($R_0/2 \leq R \leq R_0$) и достигает значения $I_0(R=R_0) = U/R_0$. Эти значения совпали, так что максимально возможное значение тока в цепи равно

$$I_{0,\max} = \frac{U}{R_0}.$$

Отношение

$$\frac{I_{0,\max}}{I_{0,\min}} = 1 + \frac{R_0}{4r}.$$

ПРИМЕР 63. Пусть имеется большое число N источников тока (элементов) с одинаковыми ЭДС \mathcal{E} и внутренними сопротивлениями r . Из них составляется батарея, содержащая несколько параллельных групп, состоящих из последовательно соединенных элементов. При каком соединении элементов получаем наибольшую мощность на нагрузке сопротивлением R ?

Решение. Поскольку все элементы одинаковы, из соображений симметрии ясно, что каждая из параллельных групп должна содержать одинаковое число элементов, которое мы обозначим через n . Тогда в цепи будет $m = N/n$ таких групп.

Каждая группа эквивалентна источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}_{\text{гп}} = n\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $r_{\text{гп}} = nr$ (последовательное соединение). Эти эффективные источники тока соединены параллельно, так

что они эквивалентны элементу с ЭДС $\mathcal{E}_{\text{полн}} = \mathcal{E}_{\text{гр}} = n\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $r_{\text{полн}} = r_{\text{гр}}/m = n^2r/N$. При замыкании на внешнюю нагрузку R сила тока в цепи составит

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{полн}}}{R + r_{\text{полн}}} = \frac{\mathcal{E}nN}{RN + n^2r}. \quad (\text{III.3.63})$$

Выделяемая мощность $P = I^2R$. Поскольку R не зависит от способа соединения элементов в батарею (т. е. от числа n), нужно найти, при каком n достигается максимальное значение тока в цепи. Приравняем нулю производную тока по n :

$$\frac{dI}{dn} = \frac{\mathcal{E}N(RN - n^2r)}{(RN + n^2r)^2} = 0,$$

откуда следует, что максимум тока (и мощности) достигается при $n = n_m$, где

$$n_m = \sqrt{N \frac{R}{r}}. \quad (\text{III.3.64})$$

Обсудим сначала критерий применимости данного результата. Мы дифференцировали ток по переменной n , которая принимает только целые значения. Так сурово обращаться с целой переменной можно лишь при условии, что ее изменение ($\Delta n = 1$) намного меньше самого значения переменной, т. е. при условии $n \gg 1$. То же самое относится и к числу m параллельных групп, т. е. должно выполняться условие $m \gg 1$. Два этих условия и соотношение (III.3.64) дают нам ограничения на полное число элементов N :

$$N \gg \max(r/R, R/r). \quad (\text{III.3.65})$$

Именно этот критерий является численным выражением условия задачи о «большом» числе используемых в цепи элементов.

Не факт, что формула (III.3.64) приведет к целому числу n_m . Но даже если так случится, оно должно быть одним из делителей N , чтобы целым оказалось также и число m параллельных групп. Если каким-то случайным образом и это осуществится, то решение задачи будет найдено. А что делать, если этого не произойдет?

Тогда надо получить результат по формуле (III.3.64) и взять два ближайших к расчетному значению делителя числа N (один больше расчетного, другой меньше). Для этих двух чисел надо сравнить силы тока и выбрать максимальное.

Для иллюстрации рассмотрим $\mathcal{E} = 1,5$ В, $R = 36$ Ом, $r = 18$ Ом. Применим сразу критерий (III.3.65): $N \gg 2$. На практике «много больше» означает превышение по порядку величины, например в десять раз. Таким образом, число элементов не должно быть менее 20. Если составить цепь из $N = 300$ элементов, то наше решение заведомо применимо. Тогда согласно формуле (III.3.64) $n_m = \sqrt{600} = 24,5$. Ближайшие делители числа N — это $n = 25$ и $n = 20$. При $n = 25$ формула (III.3.63) дает для тока значение $I = 0,51$ А, а при $n = 20$ — значение $I = 0,50$ А. Таким образом, решение задачи при данных условиях таково: надо соединить $n = 25$ элементов последовательно, а получившиеся при этом $m = N/n = 300/25 = 12$ групп — параллельно.

ПРИМЕР 64. Имеются два сопротивления R_1, R_2 . Если амперметр зашунтировать первым из них, то цена его деления увеличится в $n_1 = 3$ раза, а если амперметр зашунтировать вторым сопротивлением, то цена деления увеличится в $n_2 = 5$ раз. Как изменится цена деления амперметра, если для шунта использовать оба сопротивления, включив их между собой: 1) последовательно; 2) параллельно?

Решение. Шунт — это сопротивление, включаемое параллельно амперметру. Пусть полный ток в цепи I_0 . При включении шунта с сопротивлением R_1 ток через амперметр уменьшается в n_1 раз и будет $I_{a,1} = I_0/n_1$, а ток через шунт $I_1 = I_0(1 - 1/n_1)$. Падения напряжения на амперметре с сопротивлением R_a и на шунте одинаковы: $I_{a,1}R_a = I_1R_1$, откуда $R_1 = R_a/(n_1 - 1)$. Аналогично $R_2 = R_a/(n_2 - 1)$.

При последовательном соединении сопротивлений R_1 и R_2 результирующее сопротивление шунта составит $R_{\text{посл}} = R_1 + R_2$. Должно выполняться также соотношение $R_a = R_{\text{посл}}(n_{\text{посл}} - 1)$, где $n_{\text{посл}}$ — фактор уменьшения цены деления амперметра в этом случае. Тогда

$$n_{\text{посл}} = 1 + \frac{R_a}{R_1 + R_2} = 1 + \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{n_1 n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Таким образом, при последовательном соединении шунтов цена деления увеличивается в 2,33 раза.

При параллельном соединении сопротивлений R_1 и R_2 результирующее сопротивление шунта составит $R_{\text{пар}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Должно выполняться также соотношение $R_a = R_{\text{пар}}(n_{\text{пар}} - 1)$, где $n_{\text{пар}}$ — фактор уменьшения цены деления амперметра в этом случае. Тогда

$$n_{\text{пар}} = 1 + R_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 1 + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 1.$$

Таким образом, при параллельном соединении шунтов цена деления увеличивается в 7 раз.

ПРИМЕР 65. Цепь составлена из бесконечного числа ячеек, состоящих из трех одинаковых сопротивлений r (рис. 43, а). Найти сопротивление этой цепи.

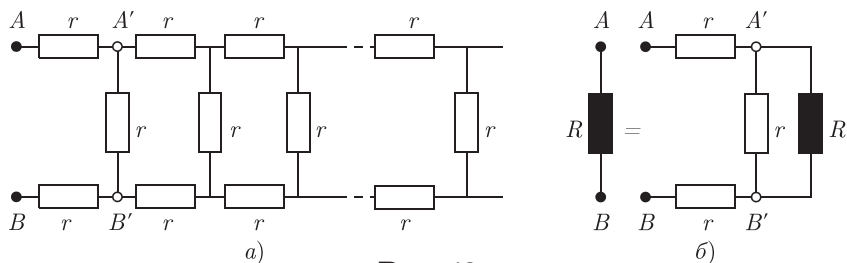


Рис. 43

Решение. Обозначим буквой R сопротивление цепи между точками A, B . Отделив первое звено, получим цепь между точками A', B' . Эта новая цепь ничем не отличается от прежней, так как число ячеек бесконечно велико и удаление одной из них ничего не меняет в цепи.

Поэтому при удаленной первой ячейке сопротивление между точками A', B' также равно R . На рис. 43, б сопротивление всей цепи показано черным прямоугольником. В соответствии со сказанным вся бесконечная цепочка справа от первой ячейки также заменена на сопротивление R . Поэтому мы имеем параллельно включенные сопротивления r и R , подсоединенные последовательно к двум сопротивлениям r . Таким образом, согласно рис. 43, б получим уравнение

$$R = 2r + \frac{Rr}{r + R},$$

откуда следует квадратное уравнение

$$R^2 - 2Rr - 2r^2 = 0.$$

Его положительное решение дает искомый ответ:

$$R = r(1 + \sqrt{3}).$$

III.3.B. Задачи для самостоятельной работы

Сила и плотность тока. Сопротивление

Задача III.3.1. В синхротроне электроны движутся по приблизительно-но круговой орбите длиной 240 м. Во время цикла ускорения на орбите находится примерно 10^{11} электронов, их скорость практически равна скорости света в вакууме. Чему равен ток?

Задача III.3.2. Определить ток, создаваемый электроном, движущимся по орбите атома водорода с радиусом $r = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м. Масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Задача III.3.3. Ток в электронном пучке типичного дисплея составляет 200 мкА. Сколько электронов ударяется за одну секунду в экран?

Задача III.3.4. На станции техобслуживания аккумулятор заряжают током силой 6,5 А в течение 5 ч. Какой заряд сообщают аккумулятору?

Задача III.3.5. Сила тока $I(t)$ в проводнике меняется со временем t согласно уравнению $I(t) = 4 + 2t$, где I выражено в амперах и t — в секундах. 1) Какое количество электричества проходит через поперечное сечение проводника за время от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с? 2) При какой силе постоянного тока через поперечное сечение проводника за это же время проходит такое же количество электричества?

Задача III.3.6. Ток в цепи меняется по закону $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$, где $I_0 = 5$ А; $\nu = 50$ с⁻¹. Какой заряд пройдет через поперечное сечение проводника за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = 0,01$ с, а какой — за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = 0,02$ с? Объяснить результат.

Задача III.3.7. Плотность тока в цилиндрическом проводнике радиусом R имеет максимум j_0 на оси проводника и равномерно убывает до нуля на его поверхности по закону $j = j_0(1 - r/R)$, где r — расстояние до оси проводника. Найти полный ток в проводнике, выразив его через j_0 и площадь поперечного сечения проводника $S = \pi R^2$.

Задача III.3.8. Плотность тока в цилиндрическом проводнике радиусом R равна нулю на оси проводника и равномерно возрастает до значения j_0 на его поверхности по закону $j = j_0(r/R)$, где r — расстояние до оси проводника. Найти полный ток в проводнике, выразив его через j_0 и площадь поперечного сечения проводника $S = \pi R^2$.

Задача III.3.9. Сколько времени понадобится электронам, чтобы добраться от автомобильного аккумулятора к стартеру, если по медному соединительному проводу диаметром $d = 2$ мм и длиной $l = 80$ см идет ток $I = 300$ А?

Задача III.3.10. По медному проводу диаметром 0,4 мм течет слабый ток 3 мкА. Чему равны: 1) плотность тока; 2) скорость дрейфа электронов; 3) напряженность электрического поля внутри проводника?

Задача III.3.11. При рассмотрении токов в веществе кинетическую энергию носителей тока, связанную с их упорядоченным движением, не учитывают по сравнению с тепловой. Правомерно ли это? Оценить кинетическую энергию W одного электрона в серебряной проволочке с площадью поперечного сечения $S = 1$ мм² при токе $I = 100$ А. Ответ выразить в электронвольтах. Сравнить найденную энергию со средней тепловой энергией W_T тех же электронов. Плотность серебра $\rho_m = 10,5 \cdot 10^3$ кг/м³.

Задача III.3.12. Концентрация протонов в околоземном космическом пространстве $n = 8,7$ см⁻³, их скорость $v = 470$ км/с. Найти плотность тока этих протонов. Какой полный ток пронизывал бы Землю, если бы протоны не отклонялись ее магнитным полем? Радиус Земли считать равным 6400 км.

Задача III.3.13. Провод с сопротивлением 1 Ом растянули по длине в 3 раза. Чему теперь равно его сопротивление?

Задача III.3.14. Резистор сопротивлением 38 Ом изготовлен из медного провода массой 11,2 г. Чему равны диаметр провода и его длина?

Задача III.3.15. Из кусочка алюминия массой $m = 21,2$ г изготавливают цилиндрический провод длиной $l = 10$ м. Найти его сопротивление. Чему равен диаметр провода? Плотность алюминия $\rho_m = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

Задача III.3.16. При какой температуре сопротивление медного провода превысит в 2 раза его сопротивление при 20 °С? (Указание: см. табл. П.9 приложения.)

Задача III.3.17. Медные обмотки электродвигателя имеют при 20 °С сопротивление $R_1 = 50$ Ом. При работе двигателя их сопротивление возросло до $R_2 = 58$ Ом. До какой температуры нагрелись обмотки? (Указание: см. табл. П.9 приложения.)

Задача III.3.18. При нагревании провода его линейные размеры меняются по закону $l = l_0[1 + \alpha_L(t - t_0)]$, где α_L — температурный коэффициент расширения. В результате увеличивается длина провода и его диаметр. В принципе этот эффект надо учитывать при использовании формулы $R = \rho l/S$ для вычисления сопротивления провода. Пусть медный провод при комнатной температуре 20 °С нагревается

на 1°C . Оценить процентный вклад в изменение его сопротивления вследствие: 1) изменения удельного сопротивления; 2) увеличения длины; 3) увеличения диаметра провода. Коэффициент температурного расширения для меди $\alpha_L = 1,65 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Закон Ома и правила Кирхгофа

Задача III.3.19. Птица сидит на проводе линии электропередачи, по которому течет ток силой 1800 А. Сопротивление провода $2 \cdot 10^{-5}$ Ом на погонный метр, а лапы птицы отстоят друг от друга на расстоянии 2,5 см. Под каким напряжением находится птица?

Задача III.3.20. Четыре элемента по 1,5 В подключены последовательно к устройству с сопротивлением 9,2 Ом. Внутреннее сопротивление каждого элемента 0,3 Ом. Какой силы ток потребляет устройство? Чему равно напряжение на его входе?

Задача III.3.21. Чему равно внутреннее сопротивление 12-вольтового автомобильного аккумулятора, если напряжение на его клеммах падает до 7,8 В при включении стартера, потребляющего ток силой 70 А?

Задача III.3.22. Гальванический элемент с ЭДС 1,5 В можно проверить, подключив его на короткое время к амперметру с малым внутренним сопротивлением. Исправный элемент должен обеспечивать силу тока не менее 30 А. Чему равно внутреннее сопротивление такого элемента?

Задача III.3.23. Амперметр с сопротивлением 90 Ом показывает 1,6 А при включении в цепь, содержащую батарею и два последовательно соединенных резистора с сопротивлениями 300 и 500 Ом. Чему равна сила тока в цепи в отсутствие амперметра? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Задача III.3.24. Через аккумулятор в конце зарядки течет ток 4 А. При этом напряжение на его клеммах 12,6 А. При зарядке того же аккумулятора током 6 А напряжение составило 11,1 В. Найти ток короткого замыкания.

Задача III.3.25. Через аккумулятор в конце зарядки течет ток 6 А. При этом напряжение на его клеммах 12,6 А. При зарядке того же аккумулятора током 4 А напряжение составило 11,1 В. Найти ток короткого замыкания.

Задача III.3.26. Две батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 20$ В, $\mathcal{E}_2 = 30$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 4$ Ом, $r_2 = 6$ Ом соединены параллельно. Чему равны ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока, которым можно заменить эти батареи без изменения тока в нагрузке?

Задача III.3.27. Две батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 20$ В, $\mathcal{E}_2 = 30$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 6$ Ом, $r_2 = 4$ Ом соединены параллельно. Чему равны ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока, которым можно заменить эти батареи без изменения тока в нагрузке?

Задача III.3.28. Как сделать амперметр со шкалой 10 А из гальванометра, стрелка которого отклоняется до конца шкалы при силе тока 200 мкА и напряжении 10 мВ?

Задача III.3.29. Внутреннее сопротивление гальванометра равно 30 Ом, сила тока, отвечающая полному отклонению, равна 60 мкА. Что нужно сделать, чтобы превратить его: 1) в амперметр для измерения токов силой до 15 А; 2) в вольтметр со шкалой на 3000 В?

Задача III.3.30. Предположим, что необходимо включить электрический прибор на расстоянии 200 м от розетки. Сопротивление единицы длины каждого из двух проводов, соединяющих прибор с розеткой, равно 5,5 мОм/м. Если напряжение сети 220 В, а прибор потребляет ток 3,2 А, то чему равно падение напряжения в подводящих проводах и какое напряжение приложено к прибору?

Задача III.3.31. К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,50$ Ом подключают параллельно сопротивление $R = 1,5$ Ом. Чему равны ЭДС \mathcal{E}_3 и внутреннее сопротивление r_3 источника тока, которым можно заменить это устройство без изменения тока в нагрузке?

Задача III.3.32. К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 1,5$ Ом подключают параллельно сопротивление $R = 0,5$ Ом. Чему равны ЭДС \mathcal{E}_3 и внутреннее сопротивление r_3 источника тока, которым можно заменить это устройство без изменения тока в нагрузке?

Задача III.3.33. Динамо-машина с ЭДС 12 В и внутренним сопротивлением 0,2 Ом заряжает батарею аккумуляторов с ЭДС 10 В и внутренним сопротивлением 0,6 Ом. Параллельно батарее аккумуляторов включена лампочка с сопротивлением 3 Ом. Определить ток в батарее и лампочке.

Задача III.3.34. Чему равна сила тока через сопротивление R_5 (рис. 44), если источник тока имеет ЭДС $\mathcal{E} = 9$ В и внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом, а сопротивления равны: $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 6$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 8$ Ом?

Задача III.3.35. Чему равна сила тока через сопротивление R_4 (см. рис. 44), если все данные такие же, как в задаче III.3.34?

Задача III.3.36. Чему равно напряжение на клеммах источника тока в задаче III.3.34?

Задача III.3.37. Определить напряжение на клеммах каждой батареи на рис. 45 (между точками 1-0 и 2-0), если ЭДС источников тока $\mathcal{E}_1 = 18$ В, $\mathcal{E}_2 = 12$ В, а их внутренние сопротивления $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом. Сопротивление нагрузки $R = 6,6$ Ом.

Задача III.3.38. Определить напряжение на клеммах каждой батареи на рис. 45 (между точками 1-0 и 2-0), если ЭДС источников тока $\mathcal{E}_1 = 12$ В, $\mathcal{E}_2 = 18$ В, а их внутренние сопротивления $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом. Сопротивление нагрузки $R = 6,6$ Ом.

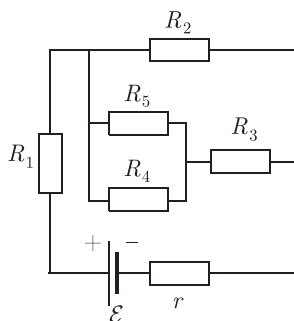


Рис. 44

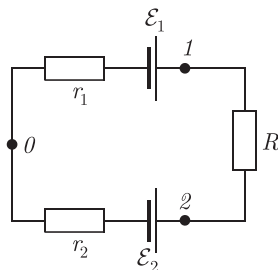


Рис. 45

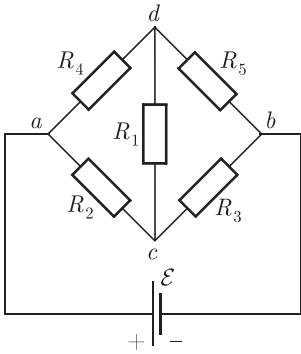


Рис. 46

Задача III.3.39. Сопротивления в схеме, показанной на рис. 46, имеют значения: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 15 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 30 \text{ Ом}$, $R_5 = 2 \text{ Ом}$; ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало. Какой ток идет через сопротивление R_1 , если резистор R_4 замкнуть накоротко (так, что его сопротивление станет равным нулю)?

Задача III.3.40. Сопротивления в схеме, показанной на рис. 46, имеют значения: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 15 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 30 \text{ Ом}$, $R_5 = 2 \text{ Ом}$; ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало. Какой ток идет через сопротивление R_1 , если резистор R_5 замкнуть накоротко (так, что его сопротивление станет равным нулю)?

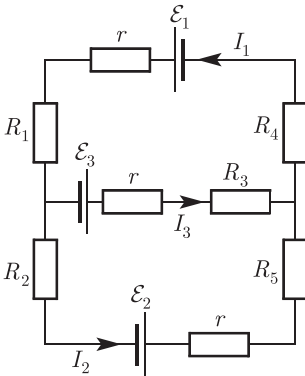


Рис. 47

Задача III.3.41. Чему равна сила тока I_1 на рис. 47, если замкнуть накоротко резистор R_4 , так что его сопротивление станет равным нулю? Значения параметров на схеме: сопротивления $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 15 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 12 \text{ Ом}$, $R_5 = 18 \text{ Ом}$, ЭДС источников тока $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 12 \text{ В}$, внутренние сопротивления источников одинаковы и равны $r = 1 \text{ Ом}$.

Задача III.3.42. Чему равна сила тока I_1 на рис. 47, если замкнуть накоротко резистор R_5 , так что его сопротивление станет равным нулю?

Значения параметров на схеме: сопротивления $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 15 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 12 \text{ Ом}$, $R_5 = 18 \text{ Ом}$, ЭДС источников тока $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 12 \text{ В}$, внутренние сопротивления источников одинаковы и равны $r = 1 \text{ Ом}$.

Задача III.3.43. Определить сопротивление R бесконечной цепочки на рис. 48 при $r_1 = 2r$.

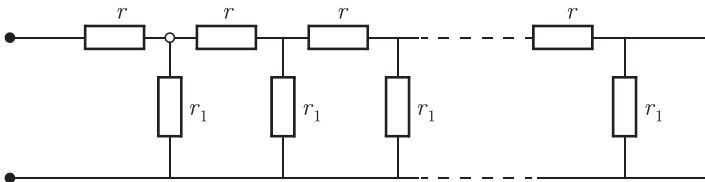


Рис. 48

Задача III.3.44. Определить сопротивление R бесконечной цепочки на рис. 48 при $r_1 = 6r$.

Задача III.3.45. Определить сопротивление между точками A и B цепи, составленной из n ячеек (рис. 49).

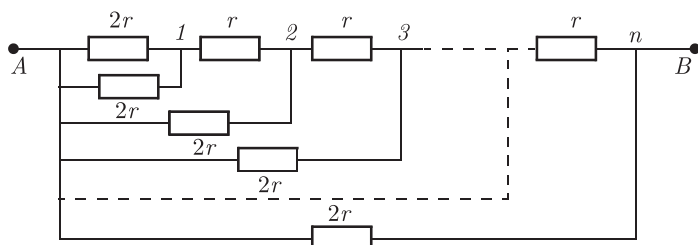


Рис. 49

Задача III.3.46. В старой аккумуляторной батарее, состоящей из n последовательно соединенных банок с внутренними сопротивлениями r , внутреннее сопротивление одной из них резко возросло до $10r$. Считая ЭДС всех банок одинаковыми, определить, при каком сопротивлении R нагрузки ток через нее не изменится, если удалить испорченную банку.

Работа и мощность тока

Задача III.3.47. Какую максимальную мощность потребляет транзисторный радиоприемник с напряжением питания 9 В, если максимальная сила тока равна 400 мА?

Задача III.3.48. Стандартная лампочка мощностью $N = 100$ Вт питается от сети с напряжением $U = 220$ В. Какое количество энергии будет израсходовано за месяц, если не выключать лампочку? Какой ток идет по нити лампочки?

Задача III.3.49. Водитель забыл выключить фары автомобиля. Если мощность каждой из двух передних фар равна 40 Вт, а каждого из двух задних огней — 6 Вт, то на какое время хватит свежезаряженного 12-вольтового аккумулятора емкостью 45 А · ч? (Считать, что на каждую лампу подается напряжение 12 В.)

Задача III.3.50. Два резистора, включенные последовательно в сеть 120 В, рассеивают в 4 раза меньшую мощность, чем при их параллельном соединении. Если сопротивление одного резистора $R_1 = 1,8$ кОм, то чему равно сопротивление R_2 другого резистора?

Задача III.3.51. Электроплитка имеет три секции с одинаковыми сопротивлениями. При параллельном их соединении вода в чайнике закипает через 6 мин. Через какое время закипит вода той же массы и той же начальной температуры при различных соединениях секций, показанных на рис. 50, а–в?

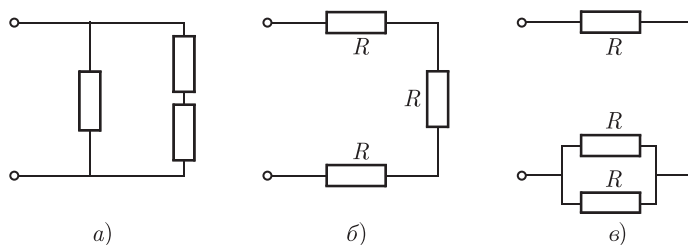


Рис. 50

Задача III.3.52. Две электроплитки, включенные в сеть параллельно, потребляют мощность $N_{\text{пар}} = 1,5$ кВт. Будучи включенной отдельно, одна из этих плиток потребляет мощность $N_1 = 1$ кВт. Какую мощность N_2 будет потреблять вторая плитка, включенная отдельно, и какую мощность $N_{\text{посл}}$ — обе при последовательном включении?

Задача III.3.53. Длина l потенциометра R в примере 62 (см. рис. 42) равна $l = 10$ см, значения параметров задачи следующие: $U = 50$ В; $r = 2$ кОм; $R = 100$ Ом. Найти мощность P , выделяемую на нагрузке r , как функцию расстояния x движка от левого края потенциометра. Какая мощность выделяется на нагрузке при $x = 2$ см, 5 см, 8 см?

Задача III.3.54. Найти мощность $P_{\text{внутр}}$, выделяемую внутри элемента с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом, и мощность $P_{\text{внешн}}$, выделяемую на нагрузке $R = 2$ кОм.

Задача III.3.55. Маленьким электрокипятильником можно вскипятить в автомобиле стакан воды для кофе. Какую силу тока потребляет кипятильник от аккумулятора с напряжением 12 В, если за 5 мин он нагревает 200 мл воды от 5 до 95 °С? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(кг · К).

Задача III.3.56. Аккумулятор замыкается один раз на сопротивление $R_1 = 20$ Ом, другой раз — на сопротивление $R_2 = 5$ Ом. При этом количество теплоты, выделяющейся во внешней цепи в единицу времени, одинаково. Найти внутреннее сопротивление r аккумулятора.

Задача III.3.57. Зарядка аккумулятора с ЭДС \mathcal{E} осуществляется зарядной станцией, напряжение в сети которой U (естественно, $U > \mathcal{E}$). Внутреннее сопротивление аккумулятора r . Определить полезную мощность $N_{\text{пол}}$, расходуемую на зарядку аккумулятора, мощность $N_{\text{теп}}$, идущую на выделение в нем теплоты, и вычислить КПД η процесса зарядки. В каком случае $\eta \geq 0,5$?

Задача III.3.58. Для электропроводки необходимо использовать достаточно толстый провод, чтобы он не нагревался и не создавал опасности пожара. Каким должен быть диаметр d медного провода, если проводка рассчитана на максимальную силу тока 40 А и на погонный метр провода не должно выделяться теплоты более 1,8 Вт?

Задача III.3.59. От источника напряжения 10 кВ требуется передать на расстояние 5 км мощность 500 кВт; допустимая потеря напряжения в проводах 1%. Чему равно минимальное сечение S медного провода? Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы снизить в 100 раз потери в той же линии при передаче той же мощности?

III.4. Магнитное поле постоянного тока. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле. Закон полного тока. Магнитный поток

III.4.A. Основные формулы

- Заряд Q , движущийся в вакууме со скоростью \vec{v} , создает магнитное поле

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; r — радиус-вектор, проведенный от заряда в точку наблюдения.

Здесь и далее квадратные скобки означают векторное произведение, так что направление \vec{B} определяется правилом буравчика: вектор \vec{B} ортогонален плоскости, в которой лежат векторы \vec{v} и \vec{r} , и если вращать буравчик так, что его ручка поворачивается от первого вектора ко второму, то направление движения буравчика покажет направление \vec{B} .

Замечание. Эта формула верна для медленно движущихся зарядов, когда $v \ll c$ (c — скорость света в вакууме).

- Закон Био—Савара—Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}.$$

Этот закон определяет магнитную индукцию $d\vec{B}$ поля, создаваемого постоянным электрическим током I , текущим по элементу $d\vec{l}$ проводника.

Здесь μ — относительная магнитная проницаемость среды; $d\vec{l}$ — вектор, равный по модулю длине данного элемента проводника и совпадающий по направлению с током в нем; \vec{r} — радиус-вектор, проведенный от элемента проводника к точке наблюдения.

В соответствии с принципом суперпозиции интегрирование вклада от всех элементов проводника позволяет найти магнитную индукцию, создаваемую током в проводнике любой формы.

- Магнитное поле прямолинейного проводника с током

$$B = \frac{\mu_0\mu I}{2\pi r},$$

где r — расстояние от оси проводника.

Вектор магнитной индукции \vec{B} направлен по касательной к окружностям, проведенным в плоскости, ортогональной прямолинейному проводнику, так что направления силовых линий образуют с направлением тока правовинтовую систему.

- Магнитное поле на оси кругового тока радиусом R

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R} \frac{1}{(1 + h^2/R^2)^{3/2}},$$

где h — расстояние от точки наблюдения до центра витка с током. Отсюда, в частности, для поля в центре витка ($h = 0$) имеем

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}.$$

Направление \vec{B} определяется по правилу буравчика.

- Соленоид — это цилиндрическая катушка, состоящая из большого числа витков провода, образующих винтовую линию. Магнитная индукция поля, создаваемого соленоидом в средней его части:

$$B = \mu_0 \mu n I,$$

где μ — магнитная проницаемость вещества внутри соленоида; n — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; I — сила тока в его обмотке.

Данное выражение справедливо при выполнении двух условий: длина соленоида должна намного превышать его радиус и точка наблюдения должна находиться далеко от его концов (внутри соленоида).

- Магнитное поле в середине соленоида длиной l и диаметром d

$$B = \mu_0 \mu n I \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}}.$$

- Магнитное поле на торце соленоида длиной l и диаметром d

$$B = \mu_0 \mu n I \frac{l}{\sqrt{d^2 + 4l^2}}.$$

- Принцип суперпозиции магнитных полей: магнитная индукция \vec{B} результирующего поля равна векторной сумме магнитных индукций $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$ складываемых полей, т. е.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i.$$

В частном случае сложения двух полей $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ для абсолютного значения результирующего поля имеем

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos \alpha},$$

где α — угол между векторами \vec{B}_1 и \vec{B}_2 .

- Сила \vec{F}_L , с которой магнитное поле \vec{B} действует на движущийся со скоростью \vec{v} заряд q (сила Лоренца), равна

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}].$$

Направление силы Лоренца определяется по правилу буравчика.

- Закон Ампера: сила $d\vec{F}_A$, действующая на элемент $d\vec{l}$ проводника с током I в магнитном поле \vec{B} , равна

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l} \times \vec{B}].$$

Направление силы Ампера определяется правилом буравчика.

- Сила взаимодействия двух прямых бесконечно длинных параллельных проводников с токами I_1 и I_2 , находящихся на расстоянии d друг от друга, рассчитанная для отрезков проводников длиной l :

$$F_{12} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l.$$

Если токи текут в одну сторону, то проводники притягиваются; если направления токов противоположны, то они отталкиваются.

- Магнитный момент контура с током:

$$\vec{p}_m = \vec{n}IS,$$

где \vec{n} — единичный вектор, ортогональный плоскости контура и направленный по правилу буравчика; I — сила тока в нем; S — площадь контура.

- Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}],$$

причем модуль механического момента $M = p_m B \sin \alpha$, где α — угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

- Потенциальная энергия контура с током в магнитном поле

$$W = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = -p_m B \cos \alpha,$$

где α — угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

Стремясь понизить свою энергию, виток с током поворачивается так, чтобы его магнитный момент был направлен вдоль магнитного поля.

- В неоднородном магнитном поле, кроме механического момента (пары сил, поворачивающих виток с током), на виток действует также сила $\vec{F} = -\text{grad } W$, стремящаяся втянуть виток в область более сильного поля. В простейшем случае, когда вектор \vec{B} во всех точках поля направлен вдоль оси x , а величина поля зависит только от одной координаты x , сила также направлена вдоль этой оси:

$$F = p_{m,x} \frac{\partial B}{\partial x} = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha.$$

- Вектор намагничивания \vec{J} в данной точке определяется как векторная сумма магнитных моментов, имеющих в небольшом объеме V вокруг данной точки:

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_{mi}.$$

Связь вектора намагничивания с магнитной индукцией

$$\vec{J} = \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\vec{B}}{\mu_0},$$

где μ — магнитная проницаемость вещества.

- Величина

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

называется *напряженностью магнитного поля*. Отсюда следует связь магнитной индукции \vec{B} с напряженностью поля \vec{H}

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

- Поток вектора магнитной индукции \vec{B} (магнитный поток) через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\Phi_B = \oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0.$$

Это связано с отсутствием в природе магнитных зарядов.

- Закон полного тока для произвольной среды: циркуляция вектора напряженности \vec{H} магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура, охватывающего токи I_i ($i = 1, \dots, n$), определяется соотношением

$$\oint (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \oint H_l dl = \sum_{i=1}^n I_i,$$

где H_l — проекция вектора напряженности \vec{H} на направление касательной к контуру в точке, где находится элемент $d\vec{l}$.

Сумма токов в правой части понимается алгебраически: токи, пронизывающие плоскость контура с разных сторон, имеют разные знаки. Данное соотношение является математической формулировкой того факта, что магнитное поле имеет вихревой характер: оно создается токами (движущимися электрическими зарядами), так что силовые линии охватывают эти токи.

III.4.5. Примеры решения задач

ПРИМЕР 66. Электрон с кинетической энергией $T = 100$ эВ движется прямолинейно и равномерно вдоль оси x . В момент времени $t = 0$ электрон находится в начале координат. Какое магнитное поле он создает в этот момент в точке, находящейся на положительной части оси y на расстоянии $l = 1$ м от начала координат?

Решение. Найдем сначала скорость электрона. Поскольку энергия электрона много меньше его энергии покоя $m_e c^2 = 0,51$ МэВ, можно применять нерелятивистские формулы. Энергия электрона равна $T = 100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,6 \cdot 10^{-17}$ Дж. Отсюда находим его скорость:

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-17}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 5,93 \cdot 10^6 \text{ м/с.} \quad (\text{III.4.66})$$

Выберем направление движения электрона за ось x : $\vec{v} = \{v, 0, 0\}$. Радиус-вектор точки наблюдения равен $\vec{r}_n = \{0, l, 0\}$. В момент времени t

положение электрона задается радиус-вектором $\vec{r}_e = \vec{v}t = \{vt, 0, 0\}$, так что радиус-вектор, проведенный от электрона в точку наблюдения, имеет координаты $\vec{r} = \vec{r}_H - \vec{r}_e = \{-vt, l, 0\}$.

Электрон создает, во-первых, кулоновское электрическое поле

$$\vec{E} = -\frac{e\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

где знак «минус» отражает отрицательность заряда электрона. Тогда для компонент электрического поля имеем

$$E_x = \frac{evt}{4\pi\epsilon_0 (l^2 + (vt)^2)^{3/2}}; \quad E_y = -\frac{el}{4\pi\epsilon_0 (l^2 + (vt)^2)^{3/2}}; \quad E_z = 0. \quad (\text{III.4.67})$$

В момент $t = 0$ «выживает» только компонента поля вдоль оси y :

$$\vec{E} = -\vec{j}E = -\vec{j}\frac{e}{4\pi\epsilon_0 l^2}. \quad (\text{III.4.68})$$

Отметим, что формулы (III.4.67) также справедливы лишь для медленно движущихся зарядов. Численно

$$E = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})(8,99 \cdot 10^9)}{1^2} = 1,44 \cdot 10^{-9} \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Данное электрическое поле направлено в начальный момент времени вдоль оси y в сторону начала координат (рис. 51).

Во-вторых, электрон создает магнитное поле

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad (\text{III.4.69})$$

где мы учли отрицательность заряда электрона. Воспользуемся известными свойствами векторного произведения:

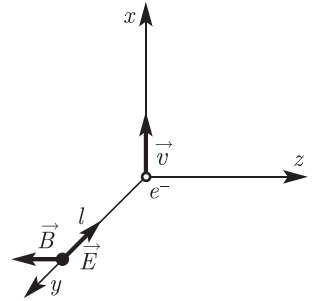


Рис. 51

$$[\vec{v} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v & 0 & 0 \\ -vt & l & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} v & 0 \\ -vt & l \end{vmatrix} = \vec{k}vl.$$

Тогда получаем выражение для вектора магнитной индукции

$$\vec{B} = -\vec{k}B = -\vec{k}\frac{\mu_0 evl}{4\pi (l^2 + v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (\text{III.4.70})$$

В начальный момент времени

$$B = \frac{\mu_0 ev}{4\pi l^2}. \quad (\text{III.4.71})$$

Учитывая соотношение $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$, находим связь электрического и магнитного полей:

$$B = E \frac{v}{c^2}. \quad (\text{III.4.72})$$

Численно

$$B = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7})(1,6 \cdot 10^{-19})(5,93 \cdot 10^6)}{4\pi \cdot 1^2} = 9,48 \cdot 10^{-20} \text{ Тл.}$$

Магнитное поле направлено вдоль оси z в сторону отрицательных значений (см. рис. 51). Как и следовало ожидать, направление магнитного поля подчиняется правилу буравчика, если вспомнить, что в данном случае ток течет вдоль отрицательного направления оси x .

ПРИМЕР 67. Два бесконечно длинных параллельных провода, по которым текут токи, расположены перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 52, а). Расстояние между проводниками $2a$. При этом индукция в точке O , находящейся посередине между проводниками, равна нулю. Справа от этой точки на оси x вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно этой оси (вниз, как показано на рисунке). Определить направление токов в проводниках, соотношение значений токов, направление вектора индукции слева от точки O и точку на оси x , в которой индукция имеет максимальное значение.

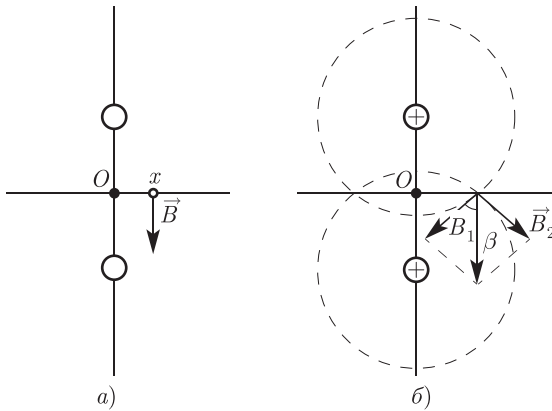


Рис. 52

Решение. Линии магнитной индукции от прямолинейного тока представляют собой концентрические окружности в плоскости, ортогональной току (здесь в плоскости рисунка). Их направление определяется по правилу буравчика. Поэтому, раз в точке между токами индукция равна нулю, эти линии имеют противоположные направления, т. е. оба тока текут в одном направлении. Более того, раз вклады магнитных полей токов полностью компенсируют друг друга, сила тока в обоих проводниках одинакова.

Пользуясь правилом буравчика, определяем направление вектора магнитной индукции при обоих возможных направлениях тока в области справа от проводников. Как видно из рис. 52, б, вектор индукции справа от проводников направлен вниз, когда токи текут от нас за плоскость рисунка. Соответственно слева от точки O результирующий вектор индукции будет направлен вверх.

Точка с координатой x находится на расстоянии $R = \sqrt{a^2 + x^2}$ от токов. Поэтому по закону Био—Савара—Лапласа каждый ток создает в этой точке магнитное поле

$$B_{1(2)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2 + x^2}},$$

направленное по касательной к соответствующей окружности. Горизонтальные проекции этих полей взаимно компенсируются. Вертикальную проекцию каждого из них получаем, умножая $B_{1(2)}$ на косинус угла β с вертикальной осью, причем $\cos \beta = x/\sqrt{a^2 + x^2}$. Вклады обоих токов одинаковы, и, сложив эти величины, получаем индукцию B в точке x :

$$B = 2B_1 \cos \beta = \frac{\mu_0 I x}{\pi(a^2 + x^2)}. \quad (\text{III.4.73})$$

Производная dB/dx обращается в нуль при $x = \pm a$. В этих точках $|\vec{B}|$ имеет максимум

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

ПРИМЕР 68. Найти магнитное поле, создаваемое прямолинейным отрезком проводника в среде с магнитной проницаемостью μ , если r_0 — кратчайшее расстояние до точки наблюдения.

Решение. В этом случае, в отличие от бесконечного проводника, необходимы все три координаты для фиксации точки наблюдения. Выберем их следующим образом (рис. 53): расстояние r от проводника и углы φ_1, φ_2 , под которыми точка наблюдения видна из концов отрезка (углы отсчитываются от направления тока). По правилу буравчика ясно, что результирующее поле \vec{B} , так же как и вклады отдельных элементов отрезка, направлено перпендикулярно плоскости рисунка на нас. Поэтому можно складывать их абсолютные величины. Вклад dB элемента тока длиной dx , заштрихованного на рис. 53, равен

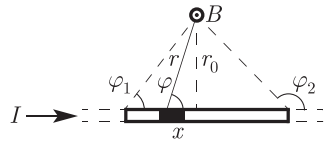


Рис. 53

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I \sin \varphi dx}{r^2}. \quad (\text{III.4.74})$$

Выразим через угол φ и r_0 расстояния x и r :

$$x = \frac{r_0}{\operatorname{tg} \varphi}; \quad r = \frac{r_0}{\sin \varphi}. \quad (\text{III.4.75})$$

Находим также дифференциал dx из первого соотношения:

$$dx = -\frac{r_0}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = -r_0 \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}. \quad (\text{III.4.76})$$

Подставляем теперь соотношения (III.4.75) и (III.4.76) в (III.4.74):

$$dB = -\frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0} \sin \varphi d\varphi. \quad (\text{III.4.77})$$

Чтобы найти результирующее магнитное поле, надо проинтегрировать вклады dB по всему отрезку тока:

$$B = -\frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2). \quad (\text{III.4.78})$$

Отсюда, в частности, получается результат для бесконечного прямолинейного проводника: в этом случае $\cos \varphi_1 = \cos 0 = 1$ и $\cos \varphi_2 = \cos \pi = -1$, так что $B = \mu_0 \mu I / (2\pi r)$.

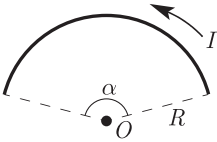


Рис. 54

ПРИМЕР 69. Найти магнитное поле, создаваемое сегментом кольца радиусом R и раствором с углом α в его центре (рис. 54).

Решение. Вклады всех элементов кольца одинаковы и равны

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}.$$

При данном направлении тока магнитное поле ортогонально плоскости рисунка и направлено на нас. При интегрировании вместо dl появится длина сегмента, равная αR , так что окончательно:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R} \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (\text{III.4.79})$$

ПРИМЕР 70. Физик проектирует протонный ускоритель на энергию 3 ТэВ. Для отклоняющей системы намечено использовать сильные сверхпроводящие магниты, создающие поле до $B = 3$ Тл. Каким должен быть радиус R ускорителя?

Решение. Прежде всего речь идет об ультрарелятивистских энергиях, поскольку $W = 3000$ ГэВ много больше энергии покоя протона ($m_p c^2 = 0,938$ ГэВ). Поэтому надо использовать релятивистские формулы. Протоны в ускорителе будут вращаться по окружности под действием силы Лоренца $F_L = evB$. Релятивистский импульс частиц

$$\vec{p} = \frac{m_p \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Уравнение движения протона имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_p \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = e[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (\text{III.4.80})$$

При этом меняется не абсолютная величина скорости, но лишь ее направление. Поэтому модуль скорости в (III.4.80) не дифференцируется:

$$\frac{m_p}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = e[\vec{v} \times B]. \quad (\text{III.4.81})$$

Как и в классической механике, производная вектора скорости при постоянстве ее абсолютной величины дает нормальное ускорение

$\vec{a}_n = \vec{nv}^2/R$, так что мы имеем уравнение

$$\frac{m_p v^2}{R\sqrt{1-v^2/c^2}} = evB, \quad (\text{III.4.82})$$

откуда находим радиус ускорителя:

$$R = \frac{m_p v}{eB\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (\text{III.4.83})$$

От классического выражения полученный результат отличается «лишь» релятивистским корнем в знаменателе. Скорость протонов близка к скорости света, и можно заменить v на c в числителе выражения (III.4.83), но не в этом корне. Его проще выразить через энергию протонов: кинетическая энергия вместе с энергией покоя дает полную релятивистскую энергию:

$$W + m_p c^2 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Так как $W \gg m_p c^2$, имеем приближенное равенство

$$\sqrt{1-v^2/c^2} \approx \frac{m_p c^2}{W},$$

и радиус орбиты можно записать в виде

$$R \approx \frac{m_p c}{eB} \frac{W}{m_p c^2} = \frac{W}{ecB}. \quad (\text{III.4.84})$$

Подставляя числовые значения, находим

$$R = \frac{(1,67 \cdot 10^{-27})(3 \cdot 10^8)}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3} \cdot \frac{3000}{0,938} = 3,34 \text{ км.}$$

Заметим, что при использовании нерелятивистской формулы $R_{cl} = m_p v / eB \approx m_p c / eB$ мы получили бы для радиуса ускорителя некорректное (гораздо меньшее) значение: $R_{cl} = 1,04 \text{ м}$. Этот пример — яркое проявление релятивистского эффекта.

ПРИМЕР 71. Два тонких параллельных стержня, находящиеся на расстоянии a друг от друга, равномерно заряжены с линейной плотностью заряда τ . Оба стержня движутся со скоростью v вдоль своих осей. Найти силу их взаимодействия в расчете на единицу длины.

Решение. Прежде всего между стержнями действует кулоновская сила отталкивания. Равномерно заряженный стержень создает в каждой точке другого стержня электрическое поле

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 a}.$$

Отрезок другого стержня длиной l , несущий заряд $Q = \tau l$, находится в этом поле, что приводит к электростатической силе отталкивания

$$F_E = EQ = \frac{\tau^2}{2\pi\epsilon_0 a} l. \quad (\text{III.4.85})$$

Кроме того, стержни движутся и, стало быть, создают токи. Если представить себе плоскость, ортогональную стержням, то за время Δt сквозь нее пройдет отрезок стержня длиной $\Delta l = v\Delta t$, несущий заряд $\Delta Q = \tau\Delta l = \tau v\Delta t$. Значит, каждый стержень своим движением создает ток силой $I = \Delta Q/\Delta t = \tau v$. Согласно закону Ампера отрезки этих параллельных токов длиной l притягиваются с силой

$$F_A = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} l = -\frac{\tau^2 v^2}{2\pi\epsilon_0 c^2 a} l. \quad (\text{III.4.86})$$

Складывая силы F_E и F_A , получаем результирующую силу

$$F = \frac{\tau^2}{2\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l. \quad (\text{III.4.87})$$

Видно, что при $v \ll c$ магнитное поле вносит во взаимодействие стержней гораздо меньший вклад из-за множителя v^2/c^2 .

ПРИМЕР 72. Найти орбитальный магнитный момент электрона в классической модели атома водорода и сравнить его с механическим моментом орбитального движения электрона. Радиус орбиты $a_B = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение. Применим сначала соображения размерности (см. учебник, т. 1, п. 1.3). Размерность магнитного момента $[p_m] = \text{Дж} \cdot \text{Тл}^{-1} = \text{Кл} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, механического момента — $[L] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. В нашем распоряжении имеются диэлектрическая постоянная ϵ_0 , характеристики электрона e , m_e и радиус электронной орбиты a_B . Поэтому решение ищем в виде

$$p_{mL} = C_m \epsilon_0^a e^b m_e^c a_B^d.$$

Подставляя сюда размерности величин, получаем

$$\text{Кл} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1} = (\text{Кл}^2 \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг}^{-1})^a \text{Кл}^b \cdot \text{кг}^c \cdot \text{м}^d,$$

откуда следует система уравнений

$$1 = 2a + b; \quad 2 = -3a + d; \quad -1 = 2a; \quad 0 = -a + c.$$

Решая эту систему, определяем $a = c = -1/2$, $d = 1/2$, $b = 2$. В результате

$$p_{mL} = C_m e^2 \sqrt{\frac{a_B}{\epsilon_0 m_e}}.$$

Аналогично находим выражение для механического орбитального момента:

$$L = C_L \epsilon_0^{a'} e^{b'} m_e^{c'} a_B^{d'},$$

откуда следуют соотношения для размерностей

$$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{кг} = (\text{Кл}^2 \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг}^{-1})^{a'} \cdot \text{Кл}^{b'} \cdot \text{кг}^{c'} \cdot \text{м}^{d'}$$

и система уравнений

$$0 = 2a' + b'; \quad 2 = -3a' + d'; \quad -1 = 2a'; \quad 1 = -a' + c'.$$

Ее решение: $a' = -1/2$, $b' = 1$, $c' = d' = 1/2$. В результате находим

$$L = C_L e \sqrt{\frac{m_e a_B}{\epsilon_0}}.$$

Отношение магнитного и механического орбитальных моментов, как и следовало ожидать, не зависит от радиуса электронной орбиты:

$$\frac{p_{mL}}{L} = C \frac{e}{m_e}.$$

Решим теперь задачу точно. Электрон обращается по орбите радиусом a_B со скоростью v . Период обращения $T = 2\pi a_B/v$. За это время электрон совершает полный оборот, так что сила тока в таком «витке» составляет $I = e/t = ev/(2\pi a_B)$. Умножая ток на площадь «витка» $S = \pi a_B^2$, находим магнитный момент, созданный орбитальным движением электрона:

$$P_m = \frac{ev a_B}{2}. \quad (\text{III.4.88})$$

На электрон действует центростремительная сила — кулоновское притяжение протона. Поэтому

$$\frac{m_e v^2}{a_B} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B^2},$$

откуда скорость электрона

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_B}}. \quad (\text{III.4.89})$$

Подставляя найденную скорость в (III.4.88), получаем магнитный момент, созданный орбитальным движением электрона:

$$p_{mL} = \frac{e^2}{2} \sqrt{\frac{a_B}{4\pi\epsilon_0 m_e}}. \quad (\text{III.4.90})$$

Теперь можно выполнить численный расчет:

$$\begin{aligned} p_{mL} &= \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2} \sqrt{\frac{(0,53 \cdot 10^{-10})(8,99 \cdot 10^9)}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = \\ &= 9,26 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл} = 5,79 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ/Тл}. \end{aligned}$$

В разд. VI.5.A (см. формулу (VI.5.73)) можно найти эту величину — магнетон Бора μ_B . Приведенное теоретическое выражение для μ_B следует из квантовой механики, а сейчас достаточно установить факт, что в классической теории орбитальный магнитный момент атома водорода равен одному магнетону Бора: $p_{mL} = \mu_B$.

Орбитальный механический момент L электрона

$$L = m_e v a_B = e \sqrt{\frac{m_e a_B}{4\pi\epsilon_0}}. \quad (\text{III.4.91})$$

Численно

$$L = 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{(0,53 \cdot 10^{-10})(9,11 \cdot 10^{-31})(8,99 \cdot 10^9)} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Получившееся число также может быть найдено по табл. П. 25 приложения. Это постоянная Планка \hbar , одна из фундаментальных констант физики, играющая первостепенную роль в квантовой механике.

Наконец, отношение орбитального магнитного момента к механическому получается равным половине удельного заряда электрона:

$$\frac{p_m L}{L} = \frac{e}{2m_e}. \quad (\text{III.4.92})$$

Как и следовало ожидать, точные решения (III.4.90), (III.4.91) и (III.4.92) полностью согласуются с анализом размерностей.

ПРИМЕР 73. Имеется круговой виток радиусом R с током I в однородной среде с магнитной проницаемостью μ . Вычислить интеграл $J = \int B(h)dh$ вдоль всей оси витка, где $B(h)$ — магнитное поле на оси витка на расстоянии h от его центра. Объяснить результат.

Решение. Воспользуемся готовым результатом для поля на оси витка в вакууме (см. т. 1, гл. 20 учебника) и учтем магнитную проницаемость среды μ :

$$B(h) = \frac{\mu_0 \mu I}{2R} \frac{1}{(1 + h^2/R^2)^{3/2}}. \quad (\text{III.4.93})$$

Подставим формулу (III.4.93) в интересующий нас интеграл:

$$J = \frac{\mu_0 \mu I}{2R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{(1 + h^2/R^2)^{3/2}} = \mu_0 \mu I \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}, \quad (\text{III.4.94})$$

где мы ввели новую переменную интегрирования $x = h/R$. Подобные интегралы берутся с помощью замены переменных и использования свойств гиперболических функций (по поводу последних мы отсылаем читателя к курсу математики):

$$x = \text{sh } y; dx = \text{ch } y dy.$$

После этого имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } y dy}{(1 + \text{sh}^2 y)^{3/2}} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{\text{ch}^2 y} = \text{th } y \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Таким образом, интересующий нас интеграл равен

$$J = \mu_0 \mu I \quad (\text{III.4.95})$$

и не зависит от радиуса кольца. Величина $B/(\mu_0 \mu)$ есть не что иное, как напряженность магнитного поля H . Таким образом, получаем результат

$$\int_{-\infty}^{\infty} H dh = I. \quad (\text{III.4.96})$$

Напомним, что интегрирование ведется вдоль оси витка. Можно мысленно соединить бесконечно удаленные противоположные концы оси

произвольной линией, интеграл вдоль которой равен нулю, так как эта линия бесконечно удалена от кольца и магнитное поле на ней обращается в нуль. Тогда результат (III.4.96) примет более знакомую форму:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I. \quad (\text{III.4.97})$$

Это не что иное, как теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля. Контур, состоящий из оси кольца и бесконечно удаленной замыкающей его линии, охватывает ток в кольце, в соответствии с чем в правой части (III.4.97) и появилась сила тока I .

ПРИМЕР 74. Назовем катушкой короткий соленоид радиусом R и длиной l ($l \ll R$). Если катушка содержит N витков, то магнитное поле на ее оси дается той же самой формулой (III.4.93) с заменой $I \rightarrow NI$. Рассмотрим две коаксиальные одинаковые катушки радиусом R , разделенные расстоянием L (рис. 55). Пусть токи в катушках одинаковы. Найти точку на оси катушек, где поле отличается особой однородностью, т. е. изменяется менее всего при переходе от этой точки к соседней. (Такую систему называют катушками Гельмгольца.)

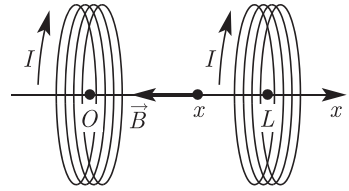


Рис. 55. Катушки Гельмгольца

Решение. Выберем начало оси x в центре одной из катушек и пусть x — координата точки наблюдения. Магнитное поле на оси складывается из двух полей, создаваемых каждой катушкой в отдельности. Используя формулу (III.4.93), имеем

$$B(x) = \frac{\mu_0 \mu N I}{2R} \left[\frac{1}{(1 + x^2/R^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1 + (L - x)^2/R^2)^{3/2}} \right]. \quad (\text{III.4.98})$$

Мы ищем точку, в которой производная поля по переменной x будет равна нулю. Из соображений симметрии ясно, что если это возможно, то только посередине между кольцами, т. е. при $x = L/2$. Убедимся в этом:

$$\frac{dB(x)}{dx} = \frac{3\mu_0 \mu N I}{2R^3} \left[-\frac{x}{(1 + x^2/R^2)^{5/2}} + \frac{(L - x)}{(1 + (L - x)^2/R^2)^{5/2}} \right]. \quad (\text{III.4.99})$$

И действительно, при подстановке $x = L/2$ оба слагаемых в квадратных скобках взаимно компенсируются.

Но это еще не все. Давайте установим, при каких условиях в этой же точке обратится в нуль еще и вторая производная поля по x :

$$\frac{d^2B(x)}{dx^2} = \frac{3\mu_0 \mu N I}{2R^3} \left[-\frac{1}{(1 + x^2/R^2)^{5/2}} + \frac{5x^2/R^2}{(1 + x^2/R^2)^{7/2}} - \frac{1}{(1 + (L - x)^2/R^2)^{5/2}} + \frac{5(L - x)^2/R^2}{(1 + (L - x)^2/R^2)^{7/2}} \right]. \quad (\text{III.4.100})$$

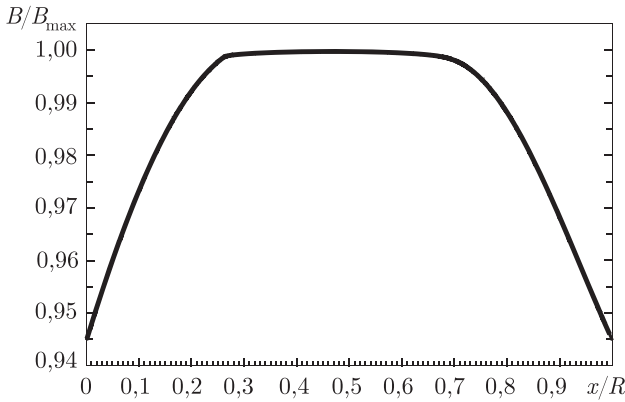


Рис. 56. Зависимость магнитного поля на оси катушек Гельмгольца ($L = R$) от положения точки наблюдения. Расстояния измеряются в единицах радиуса катушек, а магнитная индукция — в единицах своего максимального значения

Вычисления несколько трудоемкие, но достаточно тривиальные. И результат заслуживает усилий! Подставим сюда только что найденное значение $x = L/2$:

$$\begin{aligned}
 B''|_{x=L/2} &= \frac{3\mu_0\mu NI}{2R^3} \left[-\frac{2}{(1 + L^2/4R^2)^{5/2}} + \frac{5L^2/R^2}{2(1 + L^2/4R^2)^{7/2}} \right] = \\
 &= \frac{3\mu_0\mu NI}{2R^3} \frac{(-1 + L^2/R^2)}{(1 + L^2/4R^2)^{7/2}}. \tag{III.4.101}
 \end{aligned}$$

Из (III.4.101) ясно, что если расстояние между катушками равно их радиусу, то в средней точке между ними обращаются в нуль и первая, и вторая производные, т. е. поле действительно отличается особой однородностью.

Сказанное иллюстрируется графиком на рис. 56, построенным для $L = R$. Сразу привлекает внимание необычно плоская часть кривой в районе ее максимума. Практически в любой точке оси между катушками магнитная индукция отличается от своего максимального значения в средней точке не более чем на 5%. На почти двух третях этого промежутка ($0,19R \leq x \leq 0,81R$) магнитное поле совпадает с максимальным значением с точностью не более 1%.

III.4.B. Задачи для самостоятельной работы

Магнитное поле

Задача III.4.1. В примере 66 найти электрическое и магнитное поля и их направления в той же точке, но в момент времени $t = 0,5$ мкс.

Задача III.4.2. В примере 61 найти электрическое и магнитное поля и их направления в той же точке, но в момент времени $t = -1,0$ мкс.

Задача III.4.3. Определить максимальную магнитную индукцию B_{\max} , создаваемую электроном, движущимся прямолинейно с посто-

янной скоростью $v = 10$ Мм/с в точке, удаленной от его траектории на расстояние $d = 1$ нм.

Задача III.4.4. На расстоянии $r = 10$ нм от траектории прямолинейно и равномерно движущегося электрона максимальное значение магнитной индукции равно $B_{\max} = 160$ мкТл. Определить скорость электрона.

Задача III.4.5. Определить индукцию магнитного поля посередине между двумя длинными параллельными проводниками, расположенными на расстоянии $d = 10$ см один от другого, если в одном проводнике сила тока $I_1 = 15$ А, а в другом сила тока $I_2 = 10$ А, токи текут в одном направлении.

Задача III.4.6. Определить индукцию магнитного поля посередине между двумя длинными параллельными проводниками, расположенными на расстоянии $d = 10$ см один от другого, если в одном проводнике сила тока $I_1 = 15$ А, а в другом проводнике ток силой $I_2 = 10$ А течет в противоположном направлении.

Задача III.4.7. Бесконечный прямолинейный провод согнут в одной точке под прямым углом. По проводу идет ток $I = 100$ А. Вычислить магнитную индукцию в точке, находящейся внутри угла на его биссектрисе и удаленной от вершины угла на расстояние $a = 10$ см.

Задача III.4.8. Бесконечный прямолинейный провод согнут в одной точке под прямым углом. По проводу идет ток $I = 100$ А. Вычислить магнитную индукцию в точке, находящейся вне угла на его биссектрисе и удаленной от вершины угла на расстояние $a = 10$ см.

Задача III.4.9. Чему равна индукция магнитного поля в центре квадратной рамки, по которой циркулирует ток $I = 20$ А? Длина стороны рамки $a = 15$ см.

Задача III.4.10. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Как изменилась магнитная индукция в центре контура?

Задача III.4.11. Сравните магнитную индукцию в центре витков — кольца и квадрата, по которым течет одинаковый ток и которые имеют одинаковую площадь (т. е. магнитные моменты витков равны).

Задача III.4.12. Определить индукцию магнитного поля в центре кольца O для случая, изображенного на рис. 57, а.

Задача III.4.13. Определить индукцию магнитного поля в центре кольца O для случая, изображенного на рис. 57, б.

Задача III.4.14. Определить индукцию магнитного поля в центре кольца O для случая, изображенного на рис. 57, в.

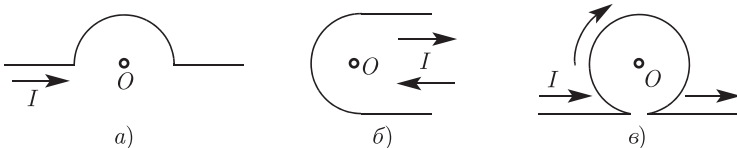


Рис. 57. Здесь сила тока $I = 50$ А, $R = 10$ см

Задача III.4.15. Индукция магнитного поля в центре соленоида длиной $l = 32$ см и диаметром $d = 1,2$ см должна составлять $B = 0,1$ Тл. Сколько витков должна иметь обмотка, если сила тока в ней $I = 11,1$ А?

Задача III.4.16. Чему равна индукция магнитного поля в центре соленоида длиной $l = 2,2$ см и диаметром $d = 1,2$ см, если обмотка имеет 2500 витков, а протекающий по ней ток $I = 10$ А?

Задача III.4.17. Показать, что поле в точке соленоида, находящейся на расстояниях l_1 и l_2 от двух его концов (так что длина соленоида $l = l_1 + l_2$), определяется выражением

$$B = \mu_0 \mu n I \left(\frac{l_1}{\sqrt{d^2 + 4l_1^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{d^2 + 4l_2^2}} \right),$$

где d — диаметр соленоида.

Пусть $d = 5$ см и $l = 50$ см. Чему равна длина той части соленоида, в которой магнитная индукция отличается не более чем на $\eta = 1\%$ от значения, вычисленного по формуле для бесконечно длинного соленоида?

Замечание: в этой задаче не обойтись без калькулятора или (что лучше) персонального компьютера.

Задача III.4.18. Решить задачу III.4.17 при $\eta = 5\%$ и тех же прочих данных.

Задача III.4.19. Решить задачу III.4.17 при $\eta = 0,5\%$ и тех же прочих данных.

Задача III.4.20. Решить задачу III.4.17 при $l = 1$ м и $\eta = 0,5\%$ и тех же прочих данных.

Задача III.4.21. Напомним, что мы называем катушкой короткой соленойд ($l \ll R$). Объяснить, почему индукция магнитного поля в центре круглой катушки $B = \frac{\mu_0 \mu N I}{2R}$, где I — сила тока в катушке; N — число витков; R — радиус катушки. Пусть электромагнит представляет собой катушку диаметром $d = 2$ м, на которую намотан медный провод квадратного сечения со стороной $a = 2$ мм. Источник питания дает напряжение $U = 50$ В при максимальной мощности $P = 1$ кВт. 1) Сколько витков должна иметь катушка, чтобы отбирать от источника предельную мощность? 2) Чему при этом будет равна индукция магнитного поля в центре катушки? 3) Если увеличить число витков, но питать электромагнит от того же источника, то увеличится ли индукция магнитного поля? Ответ объяснить.

Задача III.4.22. Определить магнитное поле в средней точке катушек Гельмгольца радиусом $R = 20$ см и током $I = 35$ А. Расстояние между катушками равно их радиусу, катушки содержат по $N = 350$ витков.

Задача III.4.23. Непроводящий тонкий диск радиусом $R = 10$ см равномерно заряжен с одной стороны с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 15$ нКл/см². Диск вращается с угловой скоростью $\omega = 200$ с⁻¹. Найти магнитную индукцию в центре диска.

Задача III.4.24. Непроводящий тонкий диск радиусом $R = 10$ см равномерно заряжен с одной стороны с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 15$ нКл/см². Диск вращается с угловой скоростью $\omega = 200$ с⁻¹. Найти магнитный момент системы.

Движение заряженных частиц

Задача III.4.25. На заряд 1 Кл, движущийся со скоростью 1 м/с, в магнитном поле действует сила 10 Н. Заряд движется под углом 30° к вектору индукции магнитного поля. Чему равен модуль этого вектора?

Задача III.4.26. Протон, ускоренный напряжением $U = 20$ кВ, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл перпендикулярно силовым линиям. Найти радиус R окружности, по которой движется протон в магнитном поле.

Задача III.4.27. Протон, ускоренный напряжением $U = 1$ ГВ, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 3$ Тл перпендикулярно силовым линиям. Найти радиус R окружности, по которой движется протон в магнитном поле.

Задача III.4.28. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 200$ В, движется в магнитном поле Земли с индукцией $B = 0,7 \cdot 10^{-4}$ Тл. Найти радиус окружности, по которой движется электрон, если скорость его перпендикулярна полю Земли.

Задача III.4.29. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кВ, движется в магнитном поле Земли с индукцией $B = 0,7 \cdot 10^{-4}$ Тл. Найти радиус окружности, по которой движется электрон, если скорость его перпендикулярна полю Земли.

Задача III.4.30. Два нерелятивистских электрона с кинетическими энергиями W_1 и W_2 движутся в магнитном поле, перпендикулярном их скорости. Найти отношение их периодов обращения и радиусов траекторий.

Задача III.4.31. Два ультрарелятивистских электрона с кинетическими энергиями W_1 и W_2 движутся в магнитном поле, перпендикулярном их скорости. Найти отношение их периодов обращения и радиусов траекторий.

Задача III.4.32. Определить круговую (циклотронную) частоту ω_0 и период T_0 вращения нерелятивистского электрона в магнитном поле с индукцией $B = 0,3$ Тл. Как изменятся эти величины при достижении электроном энергии $W = 2$ МэВ?

Задача III.4.33. Определить радиус R орбиты электрона в магнитном поле с индукцией B в зависимости от его энергии W . Чему равно численное значение R_f радиуса в конце цикла ускорения при достижении электроном энергии $W = 2$ МэВ, если $B = 0,03$ Тл?

Задача III.4.34. В ускоритель, о котором шла речь в примере 70, протоны попадают уже предварительно ускоренными до энергии $W_0 = 600$ ГэВ и лишь потом ускоряются до расчетной энергии $W = 3000$ ГэВ. Чтобы удерживать их на орбите с фиксированным радиусом R (расчет его см. в примере 70), надо синхронно с энергией

изменять магнитное поле. Найти зависимость B от энергии протона (последнюю выразить в гигаэлектронвольтах) и вычислить магнитную индукцию в начале и в конце цикла ускорения.

Задача III.4.35. Через какое время после первой встречи произойдет ближайшая встреча двух нерелятивистских электронов, движущихся перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0,3$ Тл? При первой встрече частицы двигались взаимно перпендикулярно. Скорости электронов одинаковы, их взаимодействием пренебречь.

Задача III.4.36. Используя (промежуточные) результаты примера 72, найти круговую частоту ω_0 обращения электрона вокруг протона. Как она изменится, если наложить магнитное поле $B = 1$ Тл в направлении вектора магнитного момента атома?

Задача III.4.37. Используя (промежуточные) результаты примера 72, найти круговую частоту ω_0 обращения электрона вокруг протона. Как она изменится, если наложить слабое магнитное поле $B = 0,01$ Тл в направлении, обратном вектору магнитного момента атома?

Задача III.4.38. Используя данные примера 72, найти магнитную индукцию поля, в котором электрон вращался бы с той же частотой и по орбите того же радиуса, как и в атоме водорода.

Задача III.4.39. Сила, действующая на электрон в магнитном поле, максимальна, когда он движется в западном направлении. При этом сила направлена на север и равна $F = 8,2 \cdot 10^{-13}$ Н при скорости электрона $v = 3,9 \cdot 10^5$ м/с. Определить величину и направление вектора магнитной индукции B .

Задача III.4.40. На электрон, движущийся перпендикулярно магнитному полю с индукцией $\vec{B} = \vec{k} \cdot 0,72$ Тл, действует сила $\vec{F} = (3,2\vec{i} - 2,7\vec{j}) \cdot 10^{-13}$ Н. Чему равна скорость электрона v и ее компоненты?

Задача III.4.41. Протон влетает в область магнитного поля с индукцией $B = 0,58$ Тл и начинает двигаться по окружности радиусом $R = 8,1$ см. Какое электрическое поле E надо наложить, чтобы протоны двигались по прямой? Как должен быть направлен вектор \vec{E} ?

Задача III.4.42. Капелька масла массой $m = 3,3 \cdot 10^{-15}$ кг висит неподвижно между двумя большими горизонтальными пластинами, находящимися на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, при разности потенциалов между пластинами $U = 340$ В. Сколько избыточных электронов имеется на этой капле?

Задача III.4.43. В электронно-лучевой трубке электроны ускоряются напряжением 10 кВ. Экран имеет ширину 24 см и находится на расстоянии 25 см от отклоняющих пластин длиной 2,8 см. В каких пределах должна изменяться напряженность электрического поля между отклоняющими пластинами, чтобы электронный пучок отклонялся на весь экран?

Сила Ампера

Задача III.4.44. На линейный проводник длиной $l = 2$ м, расположенный перпендикулярно магнитному полю, действует сила $F = 1,5$ Н, если ток в проводнике равен $I = 15$ А. Найти индукцию магнитного поля.

Задача III.4.45. Чему равна сила, действующая на 1 м прямолинейного проводника с током $10,5$ А в магнитном поле с индукцией $B = 1,7$ Тл, расположенного: 1) перпендикулярно вектору \vec{B} ; 2) под углом 45° к направлению вектора \vec{B} ?

Задача III.4.46. Вычислить силу, действующую со стороны магнитного поля Земли ($B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл) на проводник с током 150 А длиной 240 м, который натянут между двумя опорами и составляет угол 60° с направлением магнитного поля.

Задача III.4.47. В однородном магнитном поле (линии индукции вертикальны) на двух тонких невесомых нитях подвешен горизонтально проводник массой $0,16$ кг и длиной 79 см. Концы проводника при помощи гибких проводов, находящихся вне поля, подсоединены к источнику тока. Найти угол, на который отклоняются нити подвеса от вертикали, если по проводнику течет ток 2 А, а индукция магнитного поля $0,57$ Тл.

Задача III.4.48. Проволочная квадратная рамка со стороной $a = 10$ см и массой $m = 100$ г закреплена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтально расположенной стороны. Рамка находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл. При пропускании через рамку тока она отклоняется на угол $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найти ток в рамке.

Задача III.4.49. Круговой виток с током диаметром 10 см помещен в однородное поле между полюсами большого магнита так, что плоскость витка параллельна линиям магнитной индукции. Когда в витке течет ток силой $8,1$ А, на него действует вращающий момент $0,116$ Н·м. Чему равна индукция магнитного поля?

Задача III.4.50. Виток радиусом $r_2 = 1$ см помещен в центр витка радиусом $r_1 = 15$ см так, что плоскости витков взаимно перпендикулярны. Сила тока в каждом витке составляет $I = 3$ А. Оценить вращающий момент, действующий на малый виток со стороны большого витка. Какие упрощающие предположения вы сделали?

Задача III.4.51. Решить задачу III.4.50 при условии, что малый виток располагается на оси большого на расстоянии $h = r_1$ см от его центра. Все остальные условия задачи — те же самые.

Задача III.4.52. По металлическому кольцу идет ток. Оценить из соображений размерности (см. учебник, т. 1, п. 1.3) зависимость растягивающей силы от силы тока. Предположим, что кольцо разрывается при силе тока I . При каком токе разорвется точно такое же кольцо, сделанное из материала, предел прочности которого в 10 раз больше? (Указание: пределом прочности называется максимально допустимая величина напряжения F/S .)

Задача III.4.53. По металлическому кольцу идет ток. Оценить из соображений размерности (см. учебник, т. 1, п. 1.3) зависимость растягивающей силы от силы тока. Предположим, что кольцо разрывается при силе тока I . При каком токе разорвется кольцо из такого же материала, все линейные размеры которого в 2 раза больше? (См. указание к предыдущей задаче.)

Задача III.4.54. Найти давление p на стенки длинного соленоида, по которому течет ток $I = 20$ А. Плотность витков соленоида $n = 50$ см⁻¹.

Задача III.4.55. Найти давление p на стенки длинного соленоида, по которому течет ток I . Как изменится давление, если ток возрастет в 3 раза?

Задача III.4.56. Найти давление p , действующее на обмотку длинного соленоида, по которому течет ток I . Как изменится давление, если при том же токе взять такой же соленоид с плотностью витков, в 2 раза большей?

Задача III.4.57. Чему равны величина и направление силы, действующей между двумя параллельными проводниками, расположенными на расстоянии $d = 30$ см друг от друга, если длина каждого проводника $l = 80$ м и по ним в одном направлении течет ток $I = 65$ А?

Задача III.4.58. Три длинных параллельных проводника a , b , c находятся попарно на расстоянии $d = 12$ см друг от друга, так что их пересечения с ортогональной плоскостью образуют вершины равностороннего треугольника. Сила тока в каждом проводнике равна $I = 3$ А, но в проводнике a ток направлен противоположно токам в соседних проводниках (b и c). Определить силу, действующую на 1 м длины каждого проводника со стороны двух других.

Задача III.4.59. По длинному горизонтальному проводнику течет ток $I_1 = 78$ А. Второй медный проводник диаметром $d = 3,5$ мм удерживается магнитными силами параллельно первому на расстоянии $r = 18$ см под ним. 1) Чему равны сила и направление тока во втором проводнике? 2) Находится ли второй проводник в устойчивом равновесии? (Плотность меди $\rho_m = 8,93$ г/см³.)

Задача III.4.60. По длинному горизонтальному проводнику течет ток $I_1 = 8$ А. Второй, медный проводник диаметром $d = 3,5$ мм, удерживается магнитными силами параллельно первому на расстоянии $r = 20$ см над ним. 1) Чему равны сила и направление тока во втором проводнике? 2) Находится ли второй проводник в устойчивом равновесии? (Плотность меди $\rho_m = 8,93$ г/см³.)

III.5. Электромагнетизм. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле. Электромагнитная индукция. Индуктивность. Энергия магнитного поля. Уравнения Максвелла

III.5.A. Основные формулы

- Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$\Delta A = I \Delta \Phi,$$

где I — сила тока в контуре; $\Delta \Phi$ — изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром.

- Закон Фарадея—Максвелла—Ленца (основной закон электромагнитной индукции)

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt},$$

где \mathcal{E}_i — электродвижущая сила индукции; Ψ — потокосцепление, или полный магнитный поток: $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i = N\Phi$, где N — полное число витков в контуре. Размерность потокосцепления (магнитного потока) $[\Psi] = [\Phi] = \text{Вб}$ (вебер); $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$.

- Разность потенциалов $\Delta \varphi$ на концах проводника длиной l , движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле B :

$$\Delta \varphi = Blv \sin \alpha,$$

где α — угол между векторами \vec{B} и \vec{v} .

- Электродвижущая сила индукции \mathcal{E}_i , возникающая в рамке, содержащей N витков площадью S каждый, при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B :

$$\mathcal{E}_i = BNS\omega \sin \omega t,$$

где ωt — мгновенное значение угла между вектором \vec{B} и вектором нормали \vec{n} к плоскости рамки.

- Заряд, протекающий в контуре при изменении магнитного потока:

$$\Delta Q = \frac{|\Delta \Psi|}{R},$$

где R — сопротивление контура.

- Правило Ленца: индукционный ток всегда имеет такое направление, при котором его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, пронизывающего контур.
- Потокосцепление катушки (поток через все витки)

$$\Psi = LI,$$

где L — ее индуктивность.

Размерность индуктивности $[L] = \text{Вб}/\text{А} = \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{Гн}$ (генри).

- Взаимная индукция. Пусть недалеко друг от друга расположены две катушки (два контура) с токами I_1 и I_2 . Катушка (контур) 1 создает магнитное поле и, как следствие, полный магнитный поток $\Psi_2 = L_{21}I_1$ через катушку (контур) 2. Аналогично создаваемый ток I_2 полный магнитный поток через катушку (контур) 1 равен $\Psi_1 = L_{12}I_2$. Изменения этих потоков приводят к возникновению соответствующих ЭДС. Коэффициенты L_{12} и L_{21} называются взаимной индуктивностью катушек (контуров). Доказывается, что в отсутствие ферромагнетиков они всегда равны: $L_{12} = L_{21}$.

- ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Эта формула справедлива, если контур не меняет свою геометрическую конфигурацию и индуктивность не зависит от тока.

- Индуктивность катушки (соленоида)

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где μ — магнитная проницаемость сердечника; n — число витков на единицу длины; $V = Sl$ — объем соленоида.

Во всех случаях при вычислении индуктивности соленоида с сердечником по приведенной формуле для определения магнитной проницаемости следует пользоваться графиком зависимости B от H (см. рис. 116 в приложении), а затем соотношением $\mu = B/(\mu_0 H)$.

- Ток замыкания в цепи, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L :

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

где \mathcal{E} — электродвижущая сила источника тока.

- Ток размыкания цепи

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

где $I_0 = \mathcal{E}/R$ — значение тока в цепи при $t = 0$.

- Энергия W магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре с индуктивностью L :

$$W = \frac{1}{2} LI^2,$$

где I — сила тока в контуре.

- Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{2} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0 \mu}.$$

III.5.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 75. По круговому контуру 1 радиусом R_1 течет ток I_1 . Другой контур 2 радиусом R_2 (причем $R_2 \ll R_1$) движется с постоянной скоростью \vec{v} вдоль общей оси контуров так, что плоскости контуров остаются все время параллельными друг другу (рис. 58). 1) На каком расстоянии от контура 1 электродвижущая сила индукции, возникающая в контуре 2, может иметь максимальное значение? 2) Найти взаимную индуктивность L_{21} контуров как функцию расстояния между ними.

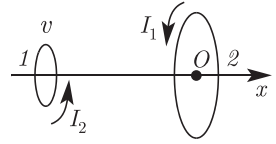


Рис. 58

Решение.

1) Магнитный поток, сцепленный с контуром 2, составляет $\Psi_2 = B_1 S_2 = \pi B_1 R_2^2 = \pi B_1 R_2^2$, где $S_2 = \pi R_2^2$ — площадь контура 2, а B_1 — индукция, создаваемая контуром 1 в точке, где находится контур 2. Соответственно возникающая в контуре 2 ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E} = -S_2 \frac{dB_1}{dt} = -S_2 \frac{dB_1}{dx} \frac{dx}{dt} = -S_2 v \frac{dB_1}{dx}.$$

Индукция магнитного поля, создаваемого кольцевым током I_1 на его оси, составляет

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \frac{1}{(1 + x^2/R_1^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 p_{m1}}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + R_1^2)^{3/2}},$$

где p_{m1} — магнитный момент контура 1. Поэтому наводимая в контуре 2 ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E} = 3S_2 v \frac{\mu_0 p_{m1}}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + R_1^2)^{5/2}}.$$

Знак x определяет знак ЭДС индукции. При отрицательных x контур 2 приближается к контуру 1 и ЭДС отрицательна, так что направление тока I_2 , возникающего в контуре 2, противоположно направлению тока, возникающего в контуре 1. При положительных x , когда контур 2 после прохождения сквозь контур 1 начинает от него удаляться, ЭДС индукции и ток I_2 меняют знак.

Приравниваем теперь нулю производную:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = 3S_2 v \frac{\mu_0 p_{m1}}{2\pi} \left(\frac{1}{(x^2 + R_1^2)^{5/2}} - \frac{5x^2}{(x^2 + R_1^2)^{7/2}} \right) = \frac{R_1^2 - 4x^2}{(x^2 + R_1^2)^{7/2}} = 0.$$

Таким образом, значение ЭДС максимально при $x = \pm R_1/2$. Зависимость \mathcal{E} от расстояния между витками показана на рис. 59, где расстояние выражено в единицах радиуса первого витка, а ЭДС — в единицах ее максимального значения при $x = R_1/2$.

2) Используя выписанные формулы, представляем магнитный поток через контур 2 в виде

$$\Psi_2 = \pi B_1 R_2^2 = \left(\frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \frac{1}{(1 + x^2/R_1^2)^{3/2}} \right) I_1.$$

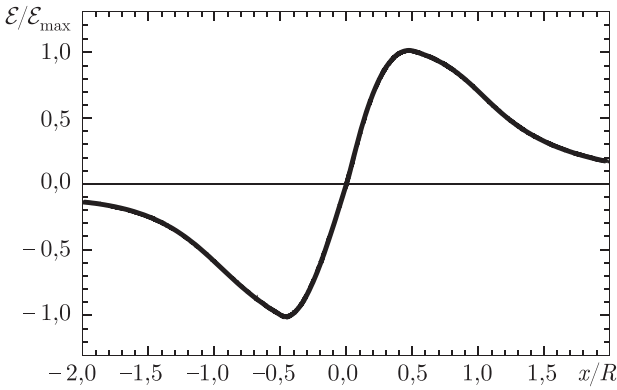


Рис. 59

Согласно определению выражение в скобках и есть взаимная индуктивность L_{21} . Она зависит от формы и размеров обоих контуров и их взаимного расположения.

ПРИМЕР 76. В предыдущем примере найти взаимную индуктивность L_{12} .

Решение. Наша цель — убедиться в данном случае, что $L_{12} = L_{21}$. По условию контур 2 имеет малые размеры. В предыдущем примере это учитывалось, когда мы применяли формулу для поля B_1 , создаваемого кольцеобразным током I_1 на оси контура 1. Сейчас мы учитываем это же условие, чтобы заменить поле B_2 контура 2 полем магнитного диполя с моментом $p_{m2} = I_2 \pi R_2^2$. Вспоминая сходство магнитного диполя с электрическим, мы вправе модифицировать формулу (III.2.40) следующим очевидным образом:

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{p}_m}{r^3} - 3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^5} \right). \quad (\text{III.5.102})$$

Рассчитаем магнитный поток через площадь, охватываемую контуром 1. Направим координатные оси, как показано на рис. 60. Радиус-вектор $\vec{r} = \{x, y\}$, проведенный в некую точку в плоскости контура 1, имеет длину $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Магнитный момент направлен вдоль оси x и имеет компоненты $\vec{p}_m = \{p_m, 0\}$, поэтому скалярное произведение $\vec{p}_m \cdot \vec{r} = p_m x$. Нас интересует лишь компонента поля \vec{B}_2 , ортогональная плоскости контура, т. е. компонента B_x . Имеем для нее из (III.5.102):

$$B_{2x} = -\frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right). \quad (\text{III.5.103})$$

Узкое кольцо шириной dy и радиусом y имеет площадь $dS = 2\pi y dy$, и магнитный поток через него $d\Phi_1 = B_{2x} 2\pi y dy$. Интегрируя

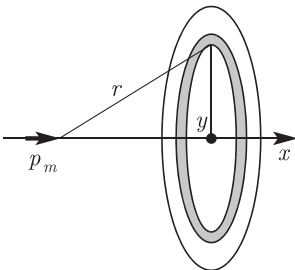


Рис. 60

по y от 0 до R_1 , получаем для магнитного потока

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int B_{2x} dS = -\frac{\mu_0 p_m}{2} \int_0^{R_1} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) y dy = \\ &= -\frac{\mu_0 p_m}{2} \left(-\frac{1}{(x^2 + R_1^2)^{1/2}} + \frac{1}{x} + \frac{x^2}{(x^2 + R_1^2)^{3/2}} - \frac{x^2}{x^3} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 p_m}{2R_1} \frac{1}{(1 + x^2/R_1^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{III.5.104}$$

Вспоминая, что в нашей задаче магнитный момент $p_m = I_2 \pi R_2^2$ и что $L_{12} = \Phi_1 / I_2$, из (III.5.104) находим:

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \frac{1}{(1 + x^2/R_1^2)^{3/2}}, \tag{III.5.105}$$

что совпадает с выражением для L_{21} , полученным в примере 75.

ПРИМЕР 77. В одной плоскости лежат бесконечно длинный прямолинейный проводник с током I и плоская прямоугольная рамка со сторонами a и b , содержащая N витков. Расстояние от прямолинейного проводника до ближайшей к нему стороны рамки равно c (рис. 61). Определить: 1) взаимную индуктивность проводника и рамки; 2) количество электричества, которое будет индуцировано в рамке, если рамку повернуть на 90° вокруг оси AB , делящей сторону a пополам, при условии, что полное сопротивление рамки равно R ; 3) работу, которую надо совершить, чтобы повернуть рамку вокруг оси AB на 180° , если и по проводнику, и по рамке текут токи I , причем ток в рамке направлен по часовой стрелке (в плоскости рисунка).

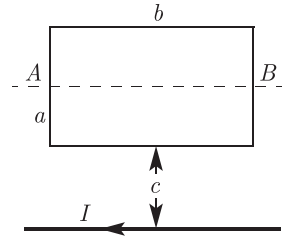


Рис. 61

Решение. 1) Для нахождения взаимной индуктивности определим поток, который сцеплен с рамкой, если по проводнику течет ток I .

Магнитная индукция на расстоянии x от проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

Поток через участок рамки высотой dx и шириной b равен

$$d\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} Ib \frac{dx}{x},$$

а поток через всю рамку равен

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} Ib \int_c^{c+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0}{2\pi} Ib \ln \frac{a+c}{c}.$$

При наличии N витков потокосцепление равно $\Psi = N\Phi$, так что взаимная индуктивность

$$L_{21} = \Psi/I = \frac{\mu_0}{2\pi} Nb \ln \frac{a+c}{c}.$$

2) Так как при повороте на 90° потокосцепление становится равным нулю, изменение потока при вращении равно $\Delta\Psi = (0 - \Psi) = -\Psi$. Количество электричества, которое будет при таком повороте индуцировано в рамке, определяется соотношением

$$\Delta Q = \frac{|\Delta\Psi|}{R} = \frac{\Psi}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi R} NIb \ln \frac{a+c}{c}.$$

3) После поворота рамки на 180° пронизывающий ее поток магнитной индукции равен по абсолютной величине начальному, но имеет противоположный знак, так как линии магнитной индукции входят в рамку с другой стороны. Поэтому изменение потока $\Delta\Psi = (-\Psi) - (\Psi) = -2\Psi$. Для такого поворота необходима работа

$$\Delta A = I\Delta\Psi = -\frac{\mu_0}{\pi} NI^2 b \ln \frac{a+c}{c}.$$

Знак «минус» показывает, что работа должна быть совершена против сил магнитного поля.

ПРИМЕР 78. Явление самоиндукции ярко проявляет себя в скачках напряжения, когда при размыкании цепи в рубильнике проскакивает искра. Предлагается проанализировать работу следующей схемы (рис. 62). В начальном состоянии (см. рис. 62, *а*) ключ K замкнут, и источник тока с ЭДС \mathcal{E} и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением замкнут на резистор с сопротивлением $R_0 = 500$ Ом (например, 100-ваттная лампочка) и подключенный параллельно ему соленоид с индуктивностью $L = 50$ мГн и сопротивлением $r_L = 0,4$ Ом.

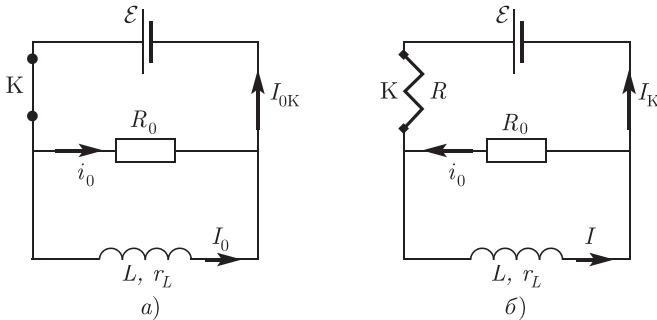


Рис. 62

Когда ключ K размыкают, в цепи возникает очень большое сопротивление воздушного промежутка, обозначенное на рис. 62, *б* как резистор R ($R \rightarrow \infty$). Найти: 1) токи в данной цепи; 2) максимальное значение ЭДС самоиндукции; 3) максимальное значение напряжения на ключе K .

Решение. Найдем сперва токи в начальный момент времени, когда ключ К замкнут:

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{\mathcal{E}}{R_0} = \frac{220}{500} = 0,44 \text{ А}; \\ I_0 &= \frac{\mathcal{E}}{r_L} = \frac{220}{0,4} = 550 \text{ А}; \\ I_{0K} &= i_0 + I_0 = 550,44 \text{ А}. \end{aligned} \tag{III.5.106}$$

Направления токов показаны на рис. 62, а, напряжения на резисторе R_0 и соленоиде равны ЭДС источника тока.

После размыкания ключа, когда в цепи появляется большое сопротивление R , токи будут меняться со временем и в цепи будет действовать ЭДС самоиндукции. Применяя правила Кирхгофа, получаем следующую систему уравнений для токов:

$$\mathcal{E} = I_K R - iR_0 = IR - i(R + R_0); \quad -L \frac{dI}{dt} = Ir_L + iR_0. \tag{III.5.107}$$

Первое уравнение написано для контура, состоящего из ЭДС и сопротивлений R , R_0 , второе — для контура, состоящего из сопротивления R_0 и соленоида. Из первого уравнения находим связь токов:

$$i = \frac{IR - \mathcal{E}}{R + R_0}. \tag{III.5.108}$$

Подставляя (III.5.108) во второе уравнение системы (III.5.107), получаем

$$-L \frac{dI}{dt} = I \frac{r_L(R + R_0) + RR_0}{R + R_0} - \mathcal{E} \frac{R_0}{R + R_0}. \tag{III.5.109}$$

Так как сопротивление R намного больше всех других сопротивлений системы, перейдем в этом уравнении к пределу $R \rightarrow \infty$:

$$-L \frac{dI}{dt} = I(r_L + R_0). \tag{III.5.110}$$

Решение этого уравнения известно:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r_L} e^{-\frac{r_L + R_0}{L}t}, \tag{III.5.111}$$

где использовалось начальное значение $I_0 = \mathcal{E}/r_L$ тока через соленоид.

Подставляя (III.5.111) в формулу (III.5.108) для тока i через резистор R и снова используя малость всех сопротивлений по сравнению с R , находим $i \approx I$. Следует обратить внимание на то, что после замыкания ток через сопротивление R_0 изменил направление на противоположное.

