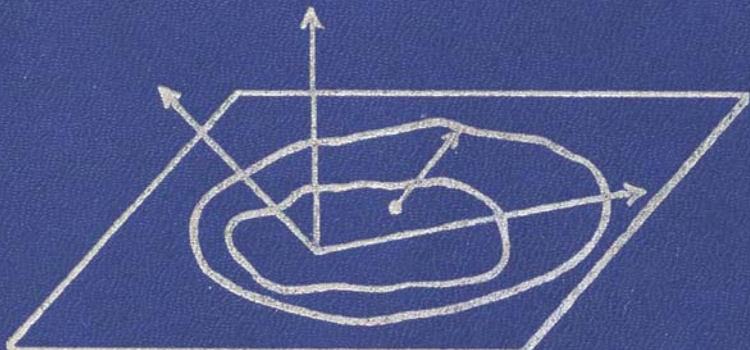
А. Г. Свешников
А. Н. Боголюбов
В. В. Кравцов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов,
В. В. Кравцов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Рекомендовано Комитетом по высшей школе Миннауки России в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Физика» и специальностям «Физика» и «Прикладная математика».

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1993

ББК 22.311
С 24
УДК 530.145

Рецензенты:

кафедра высшей математики
Московского инженерно-физического института,
профессор *Ю. П. Попов*

Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лек-
С24 ции по математической физике: Учеб. пособие. — М.: Изд-
во МГУ, 1993. — 352 с.
ISBN 5—211—02073—1

В книге рассматриваются основные методы исследования краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений математической физики. Отличительной особенностью учебного пособия является непосредственная связь между физической сущностью изучаемых явлений и математическими методами их исследования. В пособии содержится математический аппарат, знание которого необходимо студентам-физикам для дальнейшей работы в области экспериментальной и теоретической физики. Одна из глав посвящена изложению теории специальных функций — важнейшему аналитическому аппарату исследования краевых задач математической физики.

Для студентов физических специальностей университетов.

$\text{С}\ \dfrac{1604010000(4309000000)-019}{077(02)-93}\ 25-93$ **ББК 22.311**

пр 02

2842-21-93

ISBN 5—211—02073—1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс математической физики занимает значительное место в общей математической подготовке студентов физических факультетов университетов. По этому курсу за многие годы было создано большое число первоклассных руководств, начиная с классических книг В. А. Стеклова, Д. Гильберта и Р. Куранта и сыгравших огромную роль в становлении университетского курса учебников А. Н. Тихонова и А. А. Самарского, С. Л. Соболева, В. С. Владимирова и ряда других. Однако все эти книги содержат материал, во многом превосходящий возможности лекционных курсов, определяемых ныне действующими учебными планами, и не всегда акцентируют внимание изучающих их студентов на стержневых вопросах курса.

В предлагаемых вниманию читателей лекциях сделана попытка дать по возможности компактное изложение материала, составляющего основу действующей университетской программы. Определенное внимание уделено роли методов математической физики при математическом моделировании физических процессов, интерпретации не только решений конкретных задач, но и используемых методов решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующих реальные физические процессы. Вводная глава посвящена рассмотрению наиболее характерных физических задач, математические модели которых представляют собой начально-краевые задачи математической физики.

Традиционно большое место в курсе занимает изложение метода разделения переменных решения начально-краевых задач, при котором естественно возникает необходимость рассмотрения специальных функций, являющихся решением задач Штурма—Лиувилля. Изучению свойств ряда наиболее широко используемых при решении конкретных задач специальных функций, в частности классических ортогональных полиномов, посвящена отдельная глава курса.

В лекциях затрагиваются и такие вопросы как применение обобщенных функций в математической физике, построение автомодельных решений квазилинейных уравнений, описывающих режимы с обострением, исследование нелинейных колебаний.

Авторы лекций в течение многих лет читают данный курс студентам физического факультета Московского университета.

Глава I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

При исследовании реальных физических процессов и явлений методами математического моделирования одним из важных этапов является формулировка математической модели, т. е. четкая постановка математической задачи, достаточно адекватной исследуемому кругу физических явлений

Весьма широкий класс математических моделей, описывающих физические явления, представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных.

В этой главе рассматриваются наиболее типичные физические задачи, математическими моделями которых служат начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

§ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

1. Малые продольные колебания упругого стержня

Рассмотрим упругий стержень длины l, расположенный в состоянии равновесия вдсль оси x от точки $x=0$ до точки $x=l$.

Будем рассматривать малые продольные колебания стержня, при которых напряжения, возникающие в процессе колебаний, подчиняются закону Гука. Тогда стержень можно рассматривать как абсолютно упругий.

Поскольку рассматриваются продольные колебания упругого стержня, то все точки одного сечения испытывают одно и то же смещение. Обозначим через $u(x, t)$ продольное смещение в момент времени t сечения стержня, характеризующегося абсциссой x в состоянии равновесия. Выбранная нами геометрическая переменная x называется переменной Лагранжа. В переменных Лагранжа каждая физическая точка стержня в течение всего рассматриваемого процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x. Физическая точка, занимавшая в начальный момент в состоянии равновесия положение x, в любой последующий момент времени будет находиться в точке с координатой $\bar{x}=x+u(x, t)$.

Обозначим через $\rho(x)$ линейную плотность стержня, $k(x)$ — коэффициент упругости материала стержня, $f(x, t)$ — плотность импульса продольной внешней силы, приложенной к стержню.

Поскольку рассматриваются малые колебания, то согласно закону Гука сила, вызывающая упругую деформацию бесконечно малого элемента Δx стержня, равна

$$P(x)=k(x)\varepsilon(x),$$

где $\varepsilon(x)$ — относительное удлинение элемента:

$$\varepsilon(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)'}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Поскольку в формуле (1.1)

$$(\Delta x)'=\{x+\Delta x+u(x+\Delta x, t)-(x+u(x, t))\}-\Delta x=$$
$$=u(x+\Delta x, t)-u(x, t),$$

то $\varepsilon(x)=u_x(x, t)$

и сила упругого натяжения в сечении x равна

$$P(x)=k(x)u_x(x, t).$$

Для вывода дифференциального уравнения, описывающего малые продольные колебания стержня, воспользуемся вариационным принципом.

Вариационный принцип. Если материальная система, находящаяся в поле внешних сил, характеризуется для любого момента времени t кинетической энергией $T(t)$ и потенциальной энергией $U(t)$, то переход ее из состояния в момент времени t_1 в новое состояние в момент времени t_2 происходит так, что функционал

$$\Phi=\int_{t_1}^{t_2}\{T(t)-U(t)\}\,dt \tag{1.2}$$

имеет экстремальное значение.

Так как рассматривается случай малых колебаний, при подсчете кинетической и потенциальной энергии членами высшего порядка малости можно пренебречь.

Кинетическая энергия ΔT малого участка стержня Δx равна (считаем, что в пределах участка Δx все параметры сохраняют постоянное значение)

$$\Delta T=\frac{1}{2}\rho(x)\Delta x u_t^2(x, t).$$

Следовательно, кинетическая энергия всего стержня равна

$$T(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho(x)u_t^2(x, t)\,dx.$$

Потенциальная энергия системы «стержень в поле внешних сил» U складывается из потенциальной энергии упругой деформации $U_{у.д}$ и из работы A внешней силы:

$$U = U_{у\,д} - A.$$

Работа ΔA внешней силы, затраченная на перемещение малого элемента Δx из состояния равновесия в состояние $u(x, t)$, равна

$$\Delta A = f(x, t)\, \Delta x\, u(x, t).$$

Полная работа A внешней силы записывается следующим образом:

$$A(t) = \int_0^l f(x, t)\, u(x, t)\, dx.$$

Подсчитаем энергию упругой деформации. Выделим малый участок стержня длиной Δx, считая, что в пределах данного участка коэффициент упругости является постоянным $k(x) = k_0$. На участок Δx со стороны соседнего элемента действует сила упругого напряжения F, равная $F = \varepsilon k_0$, где ε — относительное удлинение элемента Δx. При перемещении элемента Δx на расстояние δ будет совершена работа

$$\Delta U_{у\,д} = k_0 \varepsilon \delta.$$

С перемещением на расстояние δ связано изменение относительного удлинения ε на величину $\Delta\varepsilon$, причем

$$\Delta\varepsilon = \frac{\delta}{\Delta x}.$$

Следовательно, $\delta = \Delta\varepsilon \Delta x$ и

$$\Delta U_{у\,д} = k_0\, \Delta x\, \varepsilon\, \Delta\varepsilon.$$

Проинтегрировав последнее равенство от 0 до ε, получаем выражение для энергии упругой деформации, которой обладает выделенный элемент:

$$dU_{у\,д} = \int_0^{\varepsilon} k_0\, \Delta x\, \varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{2} k_0 \varepsilon^2\, \Delta x. \qquad (1.3$$

Рассмотрим теперь неоднородный стержень с коэффициентом упругости $k(x)$ и применим формулу (1.3) для бесконечно малого элемента dx, учитывая, что $\varepsilon = u_x(x, t)$:

$$dU_{у\,д} = \frac{1}{2} k(x)\, u_x^2(x, t)\, dx.$$

Проинтегрировав последнее равенство по x от 0 до l, получим

$$U_{\text{у.д}} = \frac{1}{2} \int_0^l k(x) u_x^2(x, t)\, dx. \tag{1.4}$$

Составим функционал (1.2):

$$\Phi[u] = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \rho(x) u_t^2 - \frac{1}{2} k(x) u_x^2 + f(x, t) u \right\} dx\, dt. \tag{1.5}$$

Выпишем для функционала (1.5) уравнение Эйлера—Остроградского, являющееся необходимым условием экстремума функционала

$$(F_{u_t})_t + (F_{u_x})_x - F_u = 0, \tag{1.6}$$

где

$$F = F(u, u_t, u_x) = \frac{1}{2} \rho u_t^2 - \frac{1}{2} k u_x^2 + fu.$$

Вычисляя производные, входящие в формулу (1.6), получим уравнение Эйлера—Остроградского для функционала (1.5), описывающее малые продольные колебания упругого стержня:

$$\rho u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t). \tag{1.7}$$

Выражение в левой части уравнения (1.7) описывает силы инерции, первое слагаемое в правой части — упругое взаимодействие и второй член в правой части — действие внешней силы.

Если стержень однородный и его линейная плотность и коэффициент упругости постоянны: $\rho(x) = \rho_0$, $k(x) = k_0$, то уравнение (1.7) обычно записывается в следующем виде:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \bar{f},$$

где

$$a^2 = \frac{k_0}{\rho_0}, \quad \bar{f} = \frac{1}{\rho_0} f. \tag{1.8}$$

Уравнения (1.7) и (1.8) представляют собой простейшие примеры уравнений колебаний.

При математическом описании физического явления необходимо прежде всего грамотно поставить задачу, т. е. сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса.

Дифференциальные уравнения с обыкновенными и тем более частными производными имеют бесконечное множество решений. Для однозначной характеристики процесса кроме уравнения нужно задать еще некоторые дополнительные условия. Задавая дополнительные условия, нужно помнить, что эти условия должны обеспечивать единственность и существование решения, т. е. задача не должна быть недоопределенной или переопределенной.

Как известно*), в случае обыкновенных дифференциальных уравнений эти условия определяются постановкой конкретной физической задачи и могут иметь различную форму, в зависимости от которой приходят к задаче Коши или к краевой задаче. В случае дифференциальных уравнений в частных производных в качестве дополнительных тоже используются начальные и граничные условия.

Начальные условия. Начальные условия определяют состояние системы в некоторый выделенный момент времени, который считается «начальным». Например, в качестве начального момента времени можно взять $t=0$. В случае уравнения (1.7), описывающего малые продольные колебания стержня, нужно в начальный момент $t=0$ задать положение каждой точки стержня и ее скорость:

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ u_t(x,\ 0)=\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant l,$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — некоторые заданные функции. Если функция $\varphi(x)$ отлична от нуля, это означает, что в начальный момент времени стержень не находился в положении равновесия. Если функция $\psi(x)$ отлична от нуля, это означает, что в начальный момент каждой точке стержня была сообщена мгновенная начальная скорость, например двигавшийся стержень мгновенно остановился.

Граничные условия. Мы будем рассматривать линейные граничные условия. Будем считать, что стержень имеет длину l и занимает вдоль оси x отрезок от 0 до l. Для определенности будем рассматривать левый конец стержня $x=0$. С физической точки зрения ясно, что левый конец стержня может находиться в различных условиях. Например, он может быть жестко закреплен (стержень заделан в стену) или же двигаться по определенному закону (стержень жестко прикреплен к плите, совершающей заданное движение). Математически это условие записывается следующим образом:

$$u(0,\ t)=\mu(t),\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.9}$$

где T — некоторая постоянная, а $\mu(t)$ — заданная функция Условие (1.9) называется граничным условием первого рода, или условием Дирихле. В частности, если функция $\mu(t)$ тождественно равна нулю, что соответствует жестко закрепленному левому концу стержня, то граничное условие (1.9) называется однородным граничным условием первого рода, или одно-

---

*) См. Тихонов Н. А, Васильева А. Б, Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985

родным условием Дирихле. Если же функция $\mu(t)$ отличается от нуля, то условие (1.9) называется неоднородным граничным условием первого рода, или неоднородным условием Дирихле.

Если задан закон изменения силы $f(t)$, приложенной к левому концу $x=0$ стержня и действующей в продольном направлении, то, используя закон Гука, граничный режим на этом конце можно записать следующим образом (напомним, что $k(x)$ — коэффициент упругости стержня):

$$k(0)\,u_x(0,\ t)=f(t)$$

или

$$u_x(0,\ t)=\nu(t),\ 0\leqslant t\leqslant T, \qquad (1.10)$$

где $\nu(t)=\dfrac{1}{k(0)}f(t)$ — заданная функция.

Условие (1.10) называется граничным условием второго рода, или условием Неймана. Если $\nu(t)\equiv 0$, то условие (1.10) называется однородным граничным условием второго рода, или однородным условием Неймана. Физически это условие означает, что левый конец стержня свободен: к нему не приложена внешняя сила, и он не закреплен.

Пусть, наконец, левый конец стержня закреплен упруго, например с помощью пружины, коэффициент жесткости которой равен α. Сила упругости, стремящаяся вернуть левый конец стержня в положение равновесия, согласно закону Гука пропорциональна смещению $\alpha u(0, t)$. Граничный режим можно записать следующим образом:

$$k(0)\,u_x(0,\ t)=\alpha u(0,\ t)$$

или

$$u_x(0,\ t)-hu(0,\ t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \qquad (1.11)$$

где $h=\alpha/k$. Условие (1.11) называется однородным граничным условием третьего рода.

Возможно задание при $x=0$ линейной комбинации упругого закрепления и смещения. Например, стержень с помощью пружины может быть прикреплен к плите, которая перемещается по некоторому закону, определяемому функцией $\nu(t)$, параллельно стержню. В этом случае получается граничное условие следующего вида:

$$u_x(0,\ t)=h\{u(0,\ t)-\nu(t)\}$$

или

$$u_x(0,\ t)-hu(0,\ t)=\mu(t),\ 0\leqslant t\leqslant T, \qquad (1.12)$$

где $\mu(t)=-h\nu(t)$ — заданная функция. Условие (1.12) называется неоднородным граничным условием третьего рода.

Разумеется, физическая постановка задачи может приводить и к более сложным граничным условиям, в частности не-линейным. Такие условия возникают, например, при упругом закреплении, не подчиняющемся закону Гука. Если натяжение на левом конце стержня является нелинейной функцией смещения $u(0, t)$, то граничное условие примет вид

$$u_x(0, t) = \frac{1}{k(0)} P[u(0, t)],$$

где $P[u(0, t)]$ определяет упругую силу, приложенную к левому концу стержня и действующую в продольном направлении.

В граничное условие могут входить производные функции по t. Например, если к концу пружины прикреплена пластинка, плоскость которой перпендикулярна оси пружины, и конец пружины испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости его движения, то граничное условие записывается в виде

$$k(0)\, u_x(0, t) = \alpha u_t(0, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где α — коэффициент сопротивления среды.

Аналогичные граничные условия становятся на правом конце стержня. При этом возможны комбинации различных граничных условий на правом и левом концах стержня.

Граничные условия могут включать и производные порядков выше первого. Пусть, например, упругий стержень длины l расположен вертикально и его верхний конец закреплен неподвижно (заделан в потолок). К нижнему концу стержня прикреплен массивный абсолютно жесткий (т. е. недеформируемый) груз M. Груз находится на площадке и не растягивает и не сжимает стержень. В начальный момент времени $t=0$ площадку убирают. Предположим, что масса стержня m много меньше массы груза M и действием силы тяжести на стержень можно пренебречь. Направим ось x вдоль стержня, так что его верхний конец будет иметь абсциссу $x=0$. Тогда на верхнем конце стержня $x=0$ граничным условием будет однородное условие Дирихле

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

а граничное условие на нижнем конце стержня $x=l$ имеет вид

$$\frac{M}{g} u_{tt}(l, t) = -k(l) S u_x(l, t) + M, \quad t \in [0, T],$$

где S — площадь поперечного сечения стержня.

В дальнейшем мы будем говорить о трех основных типах граничных условий первого, второго и третьего рода. Рассмотрим, например, нагруженный стержень с приложенной к нему внешней силой, всем точкам которого в начальный момент времени $t=0$ задаются некоторые смещение и некоторая скорость. Пусть левый конец стержня упруго прикреплен к движущейся точке закрепления, а правый конец движется по заданному закону. Сформулируем математическую задачу, описывающую процесс движения такого стержня:

$$
\begin{gathered}
u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\ 0<x<l,\ 0<t<T,\\
u(x,\ 0)=\varphi(x),\\
u_t(x,\ 0)=\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant l,\\
u_x(0,\ t)-hu(0,\ t)=\mu_1(t),\\
u(l,\ t)=\mu_2(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,
\end{gathered}
\tag{1.13}
$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — заданные функции, a, h — постоянные коэффициенты.

Задача (1.13) называется начально-краевой задачей.

2. Малые поперечные колебания упругой струны

Получим дифференциальное уравнение, описывающее процесс малых поперечных колебаний упругой струны. Пусть в состоянии равновесия струна длины l расположена вдоль оси x и занимает положение от точки $x=0$ до точки $x=l$. Будем рассматривать случай малых поперечных колебаний струны, причем будем считать, что смещения струны расположены в одной плоскости. В этом случае процесс колебаний струны можно описать с помощью функции $u(x,t)$, представляющей собой поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t.

Струну будем рассматривать как гибкую упругую нить, не оказывающую сопротивления изгибу, но сопротивляющуюся растяжению. Напряжения, возникающие в струне в рассматриваемом случае, направлены по касательным к ее мгновенному профилю (рис. 1.1). Поскольку рассматриваются малые колебания, то возникающие в струне напряжения определяются законом Гука.

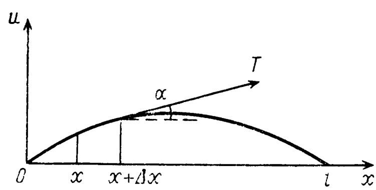


Рис 1 1

Кроме того, в силу малости колебаний будем учитывать лишь члены первого порядка малости $(u_x^2(x,t)\ll 1)$.

Подсчитаем удлинение участка струны $(x,\ x+\Delta x)$ в момент времени t. Длина дуги этого участка равна

$$S=\int\limits_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+u_x^2(x;\ t)}\,dx\simeq\Delta x.$$

Следовательно, в пределах принятой точности удлинения участка струны в процессе колебаний не происходит. Поэтому в силу закона Гука величина натяжения T в каждой точке не изменяется со временем.

Проекции натяжения на оси x и u равны

$$T_x = T(x)\cos\alpha = \frac{T(x)}{\sqrt{1+u_x^2}} \simeq T(x), \tag{1.14}$$

$$T_u = T(x)\sin\alpha \cong T(x)\operatorname{tg}\alpha = T(x)\,u_x, \tag{1.15}$$

где α — угол между касательной и кривой $u(x, t)$ и осью x.

Так как рассматриваются поперечные колебания, то следует учитывать силы инерции и внешние силы, направленные лишь вдоль оси u. Поэтому сумма проекций сил, действующих на выделенный участок $(x, x+\Delta x)$ струны вдоль оси x, равна

$$T_x(x) - T_x(x+\Delta x) = 0,$$

т. е. с учетом (1.14) получим $T(x) = T(x+\Delta x)$. В силу произвольности точки x струны натяжение не зависит от x, т. е. $T(x) = T_0$.

Для вывода уравнения, описывающего поперечные колебания струны, воспользуемся вторым законом Ньютона, согласно которому изменение количества движения выделенного участка струны Δx за время Δt равно импульсу сил, приложенных к этому участку. Обозначим через $\rho(x)$ линейную плотность струны, а через $f(x, t)$ плотность импульса внешней поперечной силы, приложенной к струне. Тогда для участка Δx струны второй закон Ньютона запишется следующим образом:

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} \{u_t(\xi, t+\Delta t) - u_t(\xi, t)\}\,\rho(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_t^{t+\Delta t} T_0\{u_x(x+\Delta x, \tau) - u_x(x, \tau)\}\,d\tau + \int\limits_x^{x+\Delta x}\int\limits_t^{t+\Delta t} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{1.16}$$

Предположим теперь, что функция $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и t, а функция $f(x, t)$ непрерывна. Тогда, применяя к формуле (1.16) теорему о среднем и формулу конечных приращений *), получим

$$u_{tt}(x^*, t^*)\,\rho(x^*)\,\Delta t\,\Delta x = T_0 u_{xx}(x^{**}, t^{**})\,\Delta t\,\Delta x + f(x^{***}, t^{***})\,\Delta t\,\Delta x, \tag{1.17}$$

где

$$x^*,\ x^{**},\ x^{***} \in (x, x+\Delta x),$$

$$t^*,\ t^{**},\ t^{***} \in (t, t+\Delta t).$$

Сократив обе части формулы (1.17) на $\Delta t \Delta x$ и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$, получим в силу сделанных предпо-

*) См.: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. I. М.: Наука, 1982.

ложений о непрерывности вторых частных производных функции $u(x, t)$:

$$\rho(x) u_{tt}(x, t) = T_0 u_{xx}(x, t) + f(x, t). \tag{1.18}$$

Если плотность среды постоянная $\rho(x) = \rho_0$, то уравнение (1.18) обычно записывается в виде

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F, \tag{1.19}$$

где $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho_0}$, $F = \dfrac{1}{\rho_0} f$.

Уравнения (1.18) и (1.19) так же как и полученные ранее уравнения (1.7) и (1.8), представляют собой простейшие примеры уравнений колебаний.

Из физических соображений ясно, что, как и в случае малых продольных колебаний упругого стержня, для однозначного определения процесса малых поперечных колебаний упругой струны к уравнениям (1.18) или (1.19) необходимо добавить дополнительные условия — начальные и граничные. Начальные условия задают в начальный момент $t=0$ профиль струны и скорость всех точек струны. Граничные условия определяются способом закрепления концов струны. Эти условия могут включать производные высших порядков по x и по t, быть линейными или нелинейными. В частности, в зависимости от способа закрепления концов струны можно рассматривать граничные условия первого рода (условия Дирихле), граничные условия второго рода (условия Неймана) и граничные условия третьего рода. Общая начально-краевая задача, учитывающая различные комбинации граничных условий на правом и левом концах, ставится следующим образом:

$$\begin{gathered}
\rho u_{tt} = T_0 u_{xx} + f(x, t),\ x \in (0, l),\ t \in (0, T),\\
u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x),\ x \in [0, l],\\
\alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = \mu_1(t),\\
\alpha_2 u_x(l, t) + \beta_2 u(l, t) = \mu_2(t),\ t \in [0, T],
\end{gathered}$$

причем коэффициенты α_i и β_i $(i=1, 2)$ не обращаются в нуль одновременно.

При $\alpha_1=0$, $\beta_1 \neq 0$ на левом конце получается граничное условие Дирихле, при $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1=0$ — условие Неймана, при $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$ — условие третьего рода. Аналогично на правом конце при $\alpha_2=0$, $\beta_2 \neq 0$ получается граничное условие Дирихле, при $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2=0$ — условие Неймана, при $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$ — условие третьего рода.

3. Случай многих пространственных переменных

1) Малые поперечные колебания мембраны. В качестве первого примера рассмотрим уравнение, описывающее малые поперечные колебания мембраны.

Мембраной называется натянутая плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу или сдвигу, но оказывающая сопротивление растяжению. Например, мембраной в некоторых случаях можно считать плоскую пластину, толщина которой мала по сравнению с двумя другими измерениями.

Уравнение, описывающее малые поперечные колебания мембраны, можно вывести методом, аналогичным тому, которым было получено уравнение (1.18), описывающее малые поперечные колебания струны. Обозначим через $u(x, y, t)$ величину поперечного смещения точки $M(x, y)$ мембраны в момент времени t. Если рассматривать малые поперечные колебания мембраны, при которых смещение происходит перпендикулярно плоскости мембраны (x, y) и при которых квадратами величин u_x и u_y можно пренебречь, то уравнение малых поперечных колебаний мембраны будет иметь вид

$$\rho(x, y) u_{tt} = T_0 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),$$

где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность мембраны, T_0 — натяжение, $f(x, y, t)$ — плотность импульса внешней поперечной силы, действующей на мембрану в точке $M(x, y)$ в момент времени t.

Пусть в положении равновесия мембрана занимает область D плоскости (x, y), ограниченную контуром Γ.

Как и в одномерном случае, для однозначного определения процесса колебаний мембраны необходимо задание начальных и граничных условий. Например, если граница Γ мембраны движется заданным образом в поперечном направлении, то граничное условие имеет следующий вид (граничное условие первого рода, или условие Дирихле):

$$u(x, y, t) = \mu(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in [0, T],$$

где $\mu(x, y, t)$ — заданная функция. В частности, при $\mu(x, y, t) \equiv \equiv 0$ получается условие закрепленной границы мембраны. Если к границе приложена заданная поперечная сила, то приходим к граничному условию второго рода, или условию Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) = \mu(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in [0, T],$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по нормали к контуру Γ, лежащей в плоскости (x, y). В частности, при $\mu(x, y, t) \equiv 0$ имеем условие свободной границы.

Если же граница Γ мембраны закреплена упруго и при этом движется по заданному закону в поперечном направлении, то граничным условием является граничное условие третьего рода, связывающее значение функции поперечного смещения $u(x, y, t)$ и ее нормальной производной:

$$\alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) + \beta(x, y) u(x, y, t) = \mu(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma,$$
$$t \in [0, T],$$

где $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ — заданные на контуре Γ функции

Разумеется, в зависимости от реальных физических задач граничные условия могут быть и более сложного вида, в частности нелинейные и содержащие производные высших порядков, но мы в дальнейшем ограничимся условиями Дирихле, Неймана и третьего рода.

Таким образом, начально-краевая задача, описывающая процесс малых поперечных колебаний мембраны, ставится следующим образом:

$$\rho u_{tt} = T_0 \{u_{xx} + u_{yy}\} + f(x, y, t), \ (x, y) \in D, \ t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \ (x, y) \in D,$$

$$\alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) + \beta(x, y) u(x, y, t) = \mu(x, y, t),$$

$$(x, y) \in \Gamma, \ t \geqslant 0.$$

2) Уравнения малых акустических колебаний в сплошной среде. Во многих задачах газодинамики можно не учитывать молекулярную структуру газа и рассматривать газ как сплошную среду. Иными словами, говоря о бесконечно малых элементах объема, подразумевают, что объем мал по сравнению с характерным размером системы, но содержит очень большое число молекул. Аналогично, когда говорят о движении частицы газа, то имеют в виду не движение отдельной молекулы газа, а смещение элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в газодинамике как точка.

Пусть газ движется со скоростью $\mathbf{v}(M, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, проекции которой на оси координат обозначим v_x, v_y и v_z. Заметим, что $\mathbf{v}(M, t)$ есть скорость газа в данной точке $M(x, y, z)$ пространства в момент времени t, т. е. относится к определенным точкам пространства, а не к определенным частицам газа, перемещающимся в пространстве.

Введем также плотность газа $\rho(M, t)$, давление $p(M, t)$ и плотность внешних действующих сил $\mathbf{F}(M, t)$, рассчитанных на единицу массы.

При таком способе описания говорят, что задача рассматривается в координатах Эйлера.

Получим прежде всего уравнение движения газа. Обозначим через ΔV некоторый объем газа, ограниченный поверхностью ΔS. Равнодействующая сил давления, приложенных к поверхности ΔS, равна

$$-\int_{\Delta S} p\mathbf{n}\, d\sigma,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали и поверхности ΔS.

Для преобразования этого интеграла воспользуемся формулами Остроградского *)

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,\ x)\,d\sigma=\int_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial x}\,dV,$$

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,\ y)\,d\sigma=\int_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial y}\,dV,$$

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,\ z)\,d\sigma=\int_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial z}\,dV.$$

Поскольку $p\mathbf{n}=\mathbf{i}p\cos(n,\ x)+\mathbf{j}p\cos(n,\ y)+\mathbf{k}p\cos(n,\ z)$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы ортонормированного базиса, умножая первую формулу на $\mathbf{i}$, вторую на $\mathbf{j}$, третью на $\mathbf{k}$ и складывая, получим

$$\int_{\Delta S} p\mathbf{n}\,d\sigma=\int_{\Delta V}\operatorname{grad}p\,dV.$$

С учетом последней формулы уравнение движения для объема газа ΔV в интегральной форме имеет следующий вид:

$$\int_{\Delta V}\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dV=-\int_{\Delta V}\operatorname{grad}p\,dV+\int_{\Delta V}\rho\mathbf{F}\,dV \qquad (1.20)$$

Вычисляя ускорение $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ некоторой частицы газа, нужно учесть перемещение самой этой частицы. Траектории отдельных частиц газа определяются уравнениями

$$\frac{dx}{dt}=v_x,\quad \frac{dy}{dt}=v_y,\quad \frac{dz}{dt}=v_z,$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}=$$

$$=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}v_x+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}v_y+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}v_z=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\,\nabla)\,\mathbf{v}, \qquad (1.21)$$

где оператор $\mathbf{v}\nabla$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{v}\,\nabla=v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Предполагая, что все функции, входящие в формулу (1.20), являются достаточно гладкими, применяя формулу среднего

*) См. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

значения и переходя к пределу, стягивая объем ΔV в точку, получим, учитывая (1.21), уравнение движения газа в форме Эйлера

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \mathbf{F}.$$

Выведем теперь уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения вещества. Пусть в выделенном объеме ΔV отсутствуют источники и стоки газа. Тогда изменение в единицу времени количества газа, заключенного внутри объема ΔV, равно потоку газа через границу:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta V} \rho\, dv = -\int\limits_{\Delta S} \rho \mathbf{v}\mathbf{n}\, d\sigma.$$

Преобразуя правую часть последней формулы по формуле Остроградского

$$\int\limits_{\Delta S} \rho \mathbf{v}\mathbf{n}\, d\sigma = \int\limits_{\Delta V} \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})\, dV,$$

будем иметь

$$\int\limits_{\Delta V} \left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})\right\} dV = 0.$$

Применяя формулу среднего значения и переходя к пределу, получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

К полученному уравнению движения газа и уравнению непрерывности необходимо добавить термодинамическое уравнение состояния, которое мы запишем в общем виде:

$$p = C(\rho),$$

где C — заданная функция.

В результате получается система пяти скалярных уравнений относительно пяти неизвестных функций v_x, v_y, v_z, p и ρ:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial\rho}{dt} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{1.23}$$

$$p = C(\rho). \tag{1.24}$$

Система уравнений (1.22)—(1.24) представляет замкнутую систему уравнений газодинамики.

Колебательные движения в газе с малыми амплитудами называются звуковыми волнами. В каждой точке звуковой волны происходят поперечные сжатия и разрежения газа.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость $\mathbf{v}$ в ней мала, так что в уравнении (1.22) можно пренебречь членами второго порядка вида $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$ и т. д. По той же причине относительные изменения плотности и давления газа также малы.

Положим $p(M, t)=p_0(M)+\bar{p}$, $\rho(M, t)=\rho_0(M)+\bar{\rho}$, где $p_0(M)$ и $\rho_0(M)$ — равновесные значения давления и плотности газа, а $\bar{p}(M, t)$ и $\bar{\rho}(M, t)$ — их изменения в звуковой волне, причем $\bar{p} \ll p_0$, $\bar{\rho} \ll \rho_0$. Величина $\bar{p}(M, t)$ называется звуковым давлением.

Пренебрегая в системе (1.22)—(1.24) членами второго порядка, получим линеаризованную систему уравнений. Функцию $C(\rho)$ разложим в ряд по степеням ρ и учтем члены первого порядка. В результате получим

$$p_0+\bar{p}=C(\rho_0)+C'(\rho_0)\bar{\rho}$$

и, поскольку $p_0=C(\rho_0)$,

$$\bar{p}=C'(\rho_0)\bar{\rho}.$$

Таким образом, замкнутая система малых акустических колебаний в сплошной среде имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\bar{p}+\rho_0\mathbf{F}, \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_0\mathbf{v})=0, \tag{1.26}$$

$$\bar{p}=C'(\rho_0)\bar{\rho}. \tag{1.27}$$

Получим теперь уравнение относительно функции $\bar{\rho}(M, t)$ Продифференцируем уравнение (1.26) по t:

$$\bar{\rho}_{tt}+\operatorname{div}(\rho_0\mathbf{v}_t)=0$$

и подействуем оператором div на уравнение (1.25):

$$\operatorname{div}(\rho_0\mathbf{v}_t)=-\operatorname{div}\operatorname{grad}\bar{p}+\operatorname{div}(\rho_0\mathbf{F}).$$

Наконец, в линейном приближении из (1.27) получим

$$\operatorname{grad}\bar{p} \cong C'(\rho_0)\operatorname{grad}\bar{\rho}.$$

Обозначим $k(M)=C'(\rho_0)$ и $f(M, t)=-\operatorname{div}(\rho_0\mathbf{F})$. Тогда из трех последних уравнений получим уравнение второго порядка относительно функции $\bar{\rho}(M, t)$:

$$\bar{\rho}_{tt}=\operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}\bar{\rho})+f(M, t). \tag{1.28}$$

Уравнение (1.28) является уравнением колебаний в трехмерном случае. Оно часто называется уравнением акустики.

В случае адиабатического процесса уравнение газового состояния имеет вид

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma},$$

где постоянная γ — показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; c_V — теплоемкость при постоянном объеме. В линейном приближении будем иметь

$$p = p_0 + \bar{p} = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} = p_0 \left(1 + \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right)^{\gamma} \simeq p_0 \left(1 + \gamma \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right),$$

откуда

$$\bar{p} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \bar{\rho}. \tag{1.29}$$

Сравнивая (1.29) с (1.27), получим

$$k(M) = \gamma \frac{p_0(M)}{\rho_0(M)}.$$

3) Уравнения Максвелла. В качестве третьего примера рассмотрим систему уравнений Максвелла в однородной и изотропной среде. В системе СИ уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} + \mathbf{j}^{(\text{ст})}, \tag{1.30}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.31}$$

$$\operatorname{div} D = \rho, \tag{1.32}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{1.33}$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока проводимости, $\mathbf{j}^{(\text{ст})}$ — плотность тока сторонних сил, ρ — плотность объемных зарядов. К уравнениям (1.30)—(1.33) добавим материальные уравнения

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \tag{1.34}$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость, ε — относительная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ Ф/м электрическая постоянная, $\mu_a = \mu_0 \mu$ — абсолютная магнитная проницаемость, μ — относительная магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м — магнитная постоянная.

Плотность тока проводимости $\mathbf{j}$ связана с вектором $\mathbf{E}$ уравнением, выражающим закон Ома в дифференциальной форме:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{1.35}$$

где σ — проводимость среды.

Поскольку среда по предположению однородна и изотропна, то величины ε_a, μ_a, σ являются постоянными скалярными величинами.

Подействуем на обе части уравнения (1.30) оператором rot В результате получим (с учетом (1 35))

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\varepsilon_a\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}+\sigma\operatorname{rot}\mathbf{E}+\operatorname{rot}\mathbf{j}^{(\text{ст})}. \qquad (1.36)$$

С другой стороны, по известной формуле векторного анализа *) имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H}-\nabla^2\mathbf{H}. \qquad (1.37)$$

Из формул (1.31), (1.34), (1.36) и (1.37) получим уравнение

$$\varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}+\sigma\mu_a\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\nabla^2\mathbf{H}+\operatorname{rot}\mathbf{j}^{(\text{ст})}. \qquad (1\ 38)$$

Аналогичное уравнение получается для вектора **E**.

Уравнение (1.38) называется векторным волновым уравнением. Как будет следовать из дальнейшего рассмотрения, первая производная по времени определяет затухание колебаний — диссипативные потери энергии.

Для компонент вектора магнитного поля **H** из (1.38) получим скалярные волновые уравнения, которые в декартовых координатах можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f, \qquad (1.39)$$

где $\alpha=\sigma/\varepsilon_a$, $a^2=1/\varepsilon_a\mu_a$, Δ — оператор Лапласа, u — любая из декартовых компонент вектора **H**.

§ 2. ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Рассмотрение следующей группы физических задач, характеризующих процессы переноса в среде тепла или вещества, начнем с вывода так называемого уравнения теплопроводности, описывающего процесс изменения теплового состояния тела. Построим математическую модель изменения под действием заданных физических условий температуры точек тела, занимающего объем D, ограниченный поверхностью S.

Выделим в области D малый объем ΔV с границей ΔS. Обозначим через $u(M,t)$ температуру тела D в точке M в момент времени t, $\rho(M)$ — плотность тела, $c(M)$ — удельную теплоемкость, $k(M)$ — коэффициент теплопроводности, $f(M,t)$ — объемную плотность источников (стоков) тепла.

В дальнейшем нам понадобятся следующие экспериментально установленные физические закономерности.

---

*) См: Ильин В. А, Позняк Э Г. Основы математического анализа Ч 2 М Наука, 1980

Закон Фурье. Если температура тела распределена неравномерно, то в нем возникают тепловые потоки, направленные от более нагретых участков тела к менее нагретым.

Количество тепла dQ, протекающее через площадку $d\sigma$ за промежуток времени dt, равно

$$dQ = -k(M)\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\,dt, \tag{2.1}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к площадке $d\sigma$.

Закон Ньютона. Количество тепла Q, протекающего в единицу времени через площадку σ поверхности тела в окружающую среду, равно

$$Q = \sigma h\,(u - u_0), \tag{2.2}$$

где u_0 — температура окружающей среды, u — температура поверхности тела, h — коэффициент теплообмена.

Используем для вывода уравнения теплопроводности метод баланса. Запишем уравнение теплового баланса для выделенного малого объема ΔV.

Пусть за промежуток времени Δt температура объема ΔV изменилась на $\Delta u = u(M, t+\Delta t) - u(M, t)$. При этом, как обычно, считаем объем столь малым, что в его пределах температуру можно считать постоянной. Количество тепла ΔQ_1, которое нужно сообщить объему ΔV в течение промежутка времени Δt для повышения его температуры на Δu, равно

$$\Delta Q_1 = \int\limits_{\Delta V} c(M)\,\rho(M)\,\{u(M,\ t+\Delta t) - u(M,\ t)\}\,dV. \tag{2.3}$$

Между объемом ΔV и остальной частью тела D через поверхность S происходит теплообмен, который согласно закону Фурье определяется формулой (2.1). Количество тепла ΔQ_2, участвующее в этом теплообмене, равно

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta S} k(P)\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\,d\tau, \tag{2.4}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к поверхности ΔS, внешней по отношению к области ΔV.

Предположим, что функции k и u являются достаточно гладкими, и преобразуем поверхностный интеграл в правой части формулы (2.4) к объемному с помощью теоремы Остроградского—Гаусса *). В результате получим

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\,dV\,d\tau. \tag{2.5}$$

*) См. там же.

Внутри объема ΔV за промежуток времени Δt может выделяться или поглощаться некоторое количество тепла, например за счет прохождения тока, вследствие различных химических реакций и т. д. Это количество тепла ΔQ_3 выражается с помощью введенной плотности источников (стоков) тепла следующим образом:

$$\Delta Q_3 = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta V} f(M, \tau)\, dV\, d\tau. \tag{2.6}$$

Уравнение теплового баланса имеет вид

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.3), (2.5), (2.6) в формулу (2.7), получим интегральное уравнение теплового баланса, справедливое для любого достаточно малого элемента ΔV рассматриваемого тела D:

$$\int_{\Delta V} c\rho \{u(M, t+\Delta t) - u(M, t)\}\, dV =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta V} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dV\, d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta V} f\, dV\, d\tau. \tag{2.8}$$

Чтобы из интегрального соотношения (2.8) получить дифференциальное уравнение, потребуем, чтобы функция $u(M, t)$ была дважды непрерывно дифференцируема по координатам и один раз непрерывно дифференцируема по времени, функция $k(M)$ непрерывно дифференцируема, а функции $c(M)$, $\rho(M)$ и $f(M, t)$ непрерывны. Тогда, применяя к выражению (2.8) формулу конечных приращений и теорему о среднем *) и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и ΔV, стягивающемся в точку M, получим

$$c(M)\rho(M) u_t = \operatorname{div}(k(M) \operatorname{grad} u) + f(M, t). \tag{2.9}$$

Для постановки начально-краевой задачи к уравнению (2.9) необходимо добавить дополнительные условия. Это начальное условие, определяющее температуру тела D в начальный момент времени $t=0$. Отметим, что в случае уравнения теплопроводности, в котором старшей производной по времени является производная первого порядка, достаточно одного начального условия. В этом отношении уравнение теплопроводности отличается от уравнения колебаний, рассмотренного в § 1, для которого необходима постановка двух начальных условий. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в дальнейшем. Граничное условие задает тепловой режим на поверхности S тела D. Если граница S поддерживается при заданной темпе-

*) См. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. I. М.: Наука, 1982.

ратуре $\mu(P,t)$, имеем граничное условие первого рода, или граничное условие Дирихле:

$$u(P,\ t)=\mu(P,\ t),\ P\in S,\ t\geqslant 0. \tag{2.10}$$

Если на поверхности S задан тепловой поток $\nu(P,t)$, имеем граничное условие второго рода, или граничное условие Неймана:

$$k(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,\ t)=\nu(P,\ t),\ P\in S,\ t\geqslant 0,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к поверхности S. Это условие обычно записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(P,\ t)=\mu(P,\ t),\ P\in S,\ t\geqslant 0. \tag{2.11}$$

где $\mu(P,t)$ — заданная функция.

Наконец, если на поверхности S происходит теплообмен с внешней средой заданной температуры, то, применяя закон Ньютона (2.2), после несложных преобразований получаем граничное условие третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial n}(P,\ t)+h(P)u(P,\ t)=\mu(P,\ t), \tag{2.12}$$

где $\mu(P,t)$ и $h(P)$ — заданные функции, $P\in S$, $t\geqslant 0$.

Таким образом, начально-краевая задача для уравнения теплопроводности ставится следующим образом:

$$\begin{gathered}c\rho u_t=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)+f,\ M\in D,\ t>0,\\ u(M,\ 0)=\varphi(M),\ M\in\bar{D},\\ \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(P)u=\mu(P,\ t),\ P\in S,\ t\geqslant 0,\end{gathered} \tag{2.13}$$

где $f(M,\ t)$, $\mu(P,\ t)$, $c(M)$, $\rho(M)$, $k(M)$, $\varphi(M)$, $\alpha(P)$, $\beta(P)$ — заданные функции. При этом, если $\alpha\equiv 0$, а $\beta\not\equiv 0$, имеем граничное условие (2.10), если $\alpha\not\equiv 0$, $\beta\equiv 0$ — граничное условие (2.11), а если $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$ — граничное условие (2.12).

Для уравнения теплопроводности, как и для уравнения колебаний, могут возникать и более сложные граничные условия, чем условия (2.10)—(2.12). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только граничных условий первого, второго и третьего рода.

Заметим, что к уравнению теплопроводности приводит не только рассмотрение процессов распространения тепла, но и процессов диффузии, процессов переноса вещества и др. Например, уравнение диффузии имеет вид

$$c(M)\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(D(M)\operatorname{grad}u)+f(M,\ t), \tag{2.14}$$

где $u(M, t)$ — концентрация газа в точке M в момент времени t, $c(M)$ — коэффициент пористости, равный отношению объема пор к полному объему, $D(M)$ — коэффициент диффузии, $f(M, t)$ — плотность источников (стоков) вещества. Уравнения теплопроводности (2.9) и диффузии (2.14) отличаются только обозначением коэффициентов.

В ряде случаев и процессы распространения электромагнитных волн могут описываться уравнениями типа уравнения теплопроводности.

В заключение параграфа заметим, что если уравнение теплопроводности рассматривается в неограниченном пространстве или в области внешней относительно замкнутой поверхности, то для однозначного описания процесса нужно ставить определенные условия на бесконечности. Конкретный вид этих условий будет рассмотрен в гл. VI.

§ 3. СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. Стационарное распределение тепла

Пусть физические условия в задаче о тепловом состоянии тела таковы, что плотность источников (стоков) тепла и граничные условия не зависят от времени. Тогда с течением времени в теле устанавливается некоторое не зависящее от времени распределение температуры, т е. тепловое состояние тела выйдет на стационарный режим. Распределение температуры в таком случае описывается уравнением, которое получается из уравнения теплопроводности (2.9) при $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ и $f(M, t) \equiv f(M)$. Уравнение, описывающее стационарное распределение тепла, имеет вид

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f(M) = 0. \qquad (3\ 1)$$

Граничные условия ставятся так же, как и для уравнения теплопроводности, но граничная функция не зависит от времени: $\mu = \mu(P)$.

Частным случаем уравнения (3.1) является так называемое уравнение Пуассона, получающееся при постоянном коэффициенте k:

$$\Delta u = -f(M). \qquad (3.2)$$

Однородное уравнение (3.2) называется уравнением Лапласа

$$\Delta u = 0. \qquad (3.3)$$

2. Задачи электростатики

В электростатическом случае уравнения Максвелла для электрического вектора $\mathbf{E}(M)$ получаются из уравнений (1.31), (1.32), (1 34) и имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{3.4}$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho (M). \tag{3.5}$$

Из уравнения (3.4) следует, что можно ввести скалярную функцию $u(M)$ — потенциал поля, через который вектор $\mathbf{E}(M)$ выражается согласно формуле

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u. \tag{3.6}$$

При этом уравнение (3.4) выполняется автоматически. Подставляя (3.6) в (3.5), получим уравнение

$$\operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} u) = -\rho (M),$$

которое с точностью до обозначений совпадает с уравнением (3.1).

3. Установившиеся колебания

Если на некоторую материальную систему с непрерывно распределенными параметрами действует внешняя периодическая сила с частотой ω, то с течением времени в системе устанавливаются колебания с частотой внешней силы ω. В § 1 было получено уравнение акустики (1.28). Пусть $f(M, t) = \bar{f}(M) e^{-i\omega t}$. Если в системе установились колебания с частотой ω вынуждающей силы, то функцию $\bar{\rho}(M, t)$ можно искать в виде $\bar{\rho}(M, t) = u(M) e^{-i\omega t}$.

Подставляя эту функцию в (1 28) и сокращая на множитель $e^{-i\omega t}$, получим уравнение

$$\operatorname{div} (k \operatorname{grad} u) + \omega^2 u = -f(M). \tag{3.7}$$

В частности, в случае однородной среды коэффициент $k(M) = k_0$ постоянный и уравнение (3 7) принимает вид

$$\Delta u + cu = -\varphi (M), \tag{3.8}$$

где $c = \omega^2 / k_0$, $\varphi = \dfrac{1}{k_0} f$. Уравнения (3.7) и (3.8) называются приведенными волновыми уравнениями, или уравнениями Гельмгольца.

4. Установившиеся электромагнитные колебания

Аналогично п. 3 можно рассмотреть установившиеся электромагнитные колебания. Для изотропной и однородной среды в отсутствие сторонних токов и зарядов уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{3.9}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \tag{3.10}$$

Пусть в системе установились электромагнитные колебания с частотой ω. Тогда векторы **E** и **H** можно искать в виде

$$\mathbf{E}(M,\ t) = \mathbf{E}_0(M)\,e^{-i\omega t},\ \mathbf{H}(M,\ t) = \mathbf{H}_0(M)\,e^{-i\omega t}. \tag{3.11}$$

Векторы $\mathbf{E}_0(M)$ и $\mathbf{H}_0(M)$, зависящие только от пространственных координат, обычно называют комплексными амплитудами электромагнитного поля в случае установившихся колебаний. Подставляя (3.11) в уравнения (3.9) и (3.10) и сокращая на множитель $e^{-i\omega t}$, получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon'\mathbf{E}_0,\ \operatorname{div}\mathbf{H}_0 = 0, \tag{3.12}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_0 = i\omega\mu\mathbf{H}_0,\ \operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0, \tag{3.13}$$

где $\varepsilon' = \varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость Из уравнений (3.12), (3.13) получим дифференциальные уравнения второго порядка для векторных функций $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$:

$$\nabla^2\mathbf{E}_0 + k^2\mathbf{E}_0 = 0,\ \nabla^2\mathbf{H}_0 + k^2\mathbf{H}_0 = 0, \tag{3.14}$$

где $k^2 = \omega^2\varepsilon'\mu$, а оператор «набла квадрат» имеет вид

$$\nabla^2 = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}.$$

Уравнение (3.14) носит название векторного уравнения Гельмгольца.

5. Постановка краевых задач

Особенностью задач, описывающих стационарные процессы, является отсутствие начальных условий. Поэтому такие задачи всегда краевые. Типичным примером краевой задачи, моделирующей стационарный процесс, является следующая:

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u) - qu = -f,\ M \in D, \tag{3.15}$$

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)\,u = \mu(P),\ \ P \in S,$$

где $\overline{D} = D \cup S$ — область с границей S, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к поверхности S, $\alpha(P)$, $\beta(P)$, $\mu(P)$ — заданные функции.

Для краевых задач, описывающих стационарные процессы, возможны предельные случаи, когда область D является неограниченной или внешней относительно замкнутой поверхности S. В этом случае помимо граничных условий для выделения единственного решения необходимо поставить условия на бесконечности. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в последующих главах для конкретных краевых задач.

§ 4. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В заключение сделаем несколько общих замечаний.

1. На основании рассмотренных примеров можно заключить, что для многих физических процессов, описываемых изменением определенных физических величин в пространстве и во времени, математическими моделями являются начально-краевые (или краевые) задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

2. Различные по своей физической природе группы процессов в том случае, когда они имеют общие, наиболее характерные аспекты, описываются одними и теми же математическими моделями. Например, для процессов колебаний различной физической природы (упругие колебания сплошной среды, акустические и электромагнитные колебания и др.) общей математической моделью служит начально-краевая задача для уравнения (1.39). Задачи, связанные с массо- или теплопереносом независимо от физической природы процесса сводятся к математическим моделям, заключающимся в решении начально-краевых задач типа (2.13). Наконец, общей математической моделью для таких совершенно различных по своей физической природе стационарных процессов, как задачи электростатики, статические задачи теории упругости, задачи стационарного распределения тепла, установившиеся колебания материальных сред и многие другие, служит одна и та же краевая задача типа (3.15).

3 Эти классы математических моделей существенно различаются между собой главными членами в уравнениях, описывающими изменение исследуемых величин во времени. В первом случае (процессы колебания) уравнение содержит вторую частную производную по времени, во втором (процессы переноса) в уравнение входит лишь первая частная производная по времени, в случае стационарных процессов вообще отсутствует частная производная по временной координате.

4. Дифференциальные уравнения приведенных типов математических моделей представляют собой основные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка классической математической физики. Основной задачей данного курса являются изучение общих свойств решений данных типов уравнений и разработка общих алгоритмов решения соответствующих начально-краевых задач.

При этом возникает естественный вопрос: исчерпывается ли все многообразие линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка данными типами уравнений? Исследованию ряда аспектов этого вопроса посвящена следующая глава.

Глава II

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как было указано в предыдущей главе, многие физические задачи приводят к уравнениям в частных производных второго порядка относительно искомой функции. Общий вид таких уравнений следующий:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)=0,$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$ — независимые переменные, $u=u(x_1, \ldots, x_n)$ — искомая функция, F — заданная функция.

Уравнение, линейное относительно старших производных, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,$$

где коэффициенты a_{ij} являются функциями только независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если они зависят также от u и ее первых производных, то уравнение называется квазилинейным. Уравнение называется линейным, если оно линейно не только относительно старших производных, но и относительно u и ее первых производных. Такое уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, \ldots, x_n) u = f(x_1, \ldots, x_n).$$

В этой главе будет дана классификация уравнений в частных производных второго порядка.

§ 1. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим уравнение второго порядка, линейное относительно старших производных, для неизвестной функции u двух независимых переменных x и y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1.1)$$

где действительные функции a_{ij} зависят от x и y и определены в области D. Будем считать, что все коэффициенты a_{ij} одновременно в нуль не обращаются.

Введем новые независимые переменные

$$\xi=\xi(x, y), \quad \eta=\eta(x, y), \tag{1.2}$$

где функции ξ и η дважды непрерывно дифференцируемы: $\xi, \eta \in C^{(2)}(D)$.

Будем считать, что это преобразование осуществляет взаимно однозначное отображение области D на область D'. Для этого потребуем, чтобы якобиан преобразования был отличен от нуля:

$$\frac{\mathscr{D}(\xi, \eta)}{\mathscr{D}(x, y)} \neq 0. \tag{1.3}$$

Попытаемся преобразование (1.2) выбрать таким образом, чтобы в новых переменных уравнение (1.1) имело наиболее простую форму. Преобразуем уравнение (1.1) к новым переменным, полагая

$$U(\xi, \eta)=u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad u_x=U_\xi\xi_x+U_\eta\eta_x, \quad u_y=U_\xi\xi_y+U_\eta\eta_y,$$

$$u_{xx}=U_{\xi\xi}\xi_x^2+2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+U_{\eta\eta}\eta_x^2+U_\xi\xi_{xx}+U_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{yy}=U_{\xi\xi}\xi_y^2+2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+U_{\eta\eta}\eta_y^2+U_\xi\xi_{yy}+U_\eta\eta_{yy},$$

$$u_{xy}=U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+U_\xi\xi_{xy}+U_\eta\eta_{xy}.$$

В новых переменных уравнение (1.1) принимает вид

$$\bar{a}_{11}U_{\xi\xi}+2\bar{a}_{12}U_{\xi\eta}+\bar{a}_{22}U_{\eta\eta}+\bar{F}=0, \tag{1.4}$$

где

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2, \tag{1.5}$$

$$\bar{a}_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2, \tag{1.6}$$

$$\bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y, \tag{1.7}$$

$\bar{F}=\bar{F}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ — функция, не зависящая от старших производных. При этом непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости тождества

$$\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})\left|\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}\right|^2. \tag{1.8}$$

Теперь можно ввести следующую классификацию уравнений, линейных относительно старших производных.

Определение. Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$, то уравнение (1.1) называется уравнением гиперболического типа в M_0; если в точке M_0 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$, то уравнение (1.1) называется уравнением эллиптического типа в M_0; если в точке M_0 $a^2_{12}—a_{11}a_{22}=0$, то уравнение (1.1) называется уравнением параболического типа в M_0.

Заметим, что согласно (1.8) при любой невырожденной замене переменных тип уравнения не изменяется. Если тип уравнения сохраняется во всех точках области D, то уравнение называется уравнением данного типа во всей области D. Если в разных точках области уравнение принадлежит разным типам, то оно называется уравнением смешанного типа в области D.

Отметим еще одно обстоятельство, которое потребуется в дальнейшем. Рассмотрим квадратичную форму, составленную из старших коэффициентов уравнения (1.1), взятых в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$a_{11}(x_0, y_0)t_1^2+2a_{12}(x_0, y_0)t_1t_2+a_{22}(x_0, y_0)t_2^2. \tag{1.9}$$

Классификация уравнения (1.1) совпадает с классификацией квадратичной формы (1.9) *).

§ 2. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Теперь выясним, как нужно вводить новые переменные ξ и η, чтобы уравнение (1.1) приняло наиболее простой вид. Будем считать, что уравнение (1.1) принадлежит определенному типу во всей области D и коэффициенты $a_{11}(x, y)$ и $a_{22}(x, y)$ одновременно в нуль не обращаются. В противном случае уравнение (1.1) содержит только одну старшую производную u_{xy} и уже имеет простейший вид. Для определенности считаем, что $a_{11}(x, y)\neq 0$.

Из соотношения (1.5) видно, что, для того чтобы $\bar{a}_{11}=0$, нужно в качестве функции $\xi(x, y)$ взять решение уравнения

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) называется характеристическим уравнением для уравнения (1.1). Разрешая (2.1) относительно z_x, можно его переписать в виде

$$(z_x+\lambda_1(x, y)z_y)(z_x+\lambda_2(x, y)z_y)=0,$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$a_{11}\lambda^2—2a_{12}\lambda+a_{22}=0.$$

Они равны

$$\lambda_{1,2}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

---

*) См., например: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984.

Следовательно, уравнение (2.1) эквивалентно двум линейным уравнениям в частных производных первого порядка:

$$z_x+\lambda_1(x,\ y)z_y=0, \tag{2.2}$$

$$z_x+\lambda_2(x,\ y)z_y=0. \tag{2.3}$$

Как известно*), для построения общего решения линейного уравнения в частных производных первого порядка достаточно найти интеграл соответствующего характеристического уравнения. Для уравнений (2.2) и (2.3) характеристическими уравнениями являются уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1(x,\ y) \text{ и } \frac{dy}{dx}=\lambda_2(x,\ y). \tag{2.4}$$

Уравнения (2.4) называются уравнениями характеристик для уравнения (1.1), а их решения — характеристиками. Таким образом, если $\xi(x,y)=C$ является интегралом уравнения (2.4), то функция $z=\xi(x,y)$ есть решение уравнения (2.1).

Рассмотрим теперь каждый тип уравнения отдельно.

Пусть в области D уравнение (1.1) является уравнением гиперболического типа, т. е. всюду в D $a^2_{12}-a_{11}a_{22}>0$. Тогда всюду в области D $\lambda_1(x,y)\neq\lambda_2(x,y)$ и действительны. Никакие две характеристики из разных семейств

$$\xi(x,\ y)=C_1 \text{ и } \eta(x,\ y)=C_2 \tag{2.5}$$

не касаются друг друга. Эти два семейства образуют криволинейную координатную сетку. Выбрав $\xi=\xi(x,y)$ и $\eta=\eta(x,y)$, где $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ определены из (2.5), получим

$$\bar{a}_{11}=0,\ \bar{a}_{22}=0.$$

Следовательно, уравнение (1.4) после деления на $\bar{a}_{12}\neq 0$ принимает вид

$$U_{\xi\eta}=\bar{F}_1(\xi,\ \eta,\ U,\ U_\xi,\ U_\eta). \tag{2.6}$$

Форма уравнения (2.6) называется канонической формой уравнения гиперболического типа. Часто используется и другая каноническая форма, которую можно получить заменой

$$\alpha=\frac{1}{2}(\xi-\eta),\quad \beta=\frac{1}{2}(\xi+\eta).$$

В этом случае уравнение имеет вид

$$U_{\alpha\alpha}-U_{\beta\beta}=\bar{F}_2. \tag{2.7}$$

Пусть в области D уравнение (1.1) есть уравнение эллиптического типа, т. е. $a^2_{12}-a_{11}a_{22}<0$ в D. Тогда уравнения ха-

*) См.: Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

рактеристик (2.4) при действительных коэффициентах a_{ij} имеют комплексно-сопряженные правые части. Все характеристики будут комплексными. Считая, что коэффициенты a_{ij} определены в комплексной области и аналитичны и делая формальную замену

$$\xi=\xi(x,\ y),\ \eta=\xi^*(x,\ y),$$

где $\xi(x, y)=C_1$ и $\xi^*(x, y)=C_2$ — комплексно-сопряженные интегралы (2.4), получим уравнение

$$U_{\xi\eta}=\overline{F_1} \tag{2.8}$$

в комплексной области. Если сделать еще одну замену

$$\alpha=\frac{1}{2}(\xi+\eta)=\operatorname{Re}\xi,\ \beta=-\frac{i}{2}(\xi-\eta)=\operatorname{Im}\xi,$$

уравнение (2.8) примет вид

$$U_{\alpha\alpha}+U_{\beta\beta}=\overline{F_2} \tag{2.9}$$

уже в действительной области. Уравнение (2.9) есть канонический вид уравнения эллиптического типа.

Рассмотрим, наконец, уравнение параболического типа в области D: $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ в D, $\lambda_1(x,\ y)\equiv\lambda_2(x,\ y)$. В этом случае существует только одно уравнение характеристик

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1(x,\ y).$$

Пусть $\xi(x, y)=C$ — его интеграл. Возьмем произвольную дважды дифференцируемую функцию $\eta(x, y)$ такую, чтобы

$$\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)}\neq 0. \tag{2.10}$$

Тогда при замене $\xi=\xi(x,\ y)$, $\eta=\eta(x,\ y)$ коэффициент $\overline{a}_{11}=0$ в силу (2.1) и $\overline{a}_{12}^2=0$, так как $\overline{a}_{12}^2-\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}=0$. Коэффициент $\overline{a}_{22}\neq 0$, так как в противном случае будет не выполняться (2.10). Следовательно, уравнение (1.4) принимает вид

$$U_{\eta\eta}=\overline{F}_1. \tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) представляет собой каноническую форму уравнения параболического типа.

Итак, в случае двух независимых переменных существуют только три различных типа уравнений в частных производных второго порядка, канонические формы которых имеют следующий вид:

а) для уравнения гиперболического типа:

$$U_{\xi\eta}=F(\xi,\ \eta,\ U,\ U_\xi,\ U_\eta)$$

или

$$U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}=F(\xi,\ \eta,\ U,\ U_\xi,\ U_\eta);$$

б) для уравнения параболического типа:

$$U_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta).$$

При этом в правой части уравнения — функции F — обязательно должна присутствовать первая частная производная U_ξ по независимой переменной ξ, вторая частная производная по которой в уравнении отсутствует. В противном случае исходное уравнение в частных производных вырождается в обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной η, в котором переменная ξ играет роль параметра;

в) для уравнения эллиптического типа:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta).$$

Как следует из рассмотренных в гл. I примеров, если трактовать переменную ξ как временную переменную t, то уравнения гиперболического типа в случае двух независимых переменных являются математической моделью процессов пространственно-одномерных колебаний любой физической природы, а уравнения параболического типа описывают процессы переноса. Если в уравнении эллиптического типа обе независимые переменные ξ и η играют роль пространственных переменных, то это уравнение служит математической моделью стационарных процессов и, в частности, установившихся колебаний.

Отметим еще раз, что приведенная классификация справедлива во всей области D, где уравнение сохраняет определенный тип.

§ 3. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ МНОГИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Кратко остановимся на классификации уравнений второго порядка в частных производных в случае многих независимых переменных. Рассмотрим опять уравнение, линейное относительно старших производных:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + F = 0, \tag{3.1}$$

где $F = F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Пусть $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — точка области D. Построим квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\, t_i t_j. \tag{3.2}$$

Невырожденным линейным преобразованием

$$s_i=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}t_j, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \det\|A_{ij}\|\neq 0$$

квадратичная форма всегда может быть приведена к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^2. \tag{3.3}$$

При этом согласно теореме инерции число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов λ_i в каноническом виде квадратичной формы является инвариантом и не зависит от линейного преобразования. На основе этого производится классификация уравнения (3.1).

Выделяются три основных типа уравнений. Если в точке M_0 квадратичная форма в каноническом виде (3.3) имеет все коэффициенты одного знака, то уравнение (3.1) в этой точке называется уравнением эллиптического типа; если все $\lambda_i\neq 0$, но существуют как положительные, так и отрицательные λ_i, то уравнением гиперболического типа; если хотя бы один из коэффициентов λ_i равен нулю, то уравнением параболического типа. Может быть проведена и более подробная классификация (необходимости которой в случае двух переменных не возникает).

Например, в случае уравнений гиперболического типа возможны следующие случаи:

один коэффициент — одного знака, для определенности, $\lambda_1>0$, а остальные — другого ($\lambda_i<0$, $i=2, \ldots, n$) — уравнение (3.1) называется уравнением нормального гиперболического типа; $\lambda_1, \ldots, \lambda_k>0$, $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n<0$ — уравнение ультрагиперболического типа.

В случае уравнения параболического типа возможностей больше: $\lambda_1=0$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n>0$ (одного знака) — уравнение эллиптически-параболического типа; $\lambda_1=0$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n\neq 0$, но разного знака — уравнение гиперболически-параболического типа с разделением на нормально гиперболически- и ультрагиперболически-параболического типа. Дальнейшая классификация проводится, когда несколько λ_i обращаются в нуль. В этом случае уравнение называется ультрапараболическим с дальнейшим делением в зависимости от знаков остальных λ_i.

Классификация уравнения (3.1), как и прежде, проводится в отдельной точке M_0. Интересен вопрос: возможно ли в случае многих переменных привести единой заменой переменных

$$\xi_i=\xi_i(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \frac{D(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)}{D(x_1,\ \ldots,\ x_n)}\neq 0$$

уравнение (3.1), в том случае, когда оно принадлежит к одному и тому же типу во всех точках области D, к каноническому виду в некоторой окрестности точки M_0? При такой замене переменных, как легко проверить, уравнение (3.1) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\bar{F}=0,$$

где функция $\bar{F}$ не зависит от вторых производных функции u, а коэффициенты $\bar{a}_{ij}$ имеют вид

$$\bar{a}_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial\xi_j}{\partial x_\beta}. \tag{3.4}$$

Чтобы обратились в нуль коэффициенты при смешанных вторых производных ($\bar{a}_{ij}=0$, $i\neq j$), функции $\xi_i(x_1, ..., x_n)$ должны удовлетворять $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнениям. Это число больше n (числа функций ξ_i) при $n>3$. Следовательно, привести к каноническому виду уравнение (3.1) сразу в некоторой окрестности точки, вообще говоря, нельзя (при этом, конечно, исключается случай уравнения с постоянными коэффициентами).

Процедура приведения уравнения (3.1) к каноническому виду, как в случае двух переменных, связана с решением характеристического уравнения, которое согласно (3.4) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\,\frac{\partial z}{\partial x_j}=0.$$

На деталях этой процедуры мы не останавливаемся.

Глава III

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

В предыдущих главах рассмотрены некоторые физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных второго порядка, и приведена классификация уравнений. Уравнения каждого типа (гиперболического, параболического и эллиптического) обладают рядом специфических свойств, и для них разработаны свои методы решения и исследования. Но существуют и общие методы, применимые для уравнений всех типов. Один из таких методов — метод разделения переменных, или метод Фурье, — будет изложен в настоящей главе. Это один из самых старых и распространенных методов аналитического решения уравнений. Метод Фурье будет рассмотрен на примере уравнения более общего, чем те, которые рассмотрены ранее. Это уравнение будем записывать в виде

$$\rho P_t[u] = Lu + f(M,\ t),$$

где

$$Lu = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u) - q(M)\,u,$$

$$P_t[u] = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\frac{\partial^i u}{\partial t^i},$$

$\rho(M)$, $k(M)$, $q(M)$ — функции переменной M в области D, ограниченной замкнутой поверхностью S; $a_i(t)$ — непрерывные функции переменной $t\in[0,\ T]$; $\rho,\ q\in C(\bar D)$, $k\in C^{(1)}(\bar D)$, $\rho,\ k>0$, $q\geqslant 0$. Уравнение рассматривается в области $Q=D\times(0,\ T]$.

Заметим, что при $m=2$ это уравнение гиперболического типа, при $m=1$ — параболического, при $m=0$ — эллиптического. В случае $m=0$ область Q отождествляется с областью D.

§ 1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

При решении дифференциальных уравнений можно ставить различные цели. Можно искать общее решение уравнения или искать некоторое частное решение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. В нашем курсе мы исходим из того, что каждое изучаемое уравнение в рамках определенной математической модели описывает некоторый реальный физический процесс или явление, состояние которого однозначно определено. Поэтому основное внимание будет уделено исследованию полной математической модели явления, т. е. решению дифференциального уравнения со всеми дополнительными условиями, однозначно определяющими это явление. Сразу возникает вопрос: сколько дополнительных условий должно быть и какие это условия? Дополнительные условия всегда вытекают из физической постановки конкретной задачи и определяются ее природой. Однако очевидно, что с математической точки зрения они должны удовлетворять следующим требованиям:

1) дополнительные условия должны выделять единственное решение (т. е. этих условий должно быть не слишком мало);

2) решение, удовлетворяющее всем дополнительным условиям, должно существовать (т. е. условий должно быть не слишком много, так чтобы задача не оказалась переопределенной). Кроме того, желательно, чтобы дополнительные условия были таковы, что решение мало изменяется при малых изменениях дополнительных условий. В этом случае говорят, что решение устойчиво по отношению к этим условиям (при этом, конечно, нужно определить, как понимается малость изменения дополнительных условий и решения). Этому требованию удается удовлетворить не всегда, так как дополнительные условия вытекают из физической постановки задачи.

Если задано дифференциальное уравнение со всеми дополнительными условиями, будем говорить, что поставлена начально-краевая задача (или краевая задача — для уравнения эллиптического типа). Задача называется корректно поставленной, если:

1) решение существует;

2) решение единственно;

3) решение устойчиво по отношению ко всем дополнительным условиям. В том случае, когда эти требования нарушаются, задача называется некорректно поставленной.

До середины нашего века, главным образом под влиянием высказываний французского математика Ж. С. Адамара, считалось, что некорректно поставленные задачи математической физики не могут служить математическими моделями реальных физических процессов и не заслуживают изучения математиков. Однако последующие исследования и в первую очередь основополагающие работы русского математика академика А. Н. Тихонова показали, что для весьма широкого класса естественнонаучных проблем некорректно поставленные задачи являются адекватными математическими моделями. Это потребовало разработки новых эффективных математических подходов к их изучению, что позволило создать устойчивые алгоритмы решения определенного класса некорректно поставленных задач. Для частного случая некорректно поставленных задач, сводящихся к интегральным уравнениям первого рода, эти методы изложены, например, в учебнике А. Б. Васильевой и Н. А. Тихонова *).

Дополнительные условия, как уже отмечалось, вытекают из физического содержания изучаемого процесса. Как следует из конкретных примеров, рассмотренных в гл. I, если уравнение содержит производные по времени t ($m \neq 0$), т. е. процесс развивается во времени, следует фиксировать некоторое начальное состояние процесса. При этом, очевидно, нужно задать в начальный момент времени (для определенности будем считать при $t=0$) значение неизвестной функции $u(M, t)$ и ее производных до $(m-1)$-го порядка:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(M), \quad k=0,\ 1, \ldots, m-1. \tag{1.1}$$

Условия (1.1) называются начальными условиями.

Физически очевидно, что, в том случае, когда процесс развивается в ограниченной области пространства, для однозначного определения этого процесса следует задать условие на границе области. Конкретный вид этого условия зависит от физической задачи. Как было показано в гл. I на конкретных примерах, наиболее типичными являются условия вида

$$\left.\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right|_S = \mu(P, t)|_{P \in S}, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) называется краевым, или граничным, условием. При $\beta=1$, $\alpha=0$ оно называется первым краевым условием, или условием Дирихле, при $\beta=0$, $\alpha=1$ — вторым краевым условием, или условием Неймана, а в общем случае — третьим краевым условием. Таким образом, полная постановка начально-краевой задачи имеет вид

$$\rho P_t[u] = Lu + f \text{ в } Q, \tag{1.3}$$

$$\left.\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right|_S = \mu(P, t)|_{P \in S}, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(M), \quad k=0,\ 1, \ldots, m-1. \tag{1.5}$$

Естественно, что для эллиптического уравнения ($m=0$), описывающего стационарный процесс, начальные условия не нужны.

Прежде чем переходить к исследованию задачи (1.3) — (1.5) и построению ее решения, следует точно определить, что является решением этой задачи.

Определение. Классическим решением задачи (1.3) —

---

*) См.: Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. Изд-во Моск. ун-та, 1989.

(1.5) называется функция $u(M, t)$, определенная и непрерывная вместе со всеми производными, входящими в уравнение (1.3), в области Q, удовлетворяющая уравнению (1.3) в этой области, непрерывная вместе с первыми производными по M и $(m-1)$-ми производными по t при $M\in\bar{D}$, $t\in[0, T]$ и удовлетворяющая граничному (1.4) и начальным (1.5) условиям.

В случае граничного условия Дирихле ($\alpha=0$) непрерывности первых производных по M в замкнутой области $\bar{D}$ не требуется.

При таком определении классического решения сразу появляются некоторые необходимые условия его существования. В частности, функции f, μ, φ_k должны быть непрерывны в соответствующих областях. Появляются также условия согласования граничного и начальных условий. При невыполнении этих условий классического решения не существует. В этом случае можно видоизменить понятие решения и ввести понятие решения в некотором обобщенном смысле.

Полная начально-краевая задача (1.3)—(1.5) в силу ее линейности может быть сведена к трем более простым. Эта процедура называется редукцией общей задачи.

Пусть функции u_1, u_2 и u_3 являются классическими решениями следующих задач:

$$\begin{cases} \rho P_t[u_1]=Lu_1 \text{ в } Q, \\ \alpha\dfrac{\partial u_1}{\partial n}+\beta u_1\Big|_S=0, \quad \dfrac{\partial^k u_1}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=\varphi_k(M), \; k=0, 1, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} \rho P_t[u_2]=Lu_2+f \text{ в } Q, \\ \alpha\dfrac{\partial u_2}{\partial n}+\beta u_2\Big|_S=0, \quad \dfrac{\partial^k u_2}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0, \; k=0, 1, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} \rho P_t[u_3]=Lu_3 \text{ в } Q, \\ \alpha\dfrac{\partial u_3}{\partial n}+\beta u_3\Big|_S=\mu, \quad \dfrac{\partial^k u_3}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0, \; k=0, 1, \ldots, m-1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Тогда непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$u=u_1+u_2+u_3$$

является решением общей задачи (1.3)—(1.5).

В дальнейшем будет рассмотрена отдельно каждая из задач (1.6)—(1.8).

§ 2. ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ФОРМУЛЫ ГРИНА

В дальнейшем в нашем курсе широко используются формулы, которые называются формулами Грина. Выведем первую и вторую формулы Грина для общего эллиптического оператора.

Пусть область D ограничена гладкой замкнутой поверхностью S. Напомним, что поверхность S называется гладкой, если в каждой точке ее существует касательная плоскость (или нормаль) и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости (нормали) меняется непрерывно. Пусть в области D задана векторная функция $\mathbf{A}(M)$, которая непрерывна в $\bar{D}$ и имеет непрерывные первые производные в D. Тогда для нее справедлива формула Гаусса—Остроградского*)

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{n}\mathbf{A} dS, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S, внешней по отношению к области D.

Формулу Гаусса—Остроградского используем для вывода формул Грина.

Пусть в области D заданы функции u и v, непрерывные вместе с первыми производными в $\bar{D}$ и имеющие непрерывные вторые производные в $D(u,\ v \in C^{(1)}(\bar{D}) \cap C^{(2)}(D))$. Введем дифференциальный оператор

$$Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu,$$

где функции k и q непрерывны в $\bar{D}$, функция k непрерывно дифференцируема в D.

Рассмотрим интеграл

$$\int_D vLudV = \int_D v \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dV - \int_D qvudV.$$

Учитывая, что

$$v \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \operatorname{div}(kv \operatorname{grad} u) - k \nabla u \nabla v,$$

и используя формулу (2.1), получим

$$\int_D vLudV = \oint_S kv \frac{\partial u}{\partial n}\, dS - \int_D \{k \nabla u \nabla v + quv\}\, dV. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) называется первой формулой Грина.

Поменяем в формуле (2.2) функции u и v местами:

$$\int_D uLvdV = \oint_S ku \frac{\partial v}{\partial n}\, dS - \int_D \{k \nabla u \nabla v + quv\}\, dV. \tag{2.3}$$

Вычитая (2.3) из (2.2), получим вторую формулу Грина

$$\int_D \{vLu - uLv\}\, dV = \oint_S k \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right\} dS. \tag{2.4}$$

---

*) См: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

Отдельно выпишем формулы Грина для случая, когда $Lu \equiv \Delta u$:

$$\int_D v \Delta u dV = \oint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_D \nabla u \nabla v dV, \tag{2.5}$$

$$\int_D (v \Delta u - u \Delta v) dV = \oint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \tag{2.6}$$

§ 3. ПОЛНЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Прежде чем переходить к изложению общей схемы метода разделения переменных, напомним некоторые понятия математического анализа *).

Пусть в области D задана бесконечная счетная система функций $\{\varphi_n(M)\}_1^\infty$, интегрируемая с квадратом в D $((\varphi_n) \in L_2(D))$.

Определение. Система функций $\{\varphi_n(M)\}_1^\infty$ называется замкнутой в $L_2(D)$, если не существует функции $f \in L_2(D)$, отличной от тождественного нуля, ортогональной ко всем функциям данной системы, т. е. если $\int_D f \varphi_n dV = 0$ при всех n, то $f \equiv 0$.

Определение. Система функций $\{\varphi_n(M)\}_1^\infty$ называется полной в $L_2(D)$, если для любой функции $f \in L_2(D)$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют число $N(\varepsilon) > 0$ и коэффициенты $a_1, \ldots, a_N$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L_2(D)} \leqslant \varepsilon.$$

Другими словами, это означает, что произвольная функция $f \in L_2(D)$ может быть с любой наперед заданной точностью аппроксимирована в среднем конечной линейной комбинацией функций данной системы.

В дальнейшем будем считать, что система $\{\varphi_n\}$ ортонормирована:

$$\int_D \varphi_n \varphi_m dV = 0, \ n \neq m, \ \|\varphi_n\|_{L_2(D)} = 1.$$

Для ортонормированных систем необходимым и достаточным условием полноты является равенство Парсеваля—Ляпунова—Стеклова:

для любой функции $f \in L_2(D)$

$$\int_D f^2 dV = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2, \tag{3.1}$$

*) Там же.

где f_n — коэффициенты Фурье функции $f(M)$:

$$f_n = \int_D f\varphi_n dV. \tag{3.2}$$

Замкнутость системы есть следствие ее полноты. Действительно, пусть функция $f \in L_2(D)$ ортогональна всем функциям системы $\{\varphi_n\}$:

$$\int_D f\varphi_n dV = f_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Если система $\{\varphi_n\}$ полна, то в силу (3.1)

$$\int_D f^2 dV = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $f \equiv 0$ в $L_2(D)$, т. е. система $\{\varphi_n\}$ замкнута.

Можно показать, что полнота системы в $L_2(D)$ есть следствие ее замкнутости *).

Таким образом, понятия полноты и замкнутости в пространстве L_2 эквивалентны.

Заметим, что для любой функции $f \in L_2(D)$ ряд Фурье по полной ортонормированной системе сходится к этой функции в норме L_2.

Примером полной и замкнутой системы может служить тригонометрическая система

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \ldots, \cos nx, \ \sin nx, \ \ldots$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$ или система собственных функций задачи Штурма—Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{\partial x}\right) - qy + \lambda y = 0, \quad a < x < b,$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y(x) \not\equiv 0.$$

§ 4. ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Метод разделения переменных, или метод Фурье, состоит в построении решения начально-краевой задачи в виде ряда по некоторой ортонормированной системе функций, причем эта система функций естественно возникает из самой задачи.

---

*) См.: Ильин В. А., Позняк Э. Г Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

Рассмотрение метода Фурье начнем с наиболее простой задачи (1.6):

$$\rho P_t[u] = Lu \text{ в } Q, \tag{4.1}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \Big|_S = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(M), \; k=0,\; 1, \dots, m-1. \tag{4.3}$$

Прежде всего построим систему функций, по которой удобно разлагать решение задачи (4.1)—(4.3). Для этого рассмотрим вспомогательную задачу:

найти нетривиальные в Q решения уравнения

$$\rho P_t[u] = Lu, \tag{4.4}$$

удовлетворяющие однородному граничному условию

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \Big|_S = 0 \tag{4.5}$$

и представимые в виде

$$u(M,\; t) = v(M) T(t) \not\equiv 0. \tag{4.6}$$

Подставляя искомый вид (4.6) решения в уравнение (4.4), получим тождество

$$\rho v P_t[T] \equiv T L v,$$

которое после деления на $\rho v T$ принимает вид

$$\frac{P_t[T]}{T(t)} \equiv \frac{Lv}{\rho(M)\, v(M)}. \tag{4.7}$$

Левая часть тождества (4.7) зависит только от t, правая — только от M. Поскольку t и M — независимые переменные, а тождество выполняется при всех $M \in D$ и $t > 0$, то оно справедливо только в том случае, когда обе его части равны некоторой постоянной, которую обозначим — λ (ничего не предполагая о знаке λ):

$$\frac{P_t[T]}{T} \equiv \frac{Lv}{\rho v} \equiv -\lambda.$$

Отсюда получаем

$$Lv + \lambda \rho v = 0,\; v(M) \not\equiv 0,\; M \in D,$$

$$P_t[T] + \lambda T = 0,\; T(t) \not\equiv 0,\; t > 0.$$

Подставляя (4.6) в граничное условие (4.5), получаем

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial n} + \beta v \Big|_S = 0.$$

Таким образом, для определения функции $v(M)$ получаем задачу, которая также называется задачей Штурма—Лиувилля:

найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Lv+\lambda\rho v=0,\ v\not\equiv 0 \text{ в } D, \tag{4.8}$$

удовлетворяющие однородному граничному условию

$$\alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v\Big|_S=0. \tag{4.9}$$

Эти значения параметра λ называются собственными значениями оператора L в области D с граничным условием (4.9), а соответствующие им ненулевые решения — собственными функциями задачи (4.8)—(4.9).

В дальнейшем будет показано, что поставленная задача Штурма—Лиувилля (4.8)—(4.9) имеет решение. Будут также указаны некоторые простейшие области, для которых собственные функции выписываются явно, хотя при этом и требуется введение специальных функций.

Сейчас перечислим свойства собственных значений и собственных функций, поскольку они нам необходимы для изложения метода разделения переменных.

1. Существует бесконечное счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$ и собственных функций $\{v_n(M)\}$; собственные значения λ_n при увеличении номера n неограниченно возрастают. Каждому собственному значению соответствует лишь конечное число линейно независимых собственных функций, т. е. ранг всех собственных значений конечен

В дальнейшем будем считать, что в последовательности $\{\lambda_n\}$ каждое собственное значение повторяется столько раз, каков его ранг.

2. При $q\geqslant 0$ собственные значения задачи Дирихле ($\alpha=0$, $\beta=1$) положительны:

$$\lambda_n>0 \text{ при всех } n.$$

3. Собственные функции ортогональны между собой в области D с весом $\rho(M)$:

$$\int\limits_D v_n(M)\,v_m(M)\,\rho dV=0,\ n\neq m.$$

4. Теорема разложимости Стеклова. Произвольная дважды непрерывно дифференцируемая в $\bar{D}$ функция $f(M)$, удовлетворяющая граничному условию (4.9), разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям данной краевой задачи:

$$f(M)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(M),\ f_n=\frac{1}{\|v_n\|^2}\int\limits_D f v_n\rho dV.$$

Итак, пусть задача Штурма—Лиувилля (4.8)—(4.9) решена. Обозначим через $\{\lambda_n\}_1^\infty$ собственные значения и через $\{v_n(M)\}_1^\infty$ ортонормированные собственные функции данной задачи Штурма—Лиувилля

$$\int_D v_n(M)\, v_m(M)\, \rho dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n=m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь уравнения для $T(t)$ при фиксированном значении λ_n:

$$P_t[T] + \lambda_n T = 0, \quad T = T_n(t). \tag{4.10}$$

Для $T(t)$ получено обыкновенное линейное дифференциальное уравнение m-го порядка. Следовательно, его общее решение имеет вид

$$T_n(t) = \sum_{j=0}^{m-1} C_{nj} T_{nj}(t), \tag{4.11}$$

где C_{nj} — произвольные постоянные, $T_{nj}(t)$ — фундаментальная система решений. Будем считать, что фундаментальная система решений $\{T_{nj}(t)\}$, $j=0, 1, \ldots, m-1$, удовлетворяет начальным условиям

$$\frac{d^k}{dt^k} T_{nj}(t)\,|_{t=0} = \delta_{jk}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Таким образом, вспомогательная задача (4.4)—(4.6) решена и найдена бесконечная счетная система решений

$$u(M, t) = u_n(M, t) = v_n(M)\, T_n(t), \tag{4.12}$$

где $v_n(M)$ — собственная функция, $T_n(t)$ определена соотношением (4.11).

Решение $u(M, t)$ исходной задачи (4.1)—(4.3) будем искать в виде разложения в ряд по системе (4.12):

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, v_n(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} C_{nj} T_{nj}(t)\, v_n(M). \tag{4.13}$$

Из начальных условий (4.3) для коэффициентов C_{nj} получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{nk} v_n(M) = \varphi_k(M), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{4.14}$$

Умножая (4.14) на $\rho(M)\, v_m(M)$, интегрируя по D и используя ортонормированность собственных функций, определяем коэффициенты C_{mk}:

$$C_{mk} = (\varphi_k)_m = \int_D \varphi_k(M)\, v_m(M)\, \rho dV. \tag{4.15}$$

Таким образом, формальное решение задачи (4.1)—(4.3) имеет вид (4.13), где C_{nj} определяются соотношениями (4.15). Если функции $\varphi_k(M)$ удовлетворяют условиям, при которых ряд (4.13) можно нужное число раз почленно дифференцировать по M и t, то ряд (4.13) дает классическое решение поставленной задачи. Эти исследования в общем виде мы проводить не будем. Для простейших случаев уравнения теплопроводности и уравнения колебаний они будут проведены позже.

Выпишем выражения функций $T_n(t)$ для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний.

Для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$P_t[u]=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Следовательно, уравнение (4.9) имеет вид

$$T_n'+a^2\lambda_n T_n=0$$

и его общее решение

$$T_n(t)=C_n e^{-a^2\lambda_n t}.$$

Для уравнения колебаний с постоянными коэффициентами

$$P_t[u]=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Уравнение (4.9) принимает вид

$$T_n''+a^2\lambda_n T_n=0$$

и его общее решение

$$T_n(t)=C_{n0}\cos a\sqrt{\lambda_n}\,t+C_{n1}\frac{\sin a\sqrt{\lambda_n}\,t}{a\sqrt{\lambda_n}}.$$

§ 5. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Теперь рассмотрим метод Фурье решения неоднородного уравнения с нулевыми граничными и начальными условиями (задача (1.7)):

$$\rho P_t[u]=Lu+f \text{ в } Q, \tag{5.1}$$

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\Big|_S=0,\quad |\alpha|+|\beta|\neq 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0,\quad k=0,\ 1,\ \dots,m-1. \tag{5.3}$$

Основу метода разделения переменных составляет задача Штурма—Лиувилля. Будем считать, что она решена. Обозначим $\{\lambda_n\}$ и $\{v_n(M)\}$ — собственные значения и ортонормированные собственные функции задачи Штурма—Лиувилля (4.8)—(4.9).

Решение задачи (5.1)—(5.3) будем искать в виде разложения по собственным функциям:

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(M), \tag{5.4}$$

коэффициенты $u_n(t)$ которого, естественно, зависят от переменной t. Функции $u_n(t)$ нужно выбрать так, чтобы ряд (5.4) удовлетворял уравнению (5.1). Формально подставляя (5.4) в уравнение (5.1), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{P_t[u_n] + \lambda_n u_n\} \rho v_n(M) = f(M, t). \tag{5.5}$$

Домножив (5.5) на $v_m(M)$ и проинтегрировав по D, получим

$$P_t[u_m] + \lambda_m u_m = f_m(t), \tag{5.6}$$

где

$$f_m(t) = \int_D f(M, t) v_m(M)\, dV.$$

Уравнение (5.6) для коэффициентов Фурье $u_m(t)$ можно получить и другим путем, не предполагая возможность почленного дифференцирования ряда (5.4). Для этого уравнение (5.1) умножим на $v_m(M)$ и проинтегрируем по области D:

$$\int_D \rho v_m P_t[u]\, dV = \int_D v_m Lu dV + \int_D f v_m dV. \tag{5.7}$$

Согласно второй формуле Грина (2.4), учитывая однородные граничные условия на поверхности S, имеем

$$\int_D v_m Lu dV = \int_D u L v_m dV = -\lambda_m \int_D u v_m \rho dV = -\lambda_m u_m(t).$$

Поскольку коэффициенты оператора $P_t[u]$ не зависят от M, то

$$\int_D \rho v_m P_t[u]\, dV = P_t\left[\int_D u v_m \rho dV\right] = P_t[u_m].$$

Поэтому из (5.7) получаем

$$P_t[u_m] + \lambda_m u_m = f_m(t).$$

Изложенный метод получения соотношения (5.6) называется энергетическим, или методом Галеркина. Он часто используется при построении различных алгоритмов численного решения краевых задач.

Подставляя (5.4) в начальные условия (5.3), имеем

$$\frac{d^k u_m}{dt^k}(0)=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1. \tag{5.8}$$

Таким образом, для каждой функции $u_m(t)$ $(m=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty)$ получаем задачу Коши (5.6), (5.8), решение которой можно записать в виде

$$u_m(t)=\int_0^t K_m(t,\ \tau)\, f_m(\tau)\, d\tau, \tag{5.9}$$

где $K_m(t,\ \tau)$ — импульсная функция уравнения (5.6). Подставляя (5.9) в (5.4), получим формальное решение задачи (5.1)—(5.3). Исследования условий, при которых формула (5.4) дает классическое решение, мы здесь не проводим.

Преобразуем решение (5.4). Подставим (5.9) в (5.4) и изменим порядок интегрирования и суммирования:

$$u(M,\ t)=\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t,\ \tau)\, f_n(\tau)\, v_n(M)\, d\tau=$$

$$=\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t,\ \tau) \int_D f(Q,\ \tau)\, v_n(Q)\, dV_Q v_n(M)\, d\tau=$$

$$=\int_0^t \int_D f(Q,\ \tau) \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t,\ \tau)\, v_n(M)\, v_n(Q)\, dV_Q d\tau.$$

Обозначим

$$G(M,\ Q;\ t,\ \tau)=\sum_{n=1}^{\infty} K_n(t,\ \tau)\, v_n(M)\, v_n(Q). \tag{5.10}$$

Тогда

$$u(M,\ t)=\int_0^t \int_D G(M,\ Q;\ t,\ \tau)\, f(Q,\ \tau)\, dV_Q d\tau. \tag{5.11}$$

Определение. Функция $G(M,\ Q;\ t,\ \tau)$ называется функцией влияния точечного источника, или функцией Грина.

Формула (5.10) показывает, что она может быть построена в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля.

Вопросы существования функции Грина и представимости ее в виде разложения (5.10) здесь при изложении формальной схемы метода Фурье обсуждать не будем. Для конкретных начально-краевых задач эти вопросы будут рассмотрены в следующих главах курса.

Соотношение (5.11) дает представление решения задачи (5.1)—(5.3) через функцию Грина. Из формулы (5.11) следует, что функцию Грина $G(M, M_0; t, t_0)$ можно определить как решение задачи:

$$\rho P_t[G]=LG+\delta(M, M_0)\delta(t-t_0) \text{ в } Q,$$
$$\alpha\frac{\partial G}{\partial n_M}+\beta G\Big|_S=0, \qquad (5.12)$$
$$\frac{\partial^k G}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0,\ k=0, 1, \dots, m-1,$$

где $\delta(M, M_0)$, $\delta(t-t_0)$ — δ-функции Дирака, определенные в области D и на оси t соответственно (определение и свойства δ-функции Дирака см., например, *)).

Функция Грина $G(M, M_0; t, t_0)$ определена при $t\geqslant t_0$. Учитывая (5.12), естественно доопределить ее нулем при $t<t_0$: $G(M, M_0, t, t_0)\equiv 0$ при $t<t_0$.

§ 6. НЕОДНОРОДНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

До сих пор рассматривались задачи с однородными граничными условиями. Теперь рассмотрим задачу с неоднородными граничными условиями (задача (1.8)):

$$\rho P_t[u]=Lu \text{ в } Q,$$
$$\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\Big|_S=\mu(P, t)|_{P\in S},\quad |\alpha|+|\beta|\neq 0, \qquad (6.1)$$
$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0,\ k=0, 1, \dots, m-1.$$

Решение этой задачи можно свести к решению уже рассмотренных задач. Для этого решение будет искать в виде

$$u(M, t)=U(M, t)+V(M, t), \qquad (6.2)$$

где $U(M, t)$ — новая неизвестная функция, а функция $V(M, t)$ выбрана таким образом, чтобы она удовлетворяла граничному условию

$$\alpha\frac{\partial V}{\partial n}+\beta V\Big|_S=\mu(P, t)|_{P\in S}$$

и обладала нужным числом непрерывных производных по M и t. Подставляя (6.2) в (6.1), получим задачу для $U(M, t)$:

$$\rho P_t[U]=LU+f(M, t) \text{ в } Q,$$
$$\alpha\frac{\partial U}{\partial n}+\beta U\Big|_S=0, \qquad (6.3)$$
$$\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=-\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\Big|_{t=0},\ k=0,1,\dots,m-1,$$

---

*) См.: Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

где $f(M,\ t)=LV-\rho P_t[V]$. Задача (6.3) может быть решена изложенными выше методами, поскольку она может быть разбита на две задачи:

$$U=U_1(M,\ t)+U_2(M,\ t),$$

$$\begin{cases} \rho P_t[U_1]=LU_1, \\ \alpha\dfrac{\partial U_1}{\partial n}+\beta U_1\Big|_S=0, \\ \dfrac{\partial^k U_1}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=-\dfrac{\partial^k V}{\partial t^k}\Big|_{t=0}, \\ k=0,\ 1,\ \ldots,m-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho P_t[U_2]=LU_2+f, \\ \alpha\dfrac{\partial U_2}{\partial n}+\beta U_2\Big|_S=0, \\ \dfrac{\partial^k U_2}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0, \\ k=0,\ 1,\ \ldots,m-1, \end{cases}$$

решения которых рассмотрены в § 4 и 5.

§ 7. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В случае эллиптического уравнения метод Фурье превращается в метод разложения решения по собственным функциям соответствующей задачи Штурма—Лиувилля.

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu+cu=-f \text{ в области } D \tag{7.1}$$

с однородным граничным условием

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\Big|_S=0,\quad |\alpha|+|\beta|\neq 0, \tag{7.2}$$

где $Lu=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)-qu$, $c=\text{const}$.

Пусть $\{\lambda_m\}_1^\infty$ и $\{v_n(M)\}_1^\infty$ — системы собственных значений и ортонормированных собственных функций следующей задачи Штурма—Лиувилля:

$$\begin{gathered} Lv+\lambda v=0 \text{ в } D, \\ \alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v\Big|_S=0,\quad |\alpha|+|\beta|\neq 0, \\ v(M)\not\equiv 0. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Заметим, что собственные функции задачи (7.3) ортогональны с весом $\rho(M)=1$.

Решение задачи (7.1)—(7.2) может быть разложено по собственным функциям:

$$u(M)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(M),\quad a_n=\int\limits_D u v_n dV. \tag{7.4}$$

Коэффициенты a_n разложения (7.4) определим энергетическим методом. Для этого уравнение (7.1) домножим на $v_n(M)$ и проинтегрируем по области D:

$$\int\limits_D v_n Lu dV + c\int\limits_D v_n u dV = -\int\limits_D v_n f dV. \qquad (7.5)$$

Используя вторую формулу Грина и учитывая однородные граничные условия (7.2), отсюда получаем

$$(\lambda_n - c)\, a_n = f_n, \quad n = 1,\ 2, \ldots, \infty, \qquad (7.6)$$

где $f_n = \int\limits_D f v_n dV$.

Из соотношения (7.6) вытекают следующие утверждения.

1. Пусть $c \neq \lambda_n$ при всех n. Тогда

$$a_n = \frac{f_n}{\lambda_n - c}, \quad n = 1,\ 2, \ldots, \infty,$$

и решение принимает вид

$$u(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - c} v_n(M). \qquad (7.7)$$

В этом случае решение единственно.

2. Пусть при $n = n_0$ $\lambda_{n_0}^{(k)} = c$, где $k = 1,\ 2, \ldots, p$, p — $\operatorname{rang} \lambda_{n_0}$. Если $f_{n_0}^{(k)} \neq 0$, то соотношение (7.6) при $n = n_0$ теряет смысл. Это означает, что в этом случае ($f_{n_0}^{(k)} \neq 0$) задача (7.1), (7.2) решения не имеет. Если же $f_{n_0}^{(k)} = 0$, для всех $k = 1, 2, \ldots, p$, то все коэффициенты a_n, кроме $a_{n_0}^{(k)}$, определяются однозначно:

$$a_n = \frac{f_n}{\lambda_n - c}, \quad n \neq n_0,$$

коэффициенты $a_{n_0}^{(k)}$ неопределенны, и решение принимает вид

$$u = \sum_{n \neq n_0} \frac{f_n}{\lambda_n - c} v_n(M) + \sum_{k=1}^{p} a_{n_0}^{(k)} v_{n_0}^{(k)}(M),$$

где $p = \operatorname{rang} \lambda_{n_0}$, $a_{n_0}^{(k)}$ — произвольные постоянные. В этом случае решение существует, но неединственно.

Таким образом, при $c = \lambda_{n_0}$ необходимым условием разрешимости задачи (7.1), (7.2) является выполнение равенств

$$f_{n_0}^{(k)} = \int\limits_D f v_{n_0}^{(k)} dV = 0, \quad k = 1,\ 2, \ldots, p,$$

т. е. правая часть $f(M)$ должна быть ортогональна всем собственным функциям, соответствующим собственному значению $\lambda_{n_0} = c$.

Это условие является также и достаточным условием разрешимости задачи (7.1), (7.2). Более подробное исследование вопросов разрешимости задачи (7.1), (7.2) здесь проводить не будем. Отметим только, что оно может быть проведено методами теории потенциалов, которые будут изложены в гл. V.

Общую краевую задачу для эллиптического уравнения заменой неизвестной функции всегда можно свести к задаче (7.1), (7.2).

Для того случая, когда задача (7.1), (7.2) имеет и при этом единственное решение ($c \neq \lambda_n$ при всех $n=1, \ldots, \infty$), решение (7.7) приведем к интегральному виду. Подставляя в (7.7) явное выражение для f_n и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(M) = \int_D G(M, Q) f(Q)\, dV_Q,$$

где

$$G(M, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)\, v_n(Q)}{\lambda_n - c}.$$

Определение. Функция $G(M, Q)$ называется функцией Грина оператора $Lu + cu$ с граничными условиями (7.2).

§ 8. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Как было показано в предыдущих параграфах, если известны полные системы собственных значений и собственных функций соответствующей краевой задачи, то решение начально-краевой задачи или краевой задачи для эллиптического уравнения можно построить в виде ряда.

В этом параграфе рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля для оператора Лапласа в простейших областях.

1. Одномерный случай: отрезок. В одномерном случае рассмотрим общую схему нахождения собственных функций и собственных значений следующей задачи Штурма—Лиувилля:

$$Ly + \lambda\rho y \equiv \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - qy + \lambda\rho y = 0, \quad 0 < x < l. \qquad (8.1)$$

$$P_1(y) \equiv \alpha_1 \frac{dy}{dx} - \beta_1 y\Big|_{x=0} = 0, \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, \qquad (8.2)$$

$$P_2(y) \equiv \alpha_2 \frac{dy}{dx} + \beta_2 y\Big|_{x=l} = 0, \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0, \quad y(x) \not\equiv 0. \qquad (8.3)$$

Обозначим через $\{y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)\}$ фундаментальную систему решений уравнений (8.1). Фундаментальные решения y_1 и y_2 зависят от λ как от параметра. Общее решение уравнения (8.1) можно записать в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x, \lambda) + C_2 y_2(x, \lambda). \qquad (8.4)$$

Подставляя (8.4) в граничные условия (8.2)—(8.3), получим

$$C_1\{\alpha_1 y_1'(0,\ \lambda)-\beta_1 y_1(0,\ \lambda)\}+C_2\{\alpha_1 y_2'(0,\ \lambda)-\beta_1 y_2(0,\ \lambda)\}=0, \quad (8.5)$$
$$C_1\{\alpha_2 y_1'(l,\ \lambda)+\beta_2 y_1(l,\ \lambda)\}+C_2\{\alpha_2 y_2'(l,\ \lambda)+\beta_2 y_2(l,\ \lambda)\}=0.$$

Соотношения (8.5) представляют собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2. Эта система имеет ненулевое решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1'(0,\ \lambda)-\beta_1 y_1(0,\ \lambda) & \alpha_1 y_2'(0,\ \lambda)-\beta_1 y_2(0,\ \lambda) \\ \alpha_2 y_1'(l,\ \lambda)+\beta_2 y_1(l,\ \lambda) & \alpha_2 y_2'(l,\ \lambda)+\beta_2 y_2(l,\ \lambda) \end{vmatrix}=0. \quad (8.6)$$

Соотношение (8.6) представляет собой уравнение для определения собственных значений λ. Это уравнение называется дисперсионным. Пусть $\{\lambda_n\}$ — корни уравнения (8.6). Каждому λ_n соответствует ненулевое решение системы (8.5) и, следовательно, ненулевое решение уравнения (8.1), представимое в виде (8.4).

Выше был рассмотрен общий алгоритм построения собственных значений и собственных функций. В ряде случаев его можно упростить. Пусть фундаментальная система уравнения (8.1) выбрана так, что на одном из концов отрезка, например при $x=0$, функции $y_1(x,\ \lambda)$ и $y_2(x,\ \lambda)$ удовлетворяют граничным условиям

$$P_1(y_1)|_{x=0}=0, \quad P_1(y_2)|_{x=0}=1.$$

Тогда, подставляя (8.4) в граничное условие (8.2), сразу находим $C_2=0$. Следовательно, собственная функция согласно (8.4) должна представляться в виде

$$y(x)=C_1 y_1(x,\ \lambda).$$

Подстановка этого выражения в граничное условие (8.3) дает дисперсионное уравнение для λ:

$$P_2(y_1)\equiv\alpha_2\frac{dy_1}{dx}(x,\ \lambda)+\beta_2 y_1(x,\ \lambda)|_{x=l}=0.$$

Рассмотрим теперь частный случай $Ly=y''$, $\rho\equiv1$. В этом случае общее решение (8.4) может быть записано в виде

$$y(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x \quad (\rho\equiv1). \quad (8.7)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 определяются из системы

$$\begin{cases} -C_1\beta_1+C_2\alpha_1\sqrt{\lambda}=0, \\ C_1\{-\alpha_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,l+\beta_2\cos\sqrt{\lambda}\,l\}+ \\ +C_2\{\alpha_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,l+\beta_2\sin\sqrt{\lambda}\,l\}=0. \end{cases} \quad (8.8)$$

Уравнение (8.6) имеет вид

$$(\alpha_1\alpha_2\lambda-\beta_1\beta_2)\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l=\sqrt{\lambda}\,(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2). \tag{8.9}$$

Легко убедится, например графическим методом, что уравнение (8.9) имеет бесконечное счетное множество корней $[\lambda_n\}_1^\infty$. Для каждого корня λ_n находим ненулевое решение системы (8.8):

$$C_1=C\,\frac{\alpha_1\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2+\beta_1^2}},\quad C_2=C\,\frac{\beta_1}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2+\beta_1^2}}, \tag{8.10}$$

где C — произвольная постоянная, отличная от нуля ($C\neq 0$). Величина

$$N_n=\|y_n\|=\left\{\int_0^l y_n^2(x)\,dx\right\}^{1/2}$$

представляет собой норму собственной функции. Если постоянная C выбрана так, что $N_n=1$, то собственные функции $y_n(x)$ будут ортонормированными.

Итак, ненормированные собственные функции задачи Штурма—Лиувилля

$$y''+\lambda y=0,\quad 0<x<l,$$

$$\alpha_1 y'-\beta_1 y\,|_{x=0}=0,\quad \alpha_2 y'+\beta_2 y\,|_{x=l}=0$$

можно записать в виде

$$y_n(x)=\frac{\beta_1\sin\sqrt{\lambda_n}\,x+\alpha_1\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2+\beta_1^2}}, \tag{8.11}$$

при этом

$$\|y_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{(\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1)\,(\lambda_n\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)}{(\lambda_n\alpha_1^2+\beta_1^2)\,(\lambda_n\alpha_2^2+\beta_2^2)}, \tag{8.12}$$

где λ_n — корни уравнения (8.9).

Уравнение (8.9) имеет нулевое решение $\lambda_0=0$. Ему будет соответствовать ненулевая функция $y_0(x)$, определяемая (8.11), если $\beta_1=0$ и $\beta_2=0$ и эта функция равна 1. Следовательно, при $\lambda_0=0$ $\|y_0\|^2=l$.

Выделим частные случаи.

1. *Граничные условия* $y(0)=y(l)=0$ $(\alpha_1=\alpha_2=0,\ \beta_1=\beta_2=1)$:

$$y_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}\,x,\quad \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\quad \|y_n\|^2=\frac{l}{2},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\infty.$$

2. Граничные условия $y'(0)=y'(l)=0$ $(\alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=\beta_2=0)$:

$$y_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}\,x,\quad \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\quad \|y_n\|^2=l\,\frac{1+\delta_{n0}}{2},\quad n=0,\ 1,\ \ldots,\infty.$$

Заметим, что в этом случае существует нулевое собственное значение $\lambda_0=0$, которому соответствует собственная функция $y_0(x)\equiv 1$.

3. Граничные условия $y(0)=y'(l)=0$ $(\alpha_1=\beta_2=0,\ \beta_1=\alpha_2=1)$:

$$y_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}\,x,\quad \lambda_n=\left[\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2,\quad \|y_n\|^2=\frac{l}{2},$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty.$$

4. Граничные условия $y'(0)=y(l)=0$ $(\beta_1=\alpha_2=0,\ \beta_2=\alpha_1=1)$:

$$y_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}\,x,\quad \lambda_n=\left[\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2,\quad \|y_n\|^2=\frac{l}{2},$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty.$$

5. Граничные условия $y(0)=0$, $y'+h_2y|_{x=l}=0$ $(\alpha_1=0,\ \beta_1=1,\ \alpha_2=1,\ \beta_2=h_2)$:

$$y_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}\,x,\quad \|y_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h_2}{2(\lambda_n+h_2^2)},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty;$$

λ_n — корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l=-\frac{\sqrt{\lambda}}{h_2}$.

6. Граничные условия $y'(0)=0$, $y'(l)+h_2y(l)=0$ $(\beta_1=0,\ \alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \beta_2=h_2)$:

$$y_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}\,x,\quad \|y_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h_2}{2(\lambda_n+h_2^2)},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty;$$

λ_n — корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l=\frac{h_2}{\sqrt{\lambda}}$.

7. Граничные условия $y'(0)-h_1y(0)=0$, $y(l)=0$ $(\alpha_1=1,\ \beta_1=h_1,\ \alpha_2=0,\ \beta_2=1)$:

$$y_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}\,(l-x),\quad \|y_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h_1}{2(\lambda_n+h_1^2)},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty;$$

λ_n — корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l=-\frac{\sqrt{\lambda}}{h_1}$.

8. Граничные условия $y'(0)-h_1y(0)=0$, $y'(l)=0$ $(\alpha_1=1,\ \beta_1=h_1,\ \alpha_2=1,\ \beta_2=0)$:

$$y_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}\,(l-x),\quad \|y_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h_1}{2(\lambda_n+h_1^2)},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty;$$

λ_n — корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l=\frac{h_1}{\lambda}$.

9. Граничные условия $y'(0)-h_1y(0)=0$, $y'(l)+h_2y(l)=0$ $(\alpha_1=1,\ \beta_1=h_1,\ \alpha_1=1,\ \beta_2=h_2)$:

$$y_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n+h_1^2}}\left(h_1\sin\sqrt{\lambda_n}\,x+\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x\right),$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{(h_1+h_2)(\lambda_n+h_1h_2)}{(\lambda_n+h_1^2)(\lambda_n+h_2^2)}, \quad n=1,\ 2, \ldots;$$

λ_n — корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l = \sqrt{\lambda}\,\frac{h_1+h_2}{\lambda - h_1h_2}$. Заметим, что в этом случае собственную функцию можно записать также в виде

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n + h_2^2}}\left(h_2 \sin\sqrt{\lambda_n}\,(l-x) + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,(l-x)\right),$$

где λ_n — корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l = \sqrt{\lambda}\,\frac{h_1-h_2}{\lambda + h_1h_2}$.

2. Одномерный случай: периодические граничные условия. Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля на отрезке $[0,\ l]$ с условиями периодичности

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < l, \tag{8.13}$$

$$y(x) \equiv y(x+l) \text{ при любом } x \in [0,\ l], \tag{8.14}$$

$$y(x) \not\equiv 0.$$

Заметим, что условия периодичности (8.14) можно заменить граничными условиями

$$y(0) = y(l), \quad y'(0) = y'(l).$$

Общее решение уравнения (8.13)

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x \tag{8.15}$$

подставим в условия (8.14):

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,(x+l) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,(x+l) \equiv C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Воспользовавшись линейной независимостью функций $\cos\sqrt{\lambda}\,x$ и $\sin\sqrt{\lambda}\,x$, отсюда получим

$$\begin{cases} C_1(\cos\sqrt{\lambda}\,l - 1) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0, \\ -C_1 \sin\sqrt{\lambda}\,l + C_2(\cos\sqrt{\lambda}\,l - 1) = 0. \end{cases} \tag{8.16}$$

Система (8.16) имеет ненулевое решение только при условии

$$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}\,l - 1 & \sin\sqrt{\lambda}\,l \\ -\sin\sqrt{\lambda}\,l & \cos\sqrt{\lambda}\,l - 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\cos\sqrt{\lambda}\,l = 1.$$

Отсюда находим

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots .$$

При найденных значениях λ_n система (8.16) имеет два линейно независимых ненулевых решения:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (8.17)$$

Подставляя (8.17) в (8.15), находим собственные функции

$$y_n^{(1)}(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}\,x, \quad y_n^{(2)}(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\,x.$$

Заметим, что собственному значению $\lambda_0=0$ соответствует одна собственная функция $y_0(x)\equiv 1$, в то время как все ненулевые собственные значения λ_n имеют ранг, равный двум.

Таким образом, задача (8.13)—(8.14) с периодическими граничными условиями имеет следующие наборы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$y_0(x) \equiv 1, \quad y_n(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{2\pi n}{l}x, \\ \sin\dfrac{2\pi n}{l}x, \end{cases}$$

$$\|y_0\|^2 = l, \quad \|y_n\|^2 = \frac{l}{2}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty.$$

При $l = 2\pi$, $\lambda_n = n^2$

$$y_n(x) = \begin{cases} \cos nx, \\ \sin nx, \end{cases} \quad y_0 = 1, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty.$$

3. **Прямоугольник.** Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольнике:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \qquad (8.18)$$

$$P_1(u) = \alpha_1\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u\Big|_{x=0} = 0, \quad P_2(u) = \alpha_2\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\Big|_{x=a} = 0, \qquad (8.19)$$

$$P_3(u) = \alpha_3\frac{\partial u}{\partial y} - \beta_3 u\Big|_{y=0} = 0, \quad P_4(u) = \alpha_4\frac{\partial u}{\partial y} + \beta_4 u\Big|_{y=b} = 0, \qquad (8.20)$$

где α_i, β_i — постоянные, причем $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Задачу (8.18)—(8.20) будем решать методом разделения переменных. Найдем ненулевые решения уравнения (8.18), представимые в виде

$$u(x,\ y) = X(x)\,Y(y) \not\equiv 0. \qquad (8.21)$$

Подставляя (8.21) в уравнение (8.18) и разделяя переменные, получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \equiv -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu.$$

Следовательно, для функций $X(x)$ и $Y(y)$ получаем одномерные задачи Штурма—Лиувилля для отрезка:

$$\begin{cases} X''+\mu X=0, & 0<x<a, \\ P_1(X)|_{x=0}=0, \\ P_2(X)|_{x=a}=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''+\nu Y=0, & 0<y<b, \\ P_3(Y)_{y=0}=0, \\ P_4(Y)|_{y=b}=0, \end{cases}$$

где $\nu=\lambda-\mu$.

Решив каждую из этих задач, собственные функции задачи (8.18)—(8.20) найдем согласно (8.11), а собственные значения λ вычислим по формуле $\lambda=\mu+\nu$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: собственные функции оператора Лапласа для прямоугольника равны произведению собственных функций по каждой переменной с соответствующими граничными условиями $u_{nm}(x, y)= =X_n(x)Y_m(y)$, а собственные значения равны сумме собственных значений одномерных задач $\lambda_{mn}=\mu_n+\nu_m$.

В качестве примера приведем собственные функции и собственные значения для задач Дирихле и Неймана:

а) *задача Дирихле* $u|_C=0$, где C — контур прямоугольника:

$$u_{nm}(x, y)=\sin\frac{\pi n}{a}x \sin\frac{\pi m}{b}y,$$

$$\lambda_{nm}=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad n, m=1, 2, \ldots,$$

$$\|u_{nm}\|^2=\left\|\sin\frac{\pi n}{a}x\right\|^2 \left\|\sin\frac{\pi m}{b}\right\|^2=\frac{ab}{4};$$

б) *задача Неймана* $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C=0$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к контуру прямоугольника:

$$u_{nm}(x, y)=\cos\frac{\pi n}{a}x\cos\frac{\pi m}{b}y,$$

$$\lambda_{nm}=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad n, m=0, 1, \ldots,$$

$$\|u_{nm}\|^2=\|X_m\|^2\,\|Y_m\|^2.$$

Собственные функции и собственные значения для других граничных условий легко выписать, используя результаты п. 1.

4. Прямоугольный параллелепипед. Задача Штурма—Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольном параллелепипеде имеет вид

$$\Delta u + \lambda u = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c,$$

$$P_1(u) = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u \bigg|_{x=0} = 0,\ P_2(u) = \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \bigg|_{x=a} = 0\ ,$$

$$P_3(u) = \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial y} - \beta_3 u \bigg|_{y=0} = 0,\ P_4(u) = \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_4 u \bigg|_{y=b} = 0,$$

$$P_5(u) = \alpha_5 \frac{\partial u}{\partial z} - \beta_5 u \bigg|_{z=0} = 0,\ P_6(u) = \alpha_6 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_6 u \bigg|_{z=s} = 0,$$

$$\alpha_i,\ \beta_i = \text{const},\ |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,6.$$

Используя результаты п. 3 этого параграфа, легко показать, что собственные функции и собственные значения для прямоугольного параллелепипеда имеют вид

$$u_{nmk}(x,\ y,\ z) = X_n(x) Y_m(y) Z_k(z),$$

$$\lambda_{nmk} = \mu_n + \nu_m + \varkappa_k,$$

где $(X_n(x),\ \mu_n)$, $(Y_m(y),\ \nu_m)$, $(Z_k(z),\ \varkappa_k)$ — собственные функции и собственные значения соответствующих одномерных задач Штурма—Лиувилля по каждой переменной. На доказательстве этого утверждения мы не останавливаемся, поскольку оно полностью аналогично приведенному в п. 3.

Задачи Штурма—Лиувилля для некоторых других областей будут рассмотрены в следующей главе, после того как будут изложены необходимые сведения о специальных функциях.

Глава IV

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Собственные функции задачи Штурма—Лиувилля для оператора Лапласа могут быть найдены аналитически только для очень небольшого числа областей. В самых простых случаях (отрезок, прямоугольник, прямоугольный параллелепипед) они выражаются через элементарные функции, что показано в § 8 гл. III. Для некоторых областей (круг, круговой цилиндр, шар и другие области) собственные функции выражаются через так называемые специальные функции. В этой главе будут рассмотрены наиболее часто встречающиеся специальные функции — цилиндрические функции, классические ортогональные полиномы, присоединенные функции Лежандра, сферические функции, шаровые функции.

§ 1. УРАВНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И СВОЙСТВА ЕГО РЕШЕНИЙ

Специальные функции одной переменной, которые будут изучены в этой главе, являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$\mathscr{L}u(x)=0, \quad x\in(a,\ b), \tag{1.1}$$

где оператор $\mathscr{L}$ имеет вид

$$\mathscr{L}u=\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u.$$

Предположим, что коэффициент $k(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ k(x)>0 \text{ при } x\in(a,\ b),\\ &\text{б)}\ k(x)=(x-a)\varphi(x), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная на отрезке $[a,\ b]$ функция и $\varphi(a)\neq 0$, т. е. коэффициент $k(x)$ имеет в точке $x=a$ нуль первого порядка.

Таким образом, точка $x=a$, в которой коэффициент при старшей производной уравнения (1.1) обращается в нуль, является особой точкой этого уравнения.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (1.1), коэффициент $k(x)$ которого удовлетворяет условиям (1.2). Тогда, если $u_1(x)$ — ограниченное решение, имеющее конечный предел в точке $x=a$, то второе решение $u_2(x)$ при $x \to a$ является неограниченным. Причем если $u_1(a) \neq 0$, то $u_2(x)$ имеет в точке $x=a$ логарифмическую особенность, а если $u_1(x)$ имеет в точке $x=a$ нуль ν-го порядка, то функция $u_2(x)$ имеет при $x=a$ полюс ν-го порядка.*

Доказательство. Пусть $u_1(x)$ — ограниченное решение уравнения (1.1), представимое в виде

$$u_1(x) = (x-a)^\nu v(x), \quad \nu \geqslant 0, \tag{1.3}$$

где $v(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, причем $v(a) \neq 0$. Функция $u_1(x)$ ограничена в точке $x=a$ при $\nu=0$ и имеет в этой точке нуль ν-го порядка при $\nu>0$. Представим линейно независимое решение $u_2(x)$ в виде квадратуры через функцию $u_1(x)$. Очевидно $u_1\mathscr{L}u_2 - u_2\mathscr{L}u_1 = (k(x)(u_1u_2' - u_1'u_2))' = 0$ откуда вытекает, что определитель Вронского, построенный на решениях $u_1(x)$, $u_2(x)$, имеет вид

$$W[u_1, u_2] = u_1u_2' - u_1'u_2 = \frac{C}{k(x)}, \tag{1.4}$$

где постоянная C не равна нулю, так как по условию решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — линейно независимы.

Поделив обе части формулы (1.4) на $u_1^2(x)$, получим

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)' = \frac{u_1u_2' - u_2'u_2}{u_1^2} = \frac{c}{ku_1^2}.$$

Проинтегрируем последнее уравнение в пределах от x_0 до x:

$$u_2(x) = u_1(x)\left\{\int_{x_0}^{x} \frac{C d\alpha}{k(\alpha)\, u_1^2(\alpha)} + C_1\right\}.$$

Нас интересует поведение решения, линейно независимого от $u_1(x)$. Поэтому постоянную C_1 можно положить равной нулю, так как слагаемое $C_1u_1(x)$, линейно связанное с $u_1(x)$, ведет себя так же, как функция $u_1(x)$. Кроме того, поскольку уравнение (1.1) является однородным, то функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определяются с точностью до произвольного постоянного множителя и можно положить $C=1$. Выберем, наконец, x_0 так, чтобы функция $v(x)$ не обращалась в нуль на отрезке $[a, x_0]$. Это, очевидно, возможно, поскольку $v(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $v(a) \neq 0$.

В результате, сохраняя для решения, линейно независимого с $u_1(x)$, обозначение $u_2(x)$, получим

$$u_2(x) = u_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{k(\alpha)\, u_1^2(\alpha)}. \tag{1.5}$$

Подставим (1.2) и (1.3) в интеграл (1.5) и обозначим

$$\psi(x) = \varphi(x)\, v^2(x).$$

При нашем выборе x_0 функция $\psi(x)$ отлична от нуля на отрезке $[a, x_0]$. Воспользовавшись теоремой о среднем, получим для $x \in (a, x_0)$

$$u_2(x) = u_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{k(\alpha)\, u_1^2(\alpha)} = (x-a)^{\nu} v(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{(\alpha - a)^{2\nu+1}\, \psi(\alpha)} =$$

$$= \frac{(x-a)^{\nu} v(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} \ln(\alpha - a)\big|_{x_0}^{x} & \text{при } \nu = 0, \\ -\dfrac{1}{2\nu\,(\alpha-a)^{2\nu}}\Bigg|_{x_0}^{x} & \text{при } \nu > 0, \end{cases}$$

где $x^* \in (x, x_0)$. Таким образом,

$$u_2(x) = f_1(x) + f_2(x, x_0),$$

где

$$f_1(x) = \frac{v(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} \ln(x-a) & \text{при } \nu = 0, \\ -\dfrac{1}{2\nu\,(x-a)^{\nu}} & \text{при } \nu > 0 \end{cases}$$

и

$$f_2(x, x_0) = \frac{(x-a)^{\nu} v(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} -\ln(x_0 - a) & \text{при } \nu = 0, \\ \dfrac{1}{2\nu\,(x_0-a)^{2\nu}} & \text{при } \nu > 0. \end{cases}$$

Из последних формул следует, что функция $f_2(x, x_0)$ остается ограниченной при $x \to a$, а функция $f_1(x)$ при $x \to a$ неограниченно возрастает либо как $|\ln(x-a)|$, либо как $(x-a)^{-\nu}$, что и доказывает лемму. ■

§ 2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Уравнение Бесселя

Уравнением Бесселя, или уравнением цилиндрических функций, называется уравнение вида

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0. \tag{2.1}$$

Оно может быть получено из уравнения (1.1) при $k(x) = x$ и $q(x) = -x + \dfrac{\nu^2}{x}$.

Любое ненулевое решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией. Нашей ближайшей задачей будет изучение основных свойств цилиндрических функций.

Заметим, что уравнение (2.1) можно записать в эквивалентном виде

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0. \tag{2.2}$$

2. Свойства гамма-функции

Напомним некоторые свойства гамма-функции, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Гамма-функцией $\Gamma(z)$ называется интеграл

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,$$

где z — комплексный аргумент, реальная часть которого положительная — $\operatorname{Re} z>0$.

Нам понадобятся следующие свойства гамма-функции*):

1) $\Gamma(1)=1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.
2) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. В частности, если $z=n$—натуральное число, то $\Gamma(n+1)=n!$
3) Теорема умножения:

$$\Gamma(z)\ \Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{2.3}$$

4) Представление в виде контурного интеграла Римана—Ханкеля

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{i2\pi z}-1}\int_\gamma e^{-t}\,t^{z-1}\,dt, \tag{2.4}$$

где γ — любой контур на комплексной плоскости t, обходящий точку $t=0$ против часовой стрелки и концы которого уходят на бесконечность вдоль положительной вещественной оси. Например, это может быть контур, изображенный на рис. 4.1 ($t=t_1+it_2$).

Заметим, что интеграл Римана—Ханкеля (2.4) определяет гамма-функцию всюду на комплексной плоскости z. При $z=-n$, где $n\geqslant 0$ — целое число, гамма-функция имеет полюсы.

5) Из формул (2.3) и (2.4) получается полезная для дальнейшего формула

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=\frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}t^{-z-1}\,dt. \tag{2.5}$$

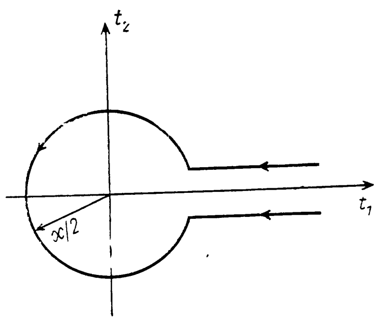


Рис. 4.1

*) См: Ильин В А, Позняк Э Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

В самом деле,

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=\frac{\sin\pi(1+z)}{\pi}\Gamma(-z)=-\frac{\sin\pi z}{\pi}\Gamma(-z)=$$
$$=\frac{e^{-i\pi z}-e^{i\pi z}}{2\pi i\,(e^{-i2\pi z}-1)}\int\limits_{\gamma}e^{-t}\,t^{-z-1}\,dt=\frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}e^{-t}t^{-z-1}dt.$$

3. Степенной ряд для функций Бесселя

Будем рассматривать случай $\nu\geqslant0$.

Из формул (2.1), (2.2) следует, что уравнение Бесселя имеет особую точку $x=0$. Поэтому его решение $y(x)$ можно искать в виде обобщенного степенного ряда (этот метод называется методом Фробениуса)

$$y(x)=x^{\sigma}(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)=\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{\sigma+m},\qquad(2.6)$$

где $a_0\neq0$ и σ — некоторая постоянная.

Подставив ряд (2.6) в уравнение (2.1), из требования обращения в нуль в полученном выражении коэффициентов при всех степенях x будем иметь следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}&a_0(\sigma^2-\nu^2)=0,\\&a_1[(\sigma+1)^2-\nu^2]=0,\\&a_2[(\sigma+2)^2-\nu^2]+a_0=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&a_m[(\sigma+m)^2-\nu^2]+a_{m-2}=0,\ m=2,\ 3,\ldots\end{aligned}\qquad(2.7)$$

Из первого уравнения (2.7) вытекает, что $\sigma^2-\nu^2=0$, или

$$\sigma=\pm\nu.\qquad(2.8)$$

Как легко установить, при $\nu\neq\frac{m}{2}$, $m=1,\ 2,\ \ldots$, выполнено условие

$$(\sigma+m)^2-\nu^2\neq0,\ m=1,\ 2,\ \ldots\qquad(2.9)$$

Из второго уравнения (2.7) при $\sigma=\pm\nu$ следует, что

$$a_1=0.\qquad(2.10)$$

Условие (2.9) дает согласно уравнению (2.7) рекуррентную формулу

$$a_m=-\frac{a_{m-2}}{(\sigma+m+\nu)(\sigma+m-\nu)},\ m=2,\ 3,\ldots\qquad(2.11)$$

Из формул (2.10) и (2.11) вытекает, что все нечетные коэффициенты равны нулю.

а) Рассмотрим случай $\sigma=\nu$. Положим в формуле (2.11) $m=2k$. Тогда из (2.11) следует, что

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(k+\nu)}. \tag{2.12}$$

Последовательно применяя формулу (2.12), получим

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!\,(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}. \tag{2.13}$$

Решение однородного уравнения Бесселя (2.1) определяется с точностью до произвольного множителя a_0. Выберем его в виде

$$a_0=\frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}. \tag{2.14}$$

Тогда из формул (2.13) и (2.14) получим

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{2.15}$$

Рассмотрим ряд

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{2.16}$$

С помощью признака Даламбера легко установить, что ряд (2.16) абсолютно сходится для любых x.

Определение. Ряд (2.16) называется функцией Бесселя и обозначается $J_\nu(x)$. Очевидно, функция $J_\nu(x)$ является частным решением уравнения Бесселя (2.1) и (2.2).

Функция Бесселя $J_\nu(x)$, определяемая для вещественного аргумента x рядом (2.16), может быть аналитически продолжена с положительной вещественной полуоси на комплексную плоскость z с разрезом по отрицательной части вещественной оси. При нецелом ν точка $z=0$ является точкой ветвления функции z^ν. Полученная функция Бесселя комплексного аргумента является аналитической в области $-\pi<\arg z<\pi$. При ν — целом функция Бесселя $J_n(z)$ оказывается аналитической на всей комплексной плоскости z, т. е. целой функцией комплексной переменной z.

б) Рассмотрим теперь случай $\sigma=-\nu$. Снова положим в формуле (2.11) $m=2k$. Тогда из формулы (2.9) получим, что $\nu\neq k$, т. е. ν не является целым числом. Положив

$$a_0=\frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}$$

и проделав выкладки, аналогичные выкладкам п. а), получим следующее определение.

Определение. Ряд (2.16), соответствующий $\sigma = -\nu$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, \tag{2.17}$$

называется функцией Бесселя порядка $-\nu$ и обозначается $J_{-\nu}(x)$.

При нецелом ν функция $J_{-\nu}(x)$ представляет собой второе решение уравнения Бесселя, линейно независимое от $J_\nu(x)$. Из формул (2.16) и (2.17) вытекает, что в случае нецелого ν функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ по-разному ведут себя в нуле: функция $J_\nu(x)$ имеет в нуле ноль ν-го порядка, а функция $J_{-\nu}(x)$ имеет в нуле полюс ν-го порядка. Таким образом, при нецелом ν функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя порядка ν.

При целых значениях индекса ν определение функции $J_{-\nu}(x)$ по формуле (2.17) лишено смысла: гамма-функция в знаменателе при отрицательных целочисленных значениях обращается в бесконечность. Продолжим формулу (2.17) по непрерывности по индексу ν на целые значения $\nu = n$. Поскольку $\Gamma(k-n+1) = \pm\infty$ при $k \leqslant n-1$, суммирование в формуле (2.17) фактически начинается со значения $k = n$ и поэтому

$$J_{-n}(x) = \lim_{\nu \to n} J_{-\nu}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{2.18}$$

Заменяя в формуле (2.18) индекс суммирования k на $n+k'$, получаем

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\,\Gamma(k'+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} = (-1)^n J_n(x)$$

Следовательно, при $\nu = n$ функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ оказываются линейно зависимыми:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

и не образуют фундаментальной системы.

4. Рекуррентные формулы

Путем прямой проверки легко убедиться в справедливости соотношений

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \tag{2.19}$$

и

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{2.20}$$

Докажем, например, формулу (2.19):

$$x^{\nu}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right)=x^{\nu}\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\,\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}}=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2kx^{2k-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\,2^{2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)}.$$

Введем новый индекс суммирования $l=k-1$:

$$x^{\nu}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right)=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(l+(\nu+1)+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+(\nu+1)}=$$

$$=-J_{\nu+1}(x),$$

откуда получаем (2.19). Аналогично доказывается формула (2.20).

Отметим важный частный случай формулы (2.19) при $\nu=0$:

$$J_0'(x)=-J_1(x).$$

Произведем дифференцирование в формулах (2.19) и (2.20):

$$\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)-J_{\nu}'(x)=J_{\nu+1}(x),$$

$$\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)+J_{\nu}'(x)=J_{\nu-1}(x).$$

Складывая две последние формулы, получим полезную рекуррентную формулу

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)-J_{\nu-1}(x), \tag{2.21}$$

а вычитая, получим формулу для производной

$$J_{\nu}'(x)=\frac{1}{2}\{J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)\}.$$

5. Функции Бесселя полуцелого порядка

С помощью формулы (2.16) получим выражение для функций $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$:

$$J_{1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}, \tag{2.22}$$

$$J_{-1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}. \tag{2.23}$$

Воспользуемся свойством гамма-функции (см. §2, п. 2)

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{2^{k+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \tag{2.24}$$
$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^{k}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

где $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Подставим (2.24) в формулу (2.22):

$$J_{1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1/2}2^{k+1}}{k!\,1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)\sqrt{\pi}\,2^{2k+1/2}}.$$

Поскольку

$$2^k k!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots,2k=(2k)!!$$

и

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)\cdot 2^k k!=(2k+1)!,$$

получим

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Аналогично из формул (2.23) и (2.24) получим

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Функции $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ образуют два линейно независимых решения уравнения Бесселя порядка $\frac{1}{2}$.