Для полного тока получаем

$$I_K = I - i = I - \frac{IR - \mathcal{E}}{R + R_0} = \frac{IR_0 + \mathcal{E}}{R + R_0} \approx I \frac{R_0}{R}. \tag{III.5.112}$$

Поскольку сопротивление R велико, полный ток бесконечно мал, но напряжение на ключе (резисторе R) получается конечным:

$$U_R = I_K R \approx IR_0 = \mathcal{E} \frac{R_0}{r_L} e^{-\frac{r_L + R_0}{L}t}. \tag{III.5.113}$$

Максимальное значение напряжения на ключе

$$U_{R,\max} = \mathcal{E} \frac{R_0}{r_L} = 220 \frac{500}{0,4} = 275 \text{ кВ.}$$

Во влажном воздухе пробой (искра) наступает при полях $E_{\text{пр}} \approx \approx 3 \text{ МВ/м}$, т. е. в нашем случае мы можем оценить длину возникающей на ключе искры: $l \approx U_{R,\max}/E_{\text{пр}} = 9 \text{ см!}$

ЭДС самоиндукции получаем дифференцированием тока I :

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} \frac{r_L + R_0}{r_L} e^{-\frac{r_L + R_0}{L} t}. \quad (\text{III.5.114})$$

Ее максимальное значение (при $t = 0$) практически равно максимальному напряжению на ключе:

$$\mathcal{E}_{i,\max} = \mathcal{E} \frac{r_L + R_0}{r_L} = 220 \frac{500 + 0,4}{0,4} \approx 275 \text{ кВ.} \quad (\text{III.5.115})$$

Итак, ток в соленоиде экспоненциально уменьшается от своего начального значения до нуля. Ток через резистор при замкнутом ключе имел гораздо меньшее значение, но сразу после размыкания его величина резко возросла (до $I_{\max} = \mathcal{E}/r_L = 220/0,4 = 550 \text{ А}$) и он сменил направление. Произошло это из-за возникновения большой ЭДС самоиндукции (гораздо большей, чем ЭДС источника тока). Конечно, такой скачок напряжения не может длиться долго: характерное время затухания токов и напряжений дается постоянной времени данной цепи — комбинацией сопротивлений и индуктивности, стоящей в экспонентах выражений (III.5.111), (III.5.112) и (III.5.114):

$$\tau = \frac{L}{r_L + R_0} \approx \frac{50 \cdot 10^{-3}}{500,4} = 100 \text{ мкс.} \quad (\text{III.5.116})$$

За это время амплитуды токов и напряжений уменьшатся в $e = = 2,72$ раза.

ПРИМЕР 79. Рассмотрим цепь на рис. 62, *a*, в которой при замыкании ключа ЭДС \mathcal{E} источника тока меняется во времени так, что полный ток $I_{0\text{К}}$ поддерживается постоянным. Найти законы изменения токов через резистор R_0 и соленоид. В какой момент времени эти токи совпадают? Для численной оценки взять те же значения сопротивлений и тока $I_{0\text{К}}$, что и в примере 78.

Решение. Главное в этой задаче — понять, чему равны начальные значения токов. До замыкания ключа все токи равны нулю. В первое мгновение после замыкания ключа весь ток идет через сопротивление R_0 , поскольку наличие индуктивности согласно правилу Ленца не позволяет цепи сразу реагировать на изменение тока. Поэтому начальные значения токов имеют вид

$$i(0) = \frac{\mathcal{E}(0)}{R_0}; \quad I(0) = 0. \quad (\text{III.5.117})$$

Далее записываем закон Ома для нижней половины контура:

$$-L \frac{dI}{dt} = Ir_L - iR_0. \quad (\text{III.5.118})$$

Знаки здесь выбраны в соответствии с направлениями токов на рис. 63, а. Связь токов определяется выражением $i = I_{0K} - I$, откуда

$$-L \frac{dI}{dt} = I(r_L + R_0) - I_{0K}R_0. \quad (\text{III.5.119})$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$I = I_{0K} \frac{R_0}{r_L + R_0} + Ce^{-\frac{r_L + R_0}{L}t}, \quad (\text{III.5.120})$$

где C — произвольная постоянная.

В момент времени $t = 0$ должно получиться значение $I(0) = 0$, так что находим окончательно ток в соленоиде:

$$I = I_{0K} \frac{R_0}{r_L + R_0} \left(1 - e^{-\frac{r_L + R_0}{L}t} \right). \quad (\text{III.5.121})$$

Учитывая связь токов, получаем также выражение для тока через резистор

$$i = I_{0K} \frac{r_L}{r_L + R_0} + I_{0K} \frac{R_0}{r_L + R_0} e^{-\frac{r_L + R_0}{L}t}. \quad (\text{III.5.122})$$

Таким образом, ток в резисторе экспоненциально затухает от значения $i(0) = I_{0K} = 550,44$ А до $i(\infty) = 550,44 \cdot 0,4 / (500 + 0,4) = 0,44$ А. Ток в соленоиде возрастает от нуля до значения

$$I(\infty) = 550,44 \cdot 500 / (500 + 0,4) = 550 \text{ А}.$$

Сумма токов, как и положено, остается постоянной.

Приравнивая токи $i = I$, находим искомый момент времени:

$$t = \frac{L}{R_0 + r_L} \ln \frac{2R_0}{R_0 - r_L} \approx \frac{50 \cdot 10^{-3}}{500,4} \ln 2 = 69 \text{ мкс}. \quad (\text{III.5.123})$$

ПРИМЕР 80. Выполняется ли закон сохранения энергии в примере 79?

Решение. Вопрос, конечно, риторический — ответ на него известен заранее. Но все-таки проведем необходимые выкладки.

Переменная ЭДС источника определяется из соотношения $\mathcal{E} = = iR_0 = (I_{0K} - I)R$. Полная мощность в цепи, выделяемая источником тока:

$$P_{\text{полн}} = \mathcal{E}I_{0K} = I_{0K}(I_{0K} - I)R_0. \quad (\text{III.5.124})$$

Делаем ряд последовательных преобразований. Прежде всего первый сомножитель можно представить в виде $I_{0K} = (I_{0K} - I) + I$, так что

$$P_{\text{полн}} = (I_{0K} - I)(I_{0K} - I)R_0 + I(I_{0K} - I)R_0 = i^2R_0 + I(I_{0K} - I)R_0. \quad (\text{III.5.125})$$

В первом слагаемом определяем мощность, выделяемую на резисторе:

$$P_R = i^2R_0. \quad (\text{III.5.126})$$

Записываем (III.5.125) в виде

$$P_{\text{полн}} = P_R + II_{0K}R_0 - I^2R_0 = P_R + II_{0K}R_0 + I^2r_L - I^2(r_L + R_0). \quad (\text{III.5.127})$$

В третьем слагаемом нетрудно узнать мощность, выделяемую на активном сопротивлении соленоида:

$$P_{r_L} = I^2r_L, \quad (\text{III.5.128})$$

так что

$$P_{\text{полн}} = P_R + P_{r_L} - I [I(r_L + R_0) - I_0 K R_0]. \quad (\text{III.5.129})$$

Выражение в квадратных скобках можно выразить через производную тока согласно уравнению (III.5.119):

$$P_{\text{полн}} = P_R + P_{r_L} + LI \frac{dI}{dt}. \quad (\text{III.5.130})$$

Последнее слагаемое не что иное, как скорость изменения энергии магнитного поля в соленоиде:

$$\frac{dW_L}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) = LI \frac{dI}{dt}; \quad (\text{III.5.131})$$

окончательно получаем соотношение

$$P_{\text{полн}} = P_R + P_{r_L} + \frac{dW_L}{dt}. \quad (\text{III.5.132})$$

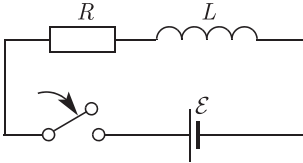


Рис. 63

ПРИМЕР 81. В момент времени $t = 0$ батарею с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В подключают последовательно с сопротивлением $R = 30$ Ом и индуктивностью $L = 220$ мГн (рис. 63). 1) Чему равна постоянная времени RL -цепочки? 2) За какое время сила тока достигнет половины максимального значения? 3) Чему в этот

момент будут равны мощность, потребляемая от батареи, и скорость накопления энергии магнитным полем катушки?

Решение. Нарастание тока в RL -цепочке после подсоединения батареи определяется уравнением закона Ома

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI,$$

решение которого при условии $I(0) = 0$ имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}), \quad (\text{III.5.133})$$

где $\tau = L/R$ называется постоянной времени RL -цепочки.

- 1) Подставляя числовые значения, находим $\tau = 220 \cdot 10^{-3}/30 = 7,3$ мс.
- 2) Максимальная сила тока $I_{\text{max}} = \mathcal{E}/R$. Уравнение $I = I_{\text{max}}/2$ приводит к равенству $\exp(-t/\tau) = 1/2$, откуда искомый момент времени $t_{1/2} = \tau \ln 2 = 5,1$ мс.
- 3) В этот момент сила тока $I_{1/2} = \mathcal{E}/(2R) = 0,2$ А, а мощность, отбираемая от батареи, $P_{\text{полн}}(t_{1/2}) = I_{1/2}^2 R = 2,4$ Вт.

Энергия, накопленная катушкой индуктивности в произвольный момент времени, равна $W = LI^2/2$. Отсюда скорость накопления энергии

$$\frac{dW}{dt} = LI \frac{dI}{dt} = LI \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{R}{L} e^{-t/\tau} = P_{\text{полн}} e^{-t/\tau}. \quad (\text{III.5.134})$$

В момент $T = t_{1/2}$ имеем $dW/dt = P_{\text{полн}}(t_{1/2})/2 = 1,2$ Вт. Видно, что только часть мощности, отбираемой от батареи, поступает в катушку индуктивности. Остальная часть, как мы уже знаем из предыдущего примера, рассеивается на сопротивлении R :

$$P_R = I^2 R = IR \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = P_{\text{полн}}(1 - e^{-t/\tau}).$$

В момент времени $t = t_{1/2}$ получаем $P_R = P_{\text{полн}}[t_{1/2}(1 - 1/2)] = 1,2$ Вт.

ПРИМЕР 82. По обмотке длинного соленоида со стальным сердечником течет ток $I = 2,5$ А, число витков на единицу длины соленоида $n = 10 \text{ см}^{-1}$. Найти объемную плотность энергии магнитного поля в сердечнике соленоида.

Решение. Объемная плотность энергии

$$w = \frac{BH}{2}. \tag{III.5.135}$$

Напряженность магнитного поля $H = nI = 2500$ А/м, и проблема состоит в том, чтобы найти соответствующее значение магнитной индукции (или магнитной проницаемости μ). Поскольку последняя принимает разные значения в зависимости от напряженности магнитного поля, надо использовать кривую для стали (см. рис. 116 приложения), откуда находим, что при $H = 2500$ А/м магнитная индукция $B = 1,35$ Тл. Таким образом, $w = 1,35 \cdot 2500/2 = 1,7$ кДж/м³.

ПРИМЕР 83. Оценить, при каких скоростях ионизируется (разрушится) атом водорода, влетающий в однородное магнитное поле.

Решение. Предусмотрим возможность движения атома с релятивистскими скоростями и аккуратно рассмотрим ситуацию в двух системах отсчета. На рис. 64, *a* показана лабораторная система отсчета K , в которой имеется однородное магнитное поле \vec{B} , направленное вдоль оси y . В этой системе вдоль оси x со скоростью \vec{v} движется атом, который грубо представим себе в виде диполя. В этой системе на заряды действует сила Лоренца, «растаскивающая» их в разные стороны, что может привести к разрушению атома.

Но мы уже достаточно опытны, чтобы подозревать, что какие-то из наших представлений могут оказаться неверными при рассмотрении движения атома с релятивистскими скоростями. Под подозрением, например, выражение для силы кулоновского взаимодействия ядра и электрона. Чтобы избежать сомнений и ошибок, перейдем в систему отсчета K' , где атом покоится. Все величины, к ней относящиеся, будут помечены штрихом.

Поля в этой системе отличаются от полей в лабораторной системе отсчета K , и, чтобы найти их, надо применить преобразования Лоренца для электромагнитных полей. В отличие от формул (20.38), приведенных в т. 1, гл. 20 учебника, выпишем здесь обратные преобразования, поменяв местами штрихованные и нештрихованные величины

и сменив знак у скорости v :

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x; & E'_y &= \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & E'_z &= \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ B'_x &= B_x; & B'_y &= \frac{B_y + \frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & B'_z &= \frac{B_z - \frac{v}{c^2}E_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.5.136})$$

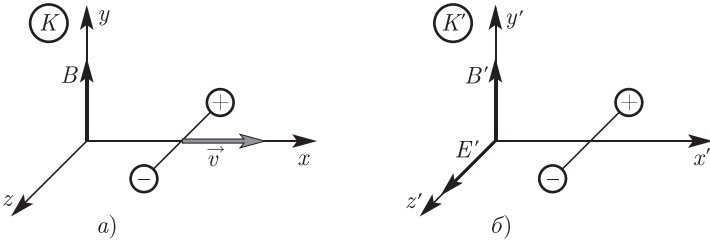


Рис. 64

Применим эти формулы к нашему случаю. В лабораторной системе отсчета K нет никакого электрического поля ($E_x = E_y = E_z = 0$), а магнитное поле направлено вдоль оси y , т. е. $B_x = B_z = 0$; $B_y = B$. Это значительно упрощает преобразования (III.5.136):

$$\begin{aligned} E'_x &= 0; & E'_y &= 0; & E'_z &= \frac{vB}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ B'_x &= 0; & B'_y &= \frac{B}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & B'_z &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.5.137})$$

Иными словами, магнитное поле в системе K' по-прежнему направлено вдоль оси y , но возросла его величина. Для нашей задачи оно интереса не представляет, так как в системе K' атом покоится и сила Лоренца равна нулю. Самое интересное — это появление электрического поля $E' = Bv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, направленного вдоль оси z (рис. 64, б). Это электрическое поле создает разность потенциалов на «концах» атома, радиус которого обозначен как a_B :

$$\Delta\varphi' = E' a_B = \frac{vBa_B}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{III.5.138})$$

В сущности, мы обобщили стандартную формулу для разности потенциалов на концах проводника, движущегося в магнитном поле. Формула (III.5.138) лишь релятивистским корнем отличается от стандартной, справедливой при $v \ll c$. А только что полученное выражение применимо для любых скоростей v , чего мы и добивались.

В той же системе отсчета K' , где наш атом покоится, известна потенциальная энергия кулоновского взаимодействия электрона с атомным ядром:

$$W' = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B}. \quad (\text{III.5.139})$$

Если произведение заряда электрона на разность потенциалов $e\Delta\varphi'$ превысит энергию кулоновского притяжения W' , то атом разрушится.

Таким образом, получаем оценку

$$\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_B^2 Bc}. \quad (\text{III.5.140})$$

Заметим еще раз: и разность потенциалов $\Delta\varphi'$, и потенциальная энергия кулоновского взаимодействия W' были вычислены в одной и той же системе отсчета K' , что необходимо всегда делать при сравнении величин.

Чтобы лучше понять полученный результат, умножим обе части неравенства (III.5.140) на eBc :

$$e \frac{vB}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B^2}. \quad (\text{III.5.141})$$

В левой части стоит произведение eE' , т. е. «растаскивающая» сила F'_E , действующая на электрон со стороны имеющегося в системе K' электрического поля, в правой части — обычная сила кулоновского притяжения F'_C , связывающая электрон в атоме и также вычисленная в системе K' , где атом покоится. Условие (III.5.140) перепишем в виде $F'_E \geq F'_C$, имеющем простой физический смысл: если «растаскивающая» сила превышает силу притяжения, то электрон отрывается от ядра и атом ионизируется.

Для численной оценки примем $B = 3$ Тл (характерное магнитное поле в ускорителях) и $a_B = 0,5 \cdot 10^{-10}$ м. Тогда

$$\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})(9 \cdot 10^9)}{(0,5 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10^8} = 640,$$

откуда $v \geq 0,9999999c$. Иными словами, для проявления подобного эффекта нужны либо ультрарелятивистские скорости, либо сверхсильные магнитные поля. К практической жизни это отношения не имеет.

III.5.B. Задачи для самостоятельной работы

Движение проводников в постоянном магнитном поле

Задача III.5.1. Поперек магнитного поля с индукцией 0,1 Тл движется со скоростью 1 м/с прямой провод длиной 0,3 м. Чему равно электрическое напряжение между концами провода?

Задача III.5.2. Реактивный самолет летит горизонтально со скоростью $v = 900$ км/ч. Определить разность потенциалов между концами его крыльев ($l = 50$ м), если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $B = 24$ мкТл.

Задача III.5.3. Индукция постоянного магнитного поля измеряется с помощью квадратной рамки со стороной $a = 10$ см, вращающейся с угловой скоростью $\omega = 50\text{с}^{-1}$. Ось вращения перпендикулярна направлению магнитного поля. Амплитуда электрического напряжения, снимаемого с рамки, равна $U = 0,2$ В. Найти индукцию магнитного поля.

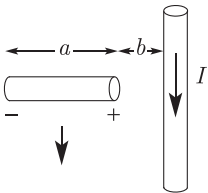


Рис. 65

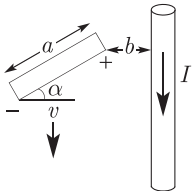


Рис. 66

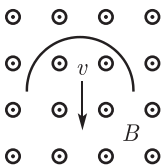


Рис. 67

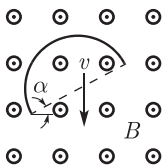


Рис. 68

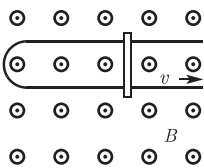


Рис. 69

Задача III.5.4. Короткий отрезок горизонтального провода длиной $a = 10$ см перемещается со скоростью $v = 0,5$ м/с вдоль длинного вертикального проводника, по которому течет ток $I = 20$ А. Ближайший конец отрезка находится на расстоянии $b = 5$ см от длинного проводника (рис. 65). Считая, что длина вертикального проводника намного больше суммы $a + b$, определить ЭДС, наводимую между концами движущегося отрезка, если: а) направление скорости v совпадает с направлением тока I ; б) направление скорости v противоположно направлению тока.

Задача III.5.5. Решить задачу III.5.4, если короткий проводник наклонен к току под углом $\alpha = 30^\circ$ (рис. 66). Все остальные данные оставить прежними.

Задача III.5.6. Из проволоки длиной $a = 10$ см сделано полукольцо, которое движется со скоростью $v = 0,5$ м/с в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл. Направление движения перпендикулярно магнитному полю и диаметру, соединяющему концы полукольца (рис. 67). Найти разность потенциалов на концах проводника.

Задача III.5.7. Из проволоки длиной $a = 10$ см сделано полукольцо, которое движется со скоростью $v = 0,5$ м/с в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл. Направление движения перпендикулярно магнитному полю и составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с диаметром, соединяющим концы полукольца (рис. 68). Найти разность потенциалов на концах проводника.

Задача III.5.8. Проводящий стержень перемещается вправо по U-образному проводнику, сопротивление которого пренебрежимо мало, в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,25$ мТл (рис. 69). Линии магнитной индукции поля ортогональны плоскости рисунка и направлены к нам. Стержень имеет длину $l = 34$ см, движется со скоростью $v = 2,3$ м/с и обладает сопротивлением $R = 25$ Ом. Рассчитать: 1) ЭДС индукции; 2) силу тока в контуре.

Задача III.5.9. Условия те же, что и в задаче III.5.8. Найти механическую мощность $P_m = Fv$, необходимую для перемещения проводящего стержня вправо (см. рис. 69), и мощность $P_e = I^2R$, выделяемую электрическим током на сопротивлении контура.

Задача III.5.10. Проводящий стержень массой $m = 0,1$ кг скользит без трения по двум длинным параллельным горизонтальным рельсам в магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл. Поле

перпендикулярно рельсам и стержню (т. е. ортогонально плоскости рис. 70 и направлено на нас), скорость стержня $v_0 = 1,5$ м/с. Расстояние между рельсами $l = 0,5$ м. В момент $t = 0$ рельсы соединяют перемычкой между точками a и b . 1) Найти зависимость скорости стержня от времени, если сопротивление стержня $R = 50$ Ом, а сопротивления рельсов и перемычки пренебрежимо малы. 2) В какой момент времени t_1 скорость стержня упадет в 9 раз по сравнению с начальным значением?

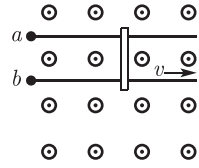


Рис. 70

Задача III.5.11. Рассмотрим следующий проект электромагнитной пушки. В системе, описанной в задаче III.5.10, в момент $t = 0$ к точкам a и b вместо перемычки подключают источник тока с ЭДС $\mathcal{E} = 25$ кВ. Пусть в этот момент стержень (снаряд) покоится, все остальные величины имеют те же значения, что и в задаче III.5.10. 1) Найти зависимость скорости стержня от времени. 2) Чему равно предельное значение v_{\max} скорости? 3) Как надо подключить источник, чтобы стержень (см. рис. 70) двигался направо?

Электромагнитная индукция

Задача III.5.12. Виток диаметром 10 см расположен перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией 0,35 Тл. Виток выводят из поля за 0,12 с. Чему равна средняя ЭДС индукции?

Задача III.5.13. Магнитный поток через катушку, содержащую два витка, изменяется от $-8,6$ до $+4,7$ Вб за 0,74 с. Чему равна индуцированная ЭДС?

Задача III.5.14. Сопротивление витка диаметром 20 см равно 8,5 Ом. За 100 мс виток выводится из магнитного поля с индукцией 0,4 Тл, направленной перпендикулярно плоскости витка. Вычислить количество энергии, выделяющейся в витке.

Задача III.5.15. Магнитный поток через катушку из $N = 35$ витков изменяется по закону $\Phi = (3,6t - 0,71t^3) \cdot 10^{-2}$ Вб, где t — время в секундах. 1) Найти временную зависимость ЭДС индукции \mathcal{E} . 2) Чему равна \mathcal{E} при $t_1 = 1$ с и $t_2 = 5$ с?

Задача III.5.16. Катушка диаметром $D = 25$ см состоит из $N = 20$ витков медной проволоки круглого сечения диаметром $d = 2$ мм. Однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости катушки, изменяется со скоростью $dB/dt = 6,55 \cdot 10^{-3}$ Тл/с. Определить: 1) силу I тока в катушке; 2) выделяемую в катушке мощность P . (*Указание:* для расчета сопротивления провода воспользоваться табл. П.9 приложения.)

Задача III.5.17. Радиус эластичного витка уменьшается с постоянной скоростью от значения $R_0 = 20$ см в момент времени $t = 0$ до значения $R_1 = 5,5$ см в момент $t = 5$ с. Виток находится в магнитном поле с индукцией $B = 0,42$ Тл, перпендикулярном плоскости витка. Определить ЭДС индукции в моменты $t_0 = 0$ и $t_1 = 2$ с.

Задача III.5.18. Радиус эластичного витка увеличивается с постоянной скоростью от значения $R_1 = 5,5$ см в момент времени $t = 0$ до значения $R_0 = 20$ см в момент $t = 5$ с. Виток находится в магнитном поле с индукцией $B = 0,42$ Тл, перпендикулярном плоскости витка. Определить ЭДС индукции в моменты $t_0 = 0$ и $t_1 = 2$ с.

Задача III.5.19. Рамка в примере 77 имеет размеры $a = 5$ см, $b = 7$ см и $N = 100$ витков. Ее расстояние до проводника с током $I = 20$ А равно $c = 9$ см. Рамку поворачивают на 180° вокруг оси AB (см. рис. 61). Какой заряд протечет по рамке, если ее сопротивление равно $R = 2$ Ом?

Задача III.5.20. Рамка в примере 77 имеет размеры $a = 5$ см, $b = 7$ см и $N = 100$ витков. Ее расстояние до проводника с током $I = 20$ А равно $c = 9$ см. Рамку поворачивают на 180° вокруг стороны длиной b , ближайшей к проводнику (см. рис. 61). Какой заряд протечет по рамке, если ее сопротивление равно $R = 2$ Ом?

Задача III.5.21. Рамка в примере 77 имеет размеры $a = 5$ см, $b = 7$ см и $N = 100$ витков. Ее расстояние до проводника с током $I = 20$ А равно $c = 9$ см. Рамку поворачивают на 180° вокруг стороны длиной b , наиболее удаленной от проводника (см. рис. 61). Какой заряд протечет по рамке, если ее сопротивление равно $R = 2$ Ом?

Задача III.5.22. Рамка в примере 77 имеет размеры $a = 5$ см, $b = 7$ см и $N = 100$ витков. Ее расстояние до проводника с током $I = 20$ А равно $c = 9$ см. Рамку складывают вдвое, сгибая по линии, перпендикулярной оси AB и проходящей через середину стороны b (см. рис. 61). Какой заряд протечет по рамке, если ее сопротивление равно $R = 2$ Ом?

Самоиндукция и взаимная индукция

Задача III.5.23. Чему равна ЭДС индукции, если в катушке с индуктивностью 130 мГн сила тока равномерно возрастает от 20 до 28 мА за 140 мс?

Задача III.5.24. Найти индуктивность катушки, ЭДС самоиндукции которой равна 6,5 В при равномерном изменении силы тока от -12 до 23 мА за 11 мс.

Задача III.5.25. В соленоиде индуктивностью 2 Гн при равномерном нарастании тока от начального значения $I_0 = 0$ возбуждается ЭДС индукции 5 В. Чему равен ток в соленоиде в момент времени $t = 3$ с?

Задача III.5.26. На катушке индуктивностью 0,32 Гн возбуждается ЭДС самоиндукции 35 В при увеличении силы тока за 2,0 мс от 0,3 А до некоторой величины I . Чему равно значение I ?

Задача III.5.27. Ток в соленоиде индуктивностью 130 мГн изменяется по синусоидальному закону $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$, причем $I_0 = 10$ А, $\nu = 50\text{с}^{-1}$. Чему равна ЭДС индукции в момент, когда ток: 1) достигает своего максимального значения; 2) равен нулю?

Задача III.5.28. ЭДС индукции в соленоиде изменяется по синусоидальному закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(2\pi\nu t)$, $\mathcal{E}_0 = 10$ В, $\nu = 50\text{с}^{-1}$. Найти индуктивность соленоида, если амплитудное значение тока $I_{\max} = 2$ А.

Задача III.5.29. Разность потенциалов на клеммах катушки равна 15,5 В, когда сила тока в катушке составляет 360 мА и уменьшается со скоростью 240 мА/с. Спустя некоторое время разность потенциалов составляет 6,2 В, а сила тока равна 300 мА и увеличивается со скоростью 180 мА/с. Определить индуктивность и активное сопротивление катушки.

Задача III.5.30. Провод из плотной обмотки соленоида с индуктивностью L_1 используют в плотной обмотке другого соленоида на сердечнике из того же материала, но вдвое меньшего диаметра. Во сколько раз отличается индуктивность L_2 нового соленоида от L_1 ?

Задача III.5.31. Провод из плотной обмотки соленоида с индуктивностью L_1 заменяют на другой — той же длины, но вдвое меньшего диаметра. Во сколько раз отличается индуктивность L_2 нового соленоида от L_1 ?

Задача III.5.32. Провод из плотной обмотки соленоида с индуктивностью L_1 заменяют на другой — вдвое короче и вдвое меньшего диаметра. Во сколько раз отличается индуктивность L_2 нового соленоида от L_1 ?

Задача III.5.33. Провод из плотной обмотки соленоида с индуктивностью L_1 заменяют на другой — сделанный из того же количества металла, но вдвое длиннее. Во сколько раз отличается индуктивность L_2 нового соленоида от L_1 ?

Задача III.5.34. На картонный цилиндр длиной $l = 44$ см и радиусом $r = 1,2$ см плотно намотан в один слой провод диаметром $d = 0,2$ мм. 1) Вычислить индуктивность получившегося соленоида. 2) Какой станет индуктивность этого же соленоида при токе в нем $I = 10$ А, если в него вставить железный сердечник?

Задача III.5.35. На стальной сердечник длиной $l = 44$ см и радиусом $r = 1,2$ см плотно намотан в один слой провод диаметром $d = 0,2$ мм. Какой будет индуктивность этого соленоида при токах в нем: 1) $I = 100$ А; 2) $I = 0,1$ А?

Задача III.5.36. Вывести формулу $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 r^2}{2R}$ для индуктивности тороидальной катушки (рис. 71) средним радиусом R , содержащей N витков радиусом r ($r \ll R$). Рассчитать индуктивность L тороида, если диаметр витков равен 2 см, а диаметр всего кольца равен 50 см. Обмотка содержит $N = 300$ витков, сердечник сделан из немагнитного материала.

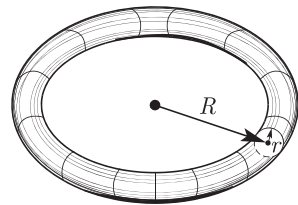


Рис. 71

Задача III.5.37. Вывести формулу $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 l h}{\pi D}$ для индуктивности прямоугольной катушки (рис. 72) средним диаметром D , содержащей N прямоугольных витков шириной l и высотой h ($h, l \ll R$).

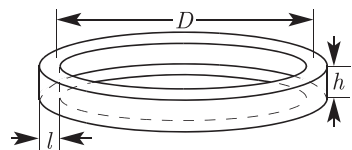


Рис. 72

Рассчитать индуктивность L прямоугольного тороида, если размеры кольца $l = h = 0,5$ см, $D = 10$ см, а обмотка содержит $N = 500$ витков. Сердечник сделан из немагнитного материала.

Задача III.5.38. Объем соленоида 10 л, его индуктивность 0,01 Гн. На соленоид подали напряжение 10 В. Через какое время после подачи напряжения индукция магнитного поля в соленоиде станет равной 0,1 Тл? Соленоид намотан на немагнитный сердечник, сопротивление обмотки пренебрежимо мало.

Задача III.5.39. На катушку индуктивностью $L = 50$ мГн и сопротивлением 180 Ом внезапно подается напряжение $U = 45$ В. Чему равна скорость возрастания тока через время $t = 1,2$ мс?

Задача III.5.40. Две одинаковые катушки индуктивностью L и сопротивлением r подключены к источнику тока последовательно, причем катушки находятся далеко друг от друга. Чему равны сопротивление $r_{\text{посл}}$ и индуктивность $L_{\text{посл}}$ катушки, эквивалентной этой цепи?

Задача III.5.41. Две одинаковые катушки индуктивностью L и сопротивлением r подключены к источнику тока параллельно, причем катушки находятся далеко друг от друга. Чему равны сопротивление $r_{\text{пар}}$ и индуктивность $L_{\text{пар}}$ катушки, эквивалентной этой цепи?

Задача III.5.42. Линия электропередачи состоит из двух прямолинейных проводов, по которым текут в противоположных направлениях одинаковые токи I . Радиусы проводов r тоже одинаковы, расстояние между центрами проводов равно d . Эту систему можно рассматривать как виток с током, предполагая, что токи в проводах замыкаются в генераторе электростанции и в нагрузке потребителя электроэнергии, находящихся на расстоянии l друг от друга ($l \gg d \gg r$). Показать, что индуктивность двухпроводной линии определяется формулой $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r}$. 1) Рассчитать индуктивность линии длиной $l = 5$ км, медные провода которой имеют радиус $r = 2$ мм и находятся на расстоянии $d = 50$ см друг от друга. 2) Чему равна постоянная времени этой линии?

Задача III.5.43. Внутри длинного соленоида радиусом $R = 10$ см и числом витков на единицу длины $n = 2000$ м⁻¹ находится катушка радиусом $r = 2$ см и числом витков $N = 300$, причем их оси параллельны. 1) Найти взаимную индуктивность L_{21} катушки и соленоида. 2) Что произойдет, если радиус катушки увеличить в 1,5 раза? 3) Что произойдет, если в 1,5 раза увеличить радиус соленоида?

Задача III.5.44. Внутри катушки радиусом $r = 20$ см вставлен длинный соленоид радиусом $R = 10$ см, так что катушка и соленоид соосны. Число витков в катушке равно $N = 300$, плотность витков в соленоиде $n = 2000$ м⁻¹. 1) Чему равна взаимная индуктивность L_{21} ? 2) Что произойдет, если радиус катушки увеличить в 1,5 раза? 3) Что произойдет, если в 1,5 раза увеличить радиус соленоида?

Задача III.5.45. Две одинаковые катушки индуктивностью $L_0 = 70$ мГн подключены к источнику тока последовательно, причем катушки расположены так, что их взаимная индуктивность равна $L_{21} = 15$ мГн. 1) Чему равна индуктивность L системы, если катушки соединены так, что обмотки навиты на них в одну сторону? 2) Какой станет индуктивность, если на второй катушке поменять местами провода, подходящие к клеммам A' и B' (рис. 73)?

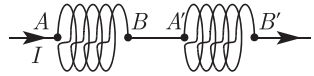


Рис. 73

Задача III.5.46. Две одинаковые катушки индуктивностью $L_0 = 70$ мГн подключены к источнику тока параллельно, причем катушки расположены так, что их взаимная индуктивность равна $L_{21} = 15$ мГн. 1) Чему равна индуктивность L системы, если катушки соединены так, что обмотки навиты на них в одну сторону? 2) Какой станет индуктивность, если на второй катушке поменять местами провода, подходящие к клеммам A' и B' (рис. 74)?

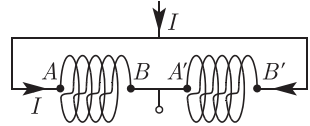


Рис. 74

Энергия магнитного поля. Уравнения Максвелла

Задача III.5.47. Какая энергия запасена в катушке с индуктивностью 400 мГн в момент, когда сила тока в ней составляет 2 А?

Задача III.5.48. Сильные магнитные и электрические поля, достижимые в лабораторных условиях, обычно составляют $B = 2$ Тл и $E = 10$ кВ/м. 1) Определить плотности энергии таких полей и сравнить полученные значения. 2) При какой напряженности электрического поля плотность энергии будет такой же, как у магнитного поля с индукцией 2,0 Тл?

Задача III.5.49. Чему равна плотность энергии в центре витка радиусом 8 см, по которому течет ток 30 А?

Задача III.5.50. Чему равна плотность энергии магнитного поля длинного прямолинейного проводника круглого сечения радиусом $r = 2$ мм с током $I = 20$ А: 1) вблизи поверхности провода; 2) на расстоянии 1 м от него?

Задача III.5.51. Дана RL -цепочка с постоянной времени $\tau = 2,0$ мс. Цепочка подключается к источнику тока. За какое время энергия магнитного поля, накопленная катушкой L , достигнет: 1) половины максимального значения; 2) 99% максимального значения?

Задача III.5.52. На железное кольцо намотано $N = 200$ витков провода. Определить энергию магнитного поля, если при токе $I = 2,5$ А магнитный поток в железе равен $\Phi = 0,5$ мВб.

Задача III.5.53. Обмотка соленоида плотно намотана из провода диаметром $d = 0,4$ мм, длина соленоида $l = 1$ м, площадь его поперечного сечения $S = 4$ см². Найти энергию магнитного поля в стальном сердечнике, если в обмотке течет ток $I = 0,6$ А.

Задача III.5.54. Индукция магнитного поля соленоида со стальным сердечником возросла от $B_1 = 0,5$ Тл до $B_2 = 1$ Тл. Во сколько раз изменилась объемная плотность энергии магнитного поля?

Задача III.5.55. Напряженность магнитного поля соленоида со стальным сердечником возросла от $H_1 = 200$ А/м до $H_2 = 800$ А/м. Во сколько раз изменилась объемная плотность энергии магнитного поля?

Задача III.5.56. Рассчитать силу тока смещения I_d между квадратными пластинами воздушного конденсатора со стороной 1 см, если напряженность электрического поля изменяется со скоростью $3,0 \cdot 10^9$ В/(м·с).

Задача III.5.57. Ток смещения впервые был непосредственно измерен более чем через 60 лет после появления уравнений Максвелла. В эксперименте использовался конденсатор емкостью $C = 100$ пФ с воздушным промежутком между пластинами в форме дисков радиусом $R = 40$ см. На конденсатор подавалось напряжение по синусоидальному закону $U = U_{\max} \sin(2\pi\nu t)$, $U_{\max} = 174$ кВ, $\nu = 50$ с⁻¹. Какой была максимальная величина тока смещения между пластинами конденсатора в этом эксперименте?

Задача III.5.58. В задаче III.5.57 найти максимальное значение магнитного поля внутри конденсатора: 1) на его оси; 2) на расстоянии $r = 20$ см от оси.

Задача III.5.59. Тонкое кольцо радиусом $R = 20$ см, несущее равномерно распределенный заряд $Q = 45$ мкКл, движется с постоянной скоростью $v = 15$ м/с. Плоскость кольца все время остается ортогональной направлению движения. В какой точке на оси кольца плотность тока смещения будет наибольшей? Вычислить максимальное значение плотности тока.

Задача III.5.60. Тонкое кольцо радиусом $R = 20$ см, несущее равномерно распределенный заряд $Q = 45$ мкКл, движется с постоянной скоростью $v = 15$ м/с. Плоскость кольца все время остается ортогональной направлению движения. В какой точке на оси кольца плотность тока смещения равна нулю?

Часть IV

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

IV.1. Колебательное движение

IV.1.A. Основные формулы

- Дифференциальное уравнение гармонических свободных колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где ω_0 — собственная круговая частота колебаний, определяемая параметрами колеблющейся системы;

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ для материальной точки массой m , колеблющейся под действием квазиупругой силы, характеризующейся коэффициентом жесткости k ;

$\omega_0 = \sqrt{g/l}$ для математического маятника, имеющего длину l ;

$\omega_0 = \sqrt{g/L} = \sqrt{mgI/J}$ для физического маятника, где l — расстояние от центра масс маятника до оси колебаний; $L = \frac{J}{ml}$ — приведенная длина физического маятника; J — момент инерции колеблющегося тела относительно оси колебаний;

$\omega_0 = \sqrt{k/J}$ для крутильных колебаний тела, подвешенного на упругой нити, где J — момент инерции тела относительно оси, совпадающей с упругой нитью, а жесткость нити k равна отношению упругого момента, возникающего при закручивании нити, к углу, на который нить закручивается;

$\omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$ для электромагнитных колебаний в контуре с емкостью C и индуктивностью L .

- Общее решение уравнения гармонических колебаний

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x — смещение колеблющейся точки от положения равновесия; A — амплитуда колебаний; ω — их круговая (циклическая) частота; t — время; φ_0 — начальная фаза колебаний; $\varphi = \omega t + \varphi_0$ — фаза колебаний в момент t .

- Круговая частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T,$$

где ν и T — частота и период колебаний соответственно.

Используя приведенные выше выражения для собственных круговых частот колебаний различных систем, можно найти соответствую-

ющие периоды колебаний. В частности, период колебаний в электромагнитном контуре определяется формулой Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

- Скорость точки, совершающей гармонические колебания:

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

- Ускорение точки при гармоническом колебании

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

- Амплитуда A результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих вдоль одной прямой, определяется по формуле

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}),$$

где A_1, A_2 — амплитуды составляющих колебаний; $\varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}$ — их начальные фазы.

- Начальная фаза φ_0 результирующего колебания может быть найдена из формулы

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{0,1} + A_2 \sin \varphi_{0,2}}{A_1 \cos \varphi_{0,1} + A_2 \cos \varphi_{0,2}}.$$

- Частота биений, возникающих при сложении двух колебаний, происходящих вдоль одной прямой с различными, но близкими по значению частотами ν_1 и ν_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos(2\pi\nu_1 t); & x_2 &= A \cos(2\pi\nu_2 t); \\ x &= x_1 + x_2 = 2A \cos \pi(\nu_1 - \nu_2)t \cdot \cos \pi(\nu_1 + \nu_2)t. \end{aligned}$$

- Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты с амплитудами A_1 и A_2 и начальными фазами $\varphi_{0,1}$ и $\varphi_{0,2}$:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}) = \sin^2(\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}).$$

Если начальные фазы $\varphi_{0,1}$ и $\varphi_{0,2}$ составляющих колебаний одинаковы, то уравнение траектории принимает вид

$$y = \frac{A_2}{A_1} x;$$

если же начальные фазы различаются на π , то уравнение траектории имеет вид

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x;$$

иными словами, в этих случаях точка движется по прямой. В остальных случаях движение происходит по эллипсу. При разности фаз $\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1} = \pm\pi/2$ оси этого эллипса расположены вдоль осей Ox и Oy , а уравнение траектории принимает форму

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

- Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$W = \frac{1}{2} mA^2\omega^2.$$

- Полная энергия электромагнитных колебаний в контуре

$$W = \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{Q_{\max}^2}{2C},$$

где I_{\max} — амплитудное значение тока через индуктивность; Q_{\max} — амплитудное значение заряда на конденсаторе.

- Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0,$$

где β — коэффициент затухания; ω_0 — собственная круговая частота колебаний.

Для пружинного маятника, помещенного в вязкую среду, где сила сопротивления пропорциональна скорости ($F_{\text{сопр}} = -r\dot{x}$), коэффициент затухания $\beta = \frac{r}{2m}$. Для электромагнитного контура $\beta = \frac{R}{2L}$, где R — активное сопротивление.

- Общее решение дифференциального уравнения затухающих колебаний

$$x = A_0e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

При $\beta \ll \omega_0$ движение системы можно считать почти гармоническим колебанием с круговой частотой ω и амплитудой $A(t)$, убывающей со временем по закону $A(t) = A_0e^{-\beta t}$ (A_0 — амплитуда колебаний в момент $t = 0$).

- Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

- Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T,$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период T .

Обратная величина $N_e = 1/\lambda$ есть число колебаний, совершаемых в течение времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

- Добротность

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e,$$

где $\lambda = \beta T$ — логарифмический декремент затухания.

При слабом затухании ($\beta \ll \omega_0$) добротность определяется приближенной формулой

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

- Для электромагнитного контура при $\beta \ll \omega_0$ добротность выражается в виде

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- Убыль энергии колеблющейся системы за один период составляет $\Delta E = -(2\beta T)E$, так что при слабом затухании добротность пропорциональна отношению полной энергии, запасенной в колебательной системе в данный момент времени, к убыли энергии за один период колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|}.$$

- Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \omega t,$$

где a_0 , ω — амплитудное значение и круговая частота внешнего периодического воздействия (силы).

- Частное решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний представляет собой гармоническое колебание с частотой вынуждающей силы:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

- Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

- Фаза вынужденных колебаний:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

- Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}; \quad A_{\text{рез}} = \frac{a_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

- Отношение резонансной амплитуды к статической амплитуде ($\omega = 0$) при слабом затухании равно добротности колебательной системы:

$$\frac{A_{\text{рез}}}{A(0)} = \frac{\pi}{\beta T} = Q,$$

т. е. добротность Q характеризует резонансные свойства системы.

IV.1.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 84. На двух пружинах подвешены грузы массами m_1 и m_2 , причем $m_1 > m_2$. При подвешивании грузов к разным свободным пружинам последние получили одинаковые удлинения l . У какого груза больше период колебаний и какой из грузов при одинаковых

амплитудах обладает большей энергией? Массой пружин можно пренебречь.

Решение. Период гармонических колебаний, происходящих под действием квазиупругой силы $F_{\text{упр}} = -kx$, определяется соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где k — коэффициент упругости, который определяется силой, вызывающей удлинение пружины на единичную длину.

В данном случае удлинение происходит под действием силы тяжести грузов и, следовательно,

$$k_1 = \frac{m_1 g}{l} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{m_2 g}{l}.$$

Подставляя k_1 и k_2 в выражение для периода, видим, что массы сокращаются и в обоих случаях периоды одинаковы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Энергию колебаний груза с номером i ($i = 1, 2$) можно записать в виде

$$W_i = A^2 \frac{m_i \omega_0^2}{2} = A^2 \frac{k_i}{2} = A^2 \frac{m_i g}{2l}.$$

Так как периоды, а следовательно, и частоты равны, то по условию задачи равны и амплитуды, и большей энергией обладает груз с большей массой m_1 .

Этот же результат (с точностью до постоянного коэффициента) можно получить, воспользовавшись методом анализа размерностей (см. учебник, т. 1, п. 1.3). В условии задачи фигурируют три величины: масса m , удлинение l и время (искомый период T). Кроме того, поскольку к пружинам приложены силы, равные весу грузов, следует ожидать, что в решение должно войти ускорение свободного падения g . Стало быть, можно записать:

$$T \sim m^a l^b g^c,$$

где a , b , c — степени, в которые следует возвести соответствующие величины.

Учитывая, что размерности правой и левой частей должны быть одинаковыми ($T = M^a L^b (LT^{-2})^c$), получаем для этих степеней систему уравнений

$$a = 0; \quad b + c = 0; \quad 1 = -2c.$$

Следовательно, $a = 0$; $b = 1/2$; $c = -1/2$, т. е. $T = C\sqrt{l/g}$, где C — неопределяемый из теории размерностей безразмерный коэффициент, равный, как было получено выше, 2π .

В проведенном анализе размерностей был учтен известный факт, что частота (период) гармонических колебаний не зависит от амплитуды. Если же решить задачу тем же способом для энергии, то

необходимо принять во внимание, что последняя зависит от квадрата амплитуды колебаний:

$$W \sim A^2 m^a l^b g^c.$$

Амплитуда имеет размерность длины, так что

$$ML^2T^{-2} = L^2 M^a L^b (LT^{-2})^c.$$

В результате получим систему уравнений

$$1 = a; \quad 2 = 2 + b + c; \quad -2 = -2c,$$

решение которой имеет вид $a = 1; b = -1; c = 1$, т. е. $W = CA^2 mg/l$. Сравнение с точным решением дает в этом случае $C = 1/2$.

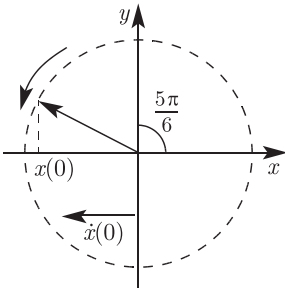


Рис. 75

ПРИМЕР 85. Точка совершает колебания по закону $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 2$ см. Определить начальную фазу φ_0 , если $x(0) = -\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) < 0$. Построить векторную диаграмму для момента $t = 0$.

Решение. Из закона движения точки выражаем ее смещение в момент $t = 0$ через начальную фазу: $x(0) = A \cos \varphi_0$, откуда находим $\cos \varphi_0 = x(0)/A = -\sqrt{3}/2$. Этому значению косинуса соответствуют два угла: $\varphi_0 = \pi \pm \pi/6$.

Чтобы сделать выбор между этими значениями, найдем $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

откуда $\dot{x}(0) = -A\omega \sin \varphi_0$.

Начальная скорость отрицательна при положительном значении синуса, что бывает при углах $0 < \varphi < \pi$. Поэтому решением задачи является угол $\varphi_0 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Векторная диаграмма для $t = 0$ изображена на рис. 75.

ПРИМЕР 86. Материальная точка массой $m = 5$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0,5$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 3$ см. Определить: 1) скорость v точки в момент времени t , когда смещение $x = 1,5$ см; 2) максимальную силу F_{\max} , действующую на точку; 3) полную энергию E колеблющейся точки.

Решение.

1) Закон движения точки имеет вид

$$x = A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0), \tag{IV.1.1}$$

а закон изменения скорости точки определяется дифференцированием (IV.1.1):

$$v = \dot{x} = -2\pi\nu A \sin(2\pi\nu t + \varphi_0). \tag{IV.1.2}$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из формул (IV.1.1) и (IV.1.2) время. Для этого возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2 , второе на $A^2(2\pi\nu)^2$ и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2(2\pi\nu)^2} = 1. \tag{IV.1.3}$$

Решив последнее уравнение относительно v , найдем

$$v(t) = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}. \quad (\text{IV.1.4})$$

Подставляя числовые значения, получаем $v(t_0) = \pm 8,2$ см/с. Знак «плюс» соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси x , знак «минус» — когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси x .

2) Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона $F = ma$, где выражение для ускорения получается дифференцированием (IV.1.2):

$$a = \dot{v} = -A(2\pi\nu)^2 \cos(2\pi\nu t + \varphi_0). \quad (\text{IV.1.5})$$

Отсюда получаем закон изменения силы

$$F = -mA(2\pi\nu)^2 \cos(2\pi\nu t + \varphi_0), \quad (\text{IV.1.6})$$

так что максимальное значение силы

$$F_{\max} = mA(2\pi\nu)^2. \quad (\text{IV.1.7})$$

Подставив сюда числовые значения величин ν , m , A , найдем $F_{\max} = 1,5$ мН.

3) Полная энергия колеблющейся точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени.

Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент потенциальная энергия равна нулю. Поэтому полная энергия E колеблющейся точки равна максимальной кинетической энергии $T_{\max} = mv_{\max}^2/2$. Максимальная скорость согласно формуле (IV.1.2) равна $v_{\max} = 2\pi\nu A$. Тогда

$$E = 2\pi^2\nu^2 mA^2 = 22 \text{ мкДж}. \quad (\text{IV.1.8})$$

ПРИМЕР 87. Два математических маятника, имеющие одинаковые массы, но разную длину, колеблются с одинаковыми угловыми амплитудами α (рис. 76). У какого из маятников энергия колебаний больше?

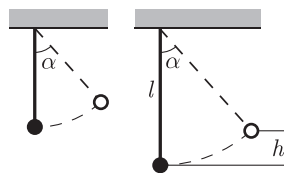


Рис. 76

Решение. Полная энергия колебаний материальной точки равна максимальной кинетической или максимальной потенциальной энергии. В данном случае удобно сравнивать максимальные потенциальные энергии, определяемые максимальным отклонением. При наибольшем отклонении от положения равновесия грузы подняты на высоту

$$h = l(1 - \cos \alpha).$$

Так как для обоих маятников угловые амплитуды одинаковы, то на большую высоту поднимается маятник большей длины. Следовательно, он и обладает большей энергией колебаний.

ПРИМЕР 88. Складываются два колебания одинакового направления, выражаемые уравнениями $x_1 = A_1 \cos \omega(t + \tau_1)$ и $x_2 = A_2 \cos \omega(t + \tau_2)$, где $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\tau_1 = 1,6$ с, $\tau_2 = 1/2$ с, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$. Найти амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания.

Решение. Преобразуем заданные колебания к стандартному виду

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi_i), \quad i = 1, 2,$$

где начальные фазы $\varphi_i = \omega \tau_i$, поэтому $\varphi_1 = \pi/6$ и $\varphi_2 = \pi/2$.

Для определения амплитуды A результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой для начального момента времени (рис. 77). С течением времени все три вектора A_1 , A_2 , A вращаются как одно против часовой стрелки с угловой скоростью ω . Согласно теореме косинусов получаем

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (\text{IV.1.9})$$

Подставляя числовые значения, находим $A = \sqrt{7} = 2,65$ см.

Формула для тангенса начальной фазы результирующего колебания

$$\text{tg } \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

также следует из рис. 77. Подставив в нее числовые значения A_1 , A_2 , φ_1 , φ_2 , получим

$$\text{tg } \varphi = \frac{\sin \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1/2 + 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}},$$

откуда $\varphi = \text{arctg}(5/\sqrt{3}) = 0,394\pi$ рад = $70,9^\circ$. Поскольку складываются колебания одинаковой частоты, результирующее колебание будет иметь ту же частоту: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$.

ПРИМЕР 89. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых

$$x = A_1 \cos(\omega t); \quad y = A_2 \cos \frac{\omega t}{2}, \quad (\text{IV.1.10})$$

где $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$. Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.

Решение. Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время t из заданных уравнений (IV.1.10). Пользуясь тригонометрической формулой $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ при $\alpha = \omega t/2$, получаем уравнение траектории

$$x = \frac{2A_1}{A_2^2} y^2 - A_1. \quad (\text{IV.1.11})$$

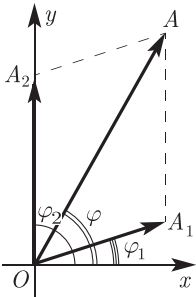


Рис. 77

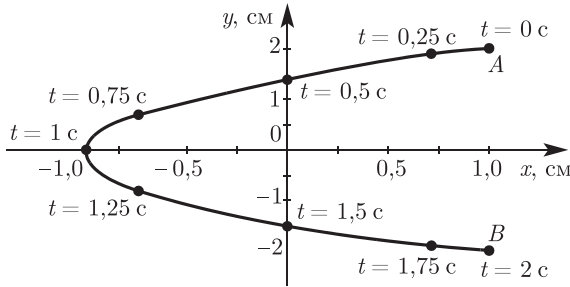


Рис. 78

Данное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью Ox . Из (IV.1.10) и (IV.1.11) следует, что смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от $-A_1$ до $+A_1$ по оси Ox и от $-A_2$ до $+A_2$ по оси Oy . График траектории показан на рис. 78. Период результирующего колебания $T = 2\pi/(\omega/2) = 4$ с, на графике показаны положения колеблющейся точки в моменты времени, кратные $1/16$ периода.

Точка начинает колебание в момент времени $t = 0$, для которого находим из (IV.1.10) $x = 1$ см; $y = 2$ см (положение A). Через четверть периода ($t = 1$ с) координаты точки равны $x = -1$; $y = 0$ (вершина параболы). Через половину периода ($t = 2$ с) точка находится в положении B ($x = 1$; $y = -2$), после чего начинается движение в обратном направлении вдоль той же параболы и в момент $t = 4$ с точка снова оказывается в начальном положении A .

ПРИМЕР 90. Физический маятник представляет собой стержень длиной $l = 50$ см и массой $m = 270$ г с прикрепленным к одному из его концов диском радиусом $R = 10$ см и массой $M = 500$ г (рис. 79). Определить: 1) момент инерции маятника; 2) расстояние от центра масс до точки подвеса; 3) период малых колебаний маятника.

Решение. Период колебаний физического маятника определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_{\text{полн}}gl_0}}, \quad (\text{IV.1.12})$$

где l_0 — расстояние от центра масс до оси колебаний; J — момент инерции маятника относительно оси колебаний; $m_{\text{полн}}$ — его масса (в нашем случае $m_{\text{полн}} = M + m = 0,77$ кг).

1) Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня J_1 и диска J_2 . Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, определяется по формуле $J_1 = ml^2/3$. Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр, равен $J_0 = MR^2/2$, по теореме Штейнера момент инерции диска относительно точки подвеса маятника равен

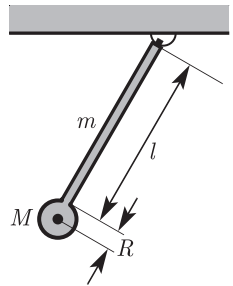


Рис. 79

$J_2 = J_0 + M(l + R)^2 = M(l^2 + 2lR + 3R^2/2)$. Полный момент инерции маятника

$$J = J_1 + J_2 = \frac{ml^2}{3} + M \left(l^2 + 2lR + \frac{3}{2} R^2 \right). \quad (\text{IV.1.13})$$

Подставляя числовые значения, находим $J = 0,205 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

2) Центр масс маятника находится между центрами масс диска и стержня на расстоянии x от последнего. Расстояние x находится из уравнения $xm = (l/2 + R - x)M$. Отсюда

$$x = \frac{M}{m+M} \left(\frac{l}{2} + R \right) = 0,227 \text{ м}. \quad (\text{IV.1.14})$$

Расстояние от точки подвеса маятника до его центра масс $l_0 = l/2 + x = 0,477 \text{ м}$.

3) Подставив в (IV.1.12) значения $m_{\text{полн}}$, J , l , g , найдем период колебаний маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,205}{0,77 \cdot 9,8 \cdot 0,477}} = 1,5 \text{ с}.$$

ПРИМЕР 91. На космическом корабле в условиях невесомости для измерения массы тела может быть использовано устройство, принцип действия которого заключается в следующем. Сначала измеряют частоту колебаний упругой системы с известной (калибровочной) массой, а затем к этой массе добавляют измеряемую и снова определяют частоту колебаний. Как, зная эти частоты, определить неизвестную массу?

Решение. Если m_0 — известная, m — измеряемая массы, а ω_0 , ω — круговые частоты колебаний систем с известной массой m_0 и суммарной массой $m_0 + m$ соответственно, то

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m}},$$

где k — коэффициент жесткости пружины.

Сравнивая выражения для частот, получаем для измеряемой массы

$$m = m_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right).$$

ПРИМЕР 92. Груз на дне цилиндрической пробирки с площадью поперечного сечения S при погружении пробирки в жидкость удерживает ее в вертикальном положении. После погружения пробирки на некоторую глубину она начинает колебаться относительно положения равновесия. Масса пробирки с грузом равна m , плотность жидкости ρ . Пренебрегая вязкостью жидкости, определить период T колебаний пробирки и расстояние l от дна пробирки до поверхности жидкости.

Решение. В данном случае роль квазиупругой силы играет сила Архимеда. Направим ось Ox вертикально вниз, выбрав за начало отсчета ее пересечение с поверхностью жидкости. Пусть x — координата дна

пробирки (рис. 80). Сила Архимеда равна $F_A = -Sx\rho g$ (знак выбран так, что, когда дно пробирки находится ниже уровня жидкости ($x > 0$), сила Архимеда отрицательна, т. е. направлена вверх). Кроме этого, на пробирку действует сила тяжести $P = mg$. Поэтому уравнение движения записывается в виде

$$m\ddot{x} = mg - Sx\rho g.$$

Таким образом, «коэффициент жесткости» системы равен $k = S\rho g$.

В положении равновесия ($x = l$) обе силы уравновешивают друг друга: $mg = Sl\rho g$, откуда $l = m/(S\rho)$. Обозначим через y отклонение дна пробирки от равновесного положения: $x = l + y$. Подставляя это выражение в уравнение колебаний, получаем $m\ddot{y} + S\rho g y = 0$, или $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$, где $\omega_0 = \sqrt{S\rho g/m}$. Частоту колебаний можно также выразить через глубину погружения в состоянии равновесия: $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, что формально совпадает с частотой колебаний математического маятника длиной l . Теперь легко находится и период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

ПРИМЕР 93. Небольшой металлический шарик массой m , подвешенный на нити длиной l , колеблется над бесконечной, равномерно заряженной горизонтальной плоскостью с плотностью положительного заряда σ . Определить период колебаний маятника при условии, что на шарике находится отрицательный заряд, равный по модулю Q .

Решение. Гармонические колебания шарика происходят в однородном электрическом поле, создаваемом равномерно заряженной плоскостью. На отрицательно заряженный шарик это поле действует с силой F , направленной вертикально вниз. Под действием электрического поля сила натяжения нити возрастает на величину F , и сила тяжести увеличится от mg до $m(g + a)$. Период колебаний такого заряженного математического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}.$$

Сила, действующая на шарик с зарядом Q в электрическом поле с напряженностью E , равна $F = QE$. Поскольку задана поверхностная плотность зарядов σ на равномерно заряженной бесконечной плоскости и колебания происходят в вакууме ($\varepsilon = 1$), имеем $E = \sigma/2\varepsilon_0$, и, следовательно, $F = \sigma Q/2\varepsilon_0$. Тогда из основного уравнения динамики частицы имеем для ускорения

$$a = \frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0 m}.$$

Таким образом, период гармонических колебаний заряженного шарика имеет вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 ml}{2\varepsilon_0 mg + \sigma Q}}.$$

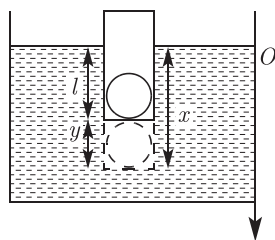


Рис. 80

ПРИМЕР 94. В 1906 г. Дж. Дж. Томсон предложил модель, согласно которой атом содержит число электронов, равное атомному номеру элемента; весь заряд этих электронов нейтрализуется положительно заряженной средой, масса которой составляет большую часть массы атома. Данная модель получила название «пудинг», так как согласно такой модели электроны были вкраплены в положительно заряженную среду, подобно изюму в пудинге.

Модель атома водорода представляется в этом случае в виде равномерно заряженного шара радиусом $R = 10^{-10}$ м с полным зарядом $Q = +e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл и электрона с зарядом $-e$ и массой $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, который в нормальном состоянии находится в центре положительно заряженного шара. Предположим, что электрон смещен относительно центра положительного заряда на небольшое расстояние r_0 . Если теперь электрон предоставить самому себе, то он начнет колебаться около положения равновесия с амплитудой r_0 . Чему равна при этом частота колебаний?

Решение. Используя выражение для напряженности электрического поля внутри заряженного шара (см. учебник, т. 1, формула (15.47))

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r,$$

найдем действующую на электрон возвращающую силу

$$F = -eE = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r.$$

Запишем уравнение движения электрона:

$$m_e \ddot{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r.$$

Отсюда следует стандартное уравнение гармонических колебаний $\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0$ с собственной частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}}.$$

Подставляя сюда числовые значения, находим $\omega_0 = 1,6 \cdot 10^{16}$ Гц, чему соответствует длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega_0 = 120$ нм. Это значение почти совпадает с длиной волны электромагнитного излучения, испускаемого атомом водорода в первом возбужденном состоянии (первая линия серии Лаймана — см. учебник, т. 2, п. 35.1). Это подтверждает разумность модели Томсона, которая «ухватывает» некоторые особенности поведения электрона в атоме.

ПРИМЕР 95. Как изменяются A_0 (амплитуда смещения при $\omega = 0$), максимальная амплитуда A и резонансная частота $\omega_{\text{рез}}$ при уменьшении сопротивления среды, если остальные параметры, определяющие вынужденные колебания, остаются постоянными?

Решение. Смещение A_0 при $\omega = 0$ есть смещение под действием статической силы. Поэтому оно определяется отношением максимальной вынуждающей силы F_0 к коэффициенту упругости k , т. е. $A_0 = F/k$. По

условию задачи F_0 и k остаются постоянными, поэтому A_0 не зависит от сопротивления среды.

Резонансная частота, определяемая выражением $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, тем ближе к собственной частоте ω_0 , чем меньше коэффициент затухания β . Так как $\beta = r/2m$, а масса колеблющегося тела согласно условию остается постоянной, то с уменьшением r уменьшается β и растет $\omega_{\text{рез}}$.

Амплитуда при резонансной частоте

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

возрастает с уменьшением сопротивления среды ($A_{\text{рез}} \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow 0$).

ПРИМЕР 96. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами площадью $S = 100$ см каждая и катушки индуктивностью $L = 1$ мкГн, резонирует на длине волны $\lambda = 10$ м. Определить расстояние d между пластинами конденсатора.

Решение. Прежде всего приведем связь между длиной λ электромагнитной волны в вакууме и ее частотой ν (эта и подобные формулы будут неоднократно использоваться в следующем разделе): $\lambda\nu = c$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Расстояние между пластинами конденсатора можно найти из формулы емкости плоского конденсатора: $C = \epsilon_0 \epsilon S/d$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей конденсатор. В нашем случае $\epsilon = 1$, так что

$$d = \frac{\epsilon_0 S}{C}. \tag{IV.1.15}$$

Из формулы Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, определяющей период колебаний в электрическом контуре, находим емкость

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}. \tag{IV.1.16}$$

Контур резонирует на длину волны λ , т. е. на частоту $\nu = c/\lambda$, откуда период собственных колебаний

$$T = \frac{\lambda}{c}. \tag{IV.1.17}$$

Подставив выражение для периода T в формулу (IV.1.16), а затем получившееся соотношение для емкости C в формулу (IV.1.15), получим

$$d = 4\pi^2 c^2 \epsilon_0 \frac{SL}{\lambda^2}. \tag{IV.1.18}$$

Произведем вычисления:

$$d = 4\pi^2 (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{10^{-2} \cdot 10^{-6}}{10^2} = 3,14 \cdot 10^{-3} = 3,14 \text{ мм.}$$

ПРИМЕР 97. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 1,2$ мГн и конденсатора переменной емкости, изменяющейся от $C_1 = 12$ пФ до $C_2 = 80$ пФ. Определить диапазон длин

электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре. Активное сопротивление контура принять равным нулю.

Решение. Период колебаний в контуре находим по формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, откуда получаем длину электромагнитной волны, которая может вызвать резонанс в колебательном контуре:

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}. \quad (\text{IV.1.19})$$

Согласно условию задачи индуктивность контура неизменна, а емкость контура может изменяться в пределах от C_1 до C_2 . Этим значениям емкости соответствуют длины волн λ_1 и λ_2 , определяющие диапазон длин волн, которые могут вызвать резонанс. После вычислений по формуле (IV.1.19) получим

$$\lambda_1 = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \sqrt{(1,2 \cdot 10^{-3})(12 \cdot 10^{-12})} = 226 \text{ м};$$

$$\lambda_2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \sqrt{(1,2 \cdot 10^{-3})(80 \cdot 10^{-12})} = 584 \text{ м}.$$

IV.1.B. Задачи для самостоятельной работы

Кинематика гармонических колебаний

Задача IV.1.1. Смещение гармонического осциллятора в зависимости от времени определяется соотношением $x(t) = 2,4 \cos\left(\frac{5\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}\right)$, где x измеряется в метрах, а t — в секундах. Найти: 1) период и частоту колебаний; 2) смещение и скорость в момент времени $t = 0$; 3) скорость и ускорение в момент времени $t = 1$ с.

Задача IV.1.2. Тело массой 1 кг совершает колебания по закону $x = 0,42 \cos(7,4t)$, где t измеряется в секундах, а x — в метрах. Найти: 1) амплитуду колебаний; 2) их частоту; 3) полную энергию; 4) кинетическую и потенциальную энергии при $x = 0,16$ м.

Задача IV.1.3. Уравнение колебаний точки имеет вид $x = A \cos \omega(t + \tau)$, где $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$; $\tau = 0,2$ с. Определить период T и начальную фазу φ_0 колебаний.

Задача IV.1.4. Определить период T , частоту ν и начальную фазу φ_0 колебаний, заданных уравнением $x = A \sin \omega(t + \tau)$, где $\omega = 2,5\pi \text{ с}^{-1}$; $\tau = 0,4$ с.

Задача IV.1.5. Точка совершает колебания по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ_0 , если: 1) $x(0) = 2$ см и $\dot{x}(0) < 0$; 2) $x(0) = -2\sqrt{2}$ см и $\dot{x}(0) < 0$; 3) $x(0) = 2$ см и $\dot{x}(0) > 0$; 4) $x(0) = -2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) > 0$. Построить векторную диаграмму для момента $t = 0$.

Задача IV.1.6. Точка совершает колебания по закону $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4$ см. Определить φ_0 , если: 1) $x(0) = 2$ см и $\dot{x}(0) < 0$; 2) $x(0) = 2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) > 0$; 3) $x(0) = -2\sqrt{2}$ см и $\dot{x}(0) < 0$; 4) $x(0) = -2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) > 0$. Построить векторную диаграмму для момента $t = 0$.

Задача IV.1.7. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Написать уравнение этих колебаний, считая, что в момент $t = 0$ смещение $x(0) = 0$ и скорость $\dot{x}(0) < 0$. Определить фазу $\varphi = \omega t + \varphi_0$ для двух моментов времени: 1) когда смещение $x = 2$ см и $\dot{x} > 0$; 2) когда скорость $\dot{x} = -6$ см/с и $x < 0$.

Задача IV.1.8. Точка равномерно движется по окружности против часовой стрелки с периодом $T = 6$ с. Диаметр d окружности равен 20 см. Написать уравнение движения проекции точки на ось x , проходящую через центр окружности, если в момент времени, принятый за начальный, проекция на ось x равна нулю. Найти смещение x , скорость \dot{x} и ускорение \ddot{x} проекции точки в момент $t = 1$ с.

Задача IV.1.9. Определить максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и циклической частотой $\omega = 10$ Гц.

Задача IV.1.10. Точка совершает колебания по закону $A \cos(\omega t)$, где $A = 5$ см; $\omega = 2$ Гц. Определить ускорение $|\ddot{x}|$ точки в момент времени, когда ее скорость $\dot{x} = 8$ см/с.

Задача IV.1.11. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно 10 см, наибольшая скорость $v_{\max} = 20$ см/с. Найти циклическую частоту ω колебаний и максимальное ускорение a_{\max} точки.

Задача IV.1.12. Максимальная скорость v_{\max} точки, совершающей гармонические колебания, равна 10 см/с, максимальное ускорение $a_{\max} = 100$ см/с². Найти циклическую частоту ω колебаний, их период T и амплитуду A . Написать уравнение колебаний, приняв начальную фазу равной нулю.

Задача IV.1.13. Точка совершает колебания по закону $x = A \sin(\omega t)$. В некоторый момент времени смещение x точки оказалось равным 5 см. Когда фаза колебаний $\varphi = \omega t$ увеличилась в 2 раза, смещение x стало равным 8 см. Найти амплитуду A колебаний.

Задача IV.1.14. Колебания точки происходят по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени смещение x точки равно 5 см, ее скорость $\dot{x} = 20$ см/с и ускорение $\ddot{x} = -80$ см/с. Найти амплитуду A , циклическую частоту ω , период T колебаний и фазу $\varphi = \omega t + \varphi_0$ в рассматриваемый момент времени.

Задача IV.1.15. Длина математического маятника равна 0,24 м. В момент времени $t = 0$ его запускают, отклонив на угол 14° от вертикали. Пренебрегая трением, вычислить угол отклонения маятника при: 1) $t = 0,25$ с; 2) $t = 1,6$ с; 3) $t = 5$ с.

Задача IV.1.16. Математический маятник качается с амплитудой 10° . Какую долю своего периода он находится между $+5^\circ$ и -5° ? Колебания считать гармоническими.

Задача IV.1.17. Математический маятник качается с амплитудой 10° . Найти симметричный относительно положения равновесия интервал отклонений $(-\alpha, \alpha)$, в котором маятник пребывает ровно половину времени.

Сложение колебаний

Задача IV.1.18. Два гармонических колебания, направленные по одной прямой и имеющие одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз складываемых колебаний.

Задача IV.1.19. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания, возникающего при сложении двух колебаний одинаковых направления и периода: $x_1 = A_1 \sin \omega t$ и $x_2 = A_2 \sin[\omega(t + \tau)]$, где $A_1 = A_2 = 1$ см; $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$; $\tau = 0,5$ с. Найти уравнение результирующего колебания.

Задача IV.1.20. Точка участвует в двух одинаково направленных колебаниях: $x_1 = A_1 \sin(\omega t)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega t)$, где $A_1 = 1$ см; $A_2 = 2$ см; $\omega = 1$ Гц. Определить амплитуду A результирующего колебания, его частоту ν и начальную фазу φ_0 . Найти уравнение этого движения.

Задача IV.1.21. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1,5$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = 2$ см. Начальные фазы колебаний $\varphi_{0,1} = \pi/2$ и $\varphi_{0,2} = \pi/3$. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Найти его уравнение и построить с соблюдением масштаба векторную диаграмму колебаний.

Задача IV.1.22. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания, выражаемые уравнениями $x = A_1 \sin(\omega t)$ и $y = A_2 \cos[\omega(t + \tau)]$, где $A_1 = 2$ см; $A_2 = 1$ см; $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$; $\tau = 0,5$ с. Найти уравнение траектории и построить ее, показав направление движения точки.

Задача IV.1.23. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящие во взаимно перпендикулярных направлениях и выражаемые уравнениями $x = A_1 \cos(\omega t)$ и $y = A_2 \cos[\omega(t + \tau)]$, где $A_1 = 4$ см; $A_2 = 8$ см; $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$; $\tau = 1$ с. Найти уравнение траектории точки и построить график ее движения.

Задача IV.1.24. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \cos(\omega t)$ и $y = A_2 \sin(\omega t)$, где $A_1 = 2$ см и $A_2 = 1$ см. Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения.

Задача IV.1.25. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящие во взаимно перпендикулярных направлениях и выражаемые уравнениями $x = A_1 \sin(\omega t)$ и $y = A_2 \cos(\omega t)$, где $A_1 = 0,5$ см и $A_2 = 2$ см. Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения.

Задача IV.1.26. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящие во взаимно перпендикулярных направлениях и выражаемые уравнениями: 1) $x = A \sin(\omega t)$; $y = A \cos(2\omega t)$; 2) $x = A \cos(\omega t)$; $y = A \sin(2\omega t)$; 3) $x = A \cos(\omega t)$; $y = A \cos(2\omega t)$; 4) $x = A \cos(2\omega t)$; $y = A_1 \cos(\omega t)$; 5) $x = A_1 \sin(2\omega t)$; $y = A \cos(\omega t)$. Найти уравнение траектории точки, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения. Принять $A = 2$ см; $A_1 = 3$ см.

Динамика гармонических колебаний

Задача IV.1.27. Материальная точка массой $m = 50$ г совершает колебания, уравнение которых имеет вид $x = A \cos(\omega t)$, где $A = 10$ см; $\omega = 5$ Гц. Найти силу F , действующую на точку, в двух случаях: 1) в момент, когда фаза $\omega t = \pi/3$; 2) в положении наибольшего смещения ($x = A$) точки.

Задача IV.1.28. Колебания материальной точки массой $m = 0,1$ г происходят согласно уравнению $x = A \cos(\omega t)$, где $A = 5$ см; $\omega = 20$ Гц. Определить максимальные значения возвращающей силы F_{\max} и кинетической энергии T_{\max} .

Задача IV.1.29. Найти возвращающую силу F в момент времени $t = 1$ с и полную энергию E материальной точки, совершающей колебания по закону $x = A \cos(\omega t)$, где $A = 20$ см; $\omega = 2\pi/3$ с⁻¹. Масса материальной точки $m = 10$ г.

Задача IV.1.30. Максимальное отклонение мембраны громкоговорителя не может превышать $A_{\max} = 1$ мкм. При каких частотах ν ускорение мембраны превысит ускорение свободного падения?

Задача IV.1.31. Колебания материальной точки происходят согласно уравнению $x = A \cos(\omega t)$, где $A = 8$ см; $\omega = \pi/6$ с⁻¹. В момент, когда возвращающая сила F в первый раз достигла значения -5 мН, потенциальная энергия U точки стала равной 100 мкДж. Найти этот момент времени t и массу точки.

Задача IV.1.32. Атомы в кристаллах колеблются с частотой $\nu \sim 10^{13}$ Гц. Представим себе модель кристалла, в которой они связаны друг с другом «пружинками». Найти коэффициент жесткости такой «пружинки» для кристалла серебра (атомная масса 108 г/моль).

Задача IV.1.33. Таракан массой $0,3$ г попался в сеть к пауку. Паутина колеблется с частотой $\nu_1 = 15$ Гц. 1) Определить коэффициент жесткости k паутины. 2) С какой частотой ν_2 будет колебаться паутина, если в нее попадет насекомое массой $0,1$ г?

Задача IV.1.34. Гирия, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 4$ см. Определить полную энергию E колебаний гири, если жесткость пружины $k = 1$ кН/м.

Задача IV.1.35. Человек массой 75 кг прыгает из окна с высоты 15 м на сетку, используемую пожарными для спасения людей. При этом сетка провисает на $1,2$ м. Считая сетку простой пружиной, вычислить, на сколько она провиснет, если этот человек просто ляжет на нее. На сколько бы сетка провисла, если бы на нее спрыгнули с высоты 30 м?

Задача IV.1.36. Пуля массой $m = 12,0$ г попадает в брусок массой $M = 300$ г, прикрепленный к горизонтальной пружине с коэффициентом жесткости $k = 5,2$ кН/м, другой конец которой закреплен неподвижно. Амплитуда колебаний бруска после попадания в него пули составляет $A = 12,4$ см. Какой была скорость пули, если учесть, что после попадания пули и брусок движутся вместе?

Задача IV.1.37. Брусок массой $M = 4,0$ кг прикреплен к горизонтальной пружине с коэффициентом жесткости $k = 500$ Н/м, другой конец которой закреплен неподвижно. В брусок попадает пуля массой

$m = 50$ г, летящая со скоростью $v = 150$ м/с, и застревает в нем. 1) Чему равна амплитуда колебаний бруска? 2) Какая доля кинетической энергии пули перешла в энергию гармонических колебаний бруска?

Задача IV.1.38. Показать, что средние за период значения потенциальной и кинетической энергий пружинного маятника равны половине их максимальных значений.

Задача IV.1.39. Груз массой m прикреплен к двум пружинам с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 , соединенным последовательно (рис. 81, а). Доказать, что частота гармонических колебаний в такой системе равна $\nu_{\text{посл}} = \frac{\nu_1 \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}}$, где ν_1, ν_2 — частоты колебаний того же

груза на каждой из пружин по отдельности. (*Подсказка:* см. учебник, т. 1, п. 3.3.)

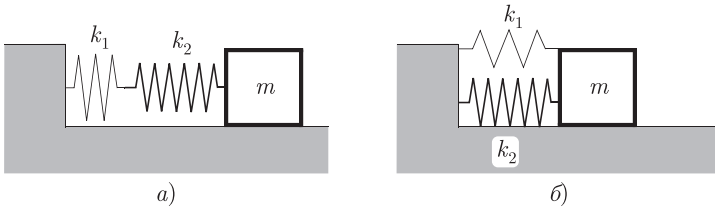


Рис. 81

Задача IV.1.40. Груз массой m прикреплен к двум пружинам с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 , соединенным параллельно (рис. 81, б). Доказать, что частота гармонических колебаний в такой системе равна $\nu_{\text{пар}} = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$, где ν_1, ν_2 — частоты колебаний того же груза на каждой из пружин по отдельности. (*Подсказка:* см. учебник, т. 1, п. 3.3.)

Задача IV.1.41. Амортизаторы автомобиля представляют собой четыре одинаковые пружины. Собственная частота вертикальных колебаний автомобиля массой $M = 1500$ кг составляет $\nu_0 = 3$ Гц. Найти коэффициент жесткости k пружин и частоту колебаний ν , если в автомобиле сидят четыре человека со средней массой $m = 75$ кг каждый.

Задача IV.1.42. Однородный диск радиусом $R = 0,5$ м подвешен за край. Чему равны частота ν его малых колебаний относительно точки подвеса и приведенная длина l маятника?

Задача IV.1.43. Диск радиусом $R = 24$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска. Определить приведенную длину l и период T колебаний такого маятника.

Задача IV.1.44. Однородный диск радиусом $R = 0,3$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска на расстоянии $a = xR$ ($0 \leq x \leq 1$) от его центра. Определить значение x_{max} , при котором частота колебаний маятника будет наибольшей, и найти эту максимальную частоту ν_{max} . Построить график зависимости приведенной длины l от x .

Задача IV.1.45. Тонкий однородный диск радиусом R , подвешенный за край в точке O , колеблется с частотой ν_0 . Если вырезать из него часть в виде двух дисков радиусом $r = R/2$ каждый, как показано на рис. 82, а, то частота колебаний становится равной ν . Найти отношение ν/ν_0 .

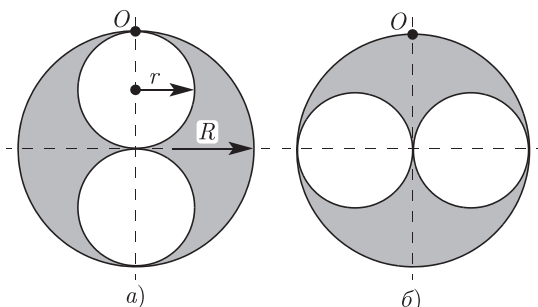


Рис. 82

Задача IV.1.46. Решить задачу IV.1.45 при другой точке подвеса маятника (рис. 82, б).

Задача IV.1.47. Тело массой $m = 4$ кг, закрепленное на горизонтальной оси, совершало колебания с периодом $T_1 = 0,8$ с. Когда на эту ось был насажен диск так, что его ось совпала с осью колебаний тела, период колебаний стал равным $T_2 = 1,2$ с. Радиус диска $R = 20$ см, масса его равна массе тела. Найти момент инерции J тела относительно оси колебаний.

Задача IV.1.48. Математический маятник длиной $l_1 = 40$ см и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной l_2 , подвешенного за край, колеблются синхронно. Определить длину стержня l_2 .

Задача IV.1.49. Математический маятник длиной $l_1 = 40$ см и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $l_2 = 30$ см колеблются синхронно. Определить расстояние a от центра масс стержня до точки подвеса.

Задача IV.1.50. Физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $l = 120$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную на некоторое расстояние a от центра масс стержня. При каком значении a период T колебаний имеет наименьшее значение?

Задача IV.1.51. Ареометр массой $m = 50$ г, имеющий трубку диаметром $d = 1$ см, плавает в воде. Ареометр немного погрузили в воду и затем предоставили самому себе, в результате чего он стал совершать гармонические колебания. Найти период этих колебаний.

Задача IV.1.52. В открытую с обоих концов U-образную трубку с площадью поперечного сечения $S = 0,4$ см² быстро вливают ртуть массой $m = 200$ г. Определить период T колебаний ртути в трубке. Плотность ртути $\rho = 13,6$ г/см³.

Затухающие колебания

Задача IV.1.53. Брусок массой 750 г колеблется на конце пружины с коэффициентом жесткости $k = 56$ Н/м. Брусок движется в жидкости, где на него действует сила сопротивления $F = -rv$, $r = 0,162$ Н · с/м. 1) Чему равен период колебаний бруска? 2) На какую долю уменьшается амплитуда $A(t)$ после каждого периода колебаний? 3) Чему равна начальная амплитуда $A(0)$, если при $t = 0$ смещение $x = 0$, а при $t = 1$ с смещение $x = 12$ см?

Задача IV.1.54. Амплитуда слабозатухающих колебаний уменьшается на 4,6% за каждый период. 1) Какая доля энергии теряется за одно колебание? 2) Во сколько раз уменьшится начальная амплитуда за 20 полных периодов?

Задача IV.1.55. Амплитуда затухающих колебаний маятника длиной $l = 1$ м за время $t = 10$ мин уменьшилась в 2 раза. Определить логарифмический декремент затухания λ .

Задача IV.1.56. За время $t = 8$ мин амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в 3 раза. Определить коэффициент затухания β .

Задача IV.1.57. Логарифмический декремент затухания маятника равен $\lambda = 0,003$. Определить число N полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в 2 раза.

Задача IV.1.58. Гирия массой $m = 500$ г подвешена к спиральной пружине жесткостью $k = 20$ Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0,004$. Определить число N полных колебаний, которые должна совершить гирия, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. За какое время t произойдет это уменьшение?

Задача IV.1.59. Определить период T затухающих колебаний, если период T_0 собственных колебаний системы равен 1 с и логарифмический декремент затухания $\lambda = 0,628$.

Задача IV.1.60. Найти число N колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в 2 раза. Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0,01$.

Задача IV.1.61. Гармонический осциллятор с затуханием за период колебаний теряет 5% механической энергии. 1) На сколько его циклическая частота ω отличается от собственной частоты ω_0 ? 2) Через сколько периодов амплитуда колебаний уменьшается в e раз?

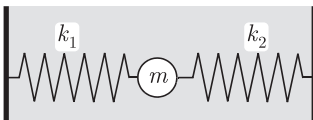


Рис. 83

Задача IV.1.62. Тело массой $m = 1$ кг находится в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0,05$ кг/с. С помощью двух одинаковых пружин жесткостью $k = 50$ Н/м каждая тело удерживается в положении равновесия, пружины

при этом не деформированы (рис. 83). Тело сместили от положения равновесия и отпустили. Определить: 1) коэффициент затухания β ; 2) частоту ν колебаний; 3) логарифмический декремент затухания λ ; 4) число N_e колебаний, по прошествии которых амплитуда уменьшилась в e раз.

Вынужденные колебания. Резонанс

Задача IV.1.63. Под действием силы тяжести электродвигателя консольная балка, на которой он установлен, прогнулась на $h = 1$ мм. При какой частоте вращения ν якоря электродвигателя может возникнуть опасность резонанса?

Задача IV.1.64. Вагон массой $m = 80$ т имеет четыре рессоры. Жесткость k пружин каждой рессоры равна 500 кН/м. При какой скорости v вагон начнет сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельс, если длина l рельса равна $12,8$ м?

Задача IV.1.65. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 1000$ Гц. Определить частоту ν_0 собственных колебаний, если резонансная частота $\nu_{\text{рез}} = 998$ Гц.

Задача IV.1.66. Определить, на сколько резонансная частота $\nu_{\text{рез}}$ отличается от частоты $\nu_0 = 1$ кГц собственных колебаний системы, характеризуемой коэффициентом затухания $\beta = 400$ с⁻¹.

Задача IV.1.67. Определить логарифмический декремент затухания λ колебательной системы, для которой резонанс наблюдается при частоте, меньшей собственной частоты $\nu_0 = 10$ кГц на $\Delta\nu = 2$ Гц.

Задача IV.1.68. Период T_0 собственных колебаний пружинного маятника равен $0,55$ с. В вязкой среде период T того же маятника стал равным $0,56$ с. Определить резонансную частоту $\nu_{\text{рез}}$ колебаний.

Задача IV.1.69. Пружинный маятник (жесткость k пружины равна 10 Н/м, масса m груза равна 100 г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0,02$ кг/с. Определить коэффициент затухания β и резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$, если амплитудное значение вынуждающей силы $F_0 = 10$ мН.

Задача IV.1.70. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления $r = 10$ г/с. Считая затухание малым, определить амплитудное значение F_0 вынуждающей силы, если резонансная амплитуда $A_{\text{рез}} = 1$ см и частота ν_0 собственных колебаний равна 50 Гц.

Задача IV.1.71. К спиральной пружине жесткостью $k = 10$ Н/м подвесили грузик массой $m = 10$ г и погрузили всю систему в вязкую среду. Приняв коэффициент сопротивления r равным $0,1$ кг/с, определить: 1) частоту ν_0 собственных колебаний; 2) резонансную частоту $\nu_{\text{рез}}$; 3) резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$, если вынуждающая сила F изменяется по гармоническому закону, а ее амплитудное значение $F_0 = 0,02$ Н; 4) отношение резонансной амплитуды к статическому смещению под действием силы F_0 .

Задача IV.1.72. Во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний будет меньше резонансной амплитуды, если частота изменения вынуждающей силы будет больше резонансной частоты: 1) на 10% ; 2) в 2 раза? Коэффициент затухания β в обоих случаях принять равным $0,1\omega_0$ (ω_0 — круговая частота собственных колебаний).

Электромагнитные колебания

Задача IV.1.73. Переменный конденсатор настройки радиоприемника имеет емкость 1500 пФ, когда приемник настроен на станцию, работающую на частоте 550 кГц. 1) Какой должна быть емкость для настройки контура на станцию, работающую на частоте 1600 кГц? 2) Чему равна индуктивность контура (предполагается, что она постоянна)?

Задача IV.1.74. Пользуясь определениями фарада и генри, показать, что $1/\sqrt{LC}$ имеет размерность с^{-1} .

Задача IV.1.75. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 20$ мкГн и конденсатора электроемкостью $C = 80$ нФ. Величина емкости может отклоняться от указанного значения на 2%. Вычислить, в каких пределах может изменяться длина волны, на которой резонирует контур.

Задача IV.1.76. Колебательный контур имеет индуктивность $L = 1,6$ мГн, электроемкость $C = 0,04$ мкФ и максимальное напряжение U_{\max} на зажимах, равное 200 В. Определить максимальную силу тока I_{\max} в контуре. Сопротивление контура ничтожно мало.

Задача IV.1.77. Колебательный контур содержит конденсатор электроемкостью $C = 8$ пФ и катушку индуктивностью $L = 0,5$ мГн. Чему равно максимальное напряжение U_{\max} на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока $I_{\max} = 40$ мА?

Задача IV.1.78. Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора электроемкостью $C = 1$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 1$ мГн. Сопротивление контура ничтожно мало. Найти частоту колебаний.

Задача IV.1.79. Индуктивность L колебательного контура равна 0,5 мГн. Какой должна быть электроемкость C контура, чтобы он резонировал на длине волны $\lambda = 300$ м?

Задача IV.1.80. Какое сопротивление надо ввести в LC -контур ($L = 200$ мГн, $C = 1200$ пФ), чтобы изменить частоту колебаний на 0,1%? Увеличивается или уменьшается частота колебаний?

Задача IV.1.81. В RCL -контуре за один период колебаний в тепло переходит 3,5% энергии. Чему равна величина R , если $L = 80$ мГн и $C = 1$ мкФ?

IV.2. Волновые процессы

IV.2.A. Основные формулы

- Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где u — смещение точек среды с координатами (x, y, z) в момент времени t ; v — скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость волны).

- Уравнения плоской и сферической волн в среде без поглощения

$$u(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = A \cos (\omega t - kx + \varphi_0);$$

$$u(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cos (\omega t - kr),$$

где ω — круговая частота; $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ — волновое число; λ — длина волны.

- Длина волны связана с периодом T колебаний и частотой ν соотношением

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}.$$

- Разность фаз колебаний двух точек среды, расстояние между которыми (разность хода) равно Δx :

$$\Delta\varphi = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x.$$

- Уравнение стоячей волны (колебания струны, закрепленной в точке $x = 0$)

$$u(x, t) = u_{\max} \sin \omega t \sin \left(\omega \frac{x}{v} \right) = u_{\max} \sin \omega t \sin kx,$$

где u_{\max} — наибольшее смещение в стоячей волне.

- Фазовая скорость v_{\parallel} продольных и v_{\perp} поперечных волн в упругой среде

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где E — модуль Юнга; ρ — плотность среды; G — модуль сдвига.

- Фазовая скорость поперечных волн на струне

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{T}{\rho_{\text{л}}}},$$

где T — натяжение струны; $\rho_{\text{л}}$ — линейная плотность струны.

- Фазовая скорость продольных волн в газах

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}},$$

где $\gamma = \frac{c_{m,p}}{c_{m,V}}$ — показатель адиабаты ($c_{m,p}$, $c_{m,V}$ — молярные теплоемкости газа при постоянном давлении или объеме, см. учебник, т. 1, п. 11.3); $R = c_{m,p} - c_{m,V}$ — универсальная газовая постоянная; T — температура; μ — молярная масса; p , ρ — давление и плотность газа.

Напоминание: при нормальных условиях давление $p = 101,3$ кПа, температура $T = 273$ К, молярный объем $V_m = 22,4 \cdot 10^{-3}$ м³/моль.

- Плотность потока энергии для упругой волны — вектор Умова

$$\vec{j} = \langle \omega \rangle \vec{v}; \quad \langle \omega \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2,$$

где $\langle \omega \rangle$ — средняя объемная плотность энергии; ω — круговая частота волн; A — их амплитуда; ρ — плотность среды.

- *Интенсивностью I волны* называется среднее значение плотности потока энергии в ней:

$$I = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v A^2.$$

- Уровень громкости звука (в децибелах)

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0},$$

где I_0 — условная интенсивность волны, соответствующая нулевому уровню громкости L звука ($I_0 = 1 \text{ пВт/м}^2$).

- Амплитуда звукового давления

$$\Delta p_{\max} = 2\pi\nu\rho v A,$$

где ν — частота звука; ρ — плотность среды; v — скорость звука в среде; A — амплитуда колебаний частиц среды.

- Связь между интенсивностью I звуковой волны и избыточным давлением Δp_{\max} , создаваемым звуковой волной:

$$I = \frac{(\Delta p_{\max})^2}{2\rho v}; \quad \Delta p_{\max} = \sqrt{2\rho v I}.$$

- При распространении сферических звуковых волн от точечного изотропного источника мощностью N интенсивность звука убывает по обычному закону обратных квадратов:

$$I = \frac{N}{4\pi r^2},$$

где I — интенсивность звука на расстоянии r от источника.