Заметим, что из рекуррентной формулы (2.21) и полученных выражений для функции $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ следует представление функций $J_{n+1/2}(x)$ $(n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ в виде*)

$$J_{n+1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{\pi n}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{\pi n}{2}\right)\right\},$$

где $P_n(u)$ и $Q_n(u)$ — полиномы степени не выше n относительно u, причем $P_n(0)=1$, $Q_n(0)=0$.

---

*) Более подробно см.: Бейтман Г., Эрдейи А Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука. 1966. С 18, 19.

Отметим также, что цилиндрические функции полуцелого порядка являются единственными цилиндрическими функциями, выражающимися через элементарные.

6. Интегральное представление функций Бесселя

Воспользуемся формулой (2.5), в которой положим $z=k+\nu$:

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)}=\frac{e^{i\pi(k+\nu)}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}t^{-k-\nu-1}\,dt. \tag{2.25}$$

Подставляя выражение (2.25) в формулу (2.16) для функции Бесселя и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}=$$

$$=\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}\left(\frac{x}{2t}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{4t}\right)^k}{k!}\,\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{x}{2t}\right)^\nu e^{\frac{x^2}{4t}-t}\,\frac{dt}{t}. \tag{2.26}$$

Пользуясь теоремой Коши, выберем в качестве γ контур, состоящий из луча $\left(+\infty,\frac{x}{2}\right)$ на верхнем берегу разреза вдоль положительной части вещественной оси, окружности с центром $t=0$ и радиусом $\frac{x}{2}$, которая обходится против часовой стрелки, и луча $\left(\frac{x}{2},+\infty\right)$ на нижнем берегу разреза (см. рис. 4.1).

Сделаем замену $t=\frac{x}{2}e^{-i(\zeta-\pi)}$. При этом контур γ на комплексной плоскости $t=t_1+it_2$ перейдет в контур C_0^- на плоскости $\zeta=\zeta_1+i\zeta_2$ с соответствующим направлением обхода (рис. 4.2). Учитывая, что

$$dt=-it\,d\zeta,\quad \frac{x}{2t}=e^{i(\zeta-\pi)},$$

$$\frac{x^2}{4t}-t=(e^{i2(\zeta-\pi)}-1)\,t=$$

$$=\frac{x}{2}\{e^{i(\zeta-\pi)}-e^{-i(\zeta-\pi)}\}=ix\sin(\zeta-\pi)=-ix\sin\zeta,$$

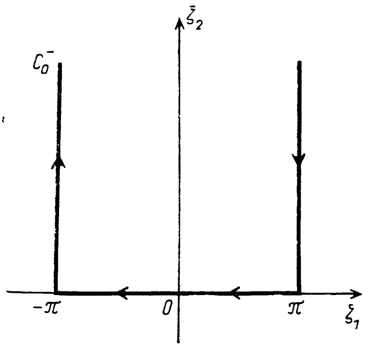


Рис. 4.2

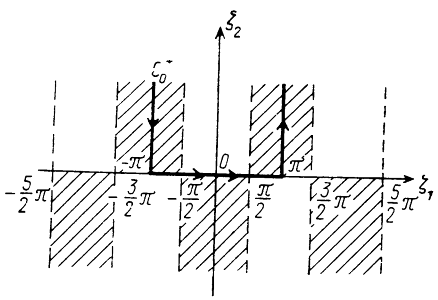


Рис. 4.3

и используя формулу (2.26), получим

$$J_\nu(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0^-} e^{-ix\sin\zeta+i\nu\zeta}\,d\zeta.$$

Поменяв в последней формуле направление обхода контура C_0^- и обозначив полученный контур через C_0^+, получим

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0^+} e^{-ix\sin\zeta+i\nu\zeta}\,d\zeta. \tag{2.27}$$

Эта формула носит название интегрального представления Зоммерфельда для функции Бесселя. Сделав в ней замену

$$\xi = \zeta_2 \text{ при } \zeta = \pm\pi + i\zeta_2,$$
$$\alpha = \zeta_1 \text{ при } \zeta = \zeta_1,$$

получим формулу

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha+i\nu\alpha}\,d\alpha - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-x\,\mathrm{sh}\,\xi-\nu\xi}\,d\xi.$$

В частности, при $\nu = n$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha+in\alpha}\,d\alpha.$$

З а м е ч а н и е. Последний результат следует непосредственно и из формулы (2.27), так как на вертикальных участках контура интегрирования подынтегральные выражения при $\nu = n$ совпадают, а направления интегрирования противоположны.

Сделаем в последней формуле замену $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Тогда, поскольку подынтегральная функция является периодической и интегрирование можно производить по любому промежутку длиной 2π, получим вторую интегральную формулу для функции $J_n(x)$:

$$J_n(x) = \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\varphi + in\varphi}\, d\varphi. \tag{2.28}$$

Отсюда следует, что для плоской волны $e^{-ix\cos\varphi}$ имеет место разложение в ряд Фурье

$$e^{-ix\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(x)\, e^{-in\varphi},$$

поскольку формула (2.28) является формулой для коэффициентов Фурье этого разложения.

7. Функции Ханкеля. Интегральное представление

Формула (2.27) подсказывает, что можно искать решение уравнения Бесселя (2.1) в форме интегралов на комплексной плоскости вида

$$y(x) = \int_C e^{-ix\sin\zeta}\, \Phi(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.29}$$

где C — контур на комплексной плоскости $\zeta=\zeta_1+i\zeta_2$, концы которого уходят на бесконечность, а функция $\Phi(\zeta)=e^{i\nu\zeta}$.

Контур C может уходить на бесконечность лишь в тех областях, где обеспечена сходимость интеграла (2.29). При вещественном $x>0$ сходимость интеграла обеспечивается, если мнимая часть $\sin\zeta$ меньше нуля:

$$\operatorname{Im}\sin\zeta = \cos\zeta_1\, \operatorname{sh}\zeta_2 < 0. \tag{2.30}$$

При $\zeta_2>0$ имеем $\operatorname{sh}\zeta_2>0$, и условие (2.30) выполняется, если $\cos\zeta_1<0$, т. е. при

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \zeta_1 < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

При $\zeta_2<0$ условие (2.30) выполняется, если

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \zeta_1 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Таким образом получаем систему областей (заштрихованных на рис. 4.3), в которых контур может уходить на бесконечность. Заметим, что введенный ранее контур C_0^-, по которому ведется интегрирование в формуле (2.27), лежит в данных областях.

Покажем теперь, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению Бесселя. Обозначим через L_ν оператор Бесселя

$$L_\nu[y] = x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y,$$

а через $K(x, \zeta)$ — ядро интеграла (2.29):

$$K(x, \zeta) = e^{-ix\sin\zeta}.$$

Легко убедиться в справедливости формулы

$$L_\nu[K(x, \zeta)] = -K_{\zeta\zeta}(x, \zeta) - \nu^2K(x, \zeta).$$

Проинтегрируем интеграл $L_\nu[y]$ по частям, учитывая, что в силу выбора контура C подстановки на бесконечности обращаются в нуль (заметим, что для интеграла (2.29) выполняются условия дифференцируемости под знаком интеграла), получим

$$L_\nu[y(x)] = \int\limits_C L_\nu[K(x, \zeta)]\,\Phi(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= -\int\limits_C \{K_{\zeta\zeta}(x, \zeta) + \nu^2K(x, \zeta)\}\,\Phi(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= -\int\limits_C K(x, \zeta)\,\{\Phi''(\zeta) + \nu^2\Phi(\zeta)\}\,d\zeta.$$

Из полученного выражения следует, что при $\Phi(\zeta) = e^{\pm i\nu\zeta}$ функция $y(x)$, определенная соотношением (2.29), будет удовлетворять уравнению Бесселя $L_\nu[y] = 0$.

Выбирая различным образом контур интегрирования, можно получать различные цилиндрические функции.

Определение. Функциями Ханкеля первого и второго рода называются функции, определяемые интегралами

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta}\,d\zeta \tag{2.31}$$

и

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_2} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta}\,d\zeta, \tag{2.32}$$

где контуры интегрирования C_1 и C_2 имеют вид, изображенный на рис. 4.4.

Функции Ханкеля первого и второго рода могут быть аналитически продолжены с положительной полуоси x на всю комплексную плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Рассмотрим некоторые свойства функций $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$.

1) Функции Ханкеля положительного и отрицательного индекса связаны следующими соотношениями:

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(x), \tag{2.33}$$

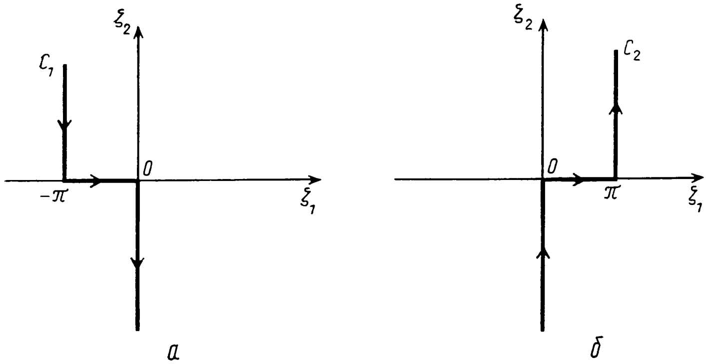


Рис. 4.4

$$H_{-\nu}^{(2)}(x)=e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(x). \qquad 2.34)$$

Докажем, например, формулу (2.33). По определению

$$H_{-\nu}^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1}e^{-ix\sin\zeta-i\nu\zeta}\,d\zeta.$$

Сделаем в интеграле замену переменных $\zeta=-\pi-\alpha$, в результате которой контур C_1 перейдет в такой же контур с изменением направления обхода. Учитывая, что $d\zeta=-d\alpha$, и изменяя направление обхода, снова приходим к интегралу по контуру C_1:

$$H_{-\nu}^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1}e^{-ix\sin\alpha+i\nu\alpha+i\nu\pi}\,d\alpha=e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(x).$$

Формула (2.34) доказывается аналогично с помощью замены $\zeta=\pi-\alpha$.

2) Для функций Ханкеля справедливы рекуррентные соотношения, аналогичные рекуррентным соотношениям для функци Бесселя (см. формулы (2.19) и (2.20)):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{H_\nu^{(1,2)}(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{1}{x^\nu}H_{\nu+1}^{(1,2)}. \qquad (2.35)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu H_\nu^{(1,2)}(x)\right)=x^\nu H_{\nu-1}^{(1,2)}(x). \qquad (2.36)$$

Рассмотрим для определенности функцию Ханкеля первого рода и докажем формулу (2.35). Продифференцируем левую часть формулы (2.35):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{H_\nu^{(1)}(x)}{x^\nu}\right)=\frac{1}{x^\nu}\left\{H_\nu^{(1)\prime}(x)-\frac{\nu}{x}H_\nu^{(1)}(x)\right\}. \qquad (2.37)$$

Из формулы (2.31) следует, что

$$H_\nu^{(1)\prime}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{C_1} (-i \sin \zeta) e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta} d\xi. \tag{2.38}$$

С другой стороны, интегрируя правую часть формулы (2.31) по частям и учитывая, что в силу выбора контура интегрирования подстановки на бесконечности обращаются в нуль, получим

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{\nu} \int\limits_{C_1} \cos \zeta \, e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta} d\zeta. \tag{2.39}$$

Подставляя (2.38) и (2.39) в правую часть формулы (2.37), получим (2.35). Формула (2.36) доказывается совершенно аналогично.

8. Связь функций Ханкеля и Бесселя. Функция Неймана

Из интегральных представлений (2.27), (2.31) и (2.32) для функций Бесселя и Ханкеля первого и второго рода следует формула, выражающая функцию Бесселя через функции Ханкеля:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2} \{H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\}. \tag{2.40}$$

В силу общих свойств аналитического продолжения это соотношение может быть продолжено на всю комплексную плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси.

На основании формул (2.33), (2.34) и (2.40) получаем

$$J_{-\nu}(x) = \frac{1}{2} \{H_\nu^{(1)}(x) e^{i\nu\pi} + H_\nu^{(2)}(x) e^{-i\nu\pi}\}. \tag{2.41}$$

Пусть сначала $\nu \neq n$, где n — целое число. Тогда из формул (2.40) и (2.41) следует, что

$$H_\nu^{(1)}(x) = i \frac{J_\nu(x) e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} \tag{2.42}$$

и

$$H_\nu^{(2)}(x) = -i \frac{J_\nu(x) e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}.$$

Пусть теперь $\nu = n$. Тогда, применяя правило Лопиталя раскрытия неопределенностей, получим

$$H_\nu^{(1)}(x) = \lim_{\nu \to n} i \frac{J_\nu(x) e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} =$$

$$= J_n(x) + \frac{i}{\pi} \left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} \right].$$

Аналогично

$$H_{\nu}^{(2)}(x)=J_n(x)-\frac{i}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_{\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}-(-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right].$$

Следовательно, при действительном аргументе x функции Ханкеля первого и второго рода являются комплексно-сопряженными.

Из формулы (2.40) вытекает, что при вещественном аргументе функция Бесселя является вещественной частью функции Ханкеля.

Определение. Функция

$$N_{\nu}(x)=\frac{1}{2i}\{H_{\nu}^{(1)}(x)-H_{\nu}^{(2)}(x)\} \tag{2.43}$$

называется функцией Неймана.

При вещественном аргументе и вещественном индексе функция Неймана является мнимой частью функции Ханкеля первого рода. Функции Ханкеля первого и второго рода выражаются через функции Бесселя и Неймана следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(x)&=J_{\nu}(x)+iN_{\nu}(x),\\ H_{\nu}^{(2)}(x)&=J_{\nu}(x)-iN_{\nu}(x). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Формулы (2.44) справедливы и при комплексном аргументе на всей комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси.

9. Линейная независимость цилиндрических функций

Для доказательства линейной независимости функций Бесселя и Ханкеля достаточно показать, что их определитель Вронского отличен от нуля*). Проведем доказательство для функции Ханкеля первого рода.

Пусть пока $\nu\neq n$, где n — целое. В силу формулы (2.42) получаем

$$W[J_{\nu},\ H_{\nu}^{(1)}]=-\frac{i}{\sin \pi\nu}\,W[J_{\nu},\ J_{-\nu}]. \tag{2.45}$$

Из формулы (1.4), полученной для уравнения специальных функций, следует, что определитель Вронского, построенный на решениях $J_{\nu}(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ уравнения Бесселя, должно иметь вид

$$W[J_{\nu},\ J_{-\nu}]=\frac{C_{\nu}}{x}, \tag{2.46}$$

где C_{ν} — зависящая от ν постоянная. Найдем ее.

*) См.: Тихонов А. Н; Васильева А. Б, Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М: Наука, 1985.

Из формулы (2.16) получаем

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+\frac{x^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)}\right\}=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+x^2\mathscr{P}(x)\right\}, \qquad (2.47)$$

где функция $\mathscr{P}(x)$ ограничена в точке $x=0$.

Аналогично из формулы (2.17) вытекает, что

$$J_{-\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}+x^2Q(x)\right\}, \qquad (2.48)$$

где функция $Q(x)$ ограничена в точке $x=0$.

Дифференцируя (2.47) и (2.48), имеем

$$\begin{aligned} J'_\nu(x)&=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)+\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\{2x\mathscr{P}(x)+x^2\mathscr{P}'(x)\},\\ J'_{-\nu}(x)&=-\frac{\nu}{x}J_{-\nu}(x)+\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\{2xQ(x)+x^2Q'(x)\}. \end{aligned} \qquad (2.49)$$

Используя формулы (2.47)—(2.49), определитель Вронского можно записать следующим образом:

$$W[J_\nu,\ J_{-\nu}]=J_\nu J'_{-\nu}-J_{-\nu}J'_\nu=$$

$$=-\frac{\nu}{x}J_{-\nu}(x)\,J_\nu(x)-\frac{\nu}{x}J_\nu(x)J_{-\nu}(x)-$$

$$-J_{-\nu}(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\{2xJ(x)+x^2\mathscr{P}'(x)\}+J_\nu(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}(2xQ(x)+x^2Q'(x)),$$

а заменяя $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ по формулам (2.47), (2.48), окончательно получим

$$W[J_\nu,\ J_{-\nu}]=-\frac{2\nu}{x}\,\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(1-\nu)}+x\mathscr{R}(x). \qquad (2.50)$$

где функция $\mathscr{R}(x)$ ограничена в точке $x=0$.

Сравнивая формулы (2.46) и (2.50), будем иметь

$$C_\nu=-\frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(1-\nu)},$$

$$\mathscr{R}(x)\equiv 0.$$

Используя свойства гамма-функции (см. § 2, п. 2), получим

$$C_\nu=-\frac{2\sin\pi\nu}{\pi}. \qquad (2.51)$$

Подставляя (2.51) в (2.46), имеем

$$W[J_\nu,\ J_{-\nu}] = -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu, \tag{2.52}$$

отсюда с учетом формулы (2.45)

$$W[J_\nu,\ H_\nu^{(1)}] = \frac{2i}{\pi x}. \tag{2.53}$$

Напомним, что эта формула получена в предположении, что $\nu \neq n$. Однако из ее вида следует, что она справедлива и при $\nu = n$, поскольку в этом случае функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы (см. § 2, п. 3) и определитель Вронского для них равен нулю. Формула (2.53) также справедлива при любом ν.

Поскольку из (2.44) вытекает, что

$$W[J_\nu,\ H_\nu^{(1)}] = iW[J_\nu,\ N_\nu],$$

то с учетом (2.53) получим

$$W[J_\nu,\ N_\nu] = \frac{2}{\pi x}.$$

Приведем, наконец, еще одну формулу, следующую из свойств функций Ханкеля и формул (2.44):

$$W[J_\nu,\ H_\nu^{(2)}] = -\frac{2i}{\pi x}.$$

Из полученных выражений для определителей Вронского вытекает попарная линейная независимость функций $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ при любом ν и линейная независимость $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ при нецелых значениях ν. Пары линейно независимых цилиндрических функций образуют фундаментальные системы решений уравнения Бесселя.

Уместно заметить, что рассмотренные свойства линейной независимости частных решений уравнения Бесселя аналогичны свойствам линейной независимости частных решений $\sin kx$, $\cos kx$, e^{ikx}, e^{-ikx} уравнения $y'' + k^2 y = 0$.

В заключение приведем формулы, описывающие поведение цилиндрических функций при малых значениях аргумента. Из формулы (2.16) вытекает асимптотика в нуле функции Бесселя:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \ldots \tag{2.54}$$

Поскольку по доказанному функции Бесселя и Неймана линейно независимы, из формулы (2.54) и доказанной в § 1 леммы следует, что функция Неймана имеет при $\nu = 0$ логарифмическую особенность, а при $\nu \neq 0$ имеет полюс ν-го порядка. Приведем формулы, описывающие поведение функции Неймана при малых значениях аргумента:

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln \frac{x}{2} + \ldots,$$

$$N_n(x) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^n (n-1)! + \ldots \quad (n \geqslant 1).$$

Поведение в окрестности точки $x=0$ функций Ханкеля первого и второго рода определяется поведением в окрестности точки $x=0$ функций Бесселя и Неймана и формулами (2.44).

10. Асимптотика цилиндрических функций

Для дальнейшего изучения свойств цилиндрических функций рассмотрим их поведение при больших значениях аргумента. Будем основываться на интегральных представлениях, полученных в п. 7. Рассмотрим для определенности функцию Ханкеля

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta} \, d\zeta. \tag{2.55}$$

Интеграл (2.55) — это интеграл по комплексной переменной ζ, зависящий от параметра x, для оценки которого при $x \to \infty$ можно использовать метод перевала. Напомним его основные положения*). Если $f(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ являются аналитическими функциями аргумента ζ в области G, содержащей контур интегрирования C, то при больших значениях аргумента x имеет место асимптотическая формула

$$F(x) = \int_C e^{xf(\zeta)} \varphi(\zeta) \, d\zeta = e^{xf(\zeta_0)} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{x\,|f''(\zeta_0)|}} \varphi(\zeta_0) e^{i\psi} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \tag{2.56}$$

где ζ_0 — точка перевала функции $f(\zeta)$, определяемая условием $f'(\zeta_0)=0$, а угол ψ указывает направление наискорейшего спуска и определяется следующим образом: $\psi = \frac{1}{2}(\pi - \arg f''(\zeta_0))$.

Применяя формулу (2.56) к интегралу (2.55), получим

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta} \, d\zeta = \frac{1}{\pi} e^{ix} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \, e^{-i\nu\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} + O(x^{-3/2}) \right\}. \tag{2.57}$$

Формула (2.57) выполняется при условии $x \gg 1$.

Поскольку функция $H_\nu^{(1)}(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной z на комплексной плоскости с

---

*) Более подробно см.: Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979.

разрезом по отрицательной части вещественной оси, то в силу общих свойств аналитического продолжения формула (2.57) остается справедливой при $|z| \gg |\nu|$ в области $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$, $\delta > 0$.

При вещественном аргументе x формулу (2.57) обычно записывают следующим образом:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{2.58}$$

Учитывая, что при вещественных аргументах функции Ханкеля первого и второго рода комплексно сопряжены, из формулы (2.58) получим следующие асимптотические формулы:

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}),$$

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \tag{2.59}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}).$$

Из формул (2.59) следует, что при больших действительных значениях аргумента функции Бесселя и Неймана представляют собой осциллирующие функции x, причем их амплитуды убывают с ростом x как $x^{-1/2}$, а расстояние между нулями стремится к π. Причем все эти нули, кроме $x=0$, простые. В самом деле, предположим, что в точке $x_0 \neq 0$ функция Бесселя или Неймана имеет нуль порядка выше первого. Тогда в точке x_0 эта функция и ее первая производная обращаются в нуль. Поскольку цилиндрическая функция удовлетворяет уравнению Бесселя, являющемуся однородным дифференциальным уравнением второго порядка, то в силу единственности решения задачи Коши для уравнения Бесселя при $x \geqslant x_0$ получим, что при $x \geqslant x_0$ данная функция тождественно равна нулю. Полученное противоречие доказывает утверждение.

11. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента. Функции Инфельда и Макдональда

Рассмотрим цилиндрические функции чисто мнимого аргумента. Подставим в ряд (2.16) для функции Бесселя аргумент ix:

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = i^\nu I_\nu(x).$$

Определение. Функция

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

называется функцией Инфельда.

В частности, при $\nu=0$ получим

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots$$

Из формулы для $I_\nu(x)$ видно, что функция Инфельда $I_\nu(x)$ — вещественная монотонно возрастающая функция, имеющая при $x=0$ нуль ν-го порядка.

Получим асимптотику функции Инфельда при $x\to\infty$, используя асимптотику функции Ханкеля:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = i^{-\nu}\,\frac{1}{2}\left\{H_\nu^{(1)}(ix) + H_\nu^{(2)}(ix)\right\} =$$

$$= i^{-\nu}\,\frac{1}{2}\left\{e^{i(ix)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\nu - i\frac{\pi}{4}} + O(x^{-3/2})\right] + \right.$$

$$\left. + e^{-i(ix)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}\; e^{i\frac{\pi}{2}\nu + i\frac{\pi}{4}} + O(x^{-3/2})\right]\right\} = e^x\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right\}.$$

Итак, асимптотика функции Инфельда имеет вид

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right). \tag{2.60}$$

Аналогично вводится функция $I_{-\nu}(x)$. Функции $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ при нецелом ν линейно независимы, так как в точке $x=0$ $I_\nu(x)$ имеет нуль ν-го порядка, а функция $I_{-\nu}(x)$ — полюс ν-го порядка. При целом $\nu=n$ получим $I_{-n}(x)=I_n(x)$.

Уравнение для цилиндрических функций мнимого аргумента несложно получить из уравнения Бесселя, положив аргумент равным ix:

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0. \tag{2.61}$$

Наряду с функцией Инфельда широко используется функция Макдональда порядка ν $K_\nu(x)$, которая вводится с помощью функции Ханкеля следующим образом:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\, i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix).$$

Покажем, что функция Макдональда является вещественной функцией вещественного аргумента x. Пусть $\nu\neq n$ — нецелое число. Тогда, учитывая формулу (2.42), получим

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}\frac{i}{\sin\pi\nu}\{J_\nu(ix)e^{-i\nu\pi}-J_{-\nu}(ix)\}=$$

$$=-\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}i^\nu\{i^\nu I_\nu(x)e^{-i\nu\pi}-i^{-\nu}I_{-\nu}(x)\}=$$

$$=\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)\}. \qquad (2.62)$$

Пусть теперь $\nu=n$ — целое число. Тогда, переходя в формуле (2.62) к пределу при $\nu\to n$ и раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$K_n(x)=\frac{(-1)^n}{2}\left\{\left(\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}-\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right\}.$$

Таким образом, функция Макдональда является вещественной при любом ν.

Пользуясь асимптотикой функции Ханкеля первого рода, получим асимптотику функции Макдональда при $x\to\infty$:

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)=$$

$$=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}e^{i(ix)}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi ix}}e^{-i\frac{\pi}{2}\nu-i\frac{\pi}{4}}+O(x^{-3/2})\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right). \qquad (2.63)$$

Из формул (2.60) и (2.63) следует, что при $x\to\infty$ функция $I_\nu(x)$ экспоненциально возрастает, а функция $K_\nu(x)$ экспоненциально убывает. Таким образом, функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.61). Общее решение уравнения (2.61) можно записать в виде

$$y(x)=C_1I_\nu(x)+C_2K_\nu(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В частности, если решение ограничено на бесконечности, нужно положить $C_1=0$, а если решение ограничено в нуле, то положить $C_2=0$.

Поскольку функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ линейно независимы и функция $I_\nu(x)$ ограничена в нуле при $\nu=0$ и имеет в нуле ($x=0$) ноль ν-го порядка при $\nu\neq0$, то в силу леммы 4.1 получаем, что $K_\nu(x)$ имеет при $\nu=0$ в нуле логарифмическую особенность, а при $\nu\neq0$ — полюс ν-го порядка. В частности, асимптотика в нуле функции $K_0(x)$ имеет вид

$$K_0(x)=-I_0(x)\ln\frac{2}{x}+\dots$$

Из рекуррентных формул для цилиндрических функций (2.19), (2.20) несложно получить рекуррентные формулы для цилиндрических функций мнимого аргумента:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \frac{1}{x^\nu} I_{\nu+1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}(x^\nu I_\nu(x)) = -x^\nu I_{\nu-1}(x),$$

$$I_{\nu+1}(x) - I_{\nu-1}(x) = -\frac{2\nu}{x} I_\nu(x),$$

$$K_{\nu+1}(x) - K_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} K_\nu(x),$$

$$K_{\nu+1}(x) + K_{\nu-1}(x) = -2K'_\nu(x).$$

В частности,

$$I'_0(x) = I_1(x),\ K'_0(x) = -K_1(x).$$

§ 3. КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

1. Определение классических ортогональных полиномов

Определение. Будем называть систему $\{p_n(x)\}$ полиномов всех степеней, заданных на отрезке $[a, b]$, системой классических ортогональных полиномов, если они ортогональны на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$, удовлетворяющим на интервале (a, b) дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{d}{dx}(\sigma(x)\rho(x)) = \tau(x)\rho(x), \tag{3.1}$$

где $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ — заданные функции, удовлетворяющие условию

$$x^m\sigma(x)\rho(x)\,|_a^b = 0, \quad m = 0,\ 1,\ \ldots \tag{3.2}$$

Граничные точки a и b отрезка $[a, b]$ могут соответственно принимать значения $-\infty$ и $+\infty$. Функция $\tau(x)$ — линейная функция

$$\tau(x) = Ax + B, \tag{3.3}$$

коэффициенты которой A и B определяются из условия (3.2).

Функция $\sigma(x)$ имеет вид

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & \text{при } a \neq -\infty,\ b \neq \infty, \\ x-a & \text{при } a \neq -\infty,\ b = \infty, \\ b-x & \text{при } a = -\infty,\ b \neq \infty, \\ 1 & \text{при } a = -\infty,\ b = \infty. \end{cases} \tag{3.4}$$

В уравнение для веса $\rho(x)$ входят два параметра линейной функции $\tau(x)$. Общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left(\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\, dx\right). \tag{3.5}$$

Формулы (3.1)—(3.5) определяют целый класс классических ортогональных полиномов и позволяют получить для них явные представления через функции $\rho(x)$ и $\sigma(x)$.

Классический ортогональный полином $p_n(x)$ является полиномом n-*й* степени. Ниже будут рассмотрены наиболее важные для приложений конкретные примеры классических ортогональных полиномов.

2. Основные свойства классических ортогональных полиномов

1) Классические ортогональные полиномы по определению ортогональны на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x)$:

$$\int_a^b p_n(x)\, p_k(x)\, \rho(x)\, dx = 0, \quad n \neq k.$$

2) Теорема о нулях.

Теорема 4.1. *Классический ортогональный полином $p_n(x)$ имеет ровно n простых нулей строго внутри отрезка $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть n — произвольное фиксированное целое положительное число. В силу ортогональности полиномов $p_n(x)$ и $p_0(x) \equiv 1$ имеем

$$\int_a^b p_n(x) \cdot 1 \cdot \rho(x)\, dx = 0, \quad n > 0.$$

Следовательно, полином $p_n(x)$ меняет знак на интервале (a, b) в некотором числе $k \geqslant 1$ различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(x_i \in (a, b)$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j)$. Тогда полином $p_n(x)$ имеет вид

$$p_n(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)\, \varphi_n(x),$$

где $\varphi_n(x)$ не меняет знака на (a, b). Для доказательства теоремы достаточно показать, что $k = n$. Предположим противное: пусть $k < n$. Так как система классических ортогональных полиномов $\{p_n(x)\}$ содержит полиномы всех степеней, то для полинома $r_k(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)$ справедливо разложение

$$r_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i p_i(x),$$

где $a_k \neq 0$. Так как $k < n$, имеем

$$\int_a^b p_n(x)\, r_k(x)\, \rho(x)\, dx = \sum_{i=0}^{k} a_i \int_a^b p_n(x)\, p_i(x)\, \rho(x)\, dx = 0.$$

С другой стороны,

$$\int_a^b p_n(x)\, r_k(x)\, \rho(x)\, dx = \int_a^b r_k^2(x)\, \varphi_n(x)\, \rho(x)\, dx \neq 0,$$

так как функция $r_k{}^2(x)\varphi_n(x)\rho(x)$ не меняет знак на интервале (a, b). Сравнивая последние две формулы, получаем противоречие.

Следовательно, $k \geqslant n$, а поскольку полином n-й степени не может иметь более n нулей, то $k=n$. Отсюда вытекает, что все корни простые. Теорема доказана.

Замечание. В силу основной теоремы высшей алгебры любой полином n-й степени $p_n(z)$ на комплексной плоскости z имеет ровно n нулей*) (с учетом их кратности). Из доказанной теоремы следует, что все нули классического ортогонального полинома $p_n(z)$ сосредоточены строго внутри отрезка $[a, b]$ действительной оси комплексной плоскости z.

Так как между двумя нулями дифференцируемой функции $f(x)$ по теореме Ролля**) имеется хотя бы один нуль ее производной $f'(x)$, то из этого свойства и доказанной теоремы получаем

Следствие. Все нули производных классического ортогонального полинома $p_n(x)$ простые и расположены строго внутри отрезка $[a, b]$.

3) Покажем, что производные $p_n'(x)$ также являются классическими ортогональными полиномами, заданными на отрезке $[a, b]$, и ортогональными с новым весом $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$.

При $m<n$ имеем

$$\int_a^b p_n(x)\, x^{m-1}\tau(x)\, \rho(x)\, dx = 0. \tag{3.6}$$

Действительно, $x^{m-1}\tau(x)$ есть полином степени m и может быть представлен в виде

$$x^{m-1}\tau(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i p_i(x),$$

откуда следует (3.6). Воспользуемся уравнением Пирсона (3.1) для $\tau(x)\rho(x)$ и вычислим интеграл по частям. Учитывая, что в силу условия (3.2) подстановки обратятся в нуль, получим

---

*) См: Свешников А. Г., Тихонов А. Н Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979.

**) См.: Ильин В. А, Позняк Э. Г Основы математического анализа Ч 1. М.: Наука, 1982.

$$\int_a^b p_n(x)\,x^{m-1}\tau(x)\,\rho(x)\,dx=\int_a^b p_n(x)\,x^{m-1}\,\frac{d}{dx}\,\{\sigma(x)\,\rho(x)\}\,dx=$$

$$=-\int_a^b \sigma(x)\,\rho(x)\,x^{m-1}p_n'(x)\,dx-(m-1)\int_a^b \sigma(x)\,\rho(x)\,x^{m-2}p_n(x)\,dx. \quad (3.7)$$

Так как $\sigma(x)x^{m-2}$ — полином степени не выше $m<n$, аналогично формуле (3.6) получаем, что второй интеграл в формуле (3.7) равен нулю. Поэтому

$$\int_a^b p_n'(x)\,x^{m-1}\sigma(x)\,\rho(x)\,dx=0. \quad (3.8)$$

Следовательно, при $m<n$ полином $p_n'(x)$ степени $n-1$ ортогонален ко всем полиномам меньшей степени $m-1$ с весом $\rho_1(x)=\sigma(x)\rho(x)$, т. е.

$$\int_a^b p_n'(x)\,p_m'(x)\,\rho_1(x)\,dx=0, \quad n\neq m.$$

Осталось показать, что весовая функция $\rho_1(x)$ удовлетворяет уравнению Пирсона (3.1). Имеем

$$(\sigma\rho_1)'=\sigma'\rho_1+\sigma\rho_1'=\sigma'\rho_1+\sigma(\sigma\rho)'=\sigma'\rho_1+\sigma\tau\rho=(\sigma'+\tau)\,\rho_1=\tau_1\rho_1,$$

где $\tau_1=\sigma'(x)+\tau(x)$ — линейная функция. Очевидно, что произведение $x^m\sigma(x)\rho_1(x)$, $m=0, 1, \ldots$, обращается в нуль в точках a и b.

Замечание. Методом математической индукции легко показать, что m=е производные классических ортогональных полиномов $p_n^{(m)}(x)$ образуют на отрезке $[a, b]$ систему классических ортогональных полиномов ортогональных с весом $\rho_m(x)=$ $=\sigma^m(x)\rho(x)$ (очевидно, $\rho_0(x)\equiv\rho(x)$).

4) Получим дифференциальное уравнение для классических ортогональных полиномов.

Запишем формулу (3.8) в виде

$$\int_a^b p_n'(x^m)'\,\sigma(x)\,\rho(x)\,dx=0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\sigma(x)\,\rho(x)\,p_n'(x)\,x^m\,|_a^b-\int_a^b x^m\,\frac{d}{dx}\,\left\{\sigma\rho\,\frac{dp_n}{dx}\right\}dx=0,$$

откуда, используя уравнение Пирсона (3.1), находим

$$\int_a^b x^m\,\{\sigma\rho p_n''+p_n'(\sigma\rho)'\}\,dx=\int_a x^m\,\{\sigma p_n''+\tau p_n'\}\,\rho\,dx=0 \quad (3.9)$$

при всех $m<n$. Обозначим

$$q_n(x)=\sigma(x)p_n''+\tau(x)p_n'.$$

Полином n-й степени $q_n(x)$ разложим по системе классических ортогональных полиномов:

$$q_n(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i p_i(x).$$

Учитывая (3.9), получим

$$\int_a^b q_n(x)p_m(x)\rho\,dx=\sum_{i=0}^{n} a_i\int_a^b p_i(x)p_m(x)\rho\,dx=a_m\int_a^b p_m^2(x)\rho\,dx=0,$$

откуда $a_m=0$ при $m<n$ и, следовательно, $q_n(x)=a_np_n(x)$. Обозначив $\lambda_n=-a_n$, будем иметь

$$\sigma(x)p_n''+\tau(x)p_n'+\lambda_np_n=0. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) можно записать в самосопряженной форме. Для этого умножим (3.10) на $\rho(x)$ и, используя уравнение Пирсона (3.1), приведем его к виду

$$\frac{d}{dx}\left\{\sigma\rho\frac{dp_n}{dx}\right\}+\lambda_n\rho p_n=0. \tag{3.11}$$

5) В случае конечного отрезка $[a, b]$ в силу поведения функции $\rho(x)\sigma(x)$ при $x\to a$ или $x\to b$ граничные точки отрезка $[a, b]$ являются особыми точками уравнения (3.11). Тем самым классические ортогональные полиномы являются собственными функциями краевой задачи Штурма—Лиувилля для уравнения (3.11) на отрезке $[a, b]$ с условиями ограниченности в граничных точках:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left\{\sigma\rho\dfrac{dy}{dx}\right\}+\lambda\rho y=0, & x\in(a,\ b),\\ |y(a)|<\infty & |y(b)|<\infty.\end{cases} \tag{3.12}$$

При постановке задачи Штурма—Лиувилля граничные условия выделяют одно из двух линейно независимых решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. В силу леммы 4.1 в случае, когда граничные точки являются особыми точками уравнения, условия ограниченности достаточны для выделения единственного решения.

Поскольку в силу теоремы Вейерштрасса ортогональные полиномы образуют на конечном отрезке полную и замкнутую систему, для них имеет место теорема разложимости Стеклова и они исчерпывают все собственные функции краевой задачи (3.12). В самом деле, если предположить, что при некотором значении параметра $\tilde{\lambda}$, отличного от λ_n, существует собственная функция $\tilde{y}(x)$ задачи (3.12), не являющаяся классическим ортогональным полиномом, то в силу общих свойств собственных функций непрерывная функция $\tilde{y}(x)$ должна быть ортогональна ко всем функциям системы классических ортогональных полиномов $\{p_n(x)\}$ и в силу замкнутости этой системы тождественно равна нулю.

Постановку краевой задачи Штурма—Лиувилля в случае бесконечного или полубесконечного интервала мы рассмотрим позже на примере конкретных классических ортогональных полиномов.

Найдем выражение для собственных значений задачи (3.12). Выпишем коэффициент при x^n в уравнении (3.10). Поскольку

$$\sigma(x)=\sigma(0)+x\sigma'(0)+\frac{x^2}{2}\sigma'', \quad \tau(x)=\tau(0)+x\tau',$$

то, подставляя эти выражения в (3.10), получим коэффициент при x^n в виде

$$\left\{\frac{1}{2}\sigma'' n(n-1)+\tau' n+\lambda_n\right\} a_n,$$

где

$$p_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots, \quad a_n\neq 0.$$

Отсюда, приравнивая коэффициент при x^n в уравнении (3.10) нулю, получим

$$\lambda_n=-n\left(\tau'+\frac{n-1}{2}\sigma''\right). \tag{3.13}$$

6) Уравнение (3.11) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho_1(x)\frac{dp_n}{dx}\right\}+\lambda_n\rho p_n=0,$$

где $\rho_1(x)=\sigma(x)\rho(x)$. Так как производные m-го порядка $p_n^{(m)}(x)$ классических ортогональных полиномов снова являются классическими ортогональными полиномами, то, повторяя рассуждения п. 4), получим для них уравнение

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho_{m+1}\frac{dp_n^{(m)}}{dx}\right\}+\lambda_{nm}\rho_m p_n^{(m)}=0, \tag{3.14}$$

где

$$\lambda_{nm}=-(n-m)\left\{(n-m-1)\frac{\sigma''}{2}+\tau'\right\}, \quad m=0, 1, \ldots,$$

$$\rho_0\equiv\rho, \quad \lambda_{n0}\equiv\lambda_n.$$

7) Получим явное представление для классических ортогональных полиномов. В силу уравнения (3.14)

$$\rho_m p_n^{(m)}=-\frac{1}{\lambda_{nm}}\frac{d}{dx}\{\rho_{m+1}p_n^{(m+1)}\},$$

и, в частности, рекуррентно применяя последнюю формулу, находим

$$\rho p_n(x) \equiv \rho_0 p_n^{(0)} = -\frac{1}{\lambda_{n0}} \frac{d}{dx}(\rho_1 p_n^{(1)}) = \frac{1}{\lambda_{n0}\lambda_{n1}} \frac{d^2}{dx^2}(\rho_2 p_n^{(2)}) = \ldots =$$
$$= \frac{1}{A_{nm}} \frac{d^m}{dx^m}(\rho_m p_n^{(m)}), \qquad (3.15)$$

где

$$A_{nm} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \lambda_{nk}.$$

Так как $p_n^{(n)} = n! a_n$, то, полагая в формуле (3.15) $m = n$, получим

$$p_n(x) = \frac{n! a_n}{A_{nn}} \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}(\rho_n(x)),$$

или, обозначая $C_n = \frac{n! a_n}{A_{nn}}$:

$$p_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}\{\sigma^n(x)\rho(x)\}. \qquad (3.16)$$

Формула (3.16) называется обобщенной формулой Родрига. Коэффициенты C_n в формуле (3.16) определяются из условия нормировки, поскольку классические ортогональные полиномы как решения однородного уравнения определяются с точностью до множителя.

8) Формула Родрига позволяет получить значение квадрата нормы классических ортогональных полиномов. Учитывая, что $p_n(x) = a_n x^n + q_{n-1}(x)$, где $q_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$, получим

$$\int_a^b p_n^2 \rho\, dx = a_n \int_a^b x^n p_n \rho\, dx + \int_a^b p_n q_{n-1} \rho\, dx = a_n \int_a^b x^n p_n \rho\, dx.$$

Отсюда, используя формулу Родрига (3.16), будем иметь

$$\| p_n \|^2 = \int_a^b p_n^2 \rho\, dx = a_n C_n \int_a^b x^n \frac{d^n}{dx^n}(\sigma^n \rho)\, dx.$$

Интегрируя n раз по частям и учитывая, что в силу условия (3.2) подстановки обратятся в нуль, получим формулу для квадрата нормы классических ортогональных полиномов

$$\| p_n \|^2 = (-1)^n n! a_n C_n \int_a^b \sigma^n(x) \rho(x)\, dx. \qquad (3.17)$$

3. Производящая функция классических ортогональных полиномов

Мы ввели классические ортогональные полиномы как ортогональную с весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$ систему полиномов, для которой вес $\rho(x)$ подчинен определенным условиям. С другой стороны, мы установили, что классические ортогональные полиномы можно ввести как собственные функции задачи Штурма—Лиувилля на конечном отрезке $[a, b]$. Возможен еще один способ введения классических ортогональных полиномов — с помощью производящей функции.

Определение. Производящей функцией классических ортогональных полиномов называется функция $\Psi(x, z)$, разложение которой в ряд Тейлора при достаточно малых z имеет вид

$$\Psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{p}_n(x)}{n!} z^n, \tag{3.18}$$

где

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{1}{C_n} p_n(x).$$

Получим производящую функцию классических ортогональных полиномов. Будем исходить из обобщенной формулы Родрига (3.16). Заметим, что в силу формулы (3.5) функция $\sigma^n(z)\rho(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной z в окрестности отрезка $[a, b]$ действительной оси комплексной плоскости z. Воспользуемся для ее n-й производной интегральным представлением Коши

$$\frac{d^n}{dx^n}\{\sigma^n(x)\rho(x)\} = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\sigma^n(t)\rho(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt, \tag{3.19}$$

где интеграл берется по контуру, содержащему точку $t=x$ внутри себя. Из формул (3.16) и (3.19) вытекает, что

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)}\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\sigma^n(t)\rho(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt. \tag{3.20}$$

Подставляя (3.20) в (3.18) и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{\rho(x)}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\rho(t)}{t-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\sigma(t) z}{t-x}\right\}^n dt.$$

При достаточно малом $|z|$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\sigma(t) z}{t-x}\right\}^n = \frac{1}{1-\dfrac{\sigma(t) z}{t-x}} = \frac{t-x}{t-x-\sigma(t) z}$$

и окончательно

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{2\pi i \rho(x)} \int\limits_C \frac{\rho(t)}{t - x - z\sigma(t)} dt. \tag{3.21}$$

При $z=0$ подынтегральная функция в (3.21) имеет внутри контура C единственный простой полюс $t=x$. Следовательно, по непрерывности, при достаточно малых $|z|$ контур C всегда можно выбрать так, что внутри него будет находиться единственный простой полюс t_0, являющийся корнем уравнения

$$t - x - z\sigma(t) = 0. \tag{3.22}$$

Очевидно, $t_0 = t_0(x, z)$, где $t_0(x, z)$ означает тот корень уравнения (3.22), который при малых $|z|$ близок к $t=x$.

Вычисляя интеграл в (3.21) с помощью вычетов, получим общее выражение производящей функции классических ортогональных полиномов:

$$\Psi(x, z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \frac{1}{1 - z\sigma'(t_0)}, \tag{3.23}$$

где $t_0 = t_0(x, z)$ — корень уравнения (3.22).

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных систем классических ортогональных полиномов, наиболее важных для приложений.

4. Полиномы Якоби

Пусть $a=-1$, $b=1$ (к этому случаю, очевидно, приводятся все конечные интервалы).

Тогда по формуле (3.4)

$$\sigma(x) = (x+1)(-x+1) = 1 - x^2,$$

и для линейной функции $\tau(x) = Ax + B$ в силу (3.5) получим

$$\rho(x) = \frac{1}{1 - x^2} \exp\left\{\int \frac{Ax + B}{1 - x^2} dx\right\}.$$

Поскольку

$$\int \frac{Ax + B}{1 - x^2} dx = \frac{A + B}{2} \int \frac{dx}{1 - x} + \frac{B - A}{2} \int \frac{dx}{1 + x} =$$

$$= \ln\left\{(1 - x)^{-\frac{B+A}{2}} (1 + x)^{\frac{B-A}{2}}\right\},$$

то

$$\rho(x) = (1 - x)^{\alpha} (1 + x)^{\beta}, \tag{3.24}$$

где

$$\alpha = -\frac{B + A}{2} - 1, \quad \beta = \frac{B - A}{2} - 1.$$

Выражая из последней формулы коэффициенты A и B через α и β, получим линейную функцию $\tau(x)$ в следующем виде:

$$\tau(x) = -(\alpha+\beta+2)\,x+\beta-\alpha.$$

Заметим, что условие (3.2) будет выполняться, если постоянные α и β удовлетворяют условиям $\alpha>-1$, $\beta>-1$.

Определение. Классические ортогональные полиномы, заданные на отрезке $[-1, 1]$ и ортогональные на нем с весом $\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, называются полиномами Якоби и обозначаются $P_n^{(\alpha,b)}(x)$.

Для полиномов Якоби нормировочный множитель выбирается в виде

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

Тогда получаем явное выражение полиномов Якоби с помощью формулы Родрига (3.16):

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{1}{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\,\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}. \quad (3.25)$$

Из формулы Родрига несложно получить полезную формулу дифференцирования для полиномов Якоби

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)\,P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

Используя формулу (3.12), запишем задачу Штурма—Лиувилля для полиномов Якоби

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\dfrac{dP_n^{(\alpha,\beta)}}{dx}\right]+\lambda_n(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}=0, \\ \hfill -1<x<1, \\ |P_n^{(\alpha,\beta)}(\pm 1)|<\infty. \end{cases} \quad (3.26)$$

Полиномы Якоби являются собственными функциями задачи Штурма—Лиувилля (3.26), отвечающие собственным значениям λ_n, имеющим в силу формулы (3.13) следующий вид:

$$\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1). \quad (3.27)$$

Поскольку система полиномов Якоби задана на конечном интервале $[-1, 1]$, то в силу теоремы Вейерштрасса она является полной, а следовательно, замкнутой и исчерпывает все собственные функции задачи (3.26).

Выражение для квадрата нормы полиномов Якоби имеет следующий вид:

$$\|P_n^{(\alpha,\ )}\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \quad (3.28)$$

Оно может быть получено из общей формулы (3.17).

Замечание. С полиномами Якоби тесно связаны полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$ и полиномы Чебышева второго рода $U_n(x)$.

Полиномы Чебышева первого рода определяются через полиномы Якоби при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ следующим образом:

$$T_n(x)=\frac{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x).$$

Они образуют на отрезке $[-1, 1]$ систему классических ортогональных полиномов, ортогональных с весом $\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$. Для полиномов Чебышева первого рода $T_n(x)$ имеют место соотношения

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\begin{cases}0\ , & \text{если } m\neq n,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m=n\neq 0,\\ \pi\ , & \text{если } m=n=0.\end{cases}$$

Полиномы Чебышева второго рода определяются через полиномы Якоби с $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ по формуле

$$U_n(x)=\frac{(n+1)!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x).$$

Между полиномами Чебышева первого и второго рода существует следующая связь:

$$U_n(x)=\frac{T'_{n+1}(x)}{n+1}.$$

Полиномы Чебышева первого и второго рода находят широкое применение, в частности в вычислительной математике *).

5. Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра являются важным частным случаем полиномов Якоби, соответствующим $\alpha=\beta=0$, и обозначаются $P_n(x)$. Таким образом, $P_n(x)=P_n^{(0,0)}(x)$. При этом согласно (3.24) $\rho(x)\equiv 1$ и в силу (3.1)

*) См.: Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

$$\tau(x)=\frac{d}{dx}\sigma(x)=-2x.$$

Тогда уравнение (3.11) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]+\lambda_n P_n=0. \tag{3.29}$$

Уравнение (3.29) носит название уравнения Лежандра. Краевая задача Штурма—Лиувилля для полиномов Лежандра соответственно имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right]+\lambda_n y=0, \quad -1<x<1,\\ |y(\pm 1)|<\infty.\end{cases} \tag{3.30}$$

Собственные значения λ_n определяются формулой (3.27) при $\alpha=\beta=0$:

$$\lambda_n=n(n+1).$$

Из (3.25) получается формула Родрига для полиномов Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{3.31}$$

Получим выражение для нормы полиномов Лежандра, для чего используем формулу (3.17):

$$\|P_n\|^2=(-1)^n a_n n! C_n\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n\,dx. \tag{3.32}$$

Из (3.31) имеем

$$a_n x^n=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}x^{2n}=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{2^n n!}x^n=\frac{1}{2^n n!}\frac{(2n)!}{n!}x^n,$$

откуда

$$a_n=\frac{1}{2^n n!}\frac{(2n)!}{n!}.$$

Вычислим интеграл в правой части (3.32):

$$I_n=\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n\,dx=x(1-x^2)^n\Big|_{-1}^{+1}+n\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{n-1}2x^2\,dx=$$

$$=2n\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{n-1}\,dx-2n\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n\,dx=2nI_{n-1}-2nI_n,$$

т. е.

$$I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1},$$

и, применяя последнюю формулу n раз, будем иметь

$$I_n=\frac{2n\,(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)\,(2n-1)\ldots 3}\,I_0=\frac{(2^n)^2\,(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot 2,$$

поскольку

$$I_0=\int_{-1}^{+1}dx=2.$$

Окончательно получаем

$$\|P_n\|^2=\frac{2}{2n+1}. \tag{3.33}$$

Заметим, что формула (3.33) сразу следует из формулы (3.28) при $\alpha=\beta=0$.

Производящую функцию для полиномов Лежандра получим, воспользовавшись формулой (3.23). Уравнение (3.22) в случае полиномов Лежандра принимает вид

$$zt^2+t-(z+x)=0.$$

Нетрудно показать, что ближайшим к корню $t=x$ при малых $|z|$ будет корень

$$t_0^{(+)}=\frac{-1+\sqrt{1+4xz+4z^2}}{2z}.$$

Из (3.23) имеем

$$\Psi(x,\ z)=\frac{1}{1+2zt_0^{(+)}}=\frac{1}{\sqrt{1+4xz+4z^2}},$$

и поскольку

$$\frac{\widetilde{P}_n\,(x)}{n!}\,z^n=\frac{P_n\,(x)}{C_n n!}\,z^n=P_n\,(x)\,(-2z)^n,$$

то

$$\Psi(x,\ z)=\frac{1}{\sqrt{1+4xz+4z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\,(x)\,(-2z)^n.$$

Сделав в последней формуле замену z на $-\frac{z}{2}$ и сохранив обозначение для производящей функции, получим

$$\Psi(x,\ z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\,(x)\,z^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}. \tag{3.34}$$

Производящая функция полиномов Лежандра имеет простой геометрический смысл. Пусть $\mathbf{r}_P$ и $\mathbf{r}_Q$ — радиусы-векторы точек P и Q в сферической системе координат, а ϑ — угол между этими радиусами-векторами. Предположим для определенности, что $\mathbf{r}_P > \mathbf{r}_Q$. Тогда расстояние между точками P и Q имеет вид

$$R_{PQ} = \sqrt{r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q \cos\vartheta} = r_P \sqrt{1 - 2\frac{r_Q}{r_P}\cos\vartheta + \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^2}$$

и

$$\frac{1}{R_{PQ}} = \frac{1}{r_P}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_Q}{r_P}\cos\vartheta + \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^2}} = \frac{1}{r_P}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^n P_n(\cos\vartheta).$$

Сравнивая последнюю формулу с формулой (3.34), получим

$$\frac{1}{R_{PQ}} = \frac{1}{r_P}\Psi\left(\cos\vartheta,\ \frac{r_Q}{r_P}\right).$$

Из общей теоремы для классических ортогональных полиномов следует теорема о нулях для полиномов Лежандра.

Теорема 4.2. *Полином Лежандра $P_n(x)$ имеет ровно n простых нулей, расположенных строго внутри отрезка* $[-1, 1]$.

Из общих свойств классических ортогональных полиномов вытекают следующие свойства полиномов Лежандра:

система полиномов Лежандра полна на отрезке $[-1, 1]$;

система полиномов Лежандра замкнута;

система полиномов Лежандра исчерпывает все собственные функции краевой задачи Штурма—Лиувилля (3.30);

для системы полиномов Лежандра имеет место теорема разложимости (Стеклова).

Теорема 4.3. *Всякая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[-1, 1]$ *функция* $f(x)$ *разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по полиномам Лежандра*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x),$$

где

$$f_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

— *коэффициенты Фурье функции* $f(x)$.

Формула (3.34) позволяет получить полезное рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра. Продифференцируем (3.34) слева и справа по z:

$$\Psi_z(x, z) = \frac{x - z}{(1 - 2xz + z^2)^{3/2}} = \frac{(x - z)\,\Psi(x, z)}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(x)\,z^{k-1},$$

откуда

$$(x-z)\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) z^k \equiv (1-2xz+z^2)\sum_{k=1}^{\infty} kP_k(x) z^{k-1}.$$

Приравнивая в последней формуле коэффициенты при одинаковых степенях z, получим искомое рекуррентное соотношение

$$(n+1) P_{n+1}(x)-(2n+1) xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0, \quad n=1, 2, \ldots$$

Полагая в формуле (3.34) $x=1$, получим

$$\Psi(1, z)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) z^n=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

откуда $P_n(1)=1$, $n=0, 1, \ldots$, и, следовательно, $P_0(x)\equiv 1$. В силу формулы Родрига (3.31) $P_n(x)$ в зависимости от четности или нечетности индекса n являются четными или нечетными функциями. Поэтому $P_1(x)=x$ и $P_n(-1)=(-1)^n$, $n=0, 1, \ldots$ Используя формулу Родрига (3.31), выпишем явные выражения для первых пяти полиномов Лежандра:

$$P_0(x)=1,$$

$$P_1(x)=x,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

6. Полиномы Лагерра

Пусть $a=0$, $b=\infty$. В этом случае (см. (3.4)) $\sigma(x)=x$ и из формулы (3.5) вытекает

$$\rho(x)=\frac{1}{x}\exp\left\{\int\left(A+\frac{B}{x}\right)dx\right\}.$$

Поскольку

$$\int\left(A+\frac{B}{x}\right)dx=Ax+\ln x^B,$$

то

$$\rho(x)=x^{\alpha}e^{Ax},$$

где $\alpha=B-1$.

Потребуем, чтобы

$$\lim_{x\to\infty} x^m\sigma(x)\rho(x)=0, \quad m=0, 1, \ldots$$

Для выполнения последнего условия достаточно положить $A=-1$. Тогда получим

$$\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x},\ \alpha>-1. \tag{3.35}$$

Классические ортогональные полиномы, заданные на полупрямой $[0, \infty)$ и ортогональные на ней с весом $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$, называются обобщенными полиномами Лагерра и обозначаются $L_n^{(\alpha)}(x)$.

Выбирая нормировочный множитель $C_n=\frac{1}{n!}$, получим из формулы Родрига (3.16) явное выражение для обобщенных полиномов Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}\{e^{-x}x^{n+\alpha}\}. \tag{3.36}$$

При постановке краевой задачи Штурма—Лиувилля для полиномов $L_n^{(\alpha)}(x)$ нужно учесть, что эти полиномы заданы на полупрямой и необходимо определить поведение решения на бесконечности. Введем

Определение. Будем называть функцию $f(x)$ квадратично интегрируемой с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b), если существует интеграл

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx.$$

Тогда, используя (3.11), можно так сформулировать постановку задачи Штурма—Лиувилля для обобщенных полиномов Лагерра.

Найти значение параметра λ и отвечающие им нетривиальные решения уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda x^{\alpha}e^{-x}y=0,\quad 0<x<\infty, \tag{3.37}$$

непрерывные и квадратично интегрируемые с весом $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$ на полупрямой $[0, \infty)$. Отметим, что условие квадратичной интегрируемости функций $y(x)$ с весом $x^{\alpha}e^{-x}$ на полупрямой $[0, \infty)$ допускает их рост при $x\to\infty$.

Заметим, что обобщенные полиномы Лагерра определены на полубесконечном интервале, и, следовательно, мы уже не можем, ссылаясь на теорему Вейерштрасса, доказать, что они образуют полную систему на полупрямой $[0, \infty)$, а также что эта система замкнута и исчерпывает все собственные функции задачи (3.37). Однако замкнутость системы полиномов $L_n^{(\alpha)}(x)$ несложно доказать аналогично тому, как это будет сделано в следующем пункте для полиномов Эрмита, определенных на всей бесконечной прямой. Отсюда будет следовать, что обобщенные полиномы Лагерра исчерпывают все собственные функции задачи (3.37). Для обобщенных полиномов Лагерра справедлива теорема разложимости Стеклова.

При $\alpha=0$ получаем частный случай обобщенных полиномов Лагерра, называемых полиномами Лагерра и обозначаемых

$$L_n(x) \equiv L_n^{(0)}(x).$$

Из формулы (3.36) сразу следует формула Родрига, дающая явное представление для полиномов Лагерра:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\{x^n e^{-x}\}. \tag{3.38}$$

Коэффициент a_n для полиномов Лагерра согласно (3.38) имеет вид

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!},$$

и, используя общую формулу (3.17) и свойства гамма-функции, легко получить выражение для квадрата нормы:

$$\| L_n \|^2 = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \frac{1}{n!}\Gamma(n+1) = 1.$$

Из формулы (3.37) при $\alpha=0$ получается уравнение для полиномов Лагерра

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{d}{dx}L_n\right) + \lambda_n e^{-x} L_n = 0.$$

Краевая задача Штурма—Лиувилля для полиномов Лагерра формулируется полностью аналогично соответствующей задаче для обобщенных полиномов Лагерра.

Собственные значения λ_n определяются формулой (3.13). Из уравнения Пирсона (3.1) $\tau(x) = -x+1$ и формула (3.13) дает

$$\lambda_n = -n\left(-1 + \frac{n-1}{2}\cdot 0\right) = n.$$

Полиномы Лагерра как частный случай обобщенных полиномов Лагерра образуют полную замкнутую ортогональную с весом $\rho(x) = e^{-x}$ систему на полупрямой $[0, \infty)$ и исчерпывают все собственные функции соответствующей задачи Штурма—Лиувилля. Для полиномов Лагерра справедлива теорема разложимости Стеклова.

Используя формулу Родрига (3.38), выпишем в явном виде несколько первых полиномов Лагерра:

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = -x+1,$$

$$L_2(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1.$$

Получим выражение для производящей функции полиномов Лагерра. В этом случае уравнение (3.22) принимает вид

$$t-x-zt=0,$$

откуда

$$t_0=\frac{x}{1-z},$$

и из формулы (3.23) следует

$$\Psi(x,\ z)=\frac{e^{-\frac{x}{1-z}}}{e^{-x}}\,\frac{1}{1-z}=\frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{1-z}.$$

Итак,

$$\frac{1}{1-z}e^{-\frac{xz}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{L}_n(x)}{n!}z^n,$$

где $\widetilde{L}_n(x)=\frac{L_n(x)}{C_n}$, и поскольку для полиномов Лагерра $C_n=\frac{1}{n!}$, то окончательно получим

$$\Psi(x,\ z)=\frac{1}{1-z}e^{-\frac{xz}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\,z^n.$$

7. Полиномы Эрмита

Пусть $a=-\infty$, $b=\infty$. Тогда $\sigma(x)=1$ и по формуле (3.5) получим

$$\rho(x)=\exp\left\{\int\tau(x)\,dx\right\}.$$

Выберем $\tau(x)=-2x$. Тогда

$$\rho(x)=e^{-x^2}. \qquad (3.39)$$

Определение. Классические ортогональные полиномы, заданные на прямой $(-\infty,\ \infty)$ и ортогональные на ней с весом $\rho(x)=e^{-x^2}$, называются полиномами Эрмита.

Для полиномов Эрмита нормировочный коэффициент обычно принимают равным

$$C_n=(-1)^n.$$

Тогда формула Родрига (3.16) дает следующее явное выражение полиномов Эрмита:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}). \qquad (3.40)$$

Выпишем сразу несколько первых полиномов Эрмита:

$$H_0(x)=1,$$
$$H_1(x)=2x,$$
$$H_2(x)=4x^2-2,$$
$$H_3(x)=8x^3-12x.$$

Из формулы (3.11) получается уравнение для полиномов Эрмита. Краевая задача для них формулируется следующим образом.

Найти значения параметра λ, при которых уравнение Эрмита

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda e^{-x^2}y=0,\quad -\infty<x<\infty, \tag{3.41}$$

имеет нетривиальные решения, квадратично интегрируемые с весом e^{-x^2} на прямой $(-\infty, \infty)$.

Формула (3.13) дает выражение для собственного значения:

$$\lambda_n=2n.$$

В случае полиномов Эрмита, определенных на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$, нельзя, как и в случае полиномов Лагерра, использовать для доказательства полноты теорему Вейерштрасса. Следовательно, нельзя утверждать, опираясь на свойство полноты, что система полиномов Эрмита замкнута. Докажем непосредственно замкнутость системы полиномов Эрмита. Напомним, что аналогично можно доказать замкнутость системы полиномов Лагерра. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.4. *Система полиномов Эрмита замкнута, т. е. функция* $f(x)$, *непрерывная и квадратично интегрируемая с весом* $\rho(x)=e^{-x^2}$ *на всей бесконечной прямой* $(-\infty, \infty)$, *ортогональная с весом* $\rho(x)=e^{-x^2}$ *всем полиномам Эрмита на* $(-\infty, \infty)$, *тождественно равна нулю.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(x)=f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. По условию теоремы функция $\Phi(x)$ квадратично интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$ с весом $\rho(x)=1$. Тем более функция $F(x)=f(x)e^{-x^2}$ квадратично интегрируема с весом $\rho(x)=1$ на интервале $(-\infty, \infty)$. Известно, что если функция квадратично интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$, то для нее существует преобразование Фурье[*] $\tilde{F}(\omega)$:

$$\tilde{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-ix\omega}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-x^2-ix\omega}\,dx.$$

---

[*] См: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2 М.: Наука, 1980.

Функция $\tilde{F}(x)$ аналитична в полосе $|\mathrm{Im}\,\omega| \leqslant M$ произвольной ширины $2M$, и ее производные можно вычислять, дифференцируя под знаком интеграла *):

$$\tilde{F}^{(k)}(\omega) = \frac{d^k\tilde{F}}{d\omega^k} = (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-x^2 - ix\omega} x^k dx, \quad k = 0,\ 1, \ldots \tag{3.42}$$

Так как функция $\tilde{F}(\omega)$ аналитична в полосе $|\mathrm{Im}\,\omega| \leqslant M$, то в принадлежащем этой полосе круге K_R с центром в точке $\omega = 0$ и радиусом R функцию $\tilde{F}(\omega)$ можно разложить в степенной ряд

$$\tilde{F}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}^{(k)}(0)}{k!}\, \omega^k.$$

Все коэффициенты этого ряда равны нулю:

$$\tilde{F}^{(k)}(0) = (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, e^{-x^2} dx =$$

$$= (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\sum_{\nu=0}^{k} C_\nu H_\nu(x)\right\} f(x)\, e^{-x^2} dx =$$

$$= (-i)^k \sum_{\nu=0}^{k} C_\nu \int_{-\infty}^{\infty} H_\nu(x) f(x)\, e^{-x^2} dx = 0,$$

поскольку по условию теоремы

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_\nu(x) f(x)\, e^{-x^2} dx = 0, \quad \nu = 0,\ 1, \ldots, \infty.$$

Итак, всюду в круге K_R функция $\tilde{F}(\omega)$ тождественно равна нулю. По теореме единственности аналитической функции **) отсюда следует, что всюду в полосе $|\mathrm{Im}\,\omega| \leqslant M$ функция $\tilde{F}(\omega)$ тождественно равна нулю.

Применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega \equiv 0.$$

Итак, функция

$$f(x) = F(x)\, e^{x^2} \equiv 0.$$

Из доказанной теоремы и ортогональности полиномов Эрмита вытекает

---

*) См: Свешников А. Г, Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979.

**) Там же.

Следствие. Система полиномов Эрмита исчерпывает все собственные функции краевой задачи Штурма—Лиувилля (3.41).

Для вычисления квадрата нормы полиномов Эрмита учтем, что в силу формулы Родрига (3.40) коэффициент $a_n=2^n$. Отсюда по формуле (3.17)

$$\|H_n\|^2 = 2^n\, n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}.$$

Получим выражение для производящей функции полиномов Эрмита. Уравнение (3.22) принимает вид

$$t-x-z=0,$$

откуда

$$t_0=x+z.$$

Отсюда по формуле (3.23) получаем

$$\Psi(x,\ z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} = e^{-(2xz+z^2)}$$

и

$$e^{-(2xz+z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{H}_n(x)}{n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, (-z)^n.$$

Делая в последней формуле замену z на $-z$, получим окончательное выражение для производящей функции

$$\Psi(x,\ z) = e^{2xz-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, z^n.$$

§ 4. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

1. Основные понятия

Определение. Присоединенными функциями Лежандра называются функции, определенные соотношением

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\, \frac{d^m}{dx^m}\, P_n(x), \tag{4.1}$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

При $m>n$ присоединенные функции Лежандра тождественно равны нулю. При $m=2k$ это полиномы степени n. При $m=2k+1$ — иррациональные функции.