- Акустический эффект Доплера

$$\nu = \nu_0 \frac{v + v_{\text{набл}}}{v - v_{\text{ист}}},$$

где ν_0 — частота звука, испускаемого источником; ν — воспринимаемая частота звука; v — скорость звука; $v_{\text{набл}}$ ($v_{\text{ист}}$) — проекция скорости наблюдателя (источника звука) на линию, соединяющую наблюдателя и источник.

Положительные знаки скоростей соответствуют сближению источника и наблюдателя.

- Волновые уравнения для электромагнитных волн имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

где \vec{E} (\vec{H}) — напряженность электрического (магнитного) поля в электромагнитной волне; $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — фазовая скорость электромагнитной волны в среде с показателем преломления n ; $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ — скорость света в вакууме.

- Основные свойства плоской электромагнитной волны:
 - связь амплитуд электрического и магнитного полей

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0},$$

- где ε (μ) — диэлектрическая (магнитная) проницаемость среды;
- поперечность электромагнитной волны

$$\vec{E} \perp \vec{H}; \quad \vec{E} \perp \vec{v}; \quad \vec{H} \perp \vec{v},$$

где \vec{v} — вектор скорости в направлении распространения волны.

- Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$\langle w \rangle = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}.$$

- Плотность потока электромагнитной энергии — вектор Пойнтинга:

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}] = \vec{v} \langle w \rangle.$$

- Связь длины электромагнитной волны с периодом T и частотой ν

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu},$$

где $v = c/n$ — скорость электромагнитных волн в среде с показателем преломления n ; c — скорость света в вакууме.

- Эффект Доплера для электромагнитных волн: если источник, испускающий волну частотой ν_0 , движется со скоростью v под углом α к направлению на наблюдателя, то воспринимаемая частота волны

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}.$$

- Эффект Доплера в нерелятивистском случае ($v \ll c$)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \cos \alpha,$$

где $\Delta\nu = \nu - \nu_0$ — сдвиг наблюдаемой частоты по сравнению с частотой ν_0 испускаемого света.

IV.2.Б. Примеры решения задач

Пример 98. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v = 15$ м/с. Период T колебаний точек шнура равен 1,2 с, амплитуда $A = 2$ см. Определить: 1) длину волны λ ; 2) фазу φ колебаний, смещение u , скорость \dot{u} и ускорение \ddot{u} точки, отстоящей на расстоянии $x = 45$ м от источника волн в момент $t = 4$ с; 3) разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях $x_1 = 20$ м и $x_2 = 30$ м.

Решение. 1) Длина волны равна расстоянию, которое волна проходит за один период, и может быть найдена из соотношения $\lambda = vT$. Подставив значения величин v и T , получим $\lambda = 15 \cdot 1,2 = 18$ м.

2) Запишем уравнение волны: $u(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]$. Фаза колебаний точки с координатой x в момент времени t определяется выражением, стоящим в уравнении волны под знаком косинуса: $\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$, или

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

где учтено, что $\omega = 2\pi/T$.

Произведя вычисления по последней формуле, получим

$$\varphi = \frac{2\pi}{1,2} \left(4 - \frac{45}{15} \right) = 5\pi/3 = 5,24 \text{ рад} = 300^\circ.$$

Смещение точки определим, подставив в уравнение волны значения амплитуды A и фазы φ : $u = 2 \cos(5\pi/3) = 1$ см. Скорость \dot{u} точки найдем, взяв первую производную от смещения по времени: $\dot{u} = -A\omega \sin \varphi = -2\pi A/T \sin \varphi = -(2\pi \cdot 2/1,2) \sin(5\pi/3) = 9,1$ см. Ускорение есть первая производная от скорости по времени, поэтому $|\ddot{u}| = |-\omega^2 u| = (2\pi/T)^2 u = (2\pi/1,2)^2 = 27,4$ см/с².

3) Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек волны связана с расстоянием Δx между этими точками соотношением

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{Tv} (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{1,2 \cdot 15} (30 - 20) = \frac{10\pi}{9} = 3,49 \text{ рад} = 200^\circ.$$

ПРИМЕР 99. Левому концу длинной горизонтальной натянутой струны сообщается простое гармоническое колебательное движение с частотой $\nu = 250$ Гц и амплитудой $A = 2,6$ см. Сила натяжения струны $T = 140$ Н, линейная плотность $\rho_{\text{л}} = 0,12$ кг/м. При $t = 0$ конец струны смещен вверх на $u(0, 0) = 1,6$ см и движется вверх. 1) Вычислить длину образующейся волны. 2) Вычислить величину волнового вектора. 3) Написать выражение, описывающее бегущую волну.

Решение.

1) Скорость волны $v = \sqrt{T/\rho_{\text{л}}} = \sqrt{140/0,12} = 34,2$ м. Тогда $\lambda = v/\nu = 0,137$ м.

2) Волновой вектор $k = 2\pi/\lambda = 45,9$ м⁻¹.

3) Пусть левый конец струны имеет координату $x = 0$. В данном случае мы не знаем начальной фазы φ_0 волны, так что волну, движущуюся вправо, можно записать в общем виде:

$$u(x, t) = A \cos(2\pi\nu t - kx + \varphi_0).$$

В нашем случае амплитуда $A = 2,6$ см, а при $t = 0$ и $x = 0$ имеем $u(0, 0) = 1,6$ см. Следовательно, для начальной фазы получаем уравнение $\cos \varphi_0 = 1,6/2,6 = 0,615$. Отсюда следуют два решения: $\varphi_0 = \pm \arccos 0,615 = \pm 0,908$ рад. Выбрать одно из них поможет условие, что в начальный момент времени скорость левого конца положительна. Дифференцируя уравнение волны по времени, получаем для скорости $\dot{u}(x, t) = -2\pi\nu A \sin(2\pi\nu t - kx + \varphi_0)$. В начальный момент $\dot{u}(0, 0) = -2\pi\nu A \sin \varphi_0 > 0$, так что $\sin \varphi_0 < 0$. Таким образом, из двух найденных решений остается одно: $\varphi_0 = -0,908$ рад. Окончательно записываем уравнение волны:

$$u(x, t) = 0,026 \cos(1570,8t - 45,9x - 0,908),$$

где $u(x, t)$ и x измеряются в метрах, а t — в секундах.

ПРИМЕР 100. На расстоянии $l = 4$ см от источника плоской волны частотой $\nu = 440$ Гц перпендикулярно ее направлению распространения расположена стена. Определить расстояния от источника волн до точек, которые соответствуют первым трем узлам и пучностям стоячей волны, возникшей в результате сложения бегущей и отраженной от стены волн. Скорость v волны считать равной 340 м/с.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена на источник волны, а начало координат совпадало с точкой, где волна падает на стену. При этих условиях можно воспользоваться уравнением стоячей волны

$$u(x, t) = u_{\max} \sin(\omega t) \sin\left(\omega \frac{x}{v}\right) = u_{\max} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{2\pi\nu x}{v}\right).$$

Первые три узла стоячей волны соответствуют точкам, в которых $\sin \frac{2\pi\nu x}{v}$ обращается в нуль: $x_{n,\text{узел}} = n \frac{v}{2\nu}$ ($n = 0, 1, 2$). Тогда $x_{0,\text{узел}} = 0$, $x_{1,\text{узел}} = 0,39$ м, $x_{2,\text{узел}} = 0,77$ м. Соответственно расстояния $l_{n,\text{узел}} = l - x_{n,\text{узел}}$ от источника до узлов равны $l_{0,\text{узел}} = 4$ м; $l_{1,\text{узел}} = 3,61$ м; $l_{2,\text{узел}} = 3,23$ м.

Первые три пучности стоячей волны соответствуют точкам, в которых $\sin \frac{2\pi\nu x}{v}$ равен ± 1 : $x_{n,\text{пучн}} = (n + 1/2) \frac{v}{2\nu}$ ($n = 0, 1, 2$). Тогда $x_{0,\text{пучн}} = 0,195$ м; $x_{1,\text{пучн}} = 0,58$ м; $x_{2,\text{пучн}} = 0,975$ м. Соответственно расстояния $l_{n,\text{пучн}} = l - x_{n,\text{пучн}}$ от источника до пучностей равны $l_{0,\text{пучн}} = 3,81$ м; $l_{1,\text{пучн}} = 3,42$ м; $l_{2,\text{пучн}} = 3,03$ м.

ПРИМЕР 101. Согласно молекулярно-кинетической теории любая частица или тело, например барабанная перепонка, из-за соударений с молекулами обладает при комнатной температуре кинетической энергией порядка $W_{\text{тепл}} = 3k_B T/2 \sim 6 \cdot 10^{-21}$ Дж. Какой становится кинетическая энергия барабанной перепонки под действием звуковой волны на пороге слышимости? Сравнить это значение с тепловой энергией. Скорость звука $v = 340$ м/с, плотность воздуха $\rho = 1,3$ кг/м³. Массу барабанной перепонки m можно считать равной 0,1 г.

Решение. Допустим, что барабанная перепонка совершает в воздухе свободные колебания. Тогда она будет иметь ту же скорость простого гармонического движения, что и воздух. Поэтому средняя кинетическая энергия, передаваемая перепонке, равна $W = \frac{1}{2} m \langle u^2 \rangle$, где u — скорость колебаний воздуха:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega^2 A^2; \quad W = \frac{m\omega^2 A^2}{4}.$$

Используем связь интенсивности I звуковой волны с ее частотой и амплитудой колебаний:

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v.$$

Тогда для средней кинетической энергии получаем

$$W = \frac{mI}{2\rho v}.$$

На пороге слышимости $I = I_0 = 10^{-12}$ Вт/м², так что $W = 1,1 \cdot 10^{-19}$ Дж. Данное значение всего в 20 раз превышает собственную тепловую энергию. Это тем более интересно, что интенсивность большинства обычных звуков имеет порядок $10^{10} I_0$. Природа зачем-то снабдила нас исключительно чувствительным слуховым аппаратом. При интенсивности звука $I_{\min} \sim I_0/20 \sim 10^{-13}$ Вт/м² энергия звуковых колебаний имеет порядок тепловой энергии, так что такой звук не может быть выделен из теплового шума.

ПРИМЕР 102. Струна длиной $l = 30$ см и массой $m = 10$ г звучит на самой низкой возможной для нее ноте — «до» первой октавы ($\nu = 262$ Гц). Чему равно натяжение струны?

Решение. Раз струна звучит на основном тоне, на ее длине укладывается ровно половина стоячей волны: $\lambda = 2l$. Скорость волны определяем как $v = \lambda\nu = 2l\nu$. Из выражения для скорости волны на струне $v = \sqrt{T/\rho_{\text{л}}}$ находим $T = \rho_{\text{л}}v^2 = 4\rho_{\text{л}}l^2\nu^2$. Поскольку линейная плотность струны равна $\rho_{\text{л}} = m/l$, имеем $T = 4ml\nu^2 = 824$ Н. Это соответствует довольно сильному натяжению для такой легкой струны (как будто на ней повис человек массой $M = T/g = 84$ кг). Поэтому струны музыкальных инструментов обычно делают из прочных металлических сплавов.

ПРИМЕР 103. Музыкант берет на трубе ноту «ля» первой октавы ($\nu = 440$ Гц). Какой частоте будет это соответствовать, если заполнить трубу гелием? Температура в помещении $T = 293$ К.

Решение. Найдем сначала скорость звука в гелии: $v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}$. Для одноатомного газа показатель адиабаты $\gamma = 1,67$, молярная масса гелия $\mu = 4$ г/моль. Тогда $v_{\text{He}} = \sqrt{1,67 \cdot 8,31 \cdot 293/0,004} = 1008$ м/с. Скорость звука $v = 343$ м/с в воздухе при тех же условиях найдена в учебнике (т. 2, формула (27.30)).

При смене газа длина трубы остается неизменной, т. е. неизменна длина волны извлекаемого звука. Тогда для частот имеем соотношения $\nu \cdot \lambda = v$; $\nu_{\text{He}} \cdot \lambda = v_{\text{He}}$. Отсюда

$$\nu_{\text{He}} = \nu \frac{v_{\text{He}}}{v} = 440 \frac{1008}{343} = 1293 \text{ Гц.}$$

Очевидно, что эта частота даст намного более высокую ноту. Из специальных таблиц следует, что мы услышим в этом случае ноту, близкую к «ми» третьей октавы.

ПРИМЕР 104. Температура T_0 воздуха у поверхности Земли равна 300 К; при увеличении высоты она понижается со скоростью $T' = 7$ мК/м. За какое время звук, распространяясь, достигнет высоты $h = 8$ км?

Решение. На высоте x температура воздуха дается соотношением $T(x) = T_0 - T'x$. Скорость звука на этой высоте находится по формуле

$$v(x) = \sqrt{\gamma \frac{RT(x)}{\mu}} = v_0 \sqrt{1 - \frac{T'}{T} x},$$

где $v_0 = \sqrt{\gamma \frac{RT_0}{\mu}}$ — скорость звука у поверхности Земли. Подставляя числовые данные, находим $v_0 = 347$ м/с.

Скорость распространения волнового фронта на высоте x равна $v(x)$, т. е. за время dt фронт пройдет расстояние $dx = v(x)dt$. Записывая это соотношение в виде $dt = \frac{dx}{v(x)}$ и интегрируя обе части (по времени от 0 до искомого t , по высоте от $x = 0$ до $x = h$), получаем

$$t = \frac{1}{v_0} \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{T'}{T} x}} = \frac{2T_0}{v_0 T'} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{T'}{T_0} h} \right).$$

Подставляя сюда числовые данные, находим

$$t = \frac{2 \cdot 300}{347 \cdot 0,007} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{7 \cdot 8}{300}} \right) = 24,2 \text{ с.}$$

Величина $v_h = \sqrt{\gamma \frac{R(T_0 - T')}{\mu}} = v_0 \sqrt{1 - \frac{T'}{T_0} h}$ — это скорость звука на высоте h . Выражая отсюда комбинацию $T'h/T_0$ через отношение v_h/v_0 , мы можем представить результат в виде $t = h/\langle v \rangle$, где $\langle v \rangle = (v_0 + v_h)/2$ есть среднее арифметическое скоростей звука у поверхности и на высоте h . Поскольку на высоте h температура $T_h = 300 - 0,007 \cdot 8000/300 = 244 \text{ К}$, можно найти скорость звука: $v_h = 313 \text{ м/с}$. Значит, средняя скорость $\langle v \rangle = (347 + 313)/2 = 330 \text{ м/с}$, и мы приходим к тому же результату: $t = 8000/330 = 24,2 \text{ с}$.

ПРИМЕР 105. Источник звука частотой $\nu = 18 \text{ кГц}$ приближается к неподвижно установленному резонатору, настроенному на акустическую волну длиной $\lambda = 1,7 \text{ см}$. С какой скоростью должен двигаться источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызывали колебания резонатора? Температура T воздуха равна 290 К .

Решение. Сначала найдем собственную частоту колебаний резонатора: $\nu_{\text{рез}} = v/\lambda$. Скорость звука при данных условиях можно найти по формуле $v = \sqrt{\gamma RT/\mu}$, где показатель адиабаты $\gamma = 1,4$, а молярная масса $\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$. Отсюда находим: $v = 341,1 \text{ м/с}$. Тогда $\nu_{\text{рез}} = 20,1 \text{ кГц}$.

Из-за эффекта Доплера частота звука, воспринимаемого прибором (резонатором), зависит от скорости $v_{\text{ист}}$ источника звука:

$$\nu = \nu_0 \frac{v}{v - v_{\text{ист}}}.$$

Мы учли, что в данном случае резонатор неподвижен. Чтобы волны, приходящие к резонатору, вызывали его колебания, частота воспринимаемых резонатором волн должна совпадать с собственной частотой резонатора, т. е. $\nu = \nu_{\text{рез}}$. Тогда

$$v_{\text{ист}} = v \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu_{\text{рез}}} \right).$$

Подставив заданные и найденные числовые значения, получим $v_{\text{ист}} = 35,6 \text{ м/с}$.

ПРИМЕР 106. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 600$ нм движется по направлению к наблюдателю со скоростью $v = 0,1c$, где c — скорость распространения электромагнитных волн. Определить длину волны излучения, которую зарегистрирует спектральный прибор наблюдателя. Каким будет результат наблюдения, если источник будет удаляться от наблюдателя с той же скоростью?

Решение. Так как источник движется прямо на наблюдателя (угол $\alpha = 0$), спектральный прибор зарегистрирует электромагнитное излучение частотой

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

где $\beta = v/c = 0,1$; $\nu_0 = c/\lambda_0$ — собственная частота монохроматического излучения источника.

Длина волны регистрируемого излучения

$$\lambda_+ = c/\nu = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Подставляя числовые значения, находим $\lambda_+ = 0,905\lambda_0 = 543$ нм.

При удалении источника ($\alpha = \pi$) выражение для регистрируемой частоты примет вид

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}},$$

так что для наблюдаемой длины волны находим

$$\lambda_- = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Численный расчет дает $\lambda_- = 1,106\lambda_0 = 663$ нм. Любопытно, что среднее геометрическое этих величин в точности равно длине волны неподвижного излучателя: $\sqrt{\lambda_+\lambda_-} = \lambda_0$.

IV.2.B. Задачи для самостоятельной работы

Уравнение плоской волны

Задача IV.2.1. Задано уравнение плоской волны $u(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$, где $A = 0,5$ см; $\omega = 628$ с⁻¹; $k = 2$ м⁻¹. Определить: 1) частоту колебаний ν и длину волны λ ; 2) фазовую скорость волны v ; 3) максимальные значения скорости \dot{u}_{\max} и ускорения \ddot{u}_{\max} колебаний частиц среды.

Задача IV.2.2. Плоская звуковая волна возбуждается источником колебаний частоты $\nu = 200$ Гц. Амплитуда A колебаний источника равна 4 мм. 1) Написать зависимость от времени $u(0, t)$ смещения точки среды, являющейся источником колебаний, если в начальный момент оно максимально. 2) Найти смещение $u(x, t)$ точек среды, находящихся на расстоянии $x_1 = 100$ см от источника, в момент $t_1 = 0,1$ с. Скорость v звуковой волны принять равной 300 м/с. Затуханием пренебречь.

Задача IV.2.3. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 0,5$ кГц и амплитуду $A = 0,25$ мм, распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найти: 1) скорость v распространения волн; 2) максимальную скорость \dot{i}_{\max} частиц среды.

Задача IV.2.4. Плоская звуковая волна имеет период $T = 3$ мс, амплитуду $A = 0,2$ мм и длину волны $\lambda = 1,2$ м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние $x = 2$ м, найти: 1) смещение $u(x, t)$ в момент $t = 7$ мс; 2) скорость \dot{i} ; 3) ускорение \ddot{i} для того же момента времени. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

Задача IV.2.5. От источника колебаний распространяется волна вдоль прямой линии. Амплитуда A колебаний равна 10 см. Как велико смещение точки, удаленной от источника на $x = 3\lambda/4$, в момент, когда от начала колебаний прошло время $t = 0,9T$?

Задача IV.2.6. Волна с периодом $T = 1,2$ с и амплитудой колебаний $A = 2$ см распространяется со скоростью $v = 15$ м/с. Чему равно: 1) смещение $u(x, t)$ точки, находящейся на расстоянии $x = 45$ м от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время $t = 4$ с; 2) скорость точки и 3) ее ускорение в том же месте в тот же момент времени?

Скорость звука¹

Задача IV.2.7. Моряк в трюме ударяет по борту корабля чуть ниже уровня воды. Эхо (волна отражается от дна моря) приходит через 1,8 с. Чему равна глубина моря в этом месте?

Задача IV.2.8. Однородная веревка массой $m = 100$ г и длиной $L = 20$ м подвешена вертикально, к ее нижнему концу привязан груз $M = 10$ кг. Чему равна скорость поперечных волн в этой веревке?

Задача IV.2.9. Найти скорость распространения продольных упругих колебаний в следующих металлах: 1) алюминий; 2) медь; 3) вольфрам.

Задача IV.2.10. Найти скорость распространения поперечных упругих колебаний в следующих металлах: 1) алюминий; 2) сталь; 3) серебро.

Задача IV.2.11. Определить максимальное и минимальное значения длины λ звуковых волн, воспринимаемых ухом, соответствующие граничным частотам $\nu_{\min} = 16$ Гц и $\nu_{\max} = 20$ кГц. Скорость звука принять равной 340 м/с.

Задача IV.2.12. Определить скорость звука в азоте при температуре $T = 300$ К.

Задача IV.2.13. Найти скорость v звука в воздухе при температурах $T_1 = 290$ К и $T_2 = 350$ К. Молярная масса воздуха равна 29 г/моль.

¹ Данные для вычисления скорости звука в твердых телах можно найти в табл. П.7 приложения. Если в условии задачи не указана скорость звука и не приведены данные, по которым ее можно вычислить, то принимается, что скорость звука в воде равна 1450 м/с, а в воздухе — 332 м/с.

Задача IV.2.14. Наблюдатель, находящийся на расстоянии $l = 800$ м от источника звука, слышит звук, пришедший по воздуху, на $\Delta t = = 1,75$ с позднее, чем звук, пришедший по воде. Найти скорость звука в воде, если температура воздуха равна 300 К.

Задача IV.2.15. Скорость v звука в некотором газе при нормальных условиях равна 308 м/с. Плотность ρ газа равна $1,78$ кг/м³. Определить показатель адиабаты для данного газа.

Задача IV.2.16. Скорость v звука в некотором газе при нормальных условиях равна 337 м/с. Плотность ρ газа равна $1,25$ кг/м³. Определить показатель адиабаты для данного газа.

Задача IV.2.17. Найти отношение скоростей звука в водороде и углекислом газе при одинаковой температуре газов.

Эффект Доплера для звуковых волн

Задача IV.2.18. Поезд проходит мимо станции со скоростью $u = 40$ м/с. Частота ν_0 тона гудка электровоза равна 300 Гц. Определить кажущуюся частоту ν тона для человека, стоящего на платформе, в двух случаях: поезд приближается; поезд удаляется.

Задача IV.2.19. Мимо неподвижного электровоза, гудок которого дает сигнал частотой $\nu_0 = 300$ Гц, проезжает поезд со скоростью $u = 40$ м/с. Чему равна кажущаяся частота ν тона для пассажира, когда поезд приближается к электровозу и когда удаляется от него?

Задача IV.2.20. Мимо железнодорожной платформы проходит электропоезд. Наблюдатель, стоящий на платформе, слышит звук сирены поезда. Когда поезд приближается, кажущаяся частота звука $\nu_+ = 1100$ Гц; когда удаляется, кажущаяся частота $\nu_- = 900$ Гц. Найти скорость u электровоза и частоту ν_0 звука, издаваемого сиреной.

Задача IV.2.21. Когда поезд проходит мимо неподвижного наблюдателя, высота тона звукового сигнала меняется скачком. Определить относительное изменение частоты $\Delta\nu/\nu$, если скорость u поезда равна 54 км/ч.

Задача IV.2.22. Резонатор и источник звука частотой $\nu_0 = 8$ кГц расположены на одной прямой. Резонатор настроен на длину волны $\lambda = 4,2$ см и установлен неподвижно. Источник звука может перемещаться по направляющим вдоль прямой. С какой скоростью u и в каком направлении должен двигаться источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызывали колебания резонатора?

Задача IV.2.23. Поезд движется со скоростью $u = 120$ км/ч. Он дает свисток длительностью $\tau_0 = 5$ с. Какой будет кажущаяся продолжительность τ свистка для неподвижного наблюдателя, если: 1) поезд приближается к нему; 2) удаляется? Принять скорость звука равной 348 м/с.

Задача IV.2.24. Скорый поезд приближается к стоящему на путях электропоезду со скоростью $u = 72$ км/ч. Электропоезд подает звуковой сигнал частотой $\nu_0 = 0,6$ кГц. Определить кажущуюся частоту ν звукового сигнала, воспринимаемого машинистом скорого поезда.

Задача IV.2.25. На шоссе сближаются две автомашины со скоростями $u_1 = 30$ м/с и $u_2 = 20$ м/с. Первая из них подает звуковой сигнал частотой $\nu_0 = 600$ Гц. Найти кажущуюся частоту ν звука, воспринимаемого водителем второй автомашины, в двух случаях: 1) до встречи; 2) после встречи. Изменится ли ответ (если изменится, то как) в случае подачи сигнала второй машиной?

Задача IV.2.26. Узкий пучок ультразвуковых волн частотой $\nu_0 = 50$ кГц направлен от неподвижного локатора к приближающейся подводной лодке. Определить скорость u подводной лодки, если частота $\Delta\nu$ биений (разность частот колебаний источника и сигнала, отраженного от лодки) равна 250 Гц. Скорость v ультразвука в морской воде принять равной 1,5 км/с.

Энергия звуковых волн и громкость звука

Задача IV.2.27. По цилиндрической трубе диаметром $d = 20$ см и длиной $l = 5$ м, заполненной сухим воздухом, распространяется звуковая волна средней за период интенсивностью $I = 50$ мВт/м². Найти энергию W звукового поля, заключенного в трубе.

Задача IV.2.28. Интенсивность звука $I = 1$ Вт/м². Определить среднюю объемную плотность $\langle w \rangle$ энергии звуковой волны, если звук распространяется в сухом воздухе при нормальных условиях.

Задача IV.2.29. Мощность N изотропного точечного источника звуковых волн равна 10 Вт. Чему равна средняя объемная плотность $\langle w \rangle$ энергии на расстоянии $r = 10$ м от источника волн? Температуру T воздуха принять равной 250 К.

Задача IV.2.30. Найти мощность N точечного изотропного источника звука, если на расстоянии $r = 25$ м от него интенсивность I звука равна 20 мВт/м². Чему равна средняя объемная плотность $\langle w \rangle$ энергии на этом расстоянии?

Задача IV.2.31. Определить уровень громкости L звука, если его интенсивность равна: 1) 100 пВт/м²; 2) 10 мВт/м².

Задача IV.2.32. На расстоянии $r_1 = 24$ м от точечного изотропного источника звука уровень его громкости $L_1 = 32$ дБ. Найти уровень интенсивности L_2 звука этого источника на расстоянии $r_2 = 16$ м.

Задача IV.2.33. Звуковая волна прошла через перегородку, вследствие чего уровень громкости L звука уменьшился на 30 дБ. Во сколько раз уменьшилась интенсивность I звука?

Задача IV.2.34. Уровень громкости L шума мотора равен 60 дБ. Каким будет уровень громкости, если одновременно будут работать: 1) два таких мотора; 2) десять таких моторов?

Электромагнитные волны¹

Задача IV.2.35. Частоты средневолнового диапазона находятся в интервале 55 ... 1600 кГц. 1) Чему равны соответствующие этому диа-

¹ В задачах этого раздела предполагается, что электромагнитная волна распространяется в вакууме.

пазону длины волн? 2) Чему равны длины волн УКВ-диапазона, частоты которого занимают интервал 88 ... 108 МГц?

Задача IV.2.36. Радиостанция вещает на частоте 90,5 МГц. Чему равна соответствующая длина волны?

Задача IV.2.37. Средневолновая станция принимается, когда стрелка на шкале радиоприемника стоит против числа 1550 кГц. Чему равна длина волны, на которой работает эта станция?

Задача IV.2.38. Электрическое поле в плоской электромагнитной волне излучается по закону $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$, $E_y = 0$, $E_z = 0$, где $E_0 = 1$ кВ/м. Определить: 1) величину и направление \vec{B} ; 2) направление распространения волны.

Задача IV.2.39. Магнитное поле в плоской электромагнитной волне излучается по закону $B_x = B_0 \cos(\omega t + kz)$, $B_y = 0$, $B_z = 0$, где $B_0 = 2,5$ мкТл. Определить: 1) величину и направление \vec{E} ; 2) направление распространения волны.

Задача IV.2.40. Среднеквадратичное значение индукции магнитного поля в электромагнитной волне равно $B = 2,5$ нТл. Чему равна интенсивность этой волны?

Задача IV.2.41. Чему равна объемная плотность энергии солнечного излучения вблизи поверхности Земли?

Задача IV.2.42. Оценить среднюю мощность излучения Солнца. Солнечная постоянная $C = 1,4$ кВт/м².

Задача IV.2.43. Чему равны амплитудные значения E_0 и B_0 волны на расстоянии $r = 10$ м от источника света мощностью $N = 100$ Вт? Считать, что лампа излучает свет равномерно по всем направлениям на единственной частоте.

Эффект Доплера для электромагнитных волн

Задача IV.2.44. Космический корабль удаляется от Земли со скоростью $v = 10$ км/с. Частота ν_0 электромагнитных волн, излучаемых антенной корабля, равна 30 МГц. Определить доплеровское смещение $\Delta\nu$ частоты, воспринимаемой приемником.

Задача IV.2.45. Для определения угловой скорости вращения солнечного диска измеряли относительный сдвиг спектральных линий от восточного и западного краев Солнца. Он оказался равным $1,5 \cdot 10^{-5}$. Определить: 1) угловую скорость вращения солнечного диска; 2) продолжительность «солнечных суток» (время обращения Солнца вокруг собственной оси). Радиус Солнца $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8$ м.

Задача IV.2.46. Оценить скорость v , с которой должна была бы двигаться машина, чтобы красный сигнал светофора ($\lambda_{кр} = 650$ нм) воспринимался как зеленый ($\lambda_{зел} = 550$ нм).

Задача IV.2.47. С какой скоростью удаляется от нас некоторая туманность, если известно, что линия водорода $\lambda = 434$ нм в ее спектре смещена в красную сторону на $\Delta\lambda = 130$ нм?

Задача IV.2.48. Определить обусловленное эффектом Доплера уширение $\Delta\lambda/\lambda$ спектральных линий излучения атома водорода, находящегося при температуре $T = 300$ К.

Задача IV.2.49. В результате эффекта Доплера происходит уширение линий γ -излучения ядер. Оценить уширение $\Delta\nu/\nu$ линий излучения ядер кобальта ($\mu_{\text{Co}} = 59$ г/моль), находящихся при температуре: 1) комнатной ($T = 290$ К); 2) ядерного взрыва ($T = 10$ МК).

Задача IV.2.50. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 50$ см. Определить скорость приближающегося самолета, если частота биений между сигналом передатчика и сигналом, отраженным от самолета, в месте расположения локатора равна $\Delta\nu = 0,5$ кГц.

Задача IV.2.51. Плоское зеркало удаляется от наблюдателя со скоростью v вдоль нормали к плоскости зеркала. На зеркало посылается пучок света длиной волны $\lambda_0 = 500$ нм. Определить длину волны λ света, отраженного от зеркала, движущегося со скоростью: 1) $v = 0,2$ с; 2) $v = 9$ км/с.

Задача IV.2.52. Плоское зеркало приближается к наблюдателю со скоростью v вдоль нормали к плоскости зеркала. На зеркало посылается пучок света длиной волны $\lambda_0 = 600$ нм. Определить длину волны света, отраженного от зеркала, движущегося со скоростью: 1) $v = 0,1$ с; 2) $v = 9$ км/с.

Часть V

ОСНОВЫ ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ

V.1. Интерференция

V.1.A. Основные формулы

- Оптическая длина пути световой волны в однородной среде

$$L = nl,$$

где l — геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n .

- Скорость света в среде

$$v = c/n,$$

где c — скорость света в вакууме.

- Временная когерентность. Время когерентности $t_{\text{ког}}$ определяется как

$$t_{\text{ког}} \sim \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

где $\Delta\omega$ — разброс частот волн, входящих в световой пучок.

Интерференционная картина может наблюдаться при условии

$$t_{\text{ког}} \gg t_{\text{приб}},$$

где $t_{\text{приб}}$ — характерное время регистрации изображения прибором (глазом, фотопленкой и т. п.).

- Длина когерентности $l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}}$ — это расстояние, на которое распространяется свет за время когерентности. Наблюдение интерференционной картины возможно, когда оптические разности хода в системе гораздо меньше длины когерентности. По порядку величины длина когерентности определяется как

$$l_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

где $\Delta\lambda$ — интервал длин волн немонахроматического источника излучения.

- Пространственная когерентность. Радиус когерентности определяется как

$$\rho_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda}{\Delta\varphi},$$

где $\Delta\varphi$ — угловой размер источника.

Интерференционная картина может наблюдаться при условии $\rho_{\text{ког}} \gg l_{\text{приб}}$, где $l_{\text{приб}}$ — разрешающая способность прибора.

- Расстояние между интерференционными полосами на экране, расположенном параллельно плоскости, содержащей два когерентных источника света:

$$\Delta x = \lambda \frac{l}{d},$$

где λ — длина волны света; l — расстояние от экрана до источников света; d — расстояние между источниками.

- Условие максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от тонкой пластинки толщиной d :
для максимумов

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_{\text{п}}} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

для минимумов

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_{\text{п}}} = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где $i_{\text{п}}$ — угол падения света.

При интерференции проходящего света в тонких пленках условия максимумов и минимумов обратны условиям для отраженного света.

- Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (кольца образуются при интерференции света, отраженного от воздушной прослойки между стеклянной пластинкой и соприкасающейся с ней выпуклой поверхностью линзы радиусом R)

$$r_m = \sqrt{R\lambda \left(m + \frac{1}{2}\right)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где m — номер кольца.

Радиусы темных колец определяются выражением

$$r_m = \sqrt{R\lambda m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Значению $m = 0$ соответствует середина центрального темного пятна. В проходящем свете расположение светлых и темных колец обратны их расположению в отраженном свете.

V.1.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 107. В точку A экрана от источника S_1 монохроматического света длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм приходят два луча: непосредственно от источника луч S_1A , перпендикулярный экрану, и луч S_1BA , отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу S_1A (зеркало Ллойда, рис. 84). Расстояние $l_1 = S_1A$ от экрана до источника равно 1 м, расстояние h от луча S_1A до плоскости зеркала равно 2 мм. Определить: 1) что будет наблюдаться в точке A экрана — усиление или ослабление интенсивности; 2) как изменится интенсивность в точке A , если на пути луча перпендикулярно ему

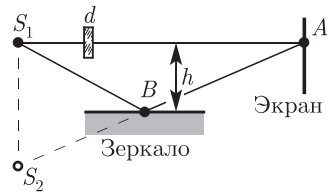


Рис. 84

поместить плоскопараллельную пластинку стекла ($n = 1,55$) толщиной $d = 6$ мкм.

Решение. Построим мнимое изображение S_2 источника в зеркале. Расстояние между источниками равно $2h$, расстояние же $l_2 = S_2A$ от мнимого источника до точки A находится из теоремы Пифагора:

$$l_2 = \sqrt{l_1^2 + (2h)^2} = l_1 \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l_1}\right)^2} \approx l_1 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2h}{l_1}\right)^2\right] = l_1 + \frac{2h^2}{l_1}. \quad (\text{V.1.1})$$

Здесь мы воспользовались малостью h по сравнению с l_1 и разложили квадратный корень в ряд Тейлора, оставив лишь первые два члена разложения.

Источники S_1 и S_2 являются когерентными, поэтому при сложении волн, приходящих от этих источников на экран, возникает интерференционная картина. Усиление или ослабление интенсивности в той или иной точке экрана зависит от оптической разности хода интерферирующих лучей, другими словами, от числа m полуволн, укладывающихся на оптической разности хода:

$$m = \frac{L_2 - L_1}{\lambda/2}. \quad (\text{V.1.2})$$

Если m — целое четное, то интенсивность будет максимальной, если m — целое нечетное, то интенсивность минимальна. При дробном m происходит или частичное усиление (если m ближе к четному числу), или частичное ослабление (если m ближе к нечетному числу).

1) Оптическая разность хода будет складываться из геометрической разности $l_2 - l_1$ (оба луча идут в воздухе, так что $L_1 = l_1$; $L_2 = l_2$) и дополнительной разности хода $\lambda/2$, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении от оптически более плотной среды (зеркала). Таким образом,

$$L_2 - L_1 = l_2 - l_1 + \frac{\lambda}{2} = \frac{2h^2}{l_1} + \frac{\lambda}{2}. \quad (\text{V.1.3})$$

Подставив полученное выражение в (V.1.2), найдем

$$m = \frac{4h^2}{l_1\lambda} + 1 = \frac{4 \cdot (0,002)^2}{0,5 \cdot 10^{-6}} + 1 = 33. \quad (\text{V.1.4})$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, то в точке A наблюдается минимум интенсивности.

2) Стеклопластинка толщиной d , поставленная на пути луча S_1A , изменит его оптическую длину пути. Теперь оптическая длина пути L_1 будет складываться из геометрической длины пути $l_1 - d$ в воздухе и оптической длины пути nd луча в самой пластинке, т. е. $L_1 = l_1 + (n - 1)d$. Соответственно модифицируются формулы (V.1.3) для оптической разности хода лучей и (V.1.4) для числа m :

$$L_2 - L_1 = \frac{2h^2}{l_1} + \frac{\lambda}{2} - (n - 1)d; \quad (\text{V.1.5})$$

$$m' = \frac{4h^2}{l_1\lambda} + 1 - 2(n - 1) \frac{d}{\lambda} = m - 2(n - 1) \frac{d}{\lambda}. \quad (\text{V.1.6})$$

Отсюда $m' = 33 - 2 \cdot 0,55 \cdot 6 / 0,5 = 33 - 13,2 = 19,8$. Число длин полуволн оказалось дробным. Так как 19,8 ближе к целому четному числу 20, чем к целому нечетному 19, то в точке A будет частичное усиление света.

ПРИМЕР 108. На толстую стеклянную пластинку, покрытую очень тонкой пленкой, показатель преломления n вещества которой равен 1,4, падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 0,6$ мкм). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определить толщину d пленки.

Решение. Подробное вычисление оптической разности хода

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_{\text{п}}} - \frac{\lambda}{2}, \quad (\text{V.1.7})$$

где $i_{\text{п}}$ — угол падения света, отсчитываемый от нормали, при отражении света от тонкой пленки дано в учебнике (см. т. 2, п. 29.5). Поэтому нет нужды повторять эти выкладки, и мы найдем лишь те изменения, которые надо внести в эту формулу в связи с условиями задачи. А именно: раньше тонкая пленка находилась в воздухе, а сейчас она лежит на стеклянной пластинке, показатель преломления которой больше показателя преломления пленки. Следовательно, при отражении от нижнего края добавится дополнительная разность хода $\lambda/2$. Кроме того, надо положить $i_{\text{п}} = 0$, так как свет по условию падает по нормали. В результате получаем разность хода лучей, отраженных от верхнего и нижнего краев пленки:

$$\Delta = 2dn. \quad (\text{V.1.8})$$

Так как свет максимально ослаблен, эта разность хода равна нечетному числу полуволн:

$$2dn = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{V.1.9})$$

откуда искомая толщина пленки

$$d = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n}. \quad (\text{V.1.10})$$

Полагая $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, получим ряд возможных значений толщины пленки: $d_0 = 0,107$ мкм; $d = 0,321$ мкм; $d_2 = 0,536$ мкм и т. д.

ПРИМЕР 109. На стеклянный ($n = 1,5$) клин нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм (рис. 85). В возникшей при этом интерференционной картине на отрезке длиной $l = 1$ см наблюдается 10 полос. Определить преломляющий угол θ клина.

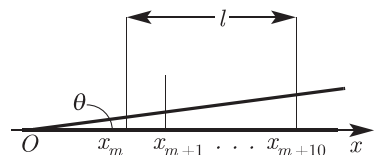


Рис. 85

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти пучки когерентны, поэтому наблюдается устойчивая картина интерференции.

Так как интерференционные полосы наблюдаются при малых углах клина, то отраженные пучки света будут практически параллельны.

Для нахождения оптической разности хода снова можно применить формулу (V.1.7), где можно положить $i_{\text{п}} = 0$:

$$\Delta = 2d(x)n - \frac{\lambda}{2}. \tag{V.1.11}$$

Здесь учитывается, что толщина клина меняется в зависимости от координаты x (начало отсчета совмещается с вершиной клина) по закону

$$d(x) = x \operatorname{tg} \theta \approx x \theta \tag{V.1.12}$$

($\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ при малых углах).

Темные полосы видны на тех участках x_m клина, для которых разность хода кратна нечетному числу полуволин $\frac{\lambda}{2}$. Отсюда находим координаты темных полос:

$$x_m = (m + 1) \frac{\lambda}{2n\theta}. \tag{V.1.13}$$

По условию $l = x_{m+10} - x_m$, откуда

$$\theta = \frac{5\lambda}{nl} = \frac{5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 0,01} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 0,01146^\circ = 41,25''. \tag{V.1.14}$$

ПРИМЕР 110. Белый свет проходит через две щели, отстоящие друг от друга на расстояние $d = 0,5$ мм. Интерференционная картина наблюдается на экране, который находится на расстоянии $l = 2,5$ м. Полоса первого порядка напоминает радугу, фиолетовую с одного края и красную с другого. Фиолетовый цвет находится на расстоянии $\Delta x_{\text{ф}} = 2$ мм, а красный — на расстоянии $\Delta x_{\text{к}} = 3,5$ мм от середины центральной белой полосы. Оценить длины волн фиолетового и красного цветов.

Решение. Воспользуемся соотношением

$$\Delta x = \lambda \frac{L}{d},$$

откуда

$$\lambda = \Delta x \frac{d}{l}.$$

Для фиолетового цвета $\lambda_{\text{ф}} = 0,002 \cdot 0,0005/2,5 = 400$ нм, для красного $\lambda_{\text{к}} = 0,0035 \cdot 0,0005/2,5 = 700$ нм.

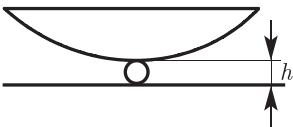


Рис. 86

ПРИМЕР 111. При наблюдении колец Ньютона между линзой радиусом $R = 0,5$ м и плоской пластинкой попала небольшая частица толщиной $h = 0,2$ мм (рис. 86). Найти радиусы первых светлых колец при наблюдении в отраженном красном ($\lambda_{\text{к}} = 600$ нм) и фиолетовом ($\lambda_{\text{ф}} = 450$ нм) свете. Предполагаются идеализированные условия, когда можно наблюдать максимумы сколь угодно высокого порядка.

Решение. Выражение $\Delta L = r_m^2/R + \lambda/2$ было получено в учебнике (т. 2, п. 29.6) для оптической разности хода лучей в линзе, лежащей

на пластинке. Теперь луч, отражающийся от пластинки, проходит (в воздухе) дополнительное расстояние $2h$. Следовательно, в данном случае оптическая разность хода лучей, отраженных от пластинки и сферической поверхности линзы, дается выражением

$$\Delta L = \frac{r_m^2}{R} + \frac{\lambda}{2} + 2h. \quad (\text{V.1.15})$$

Светлые кольца наблюдаются, когда разность хода равна целому числу длин волн: $\Delta L = (m + 1)\lambda$, т. е. квадраты радиусов светлых колец равны

$$r_m^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right) R\lambda - 2hR. \quad (\text{V.1.16})$$

Теперь надо учесть, что нам неизвестен номер m первого наблюдаемого кольца. Дело в том, что наблюдаются кольца, для которых $r_m^2 > 0$ в формуле (V.1.16), и первое наблюдаемое кольцо может вовсе не соответствовать номеру $m = 1$.

Начнем с красного кольца. Из неравенства $r_{к,m}^2 > 0$ находим ограничения на число m :

$$m > -\frac{1}{2} + \frac{2 \cdot (2 \cdot 10^{-4})}{600 \cdot 10^{-9}} = 666,2, \quad (\text{V.1.17})$$

т. е. первое красное кольцо соответствует $m = 667$. Теперь подставляем числовые значения в формулу (V.1.16):

$$\begin{aligned} r_{к,667} &= \sqrt{667,5 \cdot 0,5 \cdot (600 \cdot 10^{-9}) - 2(2 \cdot 10^{-4})0,5} = \\ &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,5 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (\text{V.1.18})$$

Для первого фиолетового кольца имеем аналогичным образом:

$$m > -\frac{1}{2} + \frac{2 \cdot (2 \cdot 10^{-4})}{450 \cdot 10^{-9}} = 888,9, \quad (\text{V.1.19})$$

т. е. $m = 889$. Тогда

$$\begin{aligned} r_{ф,889} &= \sqrt{889,5 \cdot 0,5 \cdot (450 \cdot 10^{-9}) - 2(2 \cdot 10^{-4})0,5} = \\ &= 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,37 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (\text{V.1.20})$$

ПРИМЕР 112. Чему равна толщина d оптического покрытия из MgF ($n_1 = 1,38$), предназначенного для гашения отраженного света в окрестности длин волн 550 нм при нормальном падении света на стекло с $n_2 = 1,5$ (неотражающая «просветленная» оптика)?

Решение. При отражении света от передней и задней поверхностей покрытия происходит сдвиг по фазе на π (оба луча отражаются от оптически более плотной среды). Следовательно, для того чтобы при нормальном падении возникала ослабляющая интерференция, на оптической толщине покрытия должно укладываться полуцелое число длин волн, т. е. $2dn_1 = \lambda(m + 1/2)$, где m — целое число. Обычно выбирают минимальную толщину ($m = 0$), так как при этом ослабляющая интерференция возникает в достаточно широком диапазоне углов. При $m = 0$ получаем $d = \lambda/4n = 550/(4 \cdot 1,38) = 99,6$ нм.

V.1.B. Задачи для самостоятельной работы**Интерференция волн от двух когерентных источников**

Задача V.1.1. Сколько длин волн монохроматического света с частотой колебаний $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц уложится на пути длиной $l = 1,2$ мм: 1) в вакууме; 2) в стекле ($n = 1,5$)?

Задача V.1.2. Определить длину l_1 отрезка, на котором укладывается столько же длин волн в вакууме, сколько их укладывается на отрезке $l_2 = 3$ мм в воде ($n = 1,33$).

Задача V.1.3. Какой длины l_1 путь пройдет фронт волны монохроматического света в вакууме за то же время, за какое он проходит путь длиной $l_2 = 1$ м в воде ($n = 1,33$)?

Задача V.1.4. На пути световой волны, идущей в воздухе, поставили стеклянную ($n = 1,5$) пластинку толщиной $h = 1$ мм. На сколько изменится оптическая длина пути, если волна падает на пластинку: 1) по нормали; 2) под углом $i_{\text{п}} = 30^\circ$?

Задача V.1.5. На пути монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм находится плоскопараллельная стеклянная пластина ($n = 1,5$) толщиной $d = 0,1$ мм. Свет падает на пластину нормально. На какой угол φ следует повернуть пластину, чтобы оптическая длина пути L изменилась на $\lambda/2$?

Задача V.1.6. Оптическая разность хода ΔL двух интерферирующих волн монохроматического света равна $0,3\lambda$. Определить разность фаз $\Delta\varphi$.

Задача V.1.7. Найти все длины волн видимого света (от $0,76$ до $0,38$ мкм), которые будут: 1) максимально усилены; 2) максимально ослаблены — при оптической разности хода ΔL интерферирующих волн, равной $1,8$ мкм.

Задача V.1.8. Расстояние между двумя когерентными источниками света ($\lambda = 0,5$ мкм), расположенными на одинаковом расстоянии от экрана, равно $0,1$ мм. Расстояние между интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно 1 см. Определить расстояние от источника до экрана.

Задача V.1.9. Расстояние d между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить длину волны λ для источника монохроматического света, если ширина b полос интерференции на экране равна $1,5$ мм.

Задача V.1.10. В опыте Юнга расстояние между щелями равно $0,8$ мм. На каком расстоянии от щелей следует расположить экран, чтобы ширина интерференционной полосы в красном свете ($\lambda = 640$ нм) оказалась равной 2 мм?

Задача V.1.11. Падая на две щели, расположенные на расстоянии $d = 0,026$ мм друг от друга, монохроматический свет образует интерференционную полосу четвертого порядка под углом $\theta = 6,4^\circ$. Чему равна длина волны света?

Задача V.1.12. Свет с длиной волны 680 нм падает на две щели и создает интерференционную картину, в которой полоса четвертого порядка находится на расстоянии 28 мм от центральной полосы. Экран расположен на расстоянии 1 м от щелей. Чему равно расстояние между щелями?

Задача V.1.13. Видимый свет с самой короткой длиной волны 0,38 мкм падает на две щели, находящиеся на расстоянии 0,028 мм друг от друга. Щели и экран, отстоящий от них на расстояние 18,5 см, погружены в воду ($n = 1,33$). Определить расстояние между интерференционными полосами на экране.

Задача V.1.14. Свет с длинами волн 520 и 660 нм проходит через две щели, расстояние между которыми 0,5 мм. На какое расстояние смещены относительно друг друга интерференционные полосы второго порядка для этих двух длин волн на экране, расположенном на расстоянии 1,5 м?

Задача V.1.15. Свет с длиной волны λ падает под углом θ_i к нормали на экран с двумя щелями, расстояние между которыми равно d . Определить угол θ_m , под которым расположен максимум m -го порядка.

Задача V.1.16. При некотором расположении зеркала Ллойда (см. пример 107) ширина b интерференционной полосы на экране оказалась равной 1 мм. После того как зеркало сместили параллельно самому себе на расстояние $\Delta h = 0,3$ мм, так что его плоскость приблизилась к источнику, ширина интерференционной полосы изменилась. В каком направлении и на какое расстояние Δl следует переместить экран, чтобы ширина интерференционной полосы оказалась прежней? Длина волны монохроматического света $\lambda = 0,6$ мкм.

Задача V.1.17. При некотором расположении зеркала Ллойда (см. пример 107) ширина b интерференционной полосы на экране равна 0,25 мм. Источник отодвинули от плоскости зеркала на $\Delta h = 0,6$ мм, сохранив его расстояние $l = 1$ м до экрана, и ширина полосы уменьшилась в $n = 1,5$ раза. Найти длину волны света.

Задача V.1.18. На рис. 87 показана схема интерферометра, служащего для измерения показателей преломления прозрачных веществ. Здесь S — узкая щель, освещаемая монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 589$ нм; 1 и 2 — две одинаковые трубки с воздухом, длина каждой из которых $l = 10$ см; D — диафрагма с двумя щелями. Когда воздух в трубке 1 заменили на аммиак, интерференционная

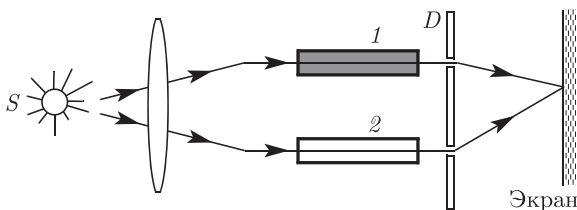


Рис. 87

картина на экране сместилась вверх на $N = 17$ полос. Показатель преломления воздуха $n_1 = 1,000277$. Определить показатель преломления n_2 аммиака.

Интерференция света в тонких пленках

Задача V.1.19. На мыльную пленку ($n = 1,3$), находящуюся в воздухе, падает нормально пучок лучей белого света. При какой наименьшей толщине d пленки отраженный свет с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции?

Задача V.1.20. Пучок монохроматических ($\lambda = 0,6$ мкм) световых волн падает под углом $i = 30^\circ$ на находящуюся в воздухе мыльную пленку ($n = 1,3$). При какой наименьшей толщине d пленки отраженные световые волны будут: 1) максимально ослаблены интерференцией; 2) максимально усилены?

Задача V.1.21. На тонкий стеклянный клин ($n = 1,55$) падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол θ между поверхностями клина равен $2'$. Определить длину световой волны λ , если расстояние b между смежными интерференционными максимумами в отраженном свете равно $0,3$ мм.

Задача V.1.22. Поверхности стеклянного ($n = 1,5$) клина образуют между собой очень малый угол $\theta = 0,2'$. На клин нормально к его поверхностям падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм. Определить ширину b интерференционной полосы.

Задача V.1.23. На тонкий стеклянный ($n = 1,5$) клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет ($\lambda = 600$ нм). Определить угол θ между поверхностями клина, если расстояние b между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм.

Задача V.1.24. Две плоскопараллельные тонкие стеклянные пластинки образуют клин с углом $\theta = 30''$. Пространство между пластинками заполнено глицерином ($n = 1,44$). На клин нормально к его поверхности падает пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. В отраженном свете наблюдается интерференционная картина. Какое число N темных интерференционных полос приходится на 1 см длины клина?

Задача V.1.25. Расстояние между вторым и первым темными кольцами Ньютона в отраженном свете равно 1 мм. Определить расстояние между десятым и девятым кольцами.

Задача V.1.26. Плосковыпуклая линза выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Определить толщину h слоя воздуха там, где в отраженном свете ($\lambda = 0,6$ мкм) видно первое светлое кольцо Ньютона.

Задача V.1.27. Диаметр второго светлого кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете ($\lambda = 0,6$ мкм) равен $1,2$ мм. Определить радиус кривизны плосковыпуклой линзы, взятой для опыта.

Задача V.1.28. Плосковыпуклая линза с радиусом кривизны $R = 25$ см выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Радиус четвертого светлого кольца Ньютона в проходящем свете равен 0,7 мм. Определить длину световой волны.

Задача V.1.29. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой стеклянной линзой налита жидкость, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла. Радиус восьмого темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете ($\lambda = 700$ нм) равен 2 мм. Радиус R кривизны выпуклой поверхности линзы равен 1 м. Найти показатель преломления n жидкости.

Задача V.1.30. На установке для наблюдения колец Ньютона был измерен в отраженном свете радиус третьего темного кольца. Когда пространство между плоскопараллельной пластиной и линзой заполнили жидкостью, тот же радиус стало иметь кольцо с номером, на единицу большим. Определить показатель преломления n жидкости.

Задача V.1.31. Когда прибор для наблюдения колец Ньютона погрузили в жидкость, диаметр восьмого темного кольца уменьшился от 2,92 до 2,48 см. Чему равен показатель преломления жидкости?

Задача V.1.32. Какой должна быть минимальная толщина воздушного слоя между двумя плоскими тонкими стеклянными пластинами, чтобы при нормальном падении света с длиной волны 640 нм отражение казалось: 1) темным; 2) светлым?

Задача V.1.33. Тонкая пленка спирта ($n_1 = 1,36$) покрывает стеклянную пластину ($n_2 = 1,58$). При нормальном падении монохроматического света доля отраженного света минимальна при $\lambda_{\min} = 520$ нм и максимальна при $\lambda_{\max} = 650$ нм. Чему равна толщина пленки?

V.2. Дифракция света

V.2.A. Основные формулы

- Характер дифракции зависит от значения безразмерного параметра $\eta = a^2/(l\lambda)$, где a — ширина щели; l — расстояние от щели до экрана; λ — длина волны ($a \gg \lambda$):
 $\eta \ll 1$ — дифракция Фраунгофера;
 $\eta \sim 1$ — дифракция Френеля;
 $\eta \gg 1$ — геометрическая оптика.
- Дифракция света на круглом отверстии. Пусть r — расстояние от точечного источника света до диафрагмы; r_0 — расстояние от диафрагмы до экрана, где наблюдается дифракционная картина. Тогда радиус k -й зоны Френеля в отверстии диафрагмы

$$\rho_k = \sqrt{\frac{rr_0}{r+r_0}} k\lambda.$$

- Для плоской волны ($r \rightarrow \infty$) имеем

$$\rho_k = \sqrt{r_0 k \lambda}.$$

- Дифракция Фраунгофера от щели при нормальном падении света. Условие минимумов интенсивности света

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где a — ширина щели; φ — угол дифракции; k — номер минимума; λ — длина волны.

Условие максимумов интенсивности света

$$a \sin \varphi = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Дифракция света на дифракционной решетке при нормальном падении лучей.

Условие главных максимумов интенсивности

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где d — постоянная решетки (ее период); φ — угол между нормалью к поверхности решетки и направлением дифрагированных волн; k — номер главного максимума.

Условие главных минимумов:

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN,$$

где $\Delta\lambda$ — наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и $\lambda + \Delta\lambda$), при которой эти линии могут быть видны раздельно в спектре, полученном посредством данной решетки; N — число штрихов решетки; k — порядковый номер наблюдаемого дифракционного максимума.

- Критерий Рэлея: две близкие точки будут видны раздельно, если середина центрального дифракционного максимума для одной точки совпадает с краем центрального максимума (т. е. с первым минимумом) для другой точки.
- Угловой размер центрального максимума для дифракционной решетки

$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{a}.$$

Похожие формулы справедливы для любого оптического прибора — меняется лишь числовой коэффициент и смысл параметра a , описывающего некий характерный размер отверстия прибора (ширина щели решетки, диаметр объектива телескопа и т. п.). Отсюда следует, что две точки, разглядываемые с помощью прибора, могут быть видны раздельно, если угловое расстояние между ними не слишком мало:

$$\Delta\varphi > \frac{\lambda}{a}.$$

Например, наименьшее угловое расстояние для двух точек, раздельно видимых в телескоп:

$$\Delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

где D — диаметр объектива.

Обратная величина $R = 1/\Delta\varphi = D/(1,22\lambda)$ называется *разрешающей силой* объектива телескопа.

V.2.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 113. На диафрагму с круглым отверстием радиусом $R = 1$ мм падает нормально параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определить максимальное расстояние r_0 от центра отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

Решение. Расстояние, при котором будет видно темное пятно, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстие. Если число зон четно, то в центре дифракционной картины будет темное пятно.

Число зон Френеля, помещающихся в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее четное число зон равно двум. Следовательно, максимальное расстояние, при котором еще будет наблюдаться темное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должны поместиться две зоны Френеля.

Таким образом, радиус отверстия должен совпасть с радиусом второй зоны Френеля: $R = \rho_2 = \sqrt{2r_0\lambda}$, откуда

$$r_0 = \frac{R^2}{2\lambda} = \frac{10^{-6}}{10^{-6}} = 1 \text{ м.}$$

ПРИМЕР 114. На щель шириной $a = 0,1$ мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda = 0,6$ мкм). Определить ширину b центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстояние $l = 1$ м.

Решение. Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими к нему справа и слева минимумами интенсивности. Направления на последние даются выражением $a \sin \varphi = \pm \lambda$, т. е. для малых углов $\varphi = \pm \lambda/a$. Поэтому угловой размер центрального максимума равен $2|\varphi|$. При расстоянии до экрана l получаем

$$b \approx 2|\varphi|l = 2\lambda \frac{l}{a} = \frac{2(0,6 \cdot 10^{-6}) \cdot 1}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 0,012 \text{ м} = 1,2 \text{ см.}$$

ПРИМЕР 115. Описать дифракционную картину (дифракция Фраунгофера) при падении параллельного пучка света на щель шириной a под углом i к нормали (рис. 88).

Решение. Найдем разность хода крайних лучей. В падающем пучке луч 2 отстает от луча 1 на разность хода $\Delta_1 = a \sin i$. В дифрагированном пучке, наоборот, луч 2'

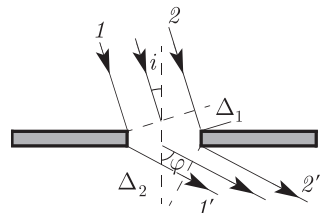


Рис. 88

опережает луч $1'$ на разность хода $\Delta_2 = a \sin \varphi$. Таким образом, полная разность хода крайних лучей $\Delta = \Delta_2 - \Delta_1$.

Условие минимума интенсивности $\Delta = k\lambda$ записывается теперь как

$$a(\sin \varphi - \sin i) = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Условие максимума интенсивности имеет вид

$$a(\sin \varphi - \sin i) = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ПРИМЕР 116. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на $l = 1$ м. Расстояние между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно $x = 20,2$ см. Определить: 1) постоянную d дифракционной решетки; 2) число n штрихов на 1 мм; 3) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка; 4) максимальный угол φ_{\max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

Решение.

1) Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий k -му дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{V.2.21})$$

где k — порядок спектра (порядок максимума в случае монохроматического света).

В данном случае $k = \pm 1$ и ввиду малости углов $\sin \varphi \approx \varphi$, так что соотношение (V.2.21) примет вид

$$\varphi = \pm \frac{\lambda}{d}. \quad (\text{V.2.22})$$

Угловое расстояние $2|\Delta\varphi|$ между максимумами первого порядка связано с линейным расстоянием x между ними на экране:

$$2|\Delta\varphi| = \frac{x}{l}, \quad (\text{V.2.23})$$

откуда находим постоянную решетки

$$d = 2 \frac{\lambda l}{x} = \frac{2(0,5 \cdot 10^{-6})}{20,2 \cdot 10^{-2}} = 4,95 \text{ мкм}. \quad (\text{V.2.24})$$

2) Найдем число n штрихов на 1 мм:

$$n = \frac{1}{d} = 202 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1} = 202 \text{ мм}^{-1}. \quad (\text{V.2.25})$$

3) Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение k_{\max} порядка спектра, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой $\varphi_{\max} \leq 90^\circ$. Тогда из формулы (V.2.21) следует

$$k_{\max} \lambda = d \sin \varphi_{\max} \leq d \sin 90^\circ = d, \quad (\text{V.2.26})$$

т. е. $k_{\max} \leq d/\lambda = 4,95/0,5 = 9,9$. Поскольку k_{\max} должно быть целым числом, находим окончательно $k_{\max} = 9$. Стало быть, помимо центрального максимума ($\varphi = 0$) слева и справа от него будут наблюдаться по 9 максимумов, так что полное их число равно $2k_{\max} + 1 = 19$.

4) Для определения максимального угла φ_{\max} отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, найдем из соотношения (V.2.26) синус этого угла:

$$\sin \varphi_{\max} = k_{\max} \frac{\lambda}{d} = \frac{9 \cdot 0,5}{4,95} = 0,909. \quad (\text{V.2.27})$$

откуда $\varphi_{\max} = 65,4^\circ$.

ПРИМЕР 117. Вычислить углы, соответствующие дифракционным максимумам первого и второго порядков для света с длинами волн $\lambda_1 = 400$ нм и $\lambda_2 = 700$ нм, если дифракционная решетка содержит 10 000 штрихов на 1 см.

Решение. Так как плотность штрихов решетки $n = 10^6 \text{ м}^{-1}$, то расстояние между штрихами (период решетки) $d = 1/n = 1$ мкм. Максимум k -го порядка наблюдается для углов φ , у которых $\sin \varphi = k\lambda/d = kn\lambda$, откуда находим углы для максимумов первого ($k = 1$) порядка:

$$\varphi_1 = \arcsin(n\lambda_1) = \arcsin 0,4 = 23,6^\circ;$$

$$\varphi_2 = \arcsin(n\lambda_2) = \arcsin 0,7 = 44,4^\circ$$

и второго ($k = 2$) порядка:

$$\varphi_1 = \arcsin(2n\lambda_1) = \arcsin 0,8 = 53,1^\circ;$$

$$\varphi_2 = \arcsin(2n\lambda_2) = \arcsin 1,4.$$

Максимумы второго порядка для длины волны $\lambda_2 = 700$ нм не существуют, так как $\sin \varphi$ не может превышать единицы. Максимумы других, более высоких порядков также не возникают для обеих длин волн.

ПРИМЕР 118. Желтый свет натрия (которому отвечают длины волн $\lambda_1 = 589$ нм и $\lambda_2 = 589,59$ нм) падает на дифракционную решетку, имеющую 7500 штрихов на 1 см. Определить: 1) максимальный порядок дифракции для желтого света натрия; 2) ширину решетки, необходимую для разрешения двух линий натрия в спектре максимального порядка.

Решение. Прежде всего заметим, что из условия $n = 7500 \text{ см}^{-1}$ следует величина периода решетки $d = 1/n = 1,33$ мкм.

1) Максимальный порядок может быть вычислен на основании соотношения (V.2.26):

$$k_{\max} \leq \frac{d}{\lambda} = 2,26$$

для обеих линий. Таким образом, $k_{\max} = 2$.

2) Необходимая разрешающая способность решетки

$$R = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{589}{0,59} \approx 1000.$$

Чтобы достичь этой величины в спектре второго порядка, полное число штрихов N должно быть равно $N = R/k = 500$. Значит, решетка должна быть длиной $L = Nd = 0,67$ мм. Заметим, что для разрешения линий в спектре первого порядка ($k = 1$) число штрихов решетки должно быть в 2 раза больше и соответственно в 2 раза больше должна быть ее длина. Типичные дифракционные решетки имеют длину несколько сантиметров и поэтому легко разрешают желтые линии натрия. Например, дифракционная решетка длиной 3 см содержала бы 22 500 штрихов, а ее разрешающая способность была бы равна $R = 45\,000$ для спектра второго порядка и $R = 22\,500$ для спектра первого порядка.

ПРИМЕР 119. На основе дифракционных соображений оценить максимальное расстояние, с которого коршун может рассмотреть воробья.

Решение. Для оценки примем размер воробья $a = 10$ см, а диаметр зрачка коршуна $D = 5$ мм. Если птицы находятся на расстоянии l друг от друга, то угловой размер воробья $\Delta\varphi = a/l$. Воробей будет различим при $\Delta\varphi > 1,22\lambda/D$, откуда $l < aD/1,22\lambda$. Подставляя наименьшую длину видимого света $\lambda = 0,4$ мкм и другие числовые данные, находим:

$$l < \frac{0,1(5 \cdot 10^{-3})}{1,22(4 \cdot 10^{-7})} \approx 1 \text{ км.}$$

V.2.B. Задачи для самостоятельной работы

Зоны Френеля

Задача V.2.1. Найти радиус ρ_5 пятой зоны Френеля для плоского волнового фронта ($\lambda = 0,5$ мкм), если построение делается для точки наблюдения, находящейся на расстоянии 1 м от фронта волны.

Задача V.2.2. Радиус ρ_4 четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 3 мм. Определить радиус ρ_6 шестой зоны Френеля.

Задача V.2.3. Плоская световая волна ($\lambda = 0,5$ мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 1$ см. На каком расстоянии от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало: 1) одну зону Френеля; 2) две зоны Френеля?

Задача V.2.4. Плоская световая волна падает нормально на диафрагму с круглым отверстием. В результате дифракции в некоторых точках на оси отверстия, находящихся на расстояниях a_i от его центра, наблюдаются максимумы интенсивности. Найти зависимость a_i от номера i максимума, если радиус отверстия $r = 1$ мм, а длина волны $\lambda = 0,5$ мкм. Сделать то же самое для точек b_i на оси отверстия, в которых наблюдаются минимумы интенсивности.

Задача V.2.5. Плоская световая волна ($\lambda = 0,7$ мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием радиусом $r = 1,4$ мм. Определить расстояния b_1, b_2, b_3 от диафрагмы до трех наиболее удаленных от нее точек, в которых наблюдаются минимумы интенсивности.

Дифракция на щели

Задача V.2.6. Свет с длиной волны 680 нм падает на щель шириной 0,0245 мм. Чему равна угловая ширина дифракционного пика?

Задача V.2.7. Чему равна при данной длине волны λ максимальная ширина щели, при которой не будет дифракционных минимумов?

Задача V.2.8. На щель шириной $a = 0,05$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Определить угол φ между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

Задача V.2.9. На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Угол φ отклонения пучков света, соответствующих второй светлой дифракционной полосе, равен 1° . Скольким длинам волн падающего света равна ширина щели?

Задача V.2.10. На щель шириной $a = 0,1$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,5$ мкм). За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Что будет наблюдаться на экране, если угол φ дифракции равен: 1) $17'$; 2) $43'$?

Задача V.2.11. На щель шириной $a = 0,1$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,5$ мкм). За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Под какими углами дифракции будут видны минимумы первого порядка?

Задача V.2.12. На щель шириной $a = 0,1$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,5$ мкм). За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Под какими углами дифракции будут видны максимумы второго порядка?

Дифракционная решетка

Задача V.2.13. Сколько интерференционных полос содержится в центральном дифракционном пике картины, возникающей при дифракции от двух щелей шириной a , если расстояние между центрами щелей d равно: 1) $2a$; 2) $12a$; 3) $4,5a$; 4) $7,2a$?

Задача V.2.14. Сколько штрихов на каждый миллиметр содержит дифракционная решетка, если при наблюдении в монохроматическом свете ($\lambda = 0,6$ мкм) максимум пятого порядка отклонен на угол $\varphi = 18^\circ$?

Задача V.2.15. Под каким углом возникает максимум третьего порядка для света с длиной волны 640 нм, падающего на дифракционную решетку с расстоянием между щелями 23,5 мкм?

Задача V.2.16. На дифракционную решетку, содержащую $n = 100$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимум третьего порядка. Чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta\varphi = 20^\circ$. Определить длину волны λ света.

Задача V.2.17. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонен на угол $\varphi_2 = 14^\circ$. На какой угол φ_3 отклонен максимум третьего порядка?

Задача V.2.18. Дифракционная решетка содержит $n = 200$ штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

Задача V.2.19. Дифракционная решетка имеет 6000 штрихов на 1 см. Спектры какого порядка можно наблюдать в видимом диапазоне волн ($\lambda = 0,4 \dots 0,6$ мкм) при освещении ее белым светом?

Задача V.2.20. Сколько штрихов на 1 см должна иметь дифракционная решетка, если спектр второго порядка отсутствует в видимой области?

Задача V.2.21. На дифракционную решетку, содержащую $n = 400$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Найти общее число N дифракционных максимумов, которые дает эта решетка. Определить угол дифракции φ_{\max} , соответствующий последнему максимуму.

Задача V.2.22. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрывают друг друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница ($\lambda = 0,4$ мкм) спектра третьего порядка?

Задача V.2.23. На дифракционную решетку, содержащую $n = 500$ штрихов на 1 мм, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Определить ширину b спектра первого порядка на экране, если расстояние d линзы до экрана равно 3 м. Границы видимого света $\lambda_{\max} = 780$ нм и $\lambda_{\min} = 400$ нм.

Задача V.2.24. Дифракционная картина получена с помощью дифракционной решетки длиной $L = 1,5$ см и периодом $d = 5$ мкм. Определить, в спектре какого наименьшего порядка этой картины получаются отдельные изображения двух спектральных линий с разностью длин волн $\Delta\lambda = 0,1$ нм, если линии лежат в крайней красной части спектра ($\lambda \approx 760$ нм).

Задача V.2.25. Какой наименьшей разрешающей силой R должна обладать дифракционная решетка, чтобы можно было разрешить две спектральные линии калия ($\lambda_1 = 578$ нм и $\lambda_2 = 580$ нм)? Какое наименьшее число N штрихов должна иметь эта решетка, чтобы разрешение было возможно в спектре второго порядка?

Задача V.2.26. С помощью дифракционной решетки с периодом $d = 20$ мкм требуется разрешить дублет натрия ($\lambda_1 = 589$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм) в спектре второго порядка. При какой наименьшей длине L решетки это возможно?

Задача V.2.27. Дифракционная решетка с $n = 5500$ штрихов на 1 см имеет длину $L = 3,6$ см. На решетку падает свет с длиной волны $\lambda = 624$ нм. На сколько могут различаться две длины волны, если их надо разрешить в любом порядке? В каком порядке достигается наилучшее разрешение?

Разрешающая сила объектива телескопа

Задача V.2.28. Диаметр D объектива телескопа равен 8 см. Чему равно наименьшее угловое расстояние между двумя звездами, дифракционные изображения которых в фокальной плоскости объектива получаются раздельными? Принять $\lambda = 0,5$ мкм.

Задача V.2.29. На шпилье высотного здания укреплены одна под другой две красные лампы ($\lambda = 640$ нм). Расстояние d между лампами 20 см. Здание рассматривают ночью в телескоп с расстояния $r = 15$ км. Определить наименьший диаметр D_{\min} объектива, при котором в его фокальной плоскости получатся раздельные дифракционные изображения.

Задача V.2.30. 1) Может ли нормальный человеческий глаз видеть раздельными две фары автомобиля, разнесенные на 1,5 м, с расстояния 10 км? При решении учитывать только дифракцию. Диаметр зрачка в темноте равен 5,0 мм, длина световой волны 500 нм. 2) На каком наибольшем расстоянии фары могут быть разрешены?

Задача V.2.31. Диаметр зеркала телескопа Маунт Паломар $D = 5,1$ м. Каков минимальный размер объекта, различаемого на Луне? Расстояние до Луны $R = 3,8 \cdot 10^5$ км, длина волны $\lambda = 550$ нм.

Задача V.2.32. Картины Жоржа Сёра, написанные в манере пуантилизма, состоят из отдельных точек диаметром порядка 2 мм. С какого расстояния надо рассматривать картины, чтобы воспринимать «точечные» мазки как единое целое во всем видимом диапазоне? Диаметр зрачка в дневных условиях $D = 1,5$ мм.

V.3. Поляризация света

V.3.A. Основные формулы

- Свет, в котором направления колебаний светового вектора \vec{E} упорядочены каким-либо образом, называется *поляризованным*.
- Если колебания светового вектора \vec{E} происходит только в одном направлении, перпендикулярном лучу, то такой свет называется *линейно-поляризованным* (или *плоскополяризованным*)¹.
- Естественный свет представляет собой смесь волн, в которой равновероятно представлены все направления поляризации. Частично поляризованный свет — это смесь естественного света с линейно-поляризованным. Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} — максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором при его вращении.

¹ Плоскость, в которой происходят колебания электрического вектора \vec{E} , называют плоскостью колебания поляризованного света; плоскость, в которой колеблется магнитный вектор \vec{B} , — плоскостью поляризации.

Для естественного света интенсивность пропускаемого света не зависит от положения анализатора, так что $I_{\max} = I_{\min}$ и $P = 0$. Для линейно-поляризованного света есть положение, когда свет через анализатор не проходит, так что $I_{\min} = 0$ и $P = 1$.

- Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \varphi,$$

где I — интенсивность линейно-поляризованного света, прошедшего через анализатор; I_0 — интенсивность линейно-поляризованного света, падающего на анализатор; φ — угол между направлением колебаний светового вектора волны, падающей на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора.

- Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_{\text{Бр}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

где $i_{\text{Бр}}$ — угол падения, при котором отраженная световая волна полностью поляризована (угол Брюстера); n_1 — показатель преломления среды, из которой падает свет; n_2 — показатель преломления среды, на которую падает свет; n_{21} — относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

- Предельный (критический) угол полного внутреннего отражения при переходе света из среды оптически более плотной (n_1) в среду оптически менее плотную (n_2) определяется из соотношения

$$\sin i_{\text{кр}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad n_2 < n_1.$$

V.3.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 120. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины (показатель преломления $n_2 = 1,5$), погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света составляет угол $\alpha = 97^\circ$ с падающим пучком. Определить показатель преломления n_1 жидкости, если отраженный свет полностью поляризован.

Решение. Свет, отраженный от пластины, полностью поляризован в том случае, если тангенс угла падения равен тангенсу угла Брюстера. В то же время угол падения всегда равен углу отражения, так что угол α в условии задачи — это удвоенный угол падения. Таким образом, $\operatorname{tg}(\alpha/2) = n_2/n_1$, откуда

$$n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{1,5}{\operatorname{tg} 48,5^\circ} = 1,33.$$

ПРИМЕР 121. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между их плоскостями пропускания $\varphi = 60^\circ$. Определить: 1) во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении через один николь (N_1); 2) во сколько раз уменьшится интенсивность

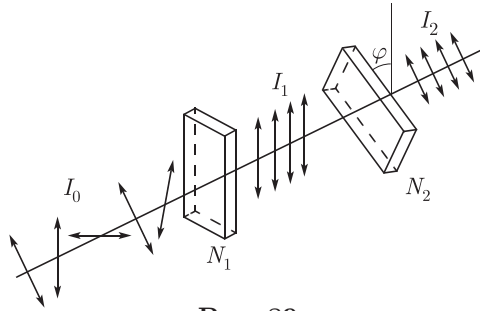


Рис. 89

света при прохождении через оба николя. При прохождении каждого из николей потери на отражение и поглощение света составляют 5%.

Решение.

1) Пучок естественного света интенсивностью I_0 падает на грань николя N_1 (рис. 89). В этом пучке «на равных» представлены все направления поляризации, так что из николя будет выходить линейно-поляризованный свет интенсивностью I_1 . Эта интенсивность уменьшена по сравнению с I_0 по двум причинам. Во-первых, николь не пропустил ровно половину пучка с направлениями поляризации, ортогональными плоскости пропускания николя. Во-вторых, часть пучка теряется в николе. В итоге $I_1 = \frac{1}{2}(1 - k)I_0$, где $k = 0,05$. Подставляя числовые данные, находим, что после прохождения первого николя интенсивность уменьшается в $I_0/I_1 = 2/(1 - k) = 2/0,95 = 2,1$ раза.

2) Далее пучок линейно-поляризованного света интенсивностью I_1 падает на николь N_2 . Интенсивность I_2 выходящего пучка также уменьшается по сравнению с интенсивностью I_1 входящего пучка из-за: а) несовпадения направлений осей николей плоскости пропускания николя (закон Малюса); б) потерь во втором николе. В результате имеем

$$I_2 = I_1(1 - k) \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0(1 - k)^2 \cos^2 \varphi,$$

откуда находим, что интенсивность уменьшается в

$$I_0/I_2 = 2/0,95^2/0,5^2 = 8,86 \text{ раз.}$$

ПРИМЕР 122. Пучок частично поляризованного света рассматривается через николь. Первоначально николь установлен так, что интенсивность проходящего света максимальна. При повороте николя на угол $\varphi = 60^\circ$ интенсивность пропускаемого света уменьшается в $k = 2$ раза. Определить отношение интенсивностей естественного $I_{\text{ест}}$ и линейно-поляризованного $I_{\text{пол}}$ света, составляющих данный частично поляризованный свет, а также степень поляризации P пучка света. Потерями в николе пренебречь.

Решение. При первоначальном положении николя он полностью пропускает линейно-поляризованный свет и половину интенсивности естественного света. Общая интенсивность пропущенного при этом света $I_{\text{max}} = I_{\text{пол}} + I_{\text{ест}}/2$.

При втором положении николя интенсивность пропущенного линейно-поляризованного света определяется по закону Малюса, а интенсивность пропущенного естественного света, как и в первом случае, будет равна половине интенсивности естественного света, падающего на николь. Общая интенсивность во втором случае $I_2 = I_{\text{пол}} \cos^2 \varphi + I_{\text{ест}}/2$. По условию задачи $I_{\text{max}} = kI_2$, откуда

$$I_{\text{пол}} + \frac{I_{\text{ест}}}{2} = k \left(I_{\text{пол}} \cos^2 \varphi + \frac{I_{\text{ест}}}{2} \right),$$

так что

$$\frac{I_{\text{ест}}}{I_{\text{пол}}} = 2 \frac{1 - k \cos^2 \varphi}{k - 1} = 1.$$

Интенсивности поляризованного и естественного света в данном пучке равны между собой.

Минимальная интенсивность на выходе получится при повороте николя на угол 90° , когда поляризованный свет будет полностью задержан: $I_{\text{min}} = I_{\text{ест}}/2$. Степень поляризации частично поляризованного света определяется соотношением

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} = \frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{пол}} + I_{\text{ест}}} = \frac{1}{2}.$$

V.3.B. Задачи для самостоятельной работы

Закон Брюстера

Задача V.3.1. Чему равен угол Брюстера для границы воздух–стекло ($n = 1,56$)?

Задача V.3.2. Чему равен угол Брюстера для стекла ($n = 1,56$), погруженного в воду ($n = 1,33$)?

Задача V.3.3. Чему равен угол Брюстера при отражении от поверхности воды ($n = 1,33$) снизу (из-под воды)? Сравнить этот угол с углом полного внутреннего отражения и с углом Брюстера при отражении от поверхности воды сверху.

Задача V.3.4. Пучок света, идущий в воздухе, падает на поверхность жидкости под углом $i = 54^\circ$. Определить угол преломления i' пучка, если отраженный пучок полностью поляризован.

Задача V.3.5. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

Задача V.3.6. Пучок естественного света, идущий в воде, отражается от грани алмаза ($n = 2,42$), погруженного в воду ($n = 1,33$). При каком угле падения i отраженный свет полностью поляризован?

Задача V.3.7. Угол Брюстера i при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57° . Определить скорость света в этом кристалле.

Задача V.3.8. Предельный угол $i_{\text{кр}}$ полного отражения пучка света на границе жидкости с воздухом равен 43° . Определить угол Брюстера $i_{\text{Бр}}$ при падении луча из воздуха на поверхность этой жидкости.

Задача V.3.9. Параллельный пучок естественного света падает на сферическую каплю воды ($n_2 = 1,33$). Найти: 1) угол φ между отраженным и падающим пучками; 2) угол γ между преломленным и падающим пучками в точке A (рис. 90).

Задача V.3.10. Пучок естественного света падает на стеклянный шар ($n_2 = 1,54$). Найти: 1) угол φ между отраженным и падающим пучками; 2) угол γ между преломленным и падающим пучками в точке A (рис. 90).

Задача V.3.11. Пучок естественного света падает на стеклянный шар ($n_2 = 1,58$), находящийся в воде ($n_1 = 1,33$). Найти: 1) угол φ между отраженным и падающим пучками; 2) угол γ между преломленным и падающим пучками в точке A (см. рис. 90).

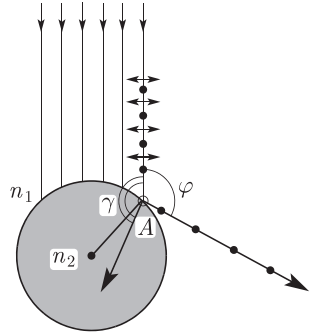


Рис. 90

Закон Малюса¹

Задача V.3.12. Два поляризатора ориентированы под углом 45° относительно друг друга. На них падает неполяризованный свет. Какая доля интенсивности света пройдет через оба поляризатора?

Задача V.3.13. Два поляризатора ориентированы так, что пропускают максимум света. На какой угол следует повернуть один из них, чтобы интенсивность прошедшего света уменьшилась в 2 раза?

Задача V.3.14. Под каким углом следует расположить оси двух поляризаторов, чтобы интенсивность падающего неполяризованного света уменьшилась: 1) в 3 раза; 2) в 10 раз?

Задача V.3.15. Вертикально поляризованный свет с интенсивностью I_0 проходит девять поляризаторов. Ось первого поляризатора составляет 10° с вертикалью, ось второго повернута еще на 10° и т. д., ось девятого поляризатора повернута на 90° . Чему равна интенсивность I света, прошедшего через эту систему?

Задача V.3.16. Два поляризатора ориентированы под углом 34° относительно друг друга. Свет, поляризованный под углом 17° относительно каждого поляризатора, проходит через оба поляризатора. На сколько ослабляется интенсивность света?

Задача V.3.17. Неполяризованный свет падает на два поляризатора, оси которых расположены под прямым углом друг к другу. 1) Какая часть интенсивности падающего света проходит через них? 2) Какая часть света пройдет, если между этими двумя поляризаторами поместить третий, ось которого образует с осями других поляризаторов угол 45° ? 3) Какая часть света пройдет, если третий поляризатор поместить перед первыми двумя?

¹ Коль скоро не оговорено иное, в задачах этого и следующего разделов поляризаторы предполагаются идеальными, так что в них не происходит потери света.

Задача V.3.18. Угол между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора равен 45° . Во сколько раз уменьшится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол увеличить до 60° ?

Задача V.3.19. Во сколько раз ослабляется интенсивность естественного света, проходящего через два николя, плоскости пропускания которых образуют угол 30° , если в каждом из николей теряется 10% интенсивности падающего на него света?

Степень поляризации света

Задача V.3.20. В частично поляризованном свете амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в $k = 2$ раза больше амплитуды, соответствующей минимальной интенсивности. Определить степень поляризации P света.

Задача V.3.21. Степень поляризации P частично поляризованного света равна 0,5. Во сколько раз отличается максимальная интенсивность света, пропускаемого анализатором, от минимальной?

Задача V.3.22. На пути частично поляризованного света, степень поляризации P которого равна 0,6, поставили анализатор так, что интенсивность света, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол 30° ?

Задача V.3.23. На пути частично поляризованного света, степень поляризации P которого равна 0,5, поставили анализатор так, что интенсивность света, прошедшего через него, стала максимальной. На какой угол надо повернуть плоскость пропускания анализатора, чтобы интенсивность света уменьшилась в 1,2 раза?

Задача V.3.24. На николь падает пучок частично поляризованного света. При некотором положении николя интенсивность прошедшего света минимальна. Когда плоскость пропускания николя повернули на угол 45° , интенсивность света возросла в $k = 1,5$ раза. Определить степень поляризации P света.

Задача V.3.25. На николь падает пучок частично поляризованного света со степенью поляризации $P = 0,5$. При некотором положении николя интенсивность прошедшего света минимальна. На какой угол надо повернуть николь, чтобы интенсивность света возросла в $k = 1,5$ раза?

Задача V.3.26. На николь падает пучок частично поляризованного света. При некотором положении николя интенсивность прошедшего света минимальна. При повороте николя на угол 30° интенсивность света возросла в $k = 2$ раза. Определить степень поляризации P света.

Часть VI

ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

VI.1. Тепловое излучение

VI.1.A. Основные формулы

- Основные характеристики равновесного теплового излучения, находящегося в замкнутой полости (здесь и далее T — термодинамическая температура):
 - интегральная характеристика: объемная плотность энергии $u(T)$ — количество энергии излучения в единице объема. Размерность $[u(T)] = \text{Дж}/\text{м}^3$;
 - дифференциальная характеристика: спектральная плотность энергии излучения $u(\omega, T)$ — энергия излучения в единичном объеме, приходящаяся на единичный интервал частот. Размерность $[u(\omega, T)] = \text{Дж} \cdot \text{с}/\text{м}^3$. Связь с плотностью энергии

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega;$$

- аналогичная дифференциальная характеристика — спектральная плотность энергии излучения $u(\lambda, T)$. Это энергия излучения в единичном объеме, приходящаяся на единичный интервал длин волн.

Связь двух дифференциальных характеристик

$$u(\lambda, T) = u(\omega, T) \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda,$$

где в аргументе $u(\omega, T)$ надо выразить частоту через длину волны: $\omega = 2\pi c/\lambda$. Здесь c — скорость света в вакууме. Размерность $[u(\lambda, T)] = \text{Дж}/\text{м}^4$, связь с плотностью энергии $u(T) = \int_0^{\infty} u(\lambda, T) d\lambda$.

- Основные характеристики теплового излучения нагретого тела:
 - энергетическая светимость $R(T)$ — энергия, испускаемая единицей поверхности излучающего тела в единицу времени. Размерность $[R] = \text{Вт}/\text{м}^2$;
 - испускательная способность тела $r_{\omega} = r(\omega, T)$ — количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале частот. Размерность $[r_{\omega}] = \text{Дж}/\text{м}^2$, связь с энергетической светимостью $R(T) = \int_0^{\infty} r(\omega, T) d\omega$;

- испускательная способность тела $r_\lambda = r(\lambda, T)$ как количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале длин волн. При этом

$$r(\lambda, T) = r(\omega, T) \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda;$$

размерность $[r_\lambda] = \text{Вт}/\text{м}^3$, связь с интегральной характеристикой

$$R(T) = \int_0^\infty r(\lambda, T) d\lambda;$$

- поглощательная способность тела a_ω — отношение потока энергии, поглощенного телом в единичном интервале частот, к падающему потоку энергии; это безразмерная величина, не превышающая единицы. Тело, для которого $a_\omega = 1$, называется *абсолютно черным телом*.
- Закон Кирхгофа: отношение испускательной и поглощательной способности любого тела есть универсальная функция частоты и температуры:

$$\frac{r_\omega}{a_\omega} = f(\omega, T).$$

По смыслу определения ясно, что $f(\omega, T)$ есть испускательная способность абсолютно черного тела.

- Испускательная способность абсолютно черного тела $f(\omega, T)$ связана со спектральной плотностью энергии равновесного теплового излучения $u(\omega, T)$ соотношением

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T),$$

где c — скорость света в вакууме.

Энергетическая светимость абсолютно черного тела

$$R^*(T) = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega = \frac{c}{4} u(T).$$

- Формула Вина: испускательная способность абсолютно черного тела пропорциональна третьей степени частоты и функции отношения частоты и температуры:

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right).$$

- Закон смещения Вина (первый закон Вина):

$$T\lambda_{\max} = b; \quad b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К},$$

где λ_{\max} — длина волны, соответствующая максимуму испускательной способности абсолютно черного тела $f(\lambda, T)$.

- Зависимость максимальной испускательной способности абсолютно черного тела от температуры (второй закон Вина)

$$f(\lambda_{\max}, T) = b_2 T^5,$$

где $b_2 = 1,287 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$.

- Закон Стефана—Больцмана. Энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры:

$$R^*(T) = \sigma T^4; \quad \sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4),$$

где σ — постоянная Стефана—Больцмана.

- Формулы Планка для испускательной способности абсолютно черного тела

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1};$$

$$f(\lambda, T) = \frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{2\pi\hbar c/(k_B T\lambda)} - 1},$$

где \hbar, k_B — универсальные физические постоянные (Планка и Больцмана соответственно).

- Две константы

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

называются постоянными Планка.

При дальнейшем изложении в данном пособии чаще будет использоваться величина \hbar .

VI.1.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 123. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум испускательной способности соответствует длине волны $\lambda_{\max} = 500 \text{ нм}$. Принимая Солнце за абсолютно черное тело, определить: 1) энергетическую светимость Солнца $R_{\odot}^*(T)$; 2) поток энергии Φ , излучаемый Солнцем; 3) массу dm/dt электромагнитных волн, излучаемых Солнцем во всем спектральном диапазоне в единицу времени.

Решение.

1) Энергетическая светимость $R^*(T)$ абсолютно черного тела выражается формулой Стефана—Больцмана

$$R^*(T) = \sigma T^4. \quad (\text{VI.1.1})$$

Температура излучающей поверхности может быть определена из закона смещения Вина: $\lambda_{\max} T = b$. Выразив отсюда температуру T и подставив ее в формулу (VI.1.1), получим

$$R_{\odot}^*(T) = \sigma (b/\lambda_{\max})^4. \quad (\text{VI.1.2})$$

Произведя вычисления по формуле (VI.1.2), найдем:

$$R_{\odot}^*(T) = 64,2 \text{ МВт}/\text{м}^2.$$

2) Поток энергии Φ , излучаемый Солнцем, равен произведению испускательной способности Солнца на площадь S его поверхности:

$$\Phi = R_{\odot}^*(T) S = 4\pi r_{\odot}^2 R_{\odot}^*(T), \quad (\text{VI.1.3})$$

где r_{\odot} — радиус Солнца.

Подставив в (VI.1.3) значения $R_{\odot}^*(T)$ и $r_{\odot} = 7,0 \cdot 10^8$ м и произведя вычисления, получим

$$\Phi = 4 \cdot 10^{26} \text{ Вт.} \quad (\text{VI.1.4})$$

3) Массу электромагнитных волн, излучаемых Солнцем в единицу времени во всем спектральном диапазоне, определим, применив закон пропорциональности массы и энергии:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\Phi}{c^2} = 4,4 \cdot 10^9 \text{ кг/с.} \quad (\text{VI.1.5})$$

ПРИМЕР 124. Длина волны λ_{\max} , на которую приходится максимум энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, равна 0,58 мкм. Определить максимальную испускательную способность $f(\lambda_{\max}, T)$, рассчитанную на интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ нм вблизи λ_{\max} .