Из формулы (4.1) вытекает, что нули присоединенных функций Лежандра $P_n^{(m)}(x)$ помимо точек ± 1 определяются нулями производной $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$, являющейся классическим ортогональным полиномом $(n-m)$-го порядка. Следовательно, при $m>0$ присоединение функции Лежандра имеют $n-m$ простых нулей внутри отрезка $[-1, 1]$ и обращаются в нуль в граничных точках ± 1.

2. Краевая задача для присоединенных функций Лежандра

Получим дифференциальное уравнение для присоединенных функций Лежандра. Функция $u(x)=P_n(x)$ удовлетворяет уравнению Лежандра (3.29):

$$(1-x^2)u''-2xu'+n(n+1)u=0. \tag{4.2}$$

Продифференцируем (4.2) m раз, учитывая формулу Лейбница:

$$(uv)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}.$$

Получим

$$0=[(1-x^2)u''-2xu'+n(n+1)u]^{(m)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)}-$$

$$-\sum_{k=0}^{m} C_m^k (2x)^{(k)} u^{(m-k+1)}+n(n+1)u^{(m)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k+1)} u^{(m-k+1)}+n(n+1)u^{(m)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} u^{(m-k+2)}+\sum_{l=1}^{m+1} C_m^{l-1} (1-x^2)^{(l)} u^{(m-l+2)}+n(n+1)$$

$$u^{(m)}=C_m^0(1-x^2)u^{(m+2)}+(C_m^1+C_m^0)(1-x^2)'u^{(m+1)}+$$

$$+(C_m^2+C_m^1)(1-x^2)''u^{(m)}+n(n+1)u^{(m)},$$

причем мы учли, что $k=0, 1, 2$, а $l=1, 2$, поскольку производные более высоких порядков от $1-x^2$ тождественно равны нулю.

Поскольку

$$C_m^1+C_m^0=m+1,\ C_m^0=1,$$

$$C_m^2+C_m^1=\frac{m(m-1)}{2}+m=\frac{m(m+1)}{2},$$

то

$$[(1-x^2)u''-2xu'+n(n+1)u]^{(m)}=$$
$$=(1-x^2)u^{(m+2)}+(m+1)(-2x)u^{(m+1)}+$$
$$+\frac{m(m+1)}{2}(-2)u^{(m)}+n(n+1)u^{(m)}=0,$$

т. е.

$$(1-x^2)u^{(m+2)}-2x(m+1)u^{(m+1)}-m(m+1)u^{(m)}+n(n+1)u^{(m)}=0. \tag{4.3}$$

Полагая

$$y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u^{(m)}(x),$$

получаем из (4.3) следующее уравнение для функции $y(x)\equiv\equiv P_n^{(m)}(x)$:

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) можно переписать и в самосопряженной форме:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0. \tag{4.5}$$

Из вида уравнения (4.5) следует, что точки $x=\pm1$ являются особыми точками этого уравнения (см. § 1). Поэтому для выделения единственного решения уравнения (4.5) достаточно потребовать, чтобы оно было ограничено в точках ±1. В результате получаем, что присоединенные функции Лежандра при каждом значении параметра m являются собственными функциями, соответствующими собственным значениям $\lambda_n=n(n+1)$ следующей краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке $[-1, 1]$:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(m)}\right]+\left(\lambda_n-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P_n^{(m)}=0,\quad -1<x<1, \tag{4.6}$$

$$|P_n^{(m)}(\pm1)|<\infty,$$

где $\lambda_n=n(n+1)$.

Ниже будет доказано, что присоединенные функции Лежандра исчерпывают все собственные функции краевой задачи (4.6). Заметим, что, как это следует из общей теории, второе линейно независимое решение уравнения (4.6) имеет особенность в особых точках ±1.

Так как присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}(x)$ являются собственными функциями краевой задачи (4.6) для самосопряженного оператора, то они образуют ортогональную систему на отрезке [—1, 1]:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x)\,dx = 0$$

при $n \neq k$ и одном и том же m.

Заметим, что для присоединенных функций Лежандра имеет место формула ортогональности по верхнему индексу с весом $(1-x^2)^{-1}$ *):

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n^{(m)}(x)\, P_n^{(l)}(x)}{(1-x^2)}\,dx = 0, \quad m \neq l,$$

причем

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n^{(m)^2}(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{(n+m)!}{m\,(n-m)!}.$$

3. Полнота и замкнутость системы присоединенных функций Лежандра

Докажем лемму, используемую в дальнейшем для доказательства полноты системы присоединенных функций Лежандра.

Лемма 4.2. *Для всякой непрерывной на отрезке* [—1, 1] *функции* $f(x)$ *можно построить такую непрерывную на* [—1, 1] *функцию* $\bar{\varphi}(x)$, *что функция* $\varphi(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\bar{\varphi}$ *приближает в среднем функцию* $f(x)$ *на отрезке* [—1, 1].

Доказательство. В качестве функции $\varphi(x)$ можно взять, например, функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}, & x \in [-1,\ -1+\delta], \\ f(x), & x \in [-1+\delta,\ 1-\delta], \\ A_2(1-x^2)^{\frac{m}{2}}, & x \in [1-\delta,\ 1], \end{cases} \tag{4.7}$$

где $\delta > 0$, а постоянные A_1 и A_2 выбираются из условия непрерывности функции $\varphi(x)$ в точках $x=-1+\delta$ и $x=1-\delta$ соответственно. При таком построении функции $\varphi(x)$ функция $\bar{\varphi}(x) = (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\varphi(x)$ непрерывна на [—1, 1].

*) См.: Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.

Покажем, что функция (4.7) приближает в среднем функцию $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку $\varphi(x)$, $f(x)$ непрерывны на отрезке $[-1, 1]$, то $\varphi(x)$ и $f(x)$ ограничены на отрезке $[-1, 1]$ и, выбирая общую константу M, можем написать

$$|\varphi(x)| \leqslant M, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Поэтому, учитывая, что

$$|f(x)-\varphi(x)|^2 \leqslant |f(x)|^2+2\,|f(x)|\cdot|\varphi(x)|+|\varphi(x)|^2 \leqslant 4M^2,$$

получим

$$\int_{-1}^{+1} |f(x)-\varphi(x)|^2\,dx = \int_{-1}^{-1+\delta} |f(x)-\varphi(x)|^2\,dx + \int_{-1+\delta}^{1-\delta} |f(x)-\varphi(x)|^2\,dx + \int_{1-\delta}^{1} |f(x)-\varphi(x)|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 4M^2 \int_{-1}^{-1+\delta} dx + 4M^2 \int_{1-\delta}^{1} dx = 8M^2\delta. \tag{4.8}$$

Из формулы (4.8) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$, выбирая $\delta < \frac{\varepsilon}{8M^2}$, получим

$$\int_{-1}^{+1} |f(x)-\varphi(x)|^2\,dx < \varepsilon,$$

т. е. что функция $\varphi(x)$ приближает в среднем функцию $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. ■

Замечание. Если ввести норму пространства $L_2[-1, 1]$

$$\|f\|^2_{L_2} = \int_{-1}^{+1} f^2(x)\,dx, \tag{4.9}$$

то доказанная лемма утверждает, что функцию $f(x) \in C[-1, 1]$ можно приблизить с любой заданной точностью с помощью функции (4.7) в норме $L_2[-1, 1]$: для любого $\varepsilon > 0$ можно построить функцию $\varphi(x)$ по формуле (4.7) такую, что

$$\|f-\varphi\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Теорема 4.5. *Система присоединенных функций Лежандра полна в* $L_2[-1, 1]$.

Доказательство. Пусть задана некоторая функция $f(x) \in L_2[-1, 1]$. Известно*), что для любого $\varepsilon' > 0$ существует

*) См.: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

непрерывная на отрезке [—1, 1] функция $g(x)$ такая, что

$$\|f(x)-g(x)\|_{L_2}<\varepsilon'. \qquad (4.10)$$

Согласно лемме 4.2 для любого $\varepsilon''>0$ существует функция $\varphi(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\bar{\varphi}(x)$, где $\bar{\varphi}(x)$ непрерывна на отрезке [—1, 1], такая, что

$$\|g-\varphi\|^2_{L_2}=\int_{-1}^{+1}|g(x)-\varphi(x)|^2\,dx<\varepsilon''^2. \qquad (4.11)$$

Согласно теореме Вейерштрасса функцию $\bar{\varphi}(x)$ можно равномерно приблизить на отрезке [—1, 1] системой полиномов, т. е. для любого $\varepsilon'''>0$ найдется такая система коэффициентов $\{C_n\}$ и такое число $N>0$, что

$$\left|\bar{\varphi}(x)-\sum_{n=0}^{N}C_n\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right|<\varepsilon'''. \qquad (4.12)$$

Умножая левую часть неравенства (4.12) на $0\leqslant(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\leqslant 1$ (и тем самым усиливая его) и учитывая (4.1), получим

$$\left|\varphi(x)-\sum_{n=0}^{N}C_nP_n^{(m)}(x)\right|<\varepsilon''',$$

следовательно,

$$\left\|\varphi(x)-\sum_{n=0}^{N}C_nP_n^{(m)}(x)\right\|_{L_2}<\sqrt{2}\,\varepsilon'''. \qquad (4.13)$$

Наконец, из неравенства (4.10), (4.11) и (4.13), применяя неравенство треугольника для нормы *), получим

$$\left\|f-\sum_{n=0}^{N}C_nP_n^{(m)}\right\|_{L_2}\leqslant\|f-g\|_{L_2}+\|g-\varphi\|_{L_2}+$$
$$+\left\|\varphi-\sum_{n=0}^{N}C_nP_n^{(m)}\right\|_{L_2}<\varepsilon'+\varepsilon''+\sqrt{2}\,\varepsilon'''<\varepsilon$$

при соответствующем выборе ε', ε'' и ε'''.

Последнее неравенство доказывает полноту системы присоединенных функций Лежандра в пространстве $L_2[-1, 1]$.

Следствие 1. Поскольку присоединенные функции Лежандра как собственные функции задачи Штурма—Лиувилля (4.6) ортогональны с весом 1 при различных n:

$$\int_{-1}^{+1}P_{n_1}^{(m)}(x)P_{n_2}^{(m)}(x)\,dx=0,\quad n_1\neq n_2,$$

*) Там же.

то из доказанной теоремы вытекает замкнутость системы присоединенных функций Лежандра.

Из следствия 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. Система присоединенных функций Лежандра при каждом m исчерпывает все собственные функции задачи Штурма—Лиувилля (4.6).

В силу общих свойств собственных функций, для присоединенных функций Лежандра имеет место теорема разложимости Стеклова.

Теорема 4.6. *Всякая функция $f(x)$, дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1, 1]$ и обращающаяся в нуль на его концах $f(-1)=f(1)=0$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по присоединенным функциям Лежандра $(m\neq 0)$:*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x),$$

где коэффициенты Фурье f_n равны

$$f_n=\frac{1}{\|P_n^{(m)}\|^2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,P_n^{(m)}(x)\,dx,\quad n=0,\ 1,\ \ldots$$

Для вычисления коэффициентов разложения f_n необходимо иметь формулу для квадрата нормы $\|P_n^{(m)}\|^2$. Выведем ее.

Обозначим $N_{nm}=\|P_n^{(m)}\|^2$. Тогда

$$N_{nm}=\int_{-1}^{1}\{P_n^{(m)}(x)\}^2\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n\,\frac{d^m}{dx^m}P_n dx=$$

$$=(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)\Big|_{-1}^{1}-$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)\,\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right]dx. \tag{4.14}$$

Подстановки обращаются в нуль, а для вычисления интеграла в правой части последней формулы воспользуемся формулой (4.3), переписав ее в виде

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}P_n}{dx^{m+2}}-2x(m+1)\frac{d^{m+1}P_n}{dx^{m+1}}+$$

$$+[n(n+1)-m(m+1)]\frac{d^mP_n}{dx^m}=0. \tag{4.15}$$

Умножим (4.15) на $(1-x^2)^m$:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{m+1}\frac{d^{m+1}P_n}{dx^{m+1}}\right]+$$

$$+[n(n+1)-m(m+1)](1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} = 0$$

и, поменяв в последнем равенстве индекс m на $m-1$, подставим результат в интеграл в правой части (4.14):

$$N_{nm} = \int_{-1}^{1} [n(n+1)-m(m-1)](1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}} \frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}\, dx =$$

$$= [n(n+1)-m(m-1)]\, N_{nm-1}\,.$$

Так как

$$n(n+1)-m(m-1) = (n+m)(n-m+1),$$

то

$$N_{nm} = (n+m)(n-m+1)\, N_{nm-1} =$$

$$= (n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)\, N_{nm-2} =$$

$$= (n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)\ldots(n+1)\, nN_{n0},$$

а поскольку

$$(n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)\ldots(n+1)\, n =$$

$$= [(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)]\,[(n-m+1)(n-m+2)\ldots n] =$$

$$= \frac{(n+m)!}{n!}\,\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

то

$$N_{nm} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} N_{n0}.$$

Учитывая, наконец, что

$$N_{n0} = \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1},$$

окончательно получим

$$\|P_n^{(m)}\|^2 = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

§ 5. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Перейдем теперь к изучению специальных функций от нескольких переменных. Начнем со сферических функций. Рассмотрим следующую задачу Штурма—Лиувилля на единичной сфере:

$$\Delta_{\vartheta\varphi} Y + \lambda Y = 0, \quad 0 < \vartheta < \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \tag{5.1}$$

$$Y(\vartheta, \varphi) = Y(\vartheta, \varphi + 2\pi), \tag{5.2}$$

$$|Y(0, \varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi, \varphi)| < \infty, \tag{5.3}$$

где $\Delta_{\theta\varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат, имеющая вид

$$\Delta_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Определение. Ограниченные на единичной сфере решения уравнения (5.1), удовлетворяющие условию периодичности по φ и обладающие непрерывными производными до второго порядка, называются сферическими функциями.

Решение задачи (5.1)—(5.3) будем искать методом разделения переменных

$$Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi). \tag{5.4}$$

Подставляя (5.4) в уравнение (5.1), получим для $\Phi(\varphi)$ задачу

$$\begin{gathered}\Phi'' + \nu\Phi = 0,\\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),\end{gathered} \tag{5.5}$$

которая имеет нетривиальное решение при $\nu = m^2$ вида

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \ldots$$

Для функции $\Theta(\vartheta)$ получаем задачу

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta = 0, \quad 0 < \vartheta < \pi,$$

$$|\Theta(0)| < \infty, \quad |\Theta(\pi)| < \infty. \tag{5.6}$$

Если сделать замену $x = \cos\vartheta$ и $y(x) = y(\cos\vartheta) = \Theta(\vartheta)$, то задача (5.6) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right)y = 0, \quad -1 < x < 1.$$

$$|y(\pm 1)| < \infty. \tag{5.7}$$

Сравнивая (5.7) с (4.6), мы видим, что задача (5.7) является задачей Штурма—Лиувилля для присоединенных функций Лежандра. Поэтому собственные значения имеют вид

$$\lambda_n = n(n+1),$$

а собственные функции

$$\Theta_{nm}(\vartheta) = y_{nm}(\cos\vartheta) = P_n^{(m)}(\cos\vartheta),$$

причем $m \leqslant n$.

Выпишем систему сферических функций n-го порядка:

$$Y_n^{(m)}(\vartheta, \varphi) = P_n^{(|m|)}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi} \quad (-n \leqslant m \leqslant n). \tag{5.8}$$

Собственные функции задачи (5.5) можно записать в тригонометрическом виде:

$$\Phi_m(\varphi)=\begin{cases}\sin m\varphi,\\ \cos m\varphi,\end{cases} \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,n.$$

В этом случае систему сферических функций, условившись, что положительный верхний индекс m функции $Y_n^{(m)}(\vartheta,\ \varphi)$ соответствует умножению на $\sin m\varphi$, а отрицательный — на $\cos m\varphi$, можно записать в виде

$$\begin{gathered} Y_n^{(m)}(\vartheta,\ \varphi)=P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\sin m\varphi,\\ Y_n^{(-m)}(\vartheta,\ \varphi)=P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\cos m\varphi\ \ (m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,n). \end{gathered} \tag{5.9}$$

Учитывая полноту системы тригонометрических функций и системы присоединенных функций Лежандра, можно утверждать справедливость следующей теоремы.

Теорема 4.7. *Система сферических функций полна на единичной сфере* $\Sigma:\{0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$.

Поскольку в силу общих свойств собственных функций сферические функции ортогональны на единичной сфере (для функций вида (5.9)):

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n_1}^{(m_1)}(\vartheta,\ \varphi)\,Y_{n_2}^{(m_2)}(\vartheta,\ \varphi)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi=0 \ \text{ при } n_1\neq n_2,\ m_1\neq m_2,$$

то из теоремы 4.7 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Система сферических функций замкнута.

Следствие 2. Система сферических функций исчерпывает все собственные функции задачи Штурма—Лиувилля (5.1)—(5.3). Каждому собственному значению $\lambda_n=n(n+1)$ соответствует $2n+1$ линейно независимых собственных функций, т. е. каждое собственное значение является $(2n+1)$-кратно вырожденным.

Для сферических функций справедлива теорема разложимости Стеклова.

Теорема 4.8. *Всякая функция $f(\vartheta,\ \varphi)$, дважды непрерывно дифференцируемая на единичной сфере, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям:*

$$f(\vartheta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} f_{nm}Y_n^{(m)}(\vartheta,\ \varphi),$$

где коэффициенты f_{nm} имеют вид (для функций вида (5.9))

$$f_{nm}=\frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta,\ \varphi)\,Y_n^{(m)}(\vartheta,\ \varphi)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Если сферические функции имеют вид (5.8), то квадрат нормы для них равен

$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n^{(m)}(\vartheta, \varphi)\, Y_n^{(m)*}(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n^{(|m|)^2}(\cos\vartheta)\, |e^{im\varphi}|^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad n = 0, 1, \ldots, m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n. \quad (5.10)$$

Для сферических функций вида (5.9)

$$\|Y_n^{(\pm m)}\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n^{(m)^2}(\cos\vartheta) \left\{ \begin{matrix} \sin^2 m\varphi \\ \cos^2 m\varphi \end{matrix} \right\} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi\varepsilon_m \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad n = 0, 1, \ldots, m = 0, 1, \ldots, n, \quad (5.11)$$

где

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ \dfrac{1}{2}, & m \neq 0. \end{cases}$$

§ 6. ШАРОВЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим уравнение Лапласа в шаре радиуса a:

$$\Delta u = 0. \quad (6.1)$$

Будем искать решение уравнения (6.1) методом разделения переменных, отделяя прежде всего радиальную зависимость:

$$u(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\, Y(\vartheta, \varphi). \quad (6.2)$$

Подставляя (6.2) в (6.1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dR}{dr}\right)}{R(r)} \equiv -\frac{\Delta_{\vartheta\varphi} Y}{Y(\vartheta, \varphi)}. \quad (6.3)$$

Учитывая, что из рассмотренной в § 5 задачи Штурма—Лиувилля для сферических функций вытекает

$$\frac{\Delta_{\vartheta\varphi} Y}{Y(\vartheta, \varphi)} = -n(n+1), \quad (6.4)$$

получим из (6.3) и (6.4) уравнение для радиальной части

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1) R = 0. \quad (6.5)$$

Последнее уравнение является уравнением Эйлера, решение которого ищется в виде

$$R(r) = r^{\sigma}. \tag{6.6}$$

Подставляя (6.6) в (6.5) и сокращая на r^{σ}, получим характеристическое уравнение для определения параметра σ:

$$\sigma(\sigma+1) - n(n+1) = 0.$$

Его решения имеют вид $\sigma = n$ и $\sigma = -(n+1)$. Таким образом, получим два семейства частных решений для уравнения Лапласа

$$u_{nm}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{cases} r^n Y_n^{(m)}(\vartheta, \varphi), \\ r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\vartheta, \varphi). \end{cases} \tag{6.7}$$

Определение. Функции $u_{nm}(r, \vartheta, \varphi)$, определяемые формулой (6.7) и являющиеся частными решениями уравнения Лапласа в сферической системе координат, называются шаровыми функциями.

Функции $r^n Y_n^{(m)}(\vartheta, \varphi)$, ограниченные в начале координат и растущие на бесконечности, используются для решения внутренней задачи, функции $r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\vartheta, \varphi)$, неограниченные в окрестности начала координат и стремящиеся к нулю на бесконечности, — для решения внешней.

§ 7. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

В § 8 гл. III построены решения задачи Штурма—Лиувилля для отрезка, прямоугольника и прямоугольного параллелепипеда. Собственные функции этих областей выражаются через элементарные функции. В этом параграфе рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля для круга, прямого кругового цилиндра и шара, собственные функции которых выражаются через специальные функции, изученные в этой главе.

1. Собственные функции круга

Начнем с задачи Штурма—Лиувилля для круга K_a:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in K_a, \tag{7.1}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \Big|_C = 0, \ |\alpha| + |\beta| \neq 0, \ u \not\equiv 0. \tag{7.2}$$

Введем полярную систему координат (r, φ) с началом в центре круга K_a. Напомним, что оператор Лапласа в полярной системе координат равен

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Собственную функцию будем искать в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \neq 0. \tag{7.3}$$

Уравнение (7.1) запишем в полярной системе координат, подставим в него (7.3) и разделим переменные. Получим

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right) + \lambda r^2 R}{R(r)} \equiv -\frac{\Phi''}{\Phi(\varphi)} = \nu. \tag{7.4}$$

Поскольку собственная функция должна быть периодической по φ с периодом 2π, то для $\Phi(\varphi)$ получаем задачу Штурма—Лиувилля

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$\Phi(\varphi) \equiv \Phi(\varphi + 2\pi),$$

решение которой имеет вид (см. § 8 гл. III)

$$\Phi(\varphi) = \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad \nu = \nu_n = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{7.5}$$

При каждом $\nu = n^2$ получаем задачу для $R(r)$:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + (\lambda r^2 - n^2) R = 0, \quad 0 < r < a. \tag{7.6}$$

Функция R должна удовлетворять граничному условию

$$\alpha\frac{dR}{dr} + \beta R\Big|_{r=a} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0,$$

вытекающему из (7.2), и естественному условию ограниченности при $r=0$

$$|R(0)| < \infty,$$

поскольку $r=0$ является особой точкой уравнения (7.6). Следовательно, для определения $R(r)$ получается задача Штурма—Лиувилля

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2) R = 0, \quad 0 < r < a, \tag{7.7}$$

$$\alpha\frac{dR}{dr} + \beta R\Big|_{r=a} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \tag{7.8}$$

$$|R(0)| < \infty, \quad R(r) \neq 0. \tag{7.9}$$

Уравнение (7.7) заменой $x = r\sqrt{\lambda}$ приводится к уравнению Бесселя n-го порядка:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0.$$

Поэтому общее решение уравнения (7.7) можно записать в виде

$$R(r)=R_n(r)=C_1J_n(\sqrt{\lambda}\,r)+C_2N_n(\sqrt{\lambda}\,r).$$

Учитывая неограниченность функции $N_n(\sqrt{\lambda}r)$ при $r\to 0$ и условие (7.9), находим $C_2=0$. Будем считать $C_1=1$, поскольку собственная функция определяется с точностью до числового множителя, который в свою очередь определяется из условия нормировки. Поэтому собственная функция задачи (7.7)—(7.9) имеет вид

$$R_n(r)=J_n(\sqrt{\lambda}\,r). \tag{7.10}$$

Подставляя (7.10) в граничное условие (7.8), получим дисперсионное уравнение для определения собственных значений λ:

$$\alpha\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}a)+\beta J_n(\sqrt{\lambda}\,a)=0. \tag{7.11}$$

где штрих обозначает производную функции Бесселя по полному аргументу. Обозначим $\mu=\sqrt{\lambda}a$. Тогда собственные функции и собственные значения задачи (7.7)—(7.9) можно записать в виде

$$R_n(r)=J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r\right),\quad \lambda=\lambda_k^{(n)}=\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2, \tag{7.12}$$

где $\mu_k^{(n)}$—k-й корень уравнения

$$\alpha\mu J_n'(\mu)+\beta aJ_n(\mu)=0 \tag{7.13}$$

при фиксированном $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Таким образом, собственные функции круга имеют вид

$$u_{kn}(r,\ \varphi)=J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,r\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ k=1,\ 2,\ldots, \tag{7.14}$$

а собственные значения равны $\lambda_k^{(n)}=\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2$. Найдем норму собственной функции (7.14):

$$\|u_{kn}\|^2=\int_0^a\int_0^{2\pi}u_{kn}^2(r,\ \varphi)\,rdrd\varphi=\|J_n\|^2\cdot\|\Phi_n\|^2. \tag{7.15}$$

Поскольку норма Φ_n ($\Phi_n=\cos n\varphi$ или $\Phi_n=\sin n\varphi$) известна, остается найти $\|J_n\|$.

Чтобы найти $\|J_n\|$, вычислим интеграл

$$I=\int Z_\nu^2(x)\,xdx,$$

где $Z_\nu(x)$ — произвольная цилиндрическая функция. Имеем

$$I=\int Z_\nu^2(x)\,xdx=\int Z_\nu^2(x)\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}x^2Z_\nu^2(x)-\int x^2Z_\nu(x)\,Z_\nu'(x)\,dx.$$

Используя уравнение Бесселя

$$x^2Z''_\nu + xZ'_\nu + (x^2 - \nu^2) Z_\nu = 0,$$

находим

$$x^2Z_\nu = -x^2Z''_\nu - xZ'_\nu + \nu^2Z_\nu = -x\frac{d}{dx}(xZ'_\nu) + \nu^2Z_\nu.$$

Поэтому

$$I = \frac{x^2}{2}Z_\nu^2(x) + \int xZ'_\nu \frac{d}{dx}(xZ'_\nu)\,dx - \nu^2\int Z_\nu Z'_\nu dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}Z_\nu^2 + \frac{x^2}{2}Z_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{2}Z_\nu^2.$$

Итак,

$$\int Z_\nu^2(x)\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\left\{Z_\nu'^2(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)Z_\nu^2(x)\right\}. \tag{7.16}$$

Полученная формула позволяет вычислить квадрат нормы функции Бесселя для соответствующей краевой задачи:

$$\|J_n\|^2 = \int\limits_0^a J_n^2(\sqrt{\lambda}\,r)\,r\,dr = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{a\sqrt{\lambda}} J_n^2(x)\,x\,dx =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{J_n'^2(a\sqrt{\lambda}) + \left(1 - \frac{n^2}{a^2\lambda}\right)J_n^2(a\sqrt{\lambda})\right\}. \tag{7.17}$$

Рассмотрим теперь первую, вторую и третью краевые задачи отдельно.

Для задачи Дирихле ($\alpha=0$, $\beta=1$) собственные значения определяются из уравнения (согласно (7.13))

$$J_n(\mu) = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\|J_n\|_1^2 = \frac{a^2}{2}J_n'^2(\mu_k^{(n)}). \tag{7.18}$$

Для задачи Неймана ($\alpha=1$, $\beta=0$) собственные значения определяются из уравнения

$$\mu J'_n(\mu) = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\|J_n\|_2^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{[\mu_k^{(n)}]^2}\right)J_n^2(\mu_k^{(n)}). \tag{7.19}$$

Для третьей краевой задачи ($\alpha=1$, $\beta=h$) собственные значения определяются из уравнения

$$\mu J_n'(\mu)+ahJ_n(\mu)=0.$$

Следовательно,

$$\|J_n\|_3^2=\frac{a^2}{2}\left\{J_2'^2(\mu_k^{(n)})+\left(1-\frac{n^2}{[\mu_k^{(n)}]^2}\right)J_n^2(\mu_k^{(n)})\right\}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{a^2h^2-n^2}{\mu_k^{(n)^2}}\right)J_n^2(\mu_k^{(n)})= \tag{7.20'}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{\mu_k^{(n)^2}-n^2}{a^2h^2}\right)J_n'^2(\mu_k^{(n)}). \tag{7.20''}$$

Формула (7.20′) удобна для вычисления при малых h $(h\to 0)$, а формула (7.20″) — при больших h $(h\to\infty)$. Непосредственно видно, что при $h\to 0$ формула (7.20′) переходит в (7.19), а при $h\to\infty$ (7.20″) переходит в (7.18).

2. Собственные функции цилиндра

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля для прямого кругового цилиндра T. Введем цилиндрическую систему координат (r,φ,z) с началом в центре нижнего основания цилиндра и осью z, направленной вдоль оси цилиндра. Напомним, что оператор Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta u=\Delta_2 u+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

где Δ_2 — оператор Лапласа на плоскости. Задача Штурма—Лиувилля имеет вид

$$\Delta u+\lambda u=0,\ 0<r<a,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0<z<l, \tag{7.21}$$

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial r}+\beta u\Big|_{r=a}=0, \tag{7.22}$$

$$\alpha_1\frac{\partial u}{\partial z}-\beta_1 u\Big|_{z=0}=0,\ \alpha_2\frac{\partial u}{\partial z}+\beta_2 u\Big|_{z=l}=0. \tag{7.23}$$

Решение будем строить методом разделения переменных, отделяя переменную z:

$$u(r,\ \varphi,\ z)=v(r,\ \varphi)Z(z)\not\equiv 0. \tag{7.24}$$

Подставляя (7.24) в уравнение (7.21), записанное в цилиндрической системе координат, и разделяя переменные, получим

$$\frac{\Delta_2 v+\lambda v}{v(r,\varphi)}\equiv-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=\nu. \tag{7.25}$$

С учетом граничных условий (7.22)—(7.23) для определения v и z имеем следующие задачи Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} Z''+\nu Z=0,\ 0<z<l, \\ \alpha_1 Z'-\beta_1 Z\,|_{z=0}=0, \\ \alpha_2 Z'+\beta_2 Z\,|_{z=l}=0, \\ Z(z)\not\equiv 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v+\varkappa v=0,\ 0<r<a,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \\ \alpha \dfrac{\partial v}{\partial z}+\beta v\,\Big|_{r=a}=0, \\ \text{где } \varkappa=\lambda-\nu,\ v(r,\ \varphi)\not\equiv 0. \end{cases}$$

Первая задача есть задача определения собственных функций и собственных значений отрезка, вторая — задача определения собственных функций и собственных значений круга. Первая решена в § 8 гл. III, вторая — в предыдущем пункте.

Следовательно, собственные функции цилиндра имеют вид

$$u_{knm}(r,\ \varphi,\ z)=J_n\left(\sqrt{\varkappa_k^{(n)}}\,r\right)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{Bmatrix} Z_m(z),$$

а собственные значения вычисляются по формуле

$$\lambda_{knm}=\varkappa_k^{(n)}+\nu_m,$$

где $\varkappa_k^{(n)}$ — собственные значения круга при граничных условиях (7.22), $Z_m(z)$ и ν_m — собственные функции и собственные значения соответственно отрезка, при граничных условиях (7.23).

3. Собственные функции шара

Теперь построим собственные функции шара K_a. Введем сферическую систему координат (r, ϑ, φ), $0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ с началом в центре шара. Оператор Лапласа в сферической системе имеет вид

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\,\Delta_{\vartheta\varphi}u,$$

где $\Delta_{\vartheta\varphi}u$ — сферический оператор Лапласа, равный

$$\Delta_{\vartheta\varphi}u=\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля для шара:

$$\Delta u+\lambda u=0,\ M\in K_a, \tag{7.26}$$

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial r}+\beta u\,\Big|_{r=a}=0, \tag{7.27}$$

$$u\not\equiv 0.$$

Решение строим методом разделения переменных, отделяя радиальную переменную r:

$$u(r,\ \vartheta,\ \varphi)=R(r)\,v(\vartheta,\ \varphi)\not\equiv 0. \tag{7.28}$$

Подставляя (7.28) в уравнение (7.26), записанное в сферической системе координат, и разделяя переменные, получим

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\lambda r^2 R}{R(r)}\equiv-\frac{\Delta_{\theta\varphi}v}{v(\vartheta,\varphi)}=\mu. \tag{7.29}$$

Собственные функции должны быть ограничены в $\overline{K}_a$ и периодичны по φ с периодом 2π. Поэтому из (7.29) для функции v получаем задачу Штурма—Лиувилля

$$\Delta_{\theta\varphi}v+\mu v=0,\ 0<\vartheta<\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

$$v(\vartheta,\ \varphi)\equiv v(\vartheta,\ \varphi+2\pi),$$

$$|v(0,\ \varphi)|<\infty,\ |v(\pi,\ \varphi)|<\infty,$$

$$v(\vartheta,\ \varphi)\not\equiv 0,$$

собственными функциями которой являются сферические функции

$$v=v_{nm}(\vartheta,\ \varphi)=Y_n^{(m)}(\vartheta,\ \varphi),$$

а собственные значения равны

$$\mu=\mu_n=n(n+1),\ n=0,\ 1,\ldots,m=0,\pm 1,\ldots,\pm n.$$

Для каждого $\mu=n(n+1)$ из (7.29) получаем уравнение для $R(r)$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R=0, \tag{7.30}$$

решение которого должно удовлетворять согласно (7.27) граничному условию при $r=a$:

$$\alpha\frac{dR}{dr}+\beta R\Big|_{r=a}=0$$

и естественному условию ограниченности при $r=0$:

$$|R(0)|<\infty.$$

С помощью замены

$$R(r)=\frac{y(r)}{\sqrt{r}}$$

задача для R приводится к следующей задаче Штурма—Лиувилля:

$$r^2y''+ry'+\left[\lambda r^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0, \tag{7.31}$$

$$\alpha y'+\left(\beta-\frac{\alpha}{2a}\right)y\Big|_{r=a}=0, \tag{7.32}$$

$$|y(0)|=0. \tag{7.33}$$

Общее решение уравнения (7.31) имеет вид (ср. п. 1)

$$y(r)=C_1J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\,r)+C_2N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\,r).$$

Учитывая поведение функций Неймана в нуле и условие ограниченности (7.33), находим

$$C_2=0.$$

Будем считать $C_1=1$. Для определения λ из (7.32) получаем дисперсионное уравнение

$$\alpha\sqrt{\lambda}\,J'_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\,a)+\left(\beta-\frac{\alpha}{2a}\right)J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\,a)=0.$$

Пусть $\mu=a\sqrt{\lambda}$. Тогда функцию $R(r)$ можно записать в виде

$$R(r)=R_{nk}(r)=\frac{J_{n+1/2}\left(\dfrac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}r\right)}{\sqrt{r}},\quad n=0,\ 1,\ \ldots,k=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\mu_k^{(n+1/2)}$ — k-й корень уравнения

$$\alpha\mu J'_{n+1/2}(\mu)+\left(\beta a-\frac{\alpha}{2}\right)J_{n+1/2}(\mu)=0 \qquad (7.34)$$

при фиксированном $n=0,\ 1,\ \ldots$.

Таким образом, собственная функция шара имеет вид

$$u_{knm}(r,\ \vartheta,\ \varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}r\right)Y_n^{(m)}(\vartheta,\ \varphi),$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,n=0,\ 1,\ \ldots,m=0,\ \pm1,\ \ldots,\pm n, \qquad (7.35)$$

а собственные значения равны

$$\lambda_{kn}=\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}\right)^2,$$

где $\mu_k^{(n+1/2)}$ — корни уравнения (7.34).

Видно, что каждому собственному значению λ_{kn} соответствует $2n+1$ линейно независимая собственная функция ($\operatorname{rang}\lambda_{kn}=2n+1$).

Найдем норму собственных функций:

$$\|u_{knm}\|^2=\int\limits_{K_a}u_{knm}^2\,dv=\int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}u_{knm}^2\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi=$$

$$=\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\right\|^2\cdot\|Y_n^{(m)}\|^2.$$

Значение $\|Y_n^{(m)}\|^2$ дается формулами (5.10) или (5.11). Вычислим $\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\right\|^2$:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \right\|^2 = \int_0^a J_{n+1/2}^2 (\sqrt{\lambda} r) r dr =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ J_{n+1/2}'^2 (a \sqrt{\lambda}) + \left(1 - \frac{(n+1/2)^2}{a^2 \lambda}\right) J_{n+1/2}^2 (a \sqrt{\lambda}) \right\} \quad (7.36)$$

(использована формула (7.17)).

Рассмотрим, как и для круга, отдельно первую, вторую и третью краевые задачи.

Для задачи Дирихле ($\alpha=0$, $\beta=1$) собственные значения определяются уравнением

$$J_{n+1/2}(\mu) = 0, \ \lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a} \right)^2.$$

Поэтому

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \right\|_1^2 = \frac{a^2}{2} J_{n+1/2}'^2 (\mu_k^{(n+1/2)}). \quad (7.37)$$

Для задачи Неймана ($\alpha=1$, $\beta=0$) собственные значения определяются уравнением

$$\mu J_{n+1/2}'(\mu) - \frac{1}{2} J_{n+1/2}(\mu) = 0, \ \lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \right\|_2^2 = \frac{a^2}{2} \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{[\mu_k^{(n+1/2)}]^2} \right\} J_{n+1/2}^2 (\mu_k^{(n+1/2)}). \quad (7.38)$$

Для третьей краевой задачи ($\alpha=1$, $\beta=h$) собственные значения λ определяются уравнением

$$\mu J_{n+1/2}'(\mu) + \left(ah - \frac{1}{2} \right) J_{n+1/2}(\mu) = 0, \ \lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a} \right)^2.$$

Выражение для квадрата нормы, так же как и для круга, для третьей краевой задачи можно записать по-разному:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \right\|^2 = \frac{a^2}{2} \left\{ 1 - \frac{n(n+1) + ah(1-ah)}{[\mu_k^{(n+1/2)}]^2} \right\} J_{n+1/2}^2 (\mu) \quad (7.39')$$

или

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \right\|^2 = \frac{a^2}{2} \left\{ 1 + 4 \frac{[\mu_k^{(n+1/2)}]^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{(1-2ah)^2} \right\} J_{n+1/2}'^2 (\mu). \quad (7.39'')$$

Формула (7.39′) удобна при малых, а формула (7.39″) — при больших h.

Глава V

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Как было установлено в гл. II, уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{N} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=-f$$

является в точке $M(x_1^0, \ldots, x_N^0)$ уравнением эллиптического типа, если в этой точке квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_1^0, \ldots, x_N^0)\xi_i\xi_j$$

знакоопределена. Простейшим примером уравнения эллиптического типа служит уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

С него и начнем изучение уравнений эллиптического типа.

В этой главе рассмотрены общие свойства решений уравнения Лапласа, постановка внутренних и внешних задач для уравнения Лапласа, вопросы существования, единственности и устойчивости решения краевых задач и основы теории потенциала.

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Определение. Функция $u(M)$, непрерывная в области D вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа, называется гармонической в области D.

Рассмотрим основные свойства гармонических функций. Будем рассматривать трехмерный случай.

1. Формулы Грина

В гл. III выведены первая и вторая формулы Грина для общего оператора $Lu=\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u)-qu$. Напомним их для того случая, когда $Lu\equiv\Delta u$.

Пусть в области D, ограниченной замкнутой гладкой поверхностью S, заданы функции $u(M)$ и $v(M)$, непрерывные вместе с первыми производными в замкнутой области $\bar{D}$ и имеющие непрерывные вторые производные в D. Тогда в области D справедливы первая и вторая формулы Грина (см. (2.5) и (2.6) гл. III):

$$\int\limits_D v\Delta u dV = \oint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int\limits_D \nabla v \nabla u dV, \tag{1.1}$$

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)dV = \oint\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к поверхности S, внешняя по отношению к области D.

Для вывода третьей формулы Грина нам потребуется специальное решение уравнения Лапласа, которое называется фундаментальным решением.

Пусть M_0 — фиксированная точка области D. Найдем решение уравнения Лапласа, зависящее только от расстояния от точки M_0. Рассмотрим отдельно трехмерный и двумерный случай.

В трехмерном случае введем сферическую систему координат (r, ϑ, φ) с центром в точке M_0. Тогда задача сводится к отысканию радиально-симметричного решения $u(r)$ уравнения Лапласа, которое в этом случае принимает вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

$r = R_{MM_0}$ — расстояние от точки M до M_0.

Решение $v(M, M_0) = \dfrac{1}{R_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в трехмерном случае. Заметим, что фундаментальное решение удовлетворяет уравнению Лапласа (т. е. является гармонической функцией) всюду, кроме одной точки M_0, в которой оно неограничено (имеет особенность).

В двумерном случае введем полярную систему координат (r, φ) с центром в точке M_0 и будем искать решение уравнения Лапласа, зависящее только от r. Уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dz}\right) = 0.$$

Его решение имеет вид

$$u = C_1 \ln \frac{1}{r} + C_2.$$

Функция $\ln \dfrac{1}{R_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в двумерном случае.

Перейдем к выводу третьей формулы Грина. Как и ранее, будем рассматривать трехмерный случай. Пусть $v = \dfrac{1}{R_{MM_0}}$ — фундаментальное решение с особенностью в точке M_0. Будем считать, что M_0 — внутренняя точка области D. Окружим точку M_0 сферой Σ_ε радиуса ε с центром в точке M_0, целиком лежащей в области D. Область между S (границей D) и сферой Σ_ε обозначим $D \diagdown \overline{K}_\varepsilon^{M_0}$. В области $D \diagdown \overline{K}_\varepsilon^{M_0}$ применим вторую формулу Грина (1.2) к произвольной функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ и построенному фундаментальному решению $v(M, M_0)$:

$$\int\limits_{D \diagdown \overline{K}_\varepsilon^{M_0}} (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \oint\limits_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS + \\ + \oint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \tag{1.3}$$

Так как на поверхности Σ_ε

$$v|_{\Sigma_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Sigma_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

то, используя теорему о среднем, получим

$$\oint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS = \oint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left(u \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS = \\ = \left\{\frac{1}{\varepsilon^2} u(M^*) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}(M^*)\right\} \cdot 4\pi\varepsilon^2,$$

где $M^* \in \Sigma_\varepsilon$.

Поскольку в области $D \diagdown \overline{K}_\varepsilon^{M_0}$ $\Delta v = 0$, то, переходя к пределу в (1.3) при $\varepsilon \to 0$, получим

$$-\int\limits_D \frac{\Delta u}{R_{MM_0}} dV = \oint\limits_S \left(u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS + \\ + 4\pi u(M_0), \quad M_0 \in D.$$

Отсюда

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}}\right) dS - \\ - \frac{1}{4\pi} \int\limits_D \frac{\Delta u}{R_{MM_0}} dV, \quad M_0 \in D, \tag{1.4}$$

(интеграл по области D понимается как несобственный интеграл второго рода). Формула (1.4) называется третьей формулой Грина.

Относительно третьей формулы Грина сделаем следующие замечания. Формула (1.4) выведена в предположении, что точка M_0 является внутренней точкой области D. Если точка M_0 расположена вне области D, то функция $v=\frac{1}{R_{MM_0}}$ является гармонической функцией всюду в области D, и поэтому по второй формуле Грина получаем

$$0=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dS-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_D\frac{\Delta u}{R_{MM_0}}dV,\quad M_0\notin D. \tag{1.5}$$

Рассмотрим теперь случай, когда M_0 принадлежит поверхности S. Будем считать, что поверхность S имеет в точке M_0 касательную плоскость с непрерывными угловыми коэффициентами. Дальнейшие рассуждения совпадают по схеме с только что проведенными. Применим вторую формулу Грина к функциям $v(M, M_0)$ и $u(M)$ в области $D\setminus\overline{K}_\varepsilon^{M_0}$. При этом поверхностный интеграл берется по границе $S'+\Sigma_\varepsilon'$, где Σ_ε' — часть сферы Σ_ε, находящаяся внутри области D, а $S'=S\setminus S_\varepsilon$, где S_ε — часть поверхности S, расположенная внутри шара $\overline{K}_\varepsilon^{M_0}$. При достаточно малом ε поверхность Σ_ε' близка к полусфере с центром в точке M_0 и радиусом ε. Поэтому в окончательной формуле, полученной при предельном переходе $\varepsilon\to0$ и аналогичной (1.4), множитель 4π заменится на 2π:

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_S\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)dS-\frac{1}{2\pi}\int\limits_D\frac{\Delta u}{R}dV \tag{1.6}$$

(при этом следует иметь в виду, что поверхностные интегралы в формуле (1.6) являются несобственными; их исследование будет проведено позже (см. § 6)). Объединяя все три случая, третью формулу Грина запишем в виде

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\int\limits_D\frac{\Delta u}{R}dV=$$
$$=\begin{cases} u(M_0), & M_0\in D,\\ \dfrac{u(M_0)}{2}, & M_0\in S,\\ 0, & M_0\notin D+S. \end{cases} \tag{1.7}$$

Заметим, что третья формула Грина справедлива для произвольной достаточно гладкой функции. Она показывает, что в любой внутренней точке области функция u может быть выражена через свое значение и значение нормальной производной на границе и значение оператора Лапласа от этой функции во всей области D. Для гармонической функции ($\Delta u=0$) третья формула Грина принимает более простой вид. Например, при $M_0 \in D$

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dS. \qquad (1.8)$$

В двумерном случае третья формула Грина выводится аналогично. Она имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_C\left(\ln\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dl-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_D \Delta u\ln\frac{1}{R_{MM_0}}\,d\sigma=\begin{cases} u(M_0), & M_0\in D,\\ \frac{1}{2}u(M_0), & M_0\in C,\\ 0, & M_0\notin D+C.\end{cases}$$

Сделаем следующие замечания. Понятие фундаментального решения может быть введено для общего дифференциального оператора Lu. Фундаментальным решением оператора Lu называется регулярная обобщенная функция*), удовлетворяющая уравнению

$$Lu=-\delta(M,\ M_0), \qquad (1.9)$$

где $\delta(M, M_0)$ — дельта-функция Дирака.

Покажем, что функция $v=\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}$ удовлетворяет уравнению (1.9).

Пусть $\varphi(M)$ — основная функция, т. е. бесконечно дифференцируемая локальная функция. Носитель ее обозначим D_0. Функция v как регулярная обобщенная функция имеет обобщенные производные всех порядков. Следовательно, Δv есть обобщенная функция. Покажем, что

$$\Delta v=-\delta(M,\ M_0),\ M_0\in D.$$

Рассмотрим функционал $\int\varphi\Delta v\,dV$, заданный на пространстве основных функций. Согласно определению производных обобщенных функций

$$\int\limits_D \varphi\Delta\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\,dV\equiv\int\limits_D\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\Delta\varphi\,dV. \qquad (1.10)$$

*) Об обобщенных функциях см., например: Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части равенства (1.10), используя третью формулу Грина (1.7):

$$\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{\Delta\varphi}{R_{MM_0}}\,dV = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right) dS - \varphi(M_0).$$

Область D можно выбрать достаточно большой так, что носитель D_0 функции φ расположен строго внутри D. Тогда

$$\varphi|_S \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S \equiv 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{1}{R_{MM_0}}\Delta\varphi dV = -\varphi(M_0), \quad M_0 \in D.$$

Следовательно, из (1.10) получаем

$$\int_D \varphi(M)\,\Delta\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\,dV = -\varphi(M_0), \quad M_0 \in D.$$

Это соотношение и показывает, что

$$\Delta\left(\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\right) = -\delta(M, M_0).$$

Аналогичным образом можно показать, что в двумерном случае

$$\Delta\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = -\delta(M, M_0).$$

Таким образом, построенные нами решения $\frac{1}{R_{MM_0}}$ и $\ln\frac{1}{R_{MM_0}}$ только числовым множителем отличаются от фундаментального решения в трехмерном и двумерном случаях, определенного соотношением (1.9). Поэтому там, где это не вызывает затруднений, сохраним за ними название «фундаментальное решение уравнения Лапласа».

Заметим также, что фундаментальное решение согласно (1.9) определено неоднозначно. Оно определено с точностью до решения однородного уравнения $Lu=0$. Поэтому, строго говоря, фундаментальным решением уравнения Лапласа в трехмерном случае является любая функция v, равная

$$v(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + u(M),$$

где $u(M)$ — гармоническая функция.

Полезно отметить, что формально третью формулу Грина (1.4) можно получить следующим образом. Пусть $u(M)$ — регулярная обобщенная функция. Применим в области D к $u(M)$ и $v = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}}$ вторую формулу Грина (1.2):

$$\int\limits_D \left(\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\Delta u - u\Delta\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\right)dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)dS, \quad M_0 \in D. \tag{1.11}$$

Так как

$$\Delta\left(\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\right) = -\delta(M, M_0)$$

и

$$\int\limits_D u(M)\,\delta(M, M_0)\,dV = u(M_0), \quad M_0 \in D,$$

то из (1.11) получаем

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)dS - \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{\Delta u}{R}\,dV, \quad M_0 \in D.$$

Строгим обоснованием этого метода и являются рассуждения, проведенные в начале этого параграфа при выводе третьей формулы Грина.

2. Основные свойства гармонических функций

Используем формулы Грина для вывода основных свойств гармонических функций.

1. *Если u — гармоническая в области D функция, то*

$$\oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = 0, \tag{1.12}$$

где S — любая гладкая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области D.

Действительно, полагая $v \equiv 1$ и применяя первую формулу Грина к функции u и v в области, ограниченной поверхностью S, сразу получим (1.12). Формула (1.12) иногда называется формулой Гаусса для гармонических функций. Ее можно интерпретировать как отсутствие источников внутри S.

Если $\Delta u = -f(M)$, то

$$\oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = -\int\limits_D f(M)\,dV,$$

что можно интерпретировать как выражение для потока через границу области при наличии источников внутри области.

2. Теорема о среднем. Теорема 5.1. *Пусть $u(M)$ — гармоническая в области D функция. Тогда*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\oint\limits_{\Sigma_a} u(M)\,dS,$$

где Σ_a — сфера радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащая в области D.

Доказательство. Применим формулу (1.8) к шару $K_a^{M_0}$ с центром в точке M_0 и поверхностью Σ_a:

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma_a}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)dS.$$

Поскольку

$$\frac{1}{R_{MM_0}}\Bigg|_{M\in\Sigma_a}=\frac{1}{a},\quad \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R_{MM_0}}\Bigg|_{\Sigma_a}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\Bigg|_{r=a}=-\frac{1}{a^2},$$

то, принимая во внимание формулу (1.12), получим

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\oint\limits_{\Sigma_a}u(M)\,dS. \blacksquare$$

Эта теорема утверждает, что значение гармонической функции в точке M_0 равно среднему значению этой функции на любой сфере Σ_a с центром в M_0, если сфера Σ_a не выходит из области гармоничности функции u.

Заметим, что для гармонической функции, непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$, формула среднего значения справедлива и тогда, когда сфера касается границы области D.

Действительно, пусть сфера $\Sigma_{a_0}^{M_0}$ радиуса a_0 касается поверхности S. Формула среднего значения справедлива для любой сферы $\Sigma_a^{M_0}$ меньшего радиуса ($a<a_0$):

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\oint\limits_{\Sigma_a^{M_0}}u(P)\,dS.$$

Переходя в этой формуле к пределу при $a\to a_0$ и учитывая непрерывность u в замкнутой области $\bar{D}$, получим

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a_0^2}\oint\limits_{\Sigma_{a_0}^{M_0}}u(P)\,dS.$$

Для случая двух переменных имеет место аналогичная теорема о среднем значении:

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi a}\oint\limits_{C_a}u\,dl,$$

где C_a — окружность радиуса a с центром в M_0, лежащая в области гармоничности функции $u(M)$.

3. *Гармоническая в области D функция имеет внутри D производные всех порядков.*

Это утверждение непосредственно следует из третьей формулы Грина (1.8), так как при $M_0 \in D$ поверхностные интегралы являются собственными и их можно дифференцировать по координатам точки M_0 любое число раз.

Заметим, что из этой же формулы (1.8) следует, что гармоническая функция во всех внутренних точках области аналитична, т. е. разлагается в сходящийся степенной ряд в окрестности любой внутренней точки M_0. При этом радиус сходимости соответствующего ряда не меньше, чем расстояние точки M_0 до границы S области D.

4. Принцип максимума. Теорема 5.2. *Гармоническая в области D функция $u(M)$, непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$, достигает своих максимальных и минимальных значений на границе S области D.*

Доказательство. Так как функция $u(M)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то она достигает своего максимального значения в этой замкнутой области. Докажем, что это максимальное значение достигается функцией $u(M)$ на поверхности S. Предположим противное. Пусть функция $u(M)$ достигает своего максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области D:

$$u_0 = \max_{\bar{D}} u(M) = u(M_0) \geqslant u(M),$$

M — любая точка области $\bar{D}$. Окружим точку M_0 сферой $\Sigma_\rho^{M_0}$ радиуса ρ, целиком лежащей в области D, и применим теорему о среднем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \oint\limits_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(P)\,dS \leqslant \frac{1}{4\pi\rho^2} \oint\limits_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(M_0)\,dS =$$

$$= u(M_0)\frac{1}{4\pi\rho^2} \oint\limits_{\Sigma_\rho^{M_0}} dS = u(M_0).$$

Написанная цепочка соотношений верна только в случае, если

$$u(P)\big|_{\Sigma_\rho^{M_0}} \equiv u(M_0).$$

Действительно, так как крайние элементы цепочки равны, то

$$\oint\limits_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(P)\,dS = 4\pi\rho^2 u(M_0).$$

Если теперь предположить, что хотя бы в одной точке P_0 сферы $\Sigma_\rho^{M_0}$

$$u(P_0) < u(M_0),$$

то это неравенство, в силу непрерывности $u(M)$, будет иметь место и в некоторой окрестности точки P_0 на сфере $\Sigma_\rho^{M_0}$, откуда

$$\oint\limits_{\Sigma_\rho^{M_0}} u(P)\,dS < 4\pi\rho^2 u(M_0),$$

что приводит к противоречию. Следовательно, всюду на сфере $\Sigma_\rho^{M_0}$

$$u(P) \equiv u(M_0).$$

Поскольку ρ произвольно, то его можно выбрать так, чтобы сфера $\Sigma_\rho^{M_0}$ касалась поверхности S. Точку касания обозначим M^*. В точке M^* и достигается максимальное значение $u_0 = u(M_0)$.

Применяя проведенные рассуждения к гармонической функции $v \equiv -u$, докажем достижение на поверхности S минимального значения. ■

Замечание. Формулировку принципа максимума можно усилить. Покажем, что если непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$ гармоническая функция $u(M)$ достигает своего максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области D, то она равна постоянной. Из проведенных рассуждений следует, что функция $u(M)$ равна u_0 не только на сфере $\Sigma_\rho^{M_0}$, но и, в силу произвольности ρ, всюду внутри шара $K_\rho^{M_0}$, ограниченного этой сферой.

Возьмем произвольную точку M области D. Соединим точки M_0 и M кривой C, целиком лежащей в области D. Обозначим наименьшее расстояние точек C от поверхности S через d, а длину кривой C — через l. Пусть точка M_1 является последней точкой пересечения кривой C и сферы $\Sigma_d^{M_0}$. Поскольку $u(M_1) = u(M_0)$, то, повторяя проведенные рассуждения, получим, что всюду внутри шара $K_d^{M_1}$ радиуса d с центром в M_1 функция u постоянна и равна $u(M_0)$. Взяв на кривой C точку M_2, являющуюся последней точкой пересечения кривой C и сферы $\Sigma_d^{M_1}$, и продолжая данный процесс, в результате конечного числа шагов, которое не более l/d, получим, что внутри шара, которому принадлежит точка M, функция u постоянна и равна $u(M_0) = u_0$. В силу произвольности точки M и непрерывности функции u в замкнутой области $\bar{D}$ заключаем, что $u \equiv u(M_0) = u_0$ всюду в замкнутой области $\bar{D}$. Таким образом, из всех гармонических функций, непрерывных в $\bar{D}$, только постоянная может достигать своего максимального значения во внутренних точках области.

Аналогичное утверждение можно доказать и относительно минимального значения.

Таким образом, формулировку принципа максимума можно усилить и сформулировать его так: *гармоническая в области D функция, отличная от постоянной, непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$, достигает своих максимальных и минимальных значений только на границе S области D.*

Доказанное свойство гармонических функций чрезвычайно важно, и мы неоднократно будем его использовать.

Укажем одно следствие из принципа максимума: если две гармонические в D функции $u(M)$ и $v(M)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$ и

$$u|_S \leqslant v|_S,$$

то всюду внутри области $u(M) \leqslant v(M)$. Доказательство этого утверждения, носящего название принципа сравнения, очевидно.

§ 2. ВНУТРЕННИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Для выделения единственного решения уравнения Лапласа на границе области нужно задать дополнительные условия. В нашем курсе будут рассмотрены линейные задачи. В этом случае граничные условия чаще всего рассматриваются следующих трех видов:

1) $u|_S = f(p)|_S$ — первое краевое условие, или условие Дирихле;

2) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P)|_S$ — второе краевое условие, или условие Неймана;

3) $\frac{\partial u}{\partial n} + h(P)\,u|_S = f(P)|_S$ — третье краевое условие.

В дальнейшем, если это не оговорено особо, будем считать, что входящая в эти соотношения функция $f(P)$, заданная на поверхности S, является непрерывной на S функцией. Также будем рассматривать в области D неоднородное уравнение $\Delta u = -F(M)$ с непрерывной в области D правой частью $F(M)$.

Последовательное изучение краевых задач начнем со случая, когда область D, в которой определяется решение, конечна. Такие задачи называются внутренними краевыми задачами.

1. Внутренняя задача Дирихле

Определение. Классическим решением внутренней задачи Дирихле

$$\Delta u = -F \text{ в } D, \quad u|_S = f$$

называется функция $u(M)$, непрерывная в замкнутой области $\bar{D} = D \cup S$, удовлетворяющая уравнению в области D и непрерывно примыкающая к заданным граничным значениям $f(P)$.

Заметим, что требование непрерывности $u(M)$ в замкнутой области $\bar{D}$ и непрерывное примыкание к граничным значениям $f(P)$ существенны для единственности классического решения. Действительно, если это требование опустить, то классическим решением задачи

$$\Delta u=0 \text{ в } D, \ u|_S=f$$

является любая функция, равная постоянной в области D и заданной функции f на границе S. Этот пример показывает, что без условия непрерывности в замкнутой области классическое решение неединственно.

Теорема 5.3 (теорема единственности внутренней задачи Дирихле). *Задача Дирихле не может иметь более одного классического решения.*

Доказательство. Пусть существуют два классических решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ задачи Дирихле:

$$\Delta u=-F \text{ в } D, \quad u|_S=f.$$

Построим функцию $v(M)=u_1-u_2$. Функция $v(M)$ — гармоническая в D, непрерывная в $\bar{D}$ и удовлетворяет однородному граничному условию

$$v|_S=0.$$

В силу принципа максимума $v(M)\leqslant 0$ в D (ее максимальное значение достигается на границе S) и $v(M)\geqslant 0$ в D (ее минимальное значение достигается на границе S). Следовательно, $v(M)\equiv 0$ в D, т. е. $u_1(M)\equiv u_2(M)$ в $\bar{D}$. ■

Теорема 5.4 (теорема устойчивости). *Решение внутренней задачи Дирихле устойчиво по граничным условиям.*

Доказательство. Пусть $u_j(M)$, $j=1, 2$, есть решение задачи

$$\Delta u_j=0 \text{ в } D, \quad u_j|_S=f_j,$$

причем $|f_1(P)-f_2(P)|\leqslant\varepsilon$ всюду на S. Рассмотрим функцию

$$v(M)=u_1(M)-u_2(M).$$

Для нее всюду на S имеем неравенства

$$-\varepsilon\leqslant v\leqslant\varepsilon.$$

В силу принципа сравнения для гармонических функций это же неравенство справедливо всюду в D. Следовательно, всюду в области D

$$|u_1-u_2|\leqslant\varepsilon. \ ■$$

Теорема устойчивости используется для оценки точности приближенных и численных решений задачи Дирихле, поскольку достаточно оценить выполнение граничных условий.

Заметим, что для задачи Дирихле теоремы единственности и устойчивости являются прямым следствием принципа максимума.

Вопрос о существовании решения будет рассмотрен позже, после того, как будет изложена теория потенциала.

2. Внутренние вторая и третья краевые задачи

При рассмотрении второй и третьей краевых задач будем использовать следующее определение классического решения.

Определение. Классическим решением второй и третьей краевых задач называется функция $u(M)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутой области $\bar{D}=D\cup S$, имеющая непрерывные вторые производные в D, удовлетворяющая уравнению в области D и заданному граничному условию на поверхности S.

Теорема 5.5. *Пусть $h(P)\geqslant 0$ на S, причем $h\not\equiv 0$. Третья краевая задача*

$$\Delta u=-F \text{ в } D, \quad \frac{\partial u}{\partial n}+hu|_S=f,$$

где $\mathbf{n}$ — *внешняя по отношению к D нормаль к поверхности S, не может иметь более одного классического решения.*

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно показать, что однородная краевая задача

$$\Delta u=0 \text{ в } D, \quad \frac{\partial u}{\partial n}+hu|_S=0$$

имеет только нулевое решение.

Используем первую формулу Грина, считая, что $v\equiv u$. Получим

$$\int\limits_D u\,\Delta u\,dV=\oint\limits_S u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS-\int\limits_D (\operatorname{grad} u)^2\,dV.$$

Так как $\Delta u=0$ в D, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=-hu|_S$, то отсюда получаем

$$\oint\limits_S hu^2\,dS+\int\limits_D (\operatorname{grad} u)^2\,dV=0.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} u=0$ в D, $u|_S=0$ в тех точках поверхности S, где $h\neq 0$. Отсюда и находим $u(M)=\text{const}=0$. Следовательно, однородная задача имеет только нулевое решение.

Сделаем несколько замечаний. Требование непрерывности первых производных в замкнутой области, введенное в определение классического решения, является слишком жестким и использовано для упрощения доказательства единственности решения. Его можно ослабить.

Условие $h\geqslant 0$, $h\not\equiv 0$ существенно для единственности решения третьей краевой задачи. Если $h<0$ на S, то решение может быть неединственным. В этом легко убедиться на примере. Действительно, функция $u(r,\varphi)=r\cos\varphi$ является ненулевым решением уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круге $0\leqslant r<a$, удовлетворяющим однородному граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a} u|_{r=a} = 0 \quad \left(h = -\frac{1}{a}\right).$$

Следовательно, решение краевой задачи $\Delta u = 0$ в круге $0 \leqslant r < a$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a} u|_{r=a} = 0$$

неединственно, поскольку $u \equiv 0$ также является решением этой задачи.

Если рассматривать вторую краевую задачу, т. е. $h \equiv 0$, то получим $\operatorname{grad} u = 0$, откуда $u(M) = \text{const}$, причем эта постоянная не определяется. Это означает, что классическое решение второй внутренней краевой задачи (внутренней задачи Неймана) неединственно и определяется с точностью до произвольной постоянной. Для второй краевой задачи для уравнения Лапласа также получаем, что если она имеет решение, то согласно формуле Гаусса должно выполняться соотношение

$$\oint_S f(P)\, dS = 0, \tag{2.1}$$

где

$$f(P) = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S.$$

Если это условие не выполнено, то задача Неймана для уравнения Лапласа решения не имеет. Следовательно, условие (2.1) является необходимым условием разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Позже покажем, что это условие является также и достаточным условием разрешимости задачи Неймана.

Если определить классическое решение задачи Дирихле как функцию, непрерывную вместе со своими первыми производными в замкнутой области $\bar{D}$, имеющую непрерывные вторые производные внутри области D, удовлетворяющую уравнению в D и граничному условию на S, то доказательство единственности так определенного классического решения можно провести только что использованным методом, опирающимся на первую формулу Грина.

Если правая часть уравнения — функция $F(M)$ — разрывна в области D, то классического решения соответствующая краевая задача не имеет, поскольку понятие классического решения содержит требование непрерывности вторых производных в D. Если решение определить как функцию, удовлетворяющую уравнению в областях непрерывности $F(M)$ с условиями сопряжения на поверхности разрыва, то метод первой формулы Грина позволяет доказать единственность решения первой (в последней формулировке), второй и третьей краевых задач и в случае кусочно-непрерывной функции $F(M)$.

§ 3. ВНЕШНИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Перейдем к изучению краевых задач в неограниченной области. Такие краевые задачи называются внешними.

Введем обозначения: D — конечная область, ограниченная замкнутой поверхностью S, D_e — неограниченная область, границей которой является поверхность S; $D\cup S\cup D_e$ — все пространство (рассматривается трехмерный случай).

1. Функции, регулярные на бесконечности

Определение. Функция $u(M)$ трех переменных $\{M=(x, y, z)\}$ называется регулярной на бесконечности, если при достаточно большом $r\geqslant r_0$

$$|u|\leqslant \frac{A}{r},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\leqslant \frac{A}{r^2},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\leqslant \frac{A}{r^2},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\leqslant \frac{A}{r^2},$$

где A — постоянная.

Понятие регулярной на бесконечности функции двух переменных будет введено позже.

Покажем, что для функций, регулярных на бесконечности, в неограниченной области D_e справедливы формулы Грина.

Пусть в области D_e заданы функции u и v, непрерывные вместе с первыми производными в $D_e\cup S$, имеющие непрерывные вторые производные в D_e и регулярные на бесконечности.