Решение. Максимальная испускательная способность пропорциональна пятой степени температуры и выражается вторым законом Вина:

$$f(\lambda_{\max}, T) = b_2 T^5. \quad (\text{VI.1.6})$$

Температуру T выразим из закона смещения Вина: $T = b/\lambda_{\max}$. Подставив полученную температуру в (VI.1.6), найдем

$$f(\lambda_{\max}, T) = b_2 \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^5. \quad (\text{VI.1.7})$$

Приведенное в разд. VI.1.A «Основные формулы» значение b_2 дано в единицах СИ, в которых интервал длин волн равен 1 м. По условию же задачи требуется вычислить испускательную способность, рассчитанную на интервал длин волн 1 нм. Поэтому надо пересчитать b_2 на заданный интервал длин волн:

$$\begin{aligned} b_2 &= 1,287 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5) = 1,287 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot 10^9 \text{ нм} \cdot \text{К}^5) = \\ &= 1,287 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{нм} \cdot \text{К}^5). \end{aligned} \quad (\text{VI.1.8})$$

Подставляя (VI.1.8) и значения b и λ_{\max} в (VI.1.7), находим

$$f(\lambda_{\max}, T) = 40,1 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{нм}). \quad (\text{VI.1.9})$$

ПРИМЕР 125. В замкнутом изолированном пространстве находится идеальный газ с концентрацией молекул n . При какой температуре объемная плотность кинетической энергии поступательного движения молекул газа равна объемной плотности энергии электромагнитного излучения абсолютно черного тела?

Решение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну молекулу идеального газа, равна

$$\frac{3}{2} k_B T, \quad (\text{VI.1.10})$$

где k_B — постоянная Больцмана.

При концентрации молекул n объемная плотность кинетической энергии поступательного движения молекул газа определяется как

$$u_{\text{кин}}(T) = \frac{3}{2} n k_B T. \quad (\text{VI.1.11})$$

Согласно формуле Стефана—Больцмана объемная плотность энергии электромагнитного излучения

$$u(T) = \frac{4}{c} R^*(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4. \quad (\text{VI.1.12})$$

Приравнявая друг другу $u_{\text{кин}}(T)$ и $u(T)$, находим

$$T = \sqrt[3]{\frac{3nk_B c}{8\sigma}}. \quad (\text{VI.1.13})$$

Проиллюстрируем полученный результат числовым примером. Предположим, что концентрация молекул такая же, как при нормальных условиях ($T = 273 \text{ К}$; $p = 101\,325 \text{ Па}$). Эта концентрация (число Лошмидта) равна $n = 2,686 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Подставляя n в полученное выражение (VI.1.13) для температуры, находим

$$T = \sqrt[3]{\frac{3(2,69 \cdot 10^{25})(1,38 \cdot 10^{-23})(3 \cdot 10^8)}{8(5,67 \cdot 10^{-8})}} = 9,03 \cdot 10^5 \text{ К}. \quad (\text{VI.1.14})$$

Давление газа при этих условиях составляет $p = nk_B T = 3,35 \cdot 10^8 \text{ Па} = 3300 \text{ атм}$.

VI.1.B. Задачи для самостоятельной работы

Закон Стефана—Больцмана

Задача VI.1.1. Определить температуру T , при которой энергетическая светимость $R^*(T)$ абсолютно черного тела равна 10 кВт/м^2 .

Задача VI.1.2. Поток энергии Φ , излучаемый из смотрового окошка плавильной печи, равен 34 Вт . Определить температуру T печи, если площадь отверстия $S = 6 \text{ см}^2$.

Задача VI.1.3. Определить энергию W , излучаемую за время $t = 1 \text{ мин}$ из смотрового окошка площадью $S = 8 \text{ см}^2$ плавильной печи, если ее температура $T = 1,2 \text{ кК}$.

Задача VI.1.4. Температура T верхних слоев звезды Сириус равна 10 кК . Определить поток энергии Φ , излучаемый с поверхности площадью $S = 1 \text{ км}^2$ этой звезды.

Задача VI.1.5. Найти относительное увеличение энергетической светимости абсолютно черного тела при повышении его температуры на 1% .

Задача VI.1.6. Во сколько раз надо увеличить термодинамическую температуру абсолютно черного тела, чтобы его энергетическая светимость возросла в 2 раза?

Задача VI.1.7. Определить установившуюся температуру T зачерненной металлической пластинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной атмосферы на половине расстояния от Земли до Солнца. Значение солнечной постоянной $C = 1,4 \text{ кДж/(м}^2 \cdot \text{с)}$.

Задача VI.1.8. Плавильная печь потребляет мощность $P = 1$ кВт. Температура T ее внутренней поверхности при открытом отверстии площадью $S = 25$ см² равна 1,2 кК. Считая, что отверстие печи излучает как абсолютно черное тело, определить, какая часть мощности рассеивается стенками.

Задача VI.1.9. Можно условно принять, что Земля излучает как серое тело, находящееся при температуре $T = 280$ К. Энергетическая светимость поверхности Земли равна $R_{\odot}^*(T) = 325$ кДж/(м² · ч). Определить поглощательную способность a Земли, считая ее одинаковой для всех интервалов частот.

Задача VI.1.10. Мощность P излучения шара радиусом $r = 10$ см при некоторой постоянной температуре T равна 1 кВт. Найти эту температуру, считая шар серым телом с поглощательной способностью $a = 0,25$, одинаковой для всех длин волн.

Закон Вина

Задача VI.1.11. На какую длину волны приходится максимум испускательной способности абсолютно черного тела при температуре $t = 0^\circ\text{C}$?

Задача VI.1.12. Температура T верхних слоев Солнца равна 5,3 кК. Считая Солнце абсолютно черным телом, определить длину волны, которой соответствует максимальная испускательная способность Солнца.

Задача VI.1.13. Определить температуру T абсолютно черного тела, при которой максимум испускательной способности приходится: 1) на красную границу видимого спектра ($\lambda = 750$ нм); 2) на фиолетовую ($\lambda = 380$ нм).

Задача VI.1.14. Максимум испускательной способности яркой звезды Арктур приходится на длину волны 580 нм. Считая, что звезда излучает как абсолютно черное тело, определить температуру T ее поверхности.

Задача VI.1.15. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум испускательной способности сместился с $\lambda_{\max,1} = 2,4$ мкм на $\lambda_{\max,2} = 0,8$ мкм. Как и во сколько раз изменилась: 1) энергетическая светимость тела; 2) его максимальная испускательная способность?

Задача VI.1.16. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в 2 раза длина волны λ_{\max} , на которую приходится максимум испускательной способности, уменьшилась на $\Delta\lambda = 400$ нм. Определить начальную температуру T .

Задача VI.1.17. Эталон единицы силы света — кандела — представляет собой полный (излучающий волны всех длин) излучатель, поверхность которого площадью $S = (1/6) \cdot 10^{-5}$ м² находится при температуре затвердевания платины $t = 1769^\circ\text{C}$ при давлении 101 325 Па. Определить мощность P излучателя.

Задача VI.1.18. Максимальная испускательная способность $f(\lambda_{\max}, T)$ абсолютно черного тела равна $4,16 \cdot 10^{11}$ Вт/м³. На какую длину волны она приходится?

VI.2. Квантовая природа света

VI.2.A. Основные формулы

- Энергия фотона

$$\varepsilon = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}.$$

- Импульс фотона

$$p = \frac{\varepsilon\gamma}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

- Формула Эйнштейна для фотоэффекта

$$\varepsilon = A + T_{\max},$$

где ε — энергия фотона, падающего на поверхность металла; A — работа выхода электрона из металла; T_{\max} — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

При небольших энергиях фотоэлектронов $T_{\max} = \frac{m_e v_{\max}^2}{2}$, в реля-

тивистском случае $T_{\max} = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} - 1 \right)$, где m_e — масса

покоя электрона; c — скорость света в вакууме; v_{\max} — максимальная скорость фотоэлектрона.

- Красная граница фотоэффекта

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{A}{\hbar} \quad \text{или} \quad \lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi\hbar c}{A},$$

где $\lambda_{\text{кр}}(\omega_{\text{кр}})$ — максимальная длина волны (минимальная круговая частота) излучения, при которой еще возможен фотоэффект.

- Задерживающее напряжение

$$U_z = \frac{\hbar}{e} (\omega - \omega_{\text{кр}}),$$

где e — заряд электрона.

- Давление, производимое светом при нормальном падении:

$$P = \frac{E_{\Phi}}{c} (1 + \rho) = w(1 + \rho),$$

где E_{Φ} — плотность потока световой энергии (энергия, падающая в единицу времени на единицу поверхности); c — скорость света в вакууме; w — средняя плотность энергии в световой волне; ρ — коэффициент отражения поверхности.

VI.2.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 126. Определить длину волны и частоту фотона, энергия которого равна энергии покоя: 1) электрона; 2) протона.

Решение. Энергия покоя частицы (электрона или протона) равна mc^2 , энергия же фотона есть $\hbar\omega$. Приравнявая эти величины, находим $\omega = mc^2/\hbar$. Для вычислений здесь удобнее воспользоваться значением постоянной Планка $\hbar = 6,582 \cdot 10^{-22}$ МэВ · с (см. табл. П.25 приложения).

1) Энергия покоя электрона равна $m_e c^2 = 0,511$ МэВ, и сразу находим частоту соответствующего фотона $\omega = 0,511/6,582 \cdot 10^{-22} = 7,76 \cdot 10^{20}$ Гц. Длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м = 2,43 пм.

2) Энергия покоя протона $m_p c^2 = 938,3$ МэВ. Частота фотона той же энергии $\omega = 938,3/6,582 \cdot 10^{-22} = 1,43 \cdot 10^{24}$ Гц, длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega = 1,32 \cdot 10^{-15}$ м = 1,32 фм.

ПРИМЕР 127. Частота фотона, испущенного с поверхности звезды, меняется вследствие гравитационного притяжения. Найти это изменение (красное смещение). Вычислить для примера смещение желтой линии натрия ($\lambda = 589$ нм) для света, испущенного Солнцем.

Решение. Для решения этой задачи мы вынуждены принять некое допущение, оправданное тем, что в итоге мы получим правильный результат, следующий из более полной теории. Именно, мы припишем фотону гравитационную массу m_γ , исходя из общего соотношения между массой и энергией: $m_\gamma = \hbar\omega/c^2$. (Эта масса ничего общего не имеет с массой покоя фотона, равной нулю.)

Тогда фотон частотой ω , испущенный на поверхности Солнца, имеет также и потенциальную энергию притяжения $U = -G \frac{m_\gamma M_\odot}{R_\odot}$, где M_\odot и R_\odot — масса и радиус Солнца. На бесконечно большом расстоянии частота фотона становится равной ω' , а потенциальная энергия его равна нулю. Закон сохранения энергии приводит к уравнению

$$\hbar\omega - G \frac{\hbar\omega M_\odot}{R_\odot c^2} = \hbar\omega',$$

откуда следует соотношение между частотами:

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{GM_\odot}{R_\odot c^2} \right).$$

Отсюда получаем относительное изменение частоты фотона $\Delta\omega/\omega = (\omega' - \omega)/\omega$:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = - \frac{GM_\odot}{R_\odot c^2}.$$

Подставляя числовые значения, находим:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = - \frac{(6,67 \cdot 10^{-11}) (1,99 \cdot 10^{30})}{(6,96 \cdot 10^8) (3 \cdot 10^8)^2} = -2,1 \cdot 10^{-6}.$$

Смещение для длин волн определится отсюда при использовании соотношений $\omega = 2\pi c/\lambda$ и $\Delta\omega = -2\pi c\Delta\lambda/\lambda^2$, так что $\Delta\omega/\omega = -\Delta\lambda/\lambda$. Таким образом, сдвиг длины волны для желтой линии натрия в нашей задаче составит $\Delta\lambda = (2,1 \cdot 10^{-6}) \cdot 589 = 0,0012$ нм.

Гравитационное красное смещение можно охарактеризовать *условной скоростью* V , т. е. скоростью источника, при которой эффект Доплера привел бы к такому же смещению частоты света. Так как красное смещение мало, формулы для эффекта Доплера имеют вид $\omega' = \omega(1 - V/c)$, так что условная скорость $V = c(-\Delta\omega/\omega)$. В нашем примере $V = (3 \cdot 10^8)(2,1 \cdot 10^{-6}) = 630$ м/с. Красное смещение впервые наблюдалось у белых карликов, плотность которых гораздо выше солнечной (например, для плотной звезды Сириус В условная скорость равна 20 км/с). В 1959 г. красное смещение было измерено в земных экспериментах, где условная скорость крайне мала — 0,75 мкм/с.

ПРИМЕР 128. Определить максимальную скорость v_{\max} фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 0,155$ мкм; 2) γ -излучением с длиной волны $\lambda_2 = 2,47$ пм.

Решение. Энергию фотонов в обоих случаях вычисляем по формуле $\varepsilon = 2\pi\hbar c/\lambda$. Подставляем значение комбинации $\hbar c$:

$$\varepsilon_1 = \frac{2\pi(197,3 \cdot 10^{-9})}{0,155 \cdot 10^{-6}} = 8 \text{ эВ};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi(197,3 \cdot 10^{-9})}{2,47 \cdot 10^{-12}} = 0,502 \text{ МэВ}.$$

Работа выхода A указана в табл. П.19 приложения: для серебра $A = 4,7$ эВ. Стало быть, энергия фотоэлектрона равна соответственно $T_{\max} = \varepsilon - A$; находим $T_{\max, 1} = 3,3$ эВ для первого и $T_{\max, 2} = 0,502$ МэВ для второго случая.

В первом случае кинетическая энергия намного меньше энергии покоя электрона $m_e c^2 = 0,511$ МэВ. Поэтому имеет смысл пользоваться нерелятивистской формулой $T_{\max, 1} = m_e v_{\max, 1}^2/2$, откуда

$$v_{\max, 1} = \sqrt{\frac{2T_{\max, 1}}{m_e}} = c\sqrt{\frac{2T_{\max, 1}}{m_e c^2}} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{2 \cdot 3,3}{0,511 \cdot 10^6}} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Во втором случае кинетическая энергия сравнима с энергией покоя электрона и обязательно использование релятивистской формулы $T_{\max, 2} = m_e c^2 \left(1/\sqrt{1 - v_{\max, 2}^2/c^2} - 1 \right)$, откуда

$$v_{\max, 2} = c \frac{\sqrt{1 + 2m_e c^2/T_{\max, 2}}}{1 + m_e c^2/T_{\max, 2}} = c \frac{\sqrt{1 + 2(0,511/0,502)}}{1 + 0,511/0,502} = 0,863c = 259 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

ПРИМЕР 129. Определить красную границу $\lambda_{\text{кр}}$ фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом с длиной

волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость v_{\max} фотоэлектрона равна $0,65$ Мм/с.

Решение. На красной границе фотоэффекта скорость фотоэлектрона и его кинетическая энергия равны нулю. Поэтому

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi\hbar c}{A}. \quad (\text{VI.2.15})$$

Работу выхода найдем из соотношения Эйнштейна, учитывая, что $v_{\max} \ll c$:

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = A + \frac{m_e v_{\max}^2}{2}, \quad (\text{VI.2.16})$$

откуда

$$A = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - \frac{m_e v_{\max}^2}{2} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \left(1 - \frac{m_e v_{\max}^2 \lambda}{4\pi\hbar c} \right). \quad (\text{VI.2.17})$$

Подставляя (VI.2.17) в (VI.2.15), получаем

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{\lambda}{1 - \frac{m_e v_{\max}^2 \lambda}{4\pi\hbar c}}. \quad (\text{VI.2.18})$$

Подставляя сюда числовые значения, окончательно находим

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{400 \cdot 10^{-9}}{1 - \frac{(9,11 \cdot 10^{-31})(0,65 \cdot 10^6)(400 \cdot 10^{-9})}{4\pi(1,054 \cdot 10^{-34})(3 \cdot 10^8)}} = 653 \cdot 10^{-9} = 653 \text{ нм}. \quad (\text{VI.2.19})$$

ПРИМЕР 130. Пучок монохроматического света длиной волны $\lambda = 663$ нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Мощность пучка $\Phi = 0,6$ Вт. Найти силу F , с которой свет давит на поверхность, и число N фотонов, падающих на нее за время $t = 5$ с.

Решение. Плотность потока световой энергии равна $E_{\Phi} = \Phi/S$, где S — площадь мишени. Тогда давление света определяется выражением

$$P = \frac{E_{\Phi}}{c} (1 + \rho) = \frac{\Phi}{Sc} (1 + \rho).$$

Сила давления

$$F = PS = \frac{\Phi}{c} (1 + \rho).$$

Так как поверхность зеркальна, то $\rho = 1$ и $F = (0,6 \cdot 2)/(3 \cdot 10^8) = 4 \cdot 10^{-9}$ Н.

Энергия фотона $\varepsilon = 2\pi\hbar c/\lambda = 2\pi(1,054 \cdot 10^{-34})(3 \cdot 10^8)/(663 \cdot 10^{-9}) = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж, так что искомое число фотонов $N = \Phi t/\varepsilon = 10^{19}$.

ПРИМЕР 131. Параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление $P = 10$ мкПа. Определить: 1) концентрацию n фотонов в пучке; 2) число N_1 фотонов, проходящих через площадь $S = 1$ м² за время $t = 1$ с.

Решение.

1) Средняя плотность энергии в пучке находится из выражения для давления: $w = P/(1 + \rho)$. Концентрация n фотонов может быть

найдена, если известна их энергия:

$$n = \frac{w}{\varepsilon} = w \frac{\lambda}{2\pi\hbar c} = \frac{P\lambda}{2\pi\hbar c(1+\rho)}.$$

Подставляем теперь числовые данные (для зачерненной поверхности $\rho = 0$):

$$n = \frac{(10 \cdot 10^{-6})(500 \cdot 10^{-9})}{2\pi(1,054 \cdot 10^{-34})(3 \cdot 10^8)} = 2,52 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

2) За время t через площадку S пройдут все фотоны из объема Sct , т. е. $N_1 = nSct = (2,52 \cdot 10^{13})(3 \cdot 10^8) = 7,55 \cdot 10^{21}$.

VI.2.B. Задачи для самостоятельной работы

Фотоны

Задача VI.2.1. В радиоастрономии важную роль играет излучение длиной волны 21 см. Чему равна энергия соответствующего фотона?

Задача VI.2.2. Какая частота и длина волны у фотона, имеющего энергию: 1) 1 эВ; 2) 3,4 эВ?

Задача VI.2.3. Определить энергию и импульс фотона, которому соответствует длина волны $\lambda = 380$ нм (фиолетовая граница видимого спектра).

Задача VI.2.4. Определить энергию и длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, движущегося со скоростью 10 Мм/с.

Задача VI.2.5. При идеальных условиях глаз человека способен ощущать свет, если в него в секунду попадает 100 фотонов длиной волны 550 нм. Какова мощность такого «пучка» света?

Задача VI.2.6. Ультрафиолетовая лампа испускает свет длиной волны $\lambda_{\text{ф}} = 400$ нм, инфракрасная лампа излучает на длине волны $\lambda_{\text{кр}} = 700$ нм. Мощность излучения обеих ламп одинакова — 400 Вт. Сколько фотонов в единицу времени испускает каждая лампа?

Фотоэффект

Задача VI.2.7. Определить работу выхода A электрона из натрия, если красная граница фотоэффекта $\lambda_{\text{кр}} = 500$ нм.

Задача VI.2.8. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовое излучение с длиной волны 300 нм?

Задача VI.2.9. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_{\text{кр}} = 307$ нм и максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона $T_{\text{max}} = 1$ эВ?

Задача VI.2.10. На поверхность лития падает монохроматический свет длиной волны $\lambda = 310$ нм. Чтобы прекратить эмиссию электронов, надо приложить задерживающую разность потенциалов U не менее 1,7 В. Чему равна работа выхода A ?

Задача VI.2.11. Задерживающее напряжение при освещении некоего металла светом длиной волны $\lambda_1 = 491$ нм равно $U_1 = 0,7$ В. При смене источника света задерживающее напряжение увеличилось до $U_2 = 1,43$ В. 1) Чему равна длина волны λ_2 второго источника света? 2) Чему равна работа выхода для данного металла?

Задача VI.2.12. В эксперименте было найдено, что задерживающее напряжение равно $U_1 = 1,85$ В для света длиной волны $\lambda_1 = 300$ нм и $U_2 = 0,82$ В для света длиной волны $\lambda_2 = 400$ нм. Из этих данных найти: 1) значение постоянной Планка; 2) работу выхода для этого металла; 3) красную границу фотоэффекта.

Задача VI.2.13. До какого максимального потенциала зарядится изолированный цинковый шарик при облучении его электромагнитным излучением длиной волны 140 нм?

Задача VI.2.14. На цинковую пластинку падает монохроматический свет длиной волны $\lambda = 220$ нм. Определить максимальную скорость фотоэлектронов v_{\max} .

Задача VI.2.15. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вылетающих из металла под действием γ -излучения с длиной волны $\lambda = 0,3$ нм.

Задача VI.2.16. Максимальная скорость фотоэлектрона равна 291 Мм/с. Определить энергию γ -кванта, вырвавшего этот электрон из металла.

Давление света

Задача VI.2.17. Определить поверхностную плотность потока энергии излучения, падающего по нормали на зеркальную поверхность, если световое давление лучей равно $P = 10$ мкПа.

Задача VI.2.18. Поток энергии Φ , излучаемый лампой, равен 600 Вт. На расстоянии $r = 1$ м от лампы перпендикулярно падающим лучам расположено круглое зеркальце диаметром $d = 2$ см. Принимая, что лампа излучает равномерно во всех направлениях и что зеркальце полностью отражает падающий свет, найти силу F светового давления.

Задача VI.2.19. На зеркальце с идеально отражающей поверхностью площадью $S = 1,5$ см² падает нормально свет от электрической дуги. Определить импульс p , полученный зеркальцем за время облучения $t = 1$ с, если поверхностная плотность потока излучения составляет 0,1 МВт/м².

Задача VI.2.20. Плоская световая волна интенсивностью 0,7 Вт/см² освещает шар радиусом 5 см с абсолютно зеркальной поверхностью. Найти силу светового давления на шар.

Задача VI.2.21. Спутник в форме шара диаметром $d = 40$ м движется вне земной атмосферы. Зная солнечную постоянную $C = 1,4$ кДж/(м²·с) и принимая, что поверхность спутника полностью отражает свет, определить силу давления F солнечного света на спутник.

Задача VI.2.22. В космосе движется пылинка плотностью 1 г/см^3 , поглощающая весь падающий на нее свет. Зная мощность излучения Солнца $\Phi = 4 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$, найти радиус пылинки, при котором ее гравитационное притяжение к Солнцу компенсируется силой светового давления.

VI.3. Волновые свойства микрочастиц

VI.3.A. Основные формулы

- Дебройлевская длина волны частицы с импульсом p

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}. \quad (\text{VI.3.20})$$

Здесь в нерелятивистском случае ($v \ll c$)

$$p = mv = \sqrt{2mE_k}, \quad (\text{VI.3.21})$$

где m , v , E_k — масса, скорость и кинетическая энергия частицы. В релятивистском случае ($v \sim c$)

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}. \quad (\text{VI.3.22})$$

- Из приведенных формул следует связь длины волны де Бройля с кинетической энергией частицы:
 - в нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_k}}; \quad (\text{VI.3.23})$$

- в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}}. \quad (\text{VI.3.24})$$

- Комптоновская длина волны частицы

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}. \quad (\text{VI.3.25})$$

При решении задач полезно иметь под рукой числовые значения этого параметра:

- для электрона $\lambda_C^e = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ м}$;
- для протона $\lambda_C^p = 1,321 \cdot 10^{-15} \text{ м}$.
- Использование комптоновской длины волны частицы дает возможность упростить численные расчеты длины волны де Бройля в релятивистском случае, позволяя оперировать безразмерными отношениями сходных физических величин. Так, формула зависимости дебройлевской длины волны от скорости частицы может быть записана в виде

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv} = \frac{\lambda_C}{v/c}, \quad (\text{VI.3.26})$$

а зависимость (VI.3.24) λ от кинетической энергии имеет вид

$$\lambda = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\frac{E_k}{mc^2} \left(2 + \frac{E_k}{mc^2} \right)}}. \quad (\text{VI.3.27})$$

Поскольку в релятивистском случае скорость частицы выражается обычно в долях скорости света, а кинетическая энергия — в мегаэлектронвольтах, формулы (VI.3.26) и (VI.3.27) становятся очень удобными.

В нерелятивистском случае также удобно иметь отношения безразмерных величин. Так, формула (VI.3.23) может быть записана в виде

$$\lambda = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\frac{2E_k}{mc^2}}}. \quad (\text{VI.3.28})$$

Энергии покоя: для электрона $m_e c^2 = 0,511$ МэВ, для протона $m_p c^2 = 938,27$ МэВ.

- Соотношения неопределенностей Гейзенберга:

- для координат и проекций импульсов частицы

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar; \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar; \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar, \quad (\text{VI.3.29})$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — неопределенности координат частицы и $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ — неопределенности проекций импульса частицы на соответствующие координатные оси;

- для энергии и времени

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (\text{VI.3.30})$$

где ΔE — неопределенность энергии данного энергетического состояния; Δt — неопределенность во времени пребывания системы в этом состоянии.

VI.3.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 132. Заряженная частица проходит ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ МВ. Определить длину волны де Бройля, если эта частица: 1) электрон; 2) протон.

Решение. В обоих случаях кинетическая энергия частицы $E_k = 1$ МэВ. Сравнивая ее с энергиями покоя, приведенными выше, находим:

$$m_e c^2 < E_k \ll m_p c^2,$$

т. е. движение протона может быть описано классическими формулами, а к электрону надо применять релятивистские.

Поэтому для электрона с учетом уравнения (VI.3.27) и соотношения $E_k/m_e c^2 = 1/0,511 = 1,957$ имеем

$$\lambda^e = \frac{2,426 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{1,957 \cdot 3,957}} = 0,87 \cdot 10^{-12} = 0,87 \text{ пм.}$$

Для протона $E_k/m_p c^2 = 1/938,27 = 1,066 \cdot 10^{-3}$, и мы воспользуемся формулой (VI.3.28):

$$\lambda^p = \frac{1,321 \cdot 10^{-15}}{\sqrt{2 \cdot 0,001066}} = 2,86 \cdot 10^{-14} = 28,6 \text{ фм.}$$

ПРИМЕР 133. Найти дебройлевскую длину волны тепловых нейтронов, соответствующую их среднеквадратичной скорости v при комнатной температуре $T = 300$ К.

Решение. Как известно из молекулярно-кинетической теории, средняя кинетическая энергия частиц связана с температурой системы соотношением

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T,$$

где k_B — постоянная Больцмана

$$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ эВ} \cdot \text{К}^{-1}.$$

Заметим, что из приведенного числового значения постоянной Больцмана следует, что кинетической энергии $E_k = 1$ эВ соответствует температура $T = (2E_k)/(3k_B) \approx 7700$ К. Энергии же покоя электрона соответствует немислимая температура $T = (2 \cdot 0,511 \cdot 10^6)/(3 \cdot 8,617 \cdot 10^{-5}) \approx 4 \cdot 10^9$ К. Поэтому при комнатной температуре заведомо можно применять нерелятивистские формулы. Тогда

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}; \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}.$$

В этой задаче разницей масс нейтрона и протона можно пренебречь: $m \approx m_p$. Получаем, подставляя числовые значения:

$$\lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3 \cdot (1,673 \cdot 10^{-27})(1,381 \cdot 10^{-23}) \cdot 300}} = 1,45 \cdot 10^{-10} = 0,145 \text{ нм}.$$

ПРИМЕР 134. Пуля массой $m = 7$ г вылетает из автомата Калашникова АК-47 со скоростью $v = 850$ м/с. Следует ли учитывать дифракционные эффекты при описании движения пули?

Решение. Длина волны де Бройля летящей пули

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{7 \cdot 10^{-3} \cdot 850} = 1,1 \cdot 10^{-34} \text{ м}.$$

Это расстояние не только на много порядков меньше калибра ствола (размера пули), но и вообще находится за пределами возможного для современных экспериментов. Поэтому волновые свойства пули никак не проявятся, и для описания ее движения следует применять законы классической механики.

ПРИМЕР 135. Баллон наполнен гелием, находящимся при температуре $T = 300$ К и нормальном давлении $p = 100$ кПа. 1) Вычислить среднюю волну де Бройля атомов гелия и среднее расстояние между ними при данных условиях. 2) Можно ли рассматривать атомы гелия как корпускулы? 3) При какой температуре надо принимать во внимание волновые свойства атомов, если охлаждать баллон при постоянном

объеме? Массу m атома гелия принять равной четырем массам протона: $m = 4m_p$.

Решение.

1) Средняя кинетическая энергия атомов гелия

$$E_k = \frac{3}{2} k_B T. \quad (\text{VI.3.31})$$

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{3m_p k_B T}}. \quad (\text{VI.3.32})$$

Подставляем в (VI.3.32) числовые значения:

$$\lambda = \frac{\pi(1,054 \cdot 10^{-34})}{\sqrt{3(1,67 \cdot 10^{-27})(1,38 \cdot 10^{-23}) \cdot 300}} = 7,3 \cdot 10^{-11} = 73 \text{ пм}. \quad (\text{VI.3.33})$$

Среднее расстояние между атомами гелия определяется на основе уравнения Клапейрона—Менделеева (см. учебник, т. 1, гл. 11): $pV = Nk_B T$. Отсюда находим сначала объем, приходящийся на один атом гелия: $V/N = k_B T/p$, после чего вычисляем среднее расстояние l между атомами:

$$l = \sqrt[3]{\frac{V}{N}} = \left(\frac{k_B T}{p}\right)^{1/3}. \quad (\text{VI.3.34})$$

Подставляем в (VI.3.34) числовые значения:

$$l = \left(\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{10^5}\right)^{1/3} = 3,5 \cdot 10^{-9} = 3,5 \text{ нм}. \quad (\text{VI.3.35})$$

2) Атомы гелия при заданных условиях могут рассматриваться как частицы, потому что среднее расстояние между ними намного больше длины волны де Бройля: $l/\lambda \approx 48$. Поэтому волновые эффекты (интерференция и т. п.) не играют роли.

3) Волновые свойства атомов важны, когда длина волны де Бройля имеет порядок расстояния между атомами. Поскольку мы охлаждаем замкнутый баллон, сохраняя то же число атомов в прежнем объеме, расстояние l между ними не изменится. Нам надо уменьшить температуру так, чтобы длина волны де Бройля возросла в 48 раз. Так как температура входит в (VI.3.32) под знаком квадратного корня, ее надо уменьшить до значения $T = 300/48^2 = 0,13 \text{ К}$.

На самом деле так сильно охлаждать гелий не придется: гораздо раньше (при $T = 4,2 \text{ К}$) он перейдет в жидкое состояние, так что расстояние между молекулами резко уменьшится и квантовые эффекты будут заметны при более высоких температурах. Но даже наша грубая оценка позволяет понять, что при низких температурах квантовые эффекты нельзя игнорировать. И другой вывод: они неважны при рассмотрении свойств газов при обычных условиях.

ПРИМЕР 136. На узкую щель шириной $a = 1 \text{ мкм}$ направлен параллельный пучок электронов, имеющих скорость $v = 3,65 \text{ Мм/с}$. Учитывая волновые свойства электронов, определить ширину x центрально-

го максимума в дифракционной картине, полученной на экране, отстоящем на $L = 10$ см от щели. Дать интерпретацию уширения изображения щели с корпускулярной точки зрения, выведя соотношение неопределенностей из волновой картины.

Решение. Согласно гипотезе де Бройля длина волны λ , соответствующая частице массой m_e , движущейся с нерелятивистской скоростью v , выражается формулой

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv} = \frac{2\pi(1,054 \cdot 10^{-34})}{(9,11 \cdot 10^{-31})(3,65 \cdot 10^6)} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м.} \quad (\text{VI.3.36})$$

Ширину центрального максимума определяем как расстояние между минимумами первого порядка. Дифракционный минимум при дифракции на одной щели наблюдается при условии $a \sin \varphi = k\lambda$, так что для минимумов первого порядка $a \sin \varphi = \pm \lambda$. Так как угол дифракции φ заведомо мал, можно принять $\sin \varphi \approx \varphi$, и направления на минимумы равны $\varphi_{\pm} = \pm \lambda/a$. При расстоянии L до экрана разность $\varphi_+ - \varphi_- = 2\varphi_+$ между направлениями на минимумы первого порядка создает между ними линейное расстояние

$$x = 2\varphi_+ L = \frac{2l\lambda}{a} = 4 \cdot 10^{-5} = 40 \text{ мкм.} \quad (\text{VI.3.37})$$

С точки зрения корпускулярной теории электроны проходят через щель не отклоняясь, так что изображение щели должно иметь размер a . Однако в момент прохождения щели координата электронов имеет неопределенность $\Delta x = a$ (нельзя точно сказать, через какое именно место щели пролетел электрон). Это приведет к появлению компоненты импульса Δp_x , параллельной экрану, или компоненты скорости $\Delta v_x = \Delta p_x / m$. Поскольку время пролета электрона до экрана $t = L/v$, параллельная экрану компонента скорости сместит электрон на расстояние $\Delta v_x t = \Delta p_x L / (mv)$. Смещение возможно в обе стороны, так что ширина изображения получится равной $x = \frac{2\Delta p_x L}{mv}$. Преобразуем последнее выражение, введя длину волны де Бройля:

$$x = \frac{\Delta p_x \Delta x}{2\pi\hbar} \frac{2\lambda L}{a}. \quad (\text{VI.3.38})$$

Чтобы получился прежний результат (VI.3.37), первый сомножитель в (VI.3.38) должен быть равен единице, т. е.

$$\Delta p_x \Delta x = 2\pi\hbar = h. \quad (\text{VI.3.39})$$

Мы действительно получили одну из форм соотношения неопределенностей.

ПРИМЕР 137. Кинетическая энергия T электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение. Неопределенности координаты и импульса электрона связаны соотношением $\Delta p \Delta x \geq \hbar$. Из этого соотношения следует, что

чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры $2a$, тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью $\Delta x = l/2 = a$. Соотношение неопределенностей можно записать в этом случае в виде $a\Delta p \geq \hbar$, откуда

$$a \geq \frac{\hbar}{\Delta p}. \tag{VI.3.40}$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp , во всяком случае, не должна превышать значения самого импульса p — в противном случае атом не смог бы существовать как локализованное образование. Из неравенства $\Delta p \leq p$ следует неравенство $1/\Delta p \geq 1/p$, так что (VI.3.40) записывается в виде

$$a \geq \frac{\hbar}{p}. \tag{VI.3.41}$$

Теперь остается выразить импульс через энергию электрона в атоме: $p = \sqrt{2m_e T} = m_e c \sqrt{2T/(m_e c^2)}$ — и подставить его в (VI.3.41):

$$a \geq \frac{\hbar}{m_e c \sqrt{2T/(m_e c^2)}} = \frac{\lambda_C^e}{2\pi \sqrt{2T/(m_e c^2)}} = \frac{2,426 \cdot 10^{-12}}{2\pi \sqrt{2(10/0,511 \cdot 10^6)}} = \tag{VI.3.42}$$

$$= 62 \cdot 10^{-12} = 62 \text{ пм.}$$

Напомним, что радиус Бора $a_B = 53 \text{ пм}$, что близко к полученной оценке.

ПРИМЕР 138. Согласно современным воззрениям из ничего, а точнее, из физического вакуума могут рождаться частицы (их называют виртуальными). Оценить время жизни виртуальной пары электрон—позитрон. (Позитрон — частица с той же массой, что и электрон, но с положительным зарядом $+e$.)

Решение. Виртуальные частицы могут рождаться из вакуума, если неопределенность энергии системы превышает массу покоя частиц. Соответственно большая неопределенность в энергии позволяет виртуальным частицам существовать лишь очень короткое время.

В данном случае неопределенность энергии должна превышать удвоенную массу покоя электрона: $\Delta E \geq m_e c^2$. Тогда время жизни виртуальной электрон-позитронной пары

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{\Delta E} \geq \frac{\hbar}{2m_e c^2} = \frac{\lambda_C^e}{4\pi c} = \frac{2,426 \cdot 10^{-15}}{2\pi(3 \cdot 10^8)} = 6 \cdot 10^{-25} \text{ с.}$$

VI.3.B. Задачи для самостоятельной работы

Волны де Бройля

Задача VI.3.1. Определить длину волны де Бройля, характеризующую волновые свойства электрона, если его скорость $v = 1 \text{ Мм/с}$. Сделать такой же подсчет для протона.

Задача VI.3.2. Электрон движется со скоростью $v = 200$ Мм/с. Определить длину волны де Бройля.

Задача VI.3.3. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U . Найти длину волны де Бройля для двух случаев: 1) $U = 51$ В; 2) $U = 510$ кВ.

Задача VI.3.4. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна $0,1$ нм?

Задача VI.3.5. Определить длину волны де Бройля электрона, если его кинетическая энергия $T = 1$ кэВ.

Задача VI.3.6. Найти длину волны де Бройля протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U : 1) 1 кВ; 2) 1 МВ.

Задача VI.3.7. С какой скоростью движется электрон, если длина волны де Бройля электрона равна его комптоновской длине волны? Как изменится ответ для протона?

Задача VI.3.8. Вычислить отношение кинетической энергии электрона к кинетической энергии протона с той же длиной волны. Предполагается, что скорости обеих частиц гораздо меньше скорости света.

Задача VI.3.9. Типичное значение концентрации электронов проводимости в металле $n \sim 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Оценить температуры, при которых электронный газ можно рассматривать как газ классических частиц.

Задача VI.3.10. Типичное значение концентрации электронов проводимости в металле $n \sim 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Найти длину волны де Бройля λ электронов при $T = 300$ К и среднее расстояние l между ними.

Задача VI.3.11. Плотность жидкого гелия равна $\rho = 0,14$ г/см³. Оценить температуру T , при которой становятся важными квантовые эффекты (см. пример 135). Сравнить ее с температурой сжижения гелия (4 К).

Задача VI.3.12. Плотность жидкого азота равна $\rho = 808$ кг/м³. Оценить температуру T , при которой становятся важными квантовые эффекты (см. пример 135). Сравнить ее с температурой сжижения азота (126 К). Массу молекулы азота N_2 принять равной массе 28 протонов.

Задача VI.3.13. Определить длину волны де Бройля λ_e электронов, бомбардирующих антикатод рентгеновской трубки, если граница сплошного рентгеновского спектра приходится на длину волны $\lambda_\gamma = 3$ нм. (*Подсказка:* рассмотреть случай, когда вся кинетическая энергия электрона переходит в энергию гамма-кванта.)

Задача VI.3.14. Параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью $v = 1$ Мм/с, падает нормально на диафрагму с длиной щели шириной $a = 1$ мкм. Проходя через щель, электроны рассеиваются и образуют дифракционную картину на экране, расположенном на расстоянии $l = 50$ см от щели параллельно плоскости диафрагмы. Определить линейное расстояние x между дифракционными минимумами первого порядка.

Задача VI.3.15. В примере 136 найти расстояние между двумя максимумами первого порядка.

Соотношения неопределенностей

Задача VI.3.16. Скорость протона составляет $(8,88 \pm 0,012) \cdot 10^5$ м/с. С какой максимальной точностью можно измерить его положение?

Задача VI.3.17. Положение электрона можно измерить с точностью до $1,6 \cdot 10^{-8}$ м. С какой точностью можно определить его скорость?

Задача VI.3.18. Пуля массой 12 г вылетает из ружейного ствола со скоростью 450 м/с. 1) Какая длина волны де Бройля соответствует пуле? 2) Положение пули известно с точностью до 0,55 см (радиус ствола). Чему равна минимальная неопределенность ее импульса? 3) Как далеко могла бы отклониться от центра мишени пуля при стрельбе с дистанции 300 м, если бы точность попадания определялась лишь принципом неопределенности (неразумность такого предположения вряд ли нуждается в комментариях)?

Задача VI.3.19. Оценить неточность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $v = 1,5 \cdot 10^6$ м/с, если допустимая неточность в определении скорости v составляет 10% от ее величины. Сравнить полученную неточность с диаметром d атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния, и указать, применимо ли понятие траектории в данном случае.

Задача VI.3.20. Электрон с кинетической энергией $T = 15$ эВ находится в металлической пылинке диаметром $d = 1$ мкм. Оценить абсолютную Δv и относительную $\Delta v/v$ неточности, с которыми может быть определена скорость электрона.

Задача VI.3.21. Во сколько раз дебройлевская длина волны λ частицы меньше неопределенности Δx ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1%?

Задача VI.3.22. Предполагая, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, определить относительную неточность $\Delta p/p$ импульса этой величины.

Задача VI.3.23. С какой точностью можно измерить положение электрона с энергией $E_k = 1,5$ кэВ, если энергия известна с точностью до 1%?

Задача VI.3.24. Используя соотношение неопределенностей, оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $l \sim 0,1$ нм.

Задача VI.3.25. Приняв, что минимальная энергия E протона в ядре равна 10 МэВ, оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

Задача VI.3.26. Показать, используя соотношение неопределенностей, что в ядре не могут находиться электроны. Линейные размеры ядра принять равными 5 фм. (Подсказка: оценить кинетическую энергию E_k электронов в ядре и сравнить ее с энергией связи $E_{св}$ частиц в ядре, равной 10 МэВ.)

Задача VI.3.27. Рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Пусть моноэнергетический пучок электронов с энергией $T = 10$ эВ падает на щель шириной a . Можно считать, что если электрон прошел через щель, то его координата известна с неточностью $\Delta x = a$. Оценить получаемую при этом относительную неточность в определении импульса $\Delta p_x / p$ электрона в двух случаях: 1) $a = 10$ нм; 2) $a = 0,1$ нм.

Задача VI.3.28. Предположим, что вы играете в бейсбол в мире, где значение постоянной Планка $\hbar = 0,7$ Дж \cdot с. Мяч массой $m = 140$ г летит со скоростью $v = (20 \pm 1)$ м/с. Почему трудно поймать такой мяч?

Задача VI.3.29. Предположим, что после игры в бейсбол в мире, где значение постоянной Планка $\hbar = 0,7$ Дж \cdot с, вы положили мяч в ящик шириной $L = 0,5$ м. Какой должна быть высота H ящика, чтобы вы могли найти в нем мяч на следующий день? Масса мяча $m = 140$ г, ускорение свободного падения имеет обычное значение.

Задача VI.3.30. Используя соотношение неопределенностей $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$, оценить ширину ΔE энергетического уровня в атоме водорода, находящегося: 1) в основном состоянии; 2) в возбужденном состоянии (время жизни атома в возбужденном состоянии равно 10^{-8} с).

Задача VI.3.31. Оценить относительную ширину $\Delta\omega/\omega$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбужденном состоянии ($\tau = 10^{-8}$ с) и длина волны излучаемого фотона ($\lambda = 0,6$ мкм).

VI.4. Простейшие случаи движения микрочастиц

VI.4.A. Основные формулы

- Общее уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, \vec{r}) + U(\vec{r}) \Psi(t, \vec{r}), \quad (\text{VI.4.43})$$

где $\Psi(t, \vec{r})$ — полная волновая функция; Δ — оператор Лапласа; $U(\vec{r})$ — потенциальная энергия частицы.

- Оператор Лапласа в декартовых координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{VI.4.44})$$

- Стационарное решение уравнения Шрёдингера

$$\Psi(t, \vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \psi(\vec{r}), \quad (\text{VI.4.45})$$

где E — полная энергия частицы; $\psi(\vec{r})$ — стационарная волновая функция (координатная часть полной волновой функции).

- Стационарное уравнение Шрёдингера. Подстановка стационарного решения (VI.4.45) в (VI.4.44) приводит к уравнению для стационарной волновой функции

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}). \quad (\text{VI.4.46})$$

Для решения уравнения Шрёдингера должны удовлетворяться стандартные условия: конечность во всем пространстве, однозначность, непрерывность самой ψ -функции и ее первой производной. Должно быть выполнено также условие нормировки:

$$\int_V |\psi(\vec{r})|^2 dV = 1, \quad (\text{VI.4.47})$$

где интеграл берется по всему пространству.

- В одномерном случае потенциальная энергия и волновая функция зависят лишь от одной из координат (выберем на ее роль координату x). Тогда от оператора Лапласа (VI.4.44) остается лишь вторая производная по x и уравнение (VI.4.46) упрощается:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (\text{VI.4.48})$$

Условие нормировки в одномерном случае имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (\text{VI.4.49})$$

- Физический смысл волновой функции. В одномерном случае вероятность dW обнаружить частицу в интервале от x до $x + dx$ выражается соотношением

$$dW = |\psi(x)|^2 dx, \quad (\text{VI.4.50})$$

где квадрат модуля $|\psi(x)|^2$ волновой функции определяет плотность вероятности найти частицу в точке x .

Вероятность W обнаружить частицу в интервале от $x = x_1$ до x_2 определяется суммой (интегралом) dW по всем точкам $x_1 \leq x \leq x_2$:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx. \quad (\text{VI.4.51})$$

- Собственное значение энергии E_n частицы, находящейся на энергетическом уровне с номером n в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме, определяется выражением

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \quad (\text{VI.4.52})$$

где m — масса частицы; l — ширина потенциальной ямы.

Формула (VI.4.52) может быть записана в виде безразмерного отношения комптоновской длины волны частицы λ_C к ширине ямы (выражение в скобках):

$$E_n = \frac{mc^2}{8} \left(\frac{\lambda_C}{l} \right)^2 n^2, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{VI.4.53})$$

Соответствующая уровню n собственная волновая функция имеет вид

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \text{ или } x \geq l; \\ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\pi n \frac{x}{l}\right), & \text{если } 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (\text{VI.4.54})$$

- Энергетические уровни частицы, заключенной в трехмерную прямоугольную потенциальную яму, с размерами l_1, l_2, l_3 вдоль координатных осей

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2} \right), \quad n_i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{VI.4.55})$$

Соответствующая уровню (n_1, n_2, n_3) волновая функция является произведением одномерных волновых функций:

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}} \sin\left(\pi n_1 \frac{x}{l_1}\right) \sin\left(\pi n_2 \frac{y}{l_2}\right) \sin\left(\pi n_3 \frac{z}{l_3}\right). \quad (\text{VI.4.56})$$

- Энергетические уровни одномерного осциллятора (потенциальная энергия имеет вид $U(x) = m\omega^2 x^2/2$) определяются выражением

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VI.4.57})$$

Волновая функция основного состояния ($n = 0$; $E_0 = \hbar\omega/2$)

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}. \quad (\text{VI.4.58})$$

- Коэффициенты отражения R и прохождения D частиц (волн де Бройля) через низкий ($U < E$) потенциальный барьер бесконечной ширины (потенциальная ступенька)

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2; \quad D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (\text{VI.4.59})$$

Здесь k_1 и k_2 — волновые числа волн де Бройля в областях $U(x) = 0$ и $U(x) = U$:

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}; \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U)}. \quad (\text{VI.4.60})$$

Как и для фотонов, волновой вектор частицы связан с ее импульсом: $\hbar \vec{k} = \vec{p}$. Сумма коэффициентов отражения и прохождения равна единице: $R + D = 1$.

- Коэффициент прозрачности потенциального барьера $U(x)$

$$D \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m(U(x) - E)} \right], \quad (\text{VI.4.61})$$

где x_1 и x_2 — координаты точек, между которыми потенциальная энергия превышает энергию частицы: $U(x) \geq E$.

Для прямоугольного барьера с постоянной высотой $U < E$ формула принимает вид

$$D \approx \exp \left[-\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} \right], \quad (\text{VI.4.62})$$

где d — ширина барьера.

Это выражение полезно преобразовать к такому виду, чтобы энергия и ширина барьера входили в безразмерных отношениях:

$$D \approx \exp \left[-\frac{2dmc}{\hbar} \sqrt{\frac{2(U-E)}{mc^2}} \right] = \exp \left[-\frac{4\pi d}{\lambda_C} \sqrt{\frac{2(U-E)}{mc^2}} \right]. \quad (\text{VI.4.63})$$

Напомним, что λ_C — комптоновская длина волны частицы.

VI.4.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 139. В потенциальной яме бесконечной глубины движется электрон. В зависимости от его кинетической энергии волновая функция может принимать различные значения, схематически представленные на рис. 91. Какие из этих состояний сохранятся, если ширина потенциальной ямы уменьшится в 2 раза (т. е. если правая стенка ямы переместится в положение, показанное пунктирной линией)? Как изменится при этом минимальное значение кинетической энергии электрона?

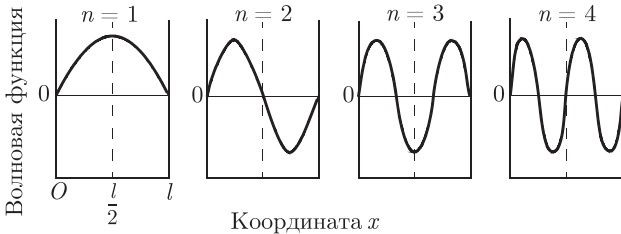


Рис. 91

Решение. В потенциальной яме бесконечной глубины волновая функция на стенках ямы должна быть равна нулю. Поэтому смогут остаться только состояния, обозначенные четными номерами: $n = 2, 4, 6$ и т. д.

Расстояние между узлами волновой функции основного состояния равно половине длины волны де Бройля. При уменьшении ширины ямы в 2 раза основным состоянием станет функция с $n = 2$. Ее длина волны де Бройля в 2 раза меньше, чем у прежней волновой функции с $n = 1$. Стало быть, импульс электрона в этом состоянии больше в 2 раза, а кинетическая энергия в 4 раза.

ПРИМЕР 140. Частица находится в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной l в состоянии с квантовым числом n . Найти вероятность W_n , с которой частица может быть обнаружена в области $0 \leq x \leq l/3$. Найти числовой результат для $n = 1, 2, 3$.

Решение. Волновая функция системы имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \left(\pi n \frac{x}{l} \right).$$

Искомая вероятность W_n определяется в соответствии со смыслом волновой функции: величина $|\psi_n(x)|^2 dx$ есть вероятность обнаружить

частицу на отрезке длины dx вблизи точки x . Чтобы получить W_n , надо сложить эти вероятности для всех точек x заданной области, т. е. вычислить соответствующий интеграл:

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{l/3} |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2 \left[\pi n \frac{x}{l} \right] dx = \frac{1}{l} \int_0^{l/3} \left[1 - \cos \left(2\pi n \frac{x}{l} \right) \right] dx = \\ &= \frac{1}{l} \left[\frac{l}{3} - \frac{l}{2\pi n} \sin \left(\frac{2\pi n}{3} \right) \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi n} \sin \left(\frac{2\pi n}{3} \right). \end{aligned}$$

Отсюда для конкретных значений n

$$W_1 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,196; \quad W_2 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \approx 0,402; \quad W_3 = \frac{1}{3}.$$

Из симметрии следует, что такие же результаты получаются и для последней трети потенциальной ямы. Так как полная вероятность равна единице, то вероятность обнаружить частицу в средней трети ямы (в области $l/3 \leq x \leq 2l/3$) можно рассчитать по формуле $1 - 2W_n$. Видно, что в основном состоянии с вероятностью, превышающей 60%, частица будет обнаружена в средней трети ямы. В первом возбужденном состоянии, наоборот, частица пребывает в средней части ямы с вероятностью меньше 20%. Наконец, во втором возбужденном состоянии частица может находиться в каждой из указанных частей с вероятностью, равной 33,3%.

ПРИМЕР 141. Дан одномерный квантовый осциллятор с потенциальной энергией $U(x) = m\omega^2 x^2/2$, находящийся в основном состоянии с энергией $E = \hbar\omega/2$. Согласно классической физике максимальное отклонение x_{\max} (амплитуда колебаний) находится из соотношения $U(x_{\max}) = E$, т. е. $x_{\max} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Найти вероятность W обнаружения колеблющейся частицы вне классической области движения.

Решение. Волновая функция $\psi_0(x)$ частицы в основном состоянии дана выражением (VI.4.58). Нас интересует вероятность обнаружения частицы в областях $x \leq -x_{\max}$ и $x \geq x_{\max}$, т. е. нужно вычислить и сложить интегралы $\int_{-\infty}^{x_{\max}} |\psi_0(x)|^2 dx$ и $\int_{x_{\max}}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx$. Из симметрии потенциала и волновой функции ясно, что эти вероятности равны, так что достаточно найти один интеграл и затем его удвоить. Тогда

$$W = 2 \int_{x_{\max}}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{\sqrt{\hbar/(m\omega)}}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} dx.$$

Выполняя в интеграле замену переменных $x = y\sqrt{\hbar/(m\omega)}$, переписываем это выражение в виде

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-y^2} dy = 0,157.$$

Приведенный выше интеграл не берется в элементарных функциях; мы привели лишь результат его численного расчета. Итак, с вероятностью 15,7% осциллятор в основном состоянии может отклоняться на расстояния, превышающие его классическую амплитуду колебаний.

ПРИМЕР 142. Атомы аргона заключены в непроницаемый кубический баллон с размером ребра $a = 20$ см. 1) Чему равна разность энергий ΔE двух первых уровней? 2) Чему равна кинетическая энергия E_k теплового движения атомов при температуре $T = 300$ К? 3) При какой температуре энергия теплового возбуждения равна разности энергий первых уровней? Атомная масса аргона составляет $\mu = 39,9$ г/моль.

Решение. Сначала вычислим массу атома аргона:

$$m = \mu/N_A = 39,9 \cdot 10^{-3} / (6,022 \cdot 10^{23}) = 6,63 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

1) Энергия частиц в кубическом объеме дается формулой (VI.4.55), где нужно положить $l_1 = l_2 = l_3 = a$. Энергия основного состояния получается при значениях квантовых чисел $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, для первого возбужденного уровня значение одного из квантовых чисел увеличивается на единицу (например, $n_1 = 2$; $n_2 = n_3 = 1$). В результате

$$\begin{aligned} E_{1,1,1} &= 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}; & E_{2,1,1} &= 6 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}; \\ \Delta E &= E_{2,1,1} - E_{1,1,1} = 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \end{aligned} \tag{VI.4.64}$$

Подставляем в (VI.4.64) числовые данные:

$$\Delta E = \frac{3\pi^2(1,054 \cdot 10^{-34})^2}{2(6,63 \cdot 10^{-26}) \cdot 0,2^2} = 6,2 \cdot 10^{-41} \text{ Дж.}$$

2) Средняя тепловая энергия атома аргона вычисляется по формуле

$$E_k = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} (1,38 \cdot 10^{-23}) \cdot 300 = 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.} \tag{VI.4.65}$$

3) Температура, при которой $E_k = \Delta E$:

$$T = \frac{2\Delta E}{3k_B} = \frac{2(6,2 \cdot 10^{-41})}{1,38 \cdot 10^{-23}} = 3 \cdot 10^{-18} \text{ К.}$$

Иными словами, дискретностью уровней в газе можно спокойно пренебречь, в том числе и по сравнению с другими квантовыми эффектами.

ПРИМЕР 143. При каком отношении высоты U потенциального барьера бесконечной ширины и энергии E электрона, падающего на барьер, коэффициент отражения R равен $1/2$?

Решение. Коэффициент отражения задается формулой

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2,$$

где волновые векторы

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}; \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U)}.$$

Отсюда

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - U/E}}{1 + \sqrt{1 - U/E}} \right)^2.$$

Решая уравнение относительно отношения U/E , получаем

$$\frac{U}{E} = \frac{4\sqrt{R}}{(1 + \sqrt{R})^2}.$$

Подставляя $R = 1/2$, находим $U/E = 4(3\sqrt{2} - 4) \approx 0,971$.

ПРИМЕР 144. На низкий потенциальный барьер падает моноэнергетический поток электронов. Концентрация n_0 электронов в падающем потоке равна 10^9 мм^{-3} , а энергия электрона $E = 100 \text{ эВ}$. Определить давление, которое испытывает барьер, если его высота $U = 9,7 \text{ эВ}$.

Решение. Пусть скорость электронов $v = \sqrt{2E/m}$, а площадь поперечного сечения пучка S . Тогда за время dt на барьер попадут $dN = n_0 v S dt$ электронов. Из них RdN отразятся, причем каждый передаст барьеру импульс $2mv$. Поэтому полный импульс, переданный отраженными электронами, $dp_1 = 2mvRdN = 2n_0mv^2SRdt = 4n_0RESdt$. Сила, действующая на барьер со стороны отраженных электронов, равна импульсу, передаваемому в единицу времени:

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} = 4n_0RES,$$

откуда получаем для давления ($P_1 = F_1/S$):

$$P_1 = 4n_0RE.$$

Кроме того, на барьер действуют и прошедшие через него электроны. Их число равно $(1 - R)dN$. При падении их импульс равен $\sqrt{2mE}$, после прохождения он уменьшается до $\sqrt{2m(E - U)}$. Разность этих импульсов передается барьеру. Поэтому полный импульс, переданный барьеру прошедшими через него электронами:

$$\begin{aligned} dp_2 &= (\sqrt{2mE} - \sqrt{2m(E - U)})(1 - R)dN = \\ &= (\sqrt{2mE} - \sqrt{2m(E - U)})(1 - R)n_0 \sqrt{\frac{2E}{m}} S dt. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему случаю отсюда выводится выражение для давления, оказываемого прошедшими через него электронами:

$$P_2 = 2n_0(1 - \sqrt{1 - U/E})(1 - R)E.$$

Заметим, что для классических частиц отражения нет и давление на барьер получается из P_2 при $R = 0$:

$$P_{cl} = 2En_0(1 - \sqrt{1 - U/E}) = \frac{2n_0U}{1 + \sqrt{1 - U/E}}.$$

Подставляя в выражения для давлений P_1, P_2 коэффициент отражения как функцию энергии, получаем

$$P_1 = 4n_0E \left(\frac{1 - \sqrt{1 - U/E}}{1 + \sqrt{1 - U/E}} \right)^2; \quad P_2 = 8n_0E \frac{\sqrt{1 - U/E}(1 - \sqrt{1 - U/E})}{(1 + \sqrt{1 - U/E})^2}.$$

Полное давление электронов на барьер равно сумме P_1 и P_2 :

$$P = \frac{4n_0U}{(1 + \sqrt{1 - U/E})^2}.$$

Это и есть окончательная формула, в которую мы теперь подставим числовые данные:

$$n_0 = 10^{18} \text{ м}^{-3}; U = 9,7(1,6 \cdot 10^{-19}) = 1,55 \cdot 10^{-18} \text{ Дж};$$

$$1 - \frac{U}{E} = 1 - 0,097 = 0,903.$$

Тогда получаем

$$P = \frac{4(1 \cdot 10^{18})(1,55 \cdot 10^{-18})}{(1 + \sqrt{0,903})^2} \approx 1,63 \text{ Па}.$$

Отметим связь полученного давления с классическим:

$$P = \frac{2P_{cl}}{1 + \sqrt{1 - U/E}}.$$

Видно, что давление, рассчитанное на основе квантовой механики, всегда превышает давление, вычисленное по классической теории. Они совпадут лишь при больших энергиях, а в предельном случае $E = U$ квантовое давление ровно в 2 раза больше классического.

ПРИМЕР 145. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов 10 кВ. Во сколько раз различаются коэффициенты прозрачности D_e для электрона и D_p для протона, если высота барьера $U = 20$ кэВ и ширина $d = 0,1$ нм?

Решение. В обоих случаях энергия частицы $E = 10$ кэВ. Используя значения комптоновских длин волн для электрона и протона, приведенные в предыдущем разделе, из формулы (VI.4.63) находим:

$$D_e \approx \exp \left[- \frac{4\pi(1 \cdot 10^{-13})}{2,426 \cdot 10^{-13}} \sqrt{\frac{2(20 - 10) \cdot 10^3}{0,511 \cdot 10^6}} \right] \approx 0,355;$$

$$D_p \approx \exp \left[- \frac{4\pi(1 \cdot 10^{-13})}{1,32 \cdot 10^{-15}} \sqrt{\frac{2(20 - 10) \cdot 10^3}{938,3 \cdot 10^6}} \right] \approx 0,0124;$$

$$\frac{D_e}{D_p} \approx \frac{0,355}{0,0124} \approx 29.$$

Этот пример демонстрирует сильную зависимость коэффициента прозрачности от массы частицы.

ПРИМЕР 146. Электрон с энергией $E = 4,9$ эВ налетает на прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 5$ эВ. При какой ширине d барьера вероятность прохождения электрона через него будет равна 0,2?

Решение. Вероятность прохождения частицы через потенциальный барьер по своему физическому смыслу совпадает с коэффициентом прозрачности D , для которого у нас есть формула (VI.4.63). Беря логарифм от обеих ее частей, находим выражение для ширины барьера:

$$d = \frac{\lambda_C}{4\pi \sqrt{\frac{2(U-E)}{mc^2}}} \ln(1/D).$$

Подставляем числовые значения:

$$d = \frac{2,426 \cdot 10^{-12}}{4\pi \sqrt{\frac{2(5-4,9)}{0,511 \cdot 10^6}}} \ln(1/0,2) = 4,97 \cdot 10^{-10} \approx 0,5 \text{ нм}.$$

VI.4.B. Задачи для самостоятельной работы

Прямоугольная бесконечно глубокая потенциальная яма (потенциальный ящик)

Задача VI.4.1. Частица находится в потенциальном ящике. Найти отношение разности соседних энергетических уровней $\Delta E_{n+1,n} = (E_{n+1} - E_n)$ к энергии E_n частицы в трех случаях: 1) $n = 3$; 2) $n = 10$; 3) $n \rightarrow \infty$. Пояснить полученные результаты.

Задача VI.4.2. Электрон находится в потенциальной яме шириной $l = 0,5$ нм. Определить наименьшую разность ΔE энергетических уровней электрона. Ответ выразить в электронвольтах.

Задача VI.4.3. Частица в потенциальной яме шириной l находится в первом возбужденном состоянии ($n = 2$). Определить, в каких точках интервала $0 < x < l$ плотность вероятности нахождения частицы максимальна и минимальна.

Задача VI.4.4. Электрон находится в потенциальном ящике шириной l . В каких точках интервала $0 < x < l$ плотность вероятности нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях одинакова? Вычислить плотность вероятности для этих точек.

Задача VI.4.5. В одномерном потенциальном ящике шириной l находится электрон. Вычислить вероятность W нахождения электрона на основном энергетическом уровне в интервале длиной $l/4$, равноудаленном от стенок ящика.

Задача VI.4.6. Частица в потенциальном ящике шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность W нахождения частицы в интервале длиной $l/4$, равноудаленном от стенок ящика.

Задача VI.4.7. Вычислить отношение вероятностей W_1/W_2 нахождения электрона на основном и низшем возбужденном уровнях в интервале длиной $l/4$, равноудаленном от стенок потенциального ящика шириной l .

Задача VI.4.8. Электрон находится в одномерном потенциальном ящике шириной l на одном из энергетических уровней. Найти среднее значение $\langle x \rangle$ координаты электрона ($0 < x < l$).

Задача VI.4.9. Считая, что нуклоны в ядре находятся в трехмерном потенциальном ящике кубической формы с линейными размерами $l = 10$ фм, оценить низший энергетический уровень нуклонов в ядре. Массу нуклона принять равной массе протона.

Задача VI.4.10. Рассмотрим электрон проводимости, движущийся в кристалле металла, имеющем кубическую форму с длиной ребра $a = 0,25$ мкм. Такой электрон свободно движется в металле, но не может выскользнуть наружу. Принимая, что электрон удерживается в трехмерном бесконечно глубоком потенциальном ящике, вычислить пять первых значений энергии, которые может иметь электрон.

Задача VI.4.11. Электрон находится в кубическом потенциальном ящике в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить его в кубе, занимающем $1/8$ объема ящика и расположенном в его центре?

Задача VI.4.12. Электрон находится в кубическом потенциальном ящике в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить его в кубе, занимающем $1/64$ объема ящика и расположенном в его центре?

Задача VI.4.13. Электрон находится в основном состоянии в двумерном квадратном бесконечно глубоком потенциальном ящике со стороной l . Определить вероятность W нахождения электрона в области, ограниченной квадратом, который равноудален от стенок ящика и площадь которого составляет $1/4$ площади ящика.

Низкий потенциальный барьер бесконечной ширины (ступенька)

Задача VI.4.14. Электрон обладает энергией $E = 10$ эВ. Определить, во сколько раз изменяется его скорость v и длина волны де Бройля λ при прохождении через потенциальный барьер высотой $U = 6$ эВ.

Задача VI.4.15. Протон с энергией $E = 1$ МэВ изменил при прохождении над низким потенциальным барьером дебройлевскую длину на 1%. Определить высоту U потенциального барьера.

Задача VI.4.16. На пути электрона с дебройлевской длиной волны $\lambda_1 = 0,1$ нм находится потенциальный барьер высотой $U = 120$ эВ. Определить длину волны де Бройля λ_2 при прохождении электрона над барьером.

Задача VI.4.17. Моноэнергетический поток электронов с энергией $E = 100$ эВ падает на низкий прямоугольный потенциальный барьер бесконечной ширины. Определить высоту потенциального барьера U , если известно, что 4% падающих на барьер электронов отражается.

Задача VI.4.18. Коэффициент отражения R протона от потенциального барьера равен $2,5 \cdot 10^{-5}$. Определить, какой процент составляет высота U барьера от кинетической энергии падающих на барьер протонов.

Задача VI.4.19. Вычислить коэффициент прохождения электрона с энергией $E = 100$ эВ через потенциальный барьер высотой $U = 99,75$ эВ.

Задача VI.4.20. При каком отношении высоты U потенциального барьера и энергии E электрона, падающего на барьер, коэффициент отражения равен $0,5$?

Задача VI.4.21. Кинетическая энергия T электрона в 2 раза превышает высоту U потенциального барьера. Определить коэффициент отражения и коэффициент прохождения электронов на границе барьера.

Задача VI.4.22. Коэффициент прохождения электронов через низкий потенциальный барьер равен коэффициенту отражения. Определить, во сколько раз кинетическая энергия T электронов больше высоты U потенциального барьера.

Задача VI.4.23. Электрон с энергией $E = 100$ эВ попадает на потенциальный барьер высотой $U = 64$ эВ. Определить вероятность R того, что электрон отразится от барьера.

Задача VI.4.24. Найти приближенное выражение R_a коэффициента отражения от очень низкого потенциального барьера ($U \ll E$). Определить относительную погрешность $\delta = 100\%(R_a - R)/R$ этого выражения по сравнению с точным результатом для: 1) $U = 0,01E$; 2) $U = 0,1E$.

Задача VI.4.25. Найти приближенное выражение для коэффициента прохождения D_a через низкий потенциальный барьер при условии, что кинетическая энергия $T = E - U$ частицы в области над барьером много меньше высоты U потенциального барьера. Определить относительную погрешность $\delta = 100\%(D_a - D)/D$ этого выражения по сравнению с точным результатом для: 1) $E = 1,001U$; 2) $E = 1,01U$.

Задача VI.4.26. На низкий потенциальный барьер направлен монохроматический поток электронов с плотностью потока энергии $J_1 = 10$ Вт/м². Определить плотность потока энергии J_2 электронов в области над барьером, если его высота $U = 0,91$ эВ и энергия E электронов в падающем потоке равна 1 эВ.

Задача VI.4.27. Моноэнергетический поток электронов падает на низкий потенциальный барьер. Коэффициент прохождения $D = 0,9$. Определить отношение J_2/J_1 плотности потока энергии волны, прошедшей барьер, к плотности потока энергии волны, падающей на барьер.

Прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины

Задача VI.4.28. Найти вероятность D туннелирования электрона через прямоугольный потенциальный барьер при разности энергий $U - E = 1$ эВ, если ширина барьера: 1) $d = 0,1$ нм; 2) $d = 0,5$ нм.

Задача VI.4.29. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной $d = 0,5$ нм. Высота U барьера больше энергии E электрона на 1% . Вычислить коэффициент прозрачности D , если энергия электрона: 1) $E = 10$ эВ; 2) $E = 100$ эВ.

Задача VI.4.30. Ширина d прямоугольного потенциального барьера равна 0,2 нм. Разность энергий $U - E = 1$ эВ. Во сколько раз изменится вероятность D прохождения электрона через барьер, если разность энергий возрастет в $n = 10$ раз?

Задача VI.4.31. Электрон с энергией $E = 9$ эВ налетает на прямоугольный барьер высотой $U = 10$ эВ. При какой ширине d потенциального барьера коэффициент прозрачности $D = 0,1$?

Задача VI.4.32. При какой ширине d прямоугольного потенциального барьера коэффициент прозрачности D для электронов равен 0,01? Разность энергий $U - E = 10$ эВ.

Задача VI.4.33. Электрон налетает на прямоугольный барьер. При каком значении $U - E$ коэффициент прозрачности $D = 10^{-3}$, если ширина d барьера равна 0,1 нм?

Задача VI.4.34. Электрон с энергией $E = 9$ эВ налетает на прямоугольный барьер. Оценить вероятность D того, что электрон пройдет через потенциальный барьер, если высота барьера $U = 10$ эВ, а ширина $d = 0,1$ нм.

Задача VI.4.35. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $d = 0,1$ нм. При какой разности энергий $U - E$ вероятность D прохождения электрона через барьер равна 0,99?

Задача VI.4.36. Ядро испускает α -частицы с энергией $E = 5$ МэВ. В грубом приближении можно считать, что α -частицы проходят через прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ МэВ и шириной $d = 5$ фм. Найти коэффициент прозрачности D барьера для α -частиц, массу которых принять равной четырем массам протона.

Задача VI.4.37. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi = 10$ кВ. Во сколько раз различаются коэффициенты прозрачности D_e для электрона и D_p для протона, если высота U барьера равна 20 кэВ и ширина $d = 0,1$ пм?

Задача VI.4.38. Пучок электронов с энергией $E = 5$ эВ падает на барьер высотой $U = 6$ эВ и шириной $d = 0,7$ нм. Интенсивность пучка соответствует току силой 1 кА. Через сколько времени в среднем через барьер просочится один электрон?

Задача VI.4.39. Пучок протонов с энергией $E = 5$ эВ падает на барьер высотой $U = 6$ эВ и шириной $d = 0,7$ нм. Интенсивность пучка соответствует току силой 1 кА. Через сколько времени в среднем через барьер просочится один протон?

VI.5. Строение атома

VI.5.A. Основные формулы

- Уравнение Шрёдингера для стационарных состояний электрона в поле кулоновского потенциала, создаваемого зарядом $+Ze$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi), \quad (\text{VI.5.66})$$

где $\psi(r, \theta, \varphi)$ — волновая функция (зависящая от сферических координат r, θ, φ); m_e — масса электрона; E — его полная энергия; \hat{L} — оператор орбитального момента количества движения. Одновременно измеримы квадрат момента и его проекция на любую ось (обычно выбирают ось z). Соответствующие операторы имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{L}^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right); \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}\tag{VI.5.67}$$

- Энергетические уровни электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -13,6 \text{ эВ} \cdot \frac{Z^2}{n^2},\tag{VI.5.68}$$

где n — главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, \dots$).

- Волновая функция $\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)$ стационарного состояния зависит от главного квантового числа n , орбитального квантового числа l , пробегающего значения $l = 0, 1, \dots, n-1$, и магнитного квантового числа m , пробегающего значения $m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$. Для данного n имеется n^2 разных волновых функций, соответствующих тому же значению энергии.
- Вероятность dW того, что электрон находится в области, ограниченной элементом объема dV , взятого в окрестности точки с координатами r, θ, φ :

$$\begin{aligned}dW &= |\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)|^2 dV, \\ dV &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.\end{aligned}\tag{VI.5.69}$$

- Нормированные волновые функции, отвечающие $1s$ - (основное) и $2s$ - состояниям:

$$\psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}; \quad \psi_{2,0,0}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}} \left(2 - \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{2a}},\tag{VI.5.70}$$

где $a = a_B/Z$; $a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 52,9 \text{ пм}$ — боровский радиус.

В s -состояниях ($l = 0$; $m = 0$) волновые функции сферически симметричны, т. е. не зависят от углов θ и φ . Вероятность dW_r найти в сферическом слое $(r, r + dr)$ электрон, находящийся в атоме водорода в s -состоянии, одинакова по всем направлениям и определяется соотношением

$$dW_r = |\psi_{n,0,0}|^2 4\pi r^2 dr.\tag{VI.5.71}$$

- В состоянии $\psi_{n,l,m}$ с определенным значением квадрата орбитального момента импульса и его проекции на ось z эти значения равны

$$\vec{L}^2 = \hbar^2 l(l+1); \quad L_z = \hbar m.\tag{VI.5.72}$$

Соответственно значения магнитного момента и его проекции, порождаемые орбитальным движением электрона, имеют вид

$$\mu_L = \mu_B \sqrt{l(l+1)}; \quad \mu_{L,z} = \mu_B m,\tag{VI.5.73}$$

где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5,788 \cdot 10^{-5}$ эВ/Тл = $0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл — магнетон Бора.

- Гиромагнитное отношение для орбитальных магнитного и механического моментов

$$\frac{\mu_L}{L} = \frac{\mu_{L,z}}{L_z} = \frac{e}{2m_e}. \quad (\text{VI.5.74})$$

- Спиновый момент импульса и его проекция на ось z

$$\vec{S}^2 = \hbar s(s+1); \quad S_z = \hbar \sigma, \quad (\text{VI.5.75})$$

где s — спиновое квантовое число (для электрона $s = 1/2$); σ — спиновое магнитное квантовое число (оно принимает $2s + 1$ значений: $\sigma = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$, так что для электрона $\sigma = \pm 1/2$). Спиновый магнитный момент электрона и его проекция на ось z

$$\mu_S = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)}; \quad \mu_{S,z} = 2\mu_B \sigma. \quad (\text{VI.5.76})$$

- Гиромагнитное отношение для спиновых магнитного и механического моментов

$$\frac{\mu_S}{S} = \frac{\mu_{S,z}}{S_z} = \frac{e}{m_e}, \quad (\text{VI.5.77})$$

т. е. спиновый момент обладает двойным магнетизмом по сравнению с орбитальным.

- Принцип Паули: в атоме не может находиться два или более электронов, характеризующихся одинаковым набором четырех квантовых чисел: n, l, m, σ .
- Кратность вырождения энергетических уровней атома равна $2n^2$ (2 — за счет двух возможных направлений проекции спина электрона, n^2 — число состояний с различными значениями квантовых чисел l, m при фиксированном n).
- Распределение электронов по состояниям в атоме записывается с помощью спектроскопических символов (s, p, d, f, p, h), исторически обозначающих значения орбитального квантового числа ($l = 0, 1, 2, 3, 4$ соответственно). Электронная конфигурация записывается следующим образом: перед спектроскопическим символом ставится значение главного квантового числа n , а справа сверху — количество электронов в данном состоянии (единица обычно опускается). Например: $1s$ — электрон в состоянии $n = 1, l = 0$, $2p$ — электрон с $n = 2, l = 1$, $2p^2$ — два электрона с $n = 2, l = 1$ и т. д.
- *Оболочка* — совокупность уровней с одинаковым значением главного квантового числа n . Традиционные обозначения: K, L, M, N для $n = 1, 2, 3, 4$ соответственно.

Подоболочка — совокупность состояний с данными значениями n и l . Максимальное число электронов, помещающихся на данной оболочке, равно $2n^2$; максимальное число электронов, помещающихся на данной подоболочке, составляет $2(2l + 1)$:

- K -оболочка — одна подоболочка, два электрона, конфигурация $1s^2$;
- L -оболочка — две подоболочки, всего восемь электронов, конфигурация $2s^2 2p^6$;

- M -оболочка — три подоболочки, всего восемнадцать электронов, конфигурация $3s^2 3p^6 3d^{10}$.
- Порядок заполнения уровней в атомах

$$1s || 2s, 2p || 3s, 3p || 4s, 3d, 4p || 5s, 4d, 5p || 6s, 4f, 5d, 6p ||, \dots$$

Здесь знаком $||$ отделены периоды таблицы Д. И. Менделеева.

- Сила, действующая на атом в неоднородном магнитном поле, зависящем от координаты z :

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

где μ_z — проекция магнитного момента на ось z .

VI.5.Б. Примеры решения задач

Типичными для этого раздела являются задачи на использование волновых функций электрона в водородоподобном атоме. При решении таких задач часто встречается интеграл от произведения экспоненциальной функции на произвольную степень переменной интегрирования. Поэтому в примеры включен ряд чисто математических упражнений, результаты которых используются при решении физических задач на данную тему.

ПРИМЕР 147. Вычислить интеграл

$$I_n = \int_0^{\infty} dr r^n e^{-\lambda r},$$

где n — произвольное натуральное число; параметр $\lambda > 0$.

Решение. Рассмотрим интеграл при $n = k$, где $k \geq 1$ — произвольное целое число, и применим к нему формулу интегрирования по частям:

$$I_k = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} d(e^{-\lambda r}) r^k = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda r} r^k \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} d(r^k) e^{-\lambda r} = \frac{k}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda r} r^{(k-1)} dr,$$

так что получилось рекуррентное соотношение

$$I_k = \frac{k}{\lambda} I_{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (\text{VI.5.78})$$

Теперь напишем уравнения (VI.5.78) для $k = 1, \dots, n$:

$$I_1 = \frac{1}{\lambda} I_0, \quad I_2 = \frac{2}{\lambda} I_1, \dots, I_n = \frac{n}{\lambda} I_{n-1}$$

и перемножим их:

$$I_1 I_2 \dots I_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{\lambda^n} I_0 I_1 \dots I_{n-1}.$$

Сокращая слева и справа $I_1 \dots I_{n-1}$, получаем

$$I_n = I_0 \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Интеграл I_0 равен

$$I_0 = \int_0^{\infty} dr e^{-\lambda r} = \frac{1}{\lambda},$$

откуда находим окончательный ответ

$$I_n = \int_0^{\infty} dr r^n e^{-\lambda r} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}. \quad (\text{VI.5.79})$$

С помощью формулы (VI.5.79) вычисляются и аналогичные интегралы с конечными пределами интегрирования.

ПРИМЕР 148. Вычислить интеграл

$$I_2(R) = \int_0^R dr r^2 e^{-\lambda r}.$$

Решение. Сведем данный интеграл к интегралам по бесконечной полуоси. Для этого прибавим и вычтем соответствующий интеграл, взятый в пределах от R до ∞ . Получаем

$$I_2(R) = \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-\lambda r} - \int_R^{\infty} dr r^2 e^{-\lambda r}.$$

Первый интеграл равен интегралу I_2 , вычисленному в предыдущем примере. Во втором интеграле делаем замену переменных $r = x + R$:

$$I_2(R) = I_2 - e^{-\lambda R} \int_0^{\infty} dx (x + R)^2 e^{-\lambda x}.$$

Если теперь раскрыть $(x + R)^2$ в подынтегральном выражении и вынести степени R , не зависящие от переменной интегрирования x , то получится сумма интегралов вида I_n ($n = 0, 1, 2$):

$$I_2(R) = I_2 - e^{-\lambda R} (I_2 + 2RI_1 + R^2 I_0).$$

После подстановки выражения (VI.5.79) для I_0, I_1, I_2 получаем

$$I_2(R) = \int_0^R dr r^2 e^{-\lambda r} = \frac{2}{\lambda^3} - \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^3} [2 + 2(\lambda R) + (\lambda R)^2]. \quad (\text{VI.5.80})$$

ПРИМЕР 149. Атом водорода находится в состоянии $1s$. Определить вероятность W пребывания электрона в атоме внутри сферы радиусом $r = 0,1a_B$ (где a_B — радиус Бора).

Решение. Искомая вероятность равна интегралу от плотности вероятности (VI.5.71). С учетом (VI.5.70) для волновой функции в $1s$ -состоянии ($Z = 1$) получаем

$$W = \int_0^{0,1a_B} |\psi_{n,0,0}|^2 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a_B^3} \int_0^{0,1a_B} r^2 e^{-2r/a_B} dr = 4 \int_0^{0,1} x^2 e^{-2x} dx,$$

где мы сделали замену переменных $r = a_B x$, чтобы перейти к безразмерной величине x .

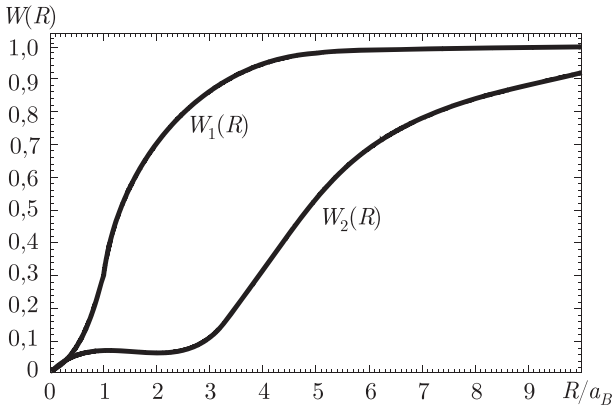


Рис. 92

Далее можно было бы воспользоваться результатом примера 148 для интеграла $I_2(R)$ при $\lambda = 2$ и $R = 0,1$. Однако с учетом малости R можно заменить экспоненту под знаком интеграла на первые члены ее разложения в ряд:

$$\begin{aligned}
 W &\approx 4 \int_0^{0,1} x^2 [1 - 2x + 2x^2 + \dots] dx = 4 \cdot \left[\frac{(0,1)^3}{3} - 2 \frac{(0,1)^4}{4} + 2 \frac{(0,1)^5}{5} + \dots \right] = \\
 &= 1,333 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4} + 1,6 \cdot 10^{-5} + \dots = 1,149 \cdot 10^{-3}.
 \end{aligned}$$

Отброшенные члены разложения имеют порядок $(0,1)^6$, т. е. можно быть уверенным в нашем ответе с точностью до последнего показанного знака: $W = (1,149 \pm 0,001) \cdot 10^{-3}$. И действительно, точный расчет дает для W значение $W = 0,1485 \cdot 10^{-3}$.

Вероятность $W_n(R)$ найти электрон внутри сферы радиусом R для общего случая радиального возбуждения определяется выражением

$$W_n(R) = 4\pi \int_0^R r^2 |\psi_{n,0,0}(r)|^2 dr. \quad (\text{VI.5.81})$$

На рис. 92 показаны графики вероятностей $W_1(R)$ и $W_2(R)$ нахождения электрона внутри сферы радиусом R для 1s- и 2s-состояний электрона в атоме водорода.

ПРИМЕР 150. Волновая функция атома водорода в основном состоянии имеет вид

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-r/a_B},$$

где a_B — радиус Бора. Определить наиболее вероятное расстояние от ядра, на котором может быть обнаружен электрон.

Решение. Вероятность обнаружить электрон в элементе объема $d\vec{r}$ равна $dW = |\psi(r)|^2 d\vec{r}$. Так как волновая функция основного состояния не зависит от направления радиус-вектора \vec{r} , а определяется лишь его

величиной r , можно написать выражение для вероятности dW_r обнаружить электрон в шаровом слое радиусом r и толщиной dr . Объем этого слоя равен $4\pi r^2 dr$ (площадь поверхности, умноженная на толщину). Именно им надо заменить элемент объема $d\vec{r}$ в dW , чтобы получить dW_r :

$$dW_r = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 dr.$$

Отсюда видно, что плотность вероятности найти электрон на расстоянии от r до $r + dr$ равна

$$P(r) = \frac{dW_r}{dr} = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 = \frac{4}{a_B^3} r^2 e^{-2r/a_B}, \quad (\text{VI.5.82})$$

куда мы уже подставили данное в условии выражение для волновой функции атома в основном состоянии.

Наиболее вероятное расстояние r_B определяется как расстояние, на котором плотность вероятности максимальна:

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{4}{a_B^3} (2r e^{-2r/a_B} - r^2 \frac{2}{r} e^{-2r/a_B}) = \frac{8}{a_B^3} r e^{-2r/a_B} \left(1 - \frac{r}{a_B}\right) = 0,$$

откуда получаем $r_B = a_B$. В отличие от классической модели атома Бора, где величина a_B была радиусом первой орбиты, в квантовой механике и этот параметр имеет вероятностный смысл.

ПРИМЕР 151. Определить среднее расстояние электрона от ядра в основном состоянии атома водорода.

Решение. Поскольку из предыдущего примера мы знаем выражение для вероятности найти электрон в шаровом слое между поверхностями с радиусами r и $r + dr$, надо умножить эту вероятность на величину радиуса и сложить такие произведения для всех возможных значений r , т. е. вычислить интеграл

$$\langle r \rangle = \int r dW_r = \int_0^\infty r P(r) dr.$$

Подставляя сюда выражение (VI.5.82) для плотности вероятности $P(r)$, получаем

$$\langle r \rangle = \frac{4}{a_B^3} \int_0^\infty dr r^3 e^{-2r/a_B} = \frac{4}{a_B^3} \cdot 3 \left(\frac{a_B}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} a_B. \quad (\text{VI.5.83})$$

Здесь мы использовали выражение для интеграла I_3 из уравнения (VI.5.79) при $\lambda = 2/a_B$. Видно, что среднее расстояние от ядра не совпадает с наиболее вероятным расстоянием, найденным в предыдущем примере.

Аналогично вычисляются средние от любой степени r . Например:

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 P(r) dr \quad \text{и т. д.}$$

Не следует забывать, что выражение для плотности вероятности $P(r)$, которое мы использовали, относится к *основному* состоянию. Для других состояний будут иные волновые функции и соответственно другие результаты.

ПРИМЕР 152. Волновая функция первого радиального возбуждения атома водорода ($2s$ -состояние с $n = 2; l = 0; m = 0$) имеет вид

$$\psi(r) = C \left(2 - \frac{r}{a_B} \right) \exp \left(-\frac{r}{a_B} \right),$$

где C — нормировочная постоянная; a_B — радиус Бора. Какие расстояния от ядра наиболее вероятны для электрона в этом состоянии?

Решение. Аналогичная задача решена нами для основного состояния.

Радиальная плотность вероятности находится по тому же принципу:

$$P(r) = 4\pi|C|^2 r^2 \left(2 - \frac{r}{a_B} \right)^2 \exp \left(-\frac{r}{a_B} \right).$$

Эта функция обращается в нуль при $r = 0$, $r = 2a_B$ и на бесконечности. Ясно, что у нее должно быть по крайней мере два максимума на интервалах $(0, 2a_B)$ и $(2a_B, \infty)$. Чтобы найти их, продифференцируем функцию $P(r)$ по r :

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= 4\pi|C|^2 \left[2r \left(2 - \frac{r}{a_B} \right)^2 e^{-\frac{r}{a_B}} - r^2 \frac{2}{a_B} \left(2 - \frac{r}{a_B} \right) e^{-\frac{r}{a_B}} - r^2 \left(2 - \frac{r}{a_B} \right)^2 \frac{1}{a_B} e^{-\frac{r}{a_B}} \right] = \\ &= 4\pi|C|^2 r \left(2 - \frac{r}{a_B} \right) e^{-\frac{r}{a_B}} \left[\left(\frac{r}{a_B} \right)^2 - 6 \frac{r}{a_B} + 4 \right] = 0. \end{aligned}$$

Решения $r = 0$ и $r = 2a_B$ соответствуют минимуму плотности вероятности. Для нахождения максимумов надо решить квадратное уравнение

$$r^2 - 6ra_B + 4a_B^2 = 0,$$

откуда $r_1 = (3 - \sqrt{5})a_B \approx 0,76a_B$ и $r_2 = (3 + \sqrt{5})a_B \approx 5,24a_B$. Нетрудно убедиться также, что значение плотности вероятности в точке r_2 примерно в 3,7 раза больше ее значения в точке r_1 .

Плотность вероятности для сферически симметричного состояния с $n = 1, 2$ в безразмерных единицах $P_n(R/a_B) \cdot a_B$ показана на рис. 93.

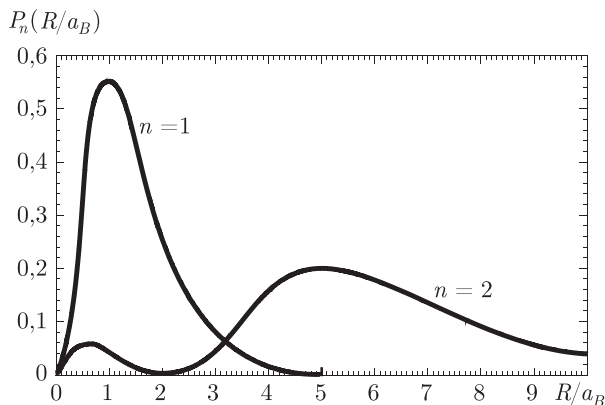


Рис. 93

ПРИМЕР 153. Электрон в возбужденном атоме водорода находится в $3p$ -состоянии. Определить изменение магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона, при переходе атома в основное состояние.

Решение. Изменение $\Delta\mu_L$ орбитального магнитного момента найдем как разность магнитных моментов в конечном (основном) и начальном (возбужденном) состояниях, т. е. $\Delta\mu_L = \Delta\mu_{L,0} - \Delta\mu_{L,1}$. Магнитный момент орбитального движения электрона зависит только от орбитального квантового числа l :

$$\mu_L = \mu_B \sqrt{l(l+1)},$$

так что $\mu_{L,0} = 0$; $\mu_{L,1} = \mu_B \sqrt{2}$ и

$$\Delta\mu_L = -\mu_B \sqrt{2} = -1,31 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл.}$$

Знак «минус» показывает, что в данном случае магнитный момент уменьшился.

ПРИМЕР 154. Энергия ионизации атома водорода $I = 13,6$ эВ. Какой кинетической энергией должны обладать: 1) электрон; 2) протон; 3) альфа-частица, чтобы иметь возможность ионизировать атом водорода?

Решение. Предполагая, что ионизация происходит в результате полностью неупругого удара, можно написать закон сохранения импульса:

$$mv_0 = (m + m_H)u, \quad \text{откуда } u = v_0 \frac{m}{m + m_H},$$

где m — масса бомбардирующей частицы; $m_H = m_p + m_e$ — масса атома водорода; v_0 — начальная скорость налетающей частицы; u — конечная одинаковая скорость частицы и атома после столкновения.

Кинетическая энергия T_0 бомбардирующей частицы до столкновения и полная кинетическая энергия T частицы и атома после столкновения равны

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2}; \quad T = \frac{(m + m_H)u^2}{2} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m + m_H)} = T_0 \frac{m}{m + m_H}.$$

Убыль кинетической энергии должна быть равна энергии ионизации I :

$$I = T_0 - T = T_0 \frac{m_H}{m + m_H},$$

откуда

$$T_0 = I \frac{m + m_H}{m_H}. \quad (\text{VI.5.84})$$

Чем больше масса бомбардирующей частицы, тем меньшую долю первоначальной кинетической энергии можно использовать для ионизации. При ионизации электроном его первоначальная кинетическая энергия практически полностью расходуется на ионизацию.

Подставляя в (VI.5.84) значение $m = m_e$, получаем

$$T_{0,e} = I \frac{m_p + 2m_e}{m_p + m_e} \approx I = 13,6 \text{ эВ,}$$

поскольку $m_p \gg m_e$.

Для ионизации атома ускоренным протоном первоначальная энергия должна быть в 2 раза больше:

$$T_{0,p} = I \frac{2m_p + m_e}{m_p + m_e} \approx 2I = 27,2 \text{ эВ.}$$

Наконец, при ионизации α -частицами, представляющими собой атомные ядра гелия ($m \approx 4m_p$), начальная кинетическая энергия должна быть в 5 раз больше:

$$T_{0,\alpha} \approx I \frac{4m_p + m_p}{m_p} = 5I = 68 \text{ эВ.}$$

Проведенная оценка объясняет, почему в газоразрядной плазме ионизация происходит почти исключительно электронами, а ионизация собственными ионами практически не играет роли.

ПРИМЕР 155. Электрон, двигаясь в атоме, испытывает со стороны ядра кулоновскую силу притяжения. Можно ли создать внешнее электрическое поле, способное преодолеть эту силу и ионизировать атом водорода? Практически осуществимые напряженности поля лежат в пределах $10^7 - 10^8$ В/м.

Решение. Для ионизации атома внешним полем нужны напряженности не меньшие, чем напряженность кулоновского поля, в котором находится электрон. Для оценки последнего будем считать, что в состоянии с квантовым числом n расстояние от центра равно радиусу Бора $a_B = 52,9$ пм, умноженному на n^2 . Тогда

$$E_n = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_B^2 n^4} \approx \frac{5,14 \cdot 10^{11}}{n^4} \text{ В/м.}$$

В основном состоянии атома водорода ($n = 1$) напряженность электрического поля $E_1 = 5,14 \cdot 10^{11}$ В/м на несколько порядков превышает практически достижимые напряженности поля. Однако если электрон находится в состоянии с квантовым числом n , то напряженность поля уменьшается в n^4 раз. Если, например, $n = 10$, то напряженность поля действительно удается наблюдать ионизацию электрическим полем высоковозбужденных атомов водорода.

VI.5.B. Задачи для самостоятельной работы

Атом водорода

Задача VI.5.1. Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии. С использованием рис. 92 определить отношение вероятностей w_1/w_2 пребывания электрона в сферических слоях толщиной $\Delta r = 0,01a_B$ и радиусами $r_1 = 0,5a_B$ и $r_2 = 1,5a_B$.

Задача VI.5.2. Электрон в атоме водорода находится в $2s$ -состоянии. С использованием рис. 92 определить отношение вероятностей w_1/w_2 пребывания электрона в сферических слоях толщиной $\Delta r = 0,01a_B$ и радиусами $r_1 = 4a_B$ и $r_2 = 10a_B$.

Задача VI.5.3. Принято электронное облако (орбиталь) графически изображать контуром, ограничивающим область, в которой вероятность обнаружения электрона составляет 0,9. С использованием рис. 92 найти радиус r_{orb} орбитали для $1s$ -состояния электрона в атоме водорода.

Задача VI.5.4. Принято электронное облако (орбиталь) графически изображать контуром, ограничивающим область, в которой вероятность обнаружения электрона составляет 0,9. С использованием рис. 92 найти радиус r_{orb} орбитали для $2s$ -состояния электрона в атоме водорода.

Задача VI.5.5. Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии. С использованием рис. 92 найти радиус сферы $r_{1/2}$, для которой вероятность найти электрон внутри нее равна вероятности обнаружить электрон вне ее.

Задача VI.5.6. Электрон в атоме водорода находится в $2s$ -состоянии. С использованием рис. 92 найти радиус сферы $r_{1/2}$, для которой вероятность найти электрон внутри нее равна вероятности обнаружить электрон вне ее.

Задача VI.5.7. Электрон находится в атоме водорода в основном состоянии. Найти среднеквадратичное расстояние $r_{\text{кв}} = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ электрона от центра атома.

Задача VI.5.8. Электрон находится в атоме водорода в основном состоянии. 1) Найти среднее значение обратного расстояния $\langle \frac{1}{r} \rangle$. 2) Используя этот результат, определить среднее значение потенциальной энергии $\langle U(r) \rangle$. 3) Сравнить ее с полной энергией E_1 электрона в этом состоянии и найти среднее значение $\langle T \rangle$ кинетической энергии электрона.

Задача VI.5.9. По формуле Бора для радиуса электронной орбиты оценить среднее расстояние a до ядра электрона, находящегося на ближайшей к ядру ($n = 1$) орбите атома урана ($Z = 92$). Какая энергия I необходима для удаления из атома этого электрона с самой внутренней орбиты?

Задача VI.5.10. Энергия ионизации (связи) внешнего электрона атома бора равна 8,26 эВ. 1) Определить «эффективный заряд ядра» $Z_{\text{эфф}}$ для этого электрона. 2) Оценить средний радиус его орбиты.

Задача VI.5.11. Энергия ионизации (связи) внешнего электрона атома натрия равна 5,14 эВ. 1) Определить «эффективный заряд ядра» $Z_{\text{эфф}}$ для этого электрона. 2) Оценить средний радиус его орбиты.

Орбитальный момент импульса и магнитный момент электрона

Задача VI.5.12. Вычислить момент импульса орбитального движения электрона, находящегося в атоме: 1) в s -состоянии; 2) в p -состоянии.

Задача VI.5.13. Определить возможные значения проекции момента импульса орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d -состоянии.

Задача VI.5.14. Атом водорода, находившийся первоначально в основном состоянии, поглотил квант света с энергией $\varepsilon = 10,2$ эВ. 1) Определить изменение момента импульса ΔL орбитального движения электрона. В возбужденном атоме электрон находится в p -состоянии. 2) Чему равно главное квантовое число n в возбужденном состоянии?

Задача VI.5.15. Определить наименьший угол θ , который может образовать вектор момента импульса орбитального движения электрона в атоме с направлением внешнего магнитного поля. Электрон в атоме находится в d -состоянии.

Задача VI.5.16. Электрон в атоме находится в f -состоянии. Найти орбитальный момент импульса L электрона и максимальное значение проекции момента импульса $L_{z \max}$ на направление внешнего магнитного поля.

Задача VI.5.17. Может ли момент импульса орбитального движения L электрона в атоме водорода быть равным $1,83 \cdot 10^{-34}$ Дж \cdot с?

Задача VI.5.18. Момент импульса орбитального движения L электрона в атоме водорода равен $4,71 \cdot 10^{-34}$ Дж \cdot с. Определить магнитный момент μ_L , обусловленный орбитальным движением электрона.

Задача VI.5.19. Вычислить полную энергию E , орбитальный момент импульса L и магнитный момент μ_L электрона, находящегося в $2p$ -состоянии в атоме водорода.

Задача VI.5.20. Определить возможные значения магнитного момента μ_L , обусловленного орбитальным движением электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия ΔE возбуждения равна 12,09 эВ.

Спин электрона. Опыт Штерна—Герлаха

Задача VI.5.21. Вычислить спиновый момент импульса \vec{S}^2 электрона и проекцию S_z этого момента на направление внешнего магнитного поля.

Задача VI.5.22. Вычислить спиновый магнитный момент μ_S электрона и проекцию магнитного момента S_z на направление внешнего поля.

Задача VI.5.23. Атомы серебра, обладающие скоростью $v = 0,6$ км/с, пропускаются через узкую щель и направляются перпендикулярно линиям индукции неоднородного магнитного поля (опыт Штерна—Герлаха). В поле протяженностью $l = 6$ см пучок расщепляется на два. Определить степень неоднородности магнитного поля, при которой расстояние b между компонентами расщепленного пучка на выходе его из поля равно 3 мм. Атомы серебра находятся в основном состоянии.

Задача VI.5.24. Узкий пучок атомарного водорода пропускается в опыте Штерна—Герлаха через поперечное неоднородное ($\partial B/\partial z = 2$ кТл/м) магнитное поле протяженностью $l = 8$ см. Скорость v атомов водорода равна 4 км/с. Определить расстояние b между компонентами расщепленного пучка атомов на выходе его из магнитного поля. Все атомы водорода в пучке находятся в основном состоянии.

Задача VI.5.25. В опыте Штерна—Герлаха узкий пучок атомов цезия в основном состоянии проходит через поперечное неоднородное магнитное поле протяженностью $l_1 = 10$ см и попадает на экран, расположенный также на расстоянии $l_2 = 10$ см. Какой должна быть степень неоднородности магнитного поля, чтобы расстояние b между компонентами расщепленного пучка на экране было равно 6 мм? Скорость атомов цезия равна 0,3 км/с.

Задача VI.5.26. Узкий пучок атомов рубидия в основном состоянии пропускается через поперечное неоднородное магнитное поле протяженностью $l_1 = 10$ см. На экране, отстоящем на расстоянии $l_2 = 20$ см от магнита, наблюдается расщепление пучка на два. Определить силу F , действующую на атомы рубидия, если расстояние b между компонентами пучка на экране равно 4 мм и скорость v атомов равна 0,5 км/с.

Заполнение электронных оболочек

Задача VI.5.27. Сколько разных состояний у электрона с главным квантовым числом $n = 5$?

Задача VI.5.28. Сколько электронов может находиться в подоболочке с $n = 6$; $l = 3$?

Задача VI.5.29. Какое максимальное число s -, p - и d -электронов может находиться в электронных K -, L - и M -оболочках атома?

Задача VI.5.30. Используя принцип Паули, указать, какое максимальное число N электронов в атоме могут иметь одинаковыми следующие квантовые числа: 1) n, l, m, σ ; 2) n, l, m ; 3) n, l ; 4) n .

Задача VI.5.31. Заполненный электронный слой характеризуется квантовым числом $n = 3$. Указать число N электронов в этом слое, у которых одинаковы следующие квантовые числа: 1) $\sigma = +1/2$; 2) $m = +1$; 3) $m = -2$; 4) $\sigma = -1/2$ и $m = 0$; 5) $\sigma = +1/2$ и $l = 2$.

Задача VI.5.32. Найти число N электронов в атомах, у которых в основном состоянии заполнены: 1) K - и L -оболочки, $3s$ -подоболочка и наполовину $3p$ -подоболочка; 2) K -, L - и M -слои и $4s$ -, $4p$ - и $4d$ -подоболочки. Что это за атомы?

Задача VI.5.33. Написать формулы электронного строения атомов: 1) бора; 2) углерода; 3) натрия.

Часть VII

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВА. ФИЗИКА МИКРОМИРА

VII.1. Элементы физики твердого тела. Тепловые свойства кристаллов. Квантовая теория электронов в металле

VII.1.A. Основные формулы

- Средняя энергия квантового гармонического осциллятора при температуре T

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}, \quad (\text{VII.1.1})$$

где ω — круговая частота колебаний осциллятора; k_B — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

- Внутренняя энергия одного моля кристалла (энергия тепловых колебаний кристаллической решетки) в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна

$$U = U_0 + 3R \frac{\theta_E}{e^{\theta_E/T} - 1}, \quad (\text{VII.1.2})$$

где $U_0 = 3R\theta_E/2$ — молярная энергия нулевых колебаний; R — универсальная газовая постоянная; $\theta_E = \hbar\omega/k_B$ — характеристическая температура Эйнштейна.

- Молярная теплоемкость кристалла в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна

$$c_p = \frac{dU}{dT} = 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\theta_E/T}}{(e^{\theta_E/T} - 1)^2}; \quad (\text{VII.1.3})$$

- при высоких температурах ($T \gg \theta_E$)

$$c_p = 3R \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 + \dots \right]; \quad (\text{VII.1.4})$$

В пределе бесконечно высоких температур $c_p \rightarrow 3R$ (закон Дюлонга и Пти);

- при низких температурах ($T \ll \theta_E$)

$$c_p = 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 e^{-\theta_E/T}. \quad (\text{VII.1.5})$$

- В квантовой теории теплоемкости Дебая число dN собственных колебаний кристаллической решетки, приходящихся на интервал

частот от ω до $\omega + d\omega$, определяется выражением

$$dN = 9N \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_{\max}^3}, \quad (\text{VII.1.6})$$

где N — число атомов;

$$\omega_{\max} = v \sqrt[3]{6\pi^2 n} \quad (\text{VII.1.7})$$

— максимальная частота, ограничивающая спектр колебаний (так называемая *дебаевская частота*).

Здесь $n = N/V$ — концентрация атомов; v — средняя скорость звуковых волн (фононов) в кристалле.

- Скорости продольных (v_{\parallel}) и поперечных (v_{\perp}) звуковых волн в кристалле определяются по формулам

$$v_{\parallel} = \sqrt{E/\rho}; \quad v_{\perp} = \sqrt{G/\rho}, \quad (\text{VII.1.8})$$

где E и G — модули продольной и поперечной упругости соответственно; ρ — плотность среды.

Средняя скорость v звуковой волны связана с v_{\parallel} и v_{\perp} соотношением

$$\frac{3}{v^2} = \frac{2}{v_{\perp}^2} + \frac{1}{v_{\parallel}^2}. \quad (\text{VII.1.9})$$

- Наименьшая длина волны, возбуждаемой в кристалле:

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi v}{\omega_{\max}} = \frac{2}{\sqrt[3]{6n}} \approx 2d, \quad (\text{VII.1.10})$$

где d — расстояние между соседними атомами в решетке.

- Молярная внутренняя энергия кристалла по Дебаю

$$U = \int_0^{\omega_{\max}} \langle \mathcal{E} \rangle dN = U_0 + 9RT \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (\text{VII.1.11})$$

Здесь $U_0 = (9/8)R\theta_D$ — молярная нулевая энергия кристалла по Дебаю; $\theta_D = \hbar\omega_{\max}/k_B$ — характеристическая температура Дебая.

- Молярная теплоемкость кристаллической решетки по Дебаю:

$$c_p = 3R \left[12 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx - 3 \frac{\theta_D/T}{e^{\theta_D/T} - 1} \right]; \quad (\text{VII.1.12})$$

- при низких температурах ($T \ll \theta_D$)

$$c_p \approx \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3; \quad (\text{VII.1.13})$$

- при высоких температурах ($T \gg \theta_D$)

$$c_p \approx 3R \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^2 + \frac{1}{560} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^4 + \dots \right]. \quad (\text{VII.1.14})$$

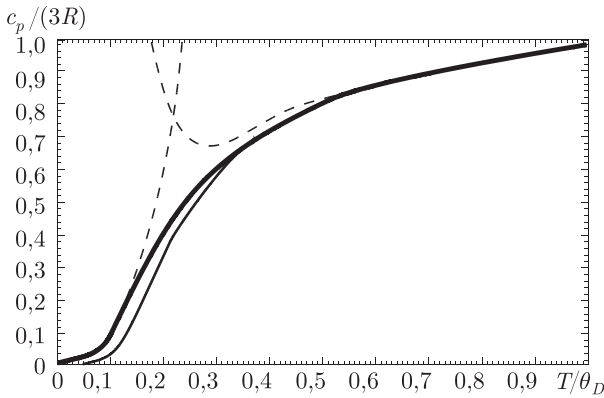


Рис. 94. Молярная теплоемкость кристалла (сплошная линия) в сравнении с приближенными формулами

В пределе бесконечно высоких температур c_p стремится к $3R$ (закон Дюлонга и Пти). Сравнение приближенных формул с точными показано на рис. 94. Из рисунка видно, что формулу (VII.1.13) можно применять с высокой степенью точности при $T \leq 0,1\theta_D$, а формулу (VII.1.14) — при $T \geq 0,5\theta_D$. Тонкой сплошной линией показана теплоемкость, рассчитанная в рамках теории Эйнштейна при $\theta_E = \sqrt{\frac{3}{5}}\theta_D$ (см. пример 156). При $T > 0,3\theta_D$ обе теории практически неразличимы.

- Результаты для тепловых свойств кристалла приведены в предположении, что его молекулы состоят из одного атома. Если в молекулу входит n_a атомов, то все результаты надо умножить на n_a .
- Энергия ε и квазиимпульс p фонона связаны с круговой частотой ω колебаний обычными соотношениями

$$\varepsilon = \hbar\omega; \quad p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \quad (\text{VII.1.15})$$

- Распределение Ферми по энергиям для свободных электронов в металле

$$dn(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{E}dE}{\exp[(E - \mu)/(k_B T)] - 1}, \quad (\text{VII.1.16})$$

где $dn(E)$ — концентрация электронов, энергия которых заключается в интервале значений от E до $E + dE$; m — масса электрона; μ — химический потенциал.

При нулевой температуре распределение Ферми принимает вид

$$dn(E)|_{T=0} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E}dE, & \text{если } E < E_F; \\ 0, & \text{если } E > E_F, \end{cases} \quad (\text{VII.1.17})$$

где E_F — энергия Ферми.

- Зависимость химического потенциала от температуры при низких температурах

$$\mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right]. \quad (\text{VII.1.18})$$

- Средняя энергия электрона в металле

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right]. \quad (\text{VII.1.19})$$

- Уровень Ферми в металле

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}, \quad (\text{VII.1.20})$$

где n — концентрация свободных электронов.

Температура Ферми $T_F = \frac{E_F}{k_B}$.

- При не слишком высоких температурах $T \ll T_F$ число $N_{\text{эфф}}$ эффективных электронов (т. е. электронов с энергиями, превышающими энергию Ферми) примерно равно

$$N_{\text{эфф}} \approx N \frac{k_B T}{E_F} = N \frac{T}{T_F}, \quad (\text{VII.1.21})$$

где N — полное число электронов.

VII.1.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 156. Найти связь характеристических температур Эйнштейна и Дебая.

Решение. Как известно, в теории теплоемкости Дебая характеристическая температура выражается через параметры материала, в то время как в теории Эйнштейна она должна быть выбрана феноменологически, путем сравнения теоретической формулы с данными эксперимента. В то же время обе теории должны давать более или менее сходные результаты, по крайней мере в области высоких температур, где значения теплоемкости неплохо описываются законом Дюлонга и Пти.

Поэтому приравняем первые два члена высокотемпературных разложений (VII.1.4) и (VII.1.14) в обеих теориях:

$$3R \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 + \dots \right] = 3R \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^2 + \dots \right], \quad (\text{VII.1.22})$$

откуда

$$\theta_E = \sqrt{\frac{3}{5}} \theta_D = 0,775 \theta_D. \quad (\text{VII.1.23})$$

Другой возможный путь установления связи между двумя теориями — приравнивание нулевых энергий: $(3/2)R\theta_E = (9/8)R\theta_D$, откуда следует близкий результат: $\theta_E = (3/4)\theta_D = 0,75\theta_D$. Результаты теорий Эйнштейна и Дебая при связи температур (VII.1.23) можно сравнить на рис. 94.

ПРИМЕР 157. Определить количество теплоты ΔQ , необходимое для нагревания кристалла NaCl массой $m = 20$ г на $\Delta T = 2$ К, если нагревание происходит от температуры: 1) $T_1 = \theta_D$; 2) $T_2 = 2$ К. Температуру Дебая θ_D для NaCl принять равной 320 К.

Решение. Количество теплоты ΔQ , подводимое для нагревания тела от температуры T_1 до $T_1 + \Delta T$, можно вычислить по формуле

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} \int_{T_1}^{T_1 + \Delta T} c_p dT, \quad (\text{VII.1.24})$$

где μ — молярная масса вещества; c_p — его молярная теплоемкость.

В общем случае c_p есть функция температуры, поэтому за знак интеграла ее выносить нельзя. Однако в первом случае изменение температуры мало по сравнению с ее начальным значением, так что теплоемкость можно считать постоянной: $c_p(T) \approx c_p(\theta_D)$. Для вычисления последней можно применить приближенную формулу (VII.1.14), откуда

$$c_p(\theta_D) \approx 3R \left(1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{560} \right) = 2,855R.$$

Подставляя это значение в (VII.1.24), получаем

$$\Delta Q = 2,855R \frac{m}{\mu} \Delta T = 2,855 \cdot 8,31 \frac{20}{23,0 + 35,5} \cdot 2 = 16,2 \text{ Дж.} \quad (\text{VII.1.25})$$

Во втором случае нахождение ΔQ облегчается тем, что можно воспользоваться предельным законом Дебая (VII.1.13), согласно которому теплоемкость пропорциональна кубу абсолютной температуры. В этом случае теплоемкость сильно изменяется в пределах заданного интервала температур и ее нельзя выносить за знак интеграла в формуле (VII.1.24). Тогда

$$\Delta Q = \frac{12m}{5\mu} \pi^4 R \int_{T_2}^{T_2 + \Delta T} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 dT = \frac{12m}{5\mu} \pi^4 R \frac{(T_2 + \Delta T)^4 - T_2^4}{4\theta_D^3}. \quad (\text{VII.1.26})$$

Подставляя числовые значения, имеем

$$\Delta Q = \frac{12 \cdot 20}{5(23 \cdot 35,5)} \pi^4 \cdot 8,31 \frac{4^4 - 2^4}{4 \cdot 320^3} = 1,22 \text{ мДж.}$$

ПРИМЕР 158. Вычислить дебаевскую частоту и дебаевскую температуру для железа, если скорости распространения продольных и поперечных колебаний равны 5,85 и 3,23 км/с соответственно.

Решение. Во-первых, найдем концентрацию атомов железа (см. табл. П.4 приложения). Плотность железа $\rho = 7,87 \cdot 10^6$ г/м³. Молярная масса железа приведена в таблице Менделеева: $\mu = 55,85$ г/моль. Отсюда находим сначала молярный объем $V_m = \mu/\rho = 7,1 \cdot 10^{-6}$ м³/моль, а затем концентрацию атомов в кристалле железа: $n = N_A/V_m = 8,48 \cdot 10^{28}$ м⁻³.

Во-вторых, определим среднюю скорость звука в железе, используя соотношение (VII.1.9): $3/v^2 = 2/3230^2 + 1/5850^2$, откуда $v = 3685$ м/с.

Дебаевскую частоту находим по формуле (VII.1.7):

$$\omega_{\max} = 3685 \sqrt[3]{6\pi^2 \cdot 8,48 \cdot 10^{28}} = 6,31 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$$

и вычисляем дебаевскую температуру

$$\theta_D = \hbar\omega_{\max}/k_B = 482 \text{ К.}$$

ПРИМЕР 159. Оценить давление фононов в меди при температуре $T = \theta_D$, если $\theta_D = 320$ К. Фононы рассматривать как идеальный газ.

Решение. Для определения давления фононов воспользуемся уравнением Менделеева—Клапейрона, записанным в форме

$$pV = N \frac{\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle}{3} = N \frac{\langle pv \rangle}{3}, \quad (\text{VII.1.27})$$

где \vec{p} и \vec{v} — импульс и скорость фононов (см. учебник, т. 1, уравнение (10.15)); N — их число в системе объемом V .

Мы заменили скалярное произведение на обычное, так как импульс фонона параллелен его скорости. В качестве v выбрали усредненную скорость звука, а импульс фонона связан с его энергией ε соотношением $p = \varepsilon/v$, так что получаем

$$p = \frac{N\langle\varepsilon\rangle}{3V} = \frac{W}{3V}, \quad (\text{VII.1.28})$$

где W — полная кинетическая энергия фононов.

Рассмотрим один моль меди. Ее молярный объем найдем с использованием таблиц в приложении, разделив молярную массу μ на плотность ρ :

$$V_m = \frac{\mu}{\rho} = \frac{63,55 \cdot 10^{-3}}{8,93 \cdot 10^3} = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}. \quad (\text{VII.1.29})$$

Полную кинетическую энергию W фононов можно найти: 1) вычитая из молярной энергии U кристалла энергию U_0 нулевых колебаний и 2) уменьшая результат в 2 раза (так как на кинетическую энергию фононов приходится ровно половина полной энергии): $W = (U - U_0)/2$. Тогда

$$p = \frac{U - U_0}{6V_m}. \quad (\text{VII.1.30})$$

При $T = \theta_D$ из (VII.1.11) находим:

$$\begin{aligned} U - U_0 &= 9R\theta_D \int_0^1 \frac{x^3}{\exp(x) + 1} dx \cong 9 \cdot 8,31 \cdot 320 \cdot 0,0778 = \\ &= 1,86 \cdot 10^3 \text{ Дж/моль} \end{aligned} \quad (\text{VII.1.31})$$

(интеграл в правой части вычислен численно).

Окончательно находим

$$p = \frac{1,86 \cdot 10^3}{6 \cdot 7,12 \cdot 10^{-6}} = 43,5 \text{ МПа.} \quad (\text{VII.1.32})$$

ПРИМЕР 160. Оценить энергию Ферми для кристалла серебра.

Решение. Энергию Ферми найдем по формуле (VII.1.20), но необходимо знать концентрацию свободных электронов. Поскольку серебро — одновалентный металл, каждый атом отдает в зону проводимости по одному электрону, так что концентрация последних равна концентрации атомов:

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A \rho}{\mu}, \quad (\text{VII.1.33})$$

где ρ — плотность вещества; μ — молярная масса.

Подставляя сюда данные для серебра, находим

$$n = \frac{(6,022 \cdot 10^{23})(10,5 \cdot 10^3)}{107,87 \cdot 10^{-3}} = 5,86 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Подставляя это значение в (VII.1.20), получаем:

$$E_F = \frac{(1,054 \cdot 10^{-34})^2}{2(9,11 \cdot 10^{-31})} [3\pi^2 \cdot (5,86 \cdot 10^{28})]^{2/3} = 8,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 5,5 \text{ эВ}.$$

ПРИМЕР 161. Кусок металла объемом $V = 20 \text{ см}^3$ находится при температуре $T = 0$. Определить число N свободных электронов, импульсы которых отличаются от максимального импульса p_F не более чем на $0,1p_F$. Энергия Ферми $E_F = 5 \text{ эВ}$.

Решение. Воспользуемся выражением (VII.1.17) для распределения электронов в металле по энергиям и перепишем его в виде распределения по импульсам, учитывая связь $E = p^2/(2m)$ и $dE = pdp/m$. Тогда для $p \leq p_F$

$$dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp, \quad (\text{VII.1.34})$$

откуда находим искомое число электронов

$$N = V \int_{0,9p_F}^{p_F} dn(p) = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_{0,9p_F}^{p_F} p^2 dp = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} p_F^3 \frac{1 - 0,9^3}{3}. \quad (\text{VII.1.35})$$

Учитывая, что максимальный импульс p_F и максимальная энергия E_F электронов в металле связаны соотношением $p_F = \sqrt{2mE_F}$, преобразуем (VII.1.35) к виду

$$N = \frac{0,217V}{3\pi^2} \left(\frac{\sqrt{2mc^2 E_F}}{\hbar c} \right)^3. \quad (\text{VII.1.36})$$

Используя значения $mc^2 = 0,511 \cdot 10^6 \text{ эВ}$ и $\hbar c = 197,3 \cdot 10^{-9} \text{ эВ} \cdot \text{м}$, находим

$$N = \frac{0,271(20 \cdot 10^{-6})}{3\pi^2} \left(\frac{\sqrt{2(0,511 \cdot 10^6) \cdot 5}}{197,3 \cdot 10^{-9}} \right)^3 = 2,75 \cdot 10^{23} \text{ электронов}.$$

ПРИМЕР 162. Полагая среднюю энергию электрона в металле $\langle E(T) \rangle$ равной (VII.1.19), найти величину отношения $(c_V)_{\text{Ф-Д}}/(c_V)_{\text{кл}}$ для электронного газа, где $(c_V)_{\text{Ф-Д}}$ — удельная теплоемкость газа, состоящего из частиц, подчиняющихся статистике Ферми—Дирака; $(c_V)_{\text{кл}}$ —

удельная теплоемкость газа, подчиняющегося классической статистике.

Решение. Если воспользоваться выражением для $\langle E(T) \rangle$ при конечной температуре

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right],$$

то полная энергия одного моля

$$U = N_A \langle E \rangle,$$

где N_A — число электронов в одном моле вещества.

Таким образом,

$$U = \frac{3}{5} N_A E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right];$$

$$(c_V)_{\Phi-Д} = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{\pi^2}{2} N_A k_B \frac{k_B T}{E_F} = \frac{\pi^2}{2} R \frac{k_B T}{E_F} \quad (N_A k_B = R).$$

Классический результат $(c_V)_{\text{кл}} = \frac{3}{2} R$, так что $(c_V)_{\Phi-Д} / (c_V)_{\text{кл}} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B T}{E_F}$.

При $T = 300 \text{ К}$ и $E_F = 7 \text{ эВ}$ $(c_V)_{\Phi-Д} / (c_V)_{\text{кл}} \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$.

ПРИМЕР 163. Оценить давление электронного газа в металлическом натрии при $T = 0$, если концентрация свободных электронов в нем $n = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Воспользоваться уравнением для идеального газа.

Решение. Под уравнением для идеального газа в этой задаче понимается связь давления со средней кинетической энергией поступательного движения частиц: $p = (2/3)n\langle E \rangle$ (см. учебник, т. 1, уравнение (10.17)). Средняя энергия, приходящаяся на один электрон, выражается через энергию Ферми следующим образом:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3},$$

где N — полное число электронов в объеме V .

Полная энергия

$$U = N \langle E \rangle = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}},$$

откуда давление

$$p = - \frac{dU}{dV} = \frac{2}{5} \frac{N}{V} E_F. \quad (\text{VII.1.37})$$

Энергию Ферми находим по формуле (VII.1.20):

$$E_F = \frac{(1,054 \cdot 10^{-34})^2}{2(9,11 \cdot 10^{-31})} [3\pi^2(2,5 \cdot 10^{28})]^{2/3} = 5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}. \quad (\text{VII.1.38})$$

Подставляя это значение в (VII.1.37), получаем

$$p = \frac{2}{5} (2,5 \cdot 10^{28})(5 \cdot 10^{-19}) = 5 \cdot 10^9 \text{ Па} \approx 50\,000 \text{ атм}. \quad (\text{VII.1.39})$$

Заметим, что поскольку $E_F \sim n^{2/3}$, давление электронного газа $p \sim n^{5/3}$. Давление обычных (классических) частиц пропорционально их числу, а здесь получена более сильная зависимость. В этом проявился принцип Паули: ферми-частицы «мешают» друг другу, они вынуждены занимать все более высокие энергетические состояния, что повышает их среднюю кинетическую энергию и, как следствие, давление.

VII.1.B. Задачи для самостоятельной работы

Теплоемкость кристалла

Задача VII.1.1. Вычислить удельные теплоемкости кристаллов алюминия и меди по классической теории теплоемкости.

Задача VII.1.2. Пользуясь классической теорией, вычислить удельные теплоемкости кристаллов NaCl и CaCl.

Задача VII.1.3. Вычислить по классической теории теплоемкость кристалла бромида алюминия AlBr объемом $V = 1 \text{ м}^3$. Плотность ρ кристалла бромида алюминия равна $3,01 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Задача VII.1.4. Определить изменение ΔU внутренней энергии кристалла никеля при нагревании его от $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до $t_2 = 200^\circ\text{C}$. Масса m кристалла равна 20 г.

Задача VII.1.5. Вывести формулу для средней энергии $\langle \varepsilon \rangle$ классического линейного гармонического осциллятора при тепловом равновесии. Вычислить значение $\langle \varepsilon \rangle$ при $T = 300 \text{ К}$.

Задача VII.1.6. Определить энергию U и теплоемкость C системы, состоящей из $N = 10^{25}$ классических трехмерных независимых гармонических осцилляторов. Температура $T = 300 \text{ К}$.

Задача VII.1.7. Определить: 1) среднюю энергию линейного одномерного квантового осциллятора при температуре $T = \theta_E = 200 \text{ К}$; 2) энергию U системы, состоящей из $N = 10^{25}$ квантовых трехмерных независимых осцилляторов, при температуре $T = \theta_E = 300 \text{ К}$.

Задача VII.1.8. Найти частоту колебаний атомов серебра по теории теплоемкости Эйнштейна, если характеристическая температура серебра равна $\theta_E = 165 \text{ К}$.

Задача VII.1.9. Во сколько раз изменится средняя энергия квантового осциллятора, приходящаяся на одну степень свободы, при повышении температуры от $T_1 = \theta_E/2$ до $T_2 = \theta_E$?

Задача VII.1.10. Определить отношение $\langle \varepsilon \rangle / \langle \varepsilon_T \rangle$ средней энергии линейного квантового осциллятора к средней энергии теплового движения молекул идеального газа при температуре $T = \theta_E$.

Задача VII.1.11. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить изменение ΔU молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2 \text{ К}$ от температуры $T = \theta_E/2$ ($\theta_E \gg \Delta T$).

Задача VII.1.12. Пользуясь теорией теплоемкости Эйнштейна, определить изменение ΔU молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0,1\theta_E$. Характеристическую температуру Эйнштейна принять для данного кристалла равной $\theta_E = 300$ К.

Задача VII.1.13. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если при вычислении теплоемкости при $T = \theta_E$ вместо значения, что дает теория Эйнштейна, воспользоваться значением, что дает закон Дюлонга и Пти.

Задача VII.1.14. Вычислить по теории Эйнштейна молярную нулевую энергию кристалла цинка. Характеристическая температура θ_E для цинка равна 230 К.

Задача VII.1.15. Вычислить по теории Дебая молярную нулевую энергию кристалла меди. Характеристическая температура θ_D меди равна 320 К.

Задача VII.1.16. Определить максимальную частоту ω_{\max} собственных колебаний в кристалле золота по теории Дебая. Характеристическая температура $\theta_D = 180$ К.

Задача VII.1.17. Вычислить максимальную частоту ω_{\max} Дебая для серебра, если известно, что его молярная теплоемкость при $T = 20$ К равна $1,7$ Дж/(моль \cdot К).

Задача VII.1.18. Найти отношение изменения ΔU внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0,1\theta_D$ к нулевой энергии U_0 .

Задача VII.1.19. Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, определить изменение ΔU молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0,1\theta_D$. Характеристическую температуру Дебая θ_D принять для данного кристалла равной 300 К.

Задача VII.1.20. Используя квантовую теорию теплоемкости Дебая, вычислить изменение ΔU молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2$ К от температуры $T = \theta_D/2$. Считать $\theta_D \gg \Delta T$.

Задача VII.1.21. При нагревании серебра массой $m = 10$ г от $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К было подведено $\Delta Q = 0,71$ Дж теплоты. Определить дебаевскую температуру θ_D серебра. Считать $T_2 \ll \theta_D$.

Задача VII.1.22. Определить относительную погрешность, которая будет допущена при вычислении теплоемкости кристалла при $T = \theta_D$, если вместо значения, что дает теория Дебая, воспользоваться значением, что дает закон Дюлонга и Пти.

Задача VII.1.23. Найти среднюю скорость звуковых колебаний в алюминии, дебаевская температура которого $\theta_D = 396$ К. Какова скорость поперечных звуковых волн, если скорость продольных $v_{\parallel} = 6,3$ км/с?

Задача VII.1.24. На рис. 94 показан график зависимости теплоемкости кристалла от температуры (по Дебаю). Найти с помощью этого графика: 1) дебаевскую температуру для серебра, если при $T = 65$ К его молярная теплоемкость равна 15 Дж/(моль \cdot К); 2) молярную теплоемкость алюминия при $T = 80$ К, если при $T = 250$ К она

равна $22,4 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$; 3) максимальную частоту колебаний для меди, у которой при $T = 125 \text{ К}$ теплоемкость отличается от классического значения $3R$ на 25%.

Фононы¹

Задача VII.1.25. Найти энергию фонона, соответствующую максимальной частоте Дебая ω_{\max} , если дебаевская температура $\theta_D = 250 \text{ К}$. Ответ выразить в электронвольтах.

Задача VII.1.26. Определить импульс фонона, соответствующего частоте $\omega = 0,1\omega_{\max}$. Средняя скорость звука в кристалле равна $v = 1,38 \text{ км/с}$, дебаевская температура $\theta_D = 100 \text{ К}$.

Задача VII.1.27. Длина волны λ фонона, соответствующая частоте $\omega = 0,01\omega_{\max}$, равна 52 нм . Усредненная скорость звука в кристалле равна $v = 4,8 \text{ км/с}$. Найти дебаевскую температуру.

Задача VII.1.28. Температура Дебая для вольфрама равна $\theta_D = 310 \text{ К}$. Определить усредненную скорость звука и длину волны фононов, соответствующие частоте $\omega = 0,1\omega_{\max}$.

Задача VII.1.29. Оценить максимальные значения энергии, средней скорости и импульса фонона в меди, дебаевская температура которой $\theta_D = 330 \text{ К}$.

Задача VII.1.30. Дебаевская температура кристалла $\theta_D = 300 \text{ К}$, межатомное расстояние $d = 0,25 \text{ нм}$. Чему равна усредненная скорость звука?

Электроны в металле.

Распределение Ферми—Дирака

Задача VII.1.31. Определить максимальную скорость электронов в металле при $T = 0 \text{ К}$, если уровень Ферми $E_F = 5 \text{ эВ}$.

Задача VII.1.32. Определить концентрацию n свободных электронов в металле при температуре $T = 0 \text{ К}$. Энергию Ферми принять равной 1 эВ .

Задача VII.1.33. Цинк — двухвалентный металл. Плотность цинка $\rho = 7,133 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Вычислить: 1) концентрацию электронов проводимости; 2) энергию Ферми; 3) максимальную скорость электронов; минимальную длину волны де Бройля.

Задача VII.1.34. Плотность золота $\rho = 19,3 \text{ г/см}^3$. Каждый атом отдает в зону проводимости один электрон. Найти энергию Ферми для золота.

Задача VII.1.35. В нейтронной звезде нейтроны подчиняются тому же распределению Ферми, что и свободные электроны в металле. Масса нейтрона $m_n = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. Вычислить энергию Ферми для нейтронной звезды радиусом $R = 10 \text{ км}$, масса которой равна двум массам Солнца.

¹ В задачах этого раздела пренебречь дисперсией звуковых волн в кристалле.

Задача VII.1.36. Белые карлики — это последняя стадия эволюции звезды. Состоят они в основном из атомов железа и достаточно горячие и плотные, так что все атомные электроны становятся свободными. Оценить энергию Ферми электронного газа в белом карлике массой, равной массе Солнца, и радиусом, равным радиусу Земли.

Задача VII.1.37. Определить отношение концентраций n_1/n_2 свободных электронов при $T = 0$ К в литии и цезии, если известно, что уровни Ферми в этих металлах соответственно равны $E_{F,1} = 4,72$ эВ; $E_{F,2} = 1,53$ эВ.

Задача VII.1.38. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при температуре $T = 0$ К. Уровень Ферми для натрия равен $3,12$ эВ. Плотность ρ натрия равна 970 кг/м³.

Задача VII.1.39. Найти число свободных электронов, приходящихся на один атом алюминия при $T = 0$ К. Уровень Ферми $E_F = 11,7$ эВ.

Задача VII.1.40. Найти число свободных электронов, приходящихся на один атом меди при $T = 0$ К. Уровень Ферми $E_F = 7$ эВ.

Задача VII.1.41. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ электронов в металле при $T = 0$ К, если уровень Ферми $E_F = 6$ эВ.

Задача VII.1.42. До какой температуры T_1 следовало бы нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов оказалась равной средней энергии свободных электронов в меди при $T = 0$ К? Считать, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

Задача VII.1.43. Металл находится при температуре $T = 0$ К. Какой процент электронов имеет энергию, превышающую половину максимальной?

Задача VII.1.44. Металл с энергией Ферми $E_F = 7$ эВ находится при температуре $T = 0$ К. Найти энергию $E_{1/2}$ такую, что энергия ровно половины электронов превышает $E_{1/2}$.

Задача VII.1.45. Металл находится при температуре $T = 0$ К. Найти относительное число $\Delta N/N$ свободных электронов, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 2%.

Задача VII.1.46. Оценить температуру вырождения T_F для калия, если его плотность $\rho = 860$ кг/м³.

Задача VII.1.47. Найти долю электронов вне сферы Ферми для меди при температуре: 1) $T = 0$ К; 2) $T = 300$ К; 3) $T = 1000$ К.

Задача VII.1.48. При какой температуре доля электронов вне сферы Ферми для лития составляет 0,013? Энергия Ферми $E_F = 4,7$ эВ.

Задача VII.1.49. Серебро плавится при температуре $t_{пл} = 961$ °С. Какая доля электронов имеет при такой температуре энергию, превышающую энергию Ферми $E_F = 5,5$ эВ?

Задача VII.1.50. По функции распределения $dn(E)$ электронов в металле по энергиям установить распределение $dn(\lambda)$ по длинам волн де Бройля. Используя полученный результат, найти процент электронов, длина волны которых меньше удвоенной минимальной.

Задача VII.1.51. Зная распределение $dn(E)$ электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(v)$ электронов по скоростям. Используя полученный результат, определить, во сколько раз при температуре $T = 0$ К число электронов со скоростями от $v_{\max}/2$ до v_{\max} больше числа электронов со скоростями от 0 до $v_{\max}/2$.

Задача VII.1.52. Зная распределение $dn(E)$ электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(v)$ электронов по скоростям. Используя полученный результат, выразить среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в металле при $T = 0$ К через максимальную скорость v_{\max} . Вычислить $\langle v \rangle$ для металла, уровень Ферми E_F которого равен 6 эВ.

Задача VII.1.53. Зная распределение $dn(E)$ электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(v)$ электронов по скоростям. Используя полученный результат, выразить среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ электронов в металле при $T = 0$ К через максимальную скорость электронов. Вычислить среднюю квадратичную скорость электронов для металла с $E_F = 6$ эВ.

Задача VII.1.54. Зная распределение $dn(E)$ электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(v)$ электронов по скоростям. Используя полученный результат, выразить среднее от обратной скорости $\langle \frac{1}{v} \rangle$ через максимальную скорость электронов в металле при $T = 0$. Вычислить $v_{\text{об}} = 1 / \langle \frac{1}{v} \rangle$ для металла с $E_F = 6$ эВ.

Задача VII.1.55. 1) Вывести самостоятельно выражение для энергии Ферми для модели свободных электронов металла при абсолютном нуле температуры. 2) Используя данные таблицы, вычислить энергию Ферми для щелочных металлов и сравнить с приведенными в таблице экспериментальными значениями. (Экспериментальные значения получены из опытов с мягким рентгеновским излучением.)

Металл	Li	Na	K	Rb	Cs
Плотность	0,534	0,971	0,86	1,53	1,87
Атомная масса	6,939	22,99	39,102	85,47	132,905
$E_F(0)$ вычисл., эВ	5,22	3,15	2,05	1,78	1,59
$E_F(0)$ эксп., эВ	4,72	3,12	2,14	1,82	1,59

VII.2. Физика атомного ядра

VII.2.A. Основные формулы

- Ядро обозначается символом

$${}^A_Z X,$$

где X — символ химического элемента; Z — атомный номер (число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов в ядре). Число N нейтронов в ядре $N = A - Z$.

- Масса покоя M устойчивой системы n взаимодействующих частиц меньше суммы масс покоя m_i свободных частиц. Разность

$$\Delta m = \sum_{i=1}^n m_i - M$$

называется *дефектом массы системы частиц*.

- Энергия связи ядра A_ZX

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m = c^2 [Zm_p + (A - Z)m_n - M_X],$$

где m_p , m_n и M_X — массы протона, нейтрона и ядра соответственно. Коэффициент пропорциональности c^2 (квадрат скорости света) можно выразить в разных единицах и пользоваться наиболее удобной формой в соответствии с единицами массы и энергии:

$$c^2 = 8,988 \cdot 10^{16} \text{ Дж/кг} = 931,49 \text{ МэВ/а. е. м.}$$

- Для расчетов энергии связи (дефекта массы) удобнее пользоваться выражением, в которое входят не массы ядер, а массы нейтральных атомов:

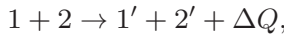
$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m = c^2 [Zm_{1\text{H}} + (A - Z)m_n - M_{a,X}],$$

где $m_{1\text{H}}$ и $M_{a,X}$ — массы атома водорода и нейтрального атома с ядром A_ZX соответственно.

- Удельная энергия связи (энергия связи на нуклон)

$$E_{\text{уд}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}.$$

- Энергетическая схема ядерной реакции, когда сталкиваются две частицы 1 и 2 и в результате рождаются две новые частицы 1' и 2':



где ΔQ — энерговыделение реакции:

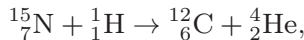
$$\Delta Q = c^2 [(m_1 + m_2) - (m_{1'} + m_{2'})],$$

где m_i и $m_{i'}$ ($i = 1, 2$) — массы покоя частиц до и после реакции соответственно.

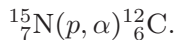
Это выражение очевидным образом обобщается на любое число участвующих в реакции частиц (которое в результате взаимодействия в принципе может измениться).

Если $\Delta Q > 0$, то реакция идет с выделением энергии; если $\Delta Q < 0$, то реакция происходит с поглощением энергии.

- Символическая запись ядерной реакции может быть дана в развернутом виде, например:



или в сокращенном виде



При записи в развернутом виде равны слева и справа суммы индексов — верхних (сохранение числа нуклонов) и нижних (сохранение электрического заряда).

При записи в сокращенном виде сначала записывают символ ядра мишени, в скобках на первом месте — обозначение бомбардирующей частицы, на втором месте, после запятой, — обозначение более легкой частицы, рождающейся в реакции, а за скобками — химический символ продукта ядерной реакции. Обычно используют следующие символические обозначения: p — протон; n — нейтрон; d — дейтрон (ядро изотопа водорода ${}^2_1\text{H}$); t — тритон (ядро изотопа водорода ${}^3_1\text{H}$); α — альфа-частица (ядро изотопа гелия ${}^4_2\text{He}$); e^- — электрон, e^+ — позитрон (античастица электрона с той же массой и противоположным электрическим зарядом); ν_e и $\bar{\nu}_e$ — нейтрино и антинейтрино; γ — гамма-квант.

- Основной закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где $N = N(t)$ — число нераспавшихся атомов в момент времени t ; $N_0 = N(0)$ — число нераспавшихся атомов в момент, принятый за начальный ($t = 0$); e — основание натуральных логарифмов; λ — постоянная радиоактивного распада.

- Период полураспада $T_{1/2}$ — промежуток времени, за который число нераспавшихся атомов уменьшается в 2 раза. Период полураспада связан с постоянной распада λ соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,69315}{\lambda}.$$

- Величина $\tau = 1/\lambda$, обратная постоянной распада, называется средним временем жизни радиоактивного атома (промежуток времени, за который число нераспавшихся ядер уменьшается в e раз). Связь τ с периодом полураспада

$$T_{1/2} = 0,69315\tau; \quad \tau = 1,4427T_{1/2}.$$

- Число $-\Delta N$ ядер, распавшихся в интервале времени $(t, t + \Delta t)$:

$$-\Delta N = N(t) - N(t + \Delta t) = N(t)(1 - e^{-\lambda \Delta t}).$$

При бесконечно малом интервале времени dt число $-dN$ распавшихся атомов равно

$$-dN = N\lambda dt.$$

- Активность A радиоактивного образца есть величина, равная отношению числа $-dN$ ядер, распавшихся в изотопе, к промежутку времени dt , за который произошел распад. Активность определяется соотношением

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Как видно, активность образца со временем уменьшается по экспоненциальному закону: $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$.

Единицей активности в СИ является один беккерель (Бк), равный одному распаду в секунду. Традиционная внесистемная единица активности — кюри (Ки): $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$.

- Массовая (удельная) активность a радиоактивного источника есть активность единицы массы: $a = A/m$.
- Если некоторое количество радиоактивного препарата (1) помещено в закрытый сосуд и при распаде вещества (1) образуется вещество (2), также радиоактивное, то количество второго вещества (2) в этом сосуде по истечении времени t определяется соотношением

$$N_2 = N_{0,1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}),$$

где $N_{0,1}$ — число атомов первого препарата (1) при $t = 0$; λ_1 и λ_2 — постоянные распада препаратов (1) и (2) соответственно.

Если период полураспада препарата (1) значительно больше периода полураспада препарата (2), т. е. $\lambda_1 \ll \lambda_2$, то последняя формула принимает вид

$$N_2 \approx N_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}),$$

где N_1 и N_2 — число радиоактивных атомов веществ (1) и (2) в момент времени t .

При радиоактивном равновесии (для времен $\frac{1}{\lambda_1} \gg t \gg \frac{1}{\lambda_2}$) имеет место соотношение

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

- Обобщение предыдущего соотношения: если имеется смесь ряда радиоактивных изотопов, образующихся один из другого, и если постоянная распада λ_1 первого члена ряда много меньше постоянных $\lambda_i, i = 2, 3, \dots, k$, всех остальных членов ряда, то в смеси устанавливается состояние радиоактивного равновесия, при котором активности всех членов ряда равны между собой:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \dots = \lambda_k N_k, \quad \lambda_1 \ll \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k.$$

- Энергия, поглощенная единицей массы облучаемого объекта, называется *поглощенной дозой* излучения. Ее размерность $[D] = [E/m] = L^2 T^{-2} = \text{Дж/кг}$. В СИ эта единица получила название грей (Гй). Часто используется также внесистемная единица — рад: $1 \text{ рад} = 0,01 \text{ Дж/кг}$, т. е. $1 \text{ Гй} = 100 \text{ рад}$.
- Для описания опасности облучения для живого организма вводят понятие *эквивалентной дозы*. Чтобы получить значение эквивалентной дозы, надо величину поглощенной дозы умножить на коэффициент качества излучения Q (см. табл. П.23 приложения). Единицей эквивалентной дозы в СИ служит зиверт (Зв): $1 \text{ Зв} = 1 \text{ Гй} \cdot Q$. Используют также внесистемную единицу — бэр (биологический эквивалент рентгена): $1 \text{ бэр} = 1 \text{ рад} \cdot Q$, т. е. $1 \text{ Зв} = 100 \text{ бэр}$.
- Для характеристики радиационной обстановки на местности и в помещениях используют понятие *экспозиционной дозы*, которая характеризует ионизацию вещества, производимую рентгеновским или гамма-излучением. В СИ соответствующей единицей является Кл/кг — доза, производящая в 1 кг сухого воздуха число ионов, суммарный заряд которых составляет 1 Кл каждого знака. На

практике часто используют внесистемную единицу — рентген (Р):
 $1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$.

Так как на образование в воздухе пары ионов, т. е. заряда e (считаются ионы одного знака) тратится 34 эВ, энергия, затрачиваемая на образование единицы заряда, равна $w = 34 \text{ Дж/Кл}$. Теперь экспозиционную дозу можно связать с поглощенной (воздухом же) дозой: $D_{\text{возд}} = 1 \text{ Р} \cdot w = 2,58 \cdot 10^{-4} \cdot 34 = 8,77 \text{ мГй} = 0,877 \text{ рад}$. Однако это не означает, что такую же дозу получает находящийся там объект.

VII.2.Б. Примеры решения задач

ПРИМЕР 164. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи $E_{\text{св}}$ ядра ${}_{5}^{11}\text{В}$.

Решение. Дефект массы ядра определим по формуле

$$\Delta m = Zm_{1\text{H}} + (A - Z)m_n - M_a. \quad (\text{VII.2.40})$$

Для нашего ядра $Z = 5$; $A = 11$, а массы нейтральных атомов берем из табл. П. 20 приложения:

$$\Delta m = 5 \cdot 1,00783 + (11 - 5) \cdot 1,00867 - 11,00931 = 0,08186 \text{ а. е. м.}$$

Энергию связи ядра можно найти из соотношения Эйнштейна:

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2 = 0,08186 \cdot 931,49 = 76,25 \text{ МэВ.}$$

ПРИМЕР 165. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода (энергия ионизации) равна $E_{\text{св}} = 13,6 \text{ эВ}$. Определить, на сколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

Решение. Искомая величина представляет собой дефект массы устойчивой системы, состоящей из протона и электрона, т. е. дефект массы атома водорода, и формула для энергии связи ядер в данном случае запишется в виде

$$E_{\text{св}} = c^2(m_p + m_e - m_{1\text{H}}). \quad (\text{VII.2.41})$$

Отсюда находим дефект массы:

$$\Delta m = m_p + m_e - m_{1\text{H}} = \frac{E_{\text{св}}}{c^2} = \frac{13,6}{931,49 \cdot 10^6} = 1,46 \cdot 10^{-8} \text{ а. е. м.} \quad (\text{VII.2.42})$$

Экспериментальное наблюдение дефекта массы атома водорода в настоящее время невозможно, так как по своей величине он значительно меньше погрешностей современных методов измерения масс частиц.

У наиболее тяжелых атомов энергия связи электронной оболочки с ядром достигает десятых долей МэВ, но и в этом случае энергией связи электронной оболочки с ядром можно пренебречь по сравнению с энергией связи нуклона в ядре. Малость дефекта массы на атомном уровне позволила в свое время сформулировать закон сохранения массы в химических реакциях, который, как теперь оказывается, верен лишь приближенно. На самом деле фундаментальное значение имеет закон сохранения энергии.

ПРИМЕР 166. Определить энергию E , которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра ${}_{11}^{23}\text{Na}$.

Решение. После отрыва нейтрона число нуклонов A в ядре уменьшится на единицу, а число протонов Z останется неизменным. В результате получится ядро ${}_{11}^{22}\text{Na}$. Ядро ${}^{23}\text{Na}$ можно рассматривать как устойчивую систему, образовавшуюся в результате захвата свободного нейтрона ядром ${}^{22}\text{Na}$. Энергия отрыва нейтрона от ядра ${}^{23}\text{Na}$ равна энергии связи нейтрона с ядром ${}^{22}\text{Na}$.

Выразив энергию связи нейтрона через дефект массы системы, получим

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{св}} = c^2(m_{{}^{22}\text{Na}} + m_n - m_{{}^{23}\text{Na}}) = \\ &= 931,49(21,99444 + 1,00867 - 22,98977) = 12,43 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 167. Медная монетка, состоящая из атомов ${}^{63}\text{Cu}$, имеет массу $m = 3$ г. Какую энергию надо затратить, чтобы отделить все протоны и нейтроны в этой монетке друг от друга? Масса нейтрального атома меди равна $m_{\text{Cu}} = 62,92960$ а. е. м.

Решение. Ядро меди содержит $Z = 29$ протонов и $N = A - Z = 34$ нейтрона. Энергия связи вычисляется стандартным образом:

$$\begin{aligned} E_{\text{св}} &= c^2(29m_{{}^1\text{H}} + 34m_n - m_{\text{Cu}}) = \\ &= 931,49(29 \cdot 1,00783 + 34 \cdot 1,00867 - 62,92960) = \quad (\text{VII.2.43}) \\ &= 551,7 \text{ МэВ} = 8,83 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

В монетке массой m содержится

$$N = N_A \frac{m}{\mu} = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{3 \cdot 10^{-3}}{63 \cdot 10^{-3}} = 2,87 \cdot 10^{22} \text{ ядер}.$$

Умножая энергию связи на число ядер, находим искомую энергию $E = NE_{\text{св}} = 2,5 \cdot 10^{12}$ Дж = 2,5 ТДж. Для сравнения выразим эту энергию в единицах условного топлива (у. т.): при сгорании 1 кг у. т. выделяется энергия 29,308 МДж. Поэтому найденная нами энергия эквивалентна примерно 85,3 т у. т.

ПРИМЕР 168. Найти энергию реакции ${}^9\text{Be}(p, \alpha){}^6\text{Li}$. Чему равны кинетические энергии продуктов реакции, если ядро мишени (${}^9\text{Be}$) покоилось, кинетическая энергия протона была равна $T_p = 5,45$ МэВ, а ядро гелия вылетело под углом 90° к направлению движения протона?

Решение. Необходимые числовые данные берем из табл. П. 20 приложения. Энергия реакции

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c^2(m_{{}^9\text{Be}} + m_{{}^1\text{H}} - m_{{}^4\text{He}} - m_{{}^6\text{Li}}) = \\ &= 931,49(9,01219 + 1,00783 - 4,00260 - 6,01513) = 2,13 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

По закону сохранения энергии сумма кинетических энергий ядра лития и α -частицы равна начальной кинетической энергии протона плюс энергия, выделившаяся в реакции:

$$T_{\text{Li}} + T_{\alpha} = T_p + \Delta Q. \quad (\text{VII.2.44})$$

Применим теперь закон сохранения импульса: $\vec{p}_p = \vec{p}_{\text{Li}} + \vec{p}_\alpha$, или $\vec{p}_{\text{Li}} = \vec{p}_p - \vec{p}_\alpha$. Возводя это равенство в квадрат и учитывая, что $\vec{p}_p \cdot \vec{p}_\alpha = 0$, получаем

$$p_{\text{Li}}^2 = p_p^2 + p_\alpha^2. \quad (\text{VII.2.45})$$

Поскольку при заданных условиях энергии частиц много меньше их энергий покоя, мы можем применять нерелятивистские соотношения между кинетической энергией и импульсом, так что равенство (VII.2.45) записывается в виде

$$T_{\text{Li}} m_{6\text{Li}} = T_p m_{1\text{H}} + T_\alpha m_{4\text{He}}. \quad (\text{VII.2.46})$$

Решая систему уравнений (VII.2.44), (VII.2.45), получаем

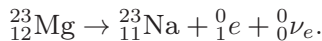
$$\begin{aligned} T_\alpha &= \frac{m_{6\text{Li}}(\Delta Q + T_p) - T_p m_{1\text{H}}}{m_{4\text{He}} + m_{6\text{Li}}}; \\ T_{\text{Li}} &= \frac{m_{4\text{He}}(\Delta Q + T_p) + T_p m_{1\text{H}}}{m_{4\text{He}} + m_{6\text{Li}}}. \end{aligned} \quad (\text{VII.2.47})$$

Подставляя числовые данные, находим

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \frac{6,01513(2,13 + 5,45) - 5,45 \cdot 1,00783}{4,00260 + 6,01513} = 4 \text{ МэВ}; \\ T_{\text{Li}} &= \frac{4,00260(2,13 + 5,45) + 5,45 \cdot 1,00783}{4,00260 + 6,01513} = 3,58 \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (\text{VII.2.48})$$

ПРИМЕР 169. Радиоактивное ядро магния ${}_{12}^{23}\text{Mg}$ выбросило позитрон и нейтрино (масса покоя равна нулю). Определить энергию β -распада ядра.

Решение. Так как вылетевший позитрон унес положительный единичный заряд, конечным продуктом реакции будет ядро с $Z = 11$, т. е. изотоп натрия. А поскольку нуклоны из ядра магния не вылетали, массовое число этого изотопа будет по-прежнему равно 23. Таким образом, реакцию β -распада ядра магния можно записать в виде



В уравнении энергетического баланса выразим массы ядер через массы нейтральных атомов:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c^2[(m_{23\text{Mg}} - 12m_e) - (m_{23\text{Na}} - 11m_e) - m_e] = \\ &= c^2(m_{23\text{Mg}} - m_{23\text{Na}} - 2m_e) = \\ &= 931,49(22,99414 - 22,98977 - 2 \cdot 0,00055) = 3,05 \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (\text{VII.2.49})$$

Энергия ΔQ делится между продуктами реакции (в основном между позитроном и нейтрино). Поскольку масса нейтрино равна нулю, она не присутствует в уравнении энергетического баланса (VII.2.49).

ПРИМЕР 170. Согласно углеродному циклу Бете источником энергии солнечного излучения является энергия, выделяющаяся при образовании гелия из водорода в результате цепочки реакций, когда исчезают

четыре протона, а появляется ядро гелия ${}^4\text{He}$ и вылетают два позитрона (и два нейтрино с нулевой массой покоя). Подсчитать, какое количество водорода ежесекундно должно превращаться в гелий. Солнечная постоянная $C = 1,4 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Принимая, что водород составляет 35% массы Солнца, подсчитать, на сколько лет хватит запаса водорода, если интенсивность излучения Солнца считать неизменной.

Решение. При превращении четырех протонов в ядро ${}^4\text{He}$ выделяется энергия

$$\Delta Q = c^2(4m_p - m_\alpha - 2m_e). \quad (\text{VII.2.50})$$

Выразим массы ядер через массы нейтральных атомов: $m_p = m_{\text{H}} - m_e$; $m_\alpha = m_{\text{He}} - 2m_e$, откуда

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c^2[4(m_{\text{H}} - m_e) - (m_{\text{He}} - 2m_e) - 2m_e] = c^2[4m_{\text{H}} - m_{\text{He}} - 4m_e] = \\ &= 931,49(4 \cdot 1,00783 - 4,00260 - 4 \cdot 0,00055) = \\ &= 24,7 \text{ МэВ} = 3,96 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}. \end{aligned} \quad (\text{VII.2.51})$$

Разделив ΔQ на массу четырех протонов, найдем «теплотворную» способность термоядерного топлива:

$$q = \frac{\Delta Q}{4m_p} = \frac{3,96 \cdot 10^{-12}}{4(1,67 \cdot 10^{-27})} = 5,9 \cdot 10^{14} \text{ Дж/кг}. \quad (\text{VII.2.52})$$

В то же время, зная солнечную постоянную C и расстояние $R = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ м}$ от Земли до Солнца, определяем светимость L Солнца:

$$L = 4\pi R^2 C = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}. \quad (\text{VII.2.53})$$

Теперь вычисляем массовый расход водорода в недрах Солнца:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{L}{q} = 6,6 \cdot 10^{11} \text{ кг/с}. \quad (\text{VII.2.54})$$

Так как масса Солнца равна $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, то полная масса водорода $M_{\text{H}} = 0,35M_\odot$ и его хватит на время

$$t = \frac{M_{\text{H}}}{\frac{dm}{dt}} = \frac{0,35(2 \cdot 10^{30})}{6,6 \cdot 10^{11}} = 1,06 \cdot 10^{18} \text{ с} = 3,4 \cdot 10^{10} \text{ лет}. \quad (\text{VII.2.55})$$

Это примерно в 2 раза больше времени, в течение которого существует наша Вселенная.

ПРИМЕР 171. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния ${}^{27}\text{Mg}$ массой $m = 0,2 \text{ мкг}$, а также активность $A(t)$ по истечении времени $t = 1 \text{ ч}$. Предполагается, что все атомы изотопа радиоактивны.

Решение. Начальная активность изотопа

$$A_0 = \lambda N_0 = N_0 \frac{\ln 2}{T_{1/2}},$$

где λ — постоянная радиоактивного распада; N_0 — количество атомов изотопа в начальный момент ($t = 0$); $T_{1/2}$ — период полураспада.

Если учесть, что $N_0 = (m/\mu)N_A$, то выражение для A можно записать в виде

$$A_0 = \frac{mN_A}{\mu T_{1/2}} \ln 2.$$

Подставляем числовые данные (значение периода полураспада $T_{1/2} = 9,46$ мин = 567,6 с — см. табл. П. 22 приложения):

$$A_0 = \frac{(0,2 \cdot 10^{-9})(6,02 \cdot 10^{23})}{(27 \cdot 10^{-3}) \cdot 567,6} \cdot 0,693 = 5,44 \cdot 10^{12} \text{ Бк.}$$

Активность изотопа уменьшается со временем по закону

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\ln 2(t/T_{1/2})} = A_0 (e^{\ln 2})^{-t/T_{1/2}} = A_0 2^{-t/T_{1/2}}.$$

Подставив в данную формулу числовые значения, получим

$$A(1 \text{ ч}) = (5,44 \cdot 10^{12}) \cdot 2^{-3600/567,6} = 6,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк.}$$

ПРИМЕР 172. При определении периода полураспада $T_{1/2}$ короткоживущего радиоактивного изотопа использован счетчик импульсов. За время $\Delta t = 1$ мин в начале наблюдения ($t = 0$) было насчитано $\Delta n_1 = 250$ импульсов, а по истечении времени $t = 1$ ч счетчик насчитал $\Delta n_2 = 92$ импульса за тот же интервал Δt . Определить постоянную радиоактивного распада λ и период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

Решение. Число импульсов Δn , регистрируемых счетчиком за интервал времени Δt , пропорционально числу распавшихся атомов ΔN . Таким образом, при первом измерении

$$\Delta n_1 = k \Delta N_1 = k N_1 (1 - e^{-\lambda \Delta t}), \quad (\text{VII.2.56})$$

где N_1 — количество радиоактивных атомов к моменту начала отсчета; k — коэффициент пропорциональности (постоянный для данного прибора и данного расположения прибора относительно радиоактивного изотопа).

При повторном измерении (предполагается, что расположение приборов осталось прежним)

$$\Delta n_2 = k \Delta N_2 = k N_2 (1 - e^{-\lambda \Delta t}), \quad (\text{VII.2.57})$$

где N_2 — количество радиоактивных атомов к моменту начала второго измерения.

Разделив соотношение (VII.2.56) на выражение (VII.2.57) и приняв во внимание, что интервал измерения Δt одинаков в обоих случаях и что N_1 и N_2 связаны между собой соотношением $N_2 = N_1 e^{-\lambda t}$, получим

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = e^{\lambda t}, \quad (\text{VII.2.58})$$

где t — время от первого до второго измерения.

Для вычисления λ выражение (VII.2.58) следует прологарифмировать, откуда

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{1}{3600} \cdot \ln \frac{250}{92} = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \quad (\text{VII.2.59})$$

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} = 2496 \text{ с} = 41,6 \text{ мин.}$$

ПРИМЕР 173. Природный уран представляет собой смесь трех изотопов: ^{234}U , ^{235}U и ^{238}U . Содержание урана ^{234}U ничтожно (0,006%), на долю ^{235}U приходится 0,71%, а остальную массу (99,28%) составляет уран ^{238}U . Периоды полураспада этих изотопов соответственно равны $2,5 \cdot 10^5$, $7,04 \cdot 10^8$ и $4,5 \cdot 10^9$ лет. Вычислить активность каждого из изотопов и процентную долю радиоактивности, вносимую каждым изотопом в общую радиоактивность образца природного урана массой $m = 1$ кг.

Решение. Массы изотопов в образце природного урана равны $m_{234} = 6 \cdot 10^{-5}m$, $m_{235} = 7,1 \cdot 10^{-3}m$ и $m_{238} = 99,28 \cdot 10^{-2}m$ соответственно. Активность каждого изотопа

$$A_i = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{N_A m_i}{\mu_i},$$

где $T_{1/2}$ — период полураспада данного изотопа; N_A — число Авогадро; μ_i — молекулярная масса изотопа.

Отсюда искомая активность для каждого из изотопов

$$A_{234} = \frac{0,693}{2,5 \cdot 10^5} \cdot \frac{(6,02 \cdot 10^{23})(6 \cdot 10^{-5})}{234 \cdot 10^{-3}} = 4,28 \cdot 10^{14} \text{ год}^{-1} = 1,36 \cdot 10^7 \text{ Бк};$$

$$A_{235} = \frac{0,693}{7,1 \cdot 10^8} \cdot \frac{(6,02 \cdot 10^{23})(7,04 \cdot 10^{-3})}{235 \cdot 10^{-3}} = 1,78 \cdot 10^{13} \text{ год}^{-1} = 5,63 \cdot 10^5 \text{ Бк};$$

$$A_{238} = \frac{0,693}{4,5 \cdot 10^9} \cdot \frac{(6,02 \cdot 10^{23}) \cdot 0,9928}{238 \cdot 10^{-3}} = 3,87 \cdot 10^{14} \text{ год}^{-1} = 1,23 \cdot 10^7 \text{ Бк}.$$

Полная активность образца получается при сложении активностей различных изотопов:

$$A = A_{234} + A_{235} + A_{238} = 2,65 \cdot 10^7 \text{ Бк}. \quad (\text{VII.2.60})$$

Процентная доля радиоактивности, вносимая каждым из изотопов в общую радиоактивность природного урана, определится, очевидно, отношением активности изотопа к полной активности образца:

$$\eta_{234} = 100\% \frac{A_{234}}{A} = 51\%; \quad \eta_{235} = 100\% \frac{A_{235}}{A} = 2\%; \quad (\text{VII.2.61})$$

$$\eta_{238} = 100\% \frac{A_{238}}{A} = 47\%.$$

ПРИМЕР 174. Человек массой 75 кг облучен α -частицами. Поглощенная доза составила 24 мрад. Вычислить: 1) поглощенную телом человека энергию; 2) эквивалентную полученную дозу.

Решение. Поглощенная доза равна $D = 24 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 24 \cdot 10^{-5} \text{ Гй}$. Поглощенная энергия $E = mD = 18 \text{ мДж}$. В табл. П.23 приложения находим коэффициент качества α -излучения $Q = 20$. Отсюда вычисляем эквивалентную дозу: $DQ = 4,8 \text{ мЗв} = 0,48 \text{ бэр}$.

VII.2.B. Задачи для самостоятельной работы

Масса и состав атомного ядра. Превращения ядер

Задача VII.2.1. Определить атомные номера, массовые числа и химические символы зеркальных ядер, которые получаются, если в ядрах ${}^3_2\text{He}$, ${}^7_4\text{Be}$, ${}^{15}_8\text{O}$ протоны заменить нейтронами, а нейтроны — протонами.

Задача VII.2.2. Какую часть массы нейтрального атома: 1) полония ${}^{210}_{84}\text{Po}$; 2) плутония ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ — составляет масса его электронной оболочки?

Задача VII.2.3. Зная массу m нейтрального атома изотопа лития ${}^7_3\text{Li}$, определить массы m_+ , m_{++} и m_{+++} ионов лития: однозарядного $({}^7_3\text{Li})^+$, двухзарядного $({}^7_3\text{Li})^{++}$ и трехзарядного $({}^7_3\text{Li})^{+++}$.

Задача VII.2.4. Ядро радия ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ выбросило α -частицу. Какое ядро при этом образовалось?

Задача VII.2.5. Покоившееся ядро радона ${}^{220}_{86}\text{Rn}$ выбросило α -частицу. В какое ядро превратилось ядро радона?

Задача VII.2.6. Ядро ${}^{65}_{30}\text{Zn}$ захватило электрон с K -оболочки атома. Какое ядро образовалось в результате K -захвата?

Задача VII.2.7. В ядре изотопа углерода ${}^{14}_6\text{C}$ один из нейтронов превратился в протон в результате β^- -распада. Какое ядро получилось в результате такого превращения?

Задача VII.2.8. В ядре изотопа кремния ${}^{27}_{14}\text{Si}$ один из протонов превратился в нейтрон в результате β^+ -распада. Какое ядро получилось в результате такого превращения?

Дефект массы и энергия связи ядра

Задача VII.2.9. Определить дефект массы Δm и энергию связи $E_{\text{св}}$ ядра атома тяжелого водорода.

Задача VII.2.10. Определить энергию E , которая освободится при соединении одного протона и двух нейтронов в атомное ядро.

Задача VII.2.11. Определить удельную энергию связи ядра ${}^{16}_6\text{C}$.

Задача VII.2.12. Энергия связи ядра, состоящего из двух протонов и одного нейтрона, равна 7,72 МэВ. Определить массу m_a нейтрального атома, имеющего это ядро.

Задача VII.2.13. Определить массу нейтрального атома, если ядро этого атома состоит из трех протонов и двух нейтронов и энергия связи ядра равна 26,3 МэВ.

Задача VII.2.14. Атомное ядро, поглотившее γ -фотон ($\lambda = 0,47$ нм), пришло в возбужденное состояние и распалось на отдельные нуклоны, разлетевшиеся в разные стороны. Суммарная кинетическая энергия T нуклонов равна 0,4 МэВ. Определить энергию связи ядра.

Задача VII.2.15. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы разделить на отдельные нуклоны ядра ${}^7_3\text{Li}$ и ${}^7_3\text{Be}$? Почему для ядра бериллия эта энергия меньше, чем для ядра лития?

Задача VII.2.16. Определить энергию, которая выделится при образовании из протонов и нейтронов ядер гелия ${}^4_2\text{He}$, если общая масса образовавшегося гелия равна 1 г.

Задача VII.2.17. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы оторвать один нейтрон от ядра азота ${}^{14}_7\text{N}$?

Задача VII.2.18. Найти минимальную энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра азота ${}^{14}_7\text{N}$.

Задача VII.2.19. Энергия связи ядра изотопа кислорода ${}^{18}_8\text{O}$ равна 139,8 МэВ, ядра фтора ${}^{19}_9\text{F}$ — 147,8 МэВ. Определить, какую минимальную энергию нужно затратить, чтобы оторвать один протон от ядра фтора.

Задача VII.2.20. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы разделить ядро ${}^4_2\text{He}$ на две одинаковые части?

Задача VII.2.21. Определить наименьшую энергию, необходимую для деления ядра углерода ${}^{12}_6\text{C}$ на три одинаковые части.

Ядерные реакции

Задача VII.2.22. Вычислить с помощью табличных значений масс атомов энергию на один нуклон, которая выделяется при протекании термоядерной реакции ${}^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \rightarrow 2{}^4_2\text{He}$. Сравнить полученную величину с энергией на один нуклон, освобождающейся при делении ядра урана (полная высвобождаемая при этом энергия примерно равна 200 МэВ).

Задача VII.2.23. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x в символической записи ядерной реакции ${}^{14}_6\text{C} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + x$.

Задача VII.2.24. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x в символической записи ядерной реакции ${}^{27}_{13}\text{Al} + x \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^{26}_{12}\text{Mg}$.

Задача VII.2.25. Определить энергию Q ядерных реакций:

- 1) ${}^9_4\text{Be} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + {}^1_0n$; 2) ${}^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \rightarrow 2{}^4_2\text{He}$; 3) ${}^7_3\text{Li} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + {}^1_0n$;
4) ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + {}^1_0n$; 5) ${}^{44}_{20}\text{Ca} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{41}_{19}\text{K} + {}^4_2\text{He}$.

Освобождается или поглощается энергия в каждой из указанных реакций?

Задача VII.2.26. Найти энергию Q ядерных реакций: 1) ${}^3\text{H}(p, \gamma){}^4\text{He}$; 2) ${}^2\text{H}(d, \gamma){}^4\text{He}$; 3) ${}^2\text{H}(n, \gamma){}^3\text{He}$; 4) ${}^{19}\text{F}(p, \alpha){}^{16}\text{O}$.

Задача VII.2.27. Определить энергию Q ядерной реакции ${}^9\text{Be}(n, \gamma){}^{10}\text{Be}$, если известно, что энергия связи ядра ${}^9\text{Be}$ равна 58,16 МэВ, а ядра ${}^{10}\text{Be}$ — 64,98 МэВ.

Задача VII.2.28. Найти энергию Q ядерной реакции ${}^{14}\text{N}(n, p){}^{14}\text{C}$, если энергия связи ядра ${}^{14}\text{N}$ равна 104,66 МэВ, а ядра ${}^{14}\text{C}$ — 105,29 МэВ.

Задача VII.2.29. Определить суммарную кинетическую энергию T_{Σ} ядер, образовавшихся в результате реакции ${}^{13}\text{C}(d, \alpha){}^{11}\text{B}$, если кинетическая энергия T_d дейтрона равна 1,5 МэВ. Ядро-мишень ${}^{13}\text{C}$ считать неподвижным.

Задача VII.2.30. При ядерной реакции ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$ освобождается энергия $Q = 5,7$ МэВ. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер бериллия и гелия и принимая их суммарный импульс равным нулю, определить кинетические энергии T_n и T_C продуктов реакции.

Задача VII.2.31. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер дейтерия и принимая их суммарный импульс равным нулю, определить кинетические энергии T_{He} и T_n продуктов реакции ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^1_0n$.

Задача VII.2.32. Покоившееся ядро полония ${}^{210}_{84}\text{Po}$ выбросило α -частицу. Определить кинетические энергии T_α ядра отдачи и T_α α -частицы, а также полную энергию ΔQ , выделившуюся при α -распаде.

Задача VII.2.33. Ядро углерода ${}^{14}_6\text{C}$ выбросило электрон и антинейтрино. Определить полную энергию ΔQ β -распада ядра.

Задача VII.2.34. Неподвижное ядро кремния ${}^{31}_{14}\text{Si}$ выбросило электрон с кинетической энергией $T_e = 0,5$ МэВ. Пренебрегая кинетической энергией ядра отдачи, определить кинетическую энергию T_ν антинейтрино.

Задача VII.2.35. Ядро атома азота ${}^{13}_7\text{N}$ выбросило позитрон. Кинетическая энергия позитрона равна 1 МэВ. Пренебрегая кинетической энергией ядра отдачи, определить кинетическую энергию T_ν нейтрино, выброшенного вместе с позитроном.

Закон радиоактивного распада. Активность. Радиоактивное равновесие

Задача VII.2.36. Какова вероятность W того, что данный атом в изотопе радиоактивного иода ${}^{131}\text{I}$ распадается в течение ближайшей секунды?

Задача VII.2.37. Определить постоянные распада λ изотопов радия ${}^{220}_{88}\text{Ra}$ и ${}^{226}_{88}\text{Ra}$.

Задача VII.2.38. Постоянная распада рубидия ${}^{89}\text{Rb}$ равна $0,00077 \text{ с}^{-1}$. Определить его период полураспада $T_{1/2}$.

Задача VII.2.39. Какая часть начального количества атомов распадается за один год в радиоактивном изотопе тория ${}^{229}\text{Th}$?

Задача VII.2.40. Какая часть начального количества атомов радиоактивного актиния ${}^{225}\text{Ac}$ останется: 1) через 5 сут; 2) через 15 сут?

Задача VII.2.41. За один год начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в 3 раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

Задача VII.2.42. За какое время t распадается $1/4$ начального количества ядер радиоактивного изотопа, если период его полураспада $T_{1/2} = 24$ ч?

Задача VII.2.43. За время $t = 8$ сут распалось $3/4$ начального количества ядер радиоактивного изотопа. Определить период полураспада $T_{1/2}$.

Задача VII.2.44. Период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного нуклида равен 1 ч. Определить среднюю продолжительность τ жизни этого нуклида.

Задача VII.2.45. Какая часть начального количества радиоактивного нуклида распадается за время t , равное средней продолжительности жизни этого нуклида?

Задача VII.2.46. Определить число N атомов, распадающихся в радиоактивном изотопе за время $t = 10$ с, если его активность $A = 0,1$ МБк. Считать активность постоянной в течение указанного времени.

Задача VII.2.47. За время t активность A препарата уменьшилась в 250 раз. Скольким периодам полураспада $T_{1/2}$ равен промежуток времени t ?

Задача VII.2.48. За время $t = 1$ сут активность изотопа уменьшилась от $A_1 = 118$ ГБк до $A_2 = 7,4$ ГБк. Определить период полураспада $T_{1/2}$ этого нуклида.

Задача VII.2.49. На сколько процентов снизится активность A изотопа иридия ^{192}Ir за время $t = 30$ сут?

Задача VII.2.50. Определить промежуток времени τ , в течение которого активность A изотопа стронция ^{90}Sr уменьшится: 1) в $k_1 = 10$ раз; 2) в $k_2 = 100$ раз.

Задача VII.2.51. Счетчик Гейгера, установленный вблизи препарата радиоактивного изотопа серебра, регистрирует поток β -частиц. При первом измерении счетчик давал 87 отсчетов в секунду, а по истечении времени $t = 1$ сут число отсчетов в секунду уменьшилось до 22. Определить период полураспада $T_{1/2}$ изотопа серебра.

Задача VII.2.52. Определить активность A препарата фосфора ^{32}P массой $m = 1$ мг.

Задача VII.2.53. Вычислить удельную активность a : 1) кобальта ^{60}Co ; 2) стронция ^{90}Sr ; 3) радия ^{226}Ra .

Задача VII.2.54. Найти массу m_1 урана ^{238}U , имеющего такую же активность, как препарат стронция ^{90}Sr массой $m_2 = 1$ мг.

Задача VII.2.55. Определить массу m_1 радона ^{222}Rn , находящегося в радиоактивном равновесии с радием ^{226}Ra массой $m_2 = 1$ г.

Задача VII.2.56. Уран ^{234}U является продуктом распада наиболее распространенного изотопа урана ^{238}U . Определить период полураспада $T_{1/2}$ урана ^{234}U , если его массовая доля в естественном уране равна $5,7 \cdot 10^{-5}$.

Задача VII.2.57. Радиоактивный изотоп $^{22}_{11}\text{Na}$ излучает γ -кванты энергией $\varepsilon = 1,28$ МэВ. Определить мощность P γ -излучения и энергию W , излучаемую за время $t = 5$ мин изотопом натрия массой $m = 5$ г. Считать, что при каждом акте распада излучается один фотон.

Задача VII.2.58. Точечный изотропный радиоактивный источник создает на расстоянии $r = 1$ м интенсивность γ -излучения $I = 1,6$ мВт/м². Принимая, что при каждом акте распада ядра излучается один γ -квант с энергией $\varepsilon = 1,33$ МэВ, определить активность A источника.

Задача VII.2.59. Определить интенсивность I γ -излучения на расстоянии $r = 5$ см от точечного изотропного радиоактивного источника активностью $A = 148$ ГБк. Считать, что при каждом акте распада излучается в среднем $n = 1,8$ фотонов с энергией $\varepsilon = 0,51$ МэВ каждый.

Элементы дозиметрии

Задача VII.2.60. Вычислить предельную недельную норму полетов на авиалайнерах, если предельная допустимая доза для населения составляет 0,5 бэр за год, а мощность эквивалентной дозы, получаемой вследствие космического излучения, равна 0,7 мбэр/ч (соответствует высоте 10–12 км).

Задача VII.2.61. При типичной рентгенографии грудной клетки человек получает дозу 25 мбэр. Если масса облученной части тела составляет половину массы пациента, равной 80 кг, то какое количество энергии излучения поглощается телом? Коэффициент качества излучения Q принять равным 0,85.

Задача VII.2.62. Человек получил летальную дозу облучения 300 рад. Чему равна поглощенная телом энергия, если облучение действовало во всем объеме тела, а масса человека равна 80 кг?

Задача VII.2.63. Какая доля всех молекул воздуха при нормальных условиях ионизируется рентгеновским излучением при экспозиционной дозе $X = 1$ Р? Молекулярная масса воздуха $\mu = 28,97$ г/моль.

Задача VII.2.64. Воздух при нормальных условиях облучается γ -излучением. Определить энергию W , поглощаемую воздухом массой $m = 5$ г при экспозиционной дозе излучения $X = 1$ Р.

Задача VII.2.65. Под действием космических лучей в воздухе объемом $V = 1$ см³ на уровне моря образуется в среднем 120 пар ионов в минуту. Определить экспозиционную дозу излучения X , действию которой подвергается человек за время $t = 1$ сут. Молярная масса воздуха $\mu = 28,97$ г/моль, стандартный молярный объем V_m при нормальных условиях равен 22,4 л/моль.

Задача VII.2.66. На расстоянии $l = 10$ см от точечного источника γ -излучения мощность экспозиционной дозы $X = 0,86$ мкА/кг. На каком расстоянии от источника l_{\min} экспозиционная доза X излучения за рабочий день продолжительностью 6 ч не превысит предельно допустимую норму 5,16 мкКл/кг? Поглощением γ -лучей в воздухе пренебречь.

Задача VII.2.67. Мощность экспозиционной дозы X γ -излучения на расстоянии $r_1 = 40$ см от точечного источника равна 4,3 мкА/кг. Определить время, в течение которого можно находиться на расстоянии $r_2 = 6$ м от источника, если предельно допустимая экспозиционная доза равна $X_{\max} = 5,16$ мкКл/кг. Поглощением γ -лучей в воздухе пренебречь.

Часть VIII

ВАРИАНТЫ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

VIII.1. Типовой расчет по теме «Физические основы механики»

Вариант 1

1. Камень, брошенный с высоты $h = 2,1$ м под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, падает на расстоянии $S = 42$ м (по горизонтали) от места бросания. Найти начальную скорость камня, время полета и максимальную высоту подъема над уровнем земли. Определить радиусы кривизны траектории в верхней точке и в точке падения камня на землю.
2. Шарик массой m , подвешенный на нити, имеющей длину l , вращается в горизонтальной плоскости. Какой должна быть сила натяжения T нити, чтобы радиус R окружности, по которой движется шарик, мог достигнуть величины $2l/5$?
3. Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр, $J = 2/5 mR^2$. Считая Землю однородным шаром, вычислить кинетическую энергию, обусловленную ее суточным вращением. Масса Земли $m = 6 \cdot 10^{24}$ кг, радиус $R = 6,8 \cdot 10^5$ км.

Вариант 2

1. По наклонной доске пустили снизу вверх шарик. На расстоянии $l = 0,3$ м от начальной точки движения шарик побывал дважды: через $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с после начала движения. Определить начальную скорость и ускорение движения шарика, считая их постоянными.

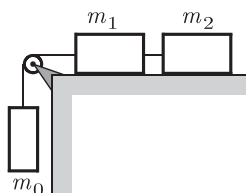


Рис. 95

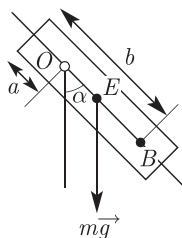


Рис. 96

2. В установке, показанной на рис. 95, массы тел равны m_0, m_1, m_2 , массы блока и нитей пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Полагая, что тело массой m_0 опускается, найти его ускорение и натяжение нити, связывающей тела массами m_1, m_2 , если коэффициенты трения между горизонтальной поверхностью и телами m_1, m_2 одинаковы и равны μ .
3. Тонкий однородный стержень длиной $l = 1$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси z , проходящей через точку O на стержне перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 96). Стержень отклонили от вертикали на угол α и отпустили. Определить для на-

чального момента времени угловое ускорение ε и тангенциальное ускорение a_τ точки B на стержне. Вычисления произвести для следующих случаев:

- 1) $a = 0$, $b = 2l/3$, $\alpha = \pi/2$; 2) $a = l/3$, $b = l$, $\alpha = \pi/3$;
- 3) $a = l/4$, $b = l/2$, $\alpha = 2\pi/3$.

Вариант 3

1. Материальная точка начинает двигаться по окружности радиуса $r = 10$ см с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 0,4$ м/с². Через какой промежуток времени вектор ускорения \vec{a} образует с вектором скорости \vec{v} угол β , равный 60 и 80° ? Какой путь пройдет за это время движущаяся точка?
2. В вагоне, движущемся горизонтально с ускорением $a = 2$ м/с², висит на шнуре груз массой $m = 200$ г. Найти силу натяжения шнура и угол отклонения шнура от вертикали.
3. Однородный диск (рис. 97) радиусом $R = 10$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O , расположенную на нем. Диск отклонили на угол α и отпустили. Определить для начального момента времени угловое ускорение ε и тангенциальное ускорение a_τ точки B , находящейся на диске. Вычисления произвести для следующих случаев:

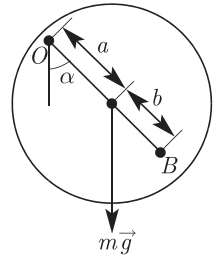


Рис. 97

- 1) $a = R$, $b = R/2$, $\alpha = \pi/2$;
- 2) $a = R/2$, $b = R$, $\alpha = \pi/6$;
- 3) $a = 2R/3$, $b = 2R/3$, $\alpha = 2\pi/3$.

Вариант 4

1. Частица движется в плоскости xy со скоростью $\vec{v} = a\vec{i} + bx\vec{j}$, где \vec{i} и \vec{j} — орты осей x и y соответственно, a и b — постоянные. В начальный момент частица находилась в точке $x = y = 0$. Найти: 1) уравнение траектории частицы $y(x)$; 2) радиус кривизны траектории в зависимости от координаты x .
2. На гладкой наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, находится тело массой $m = 50$ кг, на которое действует горизонтально направленная сила $F = 294$ Н. Найти ускорение тела и силу $F_{\text{н.д.}}$, с которой тело давит на плоскость (тело движется вниз).
3. На сплошной однородный цилиндр массой $m_2 = 10$ кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m_1 = 2$ кг. Определить ускорение a груза и силу F натяжения шнура. Массой шнура и трением пренебречь.

Вариант 5

1. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подъема постоянна и равна v_0 . Вследствие ветра шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $v_x = ay$, где a — постоянная, y — высота от поверхности земли. Найти: 1) величину сноса шара в зависимости от высоты подъема $x(y)$; 2) полное, тангенциальное и нормальное ускорения шара.

- На экваторе некоторой планеты тело весит в 2 раза меньше, чем на полюсе. Плотность вещества этой планеты 3 г/см^3 . Определить период вращения планеты вокруг своей оси.
- На барабан радиусом $R = 20 \text{ см}$, момент инерции J_z которого равен $0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 0,5 \text{ кг}$. До начала вращения барабана высота h груза над полом равна 1 м . Найти: 1) время τ , в течение которого груз опустится до пола; 2) силу F натяжения нити. Массой шнура и трением пренебречь.

Вариант 6

- Материальная точка движется в плоскости xy по закону $x = at, y = bt - ct^2$, где $a = 50,0 \text{ см/с}$, $b = 200 \text{ см/с}$, $c = 25,0 \text{ см/с}^2$. Найти в момент времени $t = 3,00 \text{ с}$: 1) скорость и ускорение точки; 2) угол между векторами скорости \vec{v} и ускорения \vec{a} .
- Определить плотность планеты, продолжительность суток на которой равна T , если известно, что на экваторе планеты тела невесомы.
- Два тела массами $m_1 = 0,25 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,15 \text{ кг}$ связаны тонкой нитью, переброшенной через блок. Блок укреплен на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит тело массой m_1 . С каким ускорением a движутся тела и чему равны силы F_1 и F_2 натяжения нити (по обе стороны от блока)? Коэффициент трения тела о поверхность стола $\mu = 0,2$. Масса блока $m = 0,1 \text{ кг}$, и ее можно считать равномерно распределенной по ободу. Массой веревки и трением в подшипниках оси блока пренебречь.

Вариант 7

- На горе с углом наклона α к горизонту бросают мяч с начальной скоростью v_0 перпендикулярно склону горы. Найти время полета мяча. На каком расстоянии от точки бросания упадет мяч?
- Найти среднюю плотность ρ планеты, если на экваторе показания динамометра, к которому подвешено тело, на 10% меньше, чем на полюсе. Продолжительность суток на планете $\tau = 6 \text{ ч}$.
- Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концу шнура привязали грузики массами $m_1 = 100 \text{ г}$ и $m_2 = 150 \text{ г}$. С каким ускорением a будут двигаться грузики и чему равны силы F_1 и F_2 натяжения нити (по обе стороны от блока), если масса блока $m = 200 \text{ г}$? Трение при вращении блока ничтожно мало. Массой шнура пренебречь.

Вариант 8

- За промежуток времени $\tau = 10,0 \text{ с}$ частица прошла половину окружности радиусом $R = 160 \text{ см}$ с постоянным тангенциальным ускорением. Вычислить за это время: 1) средний модуль скорости v ; 2) модуль среднего вектора полного ускорения $|\vec{a}|$.
- Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 0,5 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,6 \text{ кг}$. Найти силу давления блока на ось при движении грузов в двух случаях: лифт поднимается 1) равномерно; 2) с ускорением $a_0 = 1,2 \text{ м/с}^2$. Масса блока пренебрежимо мала. Трением в оси пренебречь.

3. Найти моменты инерции J_z двух атомных молекул (рис. 98) типов A_2 и AB относительно оси, проходящей через центр инерции C молекулы перпендикулярно прямой, соединяющей ядра атомов. Вычисления произвести для следующих молекул: 1) H_2 ; 2) J_2 ; 3) HJ ; 4) NO ; межатомные расстояния d : 1) $0,741 \cdot 10^{-10}$ м; 2) $2,67 \cdot 10^{-10}$ м; 3) $1,61 \cdot 10^{-10}$ м; 4) $1,15 \cdot 10^{-10}$ м.