Окружим поверхность S сферой Σ_R достаточно большого радиуса R. Область между S и Σ_R обозначим D_R. В области D_R справедлива первая формула Грина

$$\int\limits_{D_R} u\,\Delta v\,dV=\oint\limits_{S} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,dS+\oint\limits_{\Sigma_R} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,dS-\int\limits_{D_R}\nabla u\,\nabla v\,dV. \tag{3.1}$$

Оценим интеграл по Σ_R:

$$\left|\oint\limits_{\Sigma_R} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,dS\right|=\left|\oint\limits_{\Sigma_R} u\,(v_x\cos\alpha+v_y\cos\beta+v_z\cos\gamma)\,dS\right|\leqslant$$

$$\leqslant\oint\limits_{\Sigma_R}\frac{A}{r}\,\frac{3A}{\Sigma^2}\,dS=\frac{3A^2}{r^3}\cdot 4\pi r^2\,|_{r=R}=\frac{12\pi A^2}{R}\underset{R\to\infty}{\to}0.$$

Здесь $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — направляющие косинусы нормали к Σ_R, и при оценке использованы условия регулярности на бесконечности. Подынтегральная функция в интеграле по D_R в силу условий регулярности на бесконечности имеет следующую оценку при $r\to\infty$:

$$|\nabla u\cdot\nabla v|\leqslant\frac{3A^2}{r^4}.$$

Поэтому интеграл по D_R при $R \to \infty$ сходится*) к несобственному интегралу (первого рода) по D_e. Следовательно, переходя к пределу при $R \to \infty$ в формуле (3.1), получим

$$\int_{D_e} u \Delta v\, dV = \oint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{D_e} \nabla u \cdot \nabla v\, dV, \qquad (3.2)$$

где интеграл в левой части формулы (3.2) понимается как несобственный интеграл по D_e. Формула (3.2) есть первая формула Грина для неограниченной области D_e. Меняя местами функции u и v и вычитая полученное соотношение из (3.2), получим вторую формулу Грина для неограниченной области. Если учесть, что фундаментальное решение $1/R_{MM_0}$ уравнения Лапласа регулярно на бесконечности, то, повторяя рассуждения п. 1 §1, получим и третью формулу Грина для неограниченной области D_e. Еще раз отметим, что в формулах Грина нормаль $\mathbf{n}$ есть нормаль к поверхности S, внешняя по отношению к той области, в которой применяются формулы Грина. Поэтому при использовании формул Грина в неограниченной области D_e эта нормаль направлена внутрь ограниченной области D с поверхностью S.

2. Единственность решения внешних задач в трехмерном случае

Перейдем к изучению единственности решения внешних краевых задач для уравнения Лапласа в трехмерном случае.

Внешняя задача Дирихле ставится следующим образом.

Найти функцию u, непрерывную в замкнутой области $D_e \cup S$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в области D_e, непрерывно примыкающую к граничному условию

$$u|_S = f(P)|_S$$

и регулярную на бесконечности.

Заметим (без доказательства), что гармоническая в области D_e функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, является функцией, регулярной в бесконечности**). Поэтому при изучении краевых задач для уравнения Лапласа требование регулярности функции на бесконечности будем заменять условием равномерного стремления к нулю на бесконечности:

$$u(M) \rightrightarrows 0, \quad M \to \infty.$$

*) Определение несобственных интегралов и признаки их сходимости см.: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

**) См.: Тихонов А. М., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

Итак, рассмотрим внешнюю задачу Дирихле

$$\Delta u=0 \text{ в } D_e,$$

$$u|_S=f,$$

$$u \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности.}$$

Теорема 5.6. *Внешняя задача Дирихле не может иметь более одного классического решения, регулярного на бесконечности.*

Доказательство. Пусть существуют два решения u_1 и u_2. Разность $v=u_1-u_2$ есть решение однородной задачи

$$\Delta v=0 \text{ в } D_e,$$

$$v|_S=0,$$

равномерно стремящееся к нулю на бесконечности. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует R_0 такое, что

$$|v|\leqslant\varepsilon \text{ при } r\geqslant R_0.$$

Окружим поверхность S сферой Σ_R достаточно большого радиуса R $(R>R_0)$. Применяя принцип максимума для уравнения Лапласа в области D_R между S и Σ_R, получим

$$|v(M)|\leqslant\varepsilon \text{ всюду в } D_R.$$

В силу произвольности $\varepsilon(\varepsilon\to 0)$ и $R(R\to\infty)$ отсюда получаем $v(M)\equiv 0$ всюду в D_e. Следовательно, решение внешней задачи Дирихле единственно. ■

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно показать, что для гармонических функций, равномерно стремящихся к нулю на бесконечности, в неограниченной области D_e справедлив принцип максимума. Отсюда, как и для внутренней задачи, сразу вытекает устойчивость решения внешней задачи Дирихле по граничным условиям.

Исследование единственности решения третьей внешней краевой задачи проводится точно так же, как и для внутренней задачи, с использованием формулы Грина.

Аналогичным образом исследуется единственность решения внешней задачи Неймана:

$$\Delta u=0 \text{ в } D_e,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=f,$$

$$u \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности.}$$

Эта задача, в отличие от внутренней, имеет единственное решение. Действительно, применяя к решению однородной задачи

$$\Delta v=0 \text{ в } D_e,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = 0,$$

$$v \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности}$$

первую формулу Грина, точно так же, как для внутренней задачи, найдем $v \equiv \text{const}$ всюду в D_e. Условие на бесконечности дает $\text{const}=0$. Следовательно, $v \equiv 0$ в D_e, т. е. решение внешней задачи Неймана единственно.

Таким образом, из шести основных задач для уравнения Лапласа (трех внутренних и трех внешних) в трехмерном случае неединственное решение, определяемое с точностью до постоянной, имеет только одна задача — внутренняя задача Неймана. Решение остальных краевых задач единственно.

3. Единственность решения внешних задач для уравнения Лапласа на плоскости

Для уравнения Лапласа на плоскости требование равномерного стремления решения к нулю на бесконечности является слишком жестким. Такого решения вообще может не существовать. Это видно на примере простейшей задачи:

$$\Delta u = 0 \text{ вне окружности } r = a,$$

$$u|_{r=a} = 1.$$

Решая эту задачу методом разделения переменных, находим два решения:

$$u_1 \equiv 1, \; u_2 = \frac{\ln r}{\ln a},$$

из которых первое ограничено, а второе неограниченно возрастает при $r \to \infty$. Решений, стремящихся к нулю при $r \to \infty$, эта задача не имеет. Единственное решение этой задачи выделяется требованием ограниченности решения на бесконечности.

Поэтому для функций двух переменных условие регулярности на бесконечности вводится иначе.

Определение. Функция двух переменных $u(x, y)$ называется регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности.

Покажем, что это условие выделяет единственное решение внешней задачи Дирихле на плоскости.

Рассмотрим следующую внешнюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости.

Найти функцию u, непрерывную в $D_e \cup \Gamma$, удовлетворяющую в D_e уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, непрерывно примыкающую к граничному условию

$$u|_\Gamma = f$$

и ограниченную на бесконечности. Здесь Г — гладкий замкнутый контур на плоскости (x, y), являющийся границей области D_e.

Теорема 5.7. *Внешняя задача Дирихле на плоскости не может иметь более одного классического решения, регулярного на бесконечности.*

Доказательство. Рассмотрим однородную задачу

$$\Delta u = 0 \text{ в } D_e,$$

$$u|_\Gamma = 0,$$

$$|u| \leqslant N, \quad N = \text{const}.$$

Покажем, что эта задача имеет только нулевое решение.

Возьмем внутри контура Г точку M_0. Построим окружность $C_a^{M_0}$ радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащую внутри Г. Пусть R_{MM_0} — расстояние между точками M и M_0. Функция

$$\ln \frac{R_{MM_0}}{a}$$

гармонична всюду в D_e и положительна в D_e, так как $R_{MM_0} > a$ при $M \in D_e$.

Построим окружность $C_b^{M_0}$ радиуса b с центром в точке M_0, содержащую контур Г внутри себя. Рассмотрим функцию

$$u_b(M) = N \frac{\ln \dfrac{R_{MM_0}}{a}}{\ln \dfrac{b}{a}},$$

называемую «барьером». Она гармонична в D_e, $u_b(M)|_{C_b^{M_0}} = N$, $u_b(M) > 0$ при $M \in \Gamma$. В силу принципа максимума

$$|u(M)| \leqslant u_b(M)$$

всюду между контуром Г и окружностью $C_b^{M_0}$. Фиксируем точку M. Пусть $b \to \infty$. Тогда $u_b(M) \to 0$. Следовательно $u(M) = 0$. В силу произвольности точки M $u(M) \equiv 0$ всюду в D_e. Следовательно, однородная задача имеет только тривиальное решение, а решение неоднородной задачи единственно. ■

Переходя к изучению единственности решения второй и третьей краевых задач в двумерном случае, убедимся сначала, что для гармонических в D_e функций, регулярных на бесконечности, справедливы первая и вторая формулы Грина во внешней области.

Для этого покажем, что для гармонической в D_e и регулярной на бесконечности функции u справедлива оценка ее первых производных:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \frac{A}{r^2} \quad \text{при } r \geqslant R, \ A = \text{const}. \tag{3.3}$$

Построим окружность $C_a^{M_0}$ радиуса a с центром M_0, содержащую контур Г внутри себя. Введем полярную систему координат (r, φ) с началом в M_0. Методом разделения переменных легко показать, что вне $C_a^{M_0}$ регулярное на бесконечности решение уравнения Лапласа может быть представлено в виде ряда

$$u(M) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}, \tag{3.4}$$

где

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(a, \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(a, \varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Написанный ряд (3.4) при $r > a$ сходится абсолютно, и его можно почленно дифференцировать по r и по φ. Дифференцируя (3.4), получим при $r \geqslant R$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqslant \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right| \leqslant \frac{A}{r}, \quad A = \text{const}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

то отсюда и следует оценка (3.3).

Полученная оценка (3.3) позволяет получить первую и вторую формулы Грина во внешней области. Действительно, пусть функции u и v непрерывны в $\bar{D}_e$ вместе с первыми производными, имеют непрерывные вторые производные в D_e, гармонические в D_e и регулярны на бесконечности. Построим окружность C_R достаточно большого радиуса R, содержащую контур Г внутри себя. Область между Г и C_R обозначим D_R. Применим к функциям u и v в области D_R первую формулу Грина

$$\int_{D_R} v \, \Delta u \, d\sigma = \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dl + \int_{C_R} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dl - \int_{D_R} \nabla u \, \nabla v \, d\sigma. \tag{3.5}$$

Согласно оценке (3.3) при $R \to \infty$

$$\int_{C_R} v \frac{\partial u}{\partial n} dl \to 0.$$

Интеграл $\int\limits_{D_R} \nabla u \nabla v \, d\sigma$ при $R \to \infty$ сходится к несобственному интегралу $\int\limits_{D_e} \nabla u \nabla v \, d\sigma$. Следовательно, существует предел при $R \to \infty$ интеграла, стоящего в левой части (3.5), и, переходя к пределу в (3.5), получаем первую формулу Грина во внешней области D_e:

$$\int_{D_e} v \Delta u \, d\sigma = \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} dl - \int_{D_e} \nabla u \nabla v \, d\sigma.$$

Справедливость второй формулы Грина во внешней области D_e

$$\int_{D_e} \{v \Delta u - u \Delta v\} \, d\sigma = \oint_{\Gamma} \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right\} dl$$

очевидна.

Используя первую формулу Грина, теперь легко исследовать единственность решения второй и третьей внешних краевых задач в двумерном случае.

Теорема 5.8. *При $h(P) \geqslant 0$, $h(P) \not\equiv 0$ внешняя третья краевая задача на плоскости*:

$$\Delta u = 0 \text{ в } D_e,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_i} + hu|_{\Gamma} = f(P)|_{\Gamma},$$

где n_i — внутренняя по отношению к области D нормаль к контуру Γ, может иметь не более одного решения, непрерывного вместе с первыми производными в $D_e \cup \Gamma$ и регулярного на бесконечности.

Доказательство является почти дословным повторением рассуждений, проведенных в п. 2, и может быть легко воспроизведено читателем.

Решение внешней задачи Неймана на плоскости

$$\Delta u = 0 \text{ в } D_e, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(P)|_{\Gamma},$$

регулярное (ограниченное) на бесконечности, определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Кроме того, для существования решения должно быть выполнено необходимое условие

$$\oint_{\Gamma} f(P)\,dl = 0. \tag{3.6}$$

Эти утверждения также вытекают из первой формулы Грина.

Можно показать, что условие (3.6) является также и достаточным условием разрешимости внешней задачи Неймана на плоскости.

Таким образом, на плоскости, в отличие от трехмерного случая, внешняя задача Неймана разрешима не всегда, а если ее решение существует, то оно неединственно.

§ 4. ФУНКЦИЯ ГРИНА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Для решения краевых задач для оператора Лапласа часто используется метод функции Грина (функции источника). В этом параграфе вводится функция Грина для оператора Лапласа, рассматриваются ее простейшие свойства и некоторые методы ее построения.

1. Функция Грина внутренней задачи Дирихле оператора Лапласа

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле

$$\begin{aligned} &\Delta u = -F \text{ в } D, \\ &u|_S = f. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Будем искать решение, удовлетворяющее условию

$$u \in C^{(1)}(\bar{D}) \cap C^{(2)}(D).$$

Поставим себе цель — получить интегральное представление для решения этой задачи.

Согласно третьей формуле Грина непрерывная вместе с первыми производными в замкнутой области $D \cup S$ функция $u(M)$, имеющая непрерывные в D вторые производные, в любой внутренней точке M области D может быть представлена в виде

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{R_{MP}} - u \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} \right\} dS_P - \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\Delta u}{R_{MQ}} dV_Q \tag{4.2}$$

(для определенности рассматривается трехмерный случай).

Пусть $v(M)$ — гармоническая в D функция, непрерывная вместе с первыми производными в $D \cup S$. Применяя к u и v вторую формулу Грина в D, получим

$$0 = \oint_S \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right\} dS - \int_D v\,\Delta u\,dV. \tag{4.3}$$

Складывая (4.2) и (4.3) и вводя обозначение

$$G(M,\ P)=\frac{1}{4\pi R_{MP}}+v,$$

получим представление для функции $u(M)$:

$$u(M)=\oint\limits_S\left\{\frac{\partial u}{\partial n}G-u\frac{\partial G}{\partial n}\right\}dS-\int\limits_D G\,\Delta u\,dV. \tag{4.4}$$

Поскольку в задаче (4.1) известно значение $u|_S$, а $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$ не задано, наложим на функцию G дополнительное условие

$$G(M,\ P)|_{P\in S}=0.$$

Тогда (4.4) дает

$$u(M)=-\oint\limits_S u(P)\frac{\partial G}{\partial n_P}(M,\ P)\,dS_P-\int\limits_D G\,\Delta u\,dV. \tag{4.5}$$

Определение. Функция $G(M,Q)$ называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $G(M,\ Q)=\dfrac{1}{4\pi R_{MQ}}+v,$

где v — гармоническая всюду в D функция;

2) $G(M,\ P)|_{P\in S}=0.$

Функции Грина различных операторов будут неоднократно встречаться в нашем курсе. Поэтому сделаем несколько замечаний по данному определению. Первое условие означает, что G является фундаментальным решением оператора Лапласа. Второе условие отражает тип граничных условий, для которых строится функция Грина.

Если функция Грина существует, то решение задачи (4.1) формально может быть записано в виде

$$u(M)=-\oint\limits_S f(P)\frac{\partial G}{\partial n_P}(M,\ P)\,dS_P+\int\limits_D G(M,\ Q)F(Q)\,dV. \tag{4.6}$$

При этом следует иметь в виду, что формула (4.6) получена с помощью формулы Грина, предполагающей выполнение определенных условий в отношении функций u и G и поверхности S. Кроме того, формула (4.6) содержит значение $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S$, существование которого из определения функции G не следует.

Для построения функции G достаточно найти функцию v, которая является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta v=0 \text{ в } D,$$

$$v|_S = -\frac{1}{4\pi R_{MP}}\bigg|_{P \in S}. \qquad (4.7)$$

В дальнейшем будет показано, что для достаточно широкого класса поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова, задача (4.7) разрешима, т. е. функция Грина существует.

Заметим также, что для построения функции Грина нужно решить задачу Дирихле, но со специальным граничным значением, что во многих случаях значительно проще, чем решение задачи с произвольным граничным значением.

При этом, найдя функцию Грина оператора Лапласа для данной области D, на основании формулы (4.6) получаем решение целого класса задач Дирихле для уравнения Лапласа в области D с произвольными правыми частями $F(M)$ и функциями $f(P)$ в граничных условиях.

Можно показать, на чем мы здесь не останавливаемся, что формула (4.6) дает классическое решение задачи (4.1) при $f \in C(S)$ и $F \in C^{(1)}(\bar{D})$.

Наконец отметим, что в терминах обобщенных функций функцию Грина можно определить как решение краевой задачи

$$\Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \quad M, M_0 \in D,$$

$$G(P, M_0)|_{P \in S} = 0.$$

2. Свойства функции Грина задачи Дирихле

Из определения функции Грина следует, что она положительна всюду в D:

$$G(M, Q) > 0.$$

Действительно, построим сферу Σ_ε достаточно малого радиуса ε с центром в точке M. На сфере Σ_ε и внутри нее $G>0$, $G|_S=0$. В силу принципа максимума $G>0$ между сферой Σ_ε и S, следовательно, и всюду в D.

Получим оценку для функции G сверху. Для функции v, являющейся решением задачи (4.7), справедлив принцип максимума. Поэтому $v<0$ всюду в D. Следовательно,

$$G = \frac{1}{4\pi R_{MQ}} + v < \frac{1}{4\pi R_{MQ}}.$$

Таким образом, для функции $G(M, Q)$ всюду в D справедлива оценка

$$0 \leqslant G(M, Q) < \frac{1}{4\pi R_{MQ}}.$$

Покажем, что функция Грина симметрична:

$$G(M, Q) \equiv G(Q, M).$$

Для доказательства этого введем обозначения

$$u(M)=G(M,\ M_1),$$
$$v(M)=G(M,\ M_2).$$

Окружим точки M_1 и M_2 сферами Σ_1 и Σ_2 соответственно достаточно малого радиуса. К функциям u и v в области между S, Σ_1 и Σ_2 применим вторую формулу Грина. Учитывая граничные условия для функции Грина, получим

$$\oint\limits_{\Sigma_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\oint\limits_{\Sigma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0. \tag{4.8}$$

Рассматривая v внутри Σ_1 согласно (4.4), получим

$$v(M_1)=-\oint\limits_{\Sigma_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \tag{4.9}$$

Аналогично

$$u(M_2)=-\oint\limits_{\Sigma_2}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS. \tag{4.10}$$

Подставляя (4.9) и (4.10) в (4.8), получаем

$$-v(M_1)+u(M_2)=0,$$

т. е.

$$G(M_1,\ M_2)=G(M_2,\ M_1).$$

Функция Грина задачи Дирихле допускает очень простую и ясную физическую интерпретацию. Если вспомнить, что электростатический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, то становится очевидно, что первое слагаемое в представлении функции Грина

$$G=\frac{1}{4\pi R_{MQ}}+v$$

представляет собой потенциал точечного заряда, расположенного в точке Q, в неограниченном пространстве, а второе — потенциал поля зарядов, индуцированных на заземленной проводящей поверхности S. Сама же функция Грина представляет потенциал точечного электрического заряда в присутствии заземленной проводящей поверхности S.

3. Функция Грина внутренней третьей краевой задачи

Для решения внутренней третьей краевой задачи

$$\Delta u=-F \text{ в } D,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}+hu|_S=f \tag{4.11}$$

функция Грина вводится аналогичным образом.

Согласно формуле (4.4)

$$u(M)=\oint\limits_S \left\{\frac{\partial u}{\partial n}G-u\frac{\partial G}{\partial n}\right\}dS-\int\limits_D G\,\Delta u\,dV=$$

$$=\oint\limits_S \left\{G\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)-u\left(\frac{\partial G}{\partial n}+hG\right)\right\}dS-\int\limits_D G\,\Delta u\,dV,$$

где $G=\frac{1}{4\pi R}+v$, v — гармоническая в D функция.

Следовательно, чтобы получить решение третьей краевой задачи, следует функцию G подчинить условию

$$\frac{\partial G}{\partial n}+hG|_S=0.$$

Определение. Функция $G(M, Q)$ называется функцией Грина третьей внутренней краевой задачи для оператора Лапласа в области D, если:

1) $G(M, Q)=\frac{1}{4\pi R_{MQ}}+v$, где v — гармоническая в D функция;
2) $\frac{\partial G}{\partial n}+hG|_S=0$, $h\geqslant 0$, $h\not\equiv 0$.

Решение задачи (4.11) записывается в виде

$$u(M)=\oint\limits_S G(M, P)f(P)\,dS_P+\int\limits_D G(M, Q)F(Q)\,dV_Q.$$

4. Функция Грина внутренней задачи Неймана

Перейдем к рассмотрению внутренней задачи Неймана

$$\Delta u=-F \text{ в } D,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=f. \tag{4.12}$$

Прежде всего заметим, что, как было показано ранее, задача (4.12) имеет решение не всегда, а в том случае, когда решение существует, оно неединственно и определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Снова рассмотрим формулу (4.4). Покажем, что в данном случае нельзя наложить на функцию G дополнительное условие

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S=0, \tag{4.13}$$

чтобы исключить слагаемое, содержащее $u|_S$ (аналогично тому, как это было сделано для первой и третьей краевых задач). Действительно, если потребовать удовлетворения функцией $G=\frac{1}{4\pi R}+v$ дополнительного условия (4.13), то для определения функции v получим краевую задачу

$$\Delta v = 0 \text{ в } D,$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right|_{P\in S} \tag{4.14}$$

Проверим разрешимость этой задачи. Необходимое условие разрешимости имеет вид

$$\oint\limits_S \frac{\partial v}{\partial n}\, dS = 0.$$

Для вычисления интеграла

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}\, dS_P, \quad M \in D,$$

воспользуемся третьей формулой Грина, положив в ней $u \equiv 1$. Тогда получим

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}\, dS_P = -1 \neq 0, \quad M \in D. \tag{4.15}$$

Следовательно, задача (4.14) решения не имеет. Это означает, что функции $G = \frac{1}{4\pi R} + v$, удовлетворяющей условию (4.13), не существует.

Снова обратимся к формуле (4.4):

$$u(M) = \oint\limits_S \left\{\frac{\partial u}{\partial n} G - u\frac{\partial G}{\partial n}\right\} dS - \int\limits_D G\,\Delta u\, dV,$$
$$G = \frac{1}{4\pi R_{MQ}} + v, \quad \Delta v = 0 \text{ в } D. \tag{4.16}$$

Напомним, что основная цель, которую мы преследуем при введении функции Грина, состоит в получении интегрального представления решения задачи (4.12). Нам нужно избавиться от слагаемого, содержащего $u|_S$. Мы установили, что функции G, удовлетворяющей условию $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0$, не существует.

Вспомнив, что решение внутренней задачи Неймана определено только с точностью до произвольного постоянного слагаемого, заметим, что получим интегральное представление решения, подчинив функцию G граничному условию

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = C_0 = \text{const} \neq 0,$$

поскольку в этом случае слагаемое в формуле (4.16), содержащее значение $u|_S$, дает постоянную. Постоянную C_0 выберем так, чтобы была разрешима внутренняя вторая краевая задача для v:

$$\Delta v = 0 \text{ в } D,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = C_0 - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}\Bigg|_{P\in S}.$$

Для этого должно выполняться соотношение

$$\oint_S \frac{\partial v}{\partial n}\,dS = \oint_S \left\{C_0 - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}\right\} dS_P = 0.$$

В силу равенства (4.15) отсюда получаем

$$C_0 = -\frac{1}{S_0},$$

где S_0 — площадь поверхности S.

Определение. Функция $G(M, Q)$ называется функцией Грина внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа, если:

1) $G(M, Q) = \dfrac{1}{4\pi R_{MQ}} + v$, где v — гармоническая в D функция;
2) $\left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\dfrac{1}{S_0}$, где S_0 — площадь поверхности S.

Подставляя функцию Грина в (4.16), получим выражение для решения задачи (4.12):

$$u(M) = \oint_S fG\,dS + \frac{1}{S_0}\oint_S u\,dS + \int_D GF\,dV. \qquad (4.17)$$

Слагаемое $\dfrac{1}{S_0}\oint\limits_S u\,dS$ есть среднее значение функции u на поверхности S. Оно является некоторой постоянной (вообще говоря, неизвестной). Но само решение задачи Неймана определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Это слагаемое можно выбрать так, что среднее значение решения на поверхности S будет равно нулю. Формула

$$u(M) = \oint_S Gf\,dS + \int_D GF\,dV \qquad (4.18)$$

дает то решение задачи Неймана, которое имеет среднее значение на поверхности S, равное нулю. Общее решение задачи Неймана имеет вид

$$u = \oint_S Gf\,dS + \int_D GF\,dV + \text{const}. \qquad (4.19)$$

Заметим, что функция Грина $G(M, Q)$ внутренней задачи Неймана определена с точностью до постоянного слагаемого, точнее, до слагаемого, зависящего от координат точки Q. Это слагаемое можно выбрать так, чтобы

$$\oint\limits_S G(P,\ Q)\,dS_P = 0. \tag{4.20}$$

Этим дополнительным условием функция Грина определяется однозначно. Теперь можно показать, повторив рассуждение п. 2, что функция Грина внутренней задачи Неймана симметрична:

$$G(M,\ Q) = G(Q,\ M).$$

Напомним, что внутренняя задача Неймана

$$\Delta u = 0 \text{ в } D,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P)|_S \tag{4.21}$$

разрешима только при условии $\oint\limits_S f(P)\,dS = 0$. Функция $u(M)$, определенная формулой

$$u(M) = \oint\limits_S f(P)\,G(M,\ P)\,dS_P, \tag{4.22}$$

существует и является решением уравнения Лапласа при любой непрерывной функции $f(P)$. Возникает вопрос: какое решение уравнения Лапласа дает формула (4.22), если $\oint\limits_S f(P)\,dS \neq 0$, т. е. когда задача (4.21) не имеет решения? Можно показать, что

$$\lim_{M\to P\in S} \frac{\partial u}{\partial n}(M) = f(P) - \frac{1}{S_0}\oint\limits_S f(P)\,dS,$$

где S_0 — площадь поверхности S. Следовательно, формула (4.22) дает решение следующей задачи:

$$\Delta u = 0 \text{ в } D,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P) - \frac{1}{S_0}\oint\limits_S f\,dS,\quad P \in S,$$

для которой условие разрешимости, как легко проверить, выполнено автоматически.

5. Функции Грина внешних краевых задач

Для внешних краевых задач функции Грина вводятся аналогичным образом. При этом заметим, что поскольку в трехмерном случае все три основные краевые задачи имеют единственное решение и разрешимы при любой непрерывной граничной функции, то функция Грина для них вводится единообразно.

Определение. Функция $G(M,\ Q)$ называется функцией Грина оператора Лапласа для внешней краевой задачи в области D_e, если:

1) $G(M, Q)=\frac{1}{4\pi R_{MQ}}+v$, где v—гармоническая в D_e функция;

2) $\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G|_S=0$, $|\alpha|+|\beta|\neq 0$;

3) $G(M, Q)$ — регулярна на бесконечности.

Заметим, что по сравнению с внутренней задачей добавляется требование регулярности на бесконечности.

Формулы для решений внешних краевых задач выводятся так же, как и для внутренних задач, и имеют аналогичный вид.

6. Примеры построения функций Грина

Рассмотрим несколько примеров построения функции Грина задачи Дирихле для конкретных областей.

Для построения функции Грина для полупространства ($-\infty<x$, $y<\infty$, $z\geqslant 0$) удобнее всего применить метод электростатических отображений.

Чтобы построить функцию Грина, достаточно определить функцию v, которая в данном случае является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}\Delta v=0 \quad \text{при} \quad z>0,\\ v|_{z=0}=-\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\Big|_{z=0}, \quad M=(x, y, z),\\ v\rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности.}\end{gathered} \tag{4.23}$$

Пусть M_1 — точка, симметричная точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно плоскости $z=0$. Тогда очевидно, что решением задачи (4.23) является функция

$$v=-\frac{1}{4\pi R_{MM_1}}.$$

Следовательно, функция Грина имеет вид

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}-\frac{1}{4\pi R_{MM_1}}. \tag{4.24}$$

Заметим, что первое слагаемое в формуле (4.24) представляет собой потенциал точечного заряда, расположенного в точке M_0, а второе — потенциал точечного заряда противоположного знака, расположенного в симметричной точке M_1. Учитывая физическую интерпретацию функции Грина, выражение (4.24) можно было выписать сразу.

Построим теперь функцию Грина для шара K_a радиуса a. В этом случае тоже можно использовать метод электростатических отображений. Но для иллюстрации различных способов построения функции Грина $G(M, M_0)$ воспользуемся методом разделения переменных.

Введем сферическую систему координат (r, ϑ, φ) с началом в центре шара и ось z направим так, чтобы она проходила через точку M_0. Для определения функции v получаем краевую задачу

$$\Delta v = 0 \text{ в } K_a,$$

$$v|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi R_{M_0P}}\bigg|_{r=a}, \tag{4.25}$$

$$M_0 = (r_0, 0, 0), \ P = (r, \vartheta, \varphi).$$

Общее решение уравнения Лапласа внутри шара имеет вид

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\{A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi\}. \tag{4.26}$$

Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} следует определить из граничных условий.

Легко видеть, что в силу аксиальной симметрии краевой задачи для функции v эта функция также не будет зависеть от азимутального угла φ $\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} \equiv 0\right)$. Поэтому в разложении функции v отличными от нуля оказываются лишь коэффициенты A_{n0}, и это разложение принимает вид

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n0}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\vartheta), \tag{4.27}$$

где $P_n(\cos\vartheta)$ — полиномы Лежандра.

Для разложения граничного условия по полиномам Лежандра воспользуемся выражением для производящей функции полиномов Лежандра:

$$\frac{1}{R_{M_0P}} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\vartheta}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_0}{r}\cos\vartheta + \frac{r_0^2}{r^2}}} =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n P_n(\cos\vartheta). \tag{4.28}$$

Подставляя (4.27) в граничное условие и учитывая (4.28), находим

$$A_{n0} = -\frac{1}{4\pi a}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n \quad \text{при } n = 0, 1, \ldots$$

Следовательно,

$$v = -\frac{1}{4\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{rr_0}{a^2}\right)^n P_n(\cos\vartheta).$$

Этот ряд можно просуммировать. Пусть $M_1(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ — точка, сопряженная точке $M_0(r_0, 0, 0)$ относительно сферы $r=a$, т. е. $r_1=\frac{a^2}{r_0}$, $\vartheta_1=0$, φ_1-0. Тогда

$$v=-\frac{1}{4\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos\vartheta)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi a}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{r_1}\operatorname{cor}\vartheta+\frac{r^2}{r_1^2}}}=$$

$$=-\frac{r_1}{4\pi a}\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r^2-2rr_1\cos\vartheta}}=-\frac{1}{4\pi}\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{M_1P}}.$$

Поэтому функция Грина имеет вид

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{R_{MM_0}}-\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right\}.$$

Решение краевой задачи

$$\Delta u=0 \text{ в } K_a,$$

$$u|_{r=a}=f(\vartheta, \varphi)$$

выражается через функцию Грина $G(M, M_0)$ в виде

$$u(M_0)=-\oint_S f\frac{\partial G}{\partial n_P}(P, M_0)\,dS_P. \tag{4.29}$$

Преобразуем эту формулу. Пусть $M_0=(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, $P=(r, \vartheta, \varphi)$. Так как

$$R_{PM_0}=\sqrt{r^2+s_0^2-2rr_0\cos\beta},$$

$$R_{PM_1}=\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\beta},$$

где

$$r_1=\frac{a^2}{r_0},$$

$$\cos\beta=\cos\vartheta\cos\vartheta_0+\sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0),$$

то

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{r=a}=\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a}=-\frac{1}{4\pi a}\frac{a^2-r_0^2}{(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\beta)^{3/2}}. \tag{4.30}$$

Подставляя (4.30) в (4.29), получим

$$u(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)=\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(\vartheta, \varphi)\,[a^2-r_0^2]\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\beta)^{3/2}}. \tag{4.31}$$

Формула (4.31) называется интегралом Пуассона для сферы. Можно показать, что для любой непрерывной функции f она дает классическое решение задачи Дирихле в шаре.

Точно так же может быть построена функция Грина для внешней задачи (для области вне шара). Формула Пуассона для внешней задачи выписывается сразу, если учесть различие направлений нормали для внутренней и внешней задач:

$$u(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)=\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{[r_0^2-a^2]f(\vartheta, \varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\beta)^{3/2}},$$

где $M_0(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ — точка наблюдения, расположенная вне шара.

Рассмотрим еще один метод построения функции Грина.

Как было показано (см. п. 2), функция Грина $G(M, M_0)$ есть обобщенное (в смысле обобщенных функций) решение следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}\Delta_M G=-\delta(M, M_0),\\ G|_{M\in S}=0.\end{gathered}\tag{4.32}$$

Исходя из задачи (4.32) можно построить функцию Грина в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа. Изложим схему этого построения.

Пусть $\{\lambda_n\}$ и $\{v_n(M)\}$ — полные системы собственных значений и ортонормированных собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$\begin{gathered}\Delta v_n+\lambda_n v_n=0 \text{ в } D,\\ v_n|_S=0,\ \|v_n\|=1.\end{gathered}$$

Решение задачи (4.32) будем искать в виде

$$G(M, M_0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n v_n(M).$$

Предполагая, что написанный ряд сходится в смысле обобщенных функций, подставим его в (4.32). Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\lambda_n v_n(M)=\delta(M, M_0).$$

Отсюда

$$C_n=\frac{1}{\lambda_n}\int_D\delta(M, M_0)v_n(M)\,dV=\frac{v_n(M_0)}{\lambda_n}.$$

Следовательно,

$$G(M, M_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(M_0)v_n(M)}{\lambda_n}.$$

Такое выражение было получено ранее в § 7 гл. III. На исследовании вопросов сходимости полученного ряда останавливаться не будем.

7. Функция Грина задачи Дирихле на плоскости

Остановимся на вопросе построения функции Грина для внутренней задачи Дирихле на плоскости.

Определение. Функция $G(M, Q)$ называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле на плоскости, если:

1) $G(M, Q)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MQ}}+v$, где v — гармоническая в области D функция;

2) $G(M, Q)|_{M\in\Gamma}=0$;

Γ — замкнутый контур, являющийся границей области D.

Решение задачи Дирихле

$$\Delta u=-F \text{ в } D,$$
$$u|_{\Gamma}=f$$

через функцию Грина выражается следующим образом:

$$u=-\oint\limits_{\Gamma} f\frac{\partial G}{\partial n}\,dl+\int\limits_{D} GF\,d\sigma.$$

Эта формула выводится точно так же, как и в трехмерном случае.

Для построения функции Грина на плоскости можно использовать методы теории функций комплексной переменной. Напомним основные факты, отсылая за доказательствами их к учебникам по теории функций комплексной переменной *). Точку M на плоскости (x, y) будем обозначать как точку $z=x+iy$ на плоскости комплексной переменной. Пусть функция $w=f(z, z_0)$ осуществляет конформное отображение области D на круг единичного радиуса $|w|<1$, причем точка z_0 переходит в центр круга $w=0$. Тогда функция

$$G(M, M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z, z_0)|} \tag{4.33}$$

является функцией Грина задачи Дирихле в области D.

Заметим, что формула (4.33) остается справедливой и в случае односвязной внешней области D_e, содержащей бесконечно удаленную точку комплексной плоскости.

Методом конформного отображения можно построить функцию Грина для круга, которая имеет вид

$$G(M, M_0)=\frac{1}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_{MM_0}}-\ln\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right\},$$

где $M_0=(r_0, \varphi_0)$, $M_1=(r_1, \varphi_0)$ — точка, сопряженная точке M_0 относительно круга радиуса a, $r_1=\frac{a^2}{r_0}$ **).

---

*) См., например: Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М: Наука, 1979.

**) Доказательство приведенных утверждений см. там же.

Получим интеграл Пуассона для круга. Так как

$$R_{MM_0}=\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)},$$

$$R_{MM_1}=\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\varphi-\varphi_0)},$$

то

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a}=-\frac{a^2-r_0^2}{2\pi a\left(a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\varphi-\varphi_0)\right)}.$$

Следовательно, решение краевой задачи

$$\Delta u=0 \text{ в круге } r<a,$$

$$u|_{r=a}=f(\varphi)$$

имеет вид

$$u(r_0,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(a^2-r_0^2)\,f(\varphi)\,d\varphi}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\varphi-\varphi_0)}. \tag{4.34}$$

Эта формула называется интегралом Пуассона для круга. Она дает классическое решение задачи Дирихле внутри круга при любой непрерывной функции $f(\varphi)$.

Отметим, что решение внешней задачи Дирихле вне круга радиуса a также выражается интегралом Пуассона (4.34), в котором множитель $(a^2-r_0^2)$ нужно заменить на $(r_0^2-a^2)$.

§ 5. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КРУГЕ И ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Рассмотрим метод разделения переменных решения краевых задач для уравнения Лапласа. Метод применим в том случае, когда граница области такова, что возможно разделение переменных. На плоскости это осуществимо, в частности, для круга и прямоугольника. Эти случаи и будут рассмотрены в настоящем параграфе.

1. Краевые задачи для уравнения Лапласа в круге, вне круга и в кольце

Методом разделения переменных построим общее решение уравнения Лапласа в круге. Введем полярную систему координат (r,φ) с началом в центре круга. Запишем уравнение Лапласа в полярной системе **координат:**

$$\Delta_2 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \tag{5.1}$$

Найдем решения уравнения (5.1), представимые в виде

$$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)\not\equiv 0. \tag{5.2}$$

Подставляя (5.2) в (5.1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R(r)} \equiv -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda. \tag{5.3}$$

Поскольку уравнение (5.1) должно выполняться всюду в круге $0 \leqslant r < a$, то функция $u(r, \varphi)$ периодична по φ с периодом 2π и ограничена в этом круге.

Из (5.3) получаем уравнение для $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$. Рассмотрим сначала уравнение для $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{5.4}$$

Решение этого уравнения должно быть периодично с периодом 2π:

$$\Phi(\varphi) \equiv \Phi(\varphi + 2\pi). \tag{5.5}$$

Следовательно, для определения $\Phi(\varphi)$ получена задача Штурма—Лиувилля с условиями периодичности. Решение этой задачи имеет вид (см. § 8 гл. III)

$$\Phi(\varphi) = \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Из (5.3) с учетом найденных значений λ_n получаем уравнение для $R(r)$:

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0. \tag{5.6}$$

Это уравнение Эйлера, и общее решение его может быть записано в виде

$$\begin{gathered} R(r) = R_n(r) = C_1r^n + C_2r^{-n}, \quad n \neq 0, \\ R_0(r) = C_1 + C_2\ln r, \quad n = 0. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Ограниченными при $0 \leqslant r < a$ решениями являются

$$R_n(r) = C_1r^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно, получаем следующую систему решений уравнения Лапласа, ограниченных в круге $0 \leqslant r < a$:

$$u_n(r, \varphi) = r^n \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.8}$$

Общее решение уравнения Лапласа в круге записывается в виде разложения по этим частным решениям:

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}. \tag{5.9}$$

Для построения общего решения уравнения Лапласа вне круга

$(r>a)$ следует выбрать частные решения (5.2), ограниченные вне круга. Они имеют вид

$$u_n(r, \varphi) = \frac{1}{r^n} \left\{ \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.10}$$

Следовательно, общее решение уравнения Лапласа вне круга, ограниченное на бесконечности, можно записать в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}. \tag{5.11}$$

Перейдем теперь к решению краевых задач. Рассмотрим внутреннюю краевую задачу для круга:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \tag{5.12}$$

$$P(u) \equiv \alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u \big|_{r=a} = f(\varphi), \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0. \tag{5.13}$$

Решение задачи (5.12)—(5.13) можно записать в виде разложения (5.9), коэффициенты которого определяются из граничного условия. Но вычисления оказываются проще, если решение записать в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{P(r^n)\big|_{r=a}} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} \text{ при } \beta \neq 0. \tag{5.14}$$

Подставляя (5.14) в граничное условие (5.13), находим выражения для коэффициентов:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \tag{5.15}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Выпишем отдельно решения первой, второй и третьей краевых задач для уравнения Лапласа в круге.

1. *Задача Дирихле*: $u|_{r=a} = f(\varphi)$,

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}. \tag{5.16}$$

2. *Задача Неймана*: $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi)$,

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} + C, \tag{5.17}$$

где C — произвольная постоянная. Напомним, что решение внутренней задачи Неймана существует только при условии

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0$$

и определяется с точностью до произвольной постоянной.

3. *Третья краевая задача*: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right|_{r=a} = f(\varphi)$,

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+ah)\, a^{n-1}} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}. \tag{5.18}$$

Коэффициенты в (5.16)—(5.18) определяются формулами (5.15).

Решение внешних краевых задач проводится аналогично. Для построения их решений следует использовать частные решения (5.10).

Подробнее рассмотрим краевую задачу внутри кольца $a \leqslant r \leqslant b$. Для определенности выберем задачу Дирихле

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \quad a < r < b, \\ u|_{r=a} = f_1(\varphi), \quad u|_{r=b} = f_2(\varphi), \end{gathered} \tag{5.19}$$

При построении решения внутри кольца нужно использовать весь набор радиальных функций (5.7). Но удобно при каждом n построить специальную систему фундаментальных решений $R_n^{(a)}(\ ),\ R_n^{(b)}(r)\}$ уравнения (5.6), удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$R_n^{(a)}(a) = 0, \quad R_n^{(b)}(b) = 0, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots \tag{5.20}$$

В качестве таких решений можно взять функции

$$R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n} - a^{2n}}{r^n}, \quad R_n^{(b)}(r) = \frac{b^{2n} - r^{2n}}{r^n}, \quad n \neq 0,$$

$$R_0^{(a)}(r) = \ln\frac{r}{a}, \quad R_0^{(b)}(r) = \ln\frac{b}{r}.$$

Тогда решение задачи (5.19) запишем в виде

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = {} & \frac{A_0}{2}\,\frac{R_0^{(a)}(r)}{R_0^{(a)}(b)} + \frac{C_0}{2}\,\frac{R_0^{(b)}(r)}{R_0^{(b)}(a)} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} \{C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Подставляя (5.21) в граничное условие при $r=a$ и учитывая (5.20), находим коэффициенты C_n и D_n:

$$C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\quad D_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Аналогичным образом коэффициенты A_n и B_n определяются из граничного условия при $r=b$:

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\quad B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

При решении других краевых задач внутри кольца следует построить нужные радиальные функции, удовлетворяющие соответствующим однородным граничным условиям при $r=a$ и $r=b$.

2. Краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике

Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике также могут быть решены методом разделения переменных. Для определенности рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b, \tag{5.22}$$

$$u|_{x=0}=\varphi_1(y),\ u|_{x=a}=\varphi_2(y), \tag{5.23}$$

$$u|_{y=0}=\psi_1(x),\ u|_{y=b}=\psi_2(x). \tag{5.24}$$

Задачу (5.22)—(5.24) разобьем на две задачи, каждая из которых имеет однородные граничные условия по одной из переменных. Пусть

$$u(x,\ y)=u_1(x,\ y)+u_2(x,\ y),$$

где u_1 и u_2 есть решения следующих задач в прямоугольнике:

$$\begin{array}{ll} \Delta u_1=0, & \Delta u_2=0, \\ u_1|_{x=0}=u_1|_{x=a}=0, & u_2|_{y=0}=u_2|_{y=b}=0, \\ u_1|_{y=0}=\psi_1(x), & u_2|_{x=0}=\varphi_1(y), \\ u_1|_{y=b}=\psi_2(x), & u_2|_{x=a}=\varphi_2(y). \end{array}$$

Каждую из этих задач будем называть стандартной. Рассмотрим стандартную задачу для функции $u_1(x,\ y)$. Построим сначала решения уравнения Лапласа, представимые в виде

$$u(x,\ y)=X(x)Y(y)\not\equiv 0 \tag{5.25}$$

и удовлетворяющие однородным граничным условиям по x:

$$u|_{x=0}=u|_{x=a}=0. \tag{5.26}$$

Подставляя (5.25) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим уравнения для функций $X(x)$ и $Y(y)$:

$$X''+\lambda X=0, \quad 0<x<a, \tag{5.27}$$

$$Y''-\lambda Y=0, \quad 0<y<b. \tag{5.28}$$

Учитывая (5.26), получаем для $X(x)$ задачу Штурма—Лиувилля

$$X''+\lambda X=0, \quad 0<x<a,$$

$$X(0)=X(a)=0, \quad X(x)\not\equiv 0,$$

решение которой имеет вид (см. гл. III, § 8)

$$X=X_n=\sin\sqrt{\lambda_n}\,x, \;\; \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

При $\lambda=\lambda_n$ общее решение уравнения (5.28) запишем в виде

$$Y(y)=Y_n(y)=A\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,y+B\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,(b-y).$$

Заметим, что такой выбор фундаментальных решений уравнения (5.28) аналогичен построению функций $R_n^{(a)}$ и $R_n^{(b)}$ в предыдущем пункте.

Таким образом, построены частные решения уравнения Лапласа

$$u_n(x,\ y)=\{A_n\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,y+B_n\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,(b-y)\}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x. \tag{5.29}$$

$$n=1,\ 2,\ \ldots$$

Решение стандартной задачи для функции u_1 запишем в виде разложения по системе (5.29):

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,y}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,b}+B_n\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,(b-y)}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,b}\right\}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x, \tag{5.30}$$

коэффициенты которого определяются из граничных условий

$$B_n=\frac{2}{a}\int_0^a\psi_1(x)\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx, \quad A_n=\frac{2}{a}\int_0^a\psi_2(x)\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx. \tag{5.31}$$

Таким образом, решение стандартной задачи для $u_1(x,\ y)$ дается формулами (5.30), (5.31).

Аналогичным образом решается стандартная задача для функции $u_2(x,\ y)$. Решение ее имеет вид

$$u_2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,x}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,a}+D_n\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,(a-x)}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}\,a}\right\}\sin\sqrt{\lambda_n}\,y, \tag{5.32}$$

где $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2$,

$$D_n = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_1(y)\sin\sqrt{\lambda_n}\,y\,dy, \quad C_n = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_2(y)\sin\sqrt{\lambda_n}\,y\,dy.$$

Итак, решение задачи (5.22) — (5.24) имеет вид

$$u = u_1(x,\ y) + u_2(x,\ y),$$

где функции u_1 и u_2 определяются формулами (5.30) и (5.32) соответственно.

Таким же образом может быть решена краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике с другими граничными условиями. Осторожность нужно проявлять при решении задачи Неймана, поскольку при редукции ее к стандартным задачам может появиться задача, которая не имеет решения. В этом случае исходную задачу заменой неизвестной функции можно свести к задаче для неоднородного уравнения с однородными граничными условиями. Схема решения такой задачи изложена в гл. III, § 7.

Замечание. Решения краевых задач для уравнения Лапласа в случае круга, кольца и прямоугольника выписаны в виде рядов. Мы не будем исследовать сходимость этих рядов. Отметим только, что при достаточной гладкости граничных функций эти ряды сходятся и дают классическое решение соответствующих краевых задач.

§ 6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

В этом параграфе рассматриваются интегралы специального вида, называемые потенциалами, и исследуются их основные свойства.

1. Объемный потенциал

Рассмотрим сначала трехмерный случай. Пусть в ограниченной области D задана функция $\rho(M)$. Интеграл

$$V(M) = \int_D \frac{\rho(Q)}{R_{MQ}}\,dV_Q \tag{6.1}$$

называется объемным потенциалом.

Как было отмечено ранее, функция $1/R_{MQ}$ представляет собой определенный во всех точках $M \neq Q$ потенциал единичного точечного заряда, сосредоточенного в точке Q. Если в области D непрерывно распределен заряд с объемной плотностью $\rho(Q)$, то в силу принципа суперпозиции естественно полагать, что потенциал, создаваемый данным распределением объемного заряда, выражается интегралом (6.1). Функция ρ называется плотностью потенциала.

Будем рассматривать объемный потенциал как обобщенную функцию и покажем, что при любой интегрируемой с квадратом функции ρ он является обобщенным решением уравнения Пуассона

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

Для доказательства этого заметим, что объемный потенциал можно рассматривать как свертку финитной обобщенной функции ρ и фундаментального решения $1/R$ оператора Лапласа *)

$$V(M) = \int\limits_D \frac{\rho(Q)}{R_{MQ}} dV_Q = \frac{1}{R} * \rho.$$

Используя правило дифференцирования свертки и учитывая, что

$$\Delta \frac{1}{R_{MQ}} = -4\pi\delta(M, Q),$$

получим

$$\Delta V = \Delta\left(\frac{1}{R} * \rho\right) = \left(\Delta \frac{1}{R}\right) * \rho = -4\pi(\delta * \rho) = -4\pi\rho.$$

При более жестких требованиях на функцию ρ объемный потенциал представляет собой классическую функцию, обладающую определенными свойствами гладкости. В частности, если ρ — классическая ограниченная и интегрируемая функция, то объемный потенциал является непрерывно дифференцируемой функцией во всем пространстве. Если же плотность ρ непрерывна вместе с первыми производными, то объемный потенциал является классическим решением уравнения Пуассона

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

во всех точках непрерывной дифференцируемости ρ.

На плоскости объемным (или логарифмическим) потенциалом называется интеграл вида

$$V(M) = \int\limits_D \rho(Q) \ln \frac{1}{R_{MQ}} d\sigma_Q.$$

При тех же требованиях относительно ρ он является решением уравнения $\Delta V = -2\pi\rho$.

2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Напомним некоторые необходимые в дальнейшем сведения о несобственных интегралах второго рода, зависящих от параметра.

---

*) См: Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М: Наука, 1988

Будем рассматривать несобственные интегралы вида

$$V(M)=\int\limits_{D} F(M,\ Q)\, f(Q)\, d\tau_Q, \tag{6.2}$$

где $F(M,\ Q)$ — функция, неограниченная при $M=Q$ и непрерывная по M, а $f(Q)$ — ограниченная функция.

Определение. Интеграл (6.2) называется равномерно сходящимся в точке M_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что неравенство

$$\left|\int\limits_{D_{\delta(\varepsilon)}} F(M\ \ Q)\, f(Q)\, d\tau_Q\right|\leqslant\varepsilon$$

выполняется для любой точки $M\in K^{M_0}_{\delta(\varepsilon)}$ и для любой области $D_{\delta(\varepsilon)}\in K^{M_0}_{\delta(\varepsilon)}$, где $K^{M_0}_{\delta(\varepsilon)}$ — шар радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром M_0.

Теорема 5.9. *Интеграл* (6.2), *равномерно сходящийся в точке M_0, есть непрерывная функция в этой точке M_0.*

Доказательство. Нужно показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $|V(M_0)-V(M)|\leqslant\varepsilon$ при $R_{MM_0}\leqslant\delta(\varepsilon)$. Выберем внутри D область D_1, содержащую точку M_0 внутри себя. Обозначим $D_2=D\setminus D_1$. Интеграл $V(M)$ представим в виде

$$V(M)=V_1(M)+V_2(M),$$

где

$$V_1(M)=\int\limits_{D_1} F(M,\ Q)\, f(Q)\, d\tau,\quad V_2(M)=\int\limits_{D_2} F(M,\ Q)\, f(Q)\, d\tau.$$

Рассмотрим разность $V(M_0)-V(M)$:

$$|V(M_0)-V(M)|\leqslant|V_2(M_0)-V_2(M)|+|V_1(M_0)|+|V_1(M)|.$$

В силу равномерной сходимости интеграла (6.2) в точке M_0 существует такое $\delta_1(\varepsilon)>0$, что

$$|V_1(M)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ и }\ |V_1(M)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ при }\ R_{MM_0}\leqslant\delta_1(\varepsilon).$$

Так как точка $M_0\notin D_2$, то интеграл $V_2(M)$ является собственным и, следовательно, непрерывен в точке M_0. Поэтому существует $\delta_2(\varepsilon)>0$ такое, что

$$|V_2(M_0)-V_2(M)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ при }\ R_{MM_0}\leqslant\delta_2(\varepsilon).$$

Пусть $\delta(\varepsilon)=\min(\delta_1(\varepsilon),\ \delta_2(\varepsilon))$. Тогда

$$|V(M_0)-V(M)|\leqslant\varepsilon\ \text{ при }\ R_{MM_0}\leqslant\delta(\varepsilon),$$

что и означает непрерывность интеграла $V(M)$ в точке M_0 ■

Эта теорема справедлива не только для интегралов по объему, но и для интегралов по поверхности или по контуру. Это обстоятельство будет использовано при исследовании поверхностных интегралов.

3. Поверхностные потенциалы

Обычно рассматриваются поверхностные потенциалы двух типов: потенциал простого слоя и потенциал двойного слоя.

Потенциалом простого слоя называется интеграл вида

$$V(M)=\int\limits_S \mu(P)\frac{dS_P}{R_{MP}},$$

где S — некоторая поверхность, $\mu(P)$ — функция, заданная на поверхности S; функция μ называется плотностью потенциала простого слоя. Очевидно, поверхностный потенциал простого слоя можно физически интерпретировать как потенциал, создаваемый зарядом, распределенным на поверхности S с поверхностной плотностью $\mu(P)$.

В двумерном случае (на плоскости) потенциал простого слоя имеет вид

$$V(M)=\int\limits_C \mu(P)\ln\frac{1}{R_{MP}}\,dl_P,$$

где C — некоторая кривая.

Потенциалом двойного слоя в трехмерном случае называется интеграл вида

$$W(M)=-\int\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}dS_P, \tag{6.3}$$

где S — двусторонняя поверхность, $\mathbf{n}_P$ — внешняя нормаль к поверхности S в точке P (в том случае, когда поверхность S незамкнута, внешняя нормаль выбирается произвольно), $\nu(P)$ — функция, заданная на поверхности S; функция ν называется плотностью потенциала двойного слоя. Еще раз подчеркнем, что потенциал двойного слоя определяется только для двусторонней поверхности.

Вычисляя значение нормальной производной функции $1/R_{MP}$ в точках поверхности S, получим для потенциала двойного слоя выражение

$$W(M)=\int\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}\,dS_P,$$

где φ — угол между внутренней нормалью к поверхности S в точке P и вектором $\mathbf{PM}$.

Чтобы дать физическую интерпретацию потенциала двойного слоя, рассмотрим потенциал, создаваемый двумя точечными зарядами противоположных знаков $+e$ и $-e$, помещенных в точки Q_1 и Q_2, лежащие на нормали к поверхности S в точке P_0 с разных сторон от этой поверхности, причем точка Q_1 находится на внутренней нормали к поверхности S (рис. 5.1). Очевидно, значение этого потенциала в любой точке $M \neq Q_1$, Q_2 равно

$$W_0(Q_1, Q_2, M) = -e\left\{\frac{1}{R_{Q_2M}} - \frac{1}{R_{Q_1M}}\right\}.$$

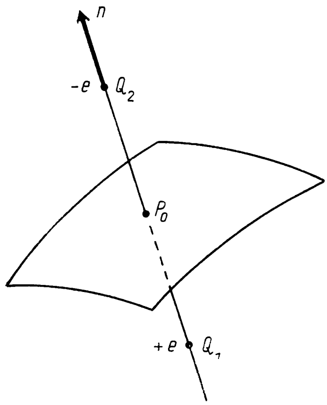


Рис 5 1

Устремим точки Q_1 и Q_2 к точке P_0, одновременно увеличивая величину заряда e так, чтобы величина $\nu_0 = ed$, где d — расстояние между точками Q_1 и Q_2, оставалась постоянной. Так как $e = \nu_0/d$, то в пределе при $d \to 0$ для $W_0(Q_1, Q_2, M)$ получим выражение

$$\lim_{Q_1, Q_2 \to P_0} W_0(Q_1, Q_2, M) = W_0(P_0, M) = -\nu_0 \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{P_0M}}.$$

Поэтому ядро интеграла (6.3) можно физически интерпретировать как потенциал, создаваемый вне точки P_0 помещенным в эту точку диполем с дипольным моментом ν_0, направленным по внешней нормали к поверхности S в точке P_0. При этом сам потенциал двойного слоя (6.3) представляет собой потенциал двусторонней заряженной поверхности S с плотностью поверхностного распределения дипольного момента, задаваемой функцией $\nu(P)$.

На плоскости потенциал двойного слоя имеет вид

$$W(M) = -\int_C \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{R_{MP}} \, dl_P = \int_C \nu(P) \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \, dl_P,$$

где $\mathbf{n}_P$ — внешняя нормаль к кривой C в точке P, φ — угол между внутренней нормалью в точке P и вектором $\mathbf{PM}$. В случае незамкнутой кривой направление внешней нормали, так же как и в трехмерном случае, выбирается произвольно.

Перейдем к исследованию свойств поверхностных потенциалов. Из их определения следует, что в том случае. когда точка M не принадлежит поверхности S (или кривой C), потенциалы имеют производные всех порядков, которые можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла, и являются гармоническими функциями

$$\Delta V = 0, \quad \Delta W = 0, \quad M \notin S \quad (M \notin C).$$

Отметим также, что при $M \to \infty$ для поверхностных потенциалов в случае ограниченной поверхности справедливы оценки в трехмерном случае:

$$V = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad W = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \to \infty;$$

в плоском случае:

$$W = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty.$$

Потенциал простого слоя в плоском случае

$$V(M) = \int\limits_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}}\, dl_P$$

на бесконечности является, вообще говоря, неограниченной функцией и возрастает как $\ln r$. Если же его плотность удовлетворяет условию

$$\int\limits_C \mu(P)\, dl_P = 0,$$

то $V = O\left(\frac{1}{r}\right)$ при $r \to \infty$.

Действительно, введем полярную систему координат, и пусть $M = (r, \varphi)$, $P = (\rho, \alpha)$. Тогда

$$\ln R_{MP} = \ln \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \alpha)} =$$
$$= \frac{1}{2} \ln \left\{ r^2 \left(1 - 2\frac{\rho}{r}\cos(\varphi - \alpha) + \frac{\rho^2}{r^2} \right) \right\} =$$
$$= \ln r - \frac{\rho}{r}\cos(\varphi - \alpha) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

при $r \to \infty$ (использовано соотношение $\ln(1 + x) = x + O(x^2)$ при $x \to 0$). Следовательно,

$$V = O\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty.$$

В дальнейшем свойства поверхностных потенциалов будем рассматривать в трехмерном случае, а для плоского случая формулировать только окончательные результаты.

4. Непрерывность потенциала простого слоя

Если точка M лежит на поверхности, то потенциал является несобственным интегралом, сходимость которого подлежит исследованию. Пусть S — гладкая поверхность, т. е. поверхность, в каждой точке которой существует непрерывная нормаль (или касательная плоскость).

Теорема 5.10. *Потенциал простого слоя с ограниченной непрерывной плотностью, заданной на гладкой поверхности, является непрерывной функцией во всем пространстве.*

Доказательство. Мы установили, что потенциал простого слоя является непрерывной функцией вне поверхности S. Остается показать, что при выполнении условий теоремы потенциал простого слоя непрерывен на поверхности S и его значения вне поверхности S непрерывно примыкают к значениям на S. Для этого в силу указанных ранее свойств равномерно сходящихся несобственных интегралов достаточно показать, что интеграл

$$V(M)=\int_S \mu(P)\frac{dS}{R_{MP}},\quad |\mu|\leqslant A$$

равномерно сходится в точках поверхности S.

Пусть M_0 — произвольная точка поверхности S. Построим сферу Σ радиуса δ с центром в точке M_0. Обозначим через S_1 ту часть поверхности S, которая расположена внутри Σ, $S_2=S\backslash S_1$ (рис. 5.2). Тогда

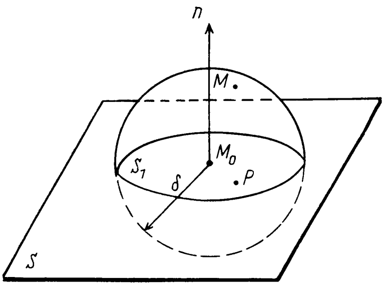


Рис 5 2

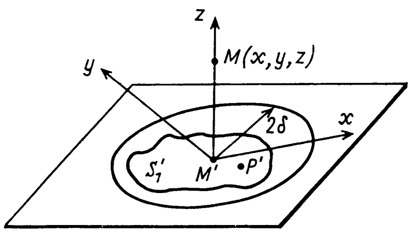


Рис. 5.3

$$V(M)=\int_{S_1}\mu\frac{dS}{R_{MP}}+\int_{S_2}\mu\frac{dS}{R_{MP}}=V_1(M)+V_2(M).$$

Пусть M — произвольная точка, отстоящая от точки M_0 не более чем на δ:

$$R_{MM_0}\leqslant\delta.$$

Нужно показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\left|\int_{S_1}\mu\frac{dS}{R_{MP}}\right|\leqslant\varepsilon$$

при всех M, для которых $R_{MM_0}\leqslant\delta$.

Введем локальную систему координат $(x,\ y,\ z)$ с началом в точке M_0, направив ось z вдоль внешней нормали к поверхности S в точке M_0 (рис. 5.3). Пусть в этой системе координат $M=(x, y, z)$, $P=(\xi, \eta, \zeta)$, S_1' — проекция S_1 на плоскость (x, y), $dS=d\xi d\eta/\cos\gamma$, где γ — угол между нормалью в точке P и осью z. Оценим V_1:

$$|V_1(M)| \leqslant A \int\limits_{S_1} \frac{dS}{R_{MP}} = A \int\limits_{S_1'} \frac{d\xi d\eta}{\cos\gamma \sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant A \int\limits_{S_1'} \frac{d\xi d\eta}{\cos\gamma \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

Пусть $K_{2\delta}$ — круг радиуса 2δ с центром в точке $M'=(x, y, 0)$, лежащий в плоскости (x, y) и содержащий S_1' внутри себя. Величину δ выберем настолько малой, что $\cos\gamma > {}^1/_2$, что возможно, поскольку поверхность гладкая. Тогда

$$|V_1(M)| \leqslant 2A \int\limits_{K_{2\delta}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

Введя полярную систему координат (ρ, φ) с центром M', получим

$$|V_1(M)| \leqslant 2A \int\limits_0^{2\delta} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = 8\pi A\delta \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, интеграл по S_1 сходится равномерно относительно M в точке M_0 и представляет собой непрерывную в точке M_0 функцию. Поэтому потенциал простого слоя $V(M)$ непрерывен в точках поверхности S.

Из приведенных рассуждений следует, что потенциал простого слоя с ограниченной плотностью непрерывен во всем пространстве. ■

В двумерном случае доказательство непрерывности потенциала простого слоя проводится аналогично.

5. Поверхности Ляпунова

Для существования потенциала двойного слоя на поверхности нужно наложить более жесткие требования на гладкость поверхности S. Выделим класс поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова.

Определение. Поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если выполнены следующие условия.

1. В каждой точке поверхности S существует определенная нормаль (или касательная плоскость).

2. Существует такое число $d>0$, что прямые, параллельные нормали в точке P поверхности S, пересекают не более одного

раза часть поверхности S, лежащую внутри сферы радиуса d с центром в точке P.

3 Угол $\gamma(M, P)=(\widehat{\mathbf{n}_M, \mathbf{n}_P})$ между нормалями в точках M и P поверхности S удовлетворяет условию

$$\gamma(M, P) \leqslant AR_{MP}^{\delta},$$

где A, $\delta=\text{const}$, $A>0$, $0<\delta\leqslant 1$.

При этом точка M принадлежит части поверхности S, находящейся внутри сферы радиуса d с центром в точке P.

Получим некоторые оценки, необходимые нам в дальнейшем. Пусть M_0 — некоторая точка поверхности S. Введем локальную систему координат (x, y, z) с началом в точке M_0, направив ось z вдоль внешней нормали в точке M_0. Плоскость (x, y) при этом совпадает с касательной плоскостью. В силу условия 2 существует такое ρ_0, что уравнение поверхности S при $\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\rho_0$ может быть записано в виде

$$z=z(x, y),$$

причем $z(x, y)$ — однозначная непрерывно дифференцируемая функция. Получим оценки для функции $z(x, y)$ и ее первых производных в указанной окрестности. Направляющие косинусы внешней нормали $\mathbf{n}_P$ в точке P поверхности S при $\rho<\rho_0$ выражаются формулами

$$\cos\alpha=\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad \cos\beta=\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

Обозначим через $\mathbf{n}_P'$ проекцию вектора $\mathbf{n}_P$ на плоскость (x, y), а через α' и β' — углы, образованные вектором $\mathbf{n}_P'$ с осями x и y:

$$\cos\alpha=\cos\alpha'\sin\gamma, \quad \cos\beta=\sin\alpha'\sin\gamma.$$

Так как в силу выбора системы координат $z(M_0)=0$, $z_x(M_0)=0$, $z_y(M_0)=0$, то ρ_0 можно выбрать достаточно малой так, что

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}>\frac{1}{2} \quad \text{при } \rho<\rho_0.$$

Тогда

$$|\cos\alpha| \leqslant \sin\gamma \leqslant AR_{M_0P}^{\delta}, \quad |\cos\beta| \leqslant AR_{M_0P}^{\delta}, \tag{6.4}$$

$$|z_x| = \left|\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right| \leqslant 2\,|\cos\alpha| \leqslant 2AR_{M_0P}^{\delta} \tag{6.5}$$

в силу условия 3. Аналогично

$$|z_y| \leqslant 2AR_{M_0P}^{\delta}. \tag{6.6}$$

Используя формулу Тейлора для функции $z(x, y)$ в указанной окрестности M_0, получим

$$z(x, y) = z(0, 0) + xz_x(\bar{x}, \bar{y}) + yz_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $0 \leqslant \bar{x} \leqslant x$, $0 \leqslant \bar{y} \leqslant y$. Отсюда находим

$$|z(x, y)| \leqslant \rho\,|z_x| + \rho\,|z_y| \leqslant 4AR_{M_0P}^{1+\delta}. \tag{6.7}$$

Полученные оценки используются при изучении дальнейших свойств поверхностных потенциалов.