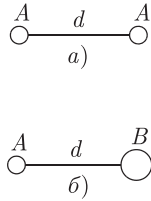


Рис. 98

Вариант 9

1. Тело брошено вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Через сколько времени от начала движения оно упадет обратно? На какую высоту оно поднимется? Найти перемещение и путь тела за 4 с движения.
2. Шарик, подвешенный на нити, имеющей длину l , описывает окружность в горизонтальной плоскости. Нить составляет с вертикалью угол α . Найти период τ обращения шарика, если маятник находится в лифте, движущемся с постоянным ускорением $a < g$, направленным вниз.

3. Определить моменты инерции J_x, J_y, J_z трех атомных молекул (рис. 99) типа AB_2 относительно осей x, y, z , проходящих через центры инерции C молекулы. Положение осей x и y указано на рисунке. Ось z перпендикулярна плоскости xy . Вычисления выполнить для следующих молекул: 1) H_2O ; 2) H_2S ; 3) SO_2 ; 4) CO_2 . Межъядерные расстояния d ($d = AB$) и валентные углы α : 1) $0,97 \cdot 10^{-10}$ м, $104,5^\circ$; 2) $1,35 \cdot 10^{-10}$ м, $92,3^\circ$; 3) $1,45 \cdot 10^{-10}$ м, 124° ; 4) $1,13 \cdot 10^{-10}$ м, 180° .

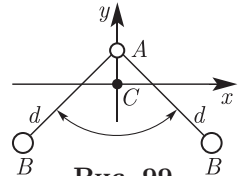


Рис. 99

Вариант 10

1. Тело бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) время полета; 2) максимальную высоту подъема и горизонтальную дальность полета; 3) уравнение траектории $y(x)$, где y и x — перемещения тела по вертикали и горизонтали соответственно; 4) радиусы кривизны начала и вершины траектории.
2. Наклонная доска (рис. 100), составляющая с горизонтом угол 60° , приставлена к горизонтальному столу. Три груза массой 1 кг каждый соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный и невесомый блок, и могут перемещаться соответственно по доске и столу. Найти силу натяжения нити и ускорение системы, если коэффициент трения тел о поверхности доски и стола одинаков и равен 0,3.
3. Вычислить моменты инерции J_x, J_y, J_z четырехатомной T-образной молекулы CP_3 относительно осей x, y, z , проходящих через центр

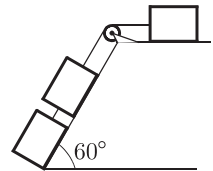


Рис. 100

инерции C молекулы. Положение осей x и y указано на рис. 101. Ось z перпендикулярна плоскости xy . Межъядерные расстояния считать известными: $d = 2,33 \cdot 10^{-10}$ м.

Вариант 11

1. С башни высотой $H = 25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. На каком расстоянии от основания башни он упадет? Чему равна его начальная скорость? Какой угол образует вектор конечной скорости с горизонтом?
2. Груз массой $m = 200$ г, привязанный к нити длиной $l = 40$ см, вращают в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью так, что нить описывает коническую поверхность. При этом угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 37^\circ$. Найти угловую скорость ω вращения груза и силу натяжения нити.
3. Вычислить момент инерции J_z тонкого однородного стержня длиной $l = 1$ м и массой $m = 1,2$ кг относительно оси z , перпендикулярной стержню и проходящей через точку O , лежащую на оси стержня. Вычисление выполнить для случаев $a, б, в, г$, изображенных на рис. 102.

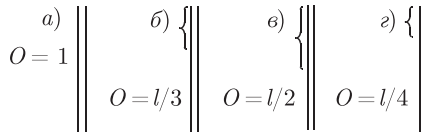


Рис. 102

Вариант 12

1. Два тела бросили одновременно: одно — вертикально вверх со скоростью $v_1 = 25$ м/с, другое — под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v_2 = 30$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти их относительную скорость во время движения.

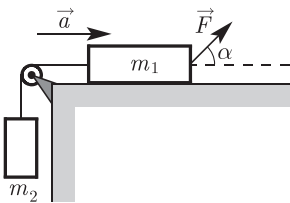


Рис. 103

2. Определить ускорение тел в системе, показанной на рис. 103. Коэффициент трения между телом массой m_1 и плоскостью $\mu = 0,1$. Массами блока и нити можно пренебречь. Нить нерастяжима. Массы грузов $m_1 = 1,5$ кг, $m_2 = 0,5$ кг, сила \vec{F} образует угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, а ее модуль равен 10 Н.

3. Вентилятор вращается с частотой 900 об/мин. После выключения, вращаясь равнозамедленно, он сделал до остановки $N = 75$ оборотов. Работа сил торможения равна $A = 44$ Дж. Найти: 1) момент инерции J вентилятора; 2) момент сил торможения M_T .

Вариант 13

1. Тело брошено с начальной скоростью под углом к горизонту. Найти скорость v_0 и угол α , если известно, что максимальная высота подъема тела $h_{\max} = 5$ м и радиус кривизны траектории тела в верхней точке траектории $R = 5$ м.

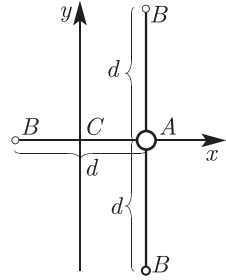


Рис. 101

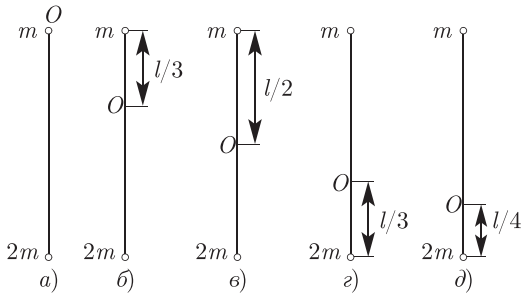


Рис. 104

2. Доска массой M может двигаться без трения по наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту. В каком направлении и с каким ускорением должна бежать по доске собака массой m , чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости?
3. На концах тонкого однородного стержня длиной l и массой $3m$ прикреплены маленькие шарики массами m и $2m$. Определить момент инерции стержня J_z относительно оси z , перпендикулярной стержню и проходящей через точку O , лежащую на его оси. Вычисления выполнить для случаев, изображенных на рис. 104, а–д. При расчетах принять $l = 1$ м, $m = 0,1$ кг.

Вариант 14

1. Шкив радиусом 20 см приводится во вращение в вертикальной плоскости грузом, подвешенным на нити, постепенно сматывающейся со шкива. В начальный момент груз был неподвижен, а затем стал опускаться с ускорением 2 м/с^2 . Найти угловую скорость шкива в тот момент, когда груз опустится на 1 м. Определить величину и направление ускорения произвольной точки шкива в этот момент.
2. На наклонной плоскости с углом наклона α неподвижно лежит кубик, причем коэффициент трения между кубиком и плоскостью равен $\mu > \text{tg } \alpha$. Наклонная плоскость движется с ускорением \vec{a} в направлении, указанном стрелкой (рис. 105). При каком минимальном значении этого ускорения кубик начнет соскальзывать?

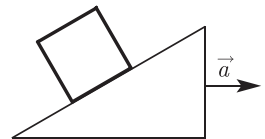


Рис. 105

3. Определить момент инерции тонкого однородного кольца радиусом $R = 10$ см и массой $m = 0,1$ кг относительно оси: 1) перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его образующую; 2) лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр; 3) лежащей в плоскости кольца и касательной к окружности.

Вариант 15

1. Тело бросают под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 14 м/с. На расстоянии 11 м от точки бросания тело упруго ударяется о вертикальную стенку. На каком расстоянии от стенки оно упадет на землю?

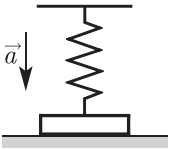


Рис. 106

2. На подставке лежит тело, подвешенное к потолку с помощью пружины (рис. 106). В начальный момент времени пружина не деформирована. Подставку начинают опускать вниз с ускорением. Через какое время тело оторвется от подставки? Коэффициент жесткости пружины равен k , масса тела равна m .
3. Определить момент инерции J_z однородного диска радиусом $R = 20$ см и массой 5 кг относительно оси z , перпендикулярной плоскости диска, в двух случаях: 1) ось z проходит через середину радиуса; 2) ось z совпадает с образующей диска.

Вариант 16

1. Материальная точка начинает двигаться без начальной скорости по окружности радиусом $R = 20$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5$ см/с². Через какое число оборотов после начала движения нормальное ускорение точки станет равным тангенциальному?

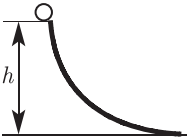


Рис. 107

2. Шарик массой $m = 0,2$ кг скатывается по желобу с высоты $h = 2$ м (рис. 107). Начальная скорость $v_0 = 0$. Найти изменение импульса $|\Delta \vec{p}_1|$ шарика и импульс \vec{p}_2 , полученный желобом при движении шарика.

3. К ободу однородного диска радиусом $R = 0,2$ м приложена постоянная касательная сила $F = 98,1$ Н. При вращении на диск действует момент силы трения $M_{тр} = 0,5$ кг·м. Найти вес диска, если известно, что диск вращается с постоянным угловым ускорением 100 рад/с².

Вариант 17

1. Материальная точка движется по окружности со скоростью $v = at$, где $a = 0,50$ м/с². Найти ее полное ускорение в момент, когда она сделает $N = 0,10$ оборота после начала движения.
2. Тело массой $m = 2$ кг движется поступательно под действием некоторой силы согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с², $D = -0,2$ м/с³. Найти значения F_1 и F_2 этой силы в моменты времени $t_1 = 2$ с, $t_2 = 5$ с. В какой момент времени t сила равна нулю?
3. Однородный стержень длиной 1 м и весом 0,5 кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. С каким угловым ускорением вращается стержень, если вращающий момент равен $9,81 \cdot 10^{-2}$ Н·м?

Вариант 18

1. Частица движется по дуге окружности радиусом R по закону $l = a \sin(\omega t)$, где l — смещение из начального положения, отсчитываемое вдоль дуги; a и ω — постоянные. Полагая $R = 1,00$ м, $a = 0,80$ м и $\omega = 2,00$ рад/с, найти полное ускорение частицы в точках $l = 0$ и $\pm a$.
2. Тело, имеющее постоянную массу, до торможения двигалось равномерно, а в момент остановки тормозящая сила достигла значения $F_k = -40$ Н. Определить тормозящую силу F через время $t = 3$ с

после начала торможения, если тормозной путь в зависимости от времени изменялся по закону $S = At + Bt^3$, где $A = 12 \text{ м/с}$; $B = -0,25 \text{ м/с}^3$.

3. Однородный диск радиусом $0,2 \text{ м}$ и весом 5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости вращения диска от времени задается уравнением $\omega(t) = Bt$, где $B = 8 \text{ рад/с}^2$. Найти величину касательной силы, приложенной к ободу диска. Трением пренебречь.

Вариант 19

1. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = at - bt^3$, где $a = 6,0 \text{ рад/с}$, $b = 2,0 \text{ рад/с}^3$. Найти: 1) средние значения модулей угловой скорости ω и углового ускорения ε за промежуток времени от $t = 0$ до остановки; 2) угловое ускорение ε_1 в момент, когда тело остановится.
2. Два шарика падают в воздухе. Шарик (сплошные) сделаны из одного материала, но диаметр одного из шариков в 2 раза больше, чем другого. В каком соотношении будут находиться скорости шариков при установившемся движении? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поперечного сечения движущегося тела и квадратично зависит от скорости движения тела.
3. Маховик, момент инерции которого равен $63,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, вращается с постоянной угловой скоростью $31,4 \text{ рад/с}$. Найти тормозящий момент M , под действием которого маховик останавливается через 20 с .

Вариант 20

1. Тело брошено с башни под углом 30° к горизонту со скоростью 10 м/с . Чему равно кратчайшее расстояние между местом бросания и местом нахождения тела спустя 3 с после бросания?
2. Парашютист, масса которого $m = 80 \text{ кг}$, совершает прыжок с парашютом. Считая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения, определить, через какой промежуток времени τ скорость парашютиста будет равна $0,9$ от скорости установившегося движения. Коэффициент сопротивления k принять равным 10 кг/с . Начальная скорость парашютиста равна нулю.
3. К ободу колеса, имеющего форму диска радиусом $0,5 \text{ м}$ и массой 50 кг , приложена касательная сила 10 кг . 1) Найти угловое ускорение колеса. 2) Через сколько времени после начала действия силы колесо будет иметь скорость 100 об/с ?

Вариант 21

1. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = at$, где $a = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ рад/с}^3$. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\alpha = 60^\circ$ с ее вектором скорости?
2. Снаряд массой $m = 10 \text{ кг}$ выпущен из зенитного орудия вертикально вверх со скоростью $v_0 = 800 \text{ м/с}$. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной скорости, определить время τ подъема снаряда до высшей точки и высоту подъема. Коэффициент сопротивления k принять равным $0,26 \text{ кг/с}$.

3. Маховик радиусом 0,2 м и массой 10 кг соединен с мотором при помощи приводного ремня. Натяжение ремня, движущегося без скольжения, постоянно и равно 14,7 Н. Какое число оборотов в секунду будет делать маховик через время 10 с после начала движения? Маховик считать однородным диском. Трением пренебречь.

Вариант 22

1. На берегу высотой 20 м над уровнем моря под углом 30° к горизонту установлено орудие. Определить высоту подъема и дальность полета снаряда, если скорость вылета снаряда из ствола орудия 600 м/с, а из-за сопротивления воздуха дальность полета уменьшается в 4 раза.
2. Катер трогается с места и в течение времени $\tau = 10$ с развивает скорость $v = 4$ м/с. Определить силу тяги F мотора, считая ее постоянной. Силу сопротивления F_c движению принять изменяющейся пропорционально скорости и коэффициент сопротивления $k = 100$ кг/с. Масса катера $m = 2 \cdot 10^3$ кг.
3. Маховое колесо, имеющее момент инерции 245 кг·м, вращается, делая 20 об/с. Через 1 мин после того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти: 1) момент силы трения; 2) число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил.

Вариант 23

1. По дуге окружности радиусом $R = 5$ м движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки $a_n = 2,5$ м/с². В этот момент времени векторы полного и нормального ускорений образуют угол $\varphi = 60^\circ$. Найти скорость v и тангенциальное ускорение a_τ точки.
2. Доска массой $M = 400$ г движется по поверхности стола. Коэффициент трения между поверхностью стола и доской $\mu = 0,2$. В некоторый момент времени, когда скорость доски была $v_0 = 0,5$ м/с, на нее осторожно опустили брусок массой $m = 200$ г. Определить путь, который пройдет брусок по доске, пока он не остановится относительно доски. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_1 = 0,3$; поверхность стола считать горизонтальной.
3. Две гири весом 2 и 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок весом 1 кг. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири; 2) натяжение нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

Вариант 24

1. Шар радиусом $R = 10,0$ см начинает скатываться без скольжения по наклонной плоскости так, что его центр движется с постоянным ускорением $a = 2,5$ см/с². Найти через $t = 2,0$ с после начала движения скорости точек A , B и C , показанных на рис. 108.

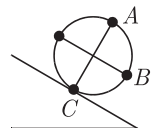


Рис. 108

2. Четыре одинаковых груза массой $m = 2$ кг каждый, связанные невесомыми нерастяжимыми нитями, движутся по горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10$ Н, направленной под углом

$\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Коэффициент трения всех грузов о поверхность одинаков и равен $\mu = 0,1$. Найти силы натяжения всех нитей и ускорение грузов.

3. На барабан массой 9 кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 2 кг. Найти ускорение груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

Вариант 25

1. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением. Найти это ускорение, если известно, что к концу пятого оборота скорость точки $v = 79,2$ см/с.
2. Самолет делает «мертвую петлю» радиусом $R = 500$ м с постоянной скоростью $v = 360$ км/ч. Найти вес летчика, масса которого $m = 70$ кг, в нижней, верхней и средней точках петли.
3. На барабан радиусом 0,5 м намотан шнур, к концу которого привязан грузик 10 кг. Найти момент инерции барабана, если известно, что грузик опускается с ускорением $2,04$ м/с².

Вариант 26

1. Маховое колесо спуска $t = 1$ мин после начала движения приобретает скорость, соответствующую частоте $n = 720$ об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов N колеса за эту минуту. Движение считать равноускоренным.
2. На столе лежат четыре связанных нитями груза одинаковой массы. На нити, прикрепленной к грузам и перекинутой через неподвижный блок, находящийся на краю стола, подвешен груз той же массы. С каким ускорением движутся грузы и какая сила натяжения между третьим и четвертым грузами? Трение не учитывать.
3. На барабан радиусом 20 см, момент инерции которого равен $0,1$ кг · м², намотан шнур, к концу которого привязан грузик 0,5 кг. До начала вращения барабана высота грузика над полом равна 1 м. Найти: 1) через какое время грузик опустится до пола; 2) кинетическую энергию грузика в момент удара о пол; 3) натяжение нити. Трением пренебречь.

Вариант 27

1. Самолет, летевший на высоте $h = 2940$ м со скоростью $v = 360$ км/ч, сбросил груз. За какое время t до прохождения над расчетной точкой на поверхности земли и на каком расстоянии s от нее должен самолет сбросить груз, чтобы попасть в эту точку? Соппротивлением воздуха пренебречь.
2. Космический корабль имеет массу $m = 6$ т. При маневрировании из его двигателей вырывается струя газа со скоростью $v = 700$ м/с; расход горючего $Q_m = 0,2$ кг/с. Найти реактивную силу R двигателей и ускорение a , которое она сообщает кораблю.
3. Две гирьки равного веса соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого 50 кг · м² и радиус 20 см. Блок вращается с трением и момент сил трения равен $98,1$ Н · м. Найти разность натяжения нитей по обе стороны блока, если известно, что он вращается с постоянным угловым ускорением $2,36$ рад/с².

Вариант 28

1. Камень брошен горизонтально со скоростью 10 м/с. Найти радиус кривизны траектории камня через 3 с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

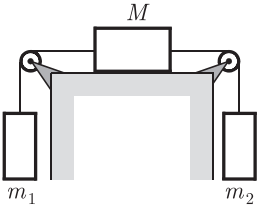


Рис. 109

2. На столе лежит деревянный брусок, к которому привязаны нити, перекинутые через блоки, укрепленные на краю стола (рис.109). К свободным концам нитей подвешены грузы массами $m_1 = 0,85$ кг и $m_2 = 0,2$ кг, вследствие чего брусок приходит в движение и за 1 с проходит путь 1 м. Учитывая, что масса бруска $M = 2$ кг, определить коэффициент трения скольжения и натяжения нитей.

3. Блок весом 1 кг укреплен на конце стола. Гирьки *A* и *B* равного веса 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гирьки *B* о стол равен 0,1. Блок считать однородным диском. Трением в блоке пренебречь. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гирьки; 2) натяжение нитей.

Вариант 29

1. Колесо радиусом $R = 10$ см вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3,14$ с⁻². Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: 1) угловую скорость; 2) линейную скорость; 3) тангенциальное ускорение.

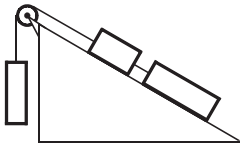


Рис. 110

2. Два груза массой по 5 кг, связанные нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок, с другим грузом массой 2 кг, движутся по наклонной плоскости (рис. 110). Найти силу натяжения нити и ускорение грузов, если коэффициент трения между первыми грузами и плоскостью 0,1. Угол наклона

плоскости к горизонту 30° . Массой нити блока, а также трением в блоке пренебречь.

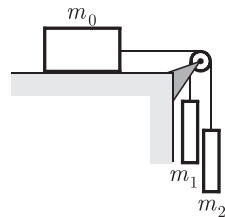
3. Диск весом 2 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью 4 м/с. Найти кинетическую энергию диска.

Вариант 30

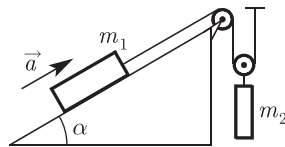
1. Точка движется по окружности радиусом $R = 0,2$ с с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0,05$ м/с². Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет в 2 раза больше тангенциального?
2. Снаряд массой $m = 8$ кг выпущен из зенитного орудия вертикально вверх со скоростью $v_0 = 900$ м/с. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной скорости, определить время t подвема снаряда до высшей точки. Коэффициент сопротивления $k = 0,25$ кг/с.
3. Шарик диаметром 6 см катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая 4 об/с; масса шарика 0,25 кг. Найти кинетическую энергию шарика.

Вариант 31

1. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости $\omega = 20$ рад/с через $N = 10$ оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса.
2. В системе, показанной на рис. 111, массы тел равны m_0, m_1, m_2 ; трение отсутствует; массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Найти ускорение тела массой m_1 . При каком условии оно равно нулю?
3. Диск радиусом $R = 20$ см и массой $m = 7$ кг вращается согласно уравнению $A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ рад, $B = -1$ рад/с, $C = 0,1$ рад/с³. Найти закон, по которому меняется вращающий момент, действующий на диск. Определить момент сил M в момент времени $t = 2$ с.

**Рис. 111****Вариант 32**

1. Камень, брошенный с высоты $h = 2,1$ м под углом $\alpha = 46^\circ$ к горизонту, падает на землю на расстоянии $S = 42$ м (по горизонтали) от места бросания. Найти начальную скорость камня, тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения через 1 с.
2. Определить ускорение каждого из тел в системе, изображенной на рис. 112. Нити нерастяжимы. Массами блоков и нити можно пренебречь. Трения нет. Массы грузов $m_1 = 0,1$ кг, $m_2 = 0,6$ кг, угол $\alpha = 30^\circ$.
3. Определить момент инерции тонкого диска массой $m = 5$ кг и радиусом $R = 47$ см относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его край.

**Рис. 112**

VIII.2. Типовой расчет по теме «Основы молекулярно-кинетической теории и термодинамики»

Вариант 1

1. Сколько молекул газа содержится в баллоне объемом $V = 30$ л при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 5$ МПа?
2. Три баллона объемами $V_1 = 3$ л, $V_2 = 7$ л и $V_3 = 5$ л наполнены соответственно кислородом при давлении $p_1 = 0,2$ МПа, азотом при $p_2 = 0,3$ МПа и углекислым газом при $p_3 = 60$ кПа. Температуры газов одинаковы. Баллоны соединяют между собой. Чему равно давление смеси после установления исходной температуры?
3. В цилиндре при $T = 293$ К находится воздух массой $m = 2$ кг под давлением $p = 0,98$ МПа. Определить работу воздуха при его адиабатном расширении, если изменение температуры составило $\Delta T = 100$ К. Молярная масса воздуха $\mu = 0,029$ кг/моль.

Вариант 2

1. В сосуде содержится смесь газов — азота массой $m_1 = 7$ г и водорода массой $m_2 = 1$ г; температура в сосуде $T = 280$ К, давление $p = 15$ кПа. Определить плотность смеси газов.
2. Найти среднюю квадратичную скорость, среднюю кинетическую энергию поступательного движения и среднюю полную кинетическую энергию молекулы гелия и молекулы азота при температуре $t = 27^\circ\text{C}$.
3. Двухатомный идеальный газ, занимающий при давлении $p_1 = 0,3$ МПа объем $V_1 = 4$ л, расширяется до объема $V_2 = 6$ л. При этом устанавливается давление $p_2 = 0,1$ МПа. Определить работу газа и изменение его внутренней энергии при: 1) адиабатном; 2) изохорическом процессах.

Вариант 3

1. Какой объем занимает смесь газов — азота массой $m_1 = 1$ кг и гелия массой $m_2 = 1$ кг — при нормальных условиях? (Давление $p = 1,01 \cdot 10^5$ Па, температура $t = 0^\circ\text{C}$.)
2. Кинетическая энергия поступательного движения молекул кислорода, находящегося в баллоне объемом $V = 0,01$ м³, равна $W_k = 3$ кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 1,6 \cdot 10^3$ м/с. Найти: 1) массу кислорода в баллоне; 2) давление, при котором находится кислород.
3. В цилиндре под поршнем находится азот массой $m = 0,6$ кг, занимающий объем $V = 1,2$ м³ при температуре $T = 560$ К. В результате подвода теплоты газ расширился изотермически и занял объем $V_2 = 4,2$ м³. Найти: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) совершенную газом работу; 3) количество теплоты ΔQ , сообщенное газу.

Вариант 4

1. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом баллоне газ находится при давлении $p_1 = 0,1$ МПа, во втором — при $p_2 = 60$ кПа. Объем первого баллона $V_1 = 1$ л, второго $V_2 = 3$ л. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Процесс изотермический.
2. В цилиндрическом сосуде с площадью основания $S = 1$ м² при нормальных условиях находится воздух объемом $V = 1$ м³, который закрыт невесомым поршнем. Воздух под поршнем нагревается на $\Delta t = 1^\circ\text{C}$, при этом поршень поднимается. Определить величину работы, которую совершает воздух, перемещая поршень.
3. Найти изменение энтропии при расширении 8 г кислорода от объема $V_1 = 10$ л при температуре $t_1 = 80^\circ\text{C}$ до объема $V_2 = 40$ л при $t_2 = 300^\circ\text{C}$.

Вариант 5

1. Азот массой $m = 10,5$ г изотермически расширяется при $T = 250$ К. При этом давление изменяется от $p_1 = 2,5 \cdot 10^5$ Па до $p_2 = 1 \cdot 10^5$ Па. Найти работу, совершаемую газом при расширении.
2. Газ массой $m = 12$ г занимает объем $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м³ при температуре $t_1 = 7^\circ\text{C}$. После нагревания газа при постоянном давлении его температура стала $t_2 = 287^\circ\text{C}$. Определить плотность газа.

3. Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре $T = 300$ К и под давлением $p_1 = 0,5$ МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в 2 раза. Работа газа при сжатии $A = -432$ кДж. 1) Какой это газ? 2) Чему равен первоначальный удельный объем газа?

Вариант 6

1. До какой температуры нужно нагреть запаянный шар, содержащий $m = 17,5$ г воды, чтобы шар разорвался, если известно, что стенки шара выдерживают давление 10 МПа, а объем шара $V = 1$ л?
2. Используя первое начало термодинамики и уравнение состояния идеального газа, показать, что разность удельных теплоемкостей $c_p - c_v = R/\mu$.
3. Масса идеального газа $m = 10$ г, находящегося при температуре $T = 1000$ К, изохорически охлаждается так, что давление уменьшается в 5 раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определить совершенную газом работу. Молярная масса газа $\mu = 28$ кг/кмоль.

Вариант 7

1. В баллоне объемом $V = 110$ л содержится $m_1 = 0,8$ кг водорода и $m_2 = 1,6$ кг кислорода. Определить давление смеси. Температура в сосуде $T = 300$ К.
2. Газ массой $m = 12$ г занимает объем $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м³ при температуре $t_1 = 7^\circ\text{C}$. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $\rho_2 = 1,5$ кг/м³. До какой температуры t_2 нагрели газ?
3. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 73,5$ кДж. Температура нагревателя $T_1 = 746$ К, температура холодильника $T_2 = 373$ К. Найти: 1) КПД машины; 2) количество теплоты, получаемое машиной за один цикл от нагревателя; 3) количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику.

Вариант 8

1. Кислород массой $m = 10$ г находится под давлением $p_1 = 300$ кПа при температуре $t_1 = 10^\circ\text{C}$. После нагревания при постоянном давлении кислород занял объем $V_2 = 10$ л. Найти: 1) объем V_1 газа до расширения; 2) температуру t_2 газа после расширения; 3) плотность ρ_1 газа до расширения; 4) плотность ρ_2 газа после расширения.
2. Определить показатель адиабаты для смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 8$ г и водород массой $m_2 = 2$ г.
3. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, получает за каждый цикл от нагревателя количество теплоты $\Delta Q_1 = 2,51$ кДж. Температура нагревателя $T_1 = 400$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Найти работу, совершаемую машиной за один цикл, и количество теплоты, отдаваемое холодильнику за один цикл.

Вариант 9

1. В замкнутом сосуде объемом $V = 1 \text{ м}^3$ находится кислород массой $m_1 = 1,6 \text{ кг}$ и водяной пар массой $m_2 = 0,9 \text{ кг}$. Найти давление в сосуде при температуре $T = 773 \text{ К}$.
2. Найти среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$, среднюю кинетическую энергию поступательного движения $\langle E_{\text{к}} \rangle$ и полную среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ молекулы при давлении $p = 0,1 \text{ МПа}$ для: 1) гелия и 2) азота.
3. При изотермическом расширении от $V_1 = 2 \text{ м}^3$ газа его давление меняется от $p_1 = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ до $p_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Найти совершаемую при этом работу.

Вариант 10

1. Смесь азота и водорода содержится в сосуде объемом $V = 20 \text{ л}$ под давлением $p = 1,5 \text{ МПа}$ при температуре $t = 17^\circ\text{С}$. Определить массу каждого газа, входящего в состав смеси. Масса смеси $m = 200 \text{ г}$.
2. В баллоне содержится водород массой $m = 10 \text{ г}$ при температуре $T = 280 \text{ К}$. Определить кинетическую энергию W поступательного движения всех молекул и внутреннюю энергию U газа.
3. При изотермическом расширении водорода массой $m = 1 \text{ г}$, имеющего температуру $T = 280 \text{ К}$, объем газа увеличивается в 3 раза. Определить: 1) работу расширения газа; 2) количество теплоты ΔQ , получаемое газом; 3) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Вариант 11

1. В сосуде объемом $V_1 = 8 \text{ л}$ находится газ под давлением $p_1 = 150 \text{ кПа}$. В сосуде объемом $V_2 = 6 \text{ л}$ находится тот же газ под давлением $p_2 = 0,1 \text{ МПа}$. Температура в обоих сосудах одинакова. Под каким давлением будет находиться газ, если соединить оба сосуда трубкой?
2. Определить удельные теплоемкости c_p и c_V для газа, если молярная масса этого газа $\mu = 30 \text{ кг/кмоль}$ и показатель адиабаты $\gamma = 1,4$.
3. Идеальная тепловая машина 80% теплоты, получаемой от нагревателя, передает холодильнику. Количество теплоты, получаемое от нагревателя за один цикл, $\Delta Q = 0,625 \text{ кДж}$. Найти: 1) КПД цикла; 2) работу, совершаемую при полном цикле.

Вариант 12

1. Два сосуда, содержащие одинаковые массы одного и того же газа, находятся соответственно под давлениями $p_1 = 4 \cdot 10^3 \text{ Па}$ и $p_2 = 6 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Какое установится давление после соединения этих сосудов трубкой? Температура поддерживается постоянной.
2. Найти среднюю длину свободного пробега молекул водорода при давлении $p = 0,13 \text{ Па}$ и температуре $t = -173^\circ\text{С}$. Эффективный диаметр молекулы водорода $d = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.
3. Кислород нагрели при неизменном давлении $p = 80 \text{ кПа}$. Его объем при этом увеличился от $V_1 = 1 \text{ м}^3$ до $V_2 = 3 \text{ м}^3$. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) работу A , совершаемую газом; 3) количество теплоты ΔQ , сообщенное газу.

Вариант 13

1. В сосуде находится 14 г азота и 9 г водорода при температуре $t = 20^\circ\text{C}$ и давлении $p = 0,1$ МПа. Найти плотность смеси.
2. Чему равна энергия теплового движения молекул двухатомного газа, заключенного в сосуд объемом $V = 2$ л и находящегося под давлением $p = 15$ кПа?
3. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя $T = 470$ К, температура холодильника $T_2 = 280$ К. При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 100$ Дж. Определить термический КПД цикла, а также количество теплоты ΔQ_2 , которое газ отдает холодильнику при изотермическом сжатии.

Вариант 14

1. Чему равна энергия теплового движения 20 г кислорода при $t = 10^\circ\text{C}$? Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения и какая часть — на долю вращательного?
2. Найти удельную теплоемкость при постоянном давлении газовой смеси, состоящей из трех киломолей аргона и двух киломолей азота.
3. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя в 4 раза выше температуры T_2 холодильника. Какую долю w количества теплоты, получаемого за один цикл от нагревателя, газ отдает холодильнику?

Вариант 15

1. Найти кинетическую энергию теплового движения молекул, находящихся в 1 г воздуха при температуре $t = 15^\circ\text{C}$. Воздух считать однородным газом, молярная масса которого $\mu = 0,29$ кг/моль.
2. Кинетическая энергия поступательного движения молекул азота, находящегося в баллоне при давлении $p = 2,5 \cdot 10^5$ Па, равна $W_k = 5$ кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 2 \cdot 10^3$ м/с. Найти массу азота и объем, который он занимает.
3. Идеальный многоатомный газ совершает цикл из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в 2 раза больше наименьшего, а наибольший объем в 4 раза больше наименьшего. Определить термический КПД цикла.

Вариант 16

1. Чему равна энергия вращательного движения молекул, содержащихся в 1 кг азота при $t = 7^\circ\text{C}$?
2. Какое число молекул двухатомного газа занимает объем $V_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ м³ при давлении $p = 5,32$ кПа и температуре $t = 27^\circ\text{C}$? Чему равна энергия теплового движения этих молекул?
3. Смесь состоит из аргона и азота равных объемов. Определить показатель адиабаты этой смеси.

Вариант 17

1. Чему равна энергия теплового движения молекул двухатомного газа, заключенного в сосуд объемом $V = 2$ л и находящегося под давлением $p = 150$ кПа?
2. Найти среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода при давлении $p = 0,2$ Па и температуре $t = -100^\circ\text{C}$. Эффективный размер молекулы кислорода $d = 5,2 \cdot 10^{-10}$ м.

3. Водяной пар расширяется при постоянном давлении. Определить работу A расширения, если пару передано количество теплоты $\Delta Q = 4$ кДж.

Вариант 18

1. Кинетическая энергия поступательного движения молекул аргона, находящегося в баллоне объемом $V = 10$ л, равна $W_k = 3$ кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 1 \cdot 10^3$ м/с. Найти количество молей аргона и температуру газа.
2. Газ массой $m = 12$ г занимает объем $V = 8$ л при температуре $t = 27^\circ\text{C}$. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равной $\rho = 0,8$ кг/м³. До какой температуры нагрели газ?
3. В цилиндре под поршнем находится гелий массой $m = 0,1$ кг, занимающий объем $V_1 = 1,2$ м³ при температуре $T = 560$ К. В результате подвода теплоты газ расширился и занял объем $V_2 = 4,2$ м³, температура газа не изменилась. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную газом работу A и количество теплоты ΔQ , сообщенное газу.

Вариант 19

1. Двухатомный газ массой $m = 1$ кг находится под давлением $p = 80$ кПа и имеет плотность $\rho = 4$ кг/м³. Найти энергию теплового движения молекул газа при этих условиях.
2. Удельная теплоемкость при постоянном объеме газовой смеси, состоящей из одного киломоля кислорода и нескольких киломолей аргона, равна $c_V = 430$ Дж/кг · К. Какая масса аргона находится в газовой смеси?
3. Водород массой $m = 10$ г нагрели на $\Delta T = 200$ К, причем было передано количество теплоты $\Delta Q = 40$ кДж. Найти изменение ΔU внутренней энергии водорода и совершенную им работу A .

Вариант 20

1. Какое число молекул двухатомного газа занимает объем $V = 10^{-5}$ м³ при давлении $p = 5,32$ кПа и температуре $t = 27^\circ\text{C}$? Какой энергией теплового движения обладают эти молекулы?
2. В сосуде находится 14 г азота и 9 г водорода при температуре $t = 10^\circ\text{C}$ и давлении $p = 1$ МПа. Найти молярную массу смеси и занимаемый ею объем.
3. Углекислый газ, занимавший объем $V_1 = 10$ л при давлении $p = 0,2$ МПа, изотермически расширился до объема $V_2 = 28$ л. Определить работу расширения газа.

Вариант 21

1. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ вращательного движения молекулы кислорода при температуре $T = 300$ К и кинетическую энергию W вращательного движения молекул, содержащихся в 8 г кислорода.
2. Во сколько раз теплоемкость гремучего газа больше теплоемкости водяных паров, получившихся при его сгорании? Объем считать постоянным.
3. При изотермическом ($T = 300$ К) расширении кислорода в количестве $\nu = 1$ моль газ получил количество теплоты $\Delta Q = 2$ кДж. Во сколько раз увеличился объем газа?

Вариант 22

1. Найти удельную теплоемкость при постоянном давлении c_p газовой смеси, состоящей из трех киломолей аргона и двух киломолей азота.
2. В баллоне объемом $V = 25$ л находится водород при температуре $T = 290$ К. После того как изотермически часть водорода была израсходована, давление в баллоне понизилось на $\Delta p = 0,4$ МПа. Определить массу израсходованного водорода.
3. Совершая замкнутый цикл, газ получил от нагревателя количество теплоты $\Delta Q = 4$ кДж. Какую работу A совершил газ в результате протекания всего цикла, если термический КПД цикла $\eta = 0,1$?

Вариант 23

1. Кинетическая энергия поступательного движения молекул аргона, находящегося в баллоне объемом $V = 5 \cdot 10^{-4}$ м³, равна 0,5 кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 2 \cdot 10^3$ м/с. Найти массу аргона и давление в баллоне.
2. Во сколько раз теплоемкость гремучего газа больше теплоемкости водяных паров, полученных при его сгорании? Давление считать постоянным.
3. Азот нагревался при постоянном давлении, причем ему было передано количество теплоты $\Delta Q = 21$ кДж. Определить работу A и изменение внутренней энергии газа ΔU .

Вариант 24

1. В баллоне объемом $V = 0,02$ м³ находится азот массой $m = 2,5$ г. Средняя квадратичная скорость его молекул $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 2 \cdot 10^3$ м/с. Найти внутреннюю энергию азота и давление в баллоне.
2. В сосудах объемами $V_1 = 20$ л и $V_2 = 44$ л содержится газ. Давление в первом $p_1 = 2,4$ МПа, во втором $p_2 = 1,6$ МПа. Определить общее давление после соединения сосудов. Температура газов остается постоянной.
3. В цилиндре под поршнем находится азот массой $m = 0,6$ кг, занимающий объем $V_1 = 1,3$ м³ при температуре $T = 560$ К. В результате подвода теплоты газ расширился и занял объем $V_2 = 4,2$ м³, причем температура осталась неизменной. Найти изменение ΔU внутренней энергии, совершенную работу A , количество теплоты ΔQ , сообщенное газу.

Вариант 25

1. Чему равна кинетическая энергия молекул двухатомного газа, заключенного в сосуд объемом $V = 2$ л и находящегося под давлением $p = 1,5 \cdot 10^5$ Па?
2. В сосуде объемом $V_1 = 3$ л находится газ под давлением $p_1 = 0,2$ МПа. В сосуде объемом $V_2 = 4$ л находится тот же газ под давлением $p_2 = 0,1$ МПа. Температуру считать постоянной. Под каким давлением будет находиться газ, если соединить оба сосуда трубкой?
3. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура T_1 нагревателя в 3 раза выше, чем температура T_2 холодильника. Нагреватель за один цикл передал газу количество теплоты $\Delta Q = 42$ кДж. Какую работу A совершил газ?

Вариант 26

1. В баллоне объемом $V = 100$ л находится $\nu = 15$ моль кислорода при температуре $T = 290$ К. После того как изотермически часть кислорода была израсходована, давление в баллоне стало $p_2 = 120$ кПа. Определить массу израсходованного кислорода.
2. Определить удельные теплоемкости c_V и c_p для смеси газов, состоящей из 85% кислорода и 15% углекислого газа (по массе).
3. Масса m идеального газа, находящегося при температуре T , охлаждается изохорически, так что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Молярная масса газа μ . Определить совершенную газом работу.

Вариант 27

1. В цилиндре с площадью основания $S = 100$ см² находится воздух. Поршень расположен на высоте $h_1 = 50$ см от дна цилиндра. На поршень кладут груз массой $m = 50$ кг, при этом он опускается на $\Delta h = 10$ см. Найти температуру T_2 воздуха после опускания поршня, если до его опускания давление было $p_1 = 101$ кПа, а температура $t = 12$ °С.
2. Определить показатель адиабаты для смеси газов, содержащей азот массой $m_1 = 14$ г и водород массой $m_2 = 2$ г.
3. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя $T_1 = 470$ К, температура холодильника $T_2 = 280$ К. При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 100$ Дж. Определить термический КПД цикла, а также количество теплоты ΔQ , которое газ отдает холодильнику при изотермическом сжатии.

Вариант 28

1. Найти среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ молекул газа, плотность которого $\rho = 8,2 \cdot 10^{-5}$ г/см³ при давлении $p = 100$ кПа и температуре $T = 290$ К. Определить молярную массу газа.
2. Смесь газов состоит из аргона и азота, взятых при одинаковых условиях и в равных объемах. Определить показатель адиабаты γ такой смеси.
3. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 400$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Количество теплоты, получаемое за один цикл от нагревателя, $\Delta Q_1 = 2,5$ кДж. Определить работу A , совершаемую машиной за один цикл, и количество теплоты, отдаваемое холодильнику за один цикл.

Вариант 29

1. Внутренняя энергия азота, находящегося в баллоне объемом $V = 0,02$ м³, равна 15 кДж, средняя квадратичная скорость его молекул $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 2 \cdot 10^3$ м/с. Найти массу m и давление p азота в баллоне.
2. Определить количество теплоты, сообщенное газу, если в процессе изохорного нагревания кислорода объемом $V = 20$ л его давление изменилось на $\Delta p = 100$ кПа.
3. Во сколько раз необходимо увеличить объем идеального газа при изотермическом расширении, если энтропия пяти молей его увеличилась на 57,6 Дж/К?

Вариант 30

1. Определить давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если его плотность $\rho = 0,01 \text{ кг/м}^3$, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 480 \text{ м/с}$.
2. Из баллона с водородом объемом $V = 20 \text{ л}$ вытекает газ. При температуре $T_1 = 280 \text{ К}$ манометр показывает давление $p_1 = 5 \text{ МПа}$. Через некоторое время манометр показал то же давление, а температура газа оказалось равной $T_2 = 290 \text{ К}$. Определить массу газа, вытекшего из баллона за это время.
3. Углекислый газ, находящийся под давлением $p_1 = 100 \text{ кПа}$ при температуре $T_1 = 290 \text{ К}$, был адиабатически сжат до давления $p_2 = 200 \text{ кПа}$. Чему равна температура газа после сжатия?

VIII.3. Типовой расчет по теме «Электростатика»**Вариант 1**

1. Расстояние между двумя длинными тонкими проводниками, расположенными параллельно друг другу, равно 16 см . Проводники заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $\tau = 150 \text{ мкКл/м}$. Чему равна напряженность E поля в точке, удаленной на расстояние $a = 10 \text{ см}$ как от первого, так и от второго проводника?
2. Шарик массой $m = 1 \text{ г}$ и зарядом $Q = 10 \text{ нКл}$ движется по прямой, соединяющей точку A , потенциал которой равен 600 В , с точкой B , потенциал которой равен нулю. Чему равна скорость шарика v_1 в точке A , если в точке B она стала равной $v_2 = 0,2 \text{ м/с}$?
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 2

1. Четыре одинаковые частицы с зарядом $Q = 1 \text{ нКл}$ и массой $m = 10^{-20} \text{ кг}$ каждая помещены в вершинах квадрата со стороной $a = 5 \text{ см}$. Они начинают двигаться под действием сил взаимного отталкивания. Определить предельную скорость v каждой частицы.
2. Определить потенциал точки поля, находящейся на расстоянии $r = 10 \text{ см}$ от центра равномерно заряженного шара радиусом $R = 20 \text{ см}$. Заряд шара $Q = 0,1 \text{ мкКл}$. Диэлектрическая проницаемость внутри и вне шара равна единице.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 3

1. Тонкое полукольцо радиусом $R = 10 \text{ см}$ несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau = 1 \text{ мкКл/м}$. В центре кривизны находится заряд $Q = 20 \text{ нКл}$. Определить силу взаимодействия точечного заряда и заряженного полукольца.
2. На расстоянии $R_1 = 4 \text{ см}$ от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд $Q = 6,7 \text{ нКл}$. Под действием сил поля заряд перемещается по силовой линии на расстояние $R_2 = 2 \text{ см}$, при этом совершается работа $A = 5 \text{ мкДж}$. Найти линейную плотность заряда нити.

3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 4

1. Прямая бесконечная тонкая нить несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau_1 = 1$ мкКл/м. В плоскости, содержащей нить, перпендикулярно нити находится тонкий стержень длиной L . Ближайший к нити конец стержня находится на расстоянии L от нее. Определить силу F , действующую на стержень, если он заряжен с линейной плотностью $\tau_2 = 0,1$ мкКл/м.
2. Пылинка, заряд которой $Q = 2,22 \cdot 10^{-10}$ Кл, находится в равновесии в поле горизонтального плоского конденсатора. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между пластинами конденсатора, если масса пылинки $m = 0,01$ г и расстояние между пластинами $d = 5$ см.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 5

1. Медный шар диаметром $d = 1$ см помещен в масло ($\varepsilon = 2$). Плотность масла $\rho_1 = 800$ кг/м³. Чему равен заряд Q шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле. Электрическое поле направлено вертикально вверх и его напряженность равна $E = 3,6 \cdot 10^6$ В/м. Плотность меди $\rho_2 = 8,6 \cdot 10^3$ кг/м³.
2. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл/м. Какую скорость v получит электрон под действием поля, приблизившись к нити по силовой линии с расстояния $r_1 = 1$ см до расстояния $r_2 = 0,5$ см от нити? Начальная скорость электрона равна нулю.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 6

1. Кольцо из проволоки радиусом $R = 10$ см заряжено отрицательно и несет заряд $Q = -5$ нКл. 1) Найти напряженность E электрического поля на оси кольца на расстоянии L от его плоскости для значений $L = 0,5$ см, 8 см, 10 см, 15 см. Построить график $E = E(L)$. 2) На каком расстоянии L_0 от центра кольца напряженность электрического поля будет максимальной?
2. Электрическое поле образовано двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии $d = 2$ см друг от друга. Разность потенциалов между ними $U = 120$ В. Какую скорость v получит электрон под действием поля, пройдя по силовой линии расстояние $\Delta r = 3$ мм?
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 7

1. С какой силой f (на единицу длины) отталкиваются две одноименно заряженные параллельные нити с одинаковой линейной плотностью заряда $\tau = 3$ мкКл/м, находящиеся в вакууме на расстоянии $r_1 = 2$ см друг от друга? Какую работу A (на единицу длины) нужно совершить, чтобы сблизить эти нити до расстояния $r_2 = 1$ см?

- Три конденсатора емкостями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ соединены последовательно и присоединены к источнику напряжения с разностью потенциалов $U = 220$ В. Чему равны заряды Q_1 , Q_2 , Q_3 и напряжения U_1 , U_2 , U_3 на каждом конденсаторе?
- Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 8

- Тонкий стержень длиной $L = 30$ см несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. На расстоянии $r = 20$ см от одного из концов стержня (рис. 113, а) находится заряд $Q = 10$ нКл. Определить модуль силы F взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем.
- Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 100$ см², расстояние между ними $d = 1$ мм. Какая разность потенциалов U была приложена к пластинам конденсатора, если известно, что при разряде конденсатора выделилось $\Delta Q = 4,19$ мДж теплоты?
- Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 9

- Тонкий прямой стержень длиной $l = 15$ см равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 0,1$ мКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 10$ см от ближайшего конца находится точечный заряд $Q = 10$ нКл. Определить силу F взаимодействия стержня и заряда.
- Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 100$ см², расстояние между ними $d = 5$ мм. К пластинам приложена разность потенциалов $U = 300$ В. После отключения конденсатора от источника напряжения пространство между пластинами заполняется диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3$. 1) Какой станет разность потенциалов U_1 между пластинами после заполнения? 2) Чему равна емкость C конденсатора до и после заполнения? 3) Чему равна поверхностная плотность заряда σ на пластинах до и после заполнения?
- Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 10

- В вершинах квадрата со стороной $a = 2$ см расположены два положительных и два отрицательных заряда; абсолютное значение каждого из них $Q = 1$ нКл. Определить напряженность E электри-

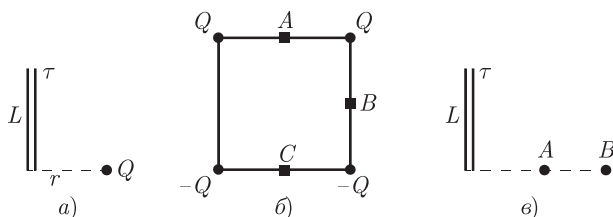


Рис. 113

ческого поля и потенциал в точках A , B , C (в серединах боковых сторон, рис. 113, б).

- Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $d_1 = 2$ см, заряжен до потенциала $U = 3000$ В. Какой будет напряженность E поля конденсатора, если, не отключая источник напряжения, пластины раздвинуть до расстояния $d_2 = 5$ см? Вычислить энергии конденсатора W_1 , W_2 до и после раздвижения. Площадь пластин $S = 100$ см².
- Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 11

- Тонкая прямая нить длиной $L = 5$ см несет равномерно распределенный по длине нити заряд с линейной плотностью $\tau = 0,01$ мкКл/м. Определить разность потенциалов двух точек A и B поля, удаленных от нити на расстояния $a = 2$ см и $b = 4$ см соответственно (рис. 113, в).
- Электрон летит от одной пластины плоского конденсатора до другой. Разность потенциалов между пластинами $U = 3$ кВ, расстояние между пластинами $d = 5$ мм, диэлектрическая проницаемость среды равна единице. Найти: 1) силу F , действующую на электрон; 2) ускорение a электрона; 3) скорость v , с которой электрон приходит к другой пластине; 4) поверхностную плотность заряда σ на пластинах конденсатора.
- Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 12

- Тонкий стержень длиной $L = 10$ см равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 0,1$ мкКл/м. Определить напряженность E электрического поля в точке A , лежащей напротив середины стержня на расстоянии $a = 5$ см от него.
- Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами в котором $d = 1$ см, подключен к источнику тока с напряжением $U = 300$ В. В пространстве между пластинами помещается плоскопараллельная пластинка стекла ($\varepsilon_1 = 6$) толщиной $d_1 = 0,5$ см и плоскопараллельная пластинка парафина ($\varepsilon_2 = 2$) толщиной $d_2 = 0,5$ см. Найти: 1) напряженности E_1 , E_2 электрического поля в каждом слое; 2) падения потенциалов U_1 , U_2 в каждом слое; 3) емкость конденсатора C , если площадь пластин $S = 100$ см²; 4) поверхностную плотность σ заряда на пластинах.
- Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 13

- Точечный заряд $Q_1 = 20$ нКл помещен в центре равномерно заряженного по объему шара радиусом $R = 15$ см, заряд которого $Q_2 = -20$ нКл. Определить напряженность поля E в точках A и B , удаленных от центра шара на расстояния $r_A = 20$ см и $r_B = 10$ см.
- Между пластинами плоского горизонтального конденсатора, находящимися на расстоянии $d_1 = 1$ см друг от друга, действует

разность потенциалов $U = 100$ В. На нижней пластине лежит плоскопараллельная пластинка кристаллического бромистого таллия ($\varepsilon = 173$) толщиной $d_2 = 9,5$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения пластинку кристалла вынимают. Какой будет после этого разность потенциалов U_1 между пластинами конденсатора?

3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 14

1. Два заряженных шарика, подвешенные на нитях одинаковой длины, опускают в керосин. Какой должна быть плотность ρ материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же? Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$, плотность керосина $\rho_1 = 800$ кг/м³.
2. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобретает скорость $v = 10^6$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 5,3$ мм. Найти: 1) разность потенциалов U между пластинами; 2) напряженность E электрического поля внутри конденсатора; 3) поверхностную плотность σ заряда на пластинах.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 15

1. Диск радиусом $R = 4$ см заряжен с поверхностной плотностью $\sigma = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м². Чему равна напряженность поля, созданная заряженным диском в точке, находящейся на перпендикуляре, восстановленном из центра диска, на расстоянии $d = 3$ см от него?
2. Электрон, находящийся в однородном электрическом поле, получает ускорение $a = 10^{12}$ м/с². Найти: 1) напряженность электрического поля E ; 2) скорость v , которую получил электрон за время $t = 10^{-6}$ с своего движения, если начальная скорость равна нулю; 3) работу A сил электрического поля за это время; 4) разность потенциалов $\Delta\varphi$, пройденную при этом электроном.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 16

1. В плоском конденсаторе, помещенном в вакууме, взвешена заряженная капелька ртути. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см, приложенная разность потенциалов $U_1 = 1$ кВ. Внезапно разность потенциалов падает до $U_2 = 995$ В. Через какое время капелька достигнет нижней пластины, если она первоначально находилась в центре конденсатора?
2. Найти силу F , действующую на заряд $Q = 6,7$ нКл, если заряд помещен: 1) на расстоянии $r = 2$ см от заряженной нити с линейной плотностью заряда $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м; 2) в поле заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 2 \cdot 10^{-5}$ Кл/м²; 3) на расстоянии $r = 2$ см от центра равномерно заряженного шара радиусом $R = 4$ см и объемной плотностью заряда $\rho = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл/м³. Диэлектрическая проницаемость среды во всех случаях равна $\varepsilon = 6$.

3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 17

1. Два параллельных тонких кольца радиусом $R = 2$ см расположены на расстоянии $d = 4$ см друг от друга на одной оси. Найти работу A электрических сил при перемещении заряда $Q = 1$ нКл из центра первого кольца в центр второго, если на первом кольце равномерно распределен заряд $Q_1 = 2$ нКл, а на втором — заряд $Q_2 = 1$ нКл.
2. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 60$ В, влетает в плоский горизонтальный конденсатор под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонтали на равном расстоянии от каждой из пластин. Расстояние между пластинами $d = 4,6$ см, напряженность электрического поля в конденсаторе $E = 100$ В/м и направлена вертикально вверх. 1) Через какое время t_1 после того, как электрон влетел в конденсатор, он попадет на одну из пластин? 2) На каком расстоянии L от начала конденсатора электрон попадет на эту пластину?
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 18

1. Поле создано бесконечной вертикальной плоскостью с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 4$ нКл/см², к плоскости подвешен на нити шарик массой $m = 1$ г и зарядом $Q = 1$ нКл. Определить угол α , образованный нитью и плоскостью.
2. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Энергия конденсатора $W = 0,2$ мкДж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую надо было совершить против сил электрического поля, чтобы вынуть диэлектрик, равна $A = 0,7$ мкДж. Найти диэлектрическую проницаемость ϵ диэлектрика.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 19

1. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $Q = 0,1$ мкКл. На перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его середины, находится точечный заряд $Q_1 = 10$ нКл. Определить силу F , действующую на точечный заряд Q_1 со стороны заряженного кольца, если он удален от центра кольца на расстояние $L = 20$ см.
2. Два последовательно соединенных конденсатора емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 4$ мкФ подсоединены к источнику постоянного напряжения $U = 120$ В. Определить напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 20

1. Расстояние между двумя положительными зарядами $Q_1 = 180$ нКл и $Q_2 = 720$ нКл равно $l = 60$ см. Определить точку на прямой,

- проходящей через заряды, в которой нужно поместить третий отрицательный заряд Q_3 так, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Устойчивым или неустойчивым будет это равновесие?
2. Два одинаковых плоских конденсатора соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов $U = 150$ В. Определить разность потенциалов U_1 на конденсаторах, если после отключения от источника тока у одного конденсатора уменьшили расстояние между пластинами в 2 раза.
 3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 21

1. Диск радиусом $R = 4$ см заряжен с поверхностной плотностью $\sigma = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м². Определить работу A сил поля по перемещению заряда $Q = -1$ нКл из точки 1, находящейся на перпендикуляре, восстановленном из центра диска, на расстоянии $a = 5$ см от него, в точку 2, совпадающую с центром диска.
2. Обкладки конденсатора с неизвестной емкостью C_1 , заряженного до напряжения $U_1 = 80$ В, соединяют с обкладками конденсатора емкостью $C_2 = 60$ мкФ, заряженного до $U_2 = 16$ В. Определить емкость C_1 , если напряжение на конденсаторах после соединения $U = 20$ В. Конденсаторы соединяются обкладками, имеющими: 1) одноименные заряды; 2) разноименные заряды.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 22

1. Две длинные разноименно заряженные нити расположены на расстоянии $r = 10$ см друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7}$ Кл/см. Найти величину E и направление напряженности результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $L = 20$ см от каждой нити.
2. Шар, погруженный в масло ($\varepsilon = 4$), имеет потенциал $U = 4500$ В и поверхностную плотность заряда $\sigma = 10$ мкКл/м². Найти для этого шара: 1) радиус R ; 2) заряд Q ; 3) емкость C ; 4) электростатическую энергию W .
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 23

1. Три одинаковых заряда $Q = 1$ нКл помещены в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 10$ см. Они начинают двигаться под действием сил взаимного отталкивания. Определить их предельную скорость v , если масса каждой частицы $m = 10^{-20}$ кг.
2. Определить емкость C плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого $d = 2$ мм, сечение пластин $S = 50$ см², если половина пространства между обкладками конденсатора, примыкающая к одной из пластин, заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 2$, а другая половина заполнена воздухом ($\varepsilon_2 = 1$).
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 24

1. С какой силой F отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно длинные нити с одинаковой линейной плотностью заряда $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-8}$ Кл/см, находящиеся на расстоянии $r = 2$ см друг от друга и расположенные перпендикулярно друг другу?
2. Плоский конденсатор с площадью пластин $S = 100$ см² и расстоянием между ними $d_1 = 1$ мм заряжен до напряжения $U = 100$ В. Затем пластины раздвигаются до расстояния $d_2 = 25$ мм. Найти энергии конденсатора W_1 , W_2 до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: 1) не отключается; 2) отключается.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 25

1. Положительный заряд $Q = 3$ нКл равномерно распределен по тонкому проволочному кольцу радиусом $R = 10$ см. Определить потенциал φ в точке C , лежащей на оси кольца на расстоянии $h = 15$ см от его центра.
2. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого $d_1 = 2$ см, заряжен до потенциала $U = 3$ кВ. Какой будет напряженность поля конденсатора E , если, отключив источник питания, раздвинуть затем пластины до расстояния $d_2 = 5$ см?
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 26

1. Мыльный пузырь с зарядом $Q = 0,222$ нКл находится в равновесии в поле горизонтального плоского конденсатора. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между пластинами конденсатора, если масса пузыря $m = 0,01$ г, а расстояние между пластинами $d = 5$ см.
2. Коаксиальный кабель состоит из центральной жилы и concentрической оболочки, между которыми находится изоляция. Найти емкость единицы длины такого электрического кабеля (в микрофарадах на метр), если радиус жилы $r = 1,3$ см, радиус оболочки $R = 3$ см, диэлектрическая проницаемость изоляции $\varepsilon = 3,2$.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 27

1. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути находится в равновесии при напряженности электрического поля $E = 600$ В/м. Заряд капли равен $Q = 8 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найти радиус капли R .
2. Электрон влетает в горизонтальный плоский конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v = 10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе $E = 100$ В/см, длина конденсатора $L = 5$ см. Найти величину скорости электрона \vec{v}_k при вылете из конденсатора.
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 28

1. Три одинаково заряженных шарика с зарядами $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1,05 \cdot 10^{-5}$ Кл соединены непроводящими нитями равной длины $L = 1$ см. Определить силу натяжения нитей T . Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon = 1,5$.
2. На какое минимальное расстояние r могут сблизиться два электрона, движущиеся навстречу друг другу с относительной скоростью $v = 10^6$ м/с?
3. Решить задачу 3 из варианта 29. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.1.

Вариант 29

1. Четыре одинаковых заряда величиной $Q = 3,3$ нКл каждый расположены в углах правильного тетраэдра на одинаковых расстояниях $r = 5 \cdot 10^{-2}$ м друг от друга. Какую силу и в каком направлении надо приложить к каждому заряду, чтобы эта система находилась в равновесии?
2. Заряженный шар имеет поверхностную плотность заряда $\sigma = 9 \cdot 10^{-12}$ Кл/м². Найти напряженность поля E в точке, отстоящей от поверхности шара на расстоянии, равном его диаметру, если шар находится в воде.
3. Используя ЭВМ, вычислить напряженность E электростатического поля на поверхности шара радиусом R , заряженного с объемной плотностью заряда $\rho = \rho_0 \exp(-r^2/R^2)$. Конкретные числовые значения для R и ρ_0 приведены в табл. VIII.1.

Таблица VIII.1. Числовые данные для задачи 3

Номер варианта	ρ_0 , нКл/м ³	R , м	Номер варианта	ρ_0 , нКл/м ³	R , м
1	1,5	0,1	16	8,1	2,7
2	0,3	0,2	17	7,0	3,5
3	2,5	0,3	18	8,5	5,5
4	3,0	0,4	19	2,7	7,5
5	0,5	0,5	20	1,5	8,0
6	2,0	0,6	21	25	1,9
7	4,5	0,65	22	35	2,1
8	0,15	0,7	23	22	1,7
9	6,5	0,75	24	28	1,6
10	0,7	0,8	25	27	1,4
11	8,5	0,85	26	23	1,2
12	1,25	0,9	27	24	1,5
13	2,25	1,5	28	29	1,8
14	6,6	3,0	29	30	2,0
15	5,0	25			

VIII.4. Типовой расчет по теме «Постоянный ток. Магнитное поле»

Вариант 1

1. Сопротивление R вольфрамовой нити электрической лампочки при температуре $t = 20^\circ\text{C}$ равно $35,8$ Ом. Определить температуру нити лампочки, если при включении в сеть напряжением $U = 120$ В сила тока в ней $I = 0,33$ А.
2. Короткая катушка, содержащая $N = 100$ витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл с угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной линиям индукции поля. Определить мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость сечения катушки составляет угол $\alpha = 70^\circ$ с линиями индукции поля. Площадь катушки $S = 100$ см².
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 2

1. Элемент, ЭДС которого \mathcal{E} и внутреннее сопротивление r , замкнут на внешнее сопротивление R . Наибольшая мощность P во внешней цепи равна 9 Вт. Сила тока I , текущего при этих условиях по цепи, равна 3 А. Найти величины \mathcal{E} и r .
2. Виток диаметром $d = 20$ см может вращаться около вертикальной оси, совпадающей с одним из диаметров витка. Виток установили в плоскости магнитного меридиана и пустили по нему ток силой $I = 10$ А. Найти механический момент M , который нужно приложить к витку, чтобы удержать его в начальном положении. Горизонтальную составляющую B_r магнитной индукции поля Земли принять равной 20 мкТл.
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 3

1. Имеется два одинаковых элемента с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,3$ Ом. Как надо соединить эти элементы (последовательно или параллельно), чтобы получить большую силу тока, если: 1) внешнее сопротивление $R_1 = 0,2$ Ом; 2) внешнее сопротивление $R_2 = 16$ Ом? Вычислить силу тока I_1, I_2 в цепи для каждого из этих случаев.
2. Заряженная частица, обладающая скоростью $v = 2 \cdot 10^6$ м/с, влетела в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,52$ Тл. Найти отношение Q/m заряда частицы к ее массе, если частица в поле описала дугу окружности радиусом $R = 4$ см. По этому отношению определить, какая это частица.
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 4

1. Источник тока, реостат и амперметр включены последовательно. ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 2$ В, внутреннее сопротивление $r = 0,4$ Ом.

Амперметр показывает силу тока $I = 1$ А. С каким КПД работает источник тока?

2. Длинный прямой соленоид из проволоки диаметром $d = 0,5$ мм намотан так, что витки плотно прилегают друг к другу. Какая напряженность H магнитного поля внутри соленоида при силе тока $I = 4$ А? Толщиной изоляции пренебречь, сердечника в соленоиде нет.
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 5

1. Для нагревания 4,5 л воды от температуры $t = 23^\circ\text{C}$ до кипения нагреватель потребляет $W = 0,5$ кВт · ч электрической энергии. Чему равен КПД нагревателя? Удельная теплоемкость воды $c_b = 4190$ Дж/кг · К, $\rho_b = 10^3$ кг/м³.
2. По двум одинаковым круговым виткам радиусом $R = 5$ см, плоскости которых взаимно перпендикулярны, а центры совпадают, текут одинаковые токи $I = 2$ А. Найти индукцию магнитного поля B в центре витков.
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 6

1. Сила тока I в проводнике меняется во времени по закону $I = 3 + 8t^3$, где величина I выражена в амперах, а t — в секундах. 1) Какое количество электричества ΔQ проходит через поперечное сечение проводника за время от $t_1 = 3$ с до $T_2 = 5$ с? 2) При каком постоянном токе I_0 через поперечное сечение проводника за это же время проходит такое же количество электричества?
2. Протон и электрон влетают в однородное магнитное поле. Скорость частиц направлена перпендикулярно линиям индукции поля. Как соотносятся периоды вращения протона и электрона в магнитном поле?
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 7

1. Элемент с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В имеет внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом. Определить падение напряжения U внутри элемента при силе тока в цепи $I = 0,25$ А. Найти внешнее сопротивление R цепи при этих условиях.
2. Расстояние d между двумя длинными параллельными проводами равно 5 см. По проводам в одном направлении текут одинаковые токи силой $I = 30$ А. Найти напряженность H магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 4$ см от одного и $r_2 = 8$ см от другого провода.
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 8

1. Обмотка катушки из медной проволоки при температуре $t_1 = 14^\circ\text{C}$ имеет сопротивление $R_1 = 10$ Ом. После пропускания тока сопротивление обмотки равно $R_2 = 12,2$ Ом. До какой температуры t_2 нагрелась обмотка? Температурный коэффициент сопротивления меди $\alpha_{\text{Cu}} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$.

- Электрон движется со скоростью $v = 10$ Мм/с в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5$ мТл. Вектор скорости направлен перпендикулярно линиям напряженности. Найти силу F , с которой поле действует на электрон, и радиус R окружности, по которой он движется.
- Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 9

- ЭДС генератора $\mathcal{E} = 6$ В. При внешнем сопротивлении, равном $R = 1,1$ Ом, сила тока в цепи равна $I = 3$ А. Найти падение напряжения $U_{\text{внутр}}$ внутри генератора и его сопротивление r
- Протон и α -частица влетают в однородное магнитное поле с одинаковой скоростью. Скорость частиц направлена перпендикулярно линиям индукции поля. Во сколько раз период вращения α -частицы в магнитном поле больше периода вращения протона? (*Примечание:* α -частица — это ядро гелия, ее заряд в 2 раза больше заряда протона, а масса превышает массу протона в 4 раза.)
- Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 10

- Амперметр, сопротивление которого $R_1 = 0,16$ Ом, зашунтирован сопротивлением $R_2 = 0,04$ Ом. Амперметр показывает силу тока $I_1 = 8$ А. Чему равна сила тока I_2 в магистрали?
- Длинный прямой соленоид, намотанный на немагнитный каркас, имеет $N = 1000$ витков и индуктивность $L = 3$ мкГн. Какой магнитный поток Φ создает соленоид при токе силой $I = 1$ А?
- Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 11

- Определить мощность P и сопротивление R нагревателя электрического чайника, если 1 л воды закипает через $\tau = 5$ мин. Напряжение в сети $U = 120$ В. Начальная температура воды $t = 13,5$ °С. Потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4190$ Дж/кг · К, $\rho_{\text{в}} = 10$ кг/м³.
- Магнитная индукция B поля между полюсами двухполюсного генератора равна 0,8 Тл. Ротор имеет $N = 100$ витков площадью $S = 400$ см². Определить частоту ν вращения якоря, если максимальное значение ЭДС индукции $\mathcal{E} = 200$ В.
- Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 12

- ЭДС \mathcal{E} элемента равна 1,6 В, а внутреннее сопротивление r равно 0,5 Ом. Чему равен КПД элемента при силе тока $I = 2,4$ А?
- В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,35$ Тл равномерно вращается рамка с частотой $\nu = 480$ мин⁻¹, содержащая $N = 1500$ витков площадью $S = 50$ см². Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции \mathcal{E}_{max} , возникающую в рамке.

3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 13

1. Элемент с ЭДС $\mathcal{E} = 1,1$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнут на внешнее сопротивление $R = 9$ Ом. Найти: 1) силу тока I в цепи; 2) падение U_1 потенциала во внешней цепи; 3) падение потенциала U_2 внутри элемента; 4) КПД элемента.
2. По двум параллельным проводам длиной $L = 1$ см каждый текут токи одинаковой силы. Расстояние d между проводами равно 1 см. Токи взаимодействуют с силой $F = 1$ мкН. Найти силу тока I в проводах.
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 14

1. Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. ЭДС каждого элемента $\mathcal{E} = 1,2$ В, внутреннее сопротивление $r = 0,2$ Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление $R = 1,5$ Ом. Найти силу тока I во внешней цепи.
2. Из какого числа N витков проволоки состоит однослойная обмотка катушки, индуктивность которой $L = 0,001$ Гн? Диаметр катушки $D = 4$ см, диаметр проволоки $d = 0,6$ мм. Витки плотно прилегают друг к другу.
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 15

1. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В, сила тока короткого замыкания $I_0 = 5$ А. Какую наибольшую мощность P_{\max} может дать батарея во внешней цепи?
2. В магнитное поле, индукция B которого возрастает от 0 до 0,1 Тл, помещена квадратная рамка из медной проволоки. Площадь поперечного сечения проволоки $S_1 = 1$ мм², площадь рамки $S_2 = 25$ см², нормаль к плоскости рамки направлена вдоль линий индукции поля. Какое количество электричества Q пройдет по контуру рамки при включении поля?
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 16

1. Определить среднюю скорость \vec{v} направленного движения электронов вдоль медного проводника при плотности тока $j = 1,1 \cdot 10^6$ А/м², если считать, что на каждый атом меди в металле приходится один свободный электрон. Атомная масса меди $A_{Cu} = 64$. Плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³.
2. По двум параллельным проводам длиной $L = 10$ см каждый текут токи одинаковой силы. Какое расстояние r между проводами, если они взаимодействуют с силой $F = 1$ мкН и по ним течет ток $I = 10$ А?
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

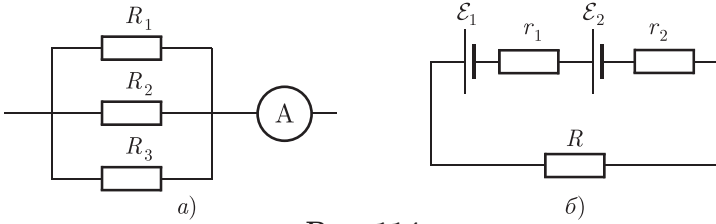


Рис. 114

Вариант 17

1. Элемент с внутренним сопротивлением $r = 40$ Ом и ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В замкнут проводником с сопротивлением $R = 8$ Ом. Какое количество теплоты будет выделяться во внешней части цепи за время $t = 1$ с?
2. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона R_p больше радиуса кривизны траектории электрона R_e ?
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 18

1. На рис. 114, а изображена схема, где $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, а сила тока I_2 , текущего через сопротивление R_2 , равна 0,3 А. Амперметр показывает $I = 0,8$ А. Найти сопротивление R_1 .
2. Прямой провод длиной $L = 10$ см, по которому течет ток силой $I = 20$ А, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Найти угол между направлениями вектора \vec{B} и тока, если на провод действует сила $F = 10$ мН.
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 19

1. Имеется 120-вольтовая лампа мощностью 40 Вт. Какое добавочное сопротивление R надо включить последовательно с лампочкой, чтобы она давала нормальный накал при напряжении в сети $U = 220$ В? Какой длины L надо взять нихромовую проволоку диаметром $d = 0,3$ мм, чтобы получить такое сопротивление? Удельное сопротивление нихрома $\rho = 11 \cdot 10^{-7}$ Ом · м.
2. Вычислить напряженность магнитного поля, создаваемого отрезком AB прямолинейного проводника с током в точке C , расположенной на перпендикуляре к концу этого отрезка на расстоянии $r = 5$ см от него. Сила тока в проводнике $I = 20$ А. Отрезок AB проводника виден из точки C под углом $\beta = 40^\circ$.
3. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 20

1. Два цилиндрических проводника, один из меди, а другой из алюминия, имеют одинаковую длину и одинаковое сопротивление. Во сколько раз медный провод тяжелее алюминиевого?

- Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью $v = 10^6$ м/с. Индукция магнитного поля $B = 0,3$ Тл. Радиус окружности $R = 4$ см. Найти заряд частицы Q , если известно, что ее энергия $E = 12$ кэВ.
- Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 21

- В схеме (рис. 114, б) сопротивление $R = 1,4$ Ом. Внутренние сопротивления элементов равны соответственно $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 1,5$ Ом. Найти КПД батареи.
- Соленоид длиной $l = 50$ см и площадью поперечного сечения $S = 2$ см² имеет индуктивность $L = 0,2$ мкГн. При какой силе тока I объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида равна $w = 1$ мДж/м³?
- Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 22

- Элемент, ЭДС которого $\mathcal{E} = 6$ В, дает максимальную силу тока $I = 3$ А. Найти наибольшее количество теплоты ΔQ , которое может быть выделено во внешнем сопротивлении за время $t = 5$ мин.
- В однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого равна $B = 0,25$ Тл, горизонтально подвешен на двух нитях прямолинейный проводник массой $m = 40$ г и длиной $L = 20$ см. Какой ток I течет по проводнику, если нити отклонились на угол $\alpha = 45^\circ$ от вертикали? Массой нити пренебречь.
- Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 23

- В схеме (рис. 115) сопротивление $R = 1,4$ Ом, G_1 и G_2 — два генератора, ЭДС которых равны соответственно $\mathcal{E}_1 = 1$ В и $\mathcal{E}_2 = 3$ В. Внутренние сопротивления этих генераторов равны соответственно $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 1,5$ Ом. Найти силу тока I в каждом из этих элементов и во всей цепи.
- В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0,1$ Тл, движется проводник длиной $L = 10$ см. Скорость движения проводника равна $v = 15$ м/с и направлена перпендикулярно линиям индукции. Определить индуцированную в проводнике ЭДС.
- Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

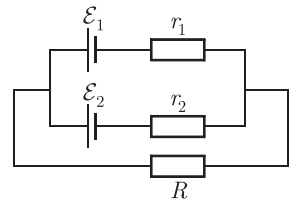


Рис. 115

Вариант 24

- Сколько витков N нихромовой проволоки диаметром $d = 1$ мм надо намотать на фарфоровый цилиндр диаметром $D = 5$ см, чтобы получить сопротивление $R = 40$ Ом? Удельное сопротивление нихрома $\rho = 11 \cdot 10^{-7}$ Ом · м.

1. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 200$ В, движется параллельно длинному проводу на расстоянии $r = 4$ мм от него. Определить силу Лоренца F , действующую на электрон, если по проводнику течет ток $I = 5$ А. Указать направление этой силы.
2. Решить задачу 3 из варианта 25. Конкретные данные для этого варианта следует взять из табл. VIII.2.

Вариант 25

1. Какую долю ЭДС генератора составляет разность потенциалов на его концах, если сопротивление генератора в n раз меньше внешнего сопротивления? Задачу решить для: 1) $n_1 = 0,1$; 2) $n_2 = 1$; 3) $n_3 = 10$.
2. Два прямолинейных провода расположены параллельно на расстоянии $r = 10$ см друг от друга. По проводам текут токи $I_1 = I_2 = 5$ А в противоположных направлениях. Найти величину и направление напряженности поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = r_2 = 20$ см от каждого провода.
3. Сила тока в проводнике сопротивлением R изменяется по закону $I(t) = I_0 e^{-\beta t + \sin(\omega t)}$, где $\beta = 10^{-3} \cdot R \text{ с}^{-1}$. Используя ЭВМ, определить, какое количество теплоты Q выделится в этом проводнике за время, равное одному периоду колебаний тока. Значения I_0 , R , ω для каждого варианта приведены в табл. VIII.2.

Таблица VIII.2. Числовые данные для задачи 3

Номер варианта	I_0 , А	R , Ом	ω , с^{-1}	Номер варианта	I_0 , А	R , Ом	ω , с^{-1}
1	1,0	150	$0,25\pi$	14	3,0	260	$0,08\pi$
2	2,0	30	$0,10\pi$	15	0,4	450	$0,06\pi$
3	1,5	45	$0,01\pi$	16	3,1	175	$0,04\pi$
4	0,5	280	$0,02\pi$	17	2,4	230	$0,07\pi$
5	0,7	400	$0,03\pi$	18	3,2	180	$0,09\pi$
6	2,5	100	$0,04\pi$	19	1,3	145	$0,08\pi$
7	2,1	90	$0,09\pi$	20	3,5	250	$0,01\pi$
8	2,7	110	$0,08\pi$	21	4,0	310	$0,03\pi$
9	0,3	120	$0,06\pi$	22	2,3	430	$0,05\pi$
10	1,1	160	$0,07\pi$	23	3,6	205	$0,04\pi$
11	1,4	140	$0,05\pi$	24	1,9	550	$0,06\pi$
12	2,8	120	$0,02\pi$	25	3,7	600	$0,02\pi$
13	1,8	195	$0,04\pi$				

VIII.5. Типовой расчет по теме «Колебания и волны»

Вариант 1

1. Уравнение колебаний точки имеет вид $x = A \cos \omega(t + t_0)$, где $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$, $t_0 = 0,2 \text{ с}$. Определить период T и начальную фазу колебаний.
2. За время $t = 8$ мин амплитуда затухающих колебаний маятника уменьшилась в $n = 3$ раза. Определить коэффициент затухания β .
3. Плоская звуковая волна имеет период $T = 3 \text{ мс}$, амплитуду $A = 0,2 \text{ мм}$ и длину волны $\lambda = 1,2 \text{ м}$. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние $x = 2 \text{ м}$, найти смещение $\xi(x, t)$ в момент времени $t = 7 \text{ мс}$. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

Вариант 2

1. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях согласно уравнениям $x = A_1 \cos(\omega t)$ и $y = A_2 \sin(\omega t)$, где $A_1 = 2 \text{ см}$, $A_2 = 1 \text{ см}$. Найти уравнение траектории точки.
2. Амплитуда колебаний маятника длиной $L = 1 \text{ м}$ за время $t = 10$ мин уменьшилась в 2 раза. Определить логарифмический декремент затухания колебаний λ .
3. От источника колебаний распространяется плоская волна вдоль прямой линии. Амплитуда колебаний $A = 10 \text{ см}$. Найти смещение точки, удаленной от источника на расстояние $x = 0,75 \lambda$, в момент, когда от начала колебаний прошло время $t = 0,9 T$. Начальную фазу считать равной нулю.

Вариант 3

1. Точка совершает колебания по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4 \text{ см}$. Определить начальную фазу φ_0 , если $x(0) = 2 \text{ см}$ и $\dot{x}(0) < 0$.
2. Гирия массой $m = 500 \text{ г}$ подвешена к стальной пружине жесткостью $k = 20 \text{ Н/м}$ и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания колебаний $\lambda = 0,004$. Найти число N полных колебаний, которые должна совершить гирия, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в $n = 2$ раза. За какое время это произойдет?
3. Две точки находятся на расстоянии $x = 50 \text{ см}$ друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется плоская волна со скоростью $v = 50 \text{ м/с}$. Период колебаний $T = 0,05 \text{ с}$. Найти разность фаз колебаний в этих точках.

Вариант 4

1. Точка совершает колебания по закону $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4 \text{ см}$. Определить начальную фазу φ_0 , если $x(0) = 2 \text{ см}$ и $\dot{x}(0) > 0$.
2. Найти период затухающих колебаний, если период собственных колебаний системы $T_0 = 1 \text{ с}$ и логарифмический декремент затухания колебаний $\lambda = 0,628$.
3. Определить разность фаз колебаний источника волн, находящегося в упругой среде, и точки этой среды, отстоящей на $x = 2 \text{ м}$ от источника. Частота колебаний $\nu = 5 \text{ Гц}$, волны распространяются со скоростью $v = 40 \text{ м/с}$.

Вариант 5

1. Точка совершает колебания по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ_0 , если $x(0) = -2\sqrt{2}$ см и $\dot{x}(0) < 0$.
2. Найти число N полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в $n = 2$ раза. Логарифмический декремент затухания колебаний $\lambda = 0,01$.
3. Найти скорость распространения волн в упругой среде, если разность фаз колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на расстояние $x = 10$ см, равна $\Delta\varphi = \pi/3$. Частота колебаний $\nu = 25$ Гц.

Вариант 6

1. Точка совершает колебания по закону $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ_0 , если $x(0) = 2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) > 0$.
2. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлинится на $L = 9,8$ см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Чему должен быть равен коэффициент затухания β , чтобы колебания прекратились через время $t = 10$ с (считать колебания прекратившимися, когда их амплитуда уменьшается до 1% от начальной величины)?
3. Плоская звуковая волна имеет период $T = 3$ мс, амплитуду $A = 0,2$ мм и длину волны $\lambda = 1,2$ м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние $x = 2$ м, найти скорость $\dot{\xi}$ и ускорение $\ddot{\xi}$ точек среды для момента времени $t = 7$ мс. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

Вариант 7

1. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если вместо медного к пружине подвесить алюминиевый шарик того же радиуса?
2. По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии $S = 30$ см друг от друга. По этой дороге покатали детскую коляску, имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на $L = 2$ см под действием груза массой $m = 1$ кг. С какой скоростью катили коляску, если она от толчков на углублениях, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Масса коляски $M = 10$ кг.
3. Смещение из положения равновесия точки, находящейся на расстоянии $x = 4$ см от источника колебаний, через промежуток времени $t = T/6$ равно половине амплитуды. Найти длину волны.

Вариант 8

1. Точка совершает колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Написать уравнение этих колебаний, считая, что в момент $t = 0$ смещение $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) < 0$. Определить фазу $\varphi = \omega t + \varphi_0$ для момента времени, когда смещение $x = 1$ см и $\dot{x} > 0$.
2. Найти длину волны, если период колебаний $T = 10^{-14}$ с. Скорость распространения колебаний $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

3. Уравнение незатухающих колебаний источника плоской волны дано в виде $\xi(0, t) = 10 \sin(0,5\pi t)$, где величина ξ выражена в сантиметрах, а t — в секундах. Найти уравнение волны $\xi(x, t)$, если скорость распространения колебаний $v = 30$ м/с, а также максимальную скорость частиц воздуха.

Вариант 9

1. Материальная точка массой $m = 10$ г колеблется по закону $x = (0,05 \text{ м}) \sin[(0,6\pi \text{ с}^{-1})t + 0,8]$. Найти максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колеблющейся точки.
2. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 500$ Гц и амплитуду $A = 0,25$ мм, распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найти скорость распространения колебаний.
3. В среде распространяется плоская волна. Точка среды в начале координат колеблется по закону $u(0, t) = (4 \text{ см}) \sin[(600\pi \text{ с}^{-1})t]$. Найти смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии $L = 75$ см от начала координат, в момент времени $t = 0,01$ с. Скорость распространения колебаний $v = 300$ м/с.

Вариант 10

1. Точка совершает колебания по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ_0 , если $x(0) = -2\sqrt{2}$ см и $\dot{x}(0) < 0$.
2. Математический маятник длиной $L = 0,5$ м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на 5 см, а при втором (в ту же сторону) на 4 см. Найти время релаксации, т. е. время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в e раз (e — основание натуральных логарифмов).
3. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 500$ Гц и амплитуду $A = 0,25$ мм, распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найти максимальную скорость частиц воздуха.

Вариант 11

1. Точка совершает колебания по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 5$ см, $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$. Найти ускорение точки в момент времени, когда ее скорость равна 8 см/с.
2. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 1000$ Гц. Определить частоту ν_0 собственных колебаний, если резонансная частота $\nu_{\text{рез}} = 998$ Гц.
3. Электромагнитные волны распространяются в среде со скоростью $v = 2 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в этой среде, если их частота в вакууме $\nu = 1$ МГц?

Вариант 12

1. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки $x_{\text{max}} = 10$ см, наибольшая скорость $v_{\text{max}} = 20$ см/с. Найти циклическую частоту ω колебаний.
2. Найти, на сколько резонансная частота отличается от частоты $\nu_0 = 1$ кГц собственных колебаний системы, характеризуемой коэффициентом затухания $\beta = 400 \text{ с}^{-1}$.
3. Найти разность фаз колебаний двух точек, находящихся на расстояниях $L_1 = 10$ м и $L_2 = 16$ м от начала координат. Период колебаний

$T = 0,04$ с, скорость распространения плоской волны $v = 300$ м/с, начальная фаза равна нулю.

Вариант 13

1. Точка совершает колебания по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ_0 , если $x(0) = -2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) > 0$.
2. Найти логарифмический декремент затухания колебаний системы, для которой резонанс наблюдается при частоте, меньшей собственной частоты $\nu_0 = 10$ кГц на $\Delta\nu = 2$ Гц.
3. Найти разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих друг от друга на расстояние $l = 2$ м, если длина волны $\lambda = 1$ м.

Вариант 14

1. Точка совершает колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Написать уравнение этих колебаний, считая, что в момент $t = 0$ смещение $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) < 0$. Определить фазу $\varphi = \omega t + \varphi_0$ для момента времени, когда скорость $\dot{x} = -6$ см/с и смещение $x < 0$.
2. Период собственных колебаний пружинного маятника $T_0 = 0,55$ с. В вязкой среде период того же маятника стал равным $T = 0,56$ с. Найти резонансную частоту $\nu_{\text{рез}}$ колебаний.
3. Уравнение незатухающих колебаний источника плоской волны дано в виде $\xi(0, t) = (1 \text{ см}) \sin[(2,5\pi \text{ с}^{-1})t]$. Найти скорость точки, находящейся на расстоянии $L = 20$ м от источника колебаний, для момента времени $t = 1$ с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний $v = 100$ м/с.

Вариант 15

1. Точка совершает колебания по закону $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ_0 , если $\dot{x}(0) = -2\sqrt{3}$ см/с и $x(0) > 0$.
2. Пружинный маятник (жесткость пружины $k = 10$ Н/м, масса груза $m = 100$ г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 2 \cdot 10^{-2}$ кг/с. Найти коэффициент затухания β и резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$, если амплитудное значение вынуждающей силы $F_0 = 10$ мН.
3. Найти смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстояние $L = \lambda/12$, для момента $t = T/6$. Амплитуда колебаний $A = 0,05$ м.

Вариант 16

1. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки $x_{\text{max}} = 10$ см, наибольшая скорость $v_{\text{max}} = 20$ см/с. Найти максимальное ускорение a_{max} точки.
2. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления $r = 1$ г/с. Считая затухание малым, определить амплитудное значение вынуждающей силы, если резонансная амплитуда $A_{\text{рез}} = 0,5$ см и частота собственных колебаний $\nu_0 = 10$ Гц.
3. Смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии $x = 4$ см от начала координат, в момент $t = T/6$ положительно

и равно половине амплитудного значения, скорость точки в этот момент положительна. Найти длину бегущей волны, если начальная фаза равна нулю.

Вариант 17

1. Колебания точки происходят по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени смещение $x = 5$ см, скорость точки $\dot{x} = 20$ см/с, а ускорение $\ddot{x} = -80$ см/с². Найти амплитуду A , частоту ν и фазу φ колебаний в этот момент времени.
2. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за $t_1 = 1$ мин уменьшилась в 2 раза. Во сколько раз она уменьшится за $t_2 = 3$ мин?
3. Уравнение незатухающих колебаний источника плоской волны дано в виде $\xi(0, t) = (1 \text{ см}) \cos[(2,5\pi \text{ с}^{-1})t]$. Найти ускорение точки, находящейся на расстоянии $L = 25$ м от источника колебаний, для момента $t = 1,5$ с от момента начала отсчета времени. Скорость распространения колебаний $v = 100$ м/с.

Вариант 18

1. Два гармонических колебания, направленные по одной прямой и имеющие одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз этих колебаний.
2. Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания $\lambda = 0,2$. Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание?
3. Уравнение плоской звуковой волны имеет вид $\xi(x, t) = 60 \cos(1800t - 5,3x)$, где величина ξ выражена в микрометрах, t — в секундах, x — в метрах. Найти отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны среды.

Вариант 19

1. Определить амплитуду A и начальную фазу результирующего колебания, возникающего при сложении двух колебаний одинаковых направлений и периодов: $x_1 = A_1 \sin(\omega t)$ и $x_2 = A_2 \sin[\omega(t + t_0)]$, где $A_1 = A_2 = 1$ см, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$, $t_0 = 0,5$ с. Найти уравнение результирующего колебания.
2. Колебательный контур имеет емкость 1,1 нФ и индуктивность 5 мГн. Логарифмический декремент затухания равен $5 \cdot 10^{-3}$. За какое время вследствие затухания потеряется 99% энергии контура?
3. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 3,0$ МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$. Найти приращение ее длины волны.

Вариант 20

1. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1,5$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = 2$ см. Начальные фазы колебаний $\varphi_{0,1} = \pi/2$ и $\varphi_{0,2} = \pi/3$. Найти амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Написать его уравнение.
2. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2,22$ нФ и катушки, намотанной из медной проволоки длиной

$l = 20$ см и диаметром $d = 0,5$ мм. Найти логарифмический декремент затухания колебаний.

3. Давление в плоской звуковой волне изменяется по закону

$$p = (1,5 \text{ Па}) \sin \pi[(1 \text{ м}^{-1})x - (330 \text{ с}^{-1})t].$$

Найти: 1) амплитуду давления; 2) частоту; 3) длину волны; 4) скорость распространения волны.

Вариант 21

1. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, проходящие по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемые уравнениями $x = A_1 \cos(\omega t)$ и $y = A_2 \cos[\omega(t + t_0)]$, где $A_1 = 4$ см, $A_2 = 8$ см, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$, $t_0 = 1$ с. Найти уравнение траектории точки.
2. Логарифмический декремент затухания математического маятника $\lambda = 0,2$. Найти, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника.
3. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 80$ пФ и катушки, индуктивность которой $L = 2$ мГн. На какую длину волны настроен контур? Сопротивлением контура пренебречь.

Вариант 22

1. Два одинаково направленных колебания с равными частотами имеют амплитуды $A_1 = 20$ см и $A_2 = 50$ см. Второе колебание опережает первое по фазе на $\Delta\varphi = 30^\circ$. Найти амплитуду этих колебаний, а также фазу колебания, полученного от сложения этих колебаний, если начальная фаза первого колебания $\varphi_{0,1} = 0^\circ$.
2. Колебательный контур состоит из индуктивности $L = 10^{-2}$ Гн, емкости $C = 0,405$ мкФ и сопротивления $R = 2$ Ом. Найти, во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за время одного периода.
3. В колебательном контуре индуктивность катушки можно изменять от 50 до 500 Гн, а емкость конденсатора — от 10 до 1000 пФ. Какой диапазон частот можно получить при настройке такого контура?

Вариант 23

1. Маленький шарик подвешен на нити длиной $L = 1$ м к потолку вагона. При какой скорости вагона шарик будет особенно сильно колебаться под действием ударов колес о стыки рельсов? Длина рельса $L = 12,5$ м.
2. Катушка, индуктивность которой $L = 3 \cdot 10^{-5}$ Гн, присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $S = 100 \text{ см}^2$ и расстоянием между ними $d = 0,1$ мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур резонирует на длину волны $\lambda = 750$ м?
3. Емкость переменного конденсатора контура приемника изменяется в пределах от C_1 до $C_2 = 9C_1$. Найти диапазон длин волн контура приемника, если емкости C_1 соответствует длина волны $\lambda = 3$ м.

Вариант 24

1. Период колебаний материальной точки $T = 2,4$ с, амплитуда $A = 5$ см, начальная фаза $\varphi_0 = \pi/2$. Чему равны смещение, скорость и ускорение точки через $t = 0,4$ с после начала колебаний?

2. За время $t = 30$ с система совершила $n_0 = 1200$ свободных незатухающих колебаний. В среде с сопротивлением за то же время система совершила $n = 1110$ колебаний. Найти резонансную частоту колебаний системы.
3. Уравнение изменения силы тока в колебательном контуре имеет вид $I = -(0,02A) \sin[(400\pi c^{-1})t]$. Индуктивность контура $L = 1$ Гн. Найти: 1) максимальную разность потенциалов на обкладках конденсатора; 2) максимальную энергию магнитного поля; 3) максимальную энергию электрического поля.

Вариант 25

1. Найти максимальную скорость и максимальное ускорение колеблющейся точки, если амплитуда колебаний $A = 5$ см, а период $T = 4$ с.
2. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0,2$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 5$ мГн. Чему равно сопротивление контура, если разность потенциалов на обкладках конденсатора за время $t = 10^{-3}$ с уменьшается в $n = 3$ раза?
3. Точка колеблется по закону $x = A \sin(\omega t)$. Через какой минимальный промежуток времени после начала колебаний смещение точки из положения равновесия будет равно половине амплитуды, если период колебаний $T = 24$ с?

Вариант 26

1. Амплитуда гармонического колебания материальной точки $A = 2$ см, полная энергия ее колебаний $E = 3 \cdot 10^{-7}$ Дж. При каком смещении от положения равновесия на эту точку действует сила $F = 2,25 \cdot 10^{-5}$ Н?
2. Уравнение изменения со временем силы тока в колебательном контуре имеет вид $I = -(0,02A) \sin[(400\pi c^{-1})t]$. Индуктивность контура $L = 1$ Гн. Найти период колебаний и емкость контура.
3. Маятник состоит из шарика массой $m = 100$ г, подвешенного на нити длиной $L = 50$ см. Найти период колебаний маятника и энергию, которой он обладает, если наибольший угол его отклонения от положения равновесия $\alpha_{\max} = 15^\circ$.

Вариант 27

1. Индуктивность колебательного контура $L = 0,5$ мГн. Какой должна быть емкость C контура, чтобы он резонировал на длину волны $\lambda = 300$ нм?
2. Длина линии электропередачи $l = 600$ км. Чему равна разность фаз напряжения на этом расстоянии?
3. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 15$ см и испускает импульсы с частотой $n = 40$ кГц. Длительность каждого импульса $\tau = 2$ мкс. Какая наибольшая дальность обнаружения цели? Сколько колебаний содержится в одном импульсе?

VIII.6. Типовой расчет по теме «Оптика. Тепловое излучение. Кванты света»

Вариант 1

1. Светильник в виде равномерно светящегося шара в 500 кд имеет диаметр 50 см. Определить: 1) полный световой поток, излучаемый светильником; 2) его светимость; 3) освещенность, светимость и яркость экрана, на который падает 20% светового потока, излучаемого светильником. Площадь экрана $S = 0,5 \text{ м}^2$, коэффициент отражения 0,7.
2. Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке $T = 2450 \text{ К}$. Отношение ее излучательной способности к излучательной способности абсолютно черного тела при данной температуре равно 0,3. Найти площадь S излучающей поверхности.
3. Лазер излучил в импульсе длительностью $\tau = 0,13 \text{ мс}$ пучок света с энергией $E = 10 \text{ Дж}$. Найти среднее давление такого светового импульса, если его сфокусировать в пятнышко диаметром $d = 10 \text{ мкм}$ на поверхность, перпендикулярную пучку, с коэффициентом отражения 0,5.

Вариант 2

1. Дифракционная решетка длиной $l = 5 \text{ мм}$ может разрешать в первом порядке две спектральные линии ($\lambda_1 = 589,0 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 589,6 \text{ нм}$). Определить, под каким углом в спектре третьего порядка будет наблюдаться свет с длиной волны $\lambda_3 = 600 \text{ нм}$, падающий на решетку нормально.
2. Рассмотрим Землю как теплопроводящий абсолютно черный шар радиусом $R_{\oplus} = 6400 \text{ км}$, удельной теплоемкостью $c = 200 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$, средней плотностью $\rho = 5,5 \text{ кг/см}^3$ и температурой $T = 300 \text{ К}$. Определить время, в течение которого Земля остынет на 0,001 К.
3. Короткий импульс света с энергией $E = 7,5 \text{ Дж}$ в виде узкого почти параллельного пучка падает на зеркальную пластинку с коэффициентом отражения 0,6. Угол падения $\varphi = 30^\circ$. Определить на основе корпускулярных представлений импульс, переданный пластинке.

Вариант 3

1. На тонкую пленку с $n = 1,3$ под углом 45° падает монохроматический свет с $\lambda = 500 \text{ нм}$. При какой минимальной толщине пленки отраженный свет будет: 1) максимально усилен; 2) максимально ослаблен?
2. Равновесная температура тела равна $T_1 = 1000 \text{ К}$, площадь излучения $S = 1 \text{ м}^2$, поглощательная способность 0,5. Выделяемая в теле мощность увеличилась на величину $\Delta P = 10 \text{ кВт}$. Определить новую равновесную температуру T_2 .
3. Фотон с энергией $E = 1 \text{ МэВ}$ рассеялся на свободном покоившемся электроне. Найти кинетическую энергию отдачи электрона T , если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на 25%.

Вариант 4

1. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр ($\lambda_1 = 500$ нм) заменить красным ($\lambda_2 = 650$ нм)?
2. На дифракционную решетку с периодом $d = 20$ мкм под углом $\varphi = 30^\circ$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определить угол дифракции, соответствующий второму главному максимуму.
3. Фотон с длиной волны $\lambda = 6$ пм рассеялся под прямым углом на покоившемся свободном электроне. Найти кинетическую энергию отдачи электрона и частоту рассеянного фотона.

Вариант 5

1. Световая волна $\lambda = 550$ нм падает нормально на прозрачную пластинку с $n = 1,6$. При какой толщине пластинки отраженная волна будет иметь: 1) максимальную интенсивность; 2) минимальную интенсивность?
2. Температура абсолютно черного тела увеличилась в 5 раз, в результате чего λ_{\max} уменьшилась на 200 нм. Определить начальную и конечную температуры тела.
3. Показать с учетом законов сохранения энергии и импульса, что свободный электрон не может полностью поглотить фотон.

Вариант 6

1. Свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм находящегося на Земле лазера фокусируется с помощью телескопа с диаметром линзы $R = 2$ м на поверхности Луны. Расстояние до Луны принять равным $L = 400\,000$ км. Оценить размер светового пятна на Луне, если влиянием атмосферы можно пренебречь.
2. Металлический шар радиусом $R = 1$ см и теплоемкостью $C = 14$ Дж/К, имеющий температуру $T = 1200$ К, выброшен в межпланетное пространство. Через какое время температура шара уменьшится в 2 раза, если коэффициент поглощения равен 0,4?
3. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. При этом длины волн смещенных составляющих излучения, рассеянного под углами $\varphi_1 = 60^\circ$ и $\varphi_2 = 120^\circ$, различаются в $n = 2$ раза ($n = \lambda_1/\lambda_2$). Считая, что рассеяние происходит на свободных электронах, найти длину волны падающего излучения.

Вариант 7

1. Над поверхностью круглого стола диаметром $d = 1$ м на высоте $h = 2,5$ м висит лампа с силой света 100 кд. Определить среднюю освещенность стола.
2. Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 0,4$ мкм расположен на расстоянии 1,2 м перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом $r = 1$ мм. Найти расстояние от диафрагмы до точки наблюдения, для которой число зон Френеля в отверстии $m = 4$.
3. На дифракционную решетку нормально падает поток света. Найти постоянную решетки, если в направлении $\varphi = 45^\circ$ совпадают максимумы линий $\lambda_1 = 656,3$ нм и $\lambda_2 = 410,2$ нм.

Вариант 8

1. Спираль электрической лампочки с силой света 1000 кд заключена в матовую сферическую колбу радиусом $R = 20$ см. Найти световой поток, светимость, яркость такого источника и светимость и яркость экрана, на который падает 10% светового потока. Коэффициент отражения света 0,8, площадь экрана $0,25 \text{ м}^2$.
2. Как изменится интенсивность излучения абсолютно черного тела вблизи $\lambda = 500$ нм при изменении его температуры от $T_1 = 1000$ К до $T_2 = 1100$ К?
3. Оценить угол α , на который отклоняется фотон вследствие гравитационного взаимодействия, проходя у поверхности Солнца. (*Указание:* вследствие малости угла α считать, что $\alpha = \Delta p/p$, где p — импульс фотона; Δp — изменение поперечной составляющей импульса фотона.) Для нахождения Δp проинтегрировать второй закон Ньютона $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, где \vec{F} — сила гравитационного взаимодействия. Масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, радиус Солнца $R_\odot = 7 \cdot 10^8$ м.

Вариант 9

1. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом длиной волны $\lambda = 400$ нм, расстояние между отверстиями 0,8 мм, расстояние от отверстия до экрана 2,5 м. Найти положения трех первых светлых полос.
2. Абсолютно черное тело поддерживается при температуре 1000 К. Площадь поверхности $S = 250 \text{ см}^2$. Найти мощность излучения, энергетическую светимость, энергию излучения тела.
3. Позитрон e^+ с кинетической энергией W_k аннигилирует на мишени, содержащей практически покоящиеся электроны, в результате чего рождаются два одинаковых γ -кванта. Под каким углом разлетаются γ -кванты? Чему равен этот угол в случае $W_k = 0$?

Вариант 10

1. В центре квадратной комнаты площадью 25 м^2 висит лампа. На какой высоте h от пола надо ее повесить, чтобы освещенность в углах комнаты была наибольшей?
2. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в 2 раза длина волны λ_{\max} , на которую приходится максимум спектральной плотности излучательной способности, уменьшилась на $\Delta\lambda = 400$ нм. Определить начальную T_1 и конечную T_2 температуры.
3. Фотон с энергией $E = 2m_e c^2$ при рассеянии на покоящемся электроны теряет половину своей энергии (m_e — масса электрона). Найти угол разлета между рассеянным фотоном и электроном отдачи.

Вариант 11

1. Плоская световая волна падает на бизеркала Френеля, угол между которыми $\alpha = 3'$. Определить длину волны света, если ширина интерференционной полосы на экране $D_x = 0,65$ мм.
2. Используя формулу Планка для плотности излучения абсолютно черного тела, вычислить постоянную в формуле Стефана—Больцмана.

3. Найти максимальный угол рассеяния γ -квантов при комптон-эффекте на неподвижных электронах, вне которого рассеянный квант не может породить электрон-позитронную пару при последующем взаимодействии с веществом. Рождение электрон-позитронной пары возможно, если энергия γ -кванта превышает $2m_e c^2$.

Вариант 12

1. Вычислить радиусы первых пяти зон Френеля, если расстояние от источника света до волновой поверхности $a = 1$ м, расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения $b = 1$ м, длина волны $\lambda = 500$ нм.
2. Используя формулу Планка для плотности излучения абсолютно черного тела, вычислить постоянную в законе смещения Вина.
3. Определить длину волны рентгеновского излучения, для которого комптоновское рассеяние на покоящемся электроне на угол 90° удваивает длину волны.

Вариант 13

1. Экран находится на расстоянии $L = 4$ м от монохроматического источника света. Посередине между экраном и источником света помещен экран с круглым отверстием. При каком радиусе отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным? Длина волны света $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ мм.
2. При нагревании абсолютно черного тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности излучательной способности, изменилась от $\lambda_1 = 690$ нм до $\lambda_2 = 500$ нм. Как и во сколько раз изменится при этом излучательная способность R_e и ее максимальная спектральная плотность?
3. Фотон ($\lambda = 0,4$ нм) рассеивается на электроне, движущемся навстречу ему, и после рассеяния движется в обратном направлении (рассеяние на 180°). С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы частота фотона при рассеянии не изменилась?

Вариант 14

1. Найти освещенность, яркость и светимость экрана площадью $S = 10$ м², если падающий на него световой поток $\Phi = 2$ клм. Коэффициент отражения поверхности экрана 0,85.
2. Для каких значений λT расхождение между формулами Рэлея—Джинса и Планка не превышает 1%?
3. Фотон с энергией $E = 0,75$ МэВ рассеялся на свободном покоившемся электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи T и направление его движения, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на 25%.

Вариант 15

1. Максимум спектральной плотности энергетической светимости объекта соответствует длине волны $\lambda = 650$ нм. Принимая, что объект излучает как абсолютно черное тело, вычислить его температуру и значение спектральной плотности энергетической светимости для длины волны $\lambda_1 = \lambda/2$.
2. Три николя расположены так, что углы между плоскостями их пропускания составляют 25° . Во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении такой системы, если потери на

отражение и поглощение света для каждого николя составляют 4% от интенсивности падающего света?

3. Фотон с длиной волны $\lambda = 6$ пм рассеялся под прямым углом на покоившемся свободном электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи и частоту рассеянного фотона.

Вариант 16

1. Максимум спектральной плотности энергетической светимости объекта соответствует длине волны $\lambda = 500$ нм. Принимая, что объект излучает как абсолютно черное тело, вычислить его температуру T и значение спектральной плотности энергетической светимости для температур $T_1 = T/2$ и $T_2 = 2T$.
2. Расстояние между двумя когерентными источниками монохроматического света с $\lambda = 500$ нм составляет 1,4 см и равно расстоянию между интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины. Найти расстояние от источников до экрана.
3. При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длинами волн $\lambda_1 = 0,35$ мкм и $\lambda_2 = 0,54$ мкм обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов различаются в $n = 2$ раза. Найти работу выхода с поверхности этого металла.

Вариант 17

1. На сколько надо изменить температуру $T = 2000$ К черного тела, чтобы спектральная плотность его энергетической светимости для $\lambda = 600$ нм изменилась в 2 раза?
2. На дифракционную решетку с периодом $d = 20$ мкм под углом $i = 30^\circ$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определить угол φ_2 дифракции, соответствующий второму главному максимуму.
3. Плоская световая волна интенсивностью $I = 0,2$ Вт/см² падает на плоскую зеркальную поверхность с коэффициентом отражения 0,8. Угол падения $\varphi = 45^\circ$. Определить на основе корпускулярных представлений значение нормального давления, которое оказывает свет на эту поверхность.

Вариант 18

1. Черное тело имеет температуру $T = 1000$ °С. Для какой длины волны спектральная плотность его энергетической светимости изменится в 2 раза по сравнению со значением для длины волны $\lambda_1 = 500$ нм?
2. Дифракционная решетка с периодом $d = 5$ мкм имеет $N = 1000$ щелей. Построить распределение интенсивности света при френгоферовой дифракции и нормальном падении лучей от длины волны в видимом диапазоне.
3. Фотон с энергией $E = 250$ кэВ рассеялся под углом $\varphi = 120^\circ$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить энергию рассеянного фотона.

Вариант 19

1. Плосковыпуклая линза с $n = 1,6$ выпуклой стороной прижата к стеклянной пластинке. Расстояние между первыми двумя

кольцами Ньютона, наблюдаемыми в отраженном свете, равно 0,5 мм. Определить оптическую силу линзы, если используется свет с $\lambda = 550$ нм, падающий нормально.

- Во сколько раз изменится спектральная плотность энергетической светимости черного тела, соответствующая температуре 5000°C и $\lambda = 700$ нм, если его температура изменится на 5%?
- Найти длину волны рентгеновского излучения, если максимальная кинетическая энергия комптоновских электронов $T_{\max} = 0,19$ МэВ.

Вариант 20

- На мыльную пленку ($n = 1,33$) падает белый свет под углом $\varphi = 30^\circ$. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет ($\lambda = 600$ нм)?
- Температура черного тела $T = 1800$ К. При какой температуре яркость излучения желтой линии этого тела увеличится в 2 раза?
- Фотон с энергией $E = 0,15$ МэВ рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны изменилась на $\Delta\lambda = 3$ пм. Найти угол, под которым вылетел комптоновский электрон.

Вариант 21

- Какую наименьшую разрешающую силу должна иметь дифракционная решетка, чтобы она могла разрешить две спектральные линии $\lambda_1 = 578$ нм и $\lambda_2 = 580$ нм? Какое наименьшее число штрихов должна иметь эта решетка, чтобы разрешение было возможно в спектре третьего порядка?
- Сфера радиусом $R_{\text{ш}} = 1$ м с абсолютно отражающими стенками заполнена монохроматическим светом с $\lambda = 500$ нм так, что освещенность ее равна 5 лк. Сколько квантов надо удалить из сферы, чтобы освещенность уменьшилась в 2 раза?
- Параллельный пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 25$ В, падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми $d = 50$ мкм. Определить расстояние между соседними максимумами дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии $L = 100$ см от щелей.

Вариант 22

- Точечный источник света с $\lambda = 550$ нм помещен на расстояние $a = 1$ м перед непрозрачным экраном с круглым отверстием радиусом $R = 2$ мм. Какое минимальное число открытых зон Френеля может наблюдаться при этих условиях? При каком расстоянии от экрана будет открыто минимально возможное число зон? При каком радиусе отверстия может быть открыта только одна центральная зона?
- При нормальном падении света на дифракционную решетку обнаружено, что под углом дифракции $\varphi = 35^\circ$ совпадают максимумы линий с длинами волн $\lambda_1 = 0,63$ мкм и $\lambda_2 = 0,42$ мкм. Максимальный порядок для второй линии в спектре этой решетки $k_{\max} = 5$. Определить период решетки.
- Сфера радиусом $R_{\text{ш}} = 1$ м с абсолютно отражающими стенками заполнена монохроматическим светом с $\lambda = 500$ нм так, что освещенность ее равна 5 лк. Сколько квантов надо удалить из сферы, чтобы освещенность уменьшилась в 2 раза?

ценность ее равна 5 лк. Определить давление, производимое светом на поверхности сферы.

Вариант 23

1. Чему равна постоянная дифракционной решетки, если эта решетка может разрешить в первом порядке линии спектра калия $\lambda_1 = 404,4$ нм и $\lambda_2 = 404,7$ нм? Длина решетки $l = 3$ см.
2. Монохроматический свет с $\lambda = 550$ нм нормально падает на диафрагму с круглым отверстием радиусом $r = 1,1$ мм, за которой расположен экран. Расстояние от источника до диафрагмы $L = 1,2$ м. Определить расстояние от экрана до диафрагмы, при котором отверстие открывает три зоны Френеля.
3. Определить энергию γ -квантов, претерпевших комптоновское рассеяние назад (угол рассеяния $\theta = 180^\circ$), если известно, что вылетающий электрон ультрарелятивистский ($W_e \gg m_e c^2$).

Вариант 24

1. Найти угол φ между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, проходящего через поляризатор и анализатор, уменьшилась в 4 раза.
2. Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2,8$ мкм, если угол между направлениями на максимумы второго и третьего порядков дифракции Фраунгофера равен 10° .
3. Определить кинетическую энергию электронов, которые в среде с показателем преломления $n = 1,5$ излучают свет под углом $\beta = 30^\circ$ к направлению своего движения.

Вариант 25

1. На пути одного из интерферирующих лучей поставлена стеклянная пластинка с $n = 1,6$ и толщиной 14 мм. Определить, на сколько полос сместится интерференционная картина для света с длиной волны $\lambda = 650$ нм, падающего нормально на пластинку.
2. Сколько штрихов на 1 мм должна иметь дифракционная решетка, чтобы углу отклонения $\varphi = 90^\circ$ соответствовал максимум шестого порядка для света с длиной волны $\lambda = 500$ нм?
3. Найти наименьшие значения кинетической энергии электрона и протона, при которых возникает черенковское излучение в среде с показателем преломления $n = 1,6$.

Вариант 26

1. При нормальном падении света на дифракционную решетку угол дифракции для $\lambda_1 = 0,55$ мкм во втором порядке равен $\varphi_2 = 35^\circ$. Найти угол дифракции φ_3 для линии $\lambda_2 = 0,65$ мкм в третьем порядке.
2. С поверхности площадью $S = 2$ см² при температуре $T = 400$ К за время $t = 5$ мин излучается энергия $W = 83$ Дж. Определить коэффициент черноты α поверхности.
3. Одна из спектральных линий атомарного водорода имеет длину волны $\lambda_0 = 656,3$ нм. Найти доплеровское смещение этой линии $\Delta\lambda$, если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией $T = 1$ МэВ.

Вариант 27

1. На стеклянный ($n = 1,5$) клин с углом $\alpha = 20''$ падает нормально свет с длиной волны $\lambda = 582$ нм. Какое число темных интерференционных полос приходится на единицу длины клина?
2. На каком расстоянии от дифракционной решетки нужно поставить экран, чтобы расстояние между нулевым максимумом и спектром четвертого порядка было равно $l = 50$ мм для света с длиной волны $\lambda = 500$ нм? Постоянная дифракционной решетки $d = 0,02$ мм.
3. Найти длину волны рентгеновского излучения, если максимальная кинетическая энергия комптоновских электронов $T_{\max} = 0,19$ МэВ.

Вариант 28

1. Излучающая в обе стороны пластинка площадью $S = 1$ м² имеет яркость $B = 10$ кд/м². Найти среднюю силу света, излучаемого пластинкой.
2. Дифракционная решетка освещается нормально падающим на нее монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум третьего порядка отклонен на угол $\varphi = 10^\circ$. На какой угол будет отклонен максимум пятого порядка?
3. С какой скоростью удаляется от нас некоторая туманность, если линия водорода $\lambda_0 = 434$ нм (для неподвижного источника) в ее спектре смещена в красную сторону на $\Delta\lambda = 130$ нм?

Вариант 29

1. Сколько штрихов на 1 мм должна иметь дифракционная решетка, чтобы углу $\varphi = 90^\circ$ соответствовал максимум пятого порядка для света с длиной волны $\lambda = 500$ нм?
2. Кольца Ньютона наблюдаются в отраженном свете. Они формируются в тонком воздушном слое между плоской и сферической (радиус кривизны $R = 50$ см) поверхностями. Определить длину волны света, если радиус третьего светлого кольца $r_3 = 0,09$ см, а радиус двадцать третьего светлого кольца $r_{23} = 0,25$ см.
3. При наблюдении спектральной линии $\lambda_0 = 0,59$ мкм в пучках света, приходящих с противоположных концов экватора солнечного диска, обнаружено различие в длинах волн на $\Delta\lambda = 8$ пм. Найти период вращения Солнца вокруг собственной оси. Радиус Солнца $R_\odot = 7 \cdot 10^8$ м.

Вариант 30

1. Определить длину волны спектральной линии, изображение которой, даваемое дифракционной решеткой в спектре третьего порядка, совпадает с изображением линии $\lambda = 4861$ Å в спектре четвертого порядка.
2. Показать, что из закона Вина следует закон Стефана—Больцмана.
3. Одна из спектральных линий, испускаемых возбужденными ионами He^+ , имеет длину волны $\lambda_0 = 410$ нм. Найти доплеровское смещение этой линии, если ее наблюдать под углом $\alpha = 30^\circ$ к пучку ионов, движущихся с кинетической энергией $T = 10$ МэВ. Масса иона гелия $m_{\text{He}^+} = 4$ а. е. м.

VIII.7. Типовой расчет по теме «Основы квантовой механики»

Вариант 1

1. Найти дебройлевскую длину волны молекул водорода, соответствующую их наиболее вероятной скорости при комнатной температуре $T = 300 \text{ К}$.
2. В спектре атомарного водорода известны длины волн трех линий, принадлежащих одной и той же серии: $\lambda_1 = 97,26 \text{ нм}$, $\lambda_2 = 102,58 \text{ нм}$, $\lambda_3 = 121,57 \text{ нм}$. Найти длины волн других линий в данном спектре, которые можно предсказать с помощью этих трех линий.
3. Электрон в атоме водорода описывается в основном состоянии волновой функцией $\psi(r) = A \exp(-r/a_B)$, где a_B — боровский радиус, A — нормировочная постоянная. Определить отношение вероятностей W_1/W_2 пребывания электрона в сферических слоях толщиной $r = 0,02a_B$ и радиусом: 1) $r_1 = 1,5a_B$ и 2) $r_2 = 2,5a_B$.
4. Вычислить момент импульса орбитального движения электрона в атоме в d -состоянии ($n = 3$). Определить возможные значения проекции момента импульса на направление внешнего магнитного поля.

Вариант 2

1. Положение пылинки массой $m = 1 \text{ мкг}$ установлено с неопределенностью $\Delta x = 10^{-7} \text{ м}$. Чему равна неопределенность в скорости Δv_x для этой пылинки?
2. На низкий потенциальный барьер падает монохроматический пучок электронов. Концентрация n_0 электронов в падающем пучке равна 10 мм^{-3} , а их энергия $E = 100 \text{ эВ}$. Определить давление P , которое испытывает барьер, если его высота $U = 9,7 \text{ эВ}$.
3. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi(r) = A \exp(-r/a_B)$, где a_B — радиус Бора, A — нормировочная постоянная. Найти A и определить расстояние r , на котором вероятность нахождения электрона максимальна.
4. Написать электронную конфигурацию атома неона Ne (зарядовое число $Z = 10$). Сколько электронов в атоме неона находится в s -состоянии?

Вариант 3

1. Найти дебройлевскую длину волны релятивистских электронов, подлетающих к антикатоде рентгеновской трубки, если длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра $\lambda_k = 10 \text{ пм}$.
2. Коэффициент прохождения электронов через низкий потенциальный барьер равен коэффициенту отражения. Определить, во сколько раз кинетическая энергия T электронов больше высоты U потенциального барьера.
3. Электрон в атоме водорода описывается в основном состоянии волновой функцией $\psi(r) = A \exp(-r/a_B)$, где a_B — радиус Бора, A — нормировочная постоянная. Найти A и определить вероятность W

пребывания электрона внутри области, ограниченной сферой радиусом $R = a_B/2$.

4. Электрон в атоме водорода переходит из состояния $3d$ в состояние $2p$ (линия H в серии Бальмера). Определить изменение момента импульса орбитального движения электрона.

Вариант 4

1. При увеличении напряжения на рентгеновской трубке в $n = 1,5$ раза длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра изменилась на $\Delta\lambda_k = 26$ пм. Найти первоначальное напряжение на трубке.
2. Параллельный пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 25$ В, падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми $d = 50$ мкм. Определить расстояние между соседними максимумами дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии $L = 100$ см от щелей.
3. Электрон находится в основном состоянии в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Его волновая функция имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)$, где l — ширина потенциальной ямы. Определить вероятность W нахождения его в интервале $0 < x < l/6$.
4. Электрон в атоме находится в f -состоянии. Найти орбитальный момент импульса электрона и максимальное значение проекции момента импульса на направление внешнего магнитного поля.

Вариант 5

1. Длина волны де Бройля свободно движущегося электрона $\lambda = 10^{-10}$ м. Определить кинетическую энергию E электрона.
2. Какую наименьшую энергию надо сообщить иону He^+ , находящемуся в основном состоянии, чтобы он смог испустить фотон, соответствующий головной линии серии Бальмера?
3. Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A \exp(-r/a_B)$, где A — нормировочная постоянная, a_B — боровский радиус. Найти среднее значение потенциальной энергии электрона в поле ядра и ее отношение к полной энергии.
4. Сколько электронов находится в p -состоянии атома магния Mg ? Написать электронную конфигурацию атома магния. Зарядовое число $Z = 12$.

Вариант 6

1. Электрон локализован в молекуле, имеющей размер $l = 10^{-10}$ м. Исходя из соотношения неопределенностей, оценить минимальную кинетическую энергию E , которую может иметь электрон.
2. Определить длину волны спектральной линии атомарного водорода, частота которой равна разности частот следующих двух линий серии Бальмера: $\lambda_1 = 486,1$ нм и $\lambda_2 = 410,2$ нм. Какой серии принадлежит эта линия?
3. Электрон в атоме водорода в основном состоянии имеет волновую функцию вида $\psi(r) = A \exp(-r/a_B)$, где $a_B = 52,8$ пм (боровский радиус). Определить плотность вероятности нахождения электрона на расстоянии $r_1 = 50$ пм, $r_2 = 52,8$ пм, $r_3 = 55$ пм от ядра. Решение пояснить графически.

4. Возбужденный атом углерода с электронной конфигурацией $1s^2 2s^2 2p 3d$ обладает максимально возможным при такой конфигурации полным механическим моментом. Чему равен магнитный момент атома в этом состоянии? Написать символ терма, соответствующего данному состоянию.

Вариант 7

1. Свободный электрон в момент времени $t = 0$ локализован в области $\Delta x = 0,1$ нм (порядок размера атома). С помощью соотношения неопределенностей Гейзенберга оценить ширину области локализации этого электрона спустя $\Delta t = 1$ с.
2. Вычислить для атомарного водорода длины волн первых трех линий серии Бальмера. Каким цветам они соответствуют?
3. Волновая функция $1s$ -состояния атома водорода имеет вид $\psi(r) = A \exp(-r/a_B)$, где a_B — радиус первой боровской орбиты, а A — нормировочная постоянная. Найти A и среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра.
4. Валентный электрон атома натрия находится в состоянии с $n = 4$. Значения остальных квантовых чисел электрона таковы, что атом имеет наибольший возможный механический момент. Определить магнитный момент атома в этом состоянии. Написать символ терма, соответствующего данному состоянию.

Вариант 8

1. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной L . Оценить с помощью соотношения неопределенностей силу давления электрона на стенки этой ямы при минимально возможной его энергии.
2. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов $U = 10$ кВ. Во сколько раз различаются коэффициенты прозрачности D_e для электрона и D_p для протона, если высота U_0 барьера равна 20 кэВ и его ширина $d = 0,1$ пм?
3. Волновая функция $2s$ -состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A(2 - r/a_B) \exp(-r/2a_B)$, где a_B — боровский радиус. Найти значение нормировочной постоянной A и среднеквадратичное расстояние $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ электрона от ядра.
4. Электрон в атоме водорода переходит из $4d$ -состояния в $2p$ -состояние. Определить изменение орбитального момента импульса электрона.

Вариант 9

1. След пучка электронов на экране электронно-лучевой трубки имеет диаметр $d = 0,5$ мм. Расстояние от электронной пушки до экрана $L = 20$ см, ускоряющее напряжение $U = 10$ кВ. Оценить неопределенность координаты электрона при вылете из электронной пушки.
2. Сколько спектральных линий будет испускать атомарный водород, который возбуждают на n -й энергетический уровень?
3. Частица в бесконечно высоком потенциальном ящике шириной a находится в возбужденном состоянии с $n = 7$. Определить вероятность нахождения частицы в центральной трети ящика.

4. Написать электронную конфигурацию атома кислорода O (зарядовое число $Z = 8$). Сколько электронов в атоме кислорода находится в p -состоянии?

Вариант 10

1. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальный диаметр d пятна, создаваемого на детекторе пучком атомов серебра, испускаемых печью с температурой $t = 1200^\circ\text{C}$. Расстояние от выходной щели печи до детектора равно $L = 1$ м.
2. Найти квантовое число n , соответствующее возбужденному состоянию иона He^+ , если при переходе в основное состояние этот ион испустил последовательно два фотона с длинами волн $\lambda_1 = 108,5$ нм и $\lambda_2 = 30,4$ нм.
3. Частица, находящаяся в бесконечном потенциальном ящике шириной a , пребывает в возбужденном состоянии с $n = 4$. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $a/3 \leq x \leq a$.
4. Электрон в атоме водорода совершает переход из состояния $1s$ в состояние $3p$. Определить изменение момента импульса орбитального движения электрона.

Вариант 11

1. Показать, используя соотношение неопределенностей, что в ядре не могут находиться электроны. Линейные размеры ядра принять равными $R_{\text{яд}} = 1,3 \cdot 10^{-15}$ м.
2. Вычислить постоянную Ридберга R , если известно, что для ионов He^+ разность длин волн между головными линиями серий Бальмера и Лаймана $\Delta\lambda = 133,7$ нм.
3. Волновая функция $2s$ -состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A(2 - r/a_B)\exp(-r/a_B)$, где a_B — боровский радиус. Найти значение нормировочной постоянной A и среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра.
4. Написать формулу электронного строения атома кремния Si (зарядовое число $Z = 14$).

Вариант 12

1. Положение атома углерода в кристаллической решетке алмаза определено с погрешностью $\Delta x = 0,5 \cdot 10^{-10}$ м. Какова неопределенность скорости v_x его теплового движения? Масса атома углерода $m_C = 12$ а. е. м.
2. У какого водородоподобного иона разность длин волн между головными линиями серий Бальмера и Лаймана равна $59,3$ нм?
3. Электрон движется в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками в состоянии $n = 4$. Его волновая функция имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(4\pi \frac{x}{l}\right)$, где l — ширина потенциальной ямы. Определить вероятность W нахождения электрона в интервале $0 < x < l/4$.
4. Написать символ терма, соответствующего состоянию, в котором механический момент атома $M_J = \sqrt{2}\hbar$, магнитный момент равен нулю, а спиновое квантовое число $S = 2$.

Вариант 13

1. Используя соотношение неопределенностей, определить минимальную кинетическую энергию E электрона, локализованного в объеме размером $l = 10^{-8}$ м.
2. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина L ямы такова, что энергетические уровни расположены весьма густо. Найти плотность уровней dN/dE , т. е. их число на единичный интервал энергии в зависимости от E . Вычислить dN/dE для $E = 1$ эВ, если $L = 1$ см.
3. Волновая функция $2s$ -состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A(2 - r/a_B) \exp(-r/a_B)$, где a_B — боровский радиус. Найти значение нормировочной постоянной A и вычислить положения максимумов радиальной плотности вероятностей нахождения электрона на расстоянии r от ядра.
4. Возбужденный атом кремния с электронной конфигурацией $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$ обладает максимально возможным при такой конфигурации полным механическим моментом. Чему равен магнитный момент атома в этом состоянии?

Вариант 14

1. Атом бора в кристаллической решетке имеет среднюю кинетическую энергию $E_k = 0,04$ эВ. Исходя из соотношения неопределенностей Гейзенберга, определить размер области его локализации. Масса атома бора $m_B = 16,7 \cdot 10^{-27}$ кг.
2. Частица массой m находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Найти возможные значения энергии частицы, если стороны ямы равны L_1 и L_2 , а также вычислить значения энергии частицы на первых четырех уровнях в случае, если яма — квадрат со стороной L .
3. Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A \exp(-r/a_B)$, где a_B — боровский радиус, A — нормировочная постоянная. Найти вероятность W того, что электрон находится от ядра на расстоянии, превышающем $2a_B$.
4. Атом, находящийся в состоянии, мультиплетность которого равна четырем, обладает механическим моментом $M_J = 3\sqrt{7}\hbar/2$. Какие значения может иметь квантовое число L этого состояния?

Вариант 15

1. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию E электрона, локализованного в объеме размером $l = 5 \cdot 10^{-10}$ м.
2. Определить первый потенциал возбуждения атома водорода и ионов He^+ , Li^{++} , Be^{+++} , B^{++++} .
3. Частица находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$). Определить вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области $0 \leq x \leq a/3$.
4. Определить спиновый механический момент атома в состоянии D_2 , если максимальное значение проекции магнитного момента в этом состоянии равно четырем магнетонам Бора.

Вариант 16

1. Определить длину волны де Бройля для молекулы кислорода, движущейся со средней тепловой скоростью $\langle v \rangle$ при температуре $t = 27^\circ\text{C}$. Масса молекулы кислорода $m_{\text{O}_2} = 32$ а. е. м.
2. Фотон с энергией $E = 15,5$ эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость будет иметь электрон вдали от ядра атома?
3. Электрон движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. В первом возбужденном состоянии его волновая функция имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(2\pi \frac{x}{l}\right)$, где l — ширина потенциальной ямы. Определить среднее значение $\left\langle -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$ импульса электрона.
4. Чему равен полный механический момент атома, находящегося в состоянии, в котором магнитный момент атома равен нулю, а орбитальное и спиновое квантовые числа имеют значения $L = 2$, $S = 3/2$?

Вариант 17

1. Под каким напряжением работает рентгеновская трубка, если минимальная длина волны в спектре рентгеновского излучения равна 60 нм?
2. Какие спектральные линии появятся при возбуждении атомарного водорода электронами с энергией 14 эВ? Считать, что атом водорода перед ударом неподвижен.
3. Волновая функция $2s$ -состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A(2 - r/a_B) \exp(-r/a_B)$, где a_B — боровский радиус. Найти значение нормировочной постоянной A и среднее значение кулоновской силы взаимодействия электрона с ядром.
4. Вычислить магнитный момент атома: 1) в 1F -состоянии; 2) в состоянии $^2D_{3/2}$; 3) в состоянии с $S = 1$, $L = 2$, $g = 4/3$.

Вариант 18

1. Вычислить длины волн де Бройля электрона, протона и атома урана, имеющих одинаковые кинетические энергии $E = 100$ эВ. Масса атома урана $m_U = 235$ а. е. м.
2. Частица массой m находится в трехмерной кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Сторона куба равна a . Найти собственные значения энергии частицы.
3. Волновая функция $2s$ -состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A(2 - r/a_B) \exp(-r/a_B)$, где a_B — боровский радиус. Найти значение нормировочной постоянной A и среднее значение потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром.
4. Возбужденный атом кремния с электронной конфигурацией $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4 f$ обладает минимально возможным при такой конфигурации полным механическим моментом. Чему равен магнитный момент атома в этом состоянии? Написать символ терма, соответствующего данному состоянию.

Вариант 19

1. Определить длину волны де Бройля α -частицы, прошедшей ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ МВ. Масса α -частицы $m_\alpha = 6,64 \cdot 10^{-27}$ кг.
2. Определить длину волны спектральной линии атомарного водорода, частота которой равна разности частот следующих двух линий серии Бальмера: $\lambda_1 = 486,1$ нм и $\lambda_2 = 410,2$ нм. Какой серии принадлежит эта линия?
3. Волновая функция частицы массой m для основного состояния в одномерном потенциальном поле $U(x) = kx^2/2$ имеет вид $\psi(x) = A \exp(-ax^2)$, где A и a — некоторые постоянные. Найти с помощью уравнения Шрёдингера постоянную a и энергию E частицы в этом состоянии.
4. Написать символ термина, соответствующего возбужденному состоянию атома кремния с электронной конфигурацией $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4 f$, если полный магнитный момент атома равен $2\sqrt{6}\mu_B/3$.

Вариант 20

1. Определить длину волны де Бройля атома железа, движущегося в расплаве при температуре $T = 2000$ К со средней тепловой скоростью.
2. Определить минимальную длину волны в ультрафиолетовой серии водорода.
3. Волновая функция электрона в основном состоянии атома водорода имеет вид $\psi(r) = A \exp(-r/a_B)$, где A — некоторая постоянная, a_B — радиус Бора. Определить A и найти среднее значение кулоновской силы, действующей на электрон.
4. Атом водорода, находившийся первоначально в основном состоянии, поглотил квант света с энергией $E = 10,2$ эВ. Определить возможные значения момента импульса орбитального движения электрона. В какую оболочку перешел электрон?

Вариант 21

1. Температура на поверхности Солнца $T = 6000$ К. Определить длины волн де Бройля для атомов водорода и гелия, находящихся в солнечной короне. Масса атома водорода $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, масса атома гелия $m_{He} = 6,88 \cdot 10^{-27}$ кг.
2. Мю-мезон с массой $m_\mu = 210m_e$ и протон образуют водородоподобный атом. Определить: 1) энергию испущенного фотона при переходе из четвертого возбужденного состояния в основное; 2) радиус первой боровской орбиты; 3) скорость μ -мезона на низшей орбите.
3. Электрон находится в основном состоянии в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Его волновая функция имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)$, где l — ширина потенциальной ямы. Найти среднее значение $\left\langle -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$ импульса электрона.
4. Атом находится в состоянии, мультиплетность которого равна трем, а полный механический момент равен $\hbar\sqrt{20}$. Каким может быть соответствующее квантовое число L ?

Вариант 22

1. Электрон имеет кинетическую энергию $E = 10^{-16}$ Дж. Какую дополнительную энергию ΔE необходимо сообщить электрону, чтобы длина волны де Бройля уменьшилась в 3 раза?
2. Оценить напряженность электрического поля, при которой атом водорода может быть им ионизован.
3. Электрон движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. В первом возбужденном состоянии его волновая функция имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(2\pi \frac{x}{l}\right)$, где l — ширина потенциальной ямы. Найти среднее значение $\langle x \rangle$ координаты электрона.
4. Вычислить полную энергию E , орбитальный момент импульса L и магнитный момент M электрона, находящегося в $2p$ -состоянии в атоме водорода.

Вариант 23

1. Электрон и протон имеют одинаковую энергию $E = 3 \cdot 10^{-16}$ Дж. Определить длины волн де Бройля электрона и протона.
2. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти ширину ямы, если разность энергии между уровнями с $n_1 = 2$ и $n_2 = 3$ составляет $\Delta E = 0,3$ эВ.
3. Волновая функция электрона в основном состоянии атома водорода имеет вид $\psi(r) = A \exp(-r/a_B)$, где A — нормировочная постоянная, a_B — боровский радиус. Найти постоянную A и среднее квадратичное расстояние $r_{\text{кв}} = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ между электроном и ядром.
4. Определить возможные значения проекции момента импульса орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля, если электрон находится в d -состоянии.

Вариант 24

1. С высоты h с идеально точным прицелом в мишень бросаются шарики массой m каждый. Используя принцип неопределенности, оценить разброс шариков около мишени.
2. Определить круговую частоту обращения электрона на n -й круговой боровской орбите водородоподобного иона. Вычислить эту величину для иона He^+ при $n = 2$.
3. Электрон находится в основном состоянии в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Его волновая функция имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)$, где l — ширина потенциальной ямы. Найти среднее значение $\langle x \rangle$ координаты электрона.
4. Выписать спектральные обозначения термов атома водорода, электрон которого находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 3$.

Вариант 25

1. Вычислить дебройлевскую длину волны вируса массой $m = 10\,000$ а. е. м., совершающего движение со средней тепловой скоростью при температуре $t = 40^\circ\text{C}$.

2. Какому элементу принадлежит водородоподобный спектр, у которого длины волн линий в 4 раза короче, чем у атомарного водорода?
3. Электрон движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. В первом возбужденном состоянии его волновая функция имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(2\pi \frac{x}{l}\right)$, где l — ширина потенциальной ямы. Определить вероятность нахождения электрона в интервале $0 < x < l/3$.
4. Сколько значений квантового числа J и какие может иметь атом в состоянии с квантовыми числами $S = 2$ и $L = 3$?

VIII.8. Типовой расчет по теме «Классическая и квантовая статистика. Основы строения вещества»

Вариант 1

1. Найти среднее значение энергии поступательного движения молекул газа, используя распределение Максвелла. Сравнить эту величину с величиной $m\langle v^2 \rangle / 2$.
2. Построить примерные графики зависимости средней энергии квантового осциллятора от: 1) температуры системы при фиксированной частоте осцилляторов; 2) частоты при фиксированной температуре.
3. На какое минимальное расстояние может приблизиться к ядру меди α -частица с энергией 5,3 МэВ?
4. Решить задачу VIII.8.6 с числовыми данными для этого варианта.

Вариант 2

1. Чему равна концентрация n молекул массой m в изотермической атмосфере с температурой T на высоте h над поверхностью планеты, радиус которой равен R , масса равна M , а концентрация молекул на поверхности планеты n_0 ?
2. Построить примерные графики зависимости среднего числа фононов частотой ω в кристалле при температуре T от: 1) температуры системы при фиксированной частоте; 2) частоты при фиксированной температуре.
3. Вычислить плотность массы ρ_m и плотность заряда ρ_q в легких и тяжелых ядрах для изотопов марганца ^{55}Mn и висмута ^{209}Bi . Объяснить результаты.
4. Решить задачу VIII.8.6 с числовыми данными для этого варианта.

Вариант 3

1. При каком значении скорости v пересекутся кривые распределения Максвелла для температур T_1 и $T_2 = 2T_1$?
2. Написать выражение для числа фононов с волновыми числами от k до $k + dk$ в случае одномерной решетки длиной L . Скорость продольных волн считать равной скорости поперечных.
3. Вычислить энергию связи на нуклон для ядра ^{239}Pu . Необходимые атомные массы найти в таблицах приложения.
4. Решить задачу VIII.8.6 с числовыми данными для этого варианта.

Вариант 4

1. Показать, что центр тяжести вертикального столба воздуха находится на высоте, на которой плотность воздуха меньше в ϵ раз по сравнению со значением на поверхности Земли.
2. Приняв, что минимальная длина волны тепловых волн в кристалле $\lambda_{\min} = 2a = 0,6$ нм (a — постоянная решетки), а скорость звука $v_s = 5$ км/с, оценить по порядку величины температуру Дебая θ_D .
3. Радиус ядра может быть измерен при рассеянии на нем электронов высоких энергий подобно тому, как микроскоп позволяет определить размеры малых объектов при освещении их светом. Чему равна длина волны де Бройля электронов с энергией 200 МэВ? Можно ли их использовать для того, чтобы «увидеть» атомное ядро?
4. Решить задачу VIII.8.6 с числовыми данными для этого варианта.

Вариант 5

1. В рамках модели Дебая получить выражение для полного числа фононов всех частот, возбуждаемых при температуре T в кристалле, содержащем N атомов и характеризуемом температурой Дебая θ_D .
2. Вычислить среднее значение скорости $\langle v \rangle$ и квадрата скорости $\langle v^2 \rangle$ в металле, энергия Ферми которого $E_F = 3$ эВ при $T = 0$ К.
3. В периодической системе элементов Менделеева для атомной массы магния указано значение $M = 24,312$ а. е. м. Природный магний состоит из трех изотопов — ^{24}Mg с атомной массой $M_{24} = 23,98504$ а. е. м., ^{25}Mg с массой $M_{25} = 24,98584$ а. е. м. и ^{26}Mg с массой $M_{26} = 25,98259$ а. е. м. Распространенность изотопа ^{24}Mg по весу составляет 78,99%. Вычислить весовую распространенность двух других изотопов.
4. Решить задачу VIII.8.6 с числовыми данными для этого варианта.

Вариант 6

1. Решить задачу VIII.8.1 для водорода.
2. Кристаллический образец характеризуется дебаевской температурой $\theta_D = 300$ К и скоростью звука $v_s = 5,2$ км/с. Для фонона с максимальной энергией, который может возбуждаться в данном образце, определить энергию, импульс и дебройлевскую длину волны.
3. Решить задачу VIII.8.6 с числовыми данными для этого варианта.
4. Найти электрическую мощность P атомной электростанции, расходующей 0,1 кг урана-235 в сутки, если КПД станции равен 16%. При распаде одного ядра выделяется энергия $E = 200$ МэВ.

Вариант 7

1. Исходя из соотношения неопределенностей, оценить температуру вырождения протонной компоненты водородной плазмы ($n = 10^{18}$ м $^{-3}$). Какой статистикой (классической или квантовой) описывается состояние частиц в плазме при температуре $T = 1$ эВ (10^4 К)?
2. Сколько процентов свободных электронов в металле при $T = 0$ К имеет кинетическую энергию, превышающую две трети максимальной?

- Монетка массой 3 г сделана из ^{63}Cu . Найти энергию, которую надо затратить, чтобы разделить все протоны и нейтроны в монетке.
- Решить задачу VIII.8.6 с числовыми данными для этого варианта.

Вариант 8

- Вычислить, какой процент молекул газа, находящегося в поле тяготения Земли, имеет потенциальную энергию E_p , превышающую их среднюю энергию поступательного движения. Считать, что температура газа и ускорение силы тяжести не зависят от высоты.
- Считая, что вырождение газа свободных электронов в металле происходит, когда их дебройлевская длина волны становится сравнимой с постоянной решетки, оценить температуру вырождения электронного газа в меди ($A = 64$; $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$).
- Вычислить массу радиоактивного источника ^{40}K активностью 4,6 мКи, если период полураспада калия равен $T_{1/2} = 1,28 \cdot 10^9$ лет.
- Решить задачу VIII.8.6 с числовыми данными для этого варианта.

Вариант 9

- Идеальный газ, помещенный в цилиндр высотой h и радиусом R , вращается вместе с цилиндром вокруг его оси с угловой скоростью ω . Найти концентрацию молекул газа как функцию расстояния r до оси цилиндра, если общее число молекул в цилиндре N , а температура газа T . Ускорением силы тяжести пренебречь.
- Воспользовавшись соотношением неопределенностей для свободных электронов кристалла металла объемом V , написать выражение для числа ячеек в фазовом пространстве, относящихся к электронам, имеющим импульсы в интервале от p до $p + dp$.
- Решить задачу VIII.8.7 для $N_1 = 5,93 \cdot 10^6$.
- Известен период полураспада $T_{1/2} = 400$ лет радиоактивного изотопа. Определить: 1) вероятность распада за интервал времени $[t, t + dt]$; 2) вероятность распада за интервал времени $[0, t]$; 3) вероятность распада за интервал времени $[0, T_{1/2}]$; 4) вероятность распада за интервал, равный среднему времени жизни ядра.

Вариант 10

- Определить, во сколько раз средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа отличается от наиболее вероятного значения кинетической энергии поступательного движения при той же температуре.
- Идеальный ферми-газ с температурой T заключен в макроскопически большой объем, характеризующийся квазинепрерывным спектром энергии, плотность состояний которого задается функцией $g(E)$. Найти: 1) число частиц dN_E в газе, имеющих энергию в интервале от E до $E + dE$; 2) полное число частиц N ; 3) среднюю энергию $\langle E \rangle$ одной частицы; 4) химический потенциал системы μ .
- Решить задачу VIII.8.7 для $N_1 = 7,213 \cdot 10^6$.
- Период полураспада изотопа ^{234}U равен $T_{1/2} = 2,5 \cdot 10^5$ лет. Остался ли к настоящему времени хотя бы один атом этого изотопа, существовавшего в момент образования Земли $4 \cdot 10^9$ лет назад?

Вариант 11

1. Пользуясь распределениями Ферми—Дирака и Бозе—Эйнштейна, получить распределение Максвелла—Больцмана.
2. Типичное значение кинетической энергии нуклона в ядре элемента из середины таблицы Менделеева составляет около 5 МэВ. Какой эффективной температуре ядра соответствует такая энергия?
3. При распаде радиоактивного изотопа полония ^{210}Po в течение времени $t = 1$ ч образовался ^4He , который при нормальных условиях занял объем $V = 89,5 \text{ см}^3$. Определить период полураспада $T_{1/2}$.
4. Решить задачу VIII.8.7 для $N_1 = 7,886 \cdot 10^6$.

Вариант 12

1. Преобразовать функцию распределения молекул идеального газа по кинетическим энергиям $f(E)$ в функцию распределения по относительным энергиям $f(w)$, где $w = E/\langle E \rangle$, $\langle E \rangle$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.
2. Решить задачу VIII.8.4 с числовыми данными из табл. VIII.3 для этого варианта.
3. Определить заряд ядра и атомную массу изотопа, получающегося из ^{238}U в результате двух α -распадов и двух β -распадов. Изотопом какого элемента является конечный результат радиоактивных распадов?
4. За какое время t распадется четверть начального количества ядер радиоактивного изотопа, если период его полураспада $T_{1/2} = 24$ года?

Вариант 13

1. Какова вероятность того, что состояние электрона в металле с энергией 0,062 эВ над уровнем Ферми занято при температуре: 1) $T = 0 \text{ К}$; 2) $T = 320 \text{ К}$?
2. Решить задачу VIII.8.4 с числовыми данными из табл. VIII.3 для этого варианта.
3. Период полураспада радиоактивного изотопа $T_{1/2} = 40$ дней. Какова вероятность события, в котором произвольный атом распадается: 1) в течение пяти дней; 2) в пятый день?
4. При распаде ядра ^{238}U образуется ядро ^{206}Pb (урановый свинец). Определить возраст урановой руды, если весовое содержание уранового свинца составляет 1/4 содержания урана.

Вариант 14

1. Решить задачу VIII.8.4 с числовыми данными из табл. VIII.3 для этого варианта.
2. Исходя из соотношения неопределенностей, оценить температуру T идеального ферми-газа, состоящего из частиц массой $m = 931 \text{ МэВ}/c^2$ и концентрацией $n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$.
3. Ядро золота имеет радиус $R = 6,2$ фм, радиус же α -частицы равен $r = 1,8$ фм. При какой минимальной энергии α -частица сможет проникнуть внутрь ядра?
4. Образец иода ^{127}I облучается нейтронным потоком такой интенсивности, что в 1 с образуется 10^7 атомов радиоактивного иода ^{128}I , период полураспада которого $T_{1/2} = 25$ мин. Найти число атомов ^{128}I и активность препарата через 50 мин после начала облучения.

Вариант 15

1. Решить задачу VIII.8.1 для кислорода.
2. Решить задачу VIII.8.4 с числовыми данными из табл. VIII.3 для этого варианта.
3. Какую наименьшую энергию E нужно затратить, чтобы разделить ядро ${}^4\text{He}$ на две одинаковые части?
4. В настоящее время в природном уране содержится 99,28% ${}^{238}\text{U}$ и 0,72% ${}^{235}\text{U}$ (периоды полураспада соответственно равны $T_{238} = 4,51 \cdot 10^9$ лет и $T_{235} = 0,713 \cdot 10^9$ лет). Каким было соотношение между изотопами ${}^{238}\text{U}$ и ${}^{235}\text{U}$ в момент образования Земли, если ее возраст $4 \cdot 10^9$ лет?

Вариант 16

1. Решить задачу VIII.8.1 для азота.
2. Решить задачу VIII.8.5 с числовыми данными из табл. VIII.3 для этого варианта.
3. На сколько граммов увеличится масса 1 кг воды при нагревании ее на 100°C ?
4. Считая, что весь радий на Земле образовался в результате распада ${}^{238}\text{U}$, определить, сколько атомов урана приходится на один атом радия.

Вариант 17

1. Решить задачу VIII.8.1 для хлора.
2. Решить задачу VIII.8.5 с числовыми данными из табл. VIII.3 для этого варианта.
3. На какую высоту может быть поднято тело массой $m = 10$ кг, если использовать 50% энергии, выделившейся при образовании 1 г ядер ${}^4_2\text{He}$ в реакции ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} = {}^4_2\text{He}$?
4. Какую массу радиоактивного изотопа ${}^{210}_{83}\text{Bi}$ надо добавить к 5 мг нерадиоактивного изотопа ${}^{209}_{83}\text{Bi}$, чтобы через 10 суток после этого распалась треть общего числа атомов? Постоянная распада ${}^{210}_{83}\text{Bi}$ равна $\lambda = 0,14$ сут $^{-1}$.

Вариант 18

1. Решить задачу VIII.8.2 при $v_1 = 400$ м/с, $v_2 = 1260$ м/с.
2. Решить задачу VIII.8.5 с числовыми данными из табл. VIII.3 для этого варианта.
3. Используя принцип неопределенности, оценить энергию связи нуклона в ядре.
4. При бомбардировке изотопа ${}^{27}\text{Al}$ α -частицами получается радиоактивный изотоп ${}^{30}\text{P}$, который затем распадается с испусканием позитрона. Написать уравнения обеих реакций. Найти удельную активность полученного изотопа, если известно, что период его полураспада $T_{1/2} = 130$ с.

Вариант 19

1. Решить задачу VIII.8.2 при $v_1 = 300$ м/с, $v_2 = 626$ м/с.
2. Решить задачу VIII.8.5 с числовыми данными из табл. VIII.3 для этого варианта.
3. Ядро свободно покоящегося атома ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ претерпевает α -распад. Энергия связи ядра ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ равна $E_{1,св} = 1731,6$ МэВ, ядра ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ —

$E_{2,св} = 1708,2$ МэВ, α -частицы — $E_{3,св} = 28,3$ МэВ. Полагая, что дочернее ядро ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ образуется в невозбужденном состоянии, определить: 1) скорость v_2 образовавшейся α -частицы; 2) скорость v_1 дочернего атома.

4. Человек массой 75 кг попал под α -излучение с коэффициентом качества $Q = 12$. Полученная им доза составила 24 мрад. Найти: 1) поглощенную телом энергию в джоулях; 2) эквивалентную дозу в бэрах.

Вариант 20

1. Решить задачу VIII.8.2 при $v_1 = 200$ м/с, $v_2 = 435$ м/с.
2. Объяснить на основе квантовой теории отсутствие заметного различия в теплоемкостях металлов и диэлектриков.
3. Какая масса урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ расходуется в сутки на атомной электростанции мощностью $W = 5000$ кВт? КПД принять равным 17%. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия $E = 200$ МэВ.
4. Какую кинетическую энергию нужно сообщить протону, чтобы он смог расщепить покоящееся ядро тяжелого водорода ${}^2\text{H}$, энергия связи которого $E_{св} = 2,2$ МэВ? Учесть закон сохранения импульса.

Вариант 21

1. Имеется струна длиной L , которая может совершать поперечные колебания в заданной плоскости. Скорость распространения колебаний равна v . Определить число dN_ω нормальных колебаний струны с частотами в интервале от ω до $\omega + d\omega$.
2. Зная распределение электронов в металле по энергиям, установить распределение электронов по скоростям и изобразить его на графике. Найти частный случай распределения при $T = 0$ К.
3. При распаде 1 г ${}^{238}\text{U}$ выделяется примерно $q = 1,24 \cdot 10^4$ α -частиц в секунду. Определить по этим данным период полураспада этого изотопа урана и его активность.
4. Какое количество тепла выделяется при образовании 1 г гелия из дейтерия? Какая масса каменного угля с теплотворной способностью 30 МДж/кг эквивалентна в тепловом отношении полученной величине?

Вариант 22

1. Решить задачу VIII.8.2 при $v_1 = 100$ м/с, $v_2 = 280$ м/с.
2. Определить температуру Дебая для одномерного химически простого кристалла, т. е. цепочки одинаковых атомов, совершающих колебания вдоль прямой линии, на которой они размещаются. Число атомов на единицу длины $n = 5 \cdot 10^9$ м⁻¹, скорость волн в кристалле $v = 3000$ м/с.
3. В верхнем слое поверхности Земли на каждом квадратном километре содержится в среднем $m_1 = 3100$ кг ${}^{238}\text{U}$ и $m_2 = 4600$ кг ${}^{232}\text{Th}$. Чему равна активность верхнего слоя Земли в расчете на 1 м³ почвы?
4. Радиоактивные ядра X с постоянной распада λ_1 превращаются в радиоактивные ядра Y с постоянной распада λ_2 . Полагая, что в момент времени $t = 0$ имеется только $N_{0,X}$ ядер X , найти и изобразить на графике зависимость числа N_Y ядер Y от времени.

Вариант 23

1. Скорость поперечных упругих волн в алюминии $v_{\perp} = 3130$ м/с, продольных — $v_{\parallel} = 6400$ м/с. Определить температуру Дебая для алюминия, если его плотность $\rho = 2700$ кг/м³.
2. Во сколько раз число свободных электронов, приходящихся на один атом металла при $T = 0$ К, больше в алюминии, чем в меди, если уровни Ферми равны соответственно $E_{F,Al} = 11,7$ эВ, $E_{F,Cu} = 7$ эВ?
3. Протоны, налетающие на неподвижную литиевую мишень, возбуждают реакцию ${}^7\text{Li}(p, n){}^7\text{Be}$. При каком значении энергии протона образовавшийся нейтрон может оказаться покоящимся?
4. В кровь человека ввели небольшое количество раствора, содержащего радиоизотоп ${}^{24}\text{Na}$ с активностью $A = 1,2 \cdot 10^5$ Бк. Удельная активность крови, взятой через время $t = 5$ ч после инъекции, оказалась равной $1,6 \cdot 10^7$ Бк/м³. Определить по этим данным объем крови человека.

Вариант 24

1. Найти максимальную энергию фонона, который может возбуждаться в кристалле, характеризуемом температурой Дебая $\theta_D = 3000$ К. Фотон какой длины волны обладал бы такой же энергией? Оценить максимальное значение импульсов фонона, если скорость звука 2 км/с. Фотон какой длины волны обладал бы таким импульсом?
2. Определить концентрацию n свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ К. Энергию Ферми E_F принять равной 1,3 эВ.
3. Какую кинетическую энергию необходимо сообщить протону, чтобы он смог расщепить покоящееся ядро дейтерия, энергия связи которого $E_{св} = 2,2$ МэВ?
4. При облучении ${}^{27}\text{Al}$ нейтронами в реакторе образуется α -радиоактивный изотоп ${}^{28}\text{Al}$ с периодом полураспада $T_{1/2} = 2,3$ мин. Если ядра ${}^{28}\text{Al}$ возникают с постоянной скоростью $q = 10^{10}$ ядер/с, то: 1) какое максимальное количество изотопа ${}^{27}\text{Al}$ можно получить в реакторе и какова его активность; 2) через сколько времени активность достигнет 95% от максимальной?

Вариант 25

1. Решить задачу VIII.8.3 для водорода.
2. Какое число фононов максимальной частоты возбуждается в среднем при температуре $T = 400$ К в кристалле, дебаевская температура которого $\theta_D = 200$ К?
3. Из какого наименьшего количества руды, содержащей 18% урана, можно получить 1 г радия?
4. Период полураспада изотопа ${}^{234}\text{U}$ равен $T_{1/2} = 2,5 \cdot 10^5$ лет. Остался ли к настоящему времени хотя бы один атом этого изотопа, существовавшего в момент образования Земли $4 \cdot 10^9$ лет назад?

Вариант 26

1. Решить задачу VIII.8.3 для азота.
2. Полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, определить среднюю кинетическую энергию свободных электронов при абсолютном нуле температур.

3. Вычислить (в электронвольтах) интервал между соседними уровнями свободных электронов в металле при $T = 0$ К вблизи уровня Ферми, если концентрация свободных электронов $n = 2 \cdot 10^{22}$ см⁻³ и объем металла $V = 1$ см³.
4. Во сколько раз ослабляет интенсивность проникающей радиации укрытие, имеющее бревенчатый накат толщиной 0,3 м и слой грунта толщиной 0,7 м? Толщина слоя половинного ослабления в дереве равна $L_1 = 0,25$ м, а на грунте равна $L_2 = 0,14$ м.

Вариант 27

1. Имеется прямоугольная мембрана площадью S . Скорость распространения поперечных колебаний в мембране равна v . Определить число dN_ω нормальных колебаний мембраны с частотами в интервале от ω до $\omega + d\omega$.
2. Металл находится при температуре $T = 0$ К. Определить, во сколько раз число электронов с кинетической энергией в диапазоне от $E_F/2$ до E_F больше числа электронов с энергией в диапазоне от 0 до $E_F/2$ (E_F — энергия Ферми).
3. Найти число нейтронов, возникающих в единицу времени в урановом реакторе, тепловая мощность которого $P = 100$ МВт. В каждом акте деления вылетает в среднем $k = 2,5$ нейтронов, а высвобождаемая энергия равна $E = 200$ МэВ.
4. Какую массу воды можно нагреть от нуля градусов до кипения за счет теплоты, выделившейся в реакции ${}^7\text{Li}(p, n){}^7\text{Be}$?

Вариант 28

1. Исходя из соотношения неопределенностей, оценить температуру вырождения T идеального ферми-газа, состоящего из частиц массой $m = 0,511$ МэВ/ c^2 и концентрацией $n = 3 \cdot 10^{22}$ см⁻³.
2. Определить температуру Дебая для двумерного кристалла, состоящего из атомов одного вида. Атомы могут колебаться в плоскости, на которой они размещаются. Равновесные положения атомов находятся в вершинах прямоугольных кристаллических ячеек. Число атомов, приходящихся на единицу площади, $n = 2,5 \cdot 10^{19}$ м⁻², скорость поперечных и продольных волн в кристалле одинакова и равна $v = 3000$ м/с.
3. Электрон и позитрон, имевшие одинаковые кинетические энергии 0,24 МэВ, при столкновении превратились в два одинаковых фотона. Определить энергию ε фотона и соответствующую ему длину волны λ .
4. Учитывая закон сохранения импульса, найти наименьшую энергию γ -кванта, достаточную для осуществления реакции ${}^{24}\text{Mg}(\gamma, n){}^{23}\text{Mg}$.

Вариант 29

1. Решить задачу VIII.8.3 для кислорода.
2. Какая часть свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле температур кинетическую энергию, превышающую среднюю энергию?
3. Неподвижный K -мезон распадается на два заряженных π -мезона. Масса K -мезона равна $m_K = 965m_e$, где m_e — масса электрона. Энергия каждого из образовавшихся π -мезонов равна $W = 1,77W_\pi$,

где W_π — энергия покоя π -мезона. Найти массу π -мезона и его скорость в момент образования.

4. Чтобы определить возраст t древней ткани, в ней была измерена концентрация атомов радиоуглерода ^{14}C . Она оказалась соответствующей 9,2 распадам в минуту на один грамм углерода. Концентрация ^{14}C в живых растениях соответствует 14 распадам в минуту на один грамм углерода. Период полураспада ^{14}C равен 5730 лет. Определить возраст ткани.

Вариант 30

1. Решить задачу VIII.8.3 для хлора.
2. Сравнить вероятность заполнения уровня с энергией, равной энергии Ферми, и среднее число электронов на этом уровне.
3. Образец древесины, найденный при раскопках, имеет массу 5 г и активность 63 распада в минуту (из-за наличия ^{14}C). Кусочек массой 1 г, взятый из живущего дерева, имеет активность 15,3 распада в минуту. Какой радиоуглеродный возраст образца, если период полураспада радиоактивного углерода равен 5730 лет?
4. Ионный ток в циклотроне при работе с α -частицами равен $I = 15$ мкА. Во сколько раз такой синхротрон продуктивнее 1 г радия?

Задача VIII.8.1

С помощью ЭВМ определить скорость v такую, что при температуре $T = 300$ К поступательные скорости четверти всех молекул газа лежат в диапазоне от $v_1 = 100$ м/с до v_2 . Конкретный газ указан в соответствующей задаче варианта.

Указание: необходимо найти корень функции

$$F(v) = \int_{v_1/v_{\text{вер}}}^{v_2/v_{\text{вер}}} f(u) du - \frac{1}{4},$$

где $f(u)$ — распределение молекул газа по безразмерным скоростям;

$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — наиболее вероятная скорость, а μ — молярная масса газа.

Задача VIII.8.2

С помощью ЭВМ определить, у какого газа половина всех молекул имеет скорости от v_1 до v_2 . Конкретные значения скоростей указаны в соответствующей задаче варианта, температура газа $T = 300$ К.

Указание: необходимо найти корень функции

$$F(\mu) = \int_{v_1/v_{\text{вер}}(\mu)}^{v_2/v_{\text{вер}}(\mu)} f(u) du - \frac{1}{2},$$

где $f(u)$ — распределение молекул газа по безразмерным скоростям,

$v_{\text{вер}}(\mu) = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — наиболее вероятная скорость, а μ — молярная масса газа.

Задача VIII.8.3

С помощью ЭВМ определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа, имеющих скорости от $v_1 = 100$ м/с до $v_2 = 200$ м/с. Конкретный газ указан в соответствующей задаче варианта.

Задача VIII.8.4

По результатам расчетов на ЭВМ (табл. VIII.3) построить на миллиметровой бумаге в одних осях графики зависимостей теплоемкости от температуры: 1) по теории Дебая; 2) по теории Эйнштейна; 3) по закону Дюлонга и Пти — в диапазоне от $\theta_D/100$ до $\theta_D/4$.

Задача VIII.8.5

По результатам расчетов на ЭВМ построить на миллиметровой бумаге в одних осях графики зависимостей теплоемкости от температуры: 1) по теории Дебая; 2) по теории Эйнштейна; 3) по закону Дюлонга и Пти — в диапазоне от $\theta_D/20$ до θ_D .

Задача VIII.8.6

При распаде радиоактивного изотопа A с периодом полураспада T_A образуется радиоактивный изотоп B с периодом полураспада T_B . В закрытый сосуд помещено $N_0 = 6 \cdot 10^{23}$ молекул изотопа A . Через $t_1 = 10$ мин количество изотопа B составило N_B молекул. Найти с помощью ЭВМ T_A (или T_B) для числовых данных, приведенных в табл. VIII.4. На ЭВМ подготовить таблицы зависимости N_A и N_B от времени. По этим таблицам построить графики на миллиметровке.

Указание: необходимо вывести формулу, выражающую зависимость $N_B(t, T_A, T_B)$, и найти корень функции $F(T_B) = N_B(t_1, T_A, T_B) - N_B$ в задачах вариантов 1–4 и $F(T_A) = N_B(t_1, T_A, T_B) - N_B$ в задачах вариантов 5–8.

Таблица VIII.3. Числовые данные для задач VIII.8.4 и VIII.8.5

Номер варианта	Материал	Температура Дебая θ_D , К	Температура Эйнштейна θ_E , К
12	Золото	165	124
13	Серебро	226	162
14	Цинк	306	218
15	Медь	345	247
16	Празеодим	74	55
17	Аргон	85	63
18	Бор	1250	925
19	Алмаз	1860	1376

Таблица VIII.4. Числовые данные для задачи VIII.8.6

Номер варианта	T_A , мин	T_B , мин	N_B
1	3	?	$3,633 \cdot 10^{22}$
2	1	?	$1,223 \cdot 10^{23}$
3	1	?	$1,862 \cdot 10^{23}$
4	2	?	$2,197 \cdot 10^{23}$
5	?	2	$2,261 \cdot 10^{23}$
6	?	2	$2,858 \cdot 10^{23}$
7	?	3	$3,884 \cdot 10^{23}$
8	?	3	$3,091 \cdot 10^{23}$

Задача VIII.8.7

При облучении образца потоком нейтронов каждую секунду образуется $q = 6 \cdot 10^7$ атомов радиоактивного изотопа. Определить с помощью ЭВМ его период полураспада $T_{1/2}$, если через время $t_1 = 10$ мин после начала облучения осталось N_1 атомов изотопа.

Указание: необходимо вывести формулу, выражающую зависимость $N(t, T)$ числа атомов изотопа от времени и периода полураспада, а также найти корень функции $F(T) = N(t_1, T) - N_1$.

Приложение

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Таблица П.1. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их обозначение

Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение
10^{18}	экса	Э	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санци	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	милли	м
10^9	гига	Г	10^{-6}	микро	мк
10^6	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^3	кило	к	10^{-12}	пико	п
10^2	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10	дека	да	10^{-18}	атто	а

Таблица П.2. Буквы греческого алфавита

$A\alpha$	альфа	$H\eta$	эта	$N\nu$	ню	$T\tau$	тау
$B\beta$	бета	$\Theta\theta$	тета	$\Xi\xi$	кси	$\Upsilon\upsilon$	ипсилон
$\Gamma\gamma$	гамма	$I\iota$	йота	Oo	омикрон	$\Phi\phi$	фи
$\Delta\delta$	дельта	$K\kappa$	каппа	$\Pi\pi$	пи	$\chi\chi$	хи
$E\varepsilon$	эпсилон	$\Lambda\lambda$	лямбда	$\rho\rho$	ро	$\Psi\psi$	пси
$Z\zeta$	дзета	$M\mu$	мю	$\Sigma\sigma$	сигма	$\Omega\omega$	омега

Таблица П.3. Коэффициент трения покоя μ для ряда соприкасающихся материалов

1-й материал	Сталь	Сталь	Сталь	Металл	Резина	Дерево
2-й материал	Лед	Сталь	Пластмасса	Дерево	Асфальт	Дерево
μ	0,015	0,15	0,3	0,5	0,55	0,65

Таблица П.4. Плотность вещества ρ

Твердое тело	$\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$	Жидкость	$\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$
Алюминий	2,69	Азотная кислота	1,50
Береза	$\approx 0,60$	Ацетон	0,80
Бетон	$\approx 2,20$	Бензин	0,70
Бронза	$\approx 8,30$	Вода	1,00
Висмут	9,78	Глицерин	1,26
Вольфрам	19,35	Дизельное топливо	0,86
Гранит	$\approx 2,60$	Керосин	0,80
Дуб	$\approx 0,80$	Мазут	$\approx 0,95$
Дюралюминий	$\approx 2,80$	Масло касторовое	0,96
Железо, сталь	7,87	Масло растительное	$\approx 0,94$
Золото	19,32	Масло трансформаторное	$\approx 0,87$
Инвар	7,90	Молоко	1,03
Иридий	22,42	Нефть	$\approx 0,84$
Каменная соль	2,18	Олифа	0,94
Лагунь	$\approx 8,5$	Ртуть	13,60
Лед	0,917	Серная кислота	1,83
Магний	1,738	Сероуглерод	1,26
Марганец	$\approx 7,30$	Скипидар	0,87
Медь	8,96	Соляная кислота	1,10
Мрамор	$\approx 2,70$	Спирт	0,79
Никель	8,91	Эфир	0,72
Опал	2,20		
Платина	21,45	Газ при $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}, T = 273 \text{ К}$	$\rho, \text{ кг/м}^3$
Плутоний	19,84		
Пробка	0,24	Азот	1,25
Свинец	11,336	Аргон	1,78
Серебро	10,50	Водород	$8,988 \cdot 10^{-2}$
Сосна	$\approx 0,50$	Воздух	1,29
Стекло	$\approx 2,60$	Гелий	0,1785
Титан	4,505	Кислород	1,429
Топаз	3,60	Криптон	3,733
Цинк	7,133	Ксенон	5,897
Уголь (антрацит)	$\approx 1,60$	Углекислый газ	1,98
Уран	19,04	Фтор	1,696
		Хлор	3,214

Таблица П.5. Упругие постоянные металлов

Вещество	Модуль Юнга $E, \text{ ГПа}$	Модуль сдвига $G, \text{ ГПа}$	Вещество	Модуль Юнга $E, \text{ ГПа}$	Модуль сдвига $G, \text{ ГПа}$
Алюминий	≈ 71	≈ 26	Никель	≈ 210	≈ 75
Вольфрам	≈ 375	≈ 140	Свинец	≈ 16	≈ 6
Золото	≈ 81	28,5	Серебро	≈ 78	≈ 28
Кобальт	206	78,5	Сталь	≈ 200	≈ 78
Медь	≈ 120	≈ 43	Титан	110	41,5

Таблица П.6. Сжимаемость жидкостей k

Вещество	k , 1/ГПа	Вещество	k , 1/ГПа
Ацетон	0,809	Керосин	0,687
Бензол	0,859	Ртуть	0,0404
Вода	0,470	Спирт	0,948
Глицерин	0,217	Эфир	1,430

Таблица П.7. Скорость звука c_s в различных средах

Вещество	c_s , м/с	Вещество	c_s , м/с	Вещество	c_s , м/с
Сталь	5100	Пробка	500	Вода	1485
Гранит	3950	Резина	54	Углекислый газ	258
Кирпич	3480	Стекло	5000	Водород	1286
Дерево	4000	Свинец	1300	Воздух	331,8

Таблица П.8. Диэлектрическая проницаемость ϵ некоторых веществ

Диэлектрик	ϵ	Диэлектрик	ϵ
Бумага	3,5	Парафин	2,2
Вакуум	1,0	Полихлорвинил	5,0
Вода	81,1	Полиэтилен	2,3
Воздух	1,0006	Слюда	7,0
Воск	7,8	Спирт	27
Глицерин	56,2	Стекло	10
Дерево	4,3	Фарфор	6,5
Масло (трансформаторное)	4,5	Эбонит	3,3

Таблица П.9. Удельное сопротивление ρ (при 20 °С) и температурный коэффициент α некоторых металлов и сплавов

Проводник	ρ , нОм·м	α , °С ⁻¹	Проводник	ρ , нОм·м	α , °С ⁻¹
Алюминий	25,0	$4,60 \cdot 10^{-3}$	Никель	61,4	$6,92 \cdot 10^{-3}$
Al-провод	28,7	$3,70 \cdot 10^{-3}$	Нихром	1120	$0,25 \cdot 10^{-3}$
Вольфрам	48,9	$5,10 \cdot 10^{-3}$	Олово	111,5	$4,65 \cdot 10^{-3}$
Железо	86	$6,51 \cdot 10^{-3}$	Платина	98,1	$3,96 \cdot 10^{-3}$
Золото	20,6	$4,02 \cdot 10^{-3}$	Ртуть	940,7	$0,99 \cdot 10^{-3}$
Константан	500	$3,00 \cdot 10^{-5}$	Свинец	192	$4,28 \cdot 10^{-3}$
Манганин	430	$2,00 \cdot 10^{-5}$	Серебро	14,9	$4,30 \cdot 10^{-3}$
Медь	15,5	$4,33 \cdot 10^{-3}$	Титан	420	$5,46 \cdot 10^{-3}$

Состав сплавов: константан (54% Cu, 45% Ni, 1% Mn), манганин (85% Cu, 3% Ni, 12% Mn), нихром (20% Cr, 75% Ni, 5% Fe).

Таблица П.10. Удельная теплоемкость c_p при комнатных температурах

Твердое тело	c_p , кДж/(кг · К)	Жидкость	c_p , кДж/(кг · К)
Алюминий	0,896	Ацетон	2,16
Бетон	0,92	Бензин	2,09
Вольфрам	0,134	Вода	4,19
Дерево	2,39	Глицерин	2,39
Железо	0,465	Масло машинное	1,67
Золото	0,130	Ртуть	0,138
Кирпич	0,92	Спирт	2,39
Лед	2,09	Газ	c_p , кДж/(кг · К)
Медь	0,385	Азот	1,038
Свинец	0,13	Водород	14,27
Серебро	0,234	Воздух	1,009
Сталь	0,481	Гелий	5,238
Стекло	0,779	Кислород	0,917
Цинк	0,389	Углекислый газ	0,846

Таблица П.11. Удельная теплота сгорания q твердых и жидких веществ

Твердое тело	q , МДж/кг	Жидкость	q , МДж/кг
Антрацит	31	Бензин	42
Бурый уголь (брикеты)	21	Бензол	40
Дерево свежее	8	Дизельное топливо	42,7
Дерево сухое	15	Керосин	40,8
Древесный уголь	31	Мазут	41
Кокс	31	Нефть	41
Торф	15	Спирт	27

Таблица П.12. Теплотворная способность q_g газов

Газ	q_g , МДж/м ³	Газ	q_g , МДж/м ³
Аммиак	14,2	Метан	35,9
Ацетилен	56,9	Пропан	93,4
Бутан	124	Сероводород	23,7
Бытовой газ	15,9	Этан	64,5
Водород	10,8	Этилен	60,0

Таблица П.13. Температура плавления и молярная теплота плавления

Вещество	$t_{пл},$ °C	$\lambda_m,$ кДж/моль	Вещество	$t_{пл},$ °C	$\lambda_m,$ кДж/моль
Азот	-210,012	0,7207	Кислород	-218,79	0,4459
Алюминий	660,24	10,8	Криптон	-157,37	1,64
Аргон	-189,30	1,190	Медь	1083	13,0
Ацетон	-95,4	5,72	Натрий	97,9	2,60
Бензол	5,51	9,837	Никель	1455	17,6
Висмут	217,4	11,0	Платина	1772	20
Вода	0,00	6,013	Ртуть	-38,89	2,30
Водород	-259,19	0,117	Свинец	327,44	4,77
Вольфрам	3420	35,1	Серебро	960,5	11,3
Гелий ¹	-271,4	0,007	Соль NaCl	801	28,2
Глицерин	20	18,47	Спирт	-113,3	5,02
Железо	1538	13,8	Титан	1608	15,1
Золото	1063,4	12,6	Уран	1134	9,2
Иод	113,6	15,77	Хлор	-101,03	6,61
Калий	63,5	2,33	Цинк	419,5	7,2

¹ Данные по ⁴He относятся к давлению $p = 3,0$ МПа; при нормальном давлении твердая фаза отсутствует.

Таблица П.14. Температура кипения и молярная теплота парообразования

Вещество	$t_{кип},$ °C	$r_m,$ кДж/моль	Вещество	$t_{кип},$ °C	$r_m,$ кДж/моль
Азот	-195,812	5,59	Кислород	-182,97	6,833
Алюминий	2520	293	Криптон	-153,22	9,046
Аргон	-185,9	6,5	Медь	2543	1302
Ацетон	56,2	29,09	Натрий	886	90,1
Бензол	80,099	30,76	Никель	2800	370
Висмут	1552	177	Платина	3827	511
Вода	100,00	40,683	Ртуть	356,66	59,23
Водород	-252,77	0,916	Свинец	1745	178
Вольфрам	5680	770	Серебро	2167	251
Гелий	-268,34	0,0837	Соль NaCl	1490	138
Глицерин	290	—	Спирт	78,5	38,74
Железо	2872	350	Титан	3287	410
Золото	2877	331	Уран	4030	494
Иод	184,35	41,8	Хлор	-34,1	20,41
Калий	761	76,6	Цинк	906,2	115,3

Таблица П.15. Эффективный диаметр d молекул, динамическая вязкость η и теплопроводность λ газов при атмосферном давлении и $T = 300$ К

Газ	d , нм	η , мкПа·с	λ , мВт/(м·К)
Азот	0,38	17,9	25,7
Аргон	0,35	22,7	17,7
Ацетон	—	7,77	11,2
Водород	0,28	8,94	183
Водяной пар	—	9,13	15,8
Воздух	—	18,5	24,1
Гелий	0,22	19,9	152
Кислород	0,36	20,7	26,7
Криптон	—	25,5	9,6
Углекислый газ	—	15,0	16,6
Фтор	—	23,6	27
Хлор	—	13,7	8,8

Таблица П.16. Критические параметры и постоянные a Ван-дер-Ваальса

Газ	$T_{кр}$, К	$p_{кр}$, МПа	$V_{кр}$, 10^{-6} м ³ /моль	a , Н·м ⁴ /моль ²	b , 10^{-6} м ³ /моль
Азот	126,25	3,399	92,1	0,1368	38,607
Аммиак	405,45	11,283	73,1	0,4249	37,347
Аргон	150,65	4,86	75,2	0,1361	32,191
Водород	33,24	1,297	65,5	0,02484	26,635
Водяной пар	647,30	22,12	56,3	0,5524	30,413
Воздух	413,80	3,77	—	1,3247	114,09
Гелий	5,20	0,229	57,5	0,00344	23,599
Кислород	154,78	5,081	78	0,1375	31,662
Криптон	209,38	5,50	92,3	0,2324	39,549
Озон	261,05	5,53	89,4	0,3592	49,038
Ртуть	1763	153,5	36,5	0,5905	11,936
Углекислый газ	304,15	7,387	94	0,3652	42,792
Фтор	144	5,6	66,2	0,1085	26,854
Хлор	417	7,71	124	0,6576	56,202

Таблица П.17. Коэффициент поверхностного натяжения σ и динамическая вязкость η жидкостей при 20 °С

Жидкость	σ , мН/м	η , мПа·с	Жидкость	σ , мН/м	η , мПа·с
Ацетон	23,70	0,322	Керосин	28,90	1,50
Бензол	28,88	0,648	Ртуть	465	1,554
Вода	72,88	1,002	Спирт	22,80	1,20
Глицерин	59,40	1480	Эфир	17,00	0,24

Таблица П.18. Температура Дебая θ_D

Вещество	θ_D , К	Вещество	θ_D , К	Вещество	θ_D , К
Азот	81	Железо	477	Серебро	227
Алмаз	2250	Золото	162	Титан	420
Алюминий	433	Кремний	645	Уран	248
Аргон	92	Медь	347	Фтор	78
Висмут	120	Никель	477	Хлор	115
Вольфрам	383	Ртуть	72	Цинк	329
Графит	413	Свинец	105		

Таблица П.19. Работа выхода электронов A из металлов

Металл	A , эВ	A , 10^{-19} Дж	Металл	A , эВ	A , 10^{-19} Дж
Калий	2,2	3,5	Платина	6,3	10,1
Литий	2,3	3,7	Серебро	4,7	7,5
Натрий	2,5	4,0	Цинк	4,0	6,4

Таблица П.20. Масса нейтральных атомов

Элемент	Z	Изотоп	Масса, а. е. м.	Элемент	Z	Изотоп	Масса, а. е. м.
(Нейтрон)	0	n	1,00867	Азот	7	^{13}N	13,00574
Водород	1	^1H	1,00783			^{14}N	14,00307
		^2H	2,01410			^{15}N	15,00011
		^3H	3,01605	Кислород	8	^{16}O	15,99491
Гелий	2	^3He	3,01603			^{17}O	16,99913
		^4He	4,00260			^{18}O	17,99916
Литий	3	^6Li	6,01513	Фтор	9	^{19}F	18,99840
		^7Li	7,01601	Натрий	11	^{22}Na	21,99444
Бериллий	4	^7Be	7,01693			^{23}Na	22,98977
		^9Be	9,01219	Магний	12	^{23}Mg	22,99414
		^{10}Be	10,01354	Алюминий	13	^{30}Al	29,99817
Бор	5	^9B	9,01333	Кремний	14	^{31}Si	30,97535
		^{10}B	10,01294	Фосфор	15	^{31}P	30,97376
		^{11}B	11,00931	Калий	19	^{41}K	40,96184
Углерод	6	^{10}C	10,00168	Кальций	20	^{44}Ca	43,95549
		^{12}C	12,00000	Свинец	82	^{206}Pb	205,97446
		^{13}C	13,00335	Полоний	84	^{210}Po	209,98297
		^{14}C	14,00324	Плутоний	94	^{239}Pu	239,05216

Таблица П.21. Масса и энергия покоя некоторых частиц и легких ядер

Частица	Масса		Энергия	
	m , кг	m , а. е. м.	mc^2 , Дж	mc^2 , МэВ
Электрон	$9,109 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,5110
π -Мезон π^0	$2,406 \cdot 10^{-28}$	0,14490	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135,0
Протон	$1,673 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938,3
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939,6
Дейтрон	$3,344 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,01 \cdot 10^{-10}$	1876
α -Частица	$6,645 \cdot 10^{-27}$	4,00150	$5,97 \cdot 10^{-10}$	3727

Таблица П.22. Период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ	Тип распада	$T_{1/2}$
Актиний	$^{225}_{89}\text{Ac}$	α	10,0 сут
Иод	$^{131}_{53}\text{I}$	β^- , γ	8,04 сут
Иридий	$^{192}_{77}\text{Ir}$	β^- , γ	73,83 сут
Кобальт	$^{60}_{27}\text{Co}$	β^- , γ	5,27 года
Магний	$^{27}_{12}\text{Mg}$	β^-	9,46 мин
Натрий	$^{22}_{11}\text{Na}$	γ	2,60 года
Радий	$^{220}_{88}\text{Ra}$	α	0,023 с
Радий	$^{226}_{88}\text{Ra}$	α , γ	1600 лет
Радон	$^{222}_{86}\text{Rn}$	α	3,82 сут
Стронций	$^{90}_{38}\text{Sr}$	β^-	28,6 лет
Торий	$^{229}_{90}\text{Th}$	α , γ	7340 лет
Уран	$^{235}_{92}\text{U}$	α	$7,04 \cdot 10^8$ лет
Уран	$^{238}_{92}\text{U}$	α , γ	$4,47 \cdot 10^9$ лет
Фосфор	$^{32}_{15}\text{P}$	β^-	14,36 сут

Таблица П.23. Коэффициент качества Q различных видов излучения

Излучение	Q	Излучение	Q
Рентгеновское и γ -излучение	1	$E = 2 \dots 20$ МэВ	10
β -Излучение	1	$E > 20$ МэВ	5
Нейтроны $E < 10$ кэВ	5	Протоны $E > 2$ МэВ	5
$E = 10 \dots 100$ кэВ	10	α -Излучение и другие тяжелые ядра	20
$E = 100$ кэВ \dots 2 МэВ	20		

Таблица П.24. Некоторые астрономические величины

Физическая величина	Обозначение	Значение
Масса Земли	M_{\oplus}	$5,976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Земли	R_{\oplus}	$6,3814 \cdot 10^6$ м
Ускорение свободного падения	g	$9,80665$ м/с ²
Период обращения Земли вокруг своей оси (звездные сутки)		23 ч 56 мин 4 с = 86 164,09 с
Расстояние от Земли до Луны		$3,844 \cdot 10^8$ м
Масса Луны	M_{ζ}	$7,35 \cdot 10^{22}$ кг
Радиус Луны	R_{ζ}	$1,737 \cdot 10^6$ м
Большая полуось орбиты Земли		1 а. е. = $1,4960 \cdot 10^{11}$ м
Средняя орбитальная скорость Земли	v_{\oplus}	29,765 км/с
Период обращения Земли вокруг Солнца		1 год = $3,1557 \cdot 10^7$ с
Масса Солнца	M_{\odot}	$1,9889 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Солнца	R_{\odot}	$6,9599 \cdot 10^8$ м
Светимость Солнца	L_{\odot}	$3,826 \cdot 10^{26}$ Дж/с

Таблица П.25. Основные физические постоянные

Физическая величина	Обозначение	Значение
Гравитационная постоянная	G	$6,67259 \cdot 10^{-11}$ м ³ · кг ⁻¹ · с ⁻²
Скорость света	c	$2,99792458 \cdot 10^8$ м · с ⁻¹
Элементарный заряд	e	$1,60217733 \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Планка	h	$6,6260755 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Планка $h/2\pi$	\hbar	$1,05457266 \cdot 10^{-34}$ Дж · с = $= 6,5821220 \cdot 10^{-16}$ эВ · с
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,854187817 \cdot 10^{-12}$ Кл ² · Н ⁻¹ · м ⁻²
Магнитная постоянная	μ_0	$12,566370614 \cdot 10^{-7}$ Н · А ⁻²
Масса электрона	m_e	$9,1093897 \cdot 10^{-31}$ кг = $= 0,51099906$ МэВ/с ²
Масса протона	m_p	$1,6726231 \cdot 10^{-27}$ кг = $= 938,27231$ МэВ/с ² = $= 1,007276470$ а. е. м. = $= 1836,152701 m_e$
Масса нейтрона	m_n	$1,6749286 \cdot 10^{-27}$ кг = $= 939,56563$ МэВ/с ² = $= 1,008664904$ а. е. м.
Атомная единица массы	а. е. м.	$1,6605402 \cdot 10^{-27}$ кг $931,49432$ МэВ/с ²
Постоянная Больцмана	k_B	$1,380658 \cdot 10^{-23}$ Дж · К ⁻¹ $8,617385 \cdot 10^{-5}$ эВ · К ⁻¹
Число Авогадро	N_A	$6,0221367 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹

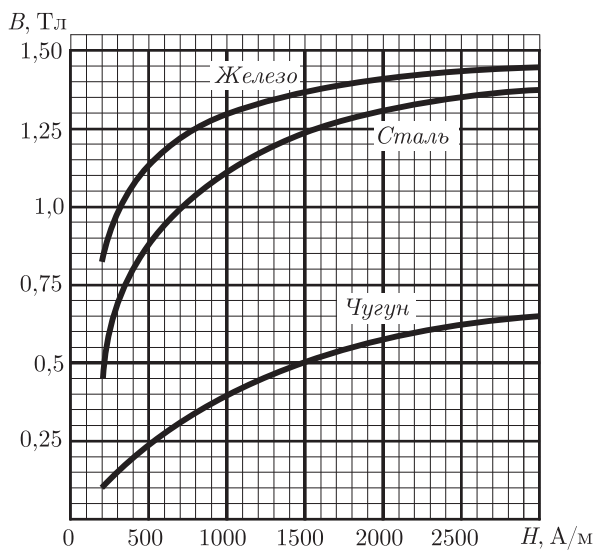


Рис. 116. График зависимости магнитной индукции B от напряженности H магнитного поля

ОТВЕТЫ

I. Физические основы механики

- I.1.1.** $v_{cp}=2,5$ м/с. **I.1.2.** $v_{cp}=64,9$ км/ч. **I.1.3.** $v_{cp}=160$ км/ч.
I.1.4. $v_{cp}=8,9$ м/с. **I.1.5.** $v=0,5$ м/с. **I.1.6.** $v_{cp}=3$ м/с.
I.1.7. 1) $|\Delta\vec{r}|=111,8$ км; 2) $\langle v \rangle=49,7$ км/ч; 3) $v_{cp}=66,7$ км/ч.
I.1.8. 1) $\langle v \rangle=6,79$ км/ч; 2) $\beta=6,96^\circ$. **I.1.9.** Под углом $\alpha=43,54^\circ$ к северу от направления на восток. **I.1.10.** 1,9 ч; в 1,7 раза; $8,6^\circ$. **I.1.11.** $\langle v \rangle=3,2$ м/с.
I.1.12. $s=288,7$ м; при $L \leq s$ машина из А сразу должна съехать с шоссе и взять курс на пункт В (рис. 5). **I.1.13.** 1) $t_1=12$ с; 2) $v_1=7,68$ м/с; 3) $v_{cp}=3,12$ м/с. **I.1.14.** $\langle v \rangle=0$ м/с; $\langle v_1 \rangle=-3$ м/с; $\langle v \rangle=3$ м/с.
I.1.15. $t_1=0,235$ с; $v_1=5,11$ м/с; $v_2=0,284$ м/с. **I.1.16.** $t_1=0,333$ с; $v_1=v_2=1,33$ м/с; $a_1=-8$ м/с²; $a_2=1$ м/с². **I.1.17.** $s=24$ м; $v=38$ м/с; $a=42$ м/с². **I.1.18.** $v=101,6$ км/ч.
I.1.19. $t=(v_2-v_1)/a \{1+\sqrt{1+2a\Delta t/(v_2-v_1)}\}$; $t \approx 7$ с. **I.1.20.** $a=v_0^2/(2l)$; $a=15g$. **I.1.21.** $t_0=t_2^2/(t_1-t_2)-(t_1-t_2)/2$. **I.1.22.** $a=1,42$ м/с².
I.1.23. $a=11,3$ м/с². **I.1.24.** $v=20$ м/с; $a=41,8$ рад/с².
I.1.25. $\varepsilon=0,43$ рад/с². **I.1.26.** 1) -280 рад/с; 2) -340 рад/с²; 3) $5,0+6,0t-18t^3$; 4) $6-54t^2$; 5) -463 рад/с, -480 рад/с².
I.1.27. 1) $6,4$ рад/с²; 2) 66 м/с²; $2,6$ м/с². **I.1.28.** 1) $6,5$ с; 2) $0,53$ рад/с².
I.1.29. 1) $-1,5$ рад/с²; 2) 20 с. **I.1.30.** $\varepsilon=1,26$ рад/с². **I.1.31.** $\varepsilon=4$ рад/с².
I.1.32. $R=6,1$ м. **I.1.33.** $H=1,53$ км; $s=3,53$ км; $R=1,02$ км.
I.1.34. $S=H \cos \alpha / (\sin \alpha + \sqrt{v_2^2/v_1^2 - \cos^2 \alpha})$; $s=103$ м. **I.1.35.** $R=6,3$ м.
I.1.36. $\alpha=33^\circ$; $s=227$ м. **I.1.37.** $a_\tau=4,9$ м/с²; $a_n=8,5$ м/с². **I.1.38.** $s=22$ м.
I.1.39. $v_0^2=9gR$; $\operatorname{tg}^2 \alpha=8$; $S=2,82R$.
- I.2.1.** 1) $T_1=25,6$ Н; 2) $T_2=13,6$ Н. **I.2.2.** 1) Поднимается с $a=5,2$ м/с²; 2) опускается с $a=2,3$ м/с². **I.2.3.** Дополнительный вклад в вес тела обусловлен силой Кориолиса. Знак «плюс» при движении корабля с запада на восток; знак «минус» — с востока на запад. **I.2.4.** 1) $v(t)=\frac{g}{k}(1-e^{-kt})$;
2) $v_{ycr}=g/k$. **I.2.5.** $\Delta g/g=4\pi^2 R_{\text{б}}/T^2 g$; $\Delta g/g=3 \cdot 10^{-3}$. **I.2.6.** $\langle F \rangle=150$ Н.
I.2.7. $\langle F \rangle=0,2$ мН. **I.2.8.** $v=10,2$ м/с. **I.2.9.** $Q_m=24,5$ кг/с.
I.2.10. $\mu=0,46$. **I.2.11.** $|\Delta \vec{p}|=1,33$ кг·м/с. **I.2.12.** $p=3$ кг·м/с.
I.2.13. $p=5$ кг·м/с. **I.2.14.** $\nu=0,5$ с⁻¹= 30 мин⁻¹. **I.2.15.** $F/P=6,1$.
I.2.16. $\alpha=60,2^\circ$. **I.2.17.** $v_1=0,3$ м/с. **I.2.18.** $F=6$ Н. **I.2.19.** $N=39$ кН.
I.2.20. $a=1,96$ м/с². **I.2.21.** $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \frac{l}{\sqrt{(2R)^2-l^2}}$; $\alpha = \frac{\pi}{6}$. **I.2.22.** $3,9$ м.
I.2.23. 1) $a=2,45$ м/с²; 2) $T=7,35$ Н; груз массой m_2 опускается.