6. Существование и непрерывность прямых значений потенциала двойного слоя на поверхности

Всюду в дальнейшем будем рассматривать поверхностные потенциалы только на поверхностях Ляпунова.

Теорема 5.11. *Потенциал двойного слоя*

$$W(M) = \int_S \nu(P)\,\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}\,dS_P \tag{6.8}$$

с ограниченной плотностью $|\nu| \leqslant C$ *на поверхности* S *существует, т. е. является сходящимся несобственным интегралом при* $M \in S$.

В этом случае этот сходящийся несобственный интеграл называется прямым значением потенциала двойного слоя на S.

Доказательство. Пусть M — произвольная точка S. Оценим подынтегральную функцию в окрестности точки M. Введем локальную систему координат, как это было сделано выше. Пусть точка P имеет координаты (ξ, η, ζ). Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\xi}{R_{MP}}\cos\alpha + \frac{\eta}{R_{MP}}\cos\beta + \frac{\zeta}{R_{MP}}\cos\gamma.$$

Отсюда, учитывая оценки (6.4)—(6.7). получаем

$$|\cos\varphi| \leqslant |\cos\alpha| + |\cos\beta| + \frac{|\zeta|}{R_{MP}} \leqslant$$

$$\leqslant AR_{MP}^{\delta} + AR_{MP}^{\delta} + 4AR_{MP}^{\delta} = 6AR_{MP}^{\delta}. \tag{6.9}$$

Следовательно, для точек P поверхности S в окрестности точки M подынтегральная функция в (6.8) имеет оценку

$$\left|\nu\,\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}\right| \leqslant \frac{6AC}{R_{MP}^{2-\delta}}, \tag{6.10}$$

которая обеспечивает сходимость несобственного интеграла (6.8) в точках M поверхности S. Оценка (6.10) справедлива для любой точки M, расположенной на поверхности S. Поэтому эта оценка обеспечивает равномерную по $M \in S$ сходимость интеграла (6.8) в любой точке $M_0 \in S$ и его непрерывность на поверхности S.

Итак, существует прямое значение потенциала двойного слоя, и это прямое значение непрерывно как функция точек поверхности S. ■

На плоскости потенциал двойного слоя существует в точках кривых Ляпунова, которые определяются условиями, аналогичными условиям 1—3 для поверхности.

7. Разрыв потенциала двойного слоя

Выше была доказана сходимость несобственного интеграла (6.8) в точках поверхности, но не равномерная сходимость этого несобственного интеграла по параметру в пространстве.

При получении оценок (6.9), (6.10) существенным было условие, что точка M лежит на поверхности S. Для точки $M \notin S$ даже при ее достаточной близости к точке $M_0 \in S$ полученные оценки не имеют места. Поэтому интеграл (6.8) не является равномерно сходящимся по параметру $M \notin S$ в точке $M_0 \in S$. Тем самым нельзя утверждать, что, так же как и потенциал простого слоя, потенциал двойного слоя является непрерывной функцией во всем пространстве.

В отличие от потенциала простого слоя потенциал двойного слоя претерпевает разрыв при переходе через поверхность. Покажем это и определим величину разрыва.

Рассмотрим сначала потенциал двойного слоя с постоянной плотностью $\nu_0 = \text{const}$:

$$W(M) = -\nu_0 \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P. \tag{6.11}$$

Будем считать, что поверхность S замкнутая. Тогда интеграл (6.11) легко вычисляется. Для вычисления его применим третью формулу Грина, положив в ней $u \equiv \nu_0$. Тогда получим

$$-\int\limits_S \nu_0 \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P = \begin{cases} 4\pi\nu_0, & M \in D, \\ 2\pi\nu_0, & M \in S, \\ 0, & M \in D_e (M \notin D+S). \end{cases} \tag{6.12}$$

Введем следующие обозначения: $\overset{\circ}{W}(P_0)$ — значение потенциала двойного слоя, когда точка P_0 лежит на поверхности S ($P_0 \in S$), т. е. прямое значение потенциала в точке P_0; $W_i(P_0)$ — предельное значение потенциала $W(M)$ в точке P_0 на поверхности изнутри, т. е.

$$W_i(P_0) = \lim_{M \to P_0 \in S} W(M), \quad M \in D,$$

$W_e(P_0)$ — предельное значение потенциала W в точке P_0 на поверхности снаружи:

$$W_e(P_0)=\lim_{M\to P_0\in S} W(M),\ M\in D_e.$$

Потенциала двойного слоя с постоянной плотностью ν_0 согласно (6 12) является кусочно-постоянной функцией. Формулу (6 12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} W_i(M) &= \mathring{W}(M)+2\pi\nu_0, \\ W_e(M) &= \bar{W}(M)-2\pi\nu_0. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Рассмотрим теперь потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью $\nu(P)$ и покажем, что для него справедливы формулы, аналогичные (6.13).

Пусть P_0 — произвольная точка поверхности S. Потенциал двойного слоя с плотностью $\nu(P)$ представим в виде

$$W(M)=\oint_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}}dS=J(M)+\tilde{W}(M)=$$

$$=\oint_S[\nu(P)-\nu(P_0)]\frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}}dS+\oint_S\nu(P_0)\frac{\cos\varphi}{R^2}dS. \tag{6.14}$$

Второе слагаемое $\tilde{W}(M)$ представляет собой потенциал двойного слоя с постоянной плотностью $\nu(P_0)$, свойства которого нам уже известны. Докажем, что первое слагаемое $J(M)$ есть функция, непрерывная в точке P_0. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость по параметру M интеграла $J(M)$ в точке P_0. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Из непрерывности функции $\nu(P)$ в точке P_0 следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность K_1 точки P_0 на поверхности S, что

$$|\nu(P)-\nu(P_0)|\leqslant\varepsilon \text{ при } P\in K_1.$$

Оценим интеграл по K_1:

$$\left|\int_{K_1}[\nu(P)-\nu(P_0)]\frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}}dS\right|\leqslant\varepsilon\int_{K_1}\frac{|\cos\varphi|}{R^2_{MP}}dS_P.$$

В силу (6.12) при достаточно малом K_1

$$\int_{K_1}\frac{|\cos\varphi|}{R^2_{MP}}dS\leqslant B \text{ при всех } M.$$

Поэтому получаем

$$\left|\int_{K_1}[\nu(P)-\nu(P_0)]\frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}}dS\right|\leqslant\varepsilon B,$$

что означает равномерную сходимость интеграла $J(M)$ в точке P_0. Значит, функция $J(M)$ непрерывна в точке P_0.

Таким образом, разрывные свойства потенциала двойного слоя $W(M)$ в точке P_0 согласно (6.14) определяются вторым слагаемым $\tilde{W}(M)$. Перейдем к пределу в (6.14) при $M \to P_0$. Сохраняя прежние обозначения и используя свойства потенциала с постоянной плотностью, получим

$$W_i(P_0) = J(P_0) + \tilde{W}_i(P_0) = J(P_0) + \overset{\circ}{\tilde{W}}(P_0) + 2\pi\nu(P_0) =$$

$$= \overset{\circ}{W}(P_0) + 2\pi\nu(F_0),$$

$$W_e(P_0) = J(P_0) + \tilde{W}_e(P_0) = J(P_0) + \tilde{W}(P_0) - 2\pi\nu(P_0) =$$

$$= \hat{W}(P) - 2\pi\nu(P_0).$$

где $\overset{\circ}{W}(P_0) = J(P_0) + \overset{\circ}{\tilde{W}}(P_0)$ — прямое значение $W(M)$ в точке P_0 псверхности S.

Таким образом, потенциал двойного слоя при переходе через поверхность претерпевает разрыв, и величина этого разрыва определяется формулами

$$W_i(F) = \hat{W}(P) + 2\pi\nu(P), \tag{6.15}$$

$$W_e(P) = \hat{W}(P) - 2\pi\nu(P), \tag{6.16}$$

$$W_i(P) - W_e(P) = 4\pi\nu(P). \tag{6.17}$$

Последняя формула определяет величину скачка потенциала двойного слоя при переходе точки M через поверхность S в точке P. Заметим, что в случае переменной плотности $\nu(P)$ при $\nu(P_0) = 0$ скачок потенциала двойного слоя в точке P_0 оказывается равным нулю.

Если поверхность S не является замкнутой, то поступим следующим образом. Дополним S поверхностью S^* так, чтобы $S \cup S^*$ была замкнутой поверхностью Ляпунова. На S^* плотность $\nu(P)$ доопределим нулем. Ясно, что проведенные выше рассуждения справедливы во всех точках непрерывности функции $\nu(P)$. Поэтому формулы (6.15)—(6.17) справедливы во всех точках поверхности S, кроме ее края.

На плоскости потенциал двойного слоя исследуется аналогично. Окончательные формулы, определяющие разрыв потенциала двойного слоя при переходе через кривую C, имеют вид

$$W_i(P) = \overset{\circ}{W}(P) + \pi\nu(P),$$

$$W_e(P) = \overset{\circ}{W}(P) - \pi\nu(P),$$

$$W_i(P) - W_e(P) = 2\pi\nu(P).$$

8. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя

Потенциал простого слоя вне поверхности S имеет производные всех порядков. Исследуем поведение нормальной производной потенциала простого слоя при переходе через поверхность S. Плотность $\mu(P)$ потенциала будем считать непрерывной на поверхности функцией.

Пусть P_0 — произвольная точка поверхности S, $\mathbf{n}_e(P_0)$ — внешняя единичная нормаль в точке P_0. Рассмотрим производную потенциала простого слоя $V(M)$ по направлению $\mathbf{n}_e(P_0)$:

$$\frac{\partial V(M)}{\partial n_e} = \mathbf{n}_e(P_0)\,\mathrm{grad}_M V(M) =$$

$$= \int_S \mu(P)\,\mathbf{n}_e(P_0)\,\mathrm{grad}_M \frac{1}{R_{MP}}\,dS_P \tag{6.18}$$

и исследуем ее поведение при $M \to P_0$. Подробно разберем только тот случай, когда точка M стремится к точке P_0 по направлению нормали $\mathbf{n}_e(P_0)$.

Учитывая, что функция R_{MP} зависит лишь от разности координат точек M и P, формулу (6.18) можно переписать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = -\int_S \mu(P)\,\mathbf{n}_e(P_0)\,\mathrm{grad}_P \frac{1}{R_{MP}}\,dS =$$

$$= \int_S \mu(P)\,[\mathbf{n}_e(P) - \mathbf{n}_e(P_0)]\,\mathrm{grad}_P \frac{1}{R}\,dS - \int_S \mu(P)\,\mathbf{n}_e(P)\,\mathrm{grad}_P \frac{1}{R}\,dS \tag{6.19}$$

$\left(\text{так как } \mathrm{grad}_M \frac{1}{R_{MP}} = -\mathrm{grad}_P \frac{1}{R_{MP}}\right)$, где $\mathbf{n}_e(P)$ — внешняя единичная нормаль к поверхности в точке P.

Второе слагаемое в (6.19) есть потенциал двойного слоя с плотностью $\mu(P)$:

$$W(M) = -\int_S \mu(P)\,\frac{\partial}{\partial n_P}\,\frac{1}{R_{MP}}\,dS_P,$$

свойства которого уже исследованы. Поэтому

$$\frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = \int_S \mu(P)\,[\mathbf{n}_e(P) - \mathbf{n}_e(P_0)]\,\mathrm{grad}_P \frac{1}{R_{MP}}\,dS +$$

$$+ W(M) = J(M) + W(M). \tag{6.20}$$

Покажем, что функция $J(M)$ непрерывна в точке P_0. Для этого оценим подынтегральную функцию в окрестности точки P_0:

$$f = \left|\mu(P)\,[\mathbf{n}_e(P) - \mathbf{n}_e(P_0)]\,\mathrm{grad}_P \frac{1}{R_{MP}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\,|\mathbf{n}_e(P)-\mathbf{n}_e(P)|\,\frac{1}{R_{MP}^2},$$

так как

$$|\mu|\leqslant C.$$

Поскольку

$$|\mathbf{n}_e(P)-\mathbf{n}_e(P_0)|=\sqrt{(\mathbf{n}_e(P)-\mathbf{n}_e(P_0))(\mathbf{n}_e(P)-\mathbf{n}_e(P_0))}=$$

$$=\sqrt{2-2\cos\gamma}=2\left|\sin\frac{\gamma}{2}\right|,$$

где γ — угол между нормалями в точках P и P_0, то

$$f\leqslant\frac{2\left|\sin\frac{\gamma}{2}\right|C}{R_{PM}^2}\leqslant\frac{\gamma C}{R_{PM}^2}\leqslant\frac{ACR_{PP_0}^{\delta}}{R_{PM}^2},$$

так как для поверхности Ляпунова $\gamma<AR_{PP_0}^{\delta}$. Полученная оценка обеспечивает непрерывность интеграла $J(M)$ в точке P_0, когда M стремится к P_0 по нормали $n_e(P_0)$. Следовательно, функция $J(M)$ непрерывна в точке P_0.

Таким образом, разрывные свойства $\frac{\partial V}{\partial n_e}$ согласно (6.20) определяются вторым слагаемым $W(M)$. Используя формулы (6.15), (6.16) для потенциала двойного слоя, из (6.20) получаем

$$\lim_{M\to P_0\, M\in D}\frac{\partial V}{\partial n_e}(M)=J(P_0)+W_i(P_0)=$$

$$=J(P_0)+\overset{\circ}{W}(P_0)+2\pi\mu(P_0)=$$

$$=\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0)\right)^0+2\pi\mu(P_0),$$

где $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0)\right)^0$ — прямое значение нормальной производной в точке P_0. Аналогичным образом

$$\lim_{M\to P_0\, M\in D_e}\frac{\partial V}{\partial n_e}(M)=\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P_0)\right)^0-2\pi\mu(P_0).$$

Введем обозначения: $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P)\right)_i$ — внутреннее предельное значение нормальной производной потенциала простого слоя; $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P)\right)_e$ — внешнее предельное значение нормальной производной потенциала простого слоя. Если поверхность незамкнутая, то внутренняя и внешняя стороны поверхности определяются выбором внешней нормали.

Тогда разрывные свойства нормальной производной потенциала простого слоя можно описать следующими формулами:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 + 2\pi\mu(P), \tag{6.21}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 - 2\pi\mu(P), \tag{6.22}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i - \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = 4\pi\mu(P). \tag{6.23}$$

Формулы для производной по внутренней нормали отличаются от полученных лишь знаком у вторых слагаемых.

Отметим, что при более жестких условиях на функцию $\mu(P)$ можно показать, что формулы (6.21)—(6.23) справедливы при любом способе стремления точки M к точке $P_0 \in S$ (за исключением направления, касательного к поверхности S).

Заметим, что из формулы (6.18) можно получить для нормальной производной потенциала простого слоя выражение вида

$$\frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = \int_S \mu(P) \frac{\cos\psi}{R_{MP}^2} dS_P,$$

где ψ — угол между нормалью $\mathbf{n}_e(P_0)$ к поверхности S в точке P_0, на которой находится точка M, и вектором $\mathbf{MP}$.

На плоскости нормальная производная потенциала простого слоя также разрывна при переходе через кривую C, и формулы, определяющие величину разрыва, имеют вид

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 + \pi\mu(P),$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 - \pi\mu(P),$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i - \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = 2\pi\mu(P).$$

Рассмотренные свойства поверхностных потенциалов были получены при условии, что функции $\mu(P)$ и $\nu(P)$ являются ограниченными и непрерывными на поверхности S (или кривой C в двумерном случае). Это условие можно ослабить. Более детальные исследования показывают, что основные свойства поверхностных потенциалов сохраняются и в том случае, когда функции $\mu(P)$ и $\nu(P)$ квадратично интегрируемы на S ($\mu(P)$, $\nu(P) \in L_2(S)$). При этом соответствующие поверхностные интегралы остаются гармоническими функциями вне S, а полученные выражения для их предельных значений выполняются почти всюду на S.

§ 7. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Метод разделения переменных и метод функции Грина позволяют получить явное решение краевых задач только в случае областей простейшего вида. Сведение краевых задач при помощи поверхностных потенциалов к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода удобно для исследования разрешимости краевых задач. Метод интегральных уравнений дает также алгоритм численного решения краевых задач для достаточно широкого класса областей.

В этом параграфе метод интегральных уравнений применяется для исследования внутренних и внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Получены интегральные уравнения для этих задач и изучены вопросы их разрешимости.

1. Основные свойства интегральных уравнений

Интегральные уравнения широко применяются при исследовании краевых задач математической физики. В нашем курсе они будут использованы при изучении разрешимости краевых задач **для уравнения Лапласа.**

В этом параграфе будут приведены (без доказательства) основные теоремы теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода *).

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(M)=\lambda\int_D K(M,\ Q)\,u(Q)\,d\tau_Q+f(M), \tag{7.1}$$

при этом будем считать, что D — конечная область размерности n. Ядро $K(M,Q)$ предполагается вещественным. Функция $K^*(M,\ Q)\equiv K(Q,\ M)$ называется союзным ядром, а интегральное уравнение с союзным ядром

$$v(M)=\lambda\int_D K(Q,\ M)\,v(Q)\,d\tau_Q+g(M) \tag{7.2}$$

называется союзным интегральным уравнением. В дальнейшем предполагается, что ядро $K(M,\ Q)$ либо непрерывно по совокупности аргументов, либо полярно, т. е. представимо в виде

$$K(M,\ Q)=\frac{H(M,Q)}{R^{\alpha}_{MQ}},$$

где $\alpha<n$ и функция $H(M,\ Q)$ непрерывна. Если $\alpha<n/2$, то ядро называется слабо полярным.

Число λ называется собственным значением ядра $K(M,\ Q)$, если существует нетривиальное решение однородного уравнения

$$u(M)=\lambda\int_D K(M,\ Q)\,u(Q)\,d\tau_Q. \tag{7.3}$$

---

*) См.: Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. Изд-во МГУ, 1989.

Нетривиальное решение уравнения (7.3) называется собственной функцией, соответствующей данному собственному значению λ.

Вещественное, симметричное, непрерывное или полярное ядро, отличное от тождественного нуля, имеет по крайней мере хотя бы одно собственное значение. Множество собственных значений не более чем счетно и не имеет конечных точек сгущения. Если число собственных значений конечно, то ядро $K(M, Q)$ является вырожденным. Рангом собственного значения называется максимальное число линейно независимых собственных функций, соответствующих этому собственному значению. Ранг собственного значения конечен.

Вопросы разрешимости неоднородного интегрального уравнения решаются теоремами Фредгольма.

Первая теорема Фредгольма. *Если λ не является собственным значением ядра $K(M, Q)$ (т. е. однородное уравнение (7.3) имеет только тривиальное решение), то неоднородное уравнение (7.1) и союзное ему уравнение (7.2) имеют и при этом единственные решения при любых непрерывных правых частях.*

Вторая теорема Фредгольма. *Если λ является собственным значением ядра $K(M, Q)$, то оно будет и собственным значением союзного ядра, и ранги их одинаковы.*

Третья теорема Фредгольма. *Если λ является собственным значением ядра $K(M, Q)$, то неоднородное уравнение (7.1) либо не имеет решения, либо решение его существует, но неединственно. Для разрешимости уравнения (7.1) необходимо и достаточно, чтобы правая часть $f(M)$ уравнения была ортогональна всем собственным функциям союзного ядра, соответствующим данному значению λ.*

Заметим, что теоремы Фредгольма справедливы и в том случае, если интегральное уравнение рассматривать в пространстве $L_2(D)$.

Напомним еще теорему Гильберта—Шмидта, справедливую для случая непрерывного или слабо полярного ядра.

Теорема Гильберта—Шмидта. *Функция $f(M)$, истокообразно представимая при помощи ядра $K(M, Q)$, т. е. представимая в виде*

$$f(M) = \int_D K(M, Q)\, h(Q)\, d\tau_Q, \quad h \in L_2(D),$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся в $\bar{D}$ ряд по собственным функциям данного ядра.

Доказательство приведенных выше теорем можно найти в руководстве по теории интегральных уравнений*).

---

*) См., например: Васильева А. Б., Тихонов Н. А Интегральные уравнения. Изд-во МГУ, 1989; Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

2. Интегральное уравнение для внутренней задачи Дирихле

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \text{ в } D, \\ &u|_S = f. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Будем считать, что S — поверхность Ляпунова, а функция $f(P)$ непрерывна на S.

Решение задачи (7.4) будем искать в виде потенциала двойного слоя:

$$u(M) = -\oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P, \tag{7.5}$$

где по-прежнему ядро интегрального представления (7.5) является производной фундаментального решения по внешней нормали $\mathbf{n}_P$ к поверхности S. При любой непрерывной плотности ν функция (7.5) удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в D. Плотность $\nu(P)$ определим так, чтобы на поверхности S функция (7.5) непрерывно примыкала к граничному условию

$$\lim_{M \to P_0 \in S} u(M) = f(P_0), \quad P_0 \in S, \tag{7.6}$$

причем точка $M \in D$ стремится к граничной точке P поверхности S изнутри области D. При этом, чтобы получить решение, непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$, необходимо в качестве граничных значений искомого решения на поверхности S принять предельные значения $u_i(P_0)$ потенциала двойного слоя (7.5) изнутри области. Из условия (7.6), учитывая свойства потенциала двойного слоя (см. формулу (6.15)), получаем

$$-\int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P + 2\pi\nu(P_0) = f(P_0), \quad P_0 \in S. \tag{7.7}$$

Перепишем (7.7) в виде

$$\nu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} f(P_0), \quad P_0 \in S. \tag{7.8}$$

Соотношение (7.8) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода с полярным ядром относительно неизвестной плотности $\nu(P)$, причем в силу оценки (6.9), полученной в предыдущем параграфе, для ядра уравнения (7.8) имеет место оценка

$$|K(P_0, P)| \leqslant \frac{A}{R_{PP_0}^{2-\delta}}, \quad \delta > 0,$$

обеспечивающая сходимость интеграла.

Если существует решение $\nu(P)$ уравнения (7.8), то, подставляя его в формулу (7.5), получим классическое решение внутренней задачи Дирихле. Таким образом, вопрос о разрешимости внутренней задачи Дирихле (7.4) сводится к вопросу о разрешимости интегрального уравнения (7.8).

Покажем, что уравнение (7.8) имеет и при этом единственное решение при любой непрерывной функции f.

Для уравнений Фредгольма с полярным ядром справедлива теория Фредгольма. Поэтому, согласно первой теореме Фредгольма, для доказательства однозначной разрешимости уравнения (7.8) достаточно показать, что однородное уравнение

$$\nu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} \, dS_P = 0 \tag{7.9}$$

имеет только тривиальное решение. Согласно второй теореме Фредгольма исходное и союзное интегральное уравнение

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \oint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} \, dS_P = 0 \tag{7.10}$$

имеют одни и те же собственные значения, и ранги их одинаковы. В данном случае легче исследовать уравнение (7.10).

Покажем, что уравнение (7.10) имеет только тривиальное решение. Доказательство проведем от противного. Пусть уравнение (7.10) имеет ненулевое решение $\mu_0(P) \not\equiv 0$. Естественно считать, что оно непрерывно. Построим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$:

$$V(M) = \oint_S \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{MP}}. \tag{7.11}$$

Функция $V(M)$ является гармонической функцией как в D_i, так и в D_e и равномерно стремится к нулю в бесконечности.

Вычислим предельное значение нормальной производной функции $V(M)$ на S. Согласно (6.22)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \oint_S \mu_0(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} \, dS_P - 2\pi\mu_0(P_0), \quad P_0 \in S.$$

Поскольку $\mu_0(P)$ есть решение уравнения (7.10),

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = 0 \text{ на } S.$$

Таким образом, функция $V(M)$ является решением внешней однородной задачи Неймана

$$\Delta V = 0 \text{ в } D_e$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n_e}\right|_S = 0. \qquad (7.12)$$

$$V \rightrightarrows 0, \quad r \to \infty.$$

В силу единственности решения внешней задачи Неймана в трехмерном случае задача (7.12) имеет только тривиальное решение:

$$V(M) \equiv 0 \text{ в } D_e \cup S.$$

Функция $V(M)$, как потенциал простого слоя (7.11), непрерывна при переходе через поверхность S. Поэтому в области D функция $V(M)$ есть решение однородной задачи Дирихле

$$\Delta V = 0 \text{ в } D,$$

$$V|_S = 0.$$

В силу единственности внутренней задачи Дирихле $V(M) \equiv 0$ в $D \cup S$. Итак, функция $V(M) \equiv 0$ во всем пространстве. Воспользовавшись формулой (6.17), находим

$$\mu_0(P) \equiv 0 \text{ на } S,$$

что противоречит исходному предположению. Следовательно, уравнение (7.10) имеет только тривиальное решение.

Согласно первой теореме Фредгольма неоднородное уравнение (7.8) имеет и при этом единственное решение при любой непрерывной функции f.

Отсюда вытекает, что при любой непрерывной функции f внутренняя краевая задача Дирихле (7.4) имеет классическое решение, и это решение единственно.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.12. *Внутренняя задача Дирихле (7.4) имеет классическое решение при любой непрерывной функции* f.

Заметим, что построение функции Грина для задачи Дирихле эквивалентно решению краевой задачи со специальным граничным условием. Отсюда вытекает существование функции Грина задачи Дирихле для области, ограниченной поверхностью Ляпунова.

Сделаем еще одно замечание. По ходу рассуждений было доказано утверждение, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 5.1. *Если потенциал простого слоя с непрерывной плотностью тождественно равен нулю либо в D, либо в D_e, то его плотность равна нулю всюду на S.*

3. Интегральное уравнение для внешней задачи Неймана

Рассмотрим теперь внешнюю задачу Неймана

$$\Delta u = 0 \text{ в } D_e,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_e}\right|_S = 0 \qquad (7.13)$$

$$u \rightrightarrows 0 \text{ в бесконечности.}$$

Решение этой задачи будем искать в виде потенциала простого слоя:

$$u(M) = \oint_S \mu(P) \frac{dS_P}{R_{MP}}. \tag{7.14}$$

При любой непрерывной плотности $\mu(P)$ функция (7.14) гармоническая в D_e и удовлетворяет условию регулярности на бесконечности. Плотность $\mu(P)$ определим так, чтобы выполнялось граничное условие

$$\lim_{M \to P_0 \in S} \frac{\partial u}{\partial n_e}(M) = f(P_0), \quad P_0 \in S. \tag{7.15}$$

Воспользовавшись формулой (6.22), из (7.15) получим

$$\oint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P - 2\pi\mu(P_0) = f(P_0),$$

или

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi} \oint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = -\frac{1}{2\pi} f(P_0), \quad P_0 \in S. \tag{7.16}$$

Найдя решение уравнения (7.16) и подставив его в (7.14), получим классическое решение задачи (7.13). Таким образом, вопрос о разрешимости краевой задачи (7.13) опять сведен к вопросу о разрешимости интегрального уравнения. Интегральное уравнение (7.16) согласно первой теореме Фредгольма имеет и притом единственное решение при любой непрерывной функции f, поскольку соответствующее однородное уравнение (уравнение (7.10)), как было доказано, имеет только тривиальное решение.

Таким образом, внешняя задача Неймана разрешима при любой непрерывности функции f. Следовательно, имеет место теорема.

Теорема 5.13. *Внешняя задача Неймана* (7.13) *имеет классическое решение при любой непрерывной функции* f.

4. Интегральное уравнение для внутренней задачи Неймана и внешней задачи Дирихле

Предыдущее рассмотрение показало, что интегральные уравнения для внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана оказались союзными интегральными уравнениями, так что исследование этих двух задач следовало бы вести одновременно. Естественно того же ожидать от внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана. Поэтому исследование этих двух задач будем вести одновременно.

Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана

$$\Delta u = 0 \text{ в } D,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_e}\right|_S = f(P), \quad P \in S. \tag{7.17}$$

Решение задачи (7.17) будем искать в виде потенциала простого слоя:

$$u(M) = \oint_S \mu(P) \frac{dS_P}{R_{MP}}. \tag{7.18}$$

Плотность $\mu(P)$ определяется из граничного условия

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_e}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n_e}\right)^0 + 2\pi\mu(P_0) = f(P_0), \quad P_0 \in S.$$

Следовательно, для функции $\mu(P)$ получаем интегральное уравнение

$$\mu(P_0) + \frac{1}{2\pi} \oint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} f(P_0), \quad P_0 \in S. \tag{7.19}$$

Подставляя решение уравнения (7.19) в (7.18), получим классическое решение задачи (7.17). Напомним, что задача (7.17) имеет решение не всегда. Необходимым условием существования решения является соотношение

$$\oint_S f(P)\, dS = 0. \tag{7.20}$$

Одновременно будем рассматривать и внешнюю задачу Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ в } D_e,$$

$$u|_S = f, \tag{7.21}$$

u регулярна на бесконечности.

Решение задачи (7.21) будем искать в виде

$$u(M) = -\oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P + \frac{\alpha}{R_{MO}}, \tag{7.22}$$

где $\alpha = \text{const}$, R_{MO} — расстояние от точки M до некоторой фиксированной точки O, расположенной в области $D: O \in D$. Решение представлено в виде потенциала двойного слоя и потенциала точечного заряда, находящегося внутри области D. Необходимость второго слагаемого в (7.22) связана с тем, что потенциал двойного слоя на бесконечности имеет оценку $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ (см. п. 3), в то время как функция, регулярная на бесконечности, может убывать как $O\left(\frac{1}{r}\right)$. Поэтому если в

(7.22) опустить второе слагаемое, то решения задачи (7.21), представимого только в виде потенциала двойного слоя, т. е. убывающего в бесконечности как $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$, может и не быть. Величину α определим позже.

Плотность потенциала $\nu(P)$ определяется граничным условием

$$\lim_{M \to P_0 \in S} u(M) = f(P_0), \quad P_0 \in S.$$

Используя формулу (6.16), отсюда получим

$$-\oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R} dS - 2\pi\nu(P_0) + \frac{\alpha}{R_{P_0 O}} = f(P_0).$$

Следовательно, для функции $\nu(P)$ получаем интегральное уравнение

$$\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi} \oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\alpha}{R_{P_0 O}} - f(P_0) \right\}, \quad P_0 \in S. \tag{7.23}$$

Заметим, что величина α пока не фиксирована.

Интегральные уравнения (7.19) и (7.23) являются союзными интегральными уравнениями. Поэтому разрешимость их нужно исследовать одновременно.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi} \oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = 0, \quad P_0 \in S. \tag{7.24}$$

Ранее (см. 6.12)) было показано, что при $P_0 \in S$

$$\frac{1}{2\pi} \oint_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}} dS_P = -1, \quad P_0 \in S.$$

Поэтому очевидно, что функция $\nu(P) = \nu_0 = \text{const}$ является решением уравнения (7.24). Это означает, что $\lambda = 1$ является собственным значением ядра

$$K(P_0, P) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PP_0}},$$

которому соответствует собственная функция $\nu = \nu_0 = \text{const}$. Согласно второй теореме Фредгольма $\lambda = 1$ является собственным значением и союзного ядра

$$K^*(P_0, P) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}}.$$

Поэтому прежде всего вычислим ранг этого собственного значения.

Покажем, что ранг собственного значения $\lambda=1$ равен единице. Для этого достаточно показать, что однородное уравнение

$$\mu(P_0)+\frac{1}{2\pi}\oint\limits_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}\,dS_P=0 \qquad (7.25)$$

имеет только одну собственную функцию. Пусть $\mu_0(P)$ — собственная функция уравнения (7.25). Составим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$:

$$V(M)=\oint\limits_S \mu_0(P)\frac{dS_P}{R_{MP}}.$$

Поскольку $\mu_0(P)$ удовлетворяет уравнению (7.25), то

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i=\oint\limits_S \mu_0(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}\,dS_P+2\pi\mu_0(P_0)\equiv 0.$$

Следовательно, функция $V(M)$ есть решение внутренней однородной задачи Неймана

$$\Delta V=0 \text{ в } D,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n_e}\right|_S=0.$$

Поэтому $V(M)=C=\text{const}$ в $D+S$. Заметим, что постоянная $C\neq 0$, поскольку иначе по лемме 5.1 п. 2 получим $\mu_0\equiv 0$ на S, что противоречит сделанному предположению.

Пусть существует второе ненулевое решение $\tilde{\mu}_0(P)$ уравнения (7.25), т. е. вторая линейно независимая на S с $\mu_0(P)$ собственная функция, соответствующая $\lambda=1$. Тогда аналогично предыдущему

$$\tilde{V}(M)=\oint\limits_S \tilde{\mu}_0(P)\frac{dS_P}{R_{MP}}\equiv\tilde{C}=\text{const}\neq 0$$

всюду в $D\cup S$.

Построим функцию

$$V_1(M)=\frac{\tilde{C}}{C}V(M)-\tilde{V}(M)=\oint\limits_S\left(\frac{\tilde{C}}{C}\mu_0-\tilde{\mu}_0\right)\frac{dS}{R_{MP}}. \qquad (7.26)$$

По построению $V_1(M)\equiv 0$ в $D\cup S$. Поскольку согласно (7.26) $V_1(M)$ есть потенциал простого слоя, то по лемме 5.1 его плотность равна нулю на S, т. е.

$$\frac{\tilde{C}}{C}\mu_0(P)-\tilde{\mu}_0(P)\equiv 0,\ P\in S.$$

Это означает, что функции $\mu_0(P)$ и $\mu_0(P)$ линейно зависимы.

Следовательно, ранг собственного значения $\lambda=1$ равен единице. Собственную функцию $\mu_0(P)$ уравнения (7.25) нормируем так, чтобы

$$V(M)=\oint_S \mu_0(P)\frac{dS_P}{R_{MP}}\equiv 1 \text{ всюду в } D+S. \tag{7.27}$$

Потенциал $V(M)$ с плотностью $\mu_0(P)$ носит название потенциала Робэна.

Итак, уравнение (7.25) имеет единственную собственную функцию $\mu_0(P)$, а союзное однородное уравнение

$$\nu(P_0)+\frac{1}{2\pi}\oint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P=0,\ P_0\in S,$$

имеет единственную собственную функцию $\nu=\nu_0=\text{const}$, причем можно считать, что $\nu_0\equiv 1$.

Отсюда получаем, используя третью теорему Фредгольма что неоднородное уравнение (7.19) разрешимо, если

$$\oint_S f(P)\cdot 1\cdot dS=0, \tag{7.28}$$

а уравнение (7.23) разрешимо, если

$$\oint_S \left\{\frac{\alpha}{R_{PO}}-f(P)\right\}\mu_0(P)\,dS_P=0. \tag{7.29}$$

При выполнении условия (7.28) решение уравнения (7.19) имеет вид

$$\mu(P)=\bar{\mu}(P)+C\mu_0(P), \tag{7.30}$$

где $\bar{\mu}$ — некоторое решение неоднородного уравнения (7.19), C — произвольная постоянная. Подставляя (7.30) в (7.18), получаем решение внутренней задачи Неймана

$$u(M)=\oint_S \bar{\mu}(P)\frac{dS_P}{R_{MP}}+C\oint_S \mu_0(P)\frac{dS_P}{R_{MP}},$$

или согласно (7.27)

$$u(M)=\oint_S \bar{\mu}(P)\frac{dS_P}{R_{MP}}+C. \tag{7.31}$$

Итак, условие (7.20) является не только необходимым, но и достаточным условием разрешимости внутренней задачи Неймана. При его выполнении она имеет решение при любой непрерывной функции f, представимое в виде (7.31).

Рассмотрим теперь условие (7.29). Его можно записать в виде

$$\alpha \oint_S \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{PO}} = \oint_S \mu_0(P) f(P)\, dS_P.$$

Поскольку $O \in D$, то в силу (7.27)

$$\oint_S \mu_0(P) \frac{dS_P}{R_{PO}} \equiv 1.$$

Поэтому

$$\alpha = \oint_S \mu_0(P) f(P)\, dS_P. \tag{7.32}$$

Теперь будем считать, что постоянная α определена соотношением (7.32). Тогда условие разрешимости (7.20) выполняется автоматически. Уравнение (7.23) разрешимо при любой непрерывной функции $f(P)$, но решение его неединственно и имеет вид

$$\nu(P) = \bar{\nu}(P) + C, \tag{7.33}$$

где $\bar{\nu}(P)$ — некоторое решение уравнения (7.23), C — произвольная постоянная. Подставляя (7.33) в (7.22), получим решение внешней задачи Дирихле

$$u(M) = -\oint_S \bar{\nu}(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R}\, dS - C \oint_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}}\, dS_P + \frac{\alpha}{R_{MO}}. \tag{7.34}$$

Так как при $M \in D_c$

$$\oint_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}}\, dS_P \equiv 0,$$

из (7.34) получаем

$$u(M) = -\oint_S \bar{\nu}(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}}\, dS_P + \frac{\alpha}{R_{MO}}.$$

Величина α определяется соотношением (7.32). Таким образом, внешняя задача Дирихле при любой непрерывной функции f имеет единственное классическое решение.

Проведенные рассуждения показывают, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 5.14. *Внешняя задача Дирихле* (7.21) *имеет классическое решение при любой непрерывной функции* f.

Теорема 5.15. *Внутренняя задача Неймана* (7.17) *имеет классическое решение при любой непрерывной функции* f, *удовлетворяющей условию* (7.20).

Замечание. В этом параграфе изложен метод интегральных уравнений для краевых задач для уравнения Лапласа. Краевая задача для уравнения Пуассона рассматривается аналогично.

Для примера рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -F \text{ в } D,$$

$$u|_S = f(P)|_S. \tag{7.35}$$

Пусть $V(M)$ — объемный потенциал с плотностью $F(Q)$:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_D \frac{F(Q)}{R_{MQ}} dV_Q.$$

Вместо $u(M)$ введем новую неизвестную функцию $U(M)$ соотношением

$$u(M) = U(M) + V(M).$$

Тогда из (7.35), учитывая свойства объемного потенциала, получаем краевую задачу для функции $U(M)$:

$$\Delta U = 0 \text{ в } D,$$

$$U|_S = \tilde{f}(P)|_S, \tag{7.36}$$

где

$$\tilde{f}(P) = f(P) - V(P)|_{P \in S}.$$

Таким образом, задача (7.35) сведена к краевой задаче (7.36) для уравнения Лапласа, которая подробно рассмотрена ранее. Аналогичным образом и другие краевые задачи для уравнения Пуассона сводятся к соответствующим краевым задачам для уравнения Лапласа.

Глава VI

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения в частных производных второго порядка параболического типа наиболее часто встречаются при рассмотрении процессов тепло- и массопереноса. В то же время при определенных условиях уравнения параболического типа используются для описания электромагнитных и других волновых процессов (приближение параболического уравнения). В настоящей главе изучаются основные свойства уравнения параболического типа, для которого ставятся начально-краевая задача и задача Коши.

§ 1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В § 2 гл. I было получено уравнение теплопроводности и поставлена начально-краевая задача, описывающая процесс распространения тепла в области D. Уравнение теплопроводности является типичным уравнением параболического типа.

Введем следующие определения. Назовем $(n+1)$-мерным открытым цилиндром Q_T область вида

$$Q_T = D \times (0,\ T] = \{(M,\ t) : M \in D,\ t \in (0,\ T]\}.$$

Область

$$\bar{Q}_T = \bar{D} \times [0,\ T] = \{(M,\ t) : M \in \bar{D},\ t \in [0,\ T]\}$$

назовем замкнутым $(n+1)$-мерным цилиндром, $\bar{D} = DUS$.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в случае трех пространственных переменных ставится следующим образом:

$$\rho(M)\, u_t = \operatorname{div}(k(M) \operatorname{grad} u) + f(M,\ t),\ (M,\ t) \in Q_\infty, \tag{1.1}$$

$$u(M,\ 0) = \varphi(M),\ M \in \bar{D}, \tag{1.2}$$

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)\, u = \mu(P,\ t) \quad P \in S,\ t \in [0,\ \infty), \tag{1.3}$$

где $\rho(M) = \tilde{\rho}(M)\, c(M) > 0$, $\tilde{\rho}(M)$ — плотность, $c(M)$ — удельная теплоемкость, $k(M) > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\alpha(P) \geqslant 0$, $\beta(P) \geqslant 0$, причем $\alpha(P) + \beta(P) > 0$.

Напомним (см. гл. I), что задача (1.1)—(1.3) описывает не только процессы распространения тепла, но и явления диффузии, а также процессы распространения волн в приближении параболического уравнения и ряд других физических процессов.

Определение. Классическим решением начально-краевой задачи (1.1)—(1.3) называется функция $u(M, t)$, непрерывная вместе с первыми производными по координатам в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_\infty$, имеющая непрерывные производные первого порядка по t и второго порядка по M в открытом цилиндре Q_∞, удовлетворяющая в Q_∞ уравнению (1.1), начальному условию (1.2) и граничному условию (1.3).

Необходимым условием существования классического решения начально-краевой задачи (1.1)—(1.3) является условие согласования начального (1.2) и граничного (1.3) условий:

$$\alpha(P)\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n}+\beta(P)\varphi(P)=\mu(P,\ 0),\ P\in S.$$

В дальнейшем будут приведены достаточные условия гладкости коэффициентов уравнения и функций $f(M, t)$, $\varphi(M)$, $\mu(P, t)$, при которых существует классическое решение задачи (1.1)—(1.3).

§ 2. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Докажем следующее важное свойство классического решения уравнения теплопроводности.

Теорема 6.1 (принцип максимума). *Решение однородного уравнения теплопроводности*

$$\rho u_t=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u), \tag{2.1}$$

непрерывное в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T=\bar{D}\times[0\,T]$, во внутренних точках этого цилиндра не может принимать значений больших, чем максимальное из начального и граничного значений.

Доказательство. Нам нужно доказать, что если

$$\mathcal{M}=\max\left\{\begin{matrix}u(M,\ 0), & u(P,\ t) \\ M\in\bar{D} & P\in S,\ t\in[0,\ T]\end{matrix}\right\},$$

то

$$u(M,\ t)\leqslant\mathcal{M},\ (M,\ t)\in Q_T.$$

Доказательство будем вести методсм от противного. Пусть в некоторой внутренней точке цилиндра $(M_0,\ t_0)\in Q_T$ функция $u(M,\ t)$ достигает своего максимального значения, большего $\mathcal{M}$: $u(M_0,\ t_0)>\mathcal{M}$. Таким образом,

$$u(M_0,\ t_0)=\mathcal{M}+\varepsilon,\ \text{где}\ \varepsilon>0.$$

Введем вспомогательную функцию

$$v(M, t)=u(M, t)+\alpha(t_0-t), \tag{2.2}$$

где $\alpha>0$ — постоянное число, которое мы определим в дальнейшем.

Очевидно, $v(M_0, t_0)=\mathcal{M}+\varepsilon$ и

$$\max\begin{Bmatrix} v(M, 0), & v(P, t) \\ M\in\bar{D} & P\in S,\ t\in[0, T]\end{Bmatrix}\leqslant\mathcal{M}+\alpha T<\mathcal{M}+\frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.3}$$

если выбрать α так, чтобы $\alpha T<\frac{\varepsilon}{2}$.

Так как функция $v(M, t)$ непрерывна в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T$, то она должна в некоторой точке $(M_1, t_1)\in\bar{Q}_T$ достигать своего максимального значения. Очевидно, что

$$v(M_1, t_1)\geqslant v(M_0, t_0)=\mathcal{M}+\varepsilon,$$

откуда следует, что точка (M_1, t_1) — внутренняя точка цилиндра Q_T, поскольку в силу (2.3) на границе цилиндра Q_T (т. е. на границе области D и в начальный момент) максимальное значение функции $v(M, t)$ не превосходит величины $\mathcal{M}+\frac{\varepsilon}{2}$.

Итак, $(M_1, t_1)\in Q_T$, т. е. $M_1\in D$, $t_1\in(0, T]$.

Поскольку в точке (M_1, t_1) функция $v(M, t)$ достигает своего максимального значения, то в этой точке выполняются условия максимума

$$\operatorname{grad} v(M_1, t_1)=0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}(M_1, t_1)\geqslant 0,\quad \Delta v(M_1, t_1)\leqslant 0. \tag{2.4}$$

Заметим, что в формуле (2.4) при $t_1<T$ $\frac{\partial v}{\partial t}(M_1, t_1)=0$, а при $t_1=T$ $\frac{\partial v}{\partial t}(M_1, t_1)\geqslant 0$.

Из формул (2.2) и (2.4) следует, что

$$\operatorname{grad} u(M_1, t_1)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(M_1, t_1)\geqslant\alpha>0,$$

$$\Delta u(M_1, t_1)\leqslant 0. \tag{2.5}$$

Функция $u(M, t)$ является решением уравнения (2.1), которое можно записать в следующем виде:

$$\rho u_t=k\Delta u+\operatorname{grad} k\operatorname{grad} u. \tag{2.6}$$

Сравнивая (2.5) и (2.6) и учитывая, что по условию $\rho(M)>0$, $k(M)>0$, приходим к выводу, что в точке (M_1, t_1) уравнение (2.6) не выполняется. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствия.

1) Для уравнения параболического типа имеет место принцип минимума.

Теорема 6.2 (принцип минимума). *Решение однородного уравнения теплопроводности* (2.1), *непрерывное в замкнутом* *цилиндре $\bar{Q}_T$, во внутренних точках этого цилиндра не может принимать значений меньших, чем минимальное из начального и граничного значений.*

Эта теорема сразу следует из доказанного принципа максимума, если учесть, что функция $\bar{u}(M, t) = -u(M, t)$ имеет максимальное значение там, где функция $u(M, t)$ имеет минимальное значение. Из принципа максимума и минимума следует двухсторонняя оценка:

$$\min \begin{Bmatrix} u(M, 0), & u(P, t) \\ M \in \bar{D} & P \in S, \; t \in [0, T] \end{Bmatrix} \leqslant u(M, t) \leqslant$$

$$\leqslant \max \begin{Bmatrix} u(M, t), & u(P, t) \\ M \in \bar{D} & P \in S, \; t \in [0, T] \end{Bmatrix}.$$

2) Принцип сравнения 1.

Теорема 6.3. *Если два решения уравнения теплопроводности* (1.1), *непрерывные в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T$, удовлетворяют условиям*

$$u_1(M, 0) \geqslant u_2(M, 0), \; M \in \bar{D} \tag{2.7}$$

и

$$u_1(P, t) \geqslant u_2(P, t), \; P \in S, \; t \in [0, T], \tag{2.8}$$

то

$$u_1(M, t) \geqslant u_2(M, t), \; (M, t) \in \bar{Q}_T. \tag{2.9}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $v = u_1 - u_2$. В силу линейности уравнения теплопроводности функция v удовлетворяет однородному уравнению (2.1), причем как классическое решение этого уравнения функция $v(M, t)$ непрерывна в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T$. Так как из условий (2.7) и (2.8) следует, что

$$v(M, 0) \geqslant 0, \; M \in \bar{D},$$

$$v(P \;\; t) \geqslant 0, \; P \in S, \; t \in [0, T],$$

применяя к функции $v(M, t)$ принцип минимума, получим

$$v(M, t) \geqslant 0. \; (M, t) \in \bar{Q}_T,$$

откуда следует (2.9).

3) Принцип сравнения 2.

Теорема 6.4. *Если два решения уравнения теплопроводности* (1.1), *непрерывные в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T$, удовлетворяют условиям*

$$|u_1(M, 0) - u_2(M, 0)| \leqslant \varepsilon, \; M \in \bar{D},$$

и

$$|u_1(P, t) - u_2(P, t)| \leqslant \varepsilon, \; P \in S, \; t \in [0, T],$$

то

$$|u_1(M,\ t)-u_2(M,\ t)|\leqslant\varepsilon,\ (M,\ t)\in\overline{Q}_T. \qquad (2.10)$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$v_1(M,\ t)=-\varepsilon,\ v_2(M,\ t)=u_1(M,\ t)-u_2(M,\ t),\ v_3(M,\ t)=\varepsilon.$$

Эти функции удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности (2.1) и непрерывны в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$. Применяя принцип сравнения 1 к функциям v_1 и v_2 и к функциям v_2 и v_3, получим

$$v_1(M,\ t)\leqslant v_2(M,\ t)\leqslant v_3(M,\ t),\ (M,\ t)\in\overline{Q}_T,$$

откуда следует (2.10).

Заметим, что доказанный принцип максимума не противоречит существованию классического решения уравнения теплопроводности (2.1), равного постоянной.

Физически принцип максимума для уравнения (2.1) означает отсутствие флуктуаций: температура тела во внутренней точке не может стать большей, чем температура тела в начальный момент или на границе тела при отсутствии источников ($f(M)\equiv 0$).

Принцип максимума выполняется и для общего уравнения параболического типа, описывающего самые различные физические явления, а не только процессы распространения тепла. Имеет место следующая теорема *).

Теорема (принцип максимума для общего параболического уравнения). *Пусть функция $u(M, t)$ непрерывна в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T=\{M\in\overline{D},\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ и удовлетворяет в открытом цилиндре Q_T однородному уравнению*

$$\rho u_t=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)-qu, \qquad (2.11)$$

где $\rho(M)$, $k(M)>0$, а $q(M)\geqslant 0$. Тогда функция $u(M, t)$ может достигать своих положительного максимального и отрицательного минимального значения только либо при $t=0$, либо на поверхности S границы области D.

Отметим, что если функция $u(M, t)$ имеет физический смысл температуры, то при положительной температуре и условии $q\geqslant 0$ член уравнения (2.11) $-qu$ описывает процесс поглощения тепла.

§ 3. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с граничными условиями первого рода (задачу Дирихле)

*) См: Владимиров В. С. Уравнения математической физики 4-е изд. М.: Наука. 1988.

$$\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f, \ (M, t) \in Q_T, \tag{3.1}$$

$$u(M, 0) = \varphi(M), \ M \in \overline{D}, \tag{3.2}$$

$$u(P, t) = \mu(P, t), \ P \in S, \ t \in [0, T]. \tag{3.3}$$

Если рассматривать классическое решение задачи (3.1)—(3.3), необходимо добавить условие согласования начального и граничного условий

$$\varphi(P) = \mu(P, 0), \ P \in S.$$

Докажем для задачи (3.1)—(3.3) теорему единственности.

Теорема 6.5. *Задача* (3.1)—(3.3) *может иметь только одно классическое решение.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют два классических решения задачи (3.1)—(3.3) $u_1(M, t)$ и $u_2(M, t)$. Рассмотрим функцию $v = u_1 - u_2$. Очевидно, $v(M, t)$ является классическим решением однородной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (3.1), непрерывным в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$. Применяя к функции $v(M, t)$ принцип максимума, получим

$$v(M, t) \leqslant 0, \ (M, t) \in \overline{Q}_T,$$

а применяя принцип минимума, имеем

$$v(M, t) \geqslant 0, \ (M, t) \in \overline{Q}_T.$$

Из двух последних формул следует, что

$$v(M, t) = 0, \ (M, t) \in \overline{Q}_T,$$

т. е. $u_1 \equiv u_2$, $(M, t) \in \overline{Q}_T$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Если существует классическое решение задачи (3.1)—(3.3), то оно устойчиво по начальным и граничным значениям.

Теорема 6.6. *Классическое решение задачи* (3.1)—(3.3) *устойчиво по начальным и граничным значениям.*

Доказательство. Пусть $u_1(M, t)$ — решение задачи (3.1)—(3.3) с начальной и граничной функциями $\varphi_1(M)$, $\mu_1(P, t)$, а $u_2(M, t)$ — решение той же задачи с начальной и граничной функциями $\varphi_2(M)$, $\mu_2(P, t)$. Предположим, что выполняются неравенства

$$|\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| \leqslant \varepsilon, \ M \in \overline{D},$$

$$|\mu_1(P, t) - \mu_2(P, t)| \leqslant \varepsilon, \ P \in S, \ t \in [0, T].$$

Нам нужно доказать, что функции $u_1(M, t)$ и $u_2(M, t)$ удовлетворяют неравенству

$$|u_1(M, t) - u_2(M, t)| \leqslant \varepsilon, \ (M, t) \in \overline{Q}_T. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4) сразу следует из принципа сравнения 2, если его применить к функциям $u_1(M, t)$ и $u_2(M, t)$.

§ 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СЛУЧАЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

1. Построение формального решения начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями

Проведем редукцию (см. § 1 гл. III) общей начально-краевой задачи (1.1)—(1.3) и рассмотрим задачу для однородного уравнения теплопроводности с неоднородным начальным и однородным граничным условиями

$$\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u), \quad (M, t) \in Q_\infty, \tag{4.1}$$

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad M \in \bar{D}, \tag{4.2}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0, \quad P \in S, \quad t \in [0, \infty). \tag{4.3}$$

Для классического решения задачи (4.1)—(4.3) должны быть выполнены условия согласования начального и граничного условий

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \beta \varphi |_S = 0.$$

Построим методом Фурье формальное решение задачи (4.1)—(4.3). Общая схема метода разделения переменных приведена в § 4 гл. III.

Рассмотрим в области D следующую задачу Штурма—Лиувилля:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) + \lambda \rho v = 0, \quad M \in D, \tag{4.4}$$

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial n} + \beta v |_S = 0.$$

Из общей теории следует, что существуют счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$ и полная в области D система собственных функций $\{v_n(M)\}$. Будем искать решение задачи (4.1)—(4.3) в виде разложения по этой системе:

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) v_n(M). \tag{4.5}$$

Для функции $T_n(t)$ получаем уравнение

$$T_n' + \lambda_n T_n = 0,$$

решение которого имеет вид

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}.$$

Таким образом,

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} v_n(M). \tag{4.6}$$

Коэффициенты ряда (4.6) определяются из начального условия (4.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M) = \varphi(M). \tag{4.7}$$

В силу полноты системы собственных функций задачи Штурма—Лиувилля (4.4), если функция $\varphi(M)$ удовлетворяет условиям теоремы Стеклова ($\varphi \in C^{(2)}(\bar{D})$) и удовлетворяет граничным условиям (4.3), то ряд (4.7) сходится к функции $\varphi(M)$ равномерно.

Коэффициенты C_n вычисляются по формуле

$$C_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D \varphi(M) v_n(M) \rho(M) dV_M, \tag{4.8}$$

где

$$\|v_n\|^2 = \int_D v_n^2(M) \rho(M) dv \tag{4.9}$$

— квадрат нормы собственной функции.

Итак, формально построенное решение задачи (4.1)—(4.3) представляется рядом (4.6), коэффициенты которого определяются по формулам (4.8)—(4.9).

Подчеркнем еще раз, что мы построили решение задачи чисто формально. Необходимо обоснование того, что функция $u(M, t)$, представимая рядом (4.6), является классическим решением задачи (4.1)—(4.3). Оно может быть проведено при условиях гладкости функции $\varphi(M)$, обеспечивающих не только равномерную сходимость ряда (4.7), но и удовлетворение функцией (4.6) уравнению всюду в цилиндре Q. Это обоснование будет проведено в следующем пункте для одномерной задачи Дирихле.

2. Существование классического решения уравнения теплопроводности на отрезке

Рассмотрим задачу для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами на отрезке при однородных условиях Дирихле:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \tag{4.10}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4.11}$$

$$u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=0,\ 0\leqslant t<\infty, \tag{4.12}$$

где коэффициент $a^2=k/c\rho$, k — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность. Коэффициент a^2 часто называют коэффициентом температуропроводности.

Формальное построение решения этой задачи методом Фурье было проведено в гл. III. Оно имеет вид

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{4.13}$$

где

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,\ n=1,\ 2,\ \ldots \tag{4.14}$$

Покажем, что при определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ ряд (4.13) с коэффициентами, вычисляемыми по формуле (4.14), представляет собой классическое решение задачи (4.10)—(4.12).

Напомним, что необходимым условием существования классического решения задачи (4.10)—(4.12) является условие согласования начального (4.11) и граничных (4.12) условий: $\varphi(0)=\varphi(l)=0$.

Предварительно сформулируем полезное вспомогательное положение — обобщенный принцип суперпозиции.

Лемма 6.1 (обобщенный принцип суперпозиции). *Пусть $u_n(x,t)$, $n=1,2,\ldots$, — частные решения линейного однородного дифференциального уравнения обыкновенного или в частных производных $L[u_n(x,t)]=0$ и пусть все дифференциальные операции над функцией $u=\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,\ t)$, входящие в это уравнение, можно проводить путем почленного дифференцирования ряда. Тогда функция $u(x,t)$ также удовлетворяет уравнению $L[u]=0$.*

Доказательство. При выполнении сформулированных в лемме условий получаем

$$L[u]=L\left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty} C_n L[u_n]=0. \ ■$$

В качестве достаточного условия для возможности почленного дифференцирования ряда будем пользоваться равномерной сходимостью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n L[u_n]$, получаемого в результате дифференцирования *).

*) См: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2. 2-е изд. М.: Наука, 1980.

Напомним также известное свойство рядов Фурье *).

Если периодическая с периодом $2l$ функция $F(x)$ имеет на отрезке $[-l, l]$ k непрерывных производных, а $(k+1)$-я производная ее на этом отрезке кусочно-непрерывна, то сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k \{|a_n| + |b_n|\}, \tag{4.15}$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье в разложении функции $F(x)$ по тригонометрической системе $\left\{\cos \frac{\pi n}{l} x, \sin \frac{\pi n}{l} x\right\}$.

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, l]$ и разлагается в ряд Фурье только по $\sin \frac{\pi n}{l} x$, то сформулированные требования должны выполняться для функции $F(x)$, являющейся нечетным продолжением функции $F(x)$. В частности, для непрерывности и периодичности с периодом $2l$ функции $F(x)$ необходимо, чтобы $f(0)=0$ и $f(l)=0$. Непрерывность первой производной в точках $x=0$ и $x=l$ при нечетном продолжении получается автоматически.

Теорема 6.7. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *непрерывна на отрезке* $[0, l]$, *имеет на нем кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям* $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. *Тогда существует классическое решение задачи* (4.10)—(4.12), *представимое рядом* (4.13) *с коэффициентами* (4.14).

Доказательство. Ряд (4.13) с коэффициентами (4.14) удовлетворяет однородным граничным условиям (4.12), поскольку им удовлетворяют все собственные функции $\sin \frac{\pi n}{l} x$, и при $t=0$ переходит в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[0, l]$ для функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию разложимости в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Остается доказать, что ряд (4.13) сходится в области $\overline{\Omega}=[0, l]\times[0, \infty)$ и функция $u(x, t)$, представимая этим рядом, непрерывна в области $\overline{\Omega}$, обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (4.10), и удовлетворяет однородному уравнению (4.10) в области $\Omega=(0, l)\times(0, \infty)$. Так как каждый член ряда (4.13) является частным решением однородного уравнения (4.10), то в силу обобщенного принципа суперпозиции достаточно показать, что в области Ω существуют производные функции $u(x, t)$, входящие в уравнение (4.10), и их можно вычислять путем почленного дифференцирования ряда (4.13).

---

*) Там же.

Покажем прежде всего, что функция $u(x, t)$, представимая рядом (4.13), непрерывна в области $\overline{\Omega}$. Из формулы (4.15) следует, что мажорантным для ряда (4.13) будет ряд из модулей коэффициентов Фурье функции $\varphi(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|,$$

который сходится в силу условий, наложенных на функцию $\varphi(x)$, и сформулированных выше свойств рядов Фурье. Тем самым ряд (4.13) сходится равномерно к функции $u(x, t)$ в области $\overline{\Omega}$ и функция $u(x, t)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$.

Следовательно, при $t \to 0$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию (4.11), а при $x \to 0$ и $x \to l$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (4.12).

Покажем теперь, что при $t \geqslant \bar{t}$, где $\bar{t} > 0$ — любое число, сходятся равномерно ряды из производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t}, \tag{4.16}$$

где

$$u_n(x, t) = C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

— общий член ряда (4.13).

Поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$, то она ограничена на нем

$$|\varphi(x)| \leqslant M, \quad x \in [0, l],$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная и

$$|C_n| = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx \right| \leqslant 2M.$$

Поэтому при $t \geqslant \bar{t}$ получаем

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 \bar{t}} \tag{4.17}$$

и

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2M\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 \bar{t}}. \tag{4.18}$$

Из формул (4.17), (4.18) вытекает, что для доказательства равномерной сходимости рядов (4.16) нужно доказать сходимость мажорантных рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} N n^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 \bar{t}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{4.19}$$

где $N=2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ для первого мажорантного ряда и $N=2M\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2$ для второго.

Сходимость ряда вида (4.19) следует из признака сходимости Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 (2n+1)\bar{t}} = 0.$$

Поскольку при $t \geqslant \bar{t} > 0$ мажорантные ряды для рядов (4.16) сходятся, то сами ряды сходятся равномерно и ряд (4.13) можно дифференцировать почленно дважды по x и один раз по t при $t \geqslant \bar{t}$ или, ввиду произвольности $\bar{t}>0$, в области $\Omega = (0, l)\times(0, \infty)$.

В силу обобщенного принципа суперпозиции функция $u(x, t)$, представимая рядом (4.13), удовлетворяет уравнению (4.10).

Итак, мы доказали, что при условиях теоремы функция $u(x, t)$, представимая формулой (4.13) с коэффициентами (4.14), является классическим решением начально-краевой задачи (4.10)—(4.12). ■

§ 5. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Вернемся к решению начально-краевой задачи (4.1)—(4.3). Пусть система собственных функций $\{v_n(M)\}$ задачи Штурма—Лиувилля ортонормирована: $\|v_n\|=1$.

Решение задачи (4.1)—(4.3) дается формулой (4.6):

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} v_n(M)$$

с коэффициентами, вычисляемыми по формуле

$$C_n = \int_D \varphi(Q)\, v_n(Q)\, \rho(Q)\, dV_Q, \quad n=1, 2, \ldots \tag{5.1}$$

Используя асимптотику собственных функций $v_n(M)$, можно доказать[*], что при достаточных условиях гладкости функций

[*] См., например: Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

$\varphi(M)$ ряд (4.6) представляет классическое решение задачи (4.1)—(4.3).

Подставим (5.1) в (4.6) и поменяем порядок интегрирования и суммирования:

$$u(M,\ t)=\int_D\left\{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} v_n(M)\, v_n(Q)\right\}\varphi(Q)\,\rho(Q)\,dV_Q.$$

Введем обозначение

$$G(M,\ Q,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} v_n(M)\, v_n(Q). \tag{5.2}$$

Тогда

$$u(M,\ t)=\int_D G(M,\ Q,\ t)\,\varphi(Q)\,\rho(Q)\,dV_Q. \tag{5.3}$$

Можно доказать, что если функция $\varphi(M)$ непрерывна в области $\bar{D}$, то формула (5.3) определяет классическое решение задачи (4.1)—(4.3).

Определение. Функция $G(M, Q, t)$, определяемая формулой (5.2), называется функцией Грина, или функцией источника задачи (4.1)—(4.3).

Для начально-краевой задачи общего вида функция Грина была введена в § 5 гл. III.

Рассмотрим физический смысл функции Грина. Выберем в качестве начальной функции непрерывную в области D функцию $\varphi_\varepsilon(M)$, равную нулю вне шара $K_\varepsilon^{M_0}$ радиуса ε с центром в точке M_0, принадлежащего области D, и положительную в этом шаре. Предположим, что функция $\varphi_\varepsilon(M)$ удовлетворяет условию нормировки: для любого $\varepsilon>0$

$$\int_{K_\varepsilon^{M_0}} \varphi_\varepsilon(Q)\,\rho(Q)\,dV=1. \tag{5.4}$$

Согласно формуле (5.3) решение $u_\varepsilon(M, t)$ задачи (4.1)—(4.3) с начальной функцией $\varphi_\varepsilon(M)$ имеет вид

$$u_\varepsilon(M,\ t)=\int_D G(M,\ Q,\ t)\,\varphi_\varepsilon(Q)\,\rho(Q)\,dV_Q=$$

$$=\int_{K_\varepsilon^{M_0}} G(M,\ Q,\ t)\,\varphi_\varepsilon(Q)\,\rho(Q)\,dV_Q. \tag{5.5}$$

Применяя к интегралу (5.5) формулу среднего значения *), получим с учетом (5.4)

---

*) См.: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. 4-е изд М.: Наука, 1982.

$$u_\varepsilon(M,\ t)=G(M,\ M^*,\ t)\int\limits_{K_\varepsilon^{M_0}}\varphi_\varepsilon(Q)\,\rho(Q)\,dV=G(M,\ M^*,\ t),\quad (5.6)$$

где точка M^* принадлежит шару $K_\varepsilon^{M_0}$: $M^*\in K_\varepsilon^{M_0}$. Перейдя в формуле (5.6) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$u_0(M,\ t)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(M,\ t)=G(M,\ M_0,\ t).\quad (5.7)$$

Из формулы (5.7) следует, что функция Грина $G(M,M_0,t)$ с физической точки зрения представляет собой температуру тела D в точке M в момент времени t, если возбуждение тела производится мгновенным точечным источником, действующим в момент времени $t=0$ в точке M_0.

Подсчитаем мощность точечного источника. Напомним, что коэффициент $\rho(M)$ равен $\rho(M)=c(M)\tilde{\rho}(M)$, где $c(M)$ — удельная теплоемкость тела D, а $\tilde{\rho}(M)$ — его плотность. Количество тепла q, сообщенное телу D в начальный момент $t=0$, равно

$$q=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_D c(Q)\,\tilde{\rho}(Q)\,\varphi_\varepsilon(Q)\,dV=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_D\rho(Q)\,\varphi_\varepsilon(Q)\,dV=1,\quad (5.8)$$

при этом мы учли формулу (5.4).