I.2.24. 1) $a=1,01 \text{ м/с}^2$; 2) $T=5,9 \text{ Н}$. **I.2.25.** 1) $u=6,29 \text{ м/с}$; 2) $u=0,57 \text{ м/с}$.

I.2.26. $u=0,4 \text{ м/с}$. **I.2.27.** $v_2=114 \text{ м/с}$; движется в том же направлении.

I.2.28. $u_2=849 \text{ м/с}$; $\alpha=45^\circ$. **I.2.29.** $u_1=0,38 \text{ м/с}$; $u_2=0,62 \text{ м/с}$.

I.2.30. $u=0,75 \text{ м/с}$; $v_1=0,25 \text{ м/с}$. **I.2.31.** $F=21 \text{ кН}$; $s=0,8 \text{ м}$.

I.2.32. 1) $g(2y-L)/L$; 2) $\sqrt{2gy_0\left(1-\frac{y_0}{L}\right)}$; 3) $\frac{2}{3}\sqrt{gL}$. **I.2.33.** $2,6 \text{ Мм}$.

I.2.34. 33 нН по направлению к центру квадрата. **I.2.35.** $2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$.

I.2.36. $1,4 \text{ ч}$. **I.2.37.** 225 сут . **I.2.38.** $2,96 \cdot 10^4 \text{ м/с}$; $3,06 \cdot 10^4 \text{ м/с}$.

I.3.1. 1) $E=90\,000 \text{ Мт}$; 2) $d=45 \text{ км}$. **I.3.2.** $A=1,1Mgh$. **I.3.3.** $A=336 \text{ Дж}$.

I.3.4. $T=5 \text{ Дж}$; $U=15 \text{ Дж}$. **I.3.5.** $N_1=0,32 \text{ Вт}$; $N_2=56 \text{ Вт}$.

I.3.6. $A=390 \text{ Дж}$. **I.3.7.** $T_1=7,5 \text{ Дж}$. **I.3.8.** $v_1=2,12 \text{ м/с}$; $v_2=4,24 \text{ м/с}$.

I.3.9. $m_2=2m$. **I.3.11.** $\vec{u}_1=4,8\vec{i} \text{ м/с}$; $\vec{u}_2=3\vec{j} \text{ м/с}$. **I.3.13.** 1) $0,43 \text{ м}$;

2) $-2,1 \text{ м/с}$; $5,9 \text{ м/с}$; 3) да. **I.3.14.** 1) $2,5 \cdot 10^{-16} \text{ м/с}$; 2) $1,7 \cdot 10^{-17}$;

3) $1,9 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$. **I.3.15.** $1,8 \text{ кДж}$; $2,7 \text{ кДж}$. **I.3.16.** 141° .

I.3.17. $T_1=150 \text{ кДж}$. **I.3.18.** $v=1 \text{ м/с}$. **I.3.19.** 1) $0,18 \text{ МДж}$; 2) 22 м/с ;

3) $3,2 \text{ м}$. **I.3.20.** $k(x^2-x_0^2)/2$. **I.3.21.** $F_{\max}=11,3 \text{ кН}$; $\Delta t=0,9 \text{ с}$.

I.3.22. $\approx 18 \text{ м/с}$. **I.3.23.** $s=4,24 \text{ см}$. **I.3.24.** 1) $\Delta x=mg/k$; 2) $\Delta x_{\max}=2mg/k$.

I.3.25. 1) $A=9,6 \text{ Дж}$; 2) $A=86,4 \text{ Дж}$. **I.3.26.** $A=996 \text{ Дж}$.

I.3.27. 1) $v=\sqrt{2gl(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}=12 \text{ м/с}$; 2) $s=\frac{1}{\mu}\sin\alpha-l\cos\alpha=87 \text{ м}$.

I.3.28. $T=632 \text{ Дж}$. **I.3.29.** $Q_M=dM/dt=M\left(g_0\frac{R_3^2}{(R_3+h)^2}+a\right)/v_{\text{отн}}=86,5 \text{ кг/с}$.

I.3.30. $t=7 \text{ с}$. **I.3.31.** $h=16 \text{ см}$. **I.3.32.** $h=7,35 \text{ см}$. **I.3.33.** $3,5 \text{ км/с}$.

I.3.34. $\frac{3}{2}v_0\vec{i}-v_0\vec{j}$. **I.3.35.** 1) $7,4 \text{ км/с}$ и 5 км/с в первоначальном

направлении; 2) $0,68 \text{ МДж}$. **I.3.36.** $v=700 \text{ м/с}$. **I.3.37.** $s=0,3 \text{ м}$.

I.3.38. $T_1=5,625 \text{ Дж}$; $T'_1=0,625 \text{ Дж}$. **I.3.39.** Удар неупругий; $m_1 < m_2$.

I.3.40. $A=0,21 \text{ Дж}$. **I.3.41.** $U_1=0,4 \text{ Дж}$; $U_2=0,8 \text{ Дж}$; $U=1,2 \text{ Дж}$.

I.3.42. $A=2,1 \text{ Дж}$. **I.3.43.** 1) 78 кДж ; 2) $0,61 \text{ кН}$. **I.3.44.** $A=6,4 \text{ Дж}$.

I.3.45. $\eta=97,4\%$. **I.3.46.** $\eta=80,6\%$. **I.3.47.** $\approx 206 \text{ Вт}$. **I.3.48.** 1) 50 м/с ;

2) $0,81 \text{ МВт}$. **I.3.49.** 1) $N=35,9 \text{ л. с.}$; 2) $\Delta N=32,6 \text{ л. с.}$ **I.3.50.** 1) $0,87 \text{ МДж}$;

2) 61 Вт ; $8,1 \cdot 10^{-2} \text{ л. с.}$; 3) $0,54 \text{ л. с.}$ **I.3.51.** 300 Вт . **I.3.52.** $1,9 \text{ кН}$.

I.3.53. $\frac{c}{2}R_0(1-n^{-2})$. **I.3.55.** 1) $1,78 \cdot 10^{32}$; 2) $1,78 \cdot 10^{32}$; 3) 0.

I.3.56. $R_3^2v_0^2/(2GM-R_3v_0^2)$; $7,5 \cdot 10^6 \text{ м}$. **I.3.57.** 1) $3,56 \text{ км/с}$; 2) $3,65 \text{ ГДж}$;

3) $1,12 \text{ ГН}$; 4) $3,65 \text{ ГДж}$.

I.4.1. $J=7,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. **I.4.2.** $J=0,0235 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. **I.4.3.** 1) $3,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$;

2) $0,24 \text{ Н}\cdot\text{м}$. **I.4.4.** $0,19 \text{ м}$. **I.4.5.** $8,7 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}$. **I.4.6.** 1) $J_1=3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$;

2) $J_2=0,75 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; 3) $J_3=10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. **I.4.7.** $\omega=1,02 \text{ рад/с}$.

I.4.8. $F=4 \text{ Н}$. **I.4.9.** $T=490 \text{ Дж}$. **I.4.10.** $T=24 \text{ Дж}$. **I.4.11.** $T_{\text{пост}}=10 \text{ Дж}$;

$T_{\text{вр}}=4 \text{ Дж}$. **I.4.12.** $T=2,6 \cdot 10^{29} \text{ Дж}$; $t=1,3 \text{ млрд лет}$. **I.4.13.** $\nu_2=10 \text{ мин}^{-1}$.

I.4.14. $\mu=0,31$. **I.4.15.** $\omega=0,44 \text{ рад/с}$. **I.4.16.** $J_{(y)}=0,112 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

I.4.17. $J_{(x)}=1,92 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. **I.4.18.** $J_{(z)}=0,114 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $J_{(z)}=J_{(x)}+J_{(y)}$.

I.4.19. $9,2 \cdot 10^3 \text{ об}$; 110 с . **I.4.20.** 1) $0,26 \text{ м/с}^2$; 2) $0,024 \text{ Н}\cdot\text{м}$. **I.4.21.** 1) $\frac{1}{2}mR_0^2$;

2) $\frac{3}{2}mR_0^2$. **I.4.22.** $\frac{1}{2}M\frac{R_1^4+R_2^4}{R_1^2+R_2^2}$. **I.4.23.** $ma^2/6$. **I.4.24.** $a=0,24 \text{ м/с}^2$;

$a_0=0,47 \text{ м/с}^2$. **I.4.25.** $M=0,025 \text{ Н}\cdot\text{м}$. **I.4.26.** 1) $\omega=0,148 \text{ рад/с}$; 2) $\eta=0,0123$; 3) $\varphi=181,3^\circ$. **I.4.27.** 1) $\omega=14 \text{ рад/с}$; $v=1,05 \text{ м/с}$; 2) $\omega=14 \text{ рад/с}$; $v=2,1 \text{ м/с}$. **I.4.28.** $v_{\text{обр}}=3,13 \text{ м/с}$; $v_{\text{диск}}=3,62 \text{ м/с}$; $v_{\text{шар}}=3,74 \text{ м/с}$. **I.4.29.** $0,59 \text{ рад/с}$; $0,83 \text{ рад/с}$. **I.4.30.** $2,2\cdot 10^4 \text{ Дж}$. **I.4.31.** 12 м/с . **I.4.32.** 1) $3,4 \text{ м}$; 2) 4 с . **I.4.33.** 54 л. с. **I.4.34.** 2) $2,2\cdot 10^3 \text{ рад/с}$; 3) 23 мин. **I.4.35.** $S=46,2 \text{ см}$.

I.5.1. $70,8 \text{ лет.}$ **I.5.2.** 1) $0,80\text{с}$; 2) $-0,80\text{с}$. **I.5.3.** $0,90\text{с}$; 93° .

I.5.4. 1) $5,9\cdot 10^{19} \text{ Дж}$; 2) $4,7\%$. **I.5.5.** 1) $L=L_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}\cos^2\theta}$;

2) $\theta'=\arctg\left(\frac{\text{tg}\theta}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)$. **I.5.6.** $1,25$. **I.5.7.** 1) $8,92 \text{ м}$,

$1,45 \text{ м}$; 2) 13 с ; 3) $-0,760\text{с}$; 4) 13 с . **I.5.8.** 1) $u_1=0,652\text{с}$; 2) $u_2=0,974\text{с}$.

I.5.9. $v_\pi=0,93\text{с}$. **I.5.10.** $v_\gamma=c$. **I.5.11.** 1) $v=c(1-5\cdot 10^{-9})$; 2) 30 см .

I.5.14. $v=0,745\text{с}$. **I.5.15.** $2,53\cdot 10^{-27} \text{ кг}$. **I.5.16.** $0,14\text{с}$.

I.5.17. $p=2,05\cdot 10^{-23} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$. **I.5.18.** $T=6,10\cdot 10^{-12} \text{ Дж}$; $p=1,44\cdot 10^{-19} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$; $5,8\%$; $3,9\%$. **I.5.19.** $v=0,707\text{с}$. **I.5.20.** 1) $v=298 \text{ Мм/с}$; 2) $v=18,7 \text{ Мм/с}$.

I.5.21. $T=0,414\text{мс}^2$. **I.5.22.** 1) $2,98$; 2) $1,58$.

II. Основы термодинамики и статистической физики

II.1.1. $p=175 \text{ кПа}$. **II.1.2.** $m_1=16 \text{ г}$; $m_2=8 \text{ г}$. **II.1.3.** $n=2,42\cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$.

II.1.4. $m_{\text{Au}}=m_{\text{Fe}}\mu_{\text{Au}}/\mu_{\text{Fe}}=3,53 \text{ кг}$. **II.1.5.** 1) $p=414 \text{ Па}$; 2) $p=138 \text{ кПа}$.

II.1.6. $2,9 \text{ см}^3$. **II.1.7.** $1,8 \text{ кН}$. **II.1.8.** $\tau=\frac{V}{S}\sqrt{12\mu/(RT)}\approx 1,4\cdot 10^7 \text{ с}$.

II.1.9. $\Delta N=\Delta S\Delta t\cdot n\langle v\rangle/6=N_{\text{Ар0}}\Delta S\Delta t/\sqrt{3\mu RT}=6,45\cdot 10^{24}$.

II.1.10. $N=1,2\cdot 10^{27}$. **II.1.11.** Нет. $V=12,1 \text{ л}$.

II.1.12. $N=N_{\text{Ар0}}\Delta V/(RT)=2,7\cdot 10^{22}$. **II.1.13.** $n=p/kT=2,7\cdot 10^2 \text{ см}^{-3}$.

II.1.14. 1) $m_1=\mu p_0V/RT=0,77 \text{ т}$; 2) $\Delta m=\frac{\mu P_0V}{R}\left(\frac{T_1-T_2}{T_1T_2}\right)=65 \text{ кг}$.

II.1.15. $W_{\text{пост}}=249 \text{ Дж}$. **II.1.16.** $W=750 \text{ Дж}$. **II.1.17.** $T=7,25 \text{ кК}$;

$\langle E_{\text{пост}}\rangle=1,5\cdot 10^{-19} \text{ Дж}=0,94 \text{ эВ}$. **II.1.18.** $\langle E_{\text{пост}}\rangle=1,24\cdot 10^{-20} \text{ Дж}=77,5 \text{ мЭВ}$;

$\langle E\rangle=2,48\cdot 10^{-20} \text{ Дж}=103 \text{ мЭВ}$; $W_{\text{пост}}=7,48 \text{ МДж}$.

II.1.19. $\langle E_{\text{He}}\rangle=8,28\cdot 10^{-21} \text{ Дж}=52 \text{ мЭВ}$; $\langle E_{\text{O}_2}\rangle=1,38\cdot 10^{-20} \text{ Дж}=86 \text{ мЭВ}$;

$\langle E_{\text{H}_2\text{O}}\rangle=1,66\cdot 10^{-20} \text{ Дж}=103 \text{ мЭВ}$. **II.1.20.** $\langle E_1\rangle=6,9\cdot 10^{-21} \text{ Дж}=43 \text{ мЭВ}$;

$\langle E_{\text{пост}}\rangle=20,7\cdot 10^{-21} \text{ Дж}=129 \text{ мЭВ}$; $\langle E_{\text{вращ}}\rangle=13,8\cdot 10^{-21} \text{ Дж}=86 \text{ мЭВ}$;

$\langle E_1\rangle=34,5\cdot 10^{-21} \text{ Дж}=215 \text{ мЭВ}$. **II.1.21.** $T=200 \text{ К}$. **II.1.22.** $\nu=4,98 \text{ ммоль}$;

$N=3\cdot 10^{21}$. **II.1.23.** $\rho=35 \text{ кг/м}^3$. **II.1.24.** $\langle E\rangle=20,7\cdot 10^{-21} \text{ Дж}=129 \text{ мЭВ}$.

II.1.25. $p_{\text{O}_2}=0,18 \text{ МПа}$; $p_{\text{N}_2}=0,82 \text{ МПа}$. **II.1.26.** $S=4,9\cdot 10^6 \text{ м}^2=490 \text{ га}$.

II.1.27. $m=3,28\cdot 10^6 \text{ т}$. **II.1.28.** $19,5\cdot 10^9$. **II.1.29.** $h=5,87 \text{ км}$.

II.1.30. $w=4,8\%$. **II.1.31.** $v_{\text{кв}}=183 \text{ м/с}$. **II.1.32.** $v_{\text{кв}}=9,53\cdot 10^6 \text{ м/с}$.

II.1.33. $T_2/T_1=0,67$. **II.1.34.** Чаще соударяются большие шарики

о большие; $\sqrt{2}$. **II.1.35.** $d=0,323 \text{ нм}$. **II.1.36.** $\lambda=15 \text{ см}$.

II.1.37. $p\leq 1,8 \text{ МПа}$. **II.1.38.** $d_{\text{CO}_2}\approx 3,9\cdot 10^{-10} \text{ м}$; $d_{\text{He}}\approx 1,3\cdot 10^{-10} \text{ м}$.

II.1.39. $T=1,4\cdot 10^5 \text{ К}$.

II.2.1. $\Delta A=R(T_3+T_1-2\sqrt{T_3T_1})$. **II.2.2.** $Q=\Delta U=556 \text{ кДж}$; ($A=0$).

II.2.3. $A=400 \text{ Дж}$. **II.2.4.** $T_2=2500 \text{ К}$; $Q=16,5 \text{ кДж}$. **II.2.5.** $Q=560 \text{ Дж}$.

II.2.6. $U = \nu \cdot \frac{7}{2} RT = 52,4$ кДж. **II.2.7.** $\Delta U = 0$; $A = Q = 11,5$ кДж. **II.2.8.** Газ расширялся; $\Delta A = (c - c_V)\Delta T = 75,4$ Дж. **II.2.9.** $\Delta T < 0$; $\Delta T = -2,7$ К; $\Delta Q = -13,5$ Дж. **II.2.10.** 1) $\Delta A = 1,6$ кДж; 2) $\Delta Q = 1,6$ кДж.

II.2.11. $\Delta Q = 4,25$ МДж. **II.2.12.** 1) $\Delta Q = 3,22$ МДж; 2) $\Delta A = 0,92$ МДж; 3) $\Delta U = 2,3$ МДж. **II.2.13.** 158 Дж. **II.2.14.** 1) 166 кДж; 2) -77 кДж; 3) 89 кДж. **II.2.15.** 60 °С; 40 °С. **II.2.16.** $m_{\text{л}} = 22$ г.

II.2.17. $A = 0,22$ МДж. **II.2.18.** $\Delta U = -3,8$ МДж. **II.2.19.** $\Delta U = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T$; $\Delta T = \frac{\Delta A}{\frac{3}{2} \frac{m}{\mu}} R$; $\Delta U = \Delta A$. **II.2.21.** $p_2 = 2,5$ МПа. **II.2.22.** $A = 416$ Дж.

II.2.23. $\Delta V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 5$ л. **II.2.24.** $\Delta T = -76$ К.

II.2.25. $\Delta Q = \Delta U = \frac{3}{2} V \Delta p = 13,5$ кДж. **II.2.26.** $T_{\text{max}} = T_0 + Mu^2 / (3R)$.

II.2.27. $\mu = 0,032$ кг/моль — кислород; $c_p = 910$ Дж/(кг·К); $c_V = 650$ Дж/(кг·К).

II.2.28. $c_{m,V} = 16,6$ Дж/(моль·К); $c_{m,p} = 24,9$ Дж/(моль·К); $\gamma = 1,5$.

II.2.29. $c_V = 6,42$ кДж/(кг·К); $c_p = 9,45$ кДж/(кг·К); $\gamma = 1,47$.

II.2.31. $\eta = 0,192$. **II.2.32.** $A = 400$ Дж. **II.2.33.** $T_1 = 420$ К.

II.2.34. $A = 28$ кДж. **II.2.35.** $Q_2 / Q_1 = 1/4$. **II.2.36.** $\Delta A = 237,5$ ГДж.

II.2.37. 720 °С. **II.2.38.** $\eta' / \eta = 1,78$.

II.2.39. $\eta = \frac{\ln \frac{T}{T_1} - \left(1 - \frac{T_1}{T}\right)}{\ln \frac{T}{T_2} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{T_1}{T}\right)} = \frac{\ln 1,5 - \frac{1}{3}}{\ln 1,5 + 0,5} = 0,08$. **II.2.40.** $\eta = 23,7\%$.

II.2.41. $\eta_{\text{проект}} = 0,55$; $\eta_C = 0,49$ — инвестирование нецелесообразно.

II.2.42. $V_1 / V_2 = (T_2 / T_1)^{1/(\gamma-1)} = 13,1$. **II.2.43.** 1) $T_1 = 295$ К, $T_2 = 142$ К;

2) $\Delta U = 0,56$ кДж; 3) $\Delta A = -0,56$ кДж; 4) $\Delta Q = 0$. **II.2.44.** $\Delta V = 11$ км³/сут;

да; $\Delta S = 57$ м². **II.2.45.** 1) 1-2, 2-3, 3-4, 4-1; 3) $\eta = 51\%$. **II.2.46.** $\eta = 0,783$.

II.2.47. $\eta = 0,746$; $\Delta m / \Delta t = 81$ кг/с. **II.2.48.** $\eta' = 3,73$; $\eta = 0,79$; $Q_1 = 710$ Дж.

II.2.49. $\eta_{\text{хол}} = 0,85$; $A = 31$ кДж; $Q_1 = 208$ кДж; $\eta'_C = 6,9$, $\eta_C = 0,87$.

II.2.50. $P = 350$ Вт. **II.2.51.** 1,67 МДж. **II.2.52.** $t_B = t_{\text{л}} = -7,7$ °С.

II.2.53. 0,187 кг. **II.2.54.** $t_B = 39,3$ °С. **II.2.55.** $\Delta t = 2$ °С.

II.2.56. $\Delta m / \Delta t = 334$ г/ч. **II.2.57.** $\Delta m_{\text{л}} = 3$ г.

III. Основы классической теории электромагнетизма

III.1.1. $q = Q/2$. **III.1.2.** $F_1 / F_2 = 4/3$. **III.1.3.** ± 1 мкКл; ∓ 3 мкКл.

III.1.4. $\pm 3,15$ мкКл; $\pm 0,318$ мкКл. **III.1.5.** 5,1 м. **III.1.6.** 11,8 см.

III.1.7. 52,8 Н; 15,8 Н; 37 Н. **III.1.8.** 102,0 Н; 15,8 Н; 86,2 Н.

III.1.9. 22,4 см от заряда Q_1 ; 10,6 см от заряда Q_2 . **III.1.10.** На линии

между зарядами: 8 см от заряда Q_1 ; 3,8 см от заряда Q_2 . **III.1.12.** 0,33 Н,

все силы направлены от центра квадрата. **III.1.13.** 0,16 Н, все силы

направлены к центру квадрата. **III.1.14.** 0,26 Н. **III.1.15.** 18 Н.

III.1.16. 18 Н. **III.1.17.** 55 Н, все силы направлены от центра тетраэдра.

III.1.18. 19,8 Н, сила направлена к центру тетраэдра. **III.1.19.** 11,5 Н.

III.1.20. 4,8 мкКл. **III.1.21.** 54 нКл. **III.1.22.** 18 мкН. **III.1.23.** 3,6 мН.

III.1.24. 1,27 мкН. **III.1.25.** 2,55 мН, направлена под углом 135° к нити

(оси x). **III.1.26.** $1,0 \cdot 10^{-7}$ В/м. **III.1.27.** $5,6 \cdot 10^{-11}$ В/м.
III.1.28. 0,99 МВ/м. **III.1.29.** 1,39 МВ/м. **III.1.30.** $2,9 \cdot 10^5$ В/м.
III.1.31. 0,29 мВ/м. **III.1.32.** 66 МВ/м. **III.1.33.** 32 МВ/м.
III.1.34. 52 МВ/м. **III.1.36.** 1) $25,4 \text{ Нм}^2/\text{Кл}$; 2) $18 \text{ Нм}^2/\text{Кл}$; 3) 0.
III.1.37. 1) $9,4 \cdot 10^4 \text{ Нм}^2/\text{Кл}$; 2) поток не зависит от размеров куба.
III.1.38. 12,8 нКл; заряд определяется суммарным потоком и от размеров окружающей заряд поверхности не зависит. **III.1.39.** 1) $4,9 \cdot 10^{10}$ В/м;
 2) $1,4 \cdot 10^6$ В/м. **III.1.40.** 1) $7,14 \cdot 10^9$ В/м; 2) $1,36 \cdot 10^6$ В/м.
III.1.41. $-12,6$ В/м; 5 В/м. **III.1.42.** 37,7 В/м; 22,8 В/м.
III.1.43. 44 В/м; $-7,6$ В/м. **III.1.44.** $-56,5$ В/м; $-3,9$ В/м.
III.1.45. 182 В/м; 180 В/м. **III.1.46.** 92 В/м; 539 В/м.

III.2.1. $1,1 \cdot 10^9$ Дж; 250 кг. **III.2.2.** 18 МВ. **III.2.3.** 9,4 МВ.
III.2.4. 96 кэВ. **III.2.5.** $W = -27,2$ эВ; $T = 13,6$ эВ; $A = 13,6$ эВ.
III.2.6. 0,48 МэВ; 0. **III.2.7.** 0,12 МэВ, 0,36 МэВ. **III.2.8.** а) 15,2 см от заряда Q_1 , 3,4 см от заряда Q_2 ; б) 9,6 см от заряда Q_1 , 2,2 см от заряда Q_2 .
III.2.9. Сфера радиусом 12 см с центром на линии, соединяющей заряды, на расстоянии 18 см от Q_1 и 8 см от Q_2 . **III.2.10.** Сфера радиусом 8 см с центром на линии, соединяющей заряды, на расстоянии 16 см от Q_1 и 4 см от Q_2 . **III.2.11.** $-8,3 \cdot 10^8$ В. **III.2.12.** 6,5 МВ. **III.2.13.** 10^{-2} м;
 $3,3 \cdot 10^{-8}$ Кл. **III.2.16.** $3,4 \cdot 10^{-26}$ Н. **III.2.17.** $1,7 \cdot 10^{-26}$ Н.
III.2.18. $1,6 \cdot 10^{-5}$ В. **III.2.19.** 610 В/м.
III.2.20. $Q = 3,4 \cdot 10^{-20}$ Кл = $0,2e$. **III.2.21.** $Q = 7,0 \cdot 10^{-20}$ Кл = $0,4e$.
III.2.22. $1,38 \cdot 10^{-24}$ Дж. **III.2.23.** 77,4 мФ. **III.2.24.** 194 мкФ.
III.2.25. 60 пФ; 0,12 пФ. **III.2.26.** 31 км. **III.2.27.** 33 пФ.
III.2.28. 1,0 нФ. **III.2.29.** 21 пФ/м. **III.2.30.** 91 мФ; $C/C_3 \approx 129$.
III.2.31. $Q = 4,8$ мКл. **III.2.32.** $Q_1 = 2,25$ мКл; $Q_2 = 3,75$ мКл; $U = 750$ В.
III.2.33. $C_2 = 3$ мкФ. **III.2.34.** $C = 3,7$ мкФ; $U_1 = 29$ В; $U_2 = 21$ В;
 $U_3 = 50$ В. **III.2.35.** $C = 5,3$ мкФ; $Q_1 = Q_2 = 67$ мкКл; $Q_3 = 200$ мкКл.
III.2.36. $C = 1,6$ мкФ; $U_1 = U_2 = 11$ В; $U_3 = 39$ В. **III.2.37.** $C = 2,4$ мкФ;
 $Q_1 = 80$ мкКл; $Q_2 = 40$ мкКл; $Q_3 = 120$ мкКл. **III.2.38.** Последовательно, 1385 пФ. **III.2.39.** 17 нФ при параллельном соединении; 1,25 нФ при последовательном.
III.2.40. $\omega = 75$ нДж/м³; $W = 1,9 \cdot 10^{12}$ Дж.
III.2.41. 356 мкДж. **III.2.42.** а) $4,8 \cdot 10^{-16}$ кг; б) $3,2 \cdot 10^{-16}$ кг.
III.2.43. 4 мкДж. **III.2.44.** 72 мФ. **III.2.45.** 0,27 Дж. **III.2.46.** 60 мДж.
III.2.47. 4,6 мДж. **III.2.48.** 6,6 мДж. **III.2.49.** 2 мДж.
III.2.50. 3 мДж. **III.2.51.** $W_1 = 4$ мДж; $W_2 = 10$ мДж; $W_3 = 20$ мДж;
 $W = 34$ мДж. **III.2.52.** $W_1 = 1,6$ мДж; $W_2 = 0,6$ мДж; $W_3 = 0,3$ мДж;
 $W = 2,5$ мДж. **III.2.53.** $W = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Дж.

III.3.1. 0,02 А. **III.3.2.** 1,05 мА. **III.3.3.** $1,3 \cdot 10^{15}$. **III.3.4.** $1,2 \cdot 10^5$ Кл.
III.3.5. 1) 48 Кл; 2) 12 А. **III.3.6.** 32 мКл; 0. **III.3.7.** $j_0 S/3$.
III.3.8. $2j_0 S/3$. **III.3.9.** ≈ 2 мин. **III.3.10.** 1) $23,9 \text{ А}/\text{м}^2$; 2) 1,8 нм/с;
 3) 0,37 мкВ/м. **III.3.11.** $W = 3,2 \cdot 10^{-16}$ эВ; $W_T = 3,8 \cdot 10^{-2}$ эВ.
III.3.12. $0,654 \text{ мкА}/\text{м}^2$; 84,2 МА. **III.3.13.** 9 Ом. **III.3.14.** 0,170 мм;
 55,5 м. **III.3.15.** 0,32 Ом; 1 мм. **III.3.16.** 251 °С. **III.3.17.** 57 °С.
III.3.18. 1) 98,87%; 2) 0,38%; 3) 0,75%. **III.3.19.** 0,9 мВ. **III.3.20.** 0,58 А;
 5,3 В. **III.3.21.** 0,06 Ом. **III.3.22.** 0,05 Ом. **III.3.23.** 1,78 А.
III.3.24. 80 А. **III.3.25.** 78 А. **III.3.26.** 24 В; 2,4 Ом. **III.3.27.** 26 В;

2,4 Ом. **III.3.28.** Шунт с сопротивлением 1 МОм. **III.3.29.** 1) Шунт с сопротивлением 0,12 МОм; 2) подключить последовательно сопротивление 50 МОм. **III.3.30.** 7 В; 213 В. **III.3.31.** $\mathcal{E}_s = 9$ В; $r_s = 0,375$ Ом.

III.3.32. $\mathcal{E}_s = 3$ В; $r_s = 0,375$ Ом. **III.3.33.** $I_6 = 1,59$ А; $I_{II} = 3,65$ А.

III.3.34. 0,16 А. **III.3.35.** 0,32 А. **III.3.36.** 8,56 В. **III.3.37.** 17,4 В;

13,3 В. **III.3.38.** 12,6 В; 16,8 В. **III.3.39.** 0,45 А. **III.3.40.** 0,06 А.

III.3.41. 1,3 А. **III.3.42.** 0,78 А. **III.3.43.** $R = 2r$. **III.3.44.** $R = 3r$.

III.3.45. $R_{AB} = r$. **III.3.46.** $R = 9(n-1)r$. **III.3.47.** 3,6 Вт.

III.3.48. 72 кВт·ч; 0,45 А. **III.3.49.** 5,9 ч. **III.3.50.** $R_2 = 1,8$ кОм.

III.3.51. а) 12 мин; б) 54 мин; в) 27 мин. **III.3.52.** $N_2 = 0,5$ кВт;

$N_{\text{посл}} = 0,33$ кВт. **III.3.53.** 0,05 Вт; 0,31 Вт; 0,79 Вт.

III.3.54. $P_{\text{внутр}} = 0,36$ мВт; $P_{\text{внешн}} = 71,3$ мВт. **III.3.55.** 21 А.

III.3.56. $r = 10$ Ом. **III.3.57.** $N_{\text{пол}} = \frac{\mathcal{E}(U-\mathcal{E})}{r}$; $N_{\text{теп}} = \frac{(U-\mathcal{E})}{r}$; $\eta = \frac{\mathcal{E}}{U}$;

$\eta > 0,5$ при $\mathcal{E} > U/2$. **III.3.58.** $d \geq 4,2$ мм. **III.3.59.** $S = 77,5$ мм²; в 10 раз.

III.4.1. $E = 1,4 \cdot 10^{-10}$ В/м, вектор \vec{E} лежит в плоскости xy и составляет угол $18,6^\circ$ с осью x и угол $108,6^\circ$ с осью y ; $B = -G \cdot 3,1 \cdot 10^{-21}$ Тл.

III.4.2. $E = 4 \cdot 10^{-11}$ В/м, вектор \vec{E} лежит в плоскости xy и составляет угол $170,4^\circ$ с осью x и угол $99,6^\circ$ с осью y ; $B = -G \cdot 4,4 \cdot 10^{-22}$ Тл.

III.4.3. 0,16 Тл. **III.4.4.** 1 Мм/с. **III.4.5.** 20 мкТл. **III.4.6.** 100 мкТл.

III.4.7. 0,48 мТл. **III.4.8.** 83 мкТл. **III.4.9.** 0,15 мТл.

III.4.10. Увеличилась в 1,15 раза. **III.4.11.** Для квадратного витка индукция в центре больше в 1,02 раза. **III.4.12.** 157 мкТл.

III.4.13. 257 мкТл. **III.4.14.** 214 мкТл. **III.4.15.** $2,29 \cdot 10^3$.

III.4.16. 1,25 Тл. **III.4.17.** Средняя часть соленоида длиной 23,8 см.

III.4.18. Средняя часть соленоида длиной 39,6 см. **III.4.19.** Средняя часть соленоида длиной 2,5 см. **III.4.20.** Средняя часть соленоида длиной 64,0 см.

III.4.21. 1) 103; 2) 1,3 мТл; 3) нет. **III.4.22.** $5,5 \cdot 10^{-2}$ Тл.

III.4.23. $B = 1,9$ нТл. **III.4.24.** $p_m = 2,4$ мкДж/Тл. **III.4.25.** 20 Тл.

III.4.26. $R = 0,14$ м. **III.4.27.** $R = 1,9$ м. **III.4.28.** $R = 0,68$ м.

III.4.29. $R = 41,7$ м. **III.4.30.** $T_1/T_2 = 1$; $R_1/R_2 = \sqrt{W_1/W_2}$.

III.4.31. $T_1/T_2 = R_1/R_2 = W_1/W_2$. **III.4.32.** $\omega_0 = 5,27 \cdot 10^{10}$ с⁻¹;

$T_0 = 1,19 \cdot 10^{-10}$ с; $\omega = 1,07 \cdot 10^{10}$ с⁻¹; $T = 5,86 \cdot 10^{-10}$ с.

III.4.33. $R = \frac{m_e c}{eB} \sqrt{\frac{W}{m_e c^2} \left(2 + \frac{W}{m_e c^2} \right)}$; $R_f = 27,4$ см. **III.4.34.** $B = 10^{-3}$ Тл

($W/1$ ГэВ); $B_0 = 0,6$ Тл; $B = 3$ Тл. **III.4.35.** $t = 1,2 \cdot 10^{-10}$ с.

III.4.36. $\omega_0 = 4,1 \cdot 10^{16}$ с⁻¹; $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$; $\Delta\omega = eB/2m_e = 8,8 \cdot 10^{10}$ с⁻¹.

III.4.37. $\omega_0 = 4,1 \cdot 10^{16}$ с⁻¹; $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$; $\Delta\omega = eB/2m_e = 8,8 \cdot 10^8$ с⁻¹.

III.4.38. 233 Тл. **III.4.39.** $B = 13$ Тл, направлен на север.

III.4.40. $v_x \approx -2,3$ Мм/с; $v_y \approx -2,8$ Мм/с; $v_z = 0$; $v \approx 3,6$ Мм/с.

III.4.41. 2,6 МВ/м, по радиусу от центра окружности в точке влета протона в область магнитного поля. **III.4.42.** 6 электронов. **III.4.43.** $\pm 0,34$ МВ/м.

III.4.44. $B = 0,05$ Тл. **III.4.45.** 1) 17,9 Н/м; 2) 12,6 Н/м. **III.4.46.** 1,6 Н.

III.4.47. 30° . **III.4.48.** 17 А. **III.4.49.** 1,8 Тл. **III.4.50.** $1,2 \cdot 10^{-8}$ Н·м.

III.4.51. $0,42 \cdot 10^{-8}$ Н·м. **III.4.52.** $I\sqrt{10}$. **III.4.53.** $2I$.

III.4.54. $p = 6,3$ кПа. **III.4.55.** Увеличится в 9 раз. **III.4.56.** Увеличится в 4 раза. **III.4.57.** Проводники притягиваются с силой 0,23 Н.

III.4.58. $F_a = 2,6 \cdot 10^{-5}$ Н/м; $F_b = F_c = 1,5 \cdot 10^{-5}$ Н/м.

III.4.59. 1) $I_2 = 9,7$ кА в том же направлении; 2) равновесие неустойчивое.

III.4.60. 1) $I_2 = 10,8$ кА в противоположном направлении; 2) равновесие неустойчивое.

III.5.1. 0,03 В. **III.5.2.** 0,3 В. **III.5.3.** $B = 0,4$ Тл. **III.5.4.** а) 2,2 мкВ, полярность ЭДС показана на рисунке; б) при смене направления движения ЭДС также меняет полярность на противоположную. **III.5.5.** 2 мкВ.

III.5.6. 0,32 мВ. **III.5.7.** 0,3 мВ. **III.5.8.** 1) 0,2 мВ; 2) 8 мкА.

III.5.9. $P_m = P_e = 1,53$ нВт.

III.5.10. 1) $v = v_0 \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR} t\right) = 1,5 \exp(-t/\tau)$ м/с; $\tau = 5$ с; 2) $t_1 = 11$ с.

III.5.11. 1) $v = \frac{\mathcal{E}}{Bl} \left[1 - \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR} t\right)\right] = 25 [1 - \exp(-t/\tau)]$ км/с; $\tau = 5$ с;

2) $v_{\max} = 25$ км/с; 3) положительным полюсом к клемме b . **III.5.12.** 23 мВ.

III.5.13. 36 В. **III.5.14.** 0,19 мкДж. **III.5.15.** 1) $(0,75t^2 - 1,26)$ В;

2) $\mathcal{E}_1 = -0,51$ В; $\mathcal{E}_2 = 17,5$ В. **III.5.16.** 1) $I = 83$ мА; 2) $P = 5,3 \cdot 10^{-4}$ Вт.

III.5.17. $\mathcal{E}_0 = 15,3$ мВ; $\mathcal{E}_1 = 10,9$ мВ. **III.5.18.** $\mathcal{E}_0 = 4,2$ мВ; $\mathcal{E}_1 = 8,4$ мВ.

III.5.19. 12,4 мкКл. **III.5.20.** 17,5 мкКл. **III.5.21.** 10,5 мкКл.

III.5.22. 6,2 мкКл. **III.5.23.** 7,43 мВ. **III.5.24.** 2,04 Гн. **III.5.25.** 7,5 А.

III.5.26. 0,52 А. **III.5.27.** 1) 0; 2) 440 В. **III.5.28.** 16 мГн.

III.5.29. $L = 18$ Гн; $R = 31$ Ом. **III.5.30.** $L_2 = L_1/2$. **III.5.31.** $L_2 = 2L_1$.

III.5.32. $L_2 = L_1$. **III.5.33.** $L_2 = 2\sqrt{2}L_1$. **III.5.34.** 1) 6,25 мГн; 2) 144 Гн.

III.5.35. 1) 13,6 мГн; 2) 8,66 Гн. **III.5.36.** 23 мкГн. **III.5.37.** 25 мкГн.

III.5.38. 89 мс. **III.5.39.** 12 А/с. **III.5.40.** $r_{\text{посл}} = 2r$; $L_{\text{посл}} = 2L$.

III.5.41. $r_{\text{пар}} = r/2$; $L_{\text{пар}} = L/2$. **III.5.42.** 1) $L = 11$ мГн; 2) $\tau = 1,1$ мс.

III.5.43. 1) $L_{21} = 0,95$ мГн; 2) L_{21} увеличится в 2,25 раза; 3) L_{21} не изменится. **III.5.44.** 1) $L_{21} = 24$ мГн; 2) L_{21} не изменится; 3) L_{21} увеличится в 2,25 раза. **III.5.45.** 1) $L_{21} = 170$ мГн; 2) $L = 110$ мГн.

III.5.46. 1) $L_{21} = 27,5$ мГн; 2) $L = 42,5$ мГн. **III.5.47.** 0,8 Дж.

III.5.48. 1) $w_B = 1,6 \cdot 10^6$ Дж/м³; $w_E = 4,4 \cdot 10^{-4}$ Дж/м³; 2) $6 \cdot 10^8$ В/м.

III.5.49. 22 мДж/м³. **III.5.50.** 1) 80 мДж/м³; 2) 0,32 мкДж/м³.

III.5.51. 1) 2,5 мс; 2) 10,6 мс. **III.5.52.** 0,13 Дж. **III.5.53.** 0,37 Дж.

III.5.54. Возросла в 6,4 раза. **III.5.55.** Возросла в 9,3 раза.

III.5.56. 2,7 мкА. **III.5.57.** 5,5 мА. **III.5.58.** 1) 0; 2) $4,3 \cdot 10^{-9}$ Тл.

III.5.59. В центре кольца, $j_d = 6,7$ мА/м². **III.5.60.** На расстоянии 14 см от оси.

IV. Колебания и волны

IV.1.1. 1) $T = 1,6$ с; $\nu = 0,625$ Гц; 2) $x(0) = 2,1$ м; $v(0) = -4,7$ м/с;

3) $v(1) = 9,1$ м/с; $a(1) = 9,6$ м/с². **IV.1.2.** 1) $A = 0,42$ м; 2) $\nu = 1,18$ Гц;

3) $W_{\text{полн}} = 4,83$ Дж; 4) $W_{\text{кин}} = 4,13$ Дж; $W_{\text{пот}} = 0,7$ Дж. **IV.1.3.** $T = 2$ с;

$\varphi_0 = \pi/5$. **IV.1.4.** $T = 0,8$ с; $\nu = 1,25$ с⁻¹; $\varphi_0 = \pi$. **IV.1.5.** 1) $\varphi_0 = \pi/3$ рад;

2) $\varphi_0 = 3\pi/4$ рад; 3) $\varphi_0 = 5\pi/3$ рад; 4) $\varphi_0 = 7\pi/6$ рад.

IV.1.6. 1) $\varphi_0 = 5\pi/6$ рад; 2) $\varphi_0 = \pi/3$ рад; 3) $\varphi_0 = 5\pi/4$ рад; 4) $\varphi_0 = 5\pi/3$ рад.

IV.1.7. $x = 4 \cos(\pi t + \pi/2)$; 1) $\varphi = 5\pi/3$ рад; 2) $\varphi = 2,644$ рад.

IV.1.8. $x = -8,7$ см; $\dot{x} = -5,2$ см/с; $\ddot{x} = 9,5$ см/с². **IV.1.9.** $v_{\max} = 30$ см/с;

$a_{\max} = 3$ м/с². **IV.1.10.** 12 см/с². **IV.1.11.** $\omega = 2$ Гц; $a_{\max} = 40$ см/с².

IV.1.12. $\omega = 10$ Гц; $T = 0,63$ с; $A = 1$ см. **IV.1.13.** $A = 8,3$ см.

IV.1.14. $\omega = 4$ Гц; $A = 7,07$ см; $\varphi = 7\pi/4$. **IV.1.15.** 1) $\alpha = -0,37^\circ$;

2) $\alpha = -9,76^\circ$; 3) $\alpha = 12^\circ$. **IV.1.16.** $1/3$. **IV.1.17.** $\alpha = 7,1^\circ$.

IV.1.18. $\Delta\varphi = \pi \pm \pi/3$. **IV.1.19.** $x = \sqrt{2} \cos(\pi t - \pi/4)$ см.

IV.1.20. $\nu = 0,16$ Гц; $x = \sqrt{5} \cos(\omega t - 0,464)$.

IV.1.21. $x = 3,86 \cos \pi(4t/3 + 0,417)$. **IV.1.22.** $y = -x/2$. **IV.1.23.** $y = -2x$.

IV.1.24. Эллипс $x^2/4 + y^2 = 1$, движение против часовой стрелки.

IV.1.25. Эллипс $4x^2 + y^2/4 = 1$, движение по часовой стрелке.

IV.1.26. 1) Парабола $y = 2 - x^2$; 2) $y^2 = x^2(4 - x^2)$; 3) $y = x^2 - 2$; 4) парабола $x = 4y^2/9 - 2$; 5) $x^2 = 9y^2(1 - y^2/4)$. **IV.1.27.** 1) $-62,5$ мН; 2) -125 мН.

IV.1.28. 2 мН; 50 мкДж. **IV.1.29.** 4,39 мН; 877 мкДж.

IV.1.30. $\nu \geq 498$ Гц. **IV.1.31.** $t_1 = 2$ с; $m = 0,456$ г. **IV.1.32.** 708 Н/м.

IV.1.33. 1) $k = 2,7$ Н/м; 2) $\nu_2 = 26$ Гц. **IV.1.34.** 0,8 Дж. **IV.1.35.** 4,4 см;

1,7 м. **IV.1.36.** 416 м/с. **IV.1.37.** 1) 16,7 см; 2) 12,3%.

IV.1.41. $k = 133$ кН/м; $\nu = 2,74$ Гц. **IV.1.42.** $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2q}{3R}} = 0,6$ Гц;

$l = 3R/2 = 75$ см. **IV.1.43.** $l = 3R/2 = 36$ см; $T = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}} = 1,2$ с.

IV.1.44. $l = R\left(x + \frac{1}{2x}\right)$; $x_{\max} = 0,71$; $\nu_{\max} = 0,76$ Гц. **IV.1.45.** 0,96.

IV.1.46. 0,96. **IV.1.47.** $0,32$ кг·м². **IV.1.48.** $l_2 = 60$ см.

IV.1.49. $a = 2$ см. **IV.1.50.** $a = 34,6$ см. **IV.1.51.** 1,6 с. **IV.1.52.** 0,86 с.

IV.1.53. 1) 0,727 с; 2) 7,6%; 3) 18,9 см. **IV.1.54.** 1) 9%; 2) в 2,56 раза.

IV.1.55. $\lambda = 2,32 \cdot 10^{-3}$. **IV.1.56.** $\beta = 2,29 \cdot 10^{-3} \text{с}^{-1}$. **IV.1.57.** $N = 231$.

IV.1.58. $N = 173$; $t = 172$ с. **IV.1.59.** 1,005 с. **IV.1.60.** $N \approx 35$.

IV.1.61. 1) $(\omega - \omega_0)/\omega_0 = -8,3 \cdot 10^{-6}$; 2) 39. **IV.1.62.** 1) $\beta = 0,025 \text{с}^{-1}$;

2) $\nu = 1,59$ Гц; 3) $\lambda = 0,0157$; 4) $N_e \approx 64$. **IV.1.63.** $\nu = 16$ Гц.

IV.1.64. $v = 10,2$ м/с; $\lambda = 36,7$ км/ч. **IV.1.65.** $\nu_0 = 1002$ Гц.

IV.1.66. $\nu_0 - \nu_{\text{рез}} = 4,06$ Гц. **IV.1.67.** $\lambda = 0,089$. **IV.1.68.** $\nu_{\text{рез}} = 1,75$ Гц.

IV.1.69. $\beta = 0,1 \text{с}^{-1}$; $A_{\text{рез}} = 5$ мм. **IV.1.70.** $F_0 = 31,14$ мН.

IV.1.71. 1) $\nu_0 = 5,03$ Гц; 2) $\nu_{\text{рез}} = 4,91$ Гц; 3) $A_{\text{рез}} = 6,25$ мм;

4) $A_{\text{рез}}/A(0) = 3,1$. **IV.1.72.** 1) в 1,51 раза; 2) в 15,1 раза.

IV.1.73. 1) 177 пФ; 2) 56 мГн. **IV.1.75.** $\lambda = (2384 \pm 24)$ м.

IV.1.76. $I_{\max} = 1$ А. **IV.1.77.** $U_{\max} = 316$ В. **IV.1.78.** $\nu = 5,03$ кГц.

IV.1.79. $C = 51$ пФ. **IV.1.80.** 1155 Ом. **IV.1.81.** 1,6 Ом.

IV.2.1. 1) $\nu = 100$ Гц; $\lambda = 3,14$ м; 2) $v = 314$ м/с; 3) $\dot{u}_{\max} = 3,14$ м/с,

$\ddot{u}_{\max} = 1,97$ км/с². **IV.2.2.** 1) $u(0, t) = (4 \text{ мм}) \cos(1257t)$; 2) $u(x_1, t_1) = -2$ мм.

IV.2.3. 1) $v = 350$ м/с; 2) $\dot{u}_{\max} = 0,79$ м/с. **IV.2.4.** 1) $u = -0,1$ мм;

2) $\dot{u} = 0,363$ м/с; 3) $\ddot{u} = 439$ м/с². **IV.2.5.** $u = 5,88$ см. **IV.2.6.** 1) $u = 1$ см;

2) $\dot{u} = 9,07$ см/с; 3) $\ddot{u} = -27,4$ см/с². **IV.2.7.** 1300 м. **IV.2.8.** 140 м/с.

IV.2.9. 1) 5,06 км/с; 2) 3,31 км/с; 3) 4,44 км/с. **IV.2.10.** 1) 2,98 км/с;

2) 3,11 км/с; 3) 1,6 км/с. **IV.2.11.** $\lambda_{\max} = 21,3$ м; $\lambda_{\min} = 17$ мм.

IV.2.12. 353 м/с. **IV.2.13.** $v_1 = 341$ м/с; $v_2 = 375$ м/с. **IV.2.14.** 1440 м/с.

IV.2.15. $\gamma = 1,67$ — одноатомный газ с $\mu = 40$ г/моль, т. е. аргон.

IV.2.16. $\gamma = 1,4$ — двухатомный газ с $\mu = 28$ г/моль, т. е. азот.

IV.2.17. $v_{\text{H}_2}/v_{\text{CO}_2} = 4,8$. **IV.2.18.** $\nu = 341$ Гц; $\nu = 268$ Гц.

IV.2.19. $\nu = 336$ Гц; $\nu = 264$ Гц. **IV.2.20.** $u = 33,2$ м/с; $\nu_0 = 990$ Гц.

- IV.2.21.** 0,09. **IV.2.22.** Источник должен удаляться от резонатора со скоростью $u = 4$ м/с. **IV.2.23.** 1) $\tau_+ = 4,52$ с; 2) $\tau_- = 5,48$ с.
IV.2.24. 636 Гц. **IV.2.25.** 1) 699 Гц; 2) 517 Гц. Изменится: 696 Гц и 515 Гц.
IV.2.26. $u = v \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu + 2\nu_0} = 3,74$ м/с. **IV.2.27.** 23,7 мкДж.
IV.2.28. 3 мДж/м^3 . **IV.2.29.** $25,1 \text{ мкДж/м}^3$. **IV.2.30.** $N = 157$ Вт;
 $\langle w \rangle = 60,2 \text{ мкДж/м}^3$. **IV.2.31.** 1) 20 дБ; 2) 100 дБ. **IV.2.32.** $L_2 = 35,5$ дБ.
IV.2.33. В 1000 раз. **IV.2.34.** 1) 63 дБ; 2) 70 дБ.
IV.2.35. 1) $(0,19\dots 5,5) \cdot 10^3$ м; 2) $2,8\dots 3,4$ м. **IV.2.36.** $3,31$ м.
IV.2.37. 194 м. **IV.2.38.** 1) $B_x = B_z = 0$; $B_y = B_0 \cos(\omega t - kz)$;
 $B_0 = 3,3$ мкТл; 2) в положительном направлении оси Oz .
IV.2.39. 1) $E_x = E_z = 0$, $E_y = E_0 \cos(\omega t + kz)$, $E_0 = 750$ В/м;
2) в отрицательном направлении оси Oz . **IV.2.40.** $1,49 \text{ мВт/м}^2$.
IV.2.41. $4,7 \text{ мкДж/м}^3$. **IV.2.42.** $N \sim 4 \cdot 10^{26}$ Вт. **IV.2.43.** $E_0 = 7,74$ В/м;
 $B_0 = 25,8$ нТл. **IV.2.44.** Воспринимаемая частота на $\Delta\nu = 1$ кГц меньше.
IV.2.45. 1) $\omega_{\odot} = 3,23 \cdot 10^{-6}$ рад/с; 2) $T_{\odot} = 22,5$ сут.
IV.2.46. $v = 0,17c \approx 50\,000$ км/с. **IV.2.47.** $v = 0,34c = 103 \text{ М} \cdot \text{м/с}$.
IV.2.48. $\Delta\lambda/\lambda = 1,8 \cdot 10^{-5}$. **IV.2.49.** 1) $2,3 \cdot 10^{-6}$; 2) $4,3 \cdot 10^{-4}$.
IV.2.50. 900 км/ч. **IV.2.51.** 1) 750 нм; 2) 500,03 нм. **IV.2.52.** 1) 491 нм;
2) 599,96 нм.

V. ОСНОВЫ ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ

- V.1.1.** 1) 2000; 2) 3000. **V.1.2.** 4 мм. **V.1.3.** 1,33 м. **V.1.4.** Увеличится на: 1) 0,5 мм; 2) 0,55 мм. **V.1.5.** $\varphi = 0,134$ рад = $7,7^\circ$.
V.1.6. $\Delta\varphi = 1,885$ рад = 108° . **V.1.7.** 1) 0,6 мкм и 0,45 мкм; 2) 0,72 мкм, 0,51 мкм и 0,4 мкм. **V.1.8.** 2 м. **V.1.9.** 0,5 мкм. **V.1.10.** 2,5 м.
V.1.11. 0,73 мкм. **V.1.12.** 0,097 мм. **V.1.13.** 2,1 мм. **V.1.14.** 0,42 мм.
V.1.15. $\sin\theta_m = \sin\theta_i \pm m \frac{\lambda}{d}$. **V.1.16.** Отодвинуть от источника на 1 м.
V.1.17. 600 нм. **V.1.18.** $n_2 = 1,000377$. **V.1.19.** $d = 0,11$ мкм.
V.1.20. 1) $d = 0,25$ мкм; 2) $d = 0,125$ мкм. **V.1.21.** $\lambda = 541$ нм.
V.1.22. $b = 3,15$ мм. **V.1.23.** $\theta = 5 \cdot 10^{-5}$ рад = $10,3''$.
V.1.24. $N = 8,4 \text{ см}^{-1}$. **V.1.25.** 0,39 мм. **V.1.26.** $h = 0,15$ мкм.
V.1.27. $R = 0,4$ м. **V.1.28.** $\lambda = 490$ нм. **V.1.29.** $n = 1,4$. **V.1.30.** $n = 1,33$.
V.1.31. $n = 1,39$. **V.1.32.** 1) 320 нм; 2) 160 нм. **V.1.33.** 478 нм.
V.2.1. $\rho_5 = 1,58$ мм. **V.2.2.** $\rho_6 = 3,67$ мм. **V.2.3.** 1) 50 м; 2) 25 м.
V.2.4. $a_i = \frac{2 \text{ м}}{(2i-1)}$; $b_i = \frac{1 \text{ м}}{i}$; $i = 1, 2, 3, \dots$. **V.2.5.** 1,4 м; 0,7 м; 0,47 м.
V.2.6. $3,18^\circ$. **V.2.7.** λ . **V.2.8.** $2,75^\circ$. **V.2.9.** $a = 143\lambda$.
V.2.10. 1) Минимум первого порядка; 2) максимум второго порядка.
V.2.11. $30^\circ 19' 53''$; $29^\circ 40' 1''$. **V.2.12.** $30^\circ 49' 50''$; $29^\circ 10' 35''$. **V.2.13.** 1) 3;
2) 23; 3) 9; 4) 15. **V.2.14.** $n = 103 \text{ мм}^{-1}$. **V.2.15.** $4,7^\circ$. **V.2.16.** 579 нм.
V.2.17. $\varphi_3 = 21,3^\circ = 21^\circ 17'$. **V.2.18.** $k_{\max} = 8$. **V.2.19.** Все с $k = 1, 2$;
часть с $k = 3, 4$. **V.2.20.** $n = 12\,500 \text{ см}^{-1}$. **V.2.21.** $N = 9$;
 $\varphi_{\max} = 73,7^\circ = 73^\circ 44'$. **V.2.22.** 0,6 мкм. **V.2.23.** $b = 65,8$ см.
V.2.24. $k_{\min} = 3$. **V.2.25.** $R = 289$; $N = 145$. **V.2.26.** 9,8 мм.

V.2.27. $\Delta\lambda = 0,032$ нм; $k = 2$. **V.2.28.** $1,6''$. **V.2.29.** $D_{\min} = 5,9$ см.
V.2.30. 1) Да; 2) 12,3 км. **V.2.31.** 50 м. **V.2.32.** 6 м.

V.3.1. $57,3^\circ$. **V.3.2.** $49,6^\circ$. **V.3.3.** 37° ; 49° ; 53° . **V.3.4.** 36° . **V.3.5.** 37° .
V.3.6. $61,2^\circ = 61^\circ 12'$. **V.3.7.** $1,95 \cdot 10^8$ м/с. **V.3.8.** $55,7^\circ = 55^\circ 42'$.
V.3.9. 1) $\varphi = 106^\circ$; 2) $\gamma = 164^\circ$. **V.3.10.** 1) $\varphi = 114^\circ$; 2) $\gamma = 156^\circ$.
V.3.11. 1) $\varphi = 100^\circ$; 2) $\gamma = 170^\circ$. **V.3.12.** 0,25. **V.3.13.** 45° .
V.3.14. 1) $35,3^\circ$; 2) $63,4^\circ$. **V.3.15.** $I = 0,759I_0$. **V.3.16.** На $37,1\%$.
V.3.17. 1) 0; 2) $1/8$; 3) 0. **V.3.18.** В 2 раза. **V.3.19.** В 3,3 раза.
V.3.20. $P = 0,6$. **V.3.21.** В 3 раза. **V.3.22.** В 1,23 раза. **V.3.23.** 30° .
V.3.24. $P = 0,333$. **V.3.25.** 30° . **V.3.26.** $P = 0,667$.

VI. Основы квантовой механики

VI.1.1. 648 К. **VI.1.2.** 1000 К. **VI.1.3.** 5,64 кДж. **VI.1.4.** 567 ТВт.
VI.1.5. 4%. **VI.1.6.** В 1,19 раза. **VI.1.7.** 396 К. **VI.1.8.** 70,6%.
VI.1.9. $a = 0,26$. **VI.1.10.** 866 К. **VI.1.11.** 10,6 мкм. **VI.1.12.** 547 нм.
VI.1.13. 1) 3,9 кК; 2) 7,6 кК. **VI.1.14.** 5000 К. **VI.1.15.** 1) Увеличилась
в 81 раз; 2) увеличилась в 243 раза. **VI.1.16.** 3,62 кК. **VI.1.17.** 1,64 мВт.
VI.1.18. 1,45 мкм.

VI.2.1. 5,9 мкэВ. **VI.2.2.** 1) $\nu = 2,42 \cdot 10^{14}$ Гц; $\lambda = 1,24$ мкм;
2) $\nu = 8,22 \cdot 10^{14}$ Гц; $\lambda = 0,365$ мкм. **VI.2.3.** $\varepsilon = 3,26$ эВ;
 $p = 1,74 \cdot 10^{-27}$ кг · м/с. **VI.2.4.** $\varepsilon = 17,1$ кэВ; $\lambda = 72,7$ пм.
VI.2.5. $3,6 \cdot 10^{-17}$ Вт. **VI.2.6.** $n_{\text{ф}} = 8,05 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-1}$; $n_{\text{кр}} = 1,41 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-1}$.
VI.2.7. 2,48 эВ. **VI.2.8.** Нет, так как энергия фотона 4,13 эВ меньше
работы выхода 4,7 эВ. **VI.2.9.** 80%. **VI.2.10.** $A = 2,3$ эВ.
VI.2.11. 1) $\lambda_2 = 380$ нм; 2) $A = 1,83$ эВ. **VI.2.12.** 1) $\hbar = 6,56 \cdot 10^{-16}$ эВ · с;
2) $A = 2,27$ эВ; 3) $\lambda_{\text{кр}} = 544$ нм. **VI.2.13.** 4,9 В. **VI.2.14.** 0,76 Мм/с.
VI.2.15. 37,9 Мм/с. **VI.2.16.** 1,61 МэВ. **VI.2.17.** $1,5$ кВт/м².
VI.2.18. 0,1 нН. **VI.2.19.** 10^{-7} кг · м/с. **VI.2.20.** 0,37 мкН.
VI.2.21. 11,7 мН. **VI.2.22.** 0,6 мкм.

VI.3.1. $\lambda_e = 727$ пм; $\lambda_p = 0,396$ пм. **VI.3.2.** 2,71 пм. **VI.3.3.** 1) 172 пм;
2) 1,4 пм. **VI.3.4.** 150 В. **VI.3.5.** 38,8 пм. **VI.3.6.** 1) 905 фм; 2) 28,6 фм.
VI.3.7. $v = c/\sqrt{2} = 212$ Мм/с. Не изменится. **VI.3.8.** $E_k^{(e)}/E_k^{(p)} = 1836$.
VI.3.9. $T > 160\,000$ К. **VI.3.10.** $\lambda = 6,2$ нм; $l = 270$ пм. **VI.3.11.** $T = 12$ К,
т. е. жидкий гелий — заведомо квантовая жидкость. **VI.3.12.** $T = 1,5$ К,
т. е. жидкий азот — классическая жидкость. **VI.3.13.** $\lambda_e = 0,06$ нм.
VI.3.14. 0,73 мм. **VI.3.15.** 60 мкм. **VI.3.16.** $5,3 \cdot 10^{-11}$ м.
VI.3.17. 7,2 км/с. **VI.3.18.** 1) $1,2 \cdot 10^{-34}$ м; 2) $1,9 \cdot 10^{-30}$ кг · м/с;
3) $1,1 \cdot 10^{-30}$ м. **VI.3.19.** $\Delta x \sim 0,77$ нм; $d \sim 2a_B = 0,106$ нм; неприменимо,
так как $\Delta x \gg d$. **VI.3.20.** $\Delta v \sim 230$ м/с; $\Delta v/v \sim 1 \cdot 10^{-4}$.
VI.3.21. В $\Delta x/\lambda \approx 16$ раз. **VI.3.22.** 16%. **VI.3.23.** 1 нм.
VI.3.24. $E_0 \sim 2,4 \cdot 10^{-18}$ Дж = 15 эВ. **VI.3.25.** 2,9 фм.
VI.3.26. $E_k \sim 78$ МэВ, т. е. $E_k \gg E_{\text{св}}$. **VI.3.27.** 1) 0,006; 2) 0,6.
VI.3.28. Неопределенность положения мяча $\Delta x = 5$ м.
VI.3.29. $H \geq 20,4$ м. **VI.3.30.** 1) $\Delta E = 0$; 2) $\Delta E = 0,06$ мкэВ.
VI.3.31. $3,2 \cdot 10^{-8}$.

VI.4.1. 1) $\Delta E_{4,3} = 0,78$; 2) $\Delta E_{11,10} = 0,21$; 3) $\Delta E_n^{+1,n} \rightarrow 0$. С ростом n дискретность спектра сглаживается. **VI.4.2.** $\Delta E = 4,5$ эВ.

VI.4.3. Максимальна при $x = l/4, 3l/4$, минимальна при $x = l/2$.

VI.4.4. $x = l/3, 2l/3$; $|\psi|^2 = 3/(2l)$. **VI.4.5.** $W = 0,475$. **VI.4.6.** $W = 0,091$.

VI.4.7. 5,22. **VI.4.8.** $l/2$. **VI.4.9.** 6,1 МэВ. **VI.4.10.** 18; 36; 54; 66;

72 мкэВ. **VI.4.11.** 0,55. **VI.4.12.** 0,11. **VI.4.13.** 0,67. **VI.4.14.** v

уменьшится в 1,58 раза, во столько же раз возрастет λ .

VI.4.15. $U = 0,02$ МэВ. **VI.4.16.** $\lambda_2 = 0,22$ нм. **VI.4.17.** 55,6 эВ.

VI.4.18. 1,98%. **VI.4.19.** 0,18. **VI.4.20.** 0,97. **VI.4.21.** $R = 0,0294$;

$D = 0,971$. **VI.4.22.** $T/U = 1,03$. **VI.4.23.** $R = 0,0625$.

VI.4.24. $R_a \approx \left(\frac{U}{4E}\right)^2$; 1) $\delta = -1\%$; 2) $\delta = -9,9\%$. **VI.4.25.** $D_a \approx 4\sqrt{\frac{T}{U}}$;

1) $\delta = 6,5\%$; 2) $\delta = 21,5\%$. **VI.4.26.** $J_2 = 0,19$ Вт/м². **VI.4.27.** 0,126.

VI.4.28. 1) $D = 0,36$; 2) $D = 5,9 \cdot 10^{-3}$. **VI.4.29.** 1) $D = 0,2$; 2) $D = 6 \cdot 10^{-3}$.

VI.4.30. Уменьшится в 84 раза. **VI.4.31.** $d = 0,22$ нм.

VI.4.32. $d = 0,142$ нм. **VI.4.33.** $U - E = 45,4$ эВ. **VI.4.34.** $D = 0,359$.

VI.4.35. $U - E = 96$ мкэВ. **VI.4.36.** $D = 5,4 \cdot 10^{-5}$. **VI.4.37.** $D_e/D_p \approx 73$.

VI.4.38. $2,1 \cdot 10^{-19}$ с. **VI.4.39.** $1,7 \cdot 10^{104}$ лет.

VI.5.1. $w_1/w_2 \approx 0,8$. **VI.5.2.** $w_1/w_2 \approx 3,5$. **VI.5.3.** $r_{orb} \approx 2,7a_B$.

VI.5.4. $r_{orb} \approx 9,1a_B$. **VI.5.5.** $r_{1/2} \approx 1,3a_B$. **VI.5.6.** $r_{1/2} = 5,8a_B$.

VI.5.7. $r_{KB} = \sqrt{3}a_B$. **VI.5.8.** 1) $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{a_B}$;

2) $\langle U(r) \rangle = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 2E_1 = -27$; 3) $\langle T \rangle = |E_1| = 13,6$ эВ.

VI.5.9. $a = 0,58$ пм; $I = 0,12$ МэВ. **VI.5.10.** 1) $Z_{эфф} = 1,56e$; 2) $a = 136$ пм.

VI.5.11. 1) $Z_{эфф} = 1,84e$; 2) $a = 258$ пм. **VI.5.12.** 1) $L = 0$;

2) $L = 1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. **VI.5.13.** $L_z = \pm 2,11 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

$\pm 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; 0. **VI.5.14.** 1) $\Delta L = 1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; 2) $n = 2$.

VI.5.15. $\theta = 35,3^\circ$. **VI.5.16.** $L = 3,65 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

$L_{z \max} = 3,16 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. **VI.5.17.** Не может.

VI.5.18. $\mu_L = 4,14 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл. **VI.5.19.** $E = -3,4$ эВ;

$L = 1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $\mu_L = 1,31 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл. **VI.5.20.** $\mu_L = 0$;

$1,31 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл; $2,27 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл. **VI.5.21.** $\vec{S}^2 = 0,913 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

$S_z = \pm 0,527 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. **VI.5.22.** $\mu_S = 1,61 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл;

$\mu_{S,z} = \pm 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл. **VI.5.23.** $\frac{\partial B}{\partial z} = 5,8$ кТл/м. **VI.5.24.** 4,47 мм.

VI.5.25. $\frac{\partial B}{\partial z} = 429$ Тл/м. **VI.5.26.** $F = 2,84 \cdot 10^{-21}$ Н. **VI.5.27.** 50.

VI.5.28. 14. **VI.5.29.** K : два s -электрона; L : два s -электрона и шесть

p -электронов; M : два s -электрона, шесть p -электронов и десять

d -электронов. **VI.5.30.** 1) 1; 2) 2; 3) $2(2l+1)$; 4) $2n^2$. **VI.5.31.** 1) Девять;

2) четыре; 3) два; 4) три; 5) пять. **VI.5.32.** 1) 15 — фосфор; 2) 46 —

палладий. **VI.5.33.** 1) $1s^2 2s^2 p^1$; 2) $1s^2 2s^2 p^2$; 3) $1s^2 2s^2 p^6 3s^1$.

VII. Основы теории строения вещества

VII.1.1. $c_{Al} = 924$ Дж/(кг·К); $c_{Cu} = 392$ Дж/(кг·К).

VII.1.2. $c_{NaCl} = 853$ Дж/(кг·К); $c_{CaCl} = 660$ Дж/(кг·К).

VII.1.3. $c_{\text{AlBr}} = 1,4 \text{ МДж/К}$. **VII.1.4.** $\Delta U = 1,7 \text{ кДж}$.

VII.1.5. $\langle \varepsilon \rangle = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$. **VII.1.6.** $U = 124 \text{ кДж}$; $C = 414 \text{ Дж/К}$.

VII.1.7. 1) $2,99 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; 2) 134 кДж . **VII.1.8.** $3,44 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$.

VII.1.9. Увеличится в 1,65 раза. **VII.1.10.** 0,721.

VII.1.11. 36,1 Дж/моль. **VII.1.12.** 0,34 Дж/моль. **VII.1.13.** 8,6%.

VII.1.14. 2,87 кДж/моль. **VII.1.15.** 2,99 кДж/моль.

VII.1.16. $2,36 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$. **VII.1.17.** $1,87 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$. **VII.1.18.** $5,15 \cdot 10^{-3}$.

VII.1.19. 14,4 Дж/моль. **VII.1.20.** 41,2 Дж. **VII.1.21.** 212 К.

VII.1.22. 5,1%. **VII.1.23.** $v = 3,4 \text{ км/с}$; $v_{\perp} = 2,9 \text{ км/с}$.

VII.1.24. 1) $\theta_D \approx 220 \text{ К}$; 2) $c_p = 10 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$; 3) $\omega_{\text{max}} = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$.

VII.1.25. 21 эВ. **VII.1.26.** $10^{-25} \text{ Н} \cdot \text{с}$. **VII.1.27.** 443 К.

VII.1.28. $v = 2,6 \text{ км/с}$; $\lambda = 4 \text{ нм}$. **VII.1.29.** $\varepsilon_{\text{max}} = 28 \text{ МэВ}$; $v = 2,5 \text{ км/с}$;

$p_{\text{max}} = 1,8 \cdot 10^{-24} \text{ Н} \cdot \text{с}$. **VII.1.30.** 3,13 км/с. **VII.1.31.** $v_{\text{max}} = 1,33 \text{ Мм/с}$.

VII.1.32. $n = 4,54 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$. **VII.1.33.** 1) $n = 1,31 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$;

2) $E_F = 9,41 \text{ эВ}$; 3) $v_{\text{max}} = 1,82 \text{ Мм/с}$; 4) $\lambda_{\text{min}} = 0,4 \text{ нм}$.

VII.1.34. $E_F = 5,53 \text{ эВ}$. **VII.1.35.** $E_F = 136 \text{ МэВ}$.

VII.1.36. $E_F = 234 \text{ кэВ}$. **VII.1.37.** $n_1/n_2 = 5,42$. **VII.1.38.** 0,985.

VII.1.39. 3,02. **VII.1.40.** 0,994. **VII.1.41.** 3,6 эВ.

VII.1.42. $T_1 \approx 3 \cdot 10^4 \text{ К}$. **VII.1.43.** 64,6%. **VII.1.44.** $E_{1/2} = 4,41 \text{ эВ}$.

VII.1.45. 0,03. **VII.1.46.** $T_F = 23,7 \text{ кК}$. **VII.1.47.** 1) 0; 2) $4 \cdot 10^{-8}$;

3) 0,012. **VII.1.48.** $T = 708 \text{ К}$. **VII.1.49.** 0,019. **VII.1.50.** 87,5%.

VII.1.51. В 7 раз. **VII.1.52.** $\langle v \rangle = 1,09 \text{ Мм/с}$.

VII.1.53. $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = 1,12 \text{ Мм/с}$. **VII.1.54.** $v_{\text{об}} = 0,97 \text{ Мм/с}$.

VII.1.55. 1) $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$; 2) ответ в таблице.

VII.2.1. ${}^3_1\text{H}$, ${}^7_3\text{Li}$, ${}^{15}_7\text{N}$. **VII.2.2.** 1) $2,2 \cdot 10^{-4}$; 2) $2,16 \cdot 10^{-4}$.

VII.2.3. $m_+ = 7,01546 \text{ а. е. м.}$; $m_{++} = 7,01491 \text{ а. е. м.}$;

$m_{+++} = 7,01436 \text{ а. е. м.}$ **VII.2.4.** ${}^{222}_{86}\text{Rn}$. **VII.2.5.** ${}^{216}_{84}\text{Po}$. **VII.2.6.** ${}^{65}_{29}\text{Cu}$.

VII.2.7. ${}^{14}_7\text{N}$. **VII.2.8.** ${}^{27}_{13}\text{Al}$. **VII.2.9.** $\Delta m = 0,00240 \text{ а. е. м.}$;

$E_{\text{св}} = 2,24 \text{ МэВ}$. **VII.2.10.** 8,5 МэВ. **VII.2.11.** 7,68 МэВ/нуклон.

VII.2.12. 3,01604 а. е. м. **VII.2.13.** 5,0126 а. е. м. **VII.2.14.** 2,2 МэВ.

VII.2.15. $E_{\text{Li}} = 39,3 \text{ МэВ}$; $E_{\text{Be}} = 37,6 \text{ МэВ}$. **VII.2.16.** 682 ГДж.

VII.2.17. 10,6 МэВ. **VII.2.18.** 7,55 МэВ. **VII.2.19.** 8 МэВ.

VII.2.20. 23,8 МэВ. **VII.2.21.** 7,27 МэВ. **VII.2.22.** 2,8 МэВ; 0,85 МэВ.

VII.2.23. 1_0n . **VII.2.24.** $Z = 0$; $A = 0$ — фотон. **VII.2.25.** 1) $Q = 4,36 \text{ МэВ}$;

2) $Q = 22,4 \text{ МэВ}$; 3) $Q = -2,79 \text{ МэВ}$; 4) $Q = -1,64 \text{ МэВ}$; 5) $Q = -1,04 \text{ МэВ}$.

При $Q > 0$ энергия высвобождается, при $Q < 0$ — поглощается.

VII.2.26. 1) $Q = 19,8 \text{ МэВ}$; 2) $Q = 23,8 \text{ МэВ}$; 3) $Q = 6,26 \text{ МэВ}$;

4) $Q = 8,12 \text{ МэВ}$. **VII.2.27.** $Q = 6,82 \text{ МэВ}$. **VII.2.28.** $Q = 0,63 \text{ МэВ}$.

VII.2.29. $T_{\pi} = 6,66 \text{ МэВ}$. **VII.2.30.** $T_n = 5,26 \text{ МэВ}$; $T_C = 0,44 \text{ МэВ}$.

VII.2.31. $T_n = 2,44 \text{ МэВ}$; $T_{\text{He}} = 0,82 \text{ МэВ}$. **VII.2.32.** $T_{\pi} = 0,105 \text{ МэВ}$;

$T_{\alpha} = 5,4 \text{ МэВ}$; $\Delta Q = 5,505 \text{ МэВ}$. **VII.2.33.** 0,158 МэВ. **VII.2.34.** 0,98 МэВ.

VII.2.35. 0,2 МэВ. **VII.2.36.** $1 \cdot 10^{-6}$. **VII.2.37.** $\lambda_{220\text{Ra}} = 30,1 \text{ с}^{-1}$;

$\lambda_{226\text{Ra}} = 13,7 \text{ пс}^{-1}$. **VII.2.38.** 15 мин. **VII.2.39.** $0,94 \cdot 10^{-4}$.

VII.2.40. 1) 0,71; 2) 0,35. **VII.2.41.** В 9 раз. **VII.2.42.** 9,96 ч.

VII.2.43. 4 сут. **VII.2.44.** 1,44 ч. **VII.2.45.** 63,2%. **VII.2.46.** 10^6 .

VII.2.47. $t = 8,0T_{1/2}$. **VII.2.48.** 6 ч. **VII.2.49.** На 24,5%.

VII.2.50. 1) 95 лет; 2) 190 лет. **VII.2.51.** 0,5 сут. **VII.2.52.** 10,5 ТБк.
VII.2.53. 1) 41,8 ТБк/г; 2) 5,13 ТБк/г; 3) 36,5 ГБк/г. **VII.2.54.** 413 кг.
VII.2.55. 6,41 мкг. **VII.2.56.** $2,6 \cdot 10^5$ лет. **VII.2.57.** $P = 236$ Вт;
 $W = 70,9$ кДж. **VII.2.58.** 94,5 ГБк. **VII.2.59.** $0,7$ Вт/м². **VII.2.60.** 13 ч
в неделю. **VII.2.61.** 11,8 мДж. **VII.2.62.** 240 Дж. **VII.2.63.** $7,76 \cdot 10^{-11}$.
VII.2.64. 43,9 мкДж. **VII.2.65.** 21,4 нКл/кг. **VII.2.66.** 6 м.
VII.2.67. 4,5 мин.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть I. Физические основы механики	5
I.1. Кинематика материальной точки	5
I.1.A. Основные формулы	5
I.1.B. Примеры решения задач	6
I.1.B. Задачи для самостоятельной работы	14
I.2. Динамика материальной точки и тела, движущегося поступательно.	18
I.2.A. Основные формулы	18
I.2.B. Примеры решения задач	20
I.2.B. Задачи для самостоятельной работы	26
I.3. Работа. Мощность. Энергия. Закон сохранения энергии	30
I.3.A. Основные формулы	30
I.3.B. Примеры решения задач	31
I.3.B. Задачи для самостоятельной работы	34
I.4. Динамика твердого тела	40
I.4.A. Основные формулы	40
I.4.B. Примеры решения задач	42
I.4.B. Задачи для самостоятельной работы	46
I.5. Релятивистская механика	51
I.5.A. Основные формулы	51
I.5.B. Примеры решения задач	52
I.5.B. Задачи для самостоятельной работы	54
Глава II. Основы термодинамики и статистической физики	57
II.1. Законы идеальных газов. Молекулярно-кинетическая теория газов	57
II.1.A. Основные формулы	57
II.1.B. Примеры решения задач	59
II.1.B. Задачи для самостоятельной работы	60
II.2. Физические основы термодинамики	63
II.2.A. Основные формулы	63
II.2.B. Примеры решения задач	65
II.2.B. Задачи для самостоятельной работы	67
Глава III. Основы классической теории электромагнетизма	74
III.1. Закон Кулона. Взаимодействие заряженных тел. Напряжен- ность электрического поля. Электрическое смещение. Тео- рема Остроградского—Гаусса	74
III.1.A. Основные формулы	74
III.1.B. Примеры решения задач	76
III.1.B. Задачи для самостоятельной работы	84

III.2.	Потенциал. Энергия системы электрических зарядов. Работа по перемещению заряда в поле. Электрический диполь. Электроемкость. Конденсаторы. Энергия заряженного проводника. Энергия электрического поля.	89
III.2.A.	Основные формулы	89
III.2.B.	Примеры решения задач	92
III.2.B.	Задачи для самостоятельной работы.	101
III.3.	Постоянный электрический ток. Проводимость	106
III.3.A.	Основные формулы	106
III.3.B.	Примеры решения задач	108
III.3.B.	Задачи для самостоятельной работы.	114
III.4.	Магнитное поле постоянного тока. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле. Закон полного тока. Магнитный поток	121
III.4.A.	Основные формулы	121
III.4.B.	Примеры решения задач	124
III.4.B.	Задачи для самостоятельной работы.	134
III.5.	Электромагнетизм. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле. Электромагнитная индукция. Индуктивность. Энергия магнитного поля. Уравнения Максвелла	141
III.5.A.	Основные формулы	141
III.5.B.	Примеры решения задач	143
III.5.B.	Задачи для самостоятельной работы.	153
Глава IV.	Колебания и волны	161
IV.1.	Колебательное движение.	161
IV.1.A.	Основные формулы	161
IV.1.B.	Примеры решения задач	164
IV.1.B.	Задачи для самостоятельной работы.	174
IV.2.	Волновые процессы.	182
IV.2.A.	Основные формулы	182
IV.2.B.	Примеры решения задач	185
IV.2.B.	Задачи для самостоятельной работы.	190
Глава V.	Основы волновой оптики	196
V.1.	Интерференция	196
V.1.A.	Основные формулы	196
V.1.B.	Примеры решения задач	197
V.1.B.	Задачи для самостоятельной работы	202
V.2.	Дифракция света.	205
V.2.A.	Основные формулы	205
V.2.B.	Примеры решения задач	207
V.2.B.	Задачи для самостоятельной работы	210
V.3.	Поляризация света	213
V.3.A.	Основные формулы	213
V.3.B.	Примеры решения задач	214
V.3.B.	Задачи для самостоятельной работы	216
Глава VI.	Основы квантовой механики	219
VI.1.	Тепловое излучение.	219
VI.1.A.	Основные формулы	219
VI.1.B.	Примеры решения задач	221
VI.1.B.	Задачи для самостоятельной работы.	223

VI.2.	Квантовая природа света	225
VI.2.A.	Основные формулы	225
VI.2.B.	Примеры решения задач	226
VI.2.B.	Задачи для самостоятельной работы	229
VI.3.	Волновые свойства микрочастиц	231
VI.3.A.	Основные формулы	231
VI.3.B.	Примеры решения задач	232
VI.3.B.	Задачи для самостоятельной работы	236
VI.4.	Простейшие случаи движения микрочастиц	239
VI.4.A.	Основные формулы	239
VI.4.B.	Примеры решения задач	242
VI.4.B.	Задачи для самостоятельной работы	247
VI.5.	Строение атома	250
VI.5.A.	Основные формулы	250
VI.5.B.	Примеры решения задач	253
VI.5.B.	Задачи для самостоятельной работы	259
Глава VII.	Основы теории строения вещества. Физика микромира.	263
VII.1.	Элементы физики твердого тела. Тепловые свойства кристаллов. Квантовая теория электронов в металле	263
VII.1.A.	Основные формулы	263
VII.1.B.	Примеры решения задач	266
VII.1.B.	Задачи для самостоятельной работы	271
VII.2.	Физика атомного ядра	275
VII.2.A.	Основные формулы	275
VII.2.B.	Примеры решения задач	279
VII.2.B.	Задачи для самостоятельной работы	285
Глава VIII.	Варианты типовых расчетов.	290
VIII.1.	Типовой расчет по теме «Физические основы механики»	290
VIII.2.	Типовой расчет по теме «Основы молекулярно-кинетической теории и термодинамики»	301
VIII.3.	Типовой расчет по теме «Электростатика»	309
VIII.4.	Типовой расчет по теме «Постоянный ток. Магнитное поле»	318
VIII.5.	Типовой расчет по теме «Колебания и волны»	325
VIII.6.	Типовой расчет по теме «Оптика. Тепловое излучение. Кванты света»	332
VIII.7.	Типовой расчет по теме «Основы квантовой механики»	340
VIII.8.	Типовой расчет по теме «Классическая и квантовая статистика. Основы строения вещества»	348
Приложение.	Справочный материал	359
Ответы	369
I.	Физические основы механики	369
II.	Основы термодинамики и статистической физики	371
III.	Основы классической теории электромагнетизма	372
IV.	Колебания и волны	375
V.	Основы волновой оптики	377
VI.	Основы квантовой механики	378
VII.	Основы теории строения вещества	379

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Учебное электронное издание

Серия: «Учебник для высшей школы»

Калашников Николай Павлович
Смондырев Михаил Александрович

ОСНОВЫ ФИЗИКИ

В трех томах

Том 3

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

Ведущие редакторы *И. Я. Иццоки, Т. Г. Хохлова, М. С. Стригунова*

Художник *В. А. Прокудин*

Технический редактор *Т. Ю. Федорова*

Корректор *Н. В. Бурдина*

Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Латко* в пакете L^AT_EX 2_ε
с использованием кириллических шрифтов семейства LN

Подписано к использованию 06.12.22.

Формат 150×225 мм

Издательство «Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

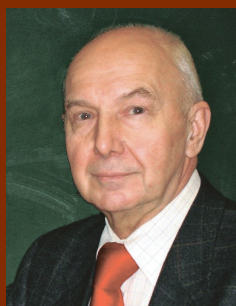
Телефон: (499) 157-5272

e-mail: info@pilotLZ.ru, <http://www.pilotLZ.ru>

Предлагаемый сборник упражнений и задач входит в состав учебно-методического комплекта для естественнонаучных и инженерно-технических специальностей вузов вместе с учебником «Основы физики» в двух томах.

Структура пособия построена по классическому принципу. В начале каждой темы приводятся основные уравнения и формулы, далее дается подробный разбор решения нескольких стандартных и наиболее интересных для практики задач. Основную часть пособия занимают задачи для самостоятельной работы. Также предлагаются варианты типовых расчетов по темам. Задачник сопровождается справочным материалом и ответами.

КАЛАШНИКОВ Николай Павлович



Профессор, доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой общей физики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (НИЯУ МИФИ).

Автор более 380 научных трудов и 14 монографий.

С 2012 г. директор агентства по аккредитации образовательных программ инженерных специальностей.

Основные направления научных исследований профессора Калашникова – ядерная физика, взаимодействия быстрых заряженных частиц с веществом, физика твердого тела в экстремальных состояниях.

СМОНДЫРЕВ Михаил Александрович



Профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ, Дубна), профессор Московского авиационного института (Национального исследовательского университета).

В сферу научных интересов входят вопросы теории элементарных частиц и твердого тела. Автор и переводчик целого ряда научно-популярных книг и статей.

Лауреат премии Ленинского комсомола и премий ОИЯИ – международной межправительственной научно-исследовательской организации.