Итак, функция Грина $G(M,M_0,t)$ представляет собой температуру тела D в точке M в момент времени t при мгновенном выделении единичного количества тепла в точке M_0 в момент времени $t=0$.

Из физического смысла функции Грина становится ясным ее второе название — функция источника.

Замечание. Рассмотрим функцию $\varphi_0(M)$, являющуюся пределом при $\varepsilon\to 0$ функции $\varphi_\varepsilon(M)$:

$$\varphi_0(M)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(M).$$

Согласно определению дельта-функции Дирака*) функция $\varphi_0(M)$ выражается через дельта-функцию $\delta(Q,M)$ следующим образом:

$$\varphi_0(M)=\frac{1}{\rho(M)}\,\delta(M_0,\ M).$$

Итак, функция $\varphi_0(M)$ является обобщенной функцией. При этом формулу (5.7) можно сразу получить из формулы (5.3), пользуясь известным свойством дельта-функции.

Если ввести обобщенную функцию $u^0(M,t)$ как решение следующей начально-краевой задачи:

$$\rho u_t^0=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u^0),\quad (M,\ t)\in Q_\infty.$$

---

*) См: Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

$$u^0(M,\ 0)=\frac{1}{\rho(M_0)}\delta(M_0,\ M),\quad M\in\bar{D},\ M_0\in D,$$

$$\alpha(P)\frac{\partial u^0}{\partial n}+\beta(P)u^0=0,\quad P\in S,\ t\in[0,\ \infty),$$

то

$$G(M,\ M_0,\ t)=u^0(M,\ t).$$

§ 6. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И НЕОДНОРОДНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

1. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим задачу для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальным и граничным условиями:

$$\rho u_t=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)+f,\quad (M,\ t)\in Q_\infty, \tag{6.1}$$

$$u(M,\ 0)=0,\quad M\in\bar{D}, \tag{6.2}$$

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(P)u=0,\quad P\in S,\ t\in[0,\ \infty). \tag{6.3}$$

Предполагая, что классическое решение задачи (6.1) — (6.3) существует, получим его представление через функцию $f(M,t)$ методом Фурье. Заметим, что согласование начального (6.2) и граничного (6.3) условий происходит автоматически.

Общая схема построения методом разделения переменных решения краевых задач для неоднородного уравнения дана в гл. III.

Так как классическое решение является дважды непрерывно дифференцируемой по координатам точки M функцией, удовлетворяющей однородному граничному условию (6.3), то для него имеет место разложение

$$u(M,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)v_n(M), \tag{6.4}$$

где

$$u_n(t)=\int_D u(Q,\ t)v_n(Q)\rho(Q)\,dV,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

а $\{v_n(M)\}$ — ортонормированная система собственных функций для задачи Штурма—Лиувилля (4.4).

В силу известных свойств собственных интегралов, зависящих от параметра для коэффициентов $u_n(t)$, выполнены условия теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру*).

*) См: Ильин В. А., Позняк Э Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

Следуя схеме, изложенной в § 5 гл. III, подставим разложение (6.4) в уравнение (6.1). После преобразований для коэффициентов $u_n(t)$ получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$u_n'(t)+\lambda_n u_n(t)=f_n(t),$$

где

$$f_n(t)=\int\limits_D f(Q,\ t)\,v_n(Q)\,dV,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{6.6}$$

Из формул (6.2) и (6.5) следует также, что

$$u_n(0)=0,\quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Итак, для коэффициентов $u_n(t)$ получается задача Коши

$$u_n'+\lambda_n u_n=f_n,\quad t\in(0,\ \infty), \tag{6.7}$$

$$u_n(0)=0. \tag{6.8}$$

Решение задачи Коши (6.7), (6.8) можно записать с помощью импульсной функции *)

$$u_n(t)=\int\limits_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}f_n(\tau)\,d\tau,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{6.9}$$

Подставляя формулу (6.9) в формулу (6.4) и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$u(M,\ t)=\int\limits_0^t\int\limits_D G(M,\ Q,\ t-\tau)\,f(Q,\ \tau)\,dV\,d\tau, \tag{6.10}$$

где функция Грина $G(M, Q, t)$ определяется формулой (5.2).

Замечания.

1) Доказательство существования классического решения задачи (6.1)—(6.3) и представление его формулой (6.10) могут быть проведены с помощью метода Фурье для достаточно ...кой границы S области D и достаточно гладкой в цилинд... функции $f(M, t)$, удовлетворяющей граничным условиям ...и.

Введем понятие фундаментального решения задачи ...-(6.3) как решение задачи

$$\rho u_t^0=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u^0)+\delta(M,\ M_0)\,\delta(t,\ t_0),\quad (M,\ t)\in Q_\infty,$$

$$u^0(M,\ 0)=0,\quad M\in\overline{D},$$

$$\alpha(P)\frac{\partial u^0}{\partial n}+\beta(P)\,u^0=0,\quad P\in S,\ t\in[0,\ \infty).$$

---

*) См.: Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

Функция $u^0(M, t)$ является обобщенной функцией и $u^0(M, t) = G(M, M_0, t-t_0)$.

2. Неоднородное граничное условие

Рассмотрим, наконец, начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности с однородным начальным и неоднородным граничным условиями:

$$\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u), \quad (M, t) \in Q_\infty, \tag{6.11}$$

$$u(M, 0) = 0, \quad M \in \bar{D}, \tag{6.12}$$

$$\alpha(P) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P) u = \mu(P, t), \quad P \in S, \ t \in [0, \infty). \tag{6.13}$$

С помощью замены

$$u(M, t) = w(M, t) + v(M, t),$$

где $w(M, t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая неоднородному граничному условию (6.13), задача (6.11)—(6.13) сводится к начально-краевой задаче с однородными граничными условиями:

$$\rho v_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) + \bar{f}(M, t), \quad (M, t) \in Q_\infty,$$

$$v(M, 0) = \varphi(M), \quad M \in \bar{D},$$

$$\alpha(P) \frac{\partial v}{\partial n} + \beta(P) v = 0, \quad P \in S, \ t \in [0, \infty),$$

где

$$\bar{f}(M, t) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} w) - \rho w_t,$$

$$\varphi(M) = -w(M, 0).$$

Если же можно так выбрать функцию $w(M, t)$, чтобы она удовлетворяла не только условию (6.13), но и однородному уравнению (6.11), то в этом случае $\bar{f}(M, t) \equiv 0$ и задача (6.11)—(6.13) сводится к задаче для однородного уравнения с неоднородными начальными условиями.

§ 7. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Перейдем к изучению начальной задачи для уравнения теплопроводности в неограниченной области. Начнем с одномерного случая.

1. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой

Рассмотрим задачу Коши в одномерном случае на бесконечной прямой $\mathbf{R}^1$ для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Введем обозначения: $\Omega=\mathbf{R}^1\times\times(0, T]$ и $\overline{\Omega}=\mathbf{R}^1\times[0, T]$. Задача Коши имеет вид

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x, t), \quad (x, t)\in\Omega, \tag{7.1}$$

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad x\in\mathbf{R}^1. \tag{7.2}$$

Дадим определение классического решения задачи (7.1), (7.2).

Определение. Классическим решением задачи (7.1), (7.2) называется функция $u(x, t)$, определенная и непрерывная вместе со вторыми производными по x и первыми производными по t в области Ω, удовлетворяющая уравнению (7.1) в этой области, непрерывная по t в области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющая начальному условию (7.2).

2. Теорема единственности

Теорема 6.8. *Задача* (7.1), (7.2) *может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области* $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два классических ограниченных решения задачи (7.1), (7.2). Функции u_1 и u_2 непрерывны и ограничены в области $\overline{\Omega}$: $|u_k|\leqslant M$, $k=1, 2$. Рассмотрим функцию $v(x, t)$, равную разности этих функций:

$$v(x, t)=u_1(x, t)-u_2(x, t). \tag{7.3}$$

Функция $v(x, t)$ непрерывна в области $\overline{\Omega}$, ограничена $|v(x, t)|\leqslant\leqslant 2M$, удовлетворяет в области Ω однородному уравнению теплопроводности

$$v_t=a^2v_{xx}$$

и однородному начальному условию

$$v(x, 0)=0.$$

Однако применить к функции $v(x, t)$ принцип максимума, подобно тому как это было сделано в § 3, нельзя, поскольку в неограниченной по x области функция $v(x, t)$ может нигде не принимать максимального значения.

Чтобы воспользоваться принципом максимума, рассмотрим ограниченную по x область

$$|x|\leqslant L,$$

где $L>0$ — вспомогательное число, которое будем затем неограниченно увеличивать. Обозначим

$$\overline{\Omega}_L=[-L, L]\times[0, T] \text{ и } \Omega_L=[-L, L]\times(0, T].$$

Введем вспомогательную функцию (ее обычно называют барьером)

$$w(x,\ t)=\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right).$$

Функция $w(x, t)$ непрерывна в области $\overline{\Omega}_L$ и удовлетворяет в области Ω_L однородному уравнению теплопроводности (что проверяется непосредственно). Кроме того, функции $v(x, t)$ и $w(x, t)$ связаны следующими неравенствами:

$$w(x,\ 0)\geqslant|v(x,\ 0)|=0, \tag{7.4}$$

$$w(\pm L,\ t)\geqslant 2M\geqslant|v(\pm L,\ t)|. \tag{7.5}$$

В ограниченной области $\overline{\Omega}_L$ уже справедлив принцип максимума. Применяя принцип сравнения 1 к функциям $-w(x, t)$, $v(x, t)$ и к функциям $v(x, t)$, $w(x, t)$, с учетом (7.4) и (7.5) получим

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right)\leqslant v(x,\ t)\leqslant\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right). \tag{7.6}$$

Зафиксируем точку $(x, t)\in\overline{\Omega}_L$ и перейдем в формуле (7.6) к пределу при $L\to\infty$. Тогда по известной теореме анализа *) получим

$$\lim_{L\to\infty} v(x,\ t)=0.$$

Отсюда в силу независимости функции $v(x, t)$ от L и в силу произвольности точки (x, t) получаем, что всюду в области $\overline{\Omega}$ функция $v(x, t)\equiv 0$. Поэтому всюду в области $\overline{\Omega}$ $u_1\equiv u_2$, т. е. решение единственно. ■

3. Фундаментальное решение. Интеграл Пуассона

Для решения задачи (7.1), (7.2) применим метод разделения переменных. Сначала найдем нетривиальное ограниченное решение $w(x, t)$ однородного уравнения

$$u_t=a^2u_{xx}, \tag{7.7}$$

представимое в виде произведения

$$w(x,\ t)=X(x)\,T(t)\not\equiv 0.$$

Подставляя $w(x, t)$ в (7.7), получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)}\equiv\frac{T'(t)}{a^2T(t)}\equiv-\lambda,$$

*) См.: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: Наука, 1982.

где λ — параметр разделения. Отсюда для функции T (t) получим уравнение

$$T' + a^2\lambda T = 0, \tag{7.8}$$

а для функции $X(x)$ — следующую задачу на собственные значения:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^1, \tag{7.9}$$

$$|X(x)| \leqslant M, \tag{7.10}$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная.

Общее решение уравнения (7.8) имеет вид

$$T(t) = Ae^{-a^2\lambda T},$$

где A — некоторая постоянная, и из ограниченности решения следует $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, а общее решение задачи (7.9), (7.10) записывается в виде

$$X(x) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x},$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные и $\operatorname{Im}\lambda = 0$. Отсюда следует, что λ — вещественное и $\lambda \geqslant 0$.

Положим для удобства $\lambda = k^2$ и предположим, что параметр k меняется непрерывным образом от $-\infty$ до $+\infty$: $k \in \mathbf{R}^1$. Тогда ограниченные решения задачи (7.9), (7.10) имеют вид

$$X(x) = e^{ikx}, \quad k \in \mathbf{R}^1.$$

Отметим, что спектр задачи (7.9), (7.10) непрерывный.

Из уравнения (7.8) получим

$$T(t) = C(k)\, e^{-a^2k^2t},$$

и, окончательно, функция $w(x, t)$ представима в виде

$$w(x, t) = C(k)\, e^{-a^2k^2t + ikx}$$

Построим теперь решение задачи Коши (7.7), (7.2) как суперпозицию частных ограниченных решений $w(x, t)$ уравнения (7.7). При этом, поскольку параметр k меняется непрерывным образом, вместо суммы нужно взять интеграл

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\, e^{-a^2k^2t + ikx}\, dk. \tag{7.11}$$

Если этот несобственный интеграл, зависящий от параметров x и t, сходится при $(x, t) \in \overline{\Omega}$ к непрерывной функции $u(x, t)$ и существуют ее частные производные, входящие в уравнение (7.7), которые можно вычислить путем дифференцирования под знаком интеграла (7.11), то функция $u(x, t)$, представимая в виде интеграла (7.11), удовлетворяет уравнению (7.7). Чтобы функция $u(x, t)$ (7.11) удовлетворяла начальному условию (7.2), должно выполняться соотношение

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} C(k)\, e^{ikx}\, dk,$$

из которого определяется функция $C(k)$. Это соотношение, очевидно, представляет собой разложение заданной функции $\varphi(x)$ в интеграл Фурье.

Используя формулу обратного преобразования Фурье*), получим

$$C(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\, e^{-ik\xi}\, d\xi. \tag{7.12}$$

Подставим формулу (7.12) в (7.11) и поменяем порядок интегрирования. В результате получим

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2t+ik(x-\xi)}\, dk\right\}\varphi(\xi)\, d\xi. \tag{7.13}$$

Обозначим внутренний интеграл в правой части формулы (7.13) следующим образом:

$$G(x,\ \xi,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2t+ik(x-\xi)}\, dk. \tag{7.14}$$

Вычислим интеграл в правой части формулы (7.14). Рассмотрим интеграл

$$I(\beta)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2k^2+ik\beta}\, dk.$$

Продифференцируем интеграл $I(\beta)$ по параметру β и проинтегрируем по частям:

$$\frac{dI}{d\beta}=\int_{-\infty}^{\infty} ike^{-\alpha^2k^2+ik\beta}\, dk=-\frac{i}{2\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\beta}\, de^{-\alpha^2k^2}=$$

$$=-\frac{i}{2\alpha^2}\, e^{ik\beta-\alpha^2k^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{i}{2\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} i\beta e^{-\alpha^2k^2+ik\beta}\, dk=-\frac{\beta}{2\alpha^2}\, I(\beta).$$

В результате для функции $I(\beta)$ получается дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dI}{d\beta}+\frac{\beta}{2\alpha^2}\, I=0,$$

общее решение которого имеет вид

*) См: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа Ч 2 2-е изд. М: Наука, 1980

$$I(\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

Определим постоянную C из соотношения

$$C=I(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2k^2}\,dk=\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

и окончательно получим

$$I(\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2k^2+ik\beta}\,dk=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}. \qquad (7.15)$$

Сравнивая формулы (7.14) и (7.15) и полагая $\alpha=a\sqrt{t}$, $\beta=x-\xi$, имеем

$$G(x,\ \xi,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \qquad (7.16)$$

Определение. Функцию $G(x,\xi,t)$, определяемую формулой (7.16), будем называть фундаментальным решением уравнения теплопроводности в одномерном случае.

Из формулы (7.13) вытекает, что формальное решение задачи Коши (7.7), (7.2), (7.3) представляется формулой

$$u(x,\ t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (7.17)$$

Представление решения задачи Коши в виде интеграла (7.17) обычно называют интегралом Пуассона.

4. Свойства фундаментального решения

1) Из формулы (7.16) следует, что функция $G(x,\xi,t)$ определена при $t>0$ и положительна: $G(x,\xi,t)>0$.

2) Непосредственной проверкой легко установить, что функция $G(x,\xi,t)$ по переменным x и t удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности при $t>0$:

$$G_t(x,\ \xi,\ t)=a^2G_{xx}(x,\ \xi,\ t),\ (x,\ t)\in\Omega,\ \xi\in\mathbf{R}^1.$$

3) Известно, что разложение дельта-функции в интеграл Фурье имеет вид *)

$$\delta(x,\ \xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)}\,dk.$$

*) См.: Владимиров В. С. Уравнения математической физики. 4-е изд. М.: Наука, 1981.

Поэтому из формулы (7.14) следует, что

$$G(x, \xi, 0)=\delta(x, \xi).$$

Это позволяет дать следующее определение фундаментального решения.

Определение. Фундаментальным решением $G(x,\xi,t)$ уравнения теплопроводности в одномерном случае называется решение задачи Коши

$$G_t=a^2G_{xx}, \quad (x, t)\in\Omega, \quad \xi\in\mathbf{R}^1,$$

$$G(x, \xi, 0)=\delta(x, \xi), \quad x\in\mathbf{R}^1, \quad \xi\in\mathbf{R}^1,$$

непрерывное всюду в области $\bar{\Omega}$, за исключением точки $(\xi, 0)$ (т. е. $x=\xi$, $t=0$).

Из этого определения следует, что функция $G(x,\xi,t)$ является регулярной обобщенной функцией *).

4) Из формулы (7.17) следует, что функция $G(x,\xi,t)$ с физической точки зрения представляет собой температуру в точке x в момент времени t, если в начальный момент $t=0$ в точке ξ мгновенно выделяется некоторое количество тепла $q>0$.

Проинтегрировав функцию $G(x,\xi,t)$ по x от $-\infty$ до ∞, используя замену

$$z=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}},$$

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\,dx=1. \tag{7.18}$$

Физический смысл формулы (7.18) заключается в том, что количество тепла, находящегося на бесконечной прямой $x\in\mathbf{R}^1$ в последующие моменты времени $t>0$, не изменяется с течением времени. Действительно, количество тепла, находящееся в момент $t>0$ на оси $x\in\mathbf{R}^1$, равно

$$q=c\tilde{\rho}\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\,dx=c\tilde{\rho}=\rho,$$

где $c=\text{const}$ — удельная теплоемкость, $\tilde{\rho}=\text{const}$ — линейная плотность бесконечной прямой.

Точечный источник, находящийся в точке ξ, в начальный момент $t=0$ выделяет количество тепла $q=c\tilde{\rho}=\rho$.

Изобразим график функции $G(x,\xi,t)$ для различных значений t (рис. 6.1). Величина площади фигуры, расположенной между кривой и осью x, умноженная на $c\tilde{\rho}=\rho$, равна количе-

---

*) См.: Владимиров В. С. Уравнения математической физики М.: Наука, 1988.

ству тепла, подведенному к бесконечной прямой в начальный момент. Для малых значений $t>0$ почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки ξ. В начальный момент времени $t=0$ все количество тепла сосредоточено в точке ξ. В точке $x=\xi$ получаем

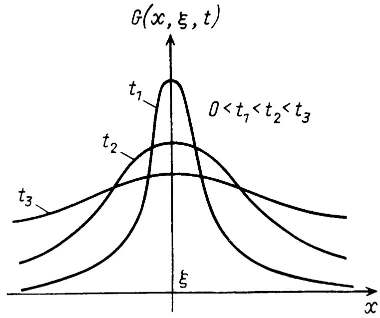


Рис. 6.1

$$G(\xi,\ \xi,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

Таким образом, температура в точке ξ, где в начальный момент происходит мгновенное выделение тепла (действует мгновенный точечный источник), для малых t неограниченно велика.

6) Из формулы (7.16) следует, что функция $G(x,\xi,t)$ является симметричной по x и ξ. Симметрия функции $G(x,\xi,t)$ по переменным x и ξ, представляет собой математическое отражение известного физического принципа взаимности: источник, помещенный в точке x, производит в точке ξ такое же действие, какое производит в точке x тот же источник, помещенный в точку ξ. Или более кратко — источник и точку наблюдения можно поменять местами.

Замечание. Из вида функции $G(x,\xi,t)$ следует, что температура точки бесконечной прямой, сколь угодно далеко расположенной от точки ξ, где находится источник, и в моменты времени, сколь угодно близкие к начальному моменту $t=0$, отлична от нуля. Это явление противоречит конечной скорости распространения тепла и носит название парадокса бесконечной теплопроводности. Указанный парадокс связан с недостаточной полнотой феноменологической физической модели, применяемой при выводе уравнения теплопроводности. Для построения более полной математической модели следует использовать дополнительные физические соображения, учитывающие, в частности, молекулярную структуру вещества.

§ 8. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1. Теорема существования

Сформулируем прежде всего обобщенный принцип суперпозиции в той форме, которая нам понадобится для доказательства теоремы существования.

Лемма 6.2 (обобщенный принцип суперпозиции). *Если функция $U(x,t,\alpha)$ по переменным x и t удовлетворяет линей-*

ному дифференциальному уравнению в частных производных $L[U]=0$ при любом фиксированном значении параметра α, то интеграл

$$u(x, t)=\int U(x, t, \alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

также является решением уравнения $L[u]=0$, если производные, входящие в линейный дифференциальный оператор L, можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла.

Доказательство обобщенного принципа суперпозиции очевидно:

$$L[u]=\int L[U(x, \xi, \alpha)]\varphi(\alpha)\,d\alpha=0.$$

Напомним также достаточные условия вычисления производной несобственного интеграла, зависящего от параметра:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

путем дифференцирования по параметру под знаком интеграла *):

а) частная производная $\dfrac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}$ является непрерывной функцией переменных x и α в области их изменения;

б) функция $\varphi(\alpha)$ кусочно-непрерывна и ограничена (или абсолютно интегрируема);

в) интеграл, полученный в результате формального дифференцирования подынтегральной функции, сходится равномерно.

Докажем следующую теорему.

Теорема 6.9. *Если $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная на бесконечной прямой $\mathbf{R}^1$ функция, то формула* (7.17) *определяет при $(x, t)\in\overline{\Omega}$ классическое решение задачи* (7.7), (7.2).

Доказательство. 1) Докажем прежде всего существование и ограниченность функции $u(x, t)$, представленной формулой Пуассона (7.17). Сделаем в интеграле (7.17) замену

$$z=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}.$$

Тогда, учитывая, что функция $\varphi(x)$ ограничена:

$$|\varphi(x)|\leqslant M, \quad x\in\mathbf{R}^1,$$

получим

$$|u(x, t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+2za\sqrt{t})|\,e^{-z^2}\,dz\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}\,dz=M,$$

поскольку

---

*) См.: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz=\sqrt{\pi}.$$

2) Для доказательства того, что функция $u(x, t)$, представимая формулой (7.17), удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (7.7), используем обобщенный принцип суперпозиции. Поскольку все частные производные функции $G(x, \xi, t)$ при $(x, t)\in\Omega$, $\xi\in\mathbf{R}^1$ непрерывны и по условию теоремы функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена, то достаточно доказать, что интеграл, полученный после формального дифференцирования интеграла Пуассона (7.17), сходится равномерно.

Проведем это исследование на примере вычисления первой производной по t. Достаточно доказать равномерную сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(x, \xi, t)}{\partial t}\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{8.1}$$

Поскольку

$$\frac{\partial G}{\partial t}=-\frac{1}{2t}G+\frac{(x-\xi)^3}{4a^2t^2}G,$$

то нужно доказать равномерную сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\left\{-\frac{1}{2}+\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\frac{\varphi(\xi)}{t}\,d\xi. \tag{8.2}$$

Сделаем в интеграле (8.2) замену переменных $z=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$. Тогда, учитывая ограниченность функции $\varphi(x)$, получим, что в области $\overline{\Omega}_\varepsilon=\mathbf{R}^1\times[\varepsilon, T]$ подынтегральная функция мажорируется независящей от x и t функцией

$$\frac{M}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}+z^2\right)e^{-z^2},$$

интеграл от которой сходится. Следовательно, интеграл (8.2) сходится равномерно в области $\overline{\Omega}_\varepsilon$.

Аналогично доказывается равномерная сходимость в области $\overline{\Omega}_\varepsilon$ интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G(x, \xi, t)}{\partial x^2}\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Итак, в силу обобщенного принципа суперпозиции функция $u(x, t)$, представленная интегралом Пуассона (7.17), удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (7.7) в области $\overline{\Omega}_\varepsilon$, а в силу произвольности $\varepsilon>0$ и в области Ω.

3) Осталось доказать, что функция (7.17) непрерывно примыкает к граничной функции $\varphi(x)$.

Сделав в интеграле Пуассона (7.17) замену $z=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, получим

$$u(x, t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\varphi\left(x+2az\sqrt{t}\right) dz. \tag{8.3}$$

Поскольку подынтегральная функция мажорируется функцией $\frac{M}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$, интеграл от которой сходится, то интеграл (8.3) сходится равномерно. Так как подынтегральная функция непрерывна, то, применяя теорему о предельном переходе под знаком интеграла *), получим

$$\lim_{t\to 0} u(x, t)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\varphi\left(x+2az\sqrt{t}\right) dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz=\varphi(x).$$

Следовательно, функция $u(x, t)$ — непрерывная в области $\overline{\Omega}$ и непрерывно примыкает к начальной функции $\varphi(x)$.

Теорема доказана. ■

Замечание 1. Условия, наложенные на функцию $\varphi(x)$, можно существенно ослабить. В частности, если функция $\varphi(x)$ кусочно-непрерывная и ограниченная на бесконечной прямой с конечным числом точек разрыва, то формула (7.17) определяет решение однородного уравнения (7.7) при $(x, t)\in\Omega$, ограниченное при $(x, t)\in\overline{\Omega}$ и непрерывно примыкающее к функции $\varphi(x)$ в точках ее непрерывности. Такие условия, накладываемые на функцию $\varphi(x)$, оказываются более широкими, чем в теореме единственности 6.8, где требуется непрерывность $\varphi(x)$ на всей прямой $\mathbf{R}^1$. Это связано с методом доказательства теоремы единственности, основанном на принципе максимума. Имеет место и единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности при более широких условиях на функцию $\varphi(x)$ **).

Замечание 2. В доказанных теоремах существования и единственности предполагалось, что функция $\varphi(x)$ является ограниченной на всей прямой $\mathbf{R}^1$. Это условие также можно ос-

---

*) См.: Ильин В. А, Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М: Наука, 1980.

**) См.: Михайлов В. П Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976; Тихонов А. Н, Самарский А. А Уравнения математической физики. М: Наука, 1977.

лабить. Например, функция $\varphi(x)$ может быть растущей при $x \to \pm\infty$ функцией с ограниченной степенью роста: найдутся такие положительные постоянные b и N, что $|\varphi(x)| \leqslant Ne^{b|x|}$.

2. Пример

Проиллюстрируем поведение решения, представимого интегралом Пуассона (7.17), в точках разрыва начальной функции $\varphi(x)$.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: найти решение однородного уравнения теплопроводности на бесконечной прямой, если начальная температура в момент времени $t=0$ является кусочно-постоянной функцией

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ T_0 = \text{const}, & x > 0. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой Пуассона (7.17) и используем замену $z = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$. Тогда будем иметь

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\varphi(\xi)\, d\xi = \frac{T_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi =$$

$$= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_0^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}\, d(-z) \right\} =$$

$$= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}\, dz \right\} = \frac{T_0}{2} \left\{ 1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right\}, \quad (8.4)$$

где

$$\Phi(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{w} e^{-z^2}\, dz$$

— интеграл ошибок. Эта специальная функция широко используется в теории вероятностей, и для нее существуют подробные таблицы.

Укажем очевидные свойства функции $\Phi(w)$:

$$\Phi(0) = 0, \ \Phi(+\infty) = 1, \ \Phi(-w) = -\Phi(w).$$

Из формулы (8.4) можно сделать следующие выводы.

а) Пусть $x > 0$. Тогда при $t \to 0$ получим, что $\dfrac{x}{2a\sqrt{t}} \to +\infty$ и, следовательно, $\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \to 1$ и

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x>0}} u(x, t) = T_0. \tag{8.5}$$

б) Пусть $x<0$. Тогда $\frac{x}{2a\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\to} -\infty$, $\Phi(-\infty)=-1$ и

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x<0}} u(x, t) = 0. \tag{8.6}$$

в) Рассмотрим, наконец, одновременный переход к пределу при $x\to 0$, $t\to 0$ вдоль кривой $\frac{x}{2a\sqrt{t}}=\alpha$, где $-\infty<\alpha<\infty$. Используя формулу (8.4), получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ t\to 0\\ \frac{x}{2a\sqrt{t}}=\alpha}} u(x, t) = \frac{T_0}{2}\{1+\Phi(\alpha)\}$$

и при $-\infty<\alpha<\infty$ будем иметь любое значение, заключенное в пределах от 0 до T_0, поскольку $0\leqslant \frac{T_0}{2}(1+\Phi(\alpha))\leqslant T_0$.

Замечание. Рассмотренный пример позволяет получить и качественное представление о поведении классического решения задачи Коши с непрерывными начальными условиями, в определенном смысле «близкими» к разрывной функции. Для этого докажем следующую теорему устойчивости.

Теорема 6.10. *Если непрерывная функция* $\varphi(x)$ *и кусочно-непрерывная функция* $\bar{\varphi}(x)$ *удовлетворяют условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)|^2\,dx \leqslant \varepsilon,$$

то для классического решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

и функции

$$\bar{u}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\,\bar{\varphi}(\xi)\,d\xi$$

при $x\in \mathbf{R}^1$, $t\geqslant t_0>0$ *справедлива оценка*

$$|u(x, t)-\bar{u}(x, t)|\leqslant C t_0^{-\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

где постоянная C *не зависит ни от* x, *ни от* t, *ни от* t_0.

Доказательство. Очевидно,

$$|u(x,\ t)-\bar{u}(x,\ t)|=\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\ \xi,\ t)\{\varphi(\xi)-\bar{\varphi}(\xi)\}\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,|\varphi(\xi)-\bar{\varphi}(\xi)|\,d\xi.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,|\varphi(\xi)-\bar{\varphi}(\xi)|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2a^2t}}\,d\xi\right\}^{1/2}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\xi)-\bar{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\right\}^{1/2}.$$

Сделав стандартную замену $z=\frac{\xi-x}{a\sqrt{2t}}$, для первого интеграла в правой части последнего неравенства получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2a^2t}}\,d\xi=a\sqrt{2t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz=a\sqrt{2\pi t},$$

что и дает требуемую оценку при $t\geqslant t_0>0$:

$$|u(x,\ t)-\bar{u}(x,\ t)|\leqslant Ct_0^{-1/4}\sqrt{\varepsilon},$$

где $C=(2^{\frac{3}{4}}\pi^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}})^{-1}$. ■

Заданную в примере разрывную кусочно-постоянную функцию $\bar{\varphi}(x)$ можно с любой степенью точности приблизить в среднем непрерывной функцией $\varphi(x)$, для которой классическое решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в силу доказанной теоремы сколь угодно близко при $t>0$ к функции (8.4), построенной в рассмотренном примере.

§ 9. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОЙ

Рассмотрим задачу для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными условиями на бесконечной прямой:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,\ t)\quad (x,\ t)\in\Omega, \tag{9.1}$$

$$u(x,\ 0)=0,\ \ x\in\mathbf{R}^1, \tag{9.2}$$

Напомним, что фундаментальное решение

$$G(x, \xi, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \tag{9.3}$$

физически означает температуру в точке x в момент времени t при мгновенном возбуждении бесконечной прямой в момент времени $t=0$ точечным источником тепла мощности $q=c\tilde{\rho}$ в точке $x=\xi$. Функция $G(x, \xi, t-\tau)$ есть температура бесконечной прямой в точке x в момент времени $t>\tau$ при возбуждении в момент времени τ точечным источником мощности $q=c\tilde{\rho}$ в точке $x=\xi$. Поэтому ясно, что функция $G(x, \xi, t-\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$G_t=a^2G_{xx}+\delta(x, \xi)\delta(t, \tau) \tag{9.4}$$

(это не противоречит тому, что при $t>\tau$ функция G удовлетворяет уравнению $G_t=a^2G_{xx}$).

Воспользовавшись принципом суперпозиции, можно записать следующую формулу для решения задачи (9.1), (9.2):

$$u(x, t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x, \xi, t-\tau)f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{9.5}$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

Мы получили формулу (9.5) на физическом уровне строгости. Для строгого вывода формулы (9.5) используем преобразование Фурье с ядром e^{ikx}. Обозначим образы Фурье функций $u(x, t)$ и $f(x, t)$ соответственно через $U(k, t)$ и $F(k, t)$:

$$\begin{aligned} U(k, t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi, t)e^{ik\xi}\,d\xi,\\ F(k, t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi, t)e^{ik\xi}\,d\xi. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Будем предполагать, что функция $u(x, t)$ и ее частные производные достаточно быстро стремятся к нулю при $x\to\pm\infty$. Тогда для этой функции существует интеграл Фурье. Будем также предполагать, что первый интеграл (9.6) можно дифференцировать под знаком интеграла.

Умножим обе части уравнения (9.1) на $\frac{1}{2\pi}e^{ikx}$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞. В результате получим

$$U_t=\frac{a^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}(x, t)e^{ikx}\,dx+F(k, t). \tag{9.7}$$

Проинтегрируем по частям интеграл в правой части формулы (9.7), учитывая, что подстановки обратятся в нуль. Учитывая однородное начальное условие (9.2), получим, что задаче (9.1)—(9.3) в пространстве оригиналов будет соответствовать следующая задача Коши в пространстве образов:

$$U_t + a^2k^2U = F, \quad t \in (0, \infty),$$
$$U(k, 0) = 0.$$

Решение этой задачи запишем с помощью импульсной функции

$$U(k, t) = \int_0^t e^{-a^2k^2(t-\tau)} F(k, \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-a^2k^2(t-\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau)\, e^{ik\xi}\, d\tau\, d\xi.$$

Наконец, используя формулу обратного преобразования Фурье, будем иметь

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(k, t)\, e^{-ikx}\, dk =$$

$$= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2(t-\tau)+ik(\xi-x)}\, dk \right\} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{9.8}$$

откуда, учитывая (7.14), получим (9.5).

Для обоснования полученной путем формального применения преобразования Фурье формулы необходимо показать, что если функция $f(x, t)$ непрерывна по совокупности аргументов и ограничена в Ω, то существуют производные функции $u(x, t)$ (9.8), входящие в уравнение (9.1), и их можно вычислять путем дифференцирования подынтегральной функции по параметру. Соответствующие рассмотрения аналогичны проведенным в предыдущем параграфе, и читатель может их провести самостоятельно.

Рассмотрим устойчивость решения задачи (9.1)—(9.2) для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Теорема 6.11. *Задача* (9.1), (9.2) *для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой устойчива по правой части, т. е. для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что если*

$$|f_1(x, t) - f_2(x, t)| \leqslant \delta, \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad t \in [0, T],$$

то

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \varepsilon, \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad t \in [0, T].$$

Доказательство. Рассмотрим задачу (9.1), (9.2) для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными условиями и обозначим через $u_l(x, t)$ решение этой задачи, соответствующее правой части $f_l(x, t)$, где $l=1, 2$. Предположим, что при некотором $\delta>0$ выполнимо неравенство

$$|f_1(x, t)-f_2(x, t)|\leqslant\delta, \quad x\in\mathbf{R}^1, \quad t\in[0, T]. \qquad (9.9)$$

Записывая решение с помощью формулы (9.5) и учитывая (9.9), получим

$$|u_1(x, t)-u_2(x, t)|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t-\tau)|f_1(\xi, \tau)-f_2(\xi, \tau)|\,d\xi\,d\tau\leqslant\delta\int_0^t d\tau=\delta\cdot T. \qquad (9.10)$$

Из неравенств (9.9) и (9.10) вытекает, что малому изменению правых частей соответствует малое изменение решений, что и означает устойчивость решения задачи (9.1), (9.2) по правой части.

§ 10. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим начальную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности в трехмерном пространстве:

$$u_t=a^2\Delta u+f(M, t), \quad (M, t)\in\Omega_3, \qquad (10.1)$$

$$u(M, 0)=\varphi(M), \quad M\in\mathbf{R}^3, \qquad (10.2)$$

где Δ — трехмерный оператор Лапласа, а области Ω_3 и $\overline{\Omega}_3$ определяются следующим образом:

$$\Omega_3=\mathbf{R}^3\times(0, T]=\{(M, t): M\in\mathbf{R}^3, \quad t\in(0, T]\},$$

$$\overline{\Omega}_3=\mathbf{R}^3\times[0, T]. \qquad (10.3)$$

Определение. Фундаментальным решением $G(M, Q, t)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2\Delta u \qquad (10.4)$$

называется такое его решение в области Ω_3, которое:

1) удовлетворяет начальному условию

$$G(M, Q, 0)=\delta(M, Q), \quad M, Q\in\mathbf{R}^3, \qquad (10.5)$$

2) непрерывно всюду в замкнутой области $\overline{\Omega}_3$, кроме точки $(Q, 0)$, т. е. при $M\neq Q$ и $t\neq 0$.

Для построения фундаментального решения докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 6.3. *Если в задаче Коши*

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad (M, t) \in \Omega_3, \tag{10.6}$$

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad M \in \mathbf{R}^3 \tag{10.7}$$

начальная функция $\varphi(M)$ *представима в виде*

$$\varphi(M) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z),$$

то решением задачи (10.6), (10.7) *является функция*

$$u(M, t) = u_1(x, t)u_2(y, t)u_3(z, t), \tag{10.8}$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(y, t)$, $u_3(z, t)$*—решения соответствующих одномерных задач Коши*:

$$u_{1t} = a^2 u_{1xx}, \ (x, t) \in \Omega, \ u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \ x \in \mathbf{R}^1,$$

$$u_{2t} = a^2 u_{2yy}, \ (y, t) \in \Omega, \ u_2(y, 0) = \varphi_2(y), \ y \in \mathbf{R}^1,$$

$$u_{3t} = a^2 u_{3zz}, \ (z, t) \in \Omega, \ u_3(z, 0) = \varphi_3(z), \ z \in \mathbf{R}^1.$$

Доказательство. Покажем, что функция $u(M, t)$ удовлетворяет уравнению (10.6). Имеем с учетом (10.8)

$$a^2 \Delta u = a^2 \Delta (u_1 u_2 u_3) = u_2 u_3 a^2 u_{1xx} + u_1 u_3 a^2 u_{2yy} + u_1 u_2 a^2 u_{3zz} =$$

$$= u_2 u_3 u_{1t} + u_1 u_3 u_{2t} + u_1 u_2 u_{3t} = (u_1 u_2 u_3)_t = u_t.$$

Удовлетворение начальному условию (10.7) очевидно, поскольку

$$u(M, 0) = u_1(x, 0)u_2(y, 0)u_3(z, 0) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z) = \varphi(M).$$

В трехмерном случае дельта-функцию можно представить в виде произведения трех одномерных дельта-функций:

$$\delta(M, Q) = \delta(x, \xi)\delta(y, \eta)\delta(z, \zeta),$$

где точка M имеет координаты x, y, z, а точка Q — координаты ξ, η, ζ. Поэтому, применяя лемму к задаче (10.4), (10.5), получим

$$G(M, Q, t) = G(x, \xi, t)G(y, \eta, t)G(z, \zeta, t)$$

или, используя формулу (7.16) для фундаментального решения в одномерном случае, имеем

$$G(M, Q, t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}. \tag{10.9}$$

Функция $G(M, Q, t)$ с физической точки зрения представляет собой температуру в точке M трехмерного пространства в момент времени t при мгновенном возбуждении точечным источником тепла мощности ρ, в точке Q в момент времени $t=0$. Поэтому функция $G(M, Q, t)$ называется также функцией влияния мгновенного точечного теплового источника.

Из формулы (10.9) следует, что функция $G(M, Q, t)$ симметрична по переменным M и Q:

$$G(M,\ Q,\ t) \equiv G(Q,\ M,\ t),$$

это является математическим выражением принципа взаимности. Заметим, что относительно переменной t такая симметрия не имеет места, что является выражением необратимости тепловых процессов во времени.

С помощью функции $G(M, Q, t)$ решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad (M,\ t) \in \Omega_3,$$

$$u(M,\ 0) = \varphi(M), \quad M \in \mathbf{R}^3,$$

выражается формулой, аналогичной формуле (7.17):

$$u(x,\ y,\ z,\ t) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ t)\,\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

или, в более краткой записи,

$$u(M,\ t) = \int\limits_{\mathbf{R}^3} G(M,\ Q,\ t)\,\varphi(Q)\,dV_Q. \tag{10.10}$$

Интеграл (10.10) обычно называют интегралом Пуассона.

Заметим, что формулу (10.10) можно получить и непосредственно, применяя к искомому решению задачи (10.6), (10.7) трехмерное преобразование Фурье. При этом для функции $G(M, Q, t)$ получим представление (10.9).

Имеет место теорема существования, аналогичная теореме 6.9 для одномерного случая.

Теорема 6.12. *Если функция* $\varphi(M)$ *непрерывна и ограничена во всем трехмерном пространстве* $\mathbf{R}^3$, *то формула* (10.10) *определяет при* $(M, t) \in \Omega_3$ *классическое решение задачи* (10.1), (10.2) *при* $f(M, t) \equiv 0$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы в одномерном случае. Заметим, что так же, как и в одномерном случае, можно доказать, что в случае кусочно-непрерывной и ограниченной функции $\varphi(M)$ интеграл Пуассона (10.10) является решением однородного уравнения теплопроводности, непрерывно примыкающим к функции $\varphi(M)$ в точках ее непрерывности.

Решение задачи Коши (10.1), (10.2) для неоднородного уравнения теплопроводности с однородным начальным условием выражается формулой

$$u(M,\ t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{R}^3} G(M,\ Q,\ t-\tau)\,f(Q,\ \tau)\,dV_Q\,d\tau. \tag{10.11}$$

Формулу (10.11) аналогично одномерному случаю на физическом уровне строгости можно получить, применяя принцип суперпозиции и строго используя метод интегрального преобразования Фурье.

В силу линейности задачи (10.1), (10.2) ее решение представляется формулой

$$u(M, t) = \int_{\mathbf{R}^3} G(M, Q, t)\,\varphi(Q)\,dV + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^3} G(M, Q, t-\tau)\,f(Q, \tau)\,dV\,d\tau.$$

Замечание. Аналогично рассматривается задача Коши для двумерного уравнения теплопроводности в пространстве $\mathbf{R}^2$. В частности, используя лемму, аналогичную лемме 6.2, легко доказать, что фундаментальное решение выражается формулой

$$G(M, Q, t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}},$$

где M — точка с координатами x, y, Q — точка с координатами ξ, η.

Теоремы существования и формулы, выражающие решение задачи Коши в двумерном случае, полностью аналогичны соответствующим теоремам и формулам трехмерного случая.

§ 11. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

1. Постановка начально-краевых задач

В этом параграфе будет рассматриваться начально-краевая задача для уравнения теплопроводности на полупрямой. Введем обозначения для открытых областей:

$$\mathbf{R}^+ = \{0 < x < \infty\}, \quad \mathbf{R}^- = \{-\infty < x < 0\},$$

$$\Omega_+ = \{0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty\}$$

и соответственно замкнутых областей:

$$\overline{\mathbf{R}}^+ = \{0 \leqslant x < \infty\}, \quad \overline{\mathbf{R}}^- = \{-\infty < x \leqslant 0\},$$

$$\overline{\Omega}_+ = \{0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant t < \infty\}.$$

Мы будем рассматривать начально-краевые задачи с граничными условиями первого, второго и третьего рода:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_+, \tag{11.1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\mathbf{R}}^+, \tag{11.2}$$

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u(0, t) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{11.3}$$

где

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0. \tag{11.4}$$

Напомним, что классическое решение задачи (11.1)—(11.4), непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}_+$, может существовать лишь при выполнении условия согласования начального (11.1) и граничного (11.3) условий:

$$\alpha\varphi'(0)+\beta\varphi(0)=\mu(0). \tag{11.5}$$

В силу линейности задачи (11.1)—(11.4) можно провести ее редукцию (см. гл. III).

2. Однородные граничные условия

Изучение уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой начнем с начально-краевой задачи для однородного уравнения с однородным граничным условием:

$$u_t=a^2u_{xx}, \quad (x,\ t)\in\Omega_+, \tag{11.6}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x), \quad x\in\overline{\mathrm{R}}^+, \tag{11.7}$$

$$\alpha u_x(0,\ t)+\beta u(0,\ t)=0, \quad t\in[0,\ \infty), \tag{11.8}$$

где

$$|\alpha|+|\beta|\neq 0. \tag{11.9}$$

Предварительно докажем лемму относительно функции $u(x, t)$, определенной интегралом Пуассона.

Лемма 6.4. *Пусть функция $\Phi(x)$ определена на бесконечной прямой $(-\infty,\ +\infty)$, имеет на ней ограниченные производные до N-го порядка включительно, и линейная комбинация*

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\Phi^{(k)}(x), \tag{11.10}$$

где $a_k=\mathrm{const}$, $k=0, 1, 2, \ldots, N$, нечетна относительно точки $x=0$. Тогда функция

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Phi(\xi)\,d\xi \tag{11.11}$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=0}=0.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция Грина

$$G(x,\ \xi,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\ \xi,\ t)\equiv(-1)^k\frac{\partial^k G}{\partial \xi^k}(x,\ \xi,\ t).$$

В силу наложенных на $\Phi(x)$ условий функцию (11.11) можно дифференцировать N раз по x под знаком интеграла. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = \sum_{k=0}^{N} a_k \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\partial^k G}{\partial \xi^k}(x, \xi, t)\, \Phi(\xi)\, d\xi. \qquad (11.12)$$

Интегрируя (11.12) по частям и учитывая, что внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, получим

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \sum_{k=0}^{N} a_k \Phi^{(k)}(\xi)\, d\xi. \qquad (11.13)$$

Согласно (11.10) подынтегральная функция в (11.13) при $x=0$ нечетна. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t)\big|_{x=0} = 0. \ \blacksquare$$

Лемма 6.4 позволяет указать следующий способ решения задачи для однородного уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0 \qquad (11.14)$$

с заданным начальным условием

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \geqslant 0. \qquad (11.15)$$

и однородным граничным условием вида

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=0} = 0. \qquad (11.16)$$

Продолжим функцию $\varphi(x)$, заданную при $x \geqslant 0$, на всю действительную ось x, построив функцию $\Phi(x)$, которая удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} \Phi(x) \equiv \varphi(x) \ \text{при} \ x \geqslant 0, \\ \sum_{k=0}^{N} a_k \Phi^{(k)}(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi^{(k)}(s)\,|_{s=-x} \ \text{при} \ x \leqslant 0 \end{gathered} \qquad (11.17)$$

и непрерывна вместе с производными до N-го порядка включительно на всей оси.

Теперь решим задачу Коши на бесконечной прямой:

$$\begin{aligned} &U_t = a^2 U_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \\ &U\,|_{t=0} = \Phi(x). \end{aligned} \qquad (11.18)$$

Согласно лемме 6.4 функция $U(x, t)$ удовлетворяет граничному условию (11.16) и, следовательно, при $x \geqslant 0$ $u(x, t) \equiv \equiv U(x, t)$.

Сформулированный в лемме 6.4 способ построения начально-краевой задачи (11.6)—(11.8) на полупрямой $\mathbf{R}^+$ называется методом продолжения. Отметим, что в случае однородного граничного условия Дирихле в формуле (11.16) $a_0=1$ и $a_k=0$, $k=1, 2, ..., N$. Но тогда согласно формуле (11.10) функция $\Phi(x)$ должна быть нечетной, т. е. функцию $\varphi(x)$ нужно продолжить на отрицательную полуось нечетным образом. В случае однородного граничного условия Неймана в формуле (11.16) $a_1=1$ и $a_k=0$, $k=0$, $k=2, 3, ..., N$ и согласно формуле (11.10) функция $\Phi'(x)$ должна быть нечетной. Но поскольку производная четной функции есть функция нечетная, то функция $\Phi(x)$ должна быть четной. Следовательно, функцию $\varphi(x)$ нужно продолжить на отрицательную полуось четным образом. Применительно к задачам Дирихле и Неймана метод продолжения носит название соответственно метода нечетного и четного продолжения.

Используя доказанную лемму, построим решение задачи (11.6)—(11.8) с граничными условиями Дирихле ($\alpha=0$, $\beta=1$).

Поскольку мы будем рассматривать классическое решение, предположим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию согласования начального и граничного условий: $\varphi(0)=0$. Введем функцию $\Phi(x)$, являющуюся нечетным продолжением функции $\varphi(x)$:

$$\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\in\overline{\mathbf{R}}^+, \\ -\varphi(-x), & x\in\overline{\mathbf{R}}^-, \end{cases} \tag{11.19}$$

и рассмотрим задачу Коши (11.18).

Решение задачи (11.18) можно записать в виде интеграла Пуассона (11.11).

Функция (11.11), очевидно, удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (11.6) в Ω_+, непрерывна и ограничена в замкнутой области $\overline{\Omega}_+$, удовлетворяет начальному условию (11.7) и в силу леммы 6.4 однородному граничному условию Дирихле. Тем самым она является классическим решением задачи (11.6)—(11.8) с граничным условием Дирихле.

Поскольку в формулировке задачи (11.6)—(11.8) с однородными граничными условиями Дирихле функция $\Phi(x)$ не фигурирует, преобразуем формулу (11.11), выражая $\Phi(x)$ через $\varphi(x)$ с помощью (11.19):

$$u(x,\ t)=\underset{x\in\mathbf{R}^+}{U(x,\ t)}=\int\limits_0^\infty G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi-\int\limits_{-\infty}^0 G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(-\xi)\,d\xi=$$

$$=\int\limits_0^\infty \{G(x,\ \xi,\ t)-G(x,\ -\xi;\ t)\}\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{11.20}$$

Окончательно решение задачи (11.6)—(11.8) с граничными условиями Дирихле можно записать в виде

$$u(x,\ t)=\int_0^\infty G_1(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad (11.21)$$

где, учитывая (7.16) и (11.20), получим

$$G_1(x,\ \xi,\ t)=G(x,\ \xi,\ t)-G(x,\ -\xi,\ t)=$$
$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}. \qquad (11.22)$$

Функция $G_1(x, \xi, t)$ называется функцией Грина задачи Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой.

Заметим, что функция $u(x, t)$, определенная интегралом Пуассона (11.21), удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности в Ω_+ и ограничена в $\bar{\Omega}_+$ и в случае ограниченной кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$ непрерывно примыкает при $t\to 0$ к функции $\varphi(x)$ в точках ее непрерывности. Очевидно, что это имеет место и в случае несогласования начальных и граничных условий: $\varphi(0)\neq 0$. При этом граничное условие $u(0, t)=0$ выполняется только при $t>0$.

Физический смысл функции $G_1(x, \xi, t)$ следует из формулы (11.22) — функция $G_1(x, \xi, t)$ дает значение температуры в точке x полубесконечного стержня в момент времени $t>0$, если в начальный момент $t=0$ в точке $x=\xi>0$ мгновенно выделяется количество тепла, равное $\rho=\tilde{c}\rho$, а граничное сечение $x=0$ все время поддерживается при нулевой температуре, для чего в точку $x=-\xi$ нужно поместить мгновенный точечный отрицательный источник.

С помощью функции Грина $G_1(x, \xi, t)$ можно построить решение задачи Дирихле для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой с однородными начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &u_t=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\ (x,\ t)\in\Omega_+,\\ &u(x,\ 0)=0, \quad x\in \mathbf{R}+,\\ &u(0,\ t)\ =0, \quad t\in[0,\ T]. \end{aligned} \qquad (11.23)$$

Решение задачи (11.23) имеет вид

$$u(x,\ t)=\int_0^t\int_0^\infty G_1(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau. \qquad (11.24)$$

Решение задачи (11.6)—(11.8) с граничными условиями Неймана ($\alpha=1$, $\beta=0$) строится аналогично, но начальная функция $\varphi(x)$ продолжается на всю бесконечную прямую четным образом:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in\mathbf{R}^+,\\ \varphi(-x), & x\in\mathbf{R}^-.\end{cases} \qquad (11.25)$$

Рассмотрим снова задачу Коши (11.18) на бесконечной прямой, где начальная функция $\Phi(x)$ определяется формулой (11.25). Записывая решение в виде интеграла Пуассона (11.11) и рассматривая функцию $U(x, t)$ на положительной полуоси, получим решение задачи (11.6)—(11.8) при $\alpha=1$, $\beta=0$. При этом граничное условие Неймана выполняется в силу леммы 6.4. С помощью формулы (11.25) получим

$$u(x,\ t)=\underset{x\in\mathbf{R}^+}{U(x,\ t)}=\int_0^\infty \{G(x,\ \xi,\ t)+G(x,\ -\xi,\ t)\}\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи можно записать в виде

$$u(x,\ t)=\int_0^\infty G_2(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{11.26}$$

где

$$G_2(x,\ \xi,\ t)=G(x,\ \xi,\ t)+G(x,\ -\xi,\ t)=$$
$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}. \tag{11.27}$$

Функция $G_2(x, \xi, t)$ называется функцией Грина задачи Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой.

Отметим, что в случае непрерывной при $x\in\mathbf{R}^+$ функции $\varphi(x)$ и выполнении условия согласования $\varphi_x(0)=0$ формула (11.26) определяет классическое решение $u(x, t)$ задачи (11.6)—(11.8) с граничными условиями Неймана ($\alpha=1$, $\beta=0$). Если эти условия не выполнены, то функция $u(x, t)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности в Ω_+, ограничена в $\overline{\Omega}_+$ и непрерывно при $t\to 0$ примыкает к функции $\varphi(x)$ только в точках ее непрерывности. Если условия согласования не выполнены, то граничное условие выполняется лишь при $t>0$.

С помощью функции Грина $G_2(x, \xi, t)$ выражается решение задачи Неймана для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой с однородными начальным и граничным условиями

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\quad (x,\ t)\in\Omega_+,$$
$$u(x,\ 0)=0,\quad x\in\mathbf{R}^+,$$
$$u_x(0,\ t)=0,\quad t\in[0,\ T].$$

Решение задачи выписывается в виде

$$u(x,\ t)=\int_0^t\int_0^\infty G_2(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{11.28}$$

причем формулу (11.28) можно получить, воспользовавшись интегральным преобразованием Фурье на полупрямой с ядром $\cos kx$.

Физический смысл функции $G_2(x, \xi, t)$ ясен из формулы (11.27). Функция Грина представляет собой температуру в точке x положительной полуоси в момент времени t, если в начальный момент времени $t=0$ в точке $x=\xi$ мгновенно выделяется количество тепла, равное $\rho=c\tilde{\rho}$, а поток тепла через сечение $x=0$ все время равен нулю, для чего в точку ξ нужно поместить мгновенный точечный положительный источник мощностью ρ.

Доказанная лемма позволяет использовать метод продолжения в случае однородных граничных условий более сложного вида. Рассмотрим, например, начально-краевую задачу на полупрямой $\mathbf{R}^+$ для однородного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями третьего рода:

$$\begin{gathered} u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\mathbf{R}}^+, \\ u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{gathered} \tag{11.29}$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию согласования начального и граничного условий:

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0.$$

Согласно лемме 6.4 нужно так продолжить функцию $\varphi(x)$ на отрицательную полуось, чтобы была нечетной функция $\Phi'(x) - h\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — продолжение функции $\varphi(x)$ на всю ось. Очевидно, $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ при $0 \leqslant x < \infty$. Для определения функции $\Phi(x)$ при отрицательных значениях аргумента получим задачу Коши

$$\begin{gathered} \Phi'(x) - h\Phi(x) = f(x) \quad x < 0, \\ \Phi(0) = \varphi(0), \end{gathered}$$

где $f(x) = -\varphi'(-x) + h\varphi(-x)$, решение которой имеет вид

$$\Phi(x) = \varphi(-x) + 2h \int_0^x e^{h(x-z)} \varphi(-z)\, dz, \quad x \leqslant 0.$$

Итак, функция $\Phi(x)$ определяется следующим образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0 \\ \varphi(-x) + 2h \int\limits_0^x e^{h(x-z)} \varphi(-z)\, dz, & x \leqslant 0. \end{cases} \tag{11.30}$$

Записывая решение задачи (11.29) в виде интеграла Пуассона (11.11), где функция $\Phi(x)$ определяется формулой (11.30):

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ \xi,\ t)\,\Phi(\xi)\,d\xi=\int_{0}^{\infty} G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_{-\infty}^{0} G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(-\xi)\,d\xi+2h\int_{-\infty}^{0} G(x,\ \xi,\ t)\int_{0}^{\xi} e^{h(\xi-z)}\varphi(-z)\,dz\,d\xi,$$

после преобразований получим

$$u(x,\ t)=\int_{0}^{\infty}\Big\{G(x,\ \xi,\ t)+G(x,\ -\xi,\ t)-$$

$$-2h\int_{0}^{\infty} G(x,\ -\xi-\eta,\ t)\,e^{-h\eta}\,d\eta\Big\}\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

В результате получается выражение для функции Грина третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой:

$$G_3(x,\ \xi,\ t)=G(x,\ \xi,\ t)+G(x,\ -\xi,\ t)-$$

$$-2h\int_{0}^{\infty} G(x,\ -\xi-\eta,\ t)\,e^{-h\eta}\,d\eta,$$

или с учетом формулы (7.16)

$$G_3(x,\ \xi,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}-2h\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2t}-h\eta}\,d\eta\right\}.$$

Функцию Грина $G_3(x,\ \xi,\ t)$ можно записать также в следующем виде:

$$G_3(x,\ \xi,\ t)=G(x,\ \xi,\ t)+G(x,\ -\xi,\ t)-2h\int_{-\infty}^{-\xi} G(x,\ \eta,\ t)\,e^{h(\xi+\eta)}\,d\eta.$$

Последняя формула имеет наглядный физический смысл: для удовлетворения граничному условию третьего рода нужно поместить в точку $x=-\xi$ симметричный источник и добавить распределенные на отрицательной части действительной оси от $-\infty$ до $-\xi$ непрерывно распределенные источники, мощность которых экспоненциально стремится к нулю при $\eta\to-\infty$.

С помощью построенной функции Грина $G_3(x, \xi, t)$ решение третьей начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями третьего рода:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\quad (x,\ t)\in\Omega_+,$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad x\in\overline{\mathbf{R}}^+,$$

$$u_x(0,\ t)-hu(0,\ t)=0,\quad t\in[0,\ T]$$

может быть записано в виде

$$u(x,\ t)=\int\limits_0^\infty G_3(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G_3(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau.$$

3. Краевой режим

Рассмотрим начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности с однородным начальным условием и неоднородным граничным условием Дирихле:

$$u_t=a^2u_{xx},\quad (x,\ t)\in\Omega_+, \tag{11.31}$$

$$u(x,\ 0)=0,\quad x\in\overline{\mathrm{R}}^+, \tag{11.32}$$

$$u(0,\ t)=\mu(t),\quad t\geqslant 0,\ \mu(0)=0, \tag{11.33}$$

$$|u(x,\ t)|\leqslant C,\quad (x,\ t)\in\Omega_+, \tag{11.34}$$

где $C>0$ — некоторая постоянная.

Решение задачи (11.31)—(11.34) можно получить, используя интегральное преобразование Фурье с ядром $\sin kx$. Мы используем для решения задачи метод преобразования Лапласа *).

Пусть для функции $\mu(t)$ и решения $u(x,t)$ задачи (11.31)—(11.34) выполнены условия существования преобразования Лапласа. Рассмотрим преобразование Лапласа по переменной t от функции $u(x,t)$, обозначив ее изображение через $U(x,p)$:

$$U(x,\ p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}u(x,\ t)\,dt. \tag{11.35}$$

Для классического решения выполнены условия дифференцирования под знаком интеграла (11.35). Поэтому получим

$$U_{xx}(x,\ p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}u_{xx}(x,\ t)\,dt.$$

Изображение функции $\mu(t)$ обозначим через $\mathscr{M}(p)$: $\mu(t)\doteqdot\mathscr{M}(p)$.

Используя теорему об изображении производной и учитывая начальное условие (11.33), получим

$$u_t(x,\ t)\doteqdot pU(x,\ p)-u(x,\ 0)=pU(x,\ p).$$

Таким образом, в пространстве изображений (11.31)—(11.34) соответствует следующая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения:

---

*) См: Свешников А. Г., Тихонов А. Н Теория функций комплексной переменной М.· Наука, 1979.

$$pU(x,\ p) = a^2 U_{xx}(x,\ p), \quad x \in \mathbf{R}^+, \tag{11.36}$$

$$U(0,\ p) = \mathcal{M}(p), \tag{11.37}$$

$$|U(x,\ p)| \leqslant C_1, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}^+, \tag{11.38}$$

где p играет роль параметра.

Решение задачи (11.36)—(11.38) имеет вид

$$U(x,\ p) = \mathcal{M}(p)\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \tag{11.39}$$

Для восстановления оригинала по изображению можно воспользоваться формулой Меллина. Мы используем иной прием.

Обозначим через $W(x, t)$ оригинал изображения $e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}/p$ и предположим, что функция $W(x, t)$ удовлетворяет дополнительному условию $W(x, 0) = 0$. Тогда, используя теорему об изображении производной, получим следующую связь между изображением и оригиналом производной $\dfrac{\partial W}{\partial t}$:

$$p\left(\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}\right) \doteqdot \frac{\partial}{\partial t} W(x,\ t).$$

Применяя теорему об изображении свертки, будем иметь

$$U(x,\ p) = \mathcal{M}(p)\, p\left(\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}\right) \doteqdot \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(x,\ t-\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau = u(x,\ t). \tag{11.40}$$

Полученное представление решения начально-краевой задачи (11.31)—(11.34) в виде

$$u(x,\ t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(x,\ t-\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau \tag{11.41}$$

носит название интеграла Дюамеля.

Для определения функции $W(x, t)$ воспользуемся следующим приемом. Так как изображение единицы равно $1/p$ и поскольку из вида изображения функции $W(x, t)$ следует, что $W(0,\ t) \doteqdot \dfrac{1}{p}$, получим $W(0, t) = 1$. Следовательно, функция $W(x, t)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$W_t = a^2 W_{xx}, \quad (x,\ t) \in \Omega_+,$$

$$W(x,\ 0) = 0, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}^+,$$

$$W(0, t)=1, \quad t \geqslant 0,$$

$$|W(x, t)|<M, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_{+}.$$

Заметим, что, поскольку в задаче для определения функции W не выполнены условия согласования начального и граничного условий, эта функция не является классическим решением: в окрестности точки $x=0$, $t=0$ она не обладает свойством непрерывности по совокупности переменных x, t.

Введем функцию $v(x, t)=1-W(x, t)$. Очевидно, эта функция может быть определена как не классическое решение начально-краевой задачи:

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega_{+},$$

$$v(x, 0)=1, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}^{+},$$

$$v(0, t)=0, \quad t \geqslant 0,$$

$$|v(x, t)|<M, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_{+}.$$

Решение этой задачи выписывается через функцию Грина по формуле (11.21):

$$v(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \qquad (11.42)$$

Сделав в первом интеграле в правой части формулы (11.41) замену $z=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, а во втором — замену $z=\frac{\xi+x}{2a\sqrt{t}}$, после преобразований получим

$$v(x, t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz.$$

Отсюда

$$W(x, t)=1-v(x, t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \qquad (11.43)$$

Из формул (11.40) и (11.43) окончательно получим формулу, выражающую решение начально-краевой задачи (11.31)—(11.34):

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

Изложенный прием построения начально-краевой задачи с неоднородным граничным условием в виде интеграла Дюамеля (11.41) является частным случаем общего метода решения данного класса линейных начально-краевых задач, известного под названием принципа Дюамеля.

4. Неоднородное граничное условие второго рода

Кратко остановимся на начально-краевой задаче для однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с неоднородным граничным условием второго рода

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega_+,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}^+,$$
$$u_x(0, t) = \nu(t), \quad t \geqslant 0.$$

Построим решение данной задачи, исходя из физических соображений, а затем проверим удовлетворение его требуемым условиям. Граничное условие означает, что задан поток тепла, втекающего в стержень через сечение $x=0$, причем плотность потока в силу закона Ньютона определяется выражением

$$-ku_x(0, t) = -k\nu(t),$$

где k — коэффициент теплопроводности, связанный с коэффициентом температуропроводности a^2 соотношением $k=a^2\rho$. Поэтому в силу принципа суперпозиции, воспользовавшись выражением (11.27) для функции Грина $G_2(x, \xi, t)$ полуограниченного стержня при $\xi=0$, можно записать решение поставленной задачи в виде

$$u(x, t) = -a^2 \int_0^t G_2(x, 0, t-\tau)\,\nu(\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Очевидно, что это выражение удовлетворяет в области Ω_+ однородному уравнению и нулевым начальным условиям. Проверим выполнение граничного условия:

$$u_x(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

Сделав в данном интеграле замену переменной интегрирования $\xi=\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$, $d\xi=\frac{x\,d\tau}{4a\,(t-\tau)^{3/2}}$, получим

$$u_x(x,\ t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\xi^2}\nu\left(t-\frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right)d\xi,$$

откуда, переходя к пределу при $x\to 0$, находим

$$\lim_{x\to 0}u_x(x,\ t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\xi^2}\nu(t)\,d\xi=\nu(t).$$

На строгом обосновании проведенных здесь формальных рассмотрений останавливаться не будем.

§ 12. ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При изучении уравнения Лапласа широко использовались формулы Грина. В частности, при выводе представлений решения краевых задач через соответствующую функцию Грина мы опирались на третью формулу Грина. В этом параграфе показано, что аналогичные идеи можно применять и при изучении уравнения теплопроводности, и единообразным методом получены формулы, представляющие решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности через соответствующие функции Грина.

Выведем для уравнения теплопроводности формулу, аналогичную третьей формуле Грина. Для вывода используем формальный метод, указанный в конце п. 1 § 1 гл. V.

Прежде всего заметим, что фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$G_0(M,\ Q,\ t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2a\sqrt{t-\tau})^3}e^{-\frac{R_{MQ}^2}{4a^2(t-\tau)}}, & t>\tau,\\ 0, & t\leqslant\tau\end{cases}$$

по переменным Q и τ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial G_0}{\partial\tau}=a^2\Delta_Q G_0+\delta(M,\ Q)\,\delta(t-\tau). \qquad (12.1)$$

Пусть $u(Q,\ \tau)$ — решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=a^2\Delta u+f(Q,\ \tau),\quad (Q,\ \tau)\in\Omega_3. \qquad (12.2)$$

Умножим (12.1) на $u(Q,\tau)$, (12.2) на $G_0(M,Q,t-\tau)$, вычтем одно из другого и проинтегрируем по области D и по τ от 0 до ∞:

$$\int_0^\infty\int_D \left\{G_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial G_0}{\partial \tau}\right\} dV\,d\tau = a^2 \int_0^\infty\int_D \{G_0\,\Delta u - u\,\Delta G_0\}\,dV\,d\tau +$$

$$+\int_0^\infty\int_D \{G_0 f - u\delta(M,\ Q)\,\delta(t-\tau)\}\,dV\,d\tau. \tag{12.3}$$

Используя вторую формулу Грина, свойства δ-функции и учитывая, что $G_0 \equiv 0$ при $\tau \geqslant t$, из (12.3) получаем

$$\int_0^t\int_D \left\{G_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial G_0}{\partial \tau}\right\} dV\,d\tau = a^2 \int_0^t \oint_S \left\{G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n}\right\} ds\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_D G_0 f\,dV\,d\tau - u(M,\ t). \tag{12.4}$$

Поскольку

$$\int_0^t \left\{G_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial G_0}{\partial \tau}\right\} d\tau = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}(G_0 u)\,d\tau =$$

$$= G_0(M,\ Q,\ t-\tau)\,u(Q,\ \tau)\,|_{\tau=0}^{\tau=t} = -G_0(M,\ Q,\ t)\,u(Q,\ 0)$$

(учтено, это $G_0(M,\ Q,\ t-\tau)|_{\tau=t} = 0$), из (12.4) имеем

$$u(M,\ t) = \int_D G_0(M,\ Q,\ t)\,u(Q,\ 0)\,dV_Q +$$

$$+a^2 \int_0^t \oint_S \left\{G_0(M,\ Q,\ t-\tau)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n_Q} G_0(M,\ Q,\ t-\tau)\right\} ds_Q\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_D G_0(M,\ Q,\ t-\tau)\,f(Q,\ \tau)\,dV_Q\,d\tau. \tag{12.5}$$

Формула (12.5) аналогична третьей формуле Грина для оператора Лапласа. Будем называть ее формулой Грина для уравнения теплопроводности.

Покажем, что, используя (12.5), можно, аналогично тому как это сделано для уравнения Лапласа, ввести функцию Грина для уравнения теплопроводности и получить интегральное представление решения начально-краевой задачи.

Пусть $v(Q, \tau)$ — решение однородного уравнения

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau} = a^2\,\Delta v, \quad M \in D,\ \tau < t, \tag{12.6}$$

удовлетворяющее условию

$$v\,|_{\tau=t} = 0.$$

Заметим, что функция v при этом будет зависеть только от разности $t-\tau: v=v(Q, t-\tau)$, и, следовательно, по переменной t она удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\Delta v, \quad Q\in D, \ t>\tau$$

и условию $v|_{t=\tau}=0$.

Умножим (12.6) на $u(Q,\tau)$, (12.2) на $v(Q,\tau)$, вычтем одно из другого, проинтегрируем по области D и по τ от 0 до ∞ и проведем преобразования, аналогичные только что сделанным. Тогда получим

$$0=\int_D v(Q, t)\,u(Q, 0)\,dV_Q+a^2\int_0^t\oint_S\left\{v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right\}ds\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_D vf\,dV\,d\tau. \qquad (12.7)$$

Складывая (12.5) и (12.7) и вводя обозначение

$$G(M, Q, t-\tau)=G_0(M, Q, t-\tau)+v,$$

получим соотношение

$$u(M, t)=\int_D G(M, Q, t)\,u(Q, 0)\,dV+$$

$$+a^2\int_0^t\oint_S\left\{G(M, Q, t-\tau)\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}G(M, Q, t-\tau)\right\}ds\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_D G(M, Q, t-\tau)\,f(Q, \tau)\,dV\,d\tau. \qquad (12.8)$$

Из формулы (12.8) можно получить интегральные представления решений начально-краевых задач. Для этого функцию v выберем так, чтобы функция G удовлетворяла нулевому граничному условию

$$\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G|_S=0, \quad |\alpha|+|\beta|\neq 0.$$

Тогда для решения начально-краевой задачи с граничным условием Дирихле ($\alpha=0$, $\beta=1$) получаем формулу

$$u(M, t)=\int_D G(M, Q, t)\,u(Q, 0)\,dV-$$

$$-a^2\int_0^t\oint_S u(P, \tau)\frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P, t-\tau)\,ds\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_D G(M,\ Q,\ t-\tau)\,f(Q,\ \tau)\,dV\,d\tau. \qquad (12.9)$$

Для решения начально-краевой задачи с граничным условием Неймана ($\alpha=1,\ \beta=0$)

$$u(M,\ t)=\int_D G(M,\ Q,\ t)\,u(Q,\ 0)\,dV+a^2\int_0^t\oint_S G(M,\ P,\ t-\tau)\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_D G(M,\ Q,\ t-\tau)\,f(Q,\ \tau)\,dV\,d\tau. \qquad (12.10)$$

Для решения начально-краевой задачи с граничным условием третьего рода ($\alpha=1,\ \beta=h(P)$)

$$u(M,\ t)=\int_D G(M,\ Q,\ t)\,u(Q,\ 0)\,dV+$$

$$+a^2\int_0^t\oint_S G(M,\ P,\ t-\tau)\left\{\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right\}ds\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_D G(M,\ Q,\ t-\tau)\,f(Q,\ \tau)\,dV\,d\tau. \qquad (12.11)$$

Функция Грина $G(M, Q, t-\tau)$ для всех трех граничных условий определяется единообразно.

Определение. Функция $G(M, Q, t-\tau)$ называется функцией Грина уравнения теплопроводности, если она удовлетворяет условиям:

$$1)\ G(M,\ Q,\ t-\tau)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{(t-\tau)\,\pi}\right)^3}\,e^{-\frac{R^2_{MQ}}{4a^2(t-\tau)}}+v,$$

где v удовлетворяет однородному уравнению $v_t=a^2\Delta v$ и нулевому начальному условию $v|_{t=\tau}=0$;

$$2)\ \alpha\,\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G|_S=0,\quad |\alpha|+|\beta|\neq 0.$$

Функция Грина определена при $t>\tau$, при $t\leqslant\tau$ она доопределяется нулем.

Заметим, что при таком подходе функция $G(M, Q, t-\tau)$ вводится и определяется аналогично тому, как это сделано для уравнения Лапласа.

Отметим также, что функция G является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial G}{\partial t}=a^2\Delta G+\delta(M,\ Q)\,\delta(t-\tau),$$

$$\alpha\frac{\partial G}{\partial n_p}(M,\ P,\ t-\tau)+\beta G|_{P\in S}=0,\quad |\alpha|+|\beta|\neq 0,$$

$$G(M,\ Q,\ t-\tau)|_{t\leqslant\tau}=0.$$

Отсюда следует, что в силу единственности решения так определенная функция Грина совпадает с функцией Грина, введенной ранее другим способом.

Отдельно выпишем выражения для решения одномерной задачи:

$$u_t=a^2u_{xx}+f,\quad 0<x<l,\ t>0,$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),$$

$$\alpha_1u_x-\beta_1u|_{x=0}=\mu_1(t),\quad |\alpha_1|+|\beta_1|\neq 0,$$

$$\alpha_2u_x+\beta_2u|_{x=l}=\mu_2(t),\quad |\alpha_2|+|\beta_2|\neq 0.$$

Для задачи Дирихле ($\alpha_1=\alpha_2=0,\ \beta_1=-1,\ \beta_2=1$):

$$u(x,\ t)=\int_0^l G_1(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t\int_0^l G_1(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau-$$

$$-a^2\int_0^t\left\{\mu_2(\tau)\frac{\partial G_1}{\partial\xi}(x,\ l,\ t-\tau)-\mu_1(\tau)\frac{\partial G_1}{\partial\xi}(x,\ 0,\ t-\tau)\right\}d\tau,\qquad(12.12)$$

где $G_1(x,\ \xi,\ t)$ — функция Грина задачи Дирихле.

Для задачи Неймана ($\beta_1=\beta_2=0,\ \alpha_1=\alpha_2=1$):

$$u(x,\ t)=\int_0^l G_2(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t\int_0^l G_2(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+a^2\int_0^t\{\mu_2(\tau)\,G_2(x,\ l,\ t-\tau)-\mu_1(\tau)\,G_2(x,\ 0,\ t-\tau)\}\,d\tau,\qquad(12.13)$$

где $G_2(x,\ \xi,\ t)$ — функция Грина задачи Неймана.

Для третьей краевой задачи ($\alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=h_1,\ \beta_2=h_2$):

$$u(x,\ t)=\int_0^l G_3(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t\int_0^l G_3(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+a^2\int_0^t\{\mu_2(\tau)\,G_3(x.\ l,\ t-\tau)-\mu_1(\tau)\,G_3(x,\ 0,\ t-\tau)\}\,d\tau,\qquad(12.14)$$

где $G_3(x,\ \xi,\ t)$ — функция Грина третьей задачи.

Решения задачи для полубесконечной прямой

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad x > 0, \ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$
$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \beta u|_{x=0} = \mu(t), \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0$$

можно получить из формул (12.12)—(12.14), делая формальный предельный переход $l \to +\infty$. В результате получим:

а) граничное условие Дирихле ($\alpha=0$, $\beta=-1$):

$$u(x, t) = \int_0^\infty G_1(x, \xi, t)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_0^\infty G_1(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ a^2 \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial G_1}{\partial \xi}(x, 0, t-\tau)\,d\tau, \qquad (12.15)$$

где

$$G_1(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\};$$

б) граничное условие Неймана ($\alpha = 1$, $\beta = 0$):

$$u(x, t) = \int_0^\infty G_2(x, \xi, t)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_0^\infty G_2(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau -$$
$$- a^2 \int_0^t \mu(\tau) G_2(x, 0, t-\tau)\,d\tau, \qquad (12.16)$$

где

$$G_2(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\}.$$

§ 13. УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ГОРЕНИЯ *)

До сих пор мы рассматривали процессы, математической моделью которых является начально-краевая задача для линейного уравнения параболического типа с линейными дополнительными условиями. Простейшим примером является одномерное уравнение теплопроводности (7.7). В этом параграфе мы кратко остановимся на математических моделях фи-

*) См., например: Галактионов В. А, Курдюмов С. П, Самарский А. А. Процессы в открытых диссипативных системах (графическое исследование эволюции тепловых структур). М.: Знание, 1988.

зических процессов, описываемых одномерным квазилинейным уравнением теплопроводности, содержащим источник объемного выделения тепла:

$$u_t = k_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + q_0 u^{\beta}, \tag{13.1}$$

где $k_0>0$, и $q_0>0$, $\beta>1$ — некоторые постоянные. Функция $u(x, t)$ обозначает температуру сплошной среды в каждой ее точке в момент времени t. Первый член в правой части уравнения (13.1) описывает механизм нелинейной теплопроводности, причем коэффициент теплопроводности $k(u)=k_0u^2$ зависит от температуры по нелинейному закону. Второй член в правой части уравнения (13.1) описывает процесс энерговыделения. Фактически — это мощность источника тепла. Этот член описывает процесс горения сплошной среды. Интенсивность горения зависит от температуры по нелинейному закону, причем безразмерный показатель β больше единицы (сверхинтенсивное горение).

Уравнение (13.1) мы будем рассматривать на бесконечной прямой $\mathbf{R}^1$. Для полной формулировки задачи инициирования процесса горения необходимо задать начальное тепловое возмущение. В результате приходим к следующей задаче Коши:

$$u_t = k_0 (u^2 u_x)_x + q_0 u^{\beta}, \quad x \in \mathbf{R}^1, \ t \in (0, T], \tag{13.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^1. \tag{13.3}$$

Отметим, что для корректной постановки задачи (13.2), (13.3) функция $u_0(x)$ должна отвечать некоторым дополнительным требованиям. Задание с помощью функции $u_0(x)$ распределенной в пространстве специальным образом начальной тепловой энергии приводит к горению среды, причем ввиду нелинейности уравнения (13.2) интенсивность горения, а также теплоперенос в различных участках прямой протекают различным образом. С течением времени в среде возникают меняющиеся в пространстве и во времени распределения температуры, называемые обычно тепловыми структурами.

Физический процесс, описываемый уравнением, заключается в конкуренции двух нелинейных процессов. С одной стороны, наличие нелинейной теплопроводности приводит к выравниванию тепловых неоднородностей, к созданию стационарного распределения температуры. С другой стороны, в процессе горения происходит выделение тепловой энергии, что может приводить к росту температуры. Причем чем выше температура, тем выше интенсивность тепловыделения. Но в то же время с ростом температуры увеличивается и коэффициент теплопроводности.

Одним из главных результатов конкуренции нелинейных процессов теплопередачи и тепловыделения является эффект локализации процесса горения, который в данном конкретном случае выступает как проявление процесса самоорганизации нелинейной диссипативной среды. Он может приводить к возникновению в среде целого набора различных структур, не взаимодействующих друг с другом.

С помощью преобразования переменных

$$t=\frac{\bar{t}}{q_0}, \quad x=\bar{x}\sqrt{\frac{k_0}{q_0}}$$

запишем уравнение (13.2) в безразмерном виде (черточки над x и t опускаем):

$$u_t=(u^2u_x)_x+u^\beta. \tag{13.4}$$

Свойства решений уравнения (13.4) существенно различаются в случаях $\beta=3$, $\beta<3$ и $\beta>3$.

Рассмотрим частный случай уравнения (13.4), когда в среде горения нет и тепло распространяется за счет теплопроводности:

$$u_t=(u^2u_x)_x. \tag{13.5}$$

Уравнение (13.5) имеет частные решения специального вида, так называемые точные автомодельные решения, выражающиеся через функцию $\theta(\xi)$ одного аргумента, который в свою очередь является определенной комбинацией независимых переменных x и t. Чтобы получить такое решение уравнения (13.5), будем искать $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t)=\frac{1}{t^{1/4}}\theta(\xi),$$

где

$$\xi=\frac{x^2}{\sqrt{t}}.$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $u(x,t)$ данного вида удовлетворяет уравнению (13.5), если функция $\theta(\xi)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$2\theta^2(\xi)\,\theta'(\xi)+\frac{1}{4}\theta(\xi)=\psi(\xi),$$

где $\psi(\xi)$, в свою очередь, — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$2\xi\psi'(\xi)+\psi(\xi)=0.$$

Одно из полученных таким путем частных автомодельных решений уравнения (13.5) — решение Зельдовича—Компанейца—Баренблатта — имеет следующий вид:

$$u_A(x, t)=\frac{1}{t^{1/4}}\left[\frac{1}{2}\left(\eta_0^2-\frac{x^2}{\sqrt{t}}\right)\right]_+^{1/2}, \tag{13.6}$$

где $\eta_0 = 2\sqrt{\frac{E_0}{\pi}}$ и $[z]_+ = \max\{0, z\}$, физический смысл постоянной E_0 будет ясен из дальнейшего.

Функция $u_A(x, t)$ для различных моментов времени изображена на рис. 6.2. За счет механизма нелинейной теплопроводности происходит быстрое растекание локального начального возмущения с максимальной температурой в точке $x=0$. В начальный момент времени $t=0$ температура в точке $x=0$ бесконечно велика, но в остальных точках бесконечной прямой она равна нулю: $u_A(x, 0)=0$ при $x\neq 0$. В точке $x=0$ с течением времени температура уменьшается по закону $u_A(0, t)=\frac{1}{t^{1/4}}\frac{\eta_0}{\sqrt{2}}$, и в пределе при $t\to+\infty$ происходит выравнивание температуры по всей бесконечной прямой $\mathbf{R}^1$.

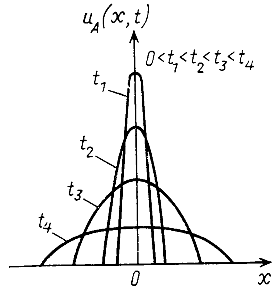


Рис. 6.2

Решение (13.6) называется решением типа мгновенного точечного источника, поскольку функция $u_A(x, t)$ физически означает температуру точки x бесконечной прямой $\mathbf{R}^1$ в момент времени t, если возбуждение осуществлялось мгновенным точечным источником мощности E_0, действовавшим в точке $x=0$ в момент времени $t=0$. Таким образом, функция $u_A(x, t)$ является аналогом фундаментального решения уравнения теплопроводности, введенного в § 7. Однако решение (13.6) существенно отличается от фундаментального решения (7.16). Функция $u_A(x, t)$ в каждый момент времени $t>0$ является финитной, т. е. решение строго положительно на конечном интервале $x\in(-\eta_0 t^{1/4}, \eta_0 t^{1/4})$. Тем самым уравнение (13.5) описывает тепловые волны — тепловые процессы с конечной скоростью распространения возмущений. При этом $x=\eta_0 t^{1/4}$ есть координата правого фронта тепловой волны, а $x=-\eta_0 t^{1/4}$ — координата левого фронта. Это принципиальное отличие механизма нелинейной теплопроводности, описываемого уравнением (13,5), от линейного механизма передачи тепла, описываемого уравнением (7.7). Отметим, что это свойство имеет место и при наличии в среде источников тепла вида u^β, $\beta>1$.

Пусть теперь в среде имеется источник тепловой энергии, соответствующий $\beta=3$:

$$u_t=(u^2u_x)_x+u^3. \tag{13.7}$$

Если искать автомодельное решение (13.7) в виде

$$u=\frac{1}{\sqrt{T_0-t}}\theta(x),$$

то для функции $\theta(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\theta(x)\,\theta''(x)+2[\theta'(x)]^2+\theta^2(x)=\frac{1}{2},$$

откуда соответствующее автомодельное решение уравнения (13.7) получим в виде

$$u_A(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{T_0-t}}\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi x}{L_s}\right), & |x|<\dfrac{L_s}{2},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{L_s}{2},\end{cases}\tag{13.8}$$

где $T_0>0$ — время существования решения, $L_s=\pi\sqrt{3}$ — длина носителя решения в любой момент времени. В отличие от решения Зельдовича—Компанейца—Баренблатта уравнения (13.5) решение (13.8) уравнения (13.7) локализовано в области $\omega_L=\left(-\frac{L_s}{2},\ \frac{L_s}{2}\right)$, вне которой температура остается равной нулю. Тепловые фронты структуры (13.8) неподвижны в течение всего времени ее существования: $x=\frac{1}{2}L_s$ — координата правого фронта тепловой волны, $x=-\frac{1}{2}L_s$ — координата левого фронта. При этом во всех точках интервала ω_L температура неограниченно возрастает по мере приближения t к моменту $t=T_0$. В центре структуры $x=0$ температура растет по закону

$$u_A(0,\ t)=\sqrt{\frac{3}{2(T_0-t)}}\to+\infty \text{ при } t\to T_0.$$

Такие тепловые структуры называются режимами с обострением, а соответствующие решения уравнения (13.7) или более общего уравнения (13.2) называются неограниченными решениями.

Тепловая структура (13.8) называется локализованным S-режимом с обострением и представляет собой стоячую температурную волну.

Рассмотрим теперь уравнение (13.2) при $\beta=2$:

$$u_t=(u^2u_x)_x+u^2.\tag{13.9}$$

Фиксируем время существования T_0 тепловой структуры и рассмотрим выражение

$$u_A(x,\ t)=\frac{1}{T_0-t}\,\theta(\xi),\quad \xi=|x|\sqrt{T_0-t},\tag{13.10}$$

где $\theta(\xi)>0$ — неизвестная функция. Подставив (13.10) в уравнение (13.9), получим, что $u_A(x,t)$ является решением нелинейного параболического уравнения (13.9), если функция $\theta(\xi)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\theta(^2\theta')'+\frac{1}{2}\theta'-\theta+\theta^2=0.$$

Это решение представляет собой функцию, строго положительную на интервале $(-\xi_0, \xi_0)$ и равную нулю вне его. Конкретный вид функции $\theta(\xi)$ и величину ξ_0, определяющую положение фронтов соответствующей тепловой структуры, можно найти численно.

Из формулы (13.10) вытекают следующие свойства изучаемой тепловой структуры. Во-первых, эта структура развивается в режиме с обострением. Значение максимальной температуры в центре $x=0$ структуры неограниченно возрастает по закону

$$u_A(0, t)=\frac{1}{T_0-t}\theta(0)\to+\infty \text{ при } t\to T_0.$$

Во-вторых, в любой момент времени тепловая структура имеет конечные фронты в точках $x_\pm(t)$, которые определяются из равенства $|x_\pm(t)|\sqrt{T_0-t}=\xi_0$. Следовательно, правый и левый фронты движутся по законам

$$x_+(t)=\frac{\xi_0}{\sqrt{T_0-t}},\quad x_-(t)=-\frac{\xi_0}{\sqrt{T_0-t}}.$$

В-третьих, из последней формулы следует, что фронты тепловой структуры движутся со все увеличивающейся скоростью, в пределе, в момент обострения $t=T_0$, тепловая структура охватывает всю прямую $\mathbf{R}^1$, нагревая ее всюду до бесконечной температуры.

Такой процесс горения, описываемый уравнением (13.9), называется HS-режимом.

И наконец, рассмотрим уравнение (13.2) при $\beta=4$:

$$u_t=(u^2u_x)_x+u^4. \tag{13.11}$$

В этом уравнении мощность источника энерговыделения $Q(u)=u^4$ при больших температурах выше, чем в S-режиме ($Q(u)=u^3$) и тем более HS-режиме ($Q(u)=u^2$). Поэтому возникающие тепловые структуры должны быть локализованными, причем локализация должна проявляться более сильно, чем в S-режиме горения с обострением.

Уравнение (13.11)) допускает решение следующего вида:

$$u_A(x, t)=\frac{1}{\sqrt[3]{T_0-t}}\theta(\xi),\quad \xi=\frac{|x|}{\sqrt[6]{T_0-t}}, \tag{13.12}$$

где $T_0>0$ — время обострения решения. Подставив (13.12) в уравнение (13.11), получим уравнение для функции $\theta(\xi)>0$:

$$(\theta^2\theta')' - \frac{1}{6}\xi\theta' - \frac{1}{3}\theta + \theta^4 = 0.$$

В отличие от случая HS-режима функция $\theta(\xi)$ строго положительна всюду, причем при больших значениях $|\xi|$ она имеет следующую асимптотику:

$$\theta(\xi) \simeq C_A \frac{1}{|\xi|^2}, \quad |\xi| \to \infty,$$

где C_A — постоянная, которую можно найти численно.

Из формулы (13.12) следует, что в отличие от S-режима решение (13.12) не может описывать локализацию процесса горения в строгом смысле. Локализация понимается в эффективном смысле. Решение растет со временем во всех точках, но неограниченный рост температуры в режиме с обострением имеет место только в одной точке $x=0$. Развитие тепловой структуры приводит к тому, что температура прямой $\mathbf{R}^1$ остается ограниченной во всех точках, за исключением точки $x=0$. Температура ограничена сверху некоторым предельным распределением, которое получается из (13.12) после предельного перехода $t \to T_0$:

$$u_A(x, t) < u_A(x, T_0) = \frac{C_A}{|x|^2}.$$

Процесс горения, описываемый уравнением (13.11), называется LS-режимом. В энергетическом смысле этот режим определяет еще более сильную локализацию тепла, чем в случае S-режима. В S-режиме температура неограниченно растет на интервале длины $L_s = \pi\sqrt{3}$, а в случае LS-режима — только в одной точке, и выделившаяся на развитой стадии горения тепловая энергия практически вся локализуется во все сужающейся со временем окрестности точки максимума температуры.

Итак, при различных показателях интенсивности горения развивающиеся в режиме обострения тепловые структуры принимают формы S-, HS- и LS-режимов, обладающие разными свойствами. Исследование нелинейных математических моделей эволюции диссипативных процессов в сплошных средах позволяет сделать вывод, что на развитой стадии более сложных существенно нестационарных процессов, как правило, обнаруживаются черты, свойственные одному из этих режимов.

Если задача допускает неограниченное решение, то она называется глобально (по времени) неразрешимой. Исследования пространственно-временной структуры неограниченных решений вблизи момента обострения связаны с широким использованием в практике физических экспериментов разнообразных эффектов, порождаемых сверхбыстрыми процессами, например эффекта самофокусировки световых пучков в нелинейных средах, коллапса ленгмюровских волн в плазме и др. Большое значение имеет исследование особых режимов сжатия в задачах, связанных с лазерным термоядерным синтезом.

Глава VII

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Целью настоящей главы является рассмотрение свойств и методов решения начально-краевых задач для уравнения колебаний

$$\rho(M)\,u_{tt}-\operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u)+q(M)\,u=f(M,\ t).$$

Это уравнение мы будем рассматривать как с постоянными, так и с переменными коэффициентами, в ограниченной области и в неограниченном пространстве. Причем рассмотрение будет одновременно проводиться для случая как одной, так и многих пространственных переменных.

Мы начнем с рассмотрения обоснования постановки начально-краевой задачи для уравнения колебаний в ограниченной области.

§ 1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть задана ограниченная область D с кусочно-гладкой границей S, допускающей применение формул Грина. Начально-краевая задача для уравнения колебаний в области D заключается в определении в цилиндре $\bar{Q}_T=\bar{D}\times[0,T]$ функции $u(M,t)$, удовлетворяющей уравнению колебаний, начальным и граничному условиям:

$$\rho u_{tt}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)-qu+f,\quad (M,\ t)\in Q_\infty, \tag{1.1}$$

$$u(M,\ 0)=\varphi(M),$$

$$u_t(M,\ 0)=\psi(M),\quad M\in\bar{D}, \tag{1.2}$$

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(P)\,u=\mu(P,\ t),\quad P\in S,\ t\in[0,\ \infty), \tag{1.3}$$

где $|\alpha|+|\beta|\neq 0$.

Определение классического решения задачи (1.1)—(1.3) было дано в гл. III. Напомним его.

Определение. Классическим решением начально-краевой задачи (1.1)—(1.3) называется функция $u(M, t)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_\infty$, имеющая непрерывные производные второго порядка в открытом цилиндре Q_∞, удовлетворяющая в Q_∞ уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничному условию (1.3).

Если граничное условие (1.3) есть условие Дирихле ($\alpha=0$), то непрерывность первых производных по M в замкнутой области $\bar{D}$ не требуется.

Заметим, что для существования классического решения необходимо (но недостаточно) выполнение условия согласования начального и граничного условий следующего вида:

$$\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial n}+\beta\varphi|_{P\in S}=\mu(P,\ 0)|_{P\in S},\quad \alpha\frac{\partial\psi}{\partial n}+\beta\psi|_{P\in S}=\mu_t(P,\ 0)|_{P\in S}.$$

Будем предполагать, что $k(M)>0$, $\rho(M)>0$, $q(M)\geqslant 0$, $M\in D$ и $\alpha(P)\geqslant 0$, $\beta(P)\geqslant 0$, $P\in S$, причем $\alpha+\beta>0$.

В силу линейности начально-краевой задачи (1.1)—(1.3) можно провести ее редукцию и представить решение $u(M, t)$ в виде суммы решений трех задач (см. гл. III):

$$u(M,\ t)=u_1(M,\ t)+u_2(M,\ t)+u_3(M,\ t),$$

где $u_1(M, t)$ — решение начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний с неоднородными начальными и однородными граничными условиями, $u_2(M, t)$ — решение начально-краевой задачи для неоднородного уравнения колебаний с однородными начальными и граничными условиями, $u_3(M, t)$ — решение начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний с однородными начальными и неоднородными граничными условиями. Причем с помощью методов, изложенных в гл. III, третья задача может быть сведена к первым двум. Поэтому в этой главе мы сосредоточим внимание на построении и изучении решений первых двух задач.

§ 2. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Докажем следующую теорему.

Теорема 7.1. *Задача* (1.1)—(1.3) *может иметь только одно классическое решение.*

Доказательство. Предположим, что задача (1.1)—(1.3) имеет два классических решения: $u_1(M, t)$ и $u_2(M, t)$. Рассмотрим их разность:

$$v(M,\ t)=u_1(M,\ t)-u_2(M,\ t).$$

В силу линейности задачи (1.1)—(1.3) функция $v(M, t)$ является классическим решением следующей однородной начально-краевой задачи:

$$\rho v_{tt}=Lv,\quad (M,\ t)\in Q_\infty, \tag{2.1}$$

$$v(M,\ 0)=v_t(M,\ 0)=0, \quad M\in\overline{D}, \tag{2.2}$$

$$\alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v|_S=0, \quad t\in[0,\ \infty), \tag{2.3}$$

где $Lv=\operatorname{div}(k \operatorname{grad} v)-qv$.

Используя функцию $v(M,\ t)$, построим интеграл

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_D\{\rho v_t^2+k(\nabla v)^2+qv^2\}\,dV. \tag{2.4}$$

Функция $E(t)$ неотрицательна: $E(t)\geqslant 0$ и в силу начальных условий (2.2)

$$E(0)=0. \tag{2.5}$$

Покажем, что интеграл $E(t)$ не изменяется во времени. Для этого вычислим его производную (дифференцирование по t под знаком интеграла в (2.4) возможно)

$$\frac{dE}{dt}=\int_D\{\rho v_t v_{tt}+k\nabla v\,\nabla v_t+qvv_t\}\,dV. \tag{2.6}$$

Согласно первой формуле Грина (см. (2.2), § 2 гл. III)

$$\int_D\{k\nabla v\,\nabla v_t+qvv_t\}\,dV=\oint_S kv_t\frac{\partial v}{\partial n}\,ds-\int_D v_t Lv\,dV. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.6) и учитывая уравнение (2.1), получаем

$$\frac{dE}{dt}=\int_D v_t\{\rho v_{tt}-Lv\}\,dV+\oint_S kv_t\frac{\partial v}{\partial n}\,ds=\oint_S kv_t\frac{\partial v}{\partial n}\,ds. \tag{2.8}$$

Для первой краевой задачи ($\alpha=0$, $\beta=1$) и для второй краевой задачи ($\alpha=1$, $\beta=0$) в силу (2.3) из (2.8) находим $\frac{dE}{dt}(t)=0$. Следовательно, $E(t)=\text{const}$. Согласно (2.5) $\text{const}=0$. Поэтому $E(t)=0$ при всех $t\geqslant 0$. Для третьей краевой задачи ($\alpha=1$, $\beta=h(p)\geqslant 0$) согласно (2.3) и (2.8) получаем

$$\frac{dE}{dt}=-\oint_S khvv_t\,ds=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\oint_S khv^2\,ds.$$

Отс

$$\frac{d}{dt}\left\{E(t)+\frac{1}{2}\oint_S khv^2\,ds\right\}=0.$$

Следовательно,

$$E(t)+\frac{1}{2}\oint_S khv^2\,ds=\text{const}. \tag{2.9}$$

Из (2.5) и (2.2) следует, что $\text{const}=0$. Поэтому при всех t

$$E(t)+\frac{1}{2}\oint\limits_S khv^2\,ds\equiv 0.$$

Так как $E(t)\geqslant 0$, $k>0$, $h\geqslant 0$, отсюда вытекает, что $E(t)\equiv 0$ при всех t.

Итак, для всех трех краевых задач $E(t)\equiv 0$. Учитывая выражение (2.4) для $E(t)$, получаем

$$v_t\equiv 0,\quad \nabla v\equiv 0,\quad (M,\ t)\in Q_\infty.$$

Следовательно, $v(M,t)=\text{const}$. В силу (2.2) $\text{const}=0$, т. е. $v(M,t)\equiv 0$ в Q_∞. Таким образом, задача (2.1)—(2.3) имеет только тривиальное решение, а решение задачи (1.1)—(1.3) единственно. ■

Замечания.

1) Доказательство теоремы единственности не зависит от размерности пространственной области D.

2) Используемый при доказательстве теоремы 7.1 интеграл $E(t)$ имеет физический смысл полной (кинетической и потенциальной) энергии колебаний системы. Второе слагаемое в левой части формулы (2.9) в случае граничных условий третьего рода имеет физический смысл энергии упругого закрепления.

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ

С помощью интеграла энергии $E(t)$, введенного в предыдущем параграфе, можно доказать устойчивость в пространстве $L_2(D)$ классического решения начально-краевой задачи (1.1)—(1.3) по правой части уравнения и начальным условиям. Напомним, что, как было показано в гл. III при рассмотрении общей схемы метода разделения переменных, задача с неоднородными граничными условиями всегда может быть сведена к задаче с однородными граничными условиями.

Мы проведем доказательство теоремы устойчивости для одномерной начально-краевой задачи на отрезке:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\ 0<x<l,\ 0<t\leqslant T, \tag{3.1}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),$$

$$u_t(x,\ 0)=\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant l, \tag{3.2}$$

$$u(0,\ t)=u(l,\ t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3.3}$$

где a^2 — постоянный коэффициент. Напомним, что, когда задача (3.1), (3.2) является математической моделью задачи о продольных колебаниях упругого стержня, $a^2=k_0/\rho$, где ρ — линейная плотность стержня, k_0 — коэффициент упругости.

Теорема 7.2. *Решение задачи* (3.1)—(3.3) *устойчиво в пространстве* L_2 *по правой части и начальным данным.*

Доказательство. Составим функцию (интеграл энергии)

$$\mathcal{E}^2(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \{u_t^2 + a^2 u_x^2\}\, dx. \qquad (3.4)$$

Для интеграла (3.4) выполнены условия дифференцируемости по параметру. Продифференцировав по параметру t, получим

$$2\mathcal{E}\mathcal{E}' = \int_0^l \{u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{xt}\}\, dx, \qquad (3.5)$$

где штрих означает производную по t.

Второй интеграл в правой части формулы (3.5) проинтегрируем по частям, учитывая, что в силу граничных условий (3.3) подстановки обратятся в нуль. В результате, учитывая уравнение (3.1), будем иметь

$$2\mathcal{E}\mathcal{E}' = \int_0^l u_t (u_{tt} - a^2 u_{xx})\, dx = \int_0^l u_t f(x, t)\, dx$$

и, используя неравенство Коши—Буняковского*), получим

$$2\mathcal{E}\,|\mathcal{E}'| \leqslant \|u_t\| \cdot \|f\|, \qquad (3.6)$$

где норма в пространстве $L_2(0, l)$ определяется следующим образом:

$$\|u(t)\|^2 \equiv \|u\|^2 = \int_0^l u^2(x, t)\, dx, \quad t \geqslant 0.$$

С другой стороны, из формулы (3.4) вытекает, что

$$\|u_t\| \leqslant \sqrt{2}\, \mathcal{E}(t). \qquad (3.7)$$

Из неравенств (3.6) и (3.7) следует неравенство

$$|\mathcal{E}'(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|, \qquad (3.8)$$

интегрируя которое по t, получим

$$\mathcal{E}(t) \leqslant \mathcal{E}(0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|f\|\, d\tau. \qquad (3.9)$$

Формулы (3.7) и (3.9) дают

$$\|u_t\| \leqslant \sqrt{2}\, \mathcal{E}(0) + \int_0^t \|f\|\, d\tau. \qquad (3.10)$$

---

*) См.: Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа Ч. 1. М.: Наука, 1982.

Продифференцируем по t квадрат нормы функции $u(x, t)$:

$$\|u\|^2 = \int_0^l u^2(x, t)\,dx$$

и применим неравенство Коши—Буняковского

$$\|u\| \frac{d}{dt} \|u\| = \int_0^l u u_t dx \leqslant \|u\| \cdot \|u_t\|.$$

Отсюда в силу неравенства (3.10) получим неравенство

$$\frac{d}{dt} \|u\| \leqslant \|u_t\| \leqslant \sqrt{2}\, \mathcal{J}(0) + \int_0^t \|f\|\, d\tau,$$

которое после интегрирования от 0 до t примет вид

$$\|u(t)\| \leqslant \|u(0)\| + \sqrt{2}\, \mathcal{J}(0)\, t + \int_0^t \int_0^\vartheta \|f(\tau)\|\, d\tau d\vartheta. \qquad (3.11)$$

Двойной интеграл при $t \in [0, T]$ легко оценивается:

$$\int_0^t \int_0^\vartheta \|f(\tau)\|\, d\tau d\vartheta \leqslant \max_{\tau \in [0, T]} \|f(\tau)\| \int_0^t \int_0^\vartheta d\tau d\vartheta \leqslant \max_{\tau \in [0, T]} \|f(\tau)\| \frac{T^2}{2}. \qquad (3.12)$$

Учтем теперь, что

$$\mathcal{J}^2(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \{u_t^2(x, 0) + a^2 u_x^2(x, 0)\}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \|u_t(0)\|^2 + \frac{a^2}{2} \|u_x(0)\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \|\psi\|^2 + \frac{a^2}{2} \|\varphi_x\|^2 \leqslant \frac{1}{2} \{\|\psi\| + a\|\varphi_x\|\}^2$$

и поэтому

$$\mathcal{J}(0) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \{\|\psi\| + a\|\varphi_x\|\}. \qquad (3.13)$$

Окончательно при $t \in [0, T]$ из неравенств (3.11) и (3.13) получаем

$$\|u\| \leqslant \|\varphi\| + (\|\psi\| + a\|\varphi_x\|)\, T + \frac{T^2}{2} \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|.$$

Последнее неравенство означает устойчивость решения задачи (9.1)—(9.3) по правой части и начальным функциям: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные постоянные $\delta_i > 0$ $i = 1, 2, 3, 4$, что если выполняются неравенства $\|\varphi\| \leqslant \delta_1$, $\|\psi\| \leqslant \delta_2$, $\|\varphi_x\| \leqslant \delta_3$ и $\max\limits_{t \in [0, T]} \|f(t)\| \leqslant \delta_4$, то $\|u(t)\| \leqslant \varepsilon$ при $t \in [0, T]$.

§ 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим начально-краевую задачу для однородного уравнения колебаний с неоднородными начальными и однородными граничными условиями. Формальная схема решения этой задачи методом Фурье была разобрана в гл. III. Для доказательства теоремы существования решения надо установить, что полученное формальное представление решения в виде ряда Фурье с коэффициентами, определяемыми через начальные данные, при соответствующих условиях, накладываемых на начальные данные, действительно является классическим решением рассматриваемой задачи.

Доказательство проведем для простейшего одномерного случая. Рассмотрим начально-краевую задачу, описывающую свободные колебания ограниченной струны с закрепленными концами (см. гл. I):

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ (x,\ t)\in\Omega_l=(0,\ l)\times(0,\ \infty), \tag{4.1}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ u_t(x,\ 0)=\psi(x),\ x\in[0,\ l], \tag{4.2}$$

$$u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=0,\ t\in[0,\ \infty). \tag{4.3}$$

Будем искать классическое решение задачи (4.1)—(4.3), для существования которого необходимо выполнение условия согласования начального и граничных условий:

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\psi(0)=\psi(l)=0.$$

Формальное решение задачи (4.1)—(4.3), построенное по методу Фурье, имеет вид

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\omega_nt+\frac{b_n}{\omega_n}\sin\omega_nt\right\}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x, \tag{4.4}$$

где $\omega_n=\dfrac{\pi an}{l}$, $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$,

$$a_n=\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}\,\xi d\xi, \tag{4.5}$$

$$b_n=\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}\,\xi d\xi. \tag{4.6}$$

Теорема 7.3. *Пусть начальные функции задачи (4.1) — (4.3) удовлетворяют условиям: функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\ l]$ и имеет на нем кусочно-непрерывную третью производную, функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\ l]$ и имеет на нем кусочно-непрерывную вторую производную,*

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0,\ \psi(0)=\psi(l)=0. \qquad (4.7)$$

Тогда существует классическое решение задачи (4.1)—(4.3), представленное формулой (4.4) с коэффициентами (4.5) и (4.6).

Доказательство. Нужно доказать:

а) непрерывность функции $u(x, t)$, представимой рядом (4.4), и ее первой производной $u_t(x, t)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}_l$ и непрерывное примыкание их к заданным начальным (4.2) и граничным (4.3) условиям;

б) существование вторых частных производных функции $u(x, t)$ и справедливость уравнения (4.1) в открытой области Ω_l.

Для доказательства сформулированных положений воспользуемся обобщенным принципом суперпозиции и известными свойствами равномерно сходящихся рядов по тригонометрическим функциям, приведенным в гл. VI при доказательстве существования решения одномерного уравнения теплопроводности.

Докажем положения, сформулированные в п. а). Для этого достаточно доказать равномерную сходимость в замкнутой области $\overline{\Omega}_l$ ряда (4.4) и ряда, полученного формальным дифференцированием (4.4) по t:

$$\frac{\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n\left\{-a_n\sin\omega_n t+\frac{b_n}{\omega_n}\cos\omega_n t\right\}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x. \qquad (4.8)$$

Мажорантным для ряда (4.4) будет ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+\frac{1}{\omega_n}|b_n|\right), \qquad (4.9)$$

а для ряда (4.8) — ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\omega_n|a_n|+|b_n|), \qquad (4.10)$$

которые сходятся при условиях, наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с учетом (4.5) и (4.6), в силу свойств рядов Фурье (см. гл. VI, § 4). Следовательно, ряды (4.4) и (4.8) в замкнутой области $\overline{\Omega}_l$ сходятся равномерно и определяют в этой области непрерывные функции $u(x, t)$ и $u_t(x, t)$. Так как при $t=0$ ряды (4.4) и (4.8) с учетом (4.5) и (4.6) переходят в тригонометрические ряды Фурье на отрезке $[0, l]$ для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющих условию разложимости в ряд Фурье, то при $t\to 0$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (4.2).

Поскольку все собственные функции $\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$ удовлетворяют однородным граничным условиям (4.3), то при $x\to 0$ и $x\to l$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет этим условиям.

Для доказательства положений п. б) докажем равномерную сходимость в области $\overline{\Omega}_l$ рядов, полученных путем формального почленного дифференцирования ряда (4.4) дважды по t:

$$\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n \cos\omega_n t + \frac{b_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\sin\sqrt{\lambda_n}\,x \tag{4.11}$$

и дважды по x:

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n \cos\omega_n t + \frac{b_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\sin\sqrt{\lambda_n}\,x. \tag{4.12}$$

Рядам (4.11), (4.12) с точностью до множителя соответствует общий мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(|a_n| + \frac{1}{\omega_n}\,|b_n|\right),$$

который сходится в силу условий, наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с учетом формул (4.5) и (4.6), и свойств рядов Фурье (см. гл. VI). Значит, ряды (4.11) и (4.12) в открытой области Ω_l сходятся равномерно, и поскольку каждый член ряда (4.4) удовлетворяет уравнению (4.1), то в силу обобщенного принципа суперпозиции (см. гл. VI, § 4) функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4.1) в открытой области Ω_l.

Отметим, что условия (4.7) обеспечивают непрерывность и периодичность нечетных продолжений начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и второй производной продолжения функции $\varphi(x)$. Непрерывность первой производной при нечетном продолжении получается автоматически. ■

З а м е ч а н и е. Отметим, что при доказательстве теоремы 7.3 на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ наложены достаточно жесткие условия, в частности, выходящие за рамки условий согласования. Эти условия связаны лишь с методом доказательства и могут быть значительно ослаблены.

§ 5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Воспроизведем общую схему метода разделения переменных для решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения колебаний с однородными начальными и граничными условиями. Для простоты будем рассматривать одномерную задачу для вынужденных колебаний ограниченной струны с закрепленными концами:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \; (x, t) \in \Omega_l, \tag{5.1}$$

$$u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=0,\ x\in[0,\ l],\tag{5.2}$$

$$u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=0,\ t\in[0,\ \infty).\tag{5.3}$$

Предположим, что существует классическое решение задачи (5.1)—(5.3). Функция $u(x,\ t)$ при каждом фиксированном t разлагается в ряд

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\tag{5.4}$$

где коэффициенты разложения $u_n(t)$ определяются формулой

$$u_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(\xi,\ t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,\ n=1,\ 2,\ \ldots\tag{5.5}$$

Поскольку функция $u(x,\ t)$ является классическим решением задачи (5.1)—(5.3), то для интеграла (5.5) выполняются условия дифференцируемости по параметру под знаком интеграла и

$$u_n^{(k)}(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,\ k=1,\ 2.\tag{5.6}$$

Умножим уравнение (5.1) на $\frac{2}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x$ и проинтегрируем по x от 0 до l. В результате получим

$$u_n''(t)=a^2\frac{2}{l}\int_0^l u_{xx}(x,\ t)\sin\frac{\pi n}{l}xdx+f_n(t),\tag{5.7}$$

где

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\ t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Интеграл в формуле (5.7) проинтегрируем два раза по частям с учетом граничных условий (5.3). Тогда, учитывая начальные условия (5.2) и формулу (5.6), для коэффициентов $u_n(t)$ получаем следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{gathered}u_n''(t)+\omega_n^2u_n(t)=f_n(t),\ t\in(0,\ \infty),\\ u_n(0)=0,\\ u_n'(0)=0,\end{gathered}\tag{5.8}$$

где

$$\omega_n=\frac{\pi an}{l}.$$

Решение задачи (5.8) можно записать с помощью импульсной функции *)

$$u_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau. \tag{5.9}$$

Подставляя коэффициенты (5.9) в ряд (5.4) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(x-t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi d\tau, \tag{5.10}$$

где

$$G(x,\ \xi,\ t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi na}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\sin\omega_n(t-\tau).$$

Можно доказать, что для непрерывной в области $\overline{\Omega}_l$ функции $f(x,\ t)$, удовлетворяющей нулевым начальным и граничным условиям, формула (5.10) действительно определяет классическое решение задачи (5.1)—(5.3).

Определение. Функция $G(x,\ \xi,\ t)$, определяемая формулой

$$G(x,\ \xi,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi na}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\sin\omega_n t,$$

называется функцией Грина, или функцией влияния мгновенного точечного импульса на отрезке.

Напомним, что для начально-краевой задачи общего вида функция Грина была введена в гл. III (см. формулу (5.10)).

Рассмотрим теперь, какой физический смысл имеет функция Грина $G(x,\ \xi,\ t)$.

Пусть положительная функция $f_\delta(x,\ t)$ отлична от нуля в достаточно малой окрестности точки $M_0(x_0,\ t_0)$:

$$\begin{aligned} &f_\delta(x,\ t)=0,\ x\notin[x_0-\delta x,\ x_0+\delta x],\ t\notin[t_0-\delta t,\ t_0+\delta t],\\ &f_\delta(x,\ t)\neq 0,\ x\in[x_0-\delta x,\ x_0+\delta x],\ t\in[t_0-\delta t,\ t_0+\delta t], \end{aligned} \tag{5.11}$$

причем для любых δt и δx

$$\int_{t_0-\delta t}^{t_0+\delta t}d\tau\int_{x_0-\delta x}^{x_0+\delta x}f_\delta(\xi,\ \tau)\,d\xi d\tau=C, \tag{5.12}$$

где $C>0$ — некоторая постоянная, которую мы определим ниже.

---

*) См.: Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

Функция $\rho f_\delta(x, t)$ есть плотность внешней силы, приложенной к струне. Поскольку в нашем случае струна является однородной (коэффициент a^2 постоянен), то линейная плотность струны ρ также постоянна. Сила, приложенная к участку струны $[x_0 - \delta x, x_0 + \delta x]$, равна

$$F_\delta(t) = \rho \int_{x_0-\delta x}^{x_0+\delta x} f_\delta(\xi, t) d\xi,$$

а импульс I этой силы за время δt представляется формулой

$$I = \int_{t_0-\delta t}^{t_0+\delta t} F_\delta(\tau) d\tau = \rho \int_{t_0-\delta t}^{t_0+\delta t} d\tau \int_{x_0-\delta x}^{x_0+\delta x} f_\delta(\xi, \tau) d\xi. \tag{5.13}$$

Сравнивая формулы (5.12) и (5.13), получаем, что постоянная в формуле (5.12) имеет вид

$$C = \frac{I}{\rho}.$$

Решение $u_\delta(x, t)$ задачи (5.1)—(5.3) с правой частью $f_\delta(x, t)$ записывается через функцию Грина по формуле (5.10):

$$u_\delta(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f_\delta(\xi, \tau) d\xi d\tau. \tag{5.14}$$

Применяя к последней формуле теорему о среднем*), получим

$$u_\delta(x, t) = G(x, \xi^*, t-\tau^*) \int_{t_0-\delta t}^{t_0+\delta t} d\tau \int_{x_0-\delta x}^{x_0+\delta x} f_\delta(\xi, \tau) d\xi, \tag{5.15}$$

где

$$\xi^* \in [x_0 - \delta x, x_0 + \delta x], \quad \tau^* \in [t_0 - \delta t, t_0 + \delta t].$$

Перейдем в формуле (5.15) к пределу при $\delta x \to 0$ и $\delta t \to 0$, считая, что величина импульса I сохраняется. В результате, учитывая формулу (5.13), получим

$$u_0(x, t) = \lim_{\delta x \to 0\ \delta t \to 0} u_\delta(x, t) = G(x, x_0, t - t_0) \frac{I}{\rho}. \tag{5.16}$$

Функция $u_0(x, t)$ описывает процесс колебания ограниченной струны с закрепленными концами, возбужденной мгновенным точечным импульсом мощности I, приложенным в момент времени t_0 в точке x_0. Таким образом, из формулы (5.16) вытекает, что функция Грина $G(x, \xi, t)$ с физической точки зрения означает отклонение точки струны с координатой x в момент времени t при возбуждении струны в начальный момент времени $t=0$ мгновенным точечным импульсом мощности $I=\rho$ в точке $x=x_0$.

---

*) См.: Ильин В. А. Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч 1. М: Наука, 1982.

§ 6. ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

В этом параграфе получим представление решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний в ограниченной области через функцию Грина.

Напомним, что функция Грина $G(M_0, M, t_0-t)$ может быть определена как регулярная обобщенная функция, являющаяся решением следующей начально-краевой задачи (см. § 5 гл. III):

$$\rho G_{tt}=L_M G+\delta(M, M_0)\delta(t_0-t),\ M\in D,\ t>0, \tag{6.1}$$

$$\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G\Big|_S=0,\ |\alpha|+|\beta|\neq 0, \tag{6.2}$$

$$G|_{t\geqslant t_0}=0,\ G_t|_{t\geqslant t_0}=0, \tag{6.3}$$

где $Lv=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}v)-qv$. Функция Грина представима в виде ряда

$$G(M_0, M, t_0-t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin a\sqrt{\lambda_n}\,(t_0-t)}{a\sqrt{\lambda_n}}v_n(M)v_n(M_0), \tag{6.4}$$

где $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и $\{v_n(M)\}_1^\infty$ — собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора L:

$$Lv+\lambda\rho v=0,\ \alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v\Big|_S=0,\ |\alpha|+|\beta|\neq 0.$$

Рассмотрим следующую задачу для уравнения колебаний в ограниченной области:

$$\rho u_{tt}=Lu+f(M, t),\ M\in D,\ t>0, \tag{6.5}$$

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\Big|_S=\mu(P, t)|_{P\in S},\ |\alpha|+|\beta|\neq 0, \tag{6.6}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(M),\ u_t|_{t=0}=\psi(M). \tag{6.7}$$

Будем считать, что задача (6.5)—(6.7) имеет решение. Чтобы выразить это решение через функцию Грина G, используем формальный метод, примененный для уравнения теплопроводности в § 12 гл. VI.

Умножим уравнение (6.5) на $G(M_0, M, t_0-t)$, а уравнение (6.1) на $u(M, t)$. Вычитая одно соотношение из другого и интегрируя по $M\in D$ и $t\in[0,\infty)$, получим

$$\int_0^\infty\int_D\rho\{Gu_{tt}-uG_{tt}\}\,dV\,dt=\int_0^\infty\int_D\{GLu-uLG\}\,dV\,dt+$$
$$+\int_0^\infty\int_D\{Gf-u\delta(M, M_0)\delta(t_0-t)\}\,dV\,dt. \tag{6.8}$$

Учитывая (6.3), преобразуем интеграл, интегрируя по частям:

$$\int_0^\infty \{G(M_0, M, t_0-t)\,u_{tt}-uG_{tt}(M_0, M, t_0-t)\}\,dt=$$

$$=\int_0^{t_0} (Gu_{tt}-uG_{tt})\,dt=G(M_0, M, t_0-t)\,u_t(M, t)\Big|_{t=0}^{t=t_0}-$$

$$-u(M, t)\,G_t(M_0, M, t_0-t)\Big|_{t=0}^{t=t_0}=$$

$$=-G(M_0, M, t_0)\,u_t(M, 0)+u(M, 0)\,G_t(M_0, M, t_0). \quad (6.9)$$

Интеграл в правой части (6.8) преобразуем, используя вторую формулу Грина:

$$\int_0^\infty \int_D (GLu-uLG)\,dV\,dt+\int_0^\infty \int_D \{fG-u\delta(M, M_0)\,\delta(t_0-t)\}\,dV\,dt=$$

$$=\int_0^{t_0} \oint_S k\left\{G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n_P}\right\}ds\,dt+\int_0^{t_0}\int_D fG\,dV\,dt-u(M_0, t_0). \quad (6.10)$$

Подставляя (6.9) и (6.10) в (6.8) и учитывая, что

$$G_t(M_0, M, t_0-t)\big|_{t=0}=-G_{t_0}(M_0, M, t_0-t)\big|_{t=0},$$

получим

$$u(M_0, t_0)=\int_0^{t_0}\int_D G(M_0, M, t_0-t)\,f(M, t)\,dV\,dt+$$

$$+\int_0^{t_0}\oint_S k\left\{G(M_0, P, t_0-t)\frac{\partial u}{\partial n}(P, t)-u(P, t)\frac{\partial G}{\partial n_P}(M_0, P, t_0-t)\right\}\times$$

$$\times\, ds\,dt+\int_D \rho(M)\,\{G(M_0, M, t_0)\,u_t(M, 0)+u(M, 0)\,G_{t_0}(M_0, M, t_0)\}\,dV. \quad (6.11)$$

Из формулы (6.11) легко получаются представления решения задачи (6.5)—(6.7). Выпишем решения для граничных условий первого, второго и третьего рода отдельно.

Для граничных условий Дирихле ($\alpha=0$, $\beta=1$):

$$u|_S=\mu(P, t)|_{P\in S}, \quad G_1|_S=0.$$

Поэтому решение имеет вид

$$u(M, t)=\int^{t}\int_D G_1(M, Q, t-\tau)\,f(Q, \tau)\,dV\,d\tau-$$

$$-\int_0^t \oint_S k\mu \frac{\partial G_1}{\partial n}(M,\ P,\ t-\tau)\, ds d\tau +$$

$$+\int_D \rho \{G_1(M,\ Q,\ t)\, \psi(Q) + \varphi(Q)\, G_{1_t}(M,\ Q,\ t)\}\, dV. \qquad (6.12)$$

Для граничных условий Неймана ($\alpha = 1,\ \beta = 0$):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \mu(P,\ t)|_{P\in S},\quad \left.\frac{\partial G_2}{\partial n}\right|_S = 0.$$

Решение задачи (6.5)—(6.7) имеет вид

$$u(M,\ t) = \int_0^t \int_D G_2(M,\ Q,\ t-\tau)\, f(Q,\ \tau)\, dV d\tau +$$

$$+\int_0^t \oint_S k(P)\, G_2(M,\ P,\ t-\tau)\, \mu(P,\ \tau)\, ds d\tau +$$

$$+\int_D \rho \{G_2(M,\ Q,\ t)\, \psi(Q) + \varphi(Q)\, G_{2_t}(M,\ Q,\ t)\}\, dV. \qquad (6.13)$$

В случае граничных условий третьего рода ($\alpha = 1,\ \beta = h$):

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = \mu(P,\ t)|_{P\in S},\quad \frac{\partial G_3}{\partial n} + hG_3|_S = 0,$$

и решение задачи (6.5)—(6.7) представимо в виде

$$u(M,\ t) = \int_0^t \int_D G_3(M,\ Q,\ t-\tau)\, f(Q,\ \tau)\, dV d\tau +$$

$$+\int_0^t \oint_S k(P)\, G_3(M,\ P,\ t-\tau)\, \mu(P,\ \tau)\, ds d\tau +$$

$$+\int_D \rho \{\psi(Q)\, G_3(M,\ Q,\ t) + \varphi(Q)\, G_{3_t}(M,\ Q,\ t)\}\, dV. \qquad (6.14)$$

§ 7. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ НА НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРЯМОЙ

1. Постановка задачи с начальными условиями для неограниченной струны

При математическом описании любого физического процесса прежде всего необходимо поставить задачу, т. е. сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса. В том случае, когда физическая задача сводится к уравнению в частных производных, для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

В случае простейшей задачи, описывающей процесс поперечных колебаний струны, для однозначного определения решения к уравнению колебаний нужно еще добавить начальные и граничные условия. Отметим, что если точка струны с координатой $\bar{x}$ достаточно удалена от границы, то влияние граничных условий сказывается в точке $\bar{x}$ через достаточно большой промежуток времени. Поэтому если нас интересует явление в течение малого промежутка времени, то вместо полной задачи можно рассматривать задачу с начальными условиями для неограниченной струны. Эта задача ставится следующим образом:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\ (x,\ t)\in\Omega, \tag{7.1}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ u_t(x,\ 0)=\psi(x),\ x\in\mathbf{R}^1, \tag{7.2}$$

где a^2 — постоянный коэффициент, а область Ω имеет вид $\Omega=\mathbf{R}^1\times(0,\ \infty)$, $\bar{\Omega}=\mathbf{R}^1\times[0,\ \infty)$.

Напомним определение классического решения.

Определение. Классическим решением задачи с начальными условиями (7.1), (7.2) называется функция $u(x,\ t)$, непрерывная вместе со своими первыми производными по t в замкнутой области $\bar{\Omega}$, имеющая непрерывные производные второго порядка в открытой области Ω, удовлетворяющая в Ω уравнению (7.1) и при $t\to0$ начальным условиям (7.2).

Учитывая линейность задачи (7.1), (7.2), можно провести ее редукцию и представить решение $u(x,t)$ задачи в виде суммы решений двух задач:

$$u(x,\ t)=u_1(x,\ t)+u_2(x,\ t),$$

где $u_1(x,t)$ — решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний с неоднородными начальными условиями, $u_2(x,\ t)$ — решение задачи для неоднородного уравнения колебаний с однородными начальными условиями.

2. Формула Даламбера

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения колебаний:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ (x,\ t)\in\Omega, \tag{7.3}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ u_t(x,\ 0)=\psi(x),\ x\in\mathbf{R}^1. \tag{7.4}$$

Предположим, что существует классическое решение задачи (7.3), (7.4). Преобразуем уравнение колебаний (7.3) к каноническому виду, содержащему смешанную производную (см. гл II). Уравнение характеристик уравнения (7.3) имеет вид

$$(dx)^2 - a^2 (dt)^2 = 0$$

и распадается на два уравнения:

$$dx - adt = 0, \ dx + adt = 0.$$

Характеристиками являются два семейства прямых:

$$x - at = C_1, \ x + at = C_2,$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные.

Введем новые переменные

$$\xi = x - at, \ \eta = x + at.$$

Тогда уравнение колебаний (7.3) преобразуется к виду

$$U_{\xi\eta} = 0. \tag{7.5}$$

где $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$.

Найдем общий интеграл уравнения (7.5). Для всякого решения уравнения (7.5) получаем

$$U_\eta(\xi, \eta) = \bar{f}(\eta),$$

где $\bar{f}(\eta)$ — функция одного переменного η. Интегрируя последнее равенство по η при фиксированном ξ, получим

$$U(\xi, \eta) = \int \bar{f}(\eta)\, d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{7.6}$$

где функция $f_1(\xi)$ является функцией только переменного ξ, а $f_2(\eta)$ — функция только переменного η. Верно и обратное: каковы бы ни были дифференцируемые функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$, функция $U(\xi, \eta)$, определяемая формулой (7.6), представляет собой решение уравнения (7.5). Так как всякое решение уравнения (7.5) может быть представлено в виде (7.6) при определенном выборе функций f_1 и f_2, то формула (7.6) является общим интегралом этого уравнения. Следовательно, функция

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$$

является общим интегралом уравнения (7.3).

Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (7.4):

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x), \ x \in \mathbf{R}^1, \end{aligned} \tag{7.7}$$

где штрих означает производную по полному аргументу соответствующей функции.

Обозначим аргументы функций f_1 и f_2 через ζ. Тогда, интегрируя второе из равенств (7.7), получим

$$\begin{aligned} f_1(\zeta) + f_2(\zeta) &= \varphi(\zeta), \\ -f_1(\zeta) + f_2(\zeta) &= \frac{1}{a} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \psi(z)\, dz + C, \end{aligned} \tag{7.8}$$

где ζ_0 и C — некоторые постоянные.

Вычитая и складывая равенства (7.8), получим

$$f_1(\zeta)=\frac{1}{2}\varphi(\zeta)-\frac{1}{2a}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)\,dz-\frac{C}{2}, \tag{7.9}$$

$$f_2(\zeta)=\frac{1}{2}\varphi(\zeta)+\frac{1}{2a}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)\,dz+\frac{C}{2},$$

причем последние два равенства должны выполняться при любом значении аргумента $\zeta\in\mathbf{R}^1$. Подставляя найденные выражения (7.9) для функций f_1 и f_2 при значении их аргументов соответственно $\xi=x-at$ для $f_1(\xi)$ и $\xi=x+at$ для $f_2(\xi)$ в формулу (7.6), получим

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz. \tag{7.10}$$

Заметим, что постоянные $\pm\frac{C}{2}$, входящие в формулы (7.9), в выражении (7.10) для решения исходной задачи сократились.

Формула (7.10) называется формулой Даламбера.

3. Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши

Формула Даламбера (7.10) дает возможность доказать единственность, существование и устойчивость решения задачи Коши (7.3), (7.4).

Теорема 7.4. *Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на бесконечной прямой $\mathbf{R}^1$. Тогда классическое решение задачи Коши (7.3), (7.4) существует, единственно и определяется формулой Даламбера (7.10).*

Доказательство. *Единственность.* Предположим, что классическое решение задачи Коши (7.3), (7.4) существует. Тогда оно представимо в виде (7.10). Если существует второе решение задачи (7.3), (7.4), то оно также должно представляться формулой (7.10) и тем самым совпадать с первым.

Существование. Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на бесконечной прямой. Тогда непосредственной проверкой легко установить, что функция $u(x,\ t)$, представимая формулой Даламбера (7.10), является классическим решением задачи Коши. ■

Замечание. В формулировке теоремы условия, накладываемые на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, менее жесткие, чем в теореме существования решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке. Это связано с различными методами доказательства соответствующих теорем.

Формула Даламбера дает возможность доказать устойчивость решения задачи Коши (7.3), (7.4) по начальным данным. Обозначим через $u_s(x, t)$ решение задачи Коши (6.3), (6.4) с начальными функциями $\varphi_s(x)$, $\psi_s(x)$, $s=1, 2$.

Теорема 7.5. *Пусть начальные функции $\varphi_s(x)$ и $\psi_s(x)$ ($s=1, 2$) двух задач Коши (7.3), (7.4) удовлетворяют условиям*

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)| \leqslant \varepsilon, \quad x \in \mathbf{R}^1$$

и

$$\int\limits_a^b |\psi_1(z)-\psi_2(z)|^2\, dz \leqslant \varepsilon^2 (b-a)^2 \tag{7.11}$$

для любых постоянных a и b.

Тогда для решения этих задач при $t\in[0, T]$ выполняется неравенство

$$|u_1(x, t)-u_2(x, t)| \leqslant \varepsilon(1+T), \quad (x, t)\in\overline{\Omega}. \tag{7.12}$$

Доказательство. Записав решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задач Коши (7.3), (7.4) с помощью формулы Даламбера и оценивая модуль разности, получим

$$|u_1(x, t)-u_2(x, t)| \leqslant \frac{1}{2}\, |\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)| +$$
$$+\frac{1}{2}\, |\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)| + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} |\psi_1(z)-\psi_2(z)|\, dz.$$

Оценивая интеграл в правой части с помощью неравенства Коши—Буняковского

$$\int\limits_{x-at}^{x+at} |\psi_1(z)-\psi_2(z)|\, dz \leqslant \left\{\int\limits_{x-at}^{x+at} |\psi_1(z)-\psi_2(z)|^2\, dz\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_{x-at}^{x+at} dz\right\}^{1/2}$$

и учитывая неравенство (7.11), имеем оценку

$$|u_1(x, t)-u_2(x, t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2a}\, 2at \leqslant \varepsilon(1+T). \blacksquare$$

Замечание. Сформулированная теорема устойчивости справедлива для любых функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, представимых формулой Даламбера. Поэтому можно расширить понятие решения задачи Коши (7.3)—(7.4) для случая негладких начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Решением задачи Коши в случае негладких начальных функций будем называть предел выражений, представленных формулой Даламбера (7.10), полученных для сглаженных начальных функций $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$, сколь угодно близко аппроксимирующих функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

4. Физическая интерпретация решения

Функция $u(x, t)$, определяемая формулой (7.10), представляет процесс распространения начального отклонения и начальной скорости. Если фиксировать некоторый момент времени $t=t_0$, то функция $u(x, t_0)$ дает профиль струны в момент времени t_0. Зафиксировав точку $x=x_0$, мы получим функцию $u(x_0, t)$, которая описывает процесс движения точки x_0. Предположим теперь, что некоторый наблюдатель, находившийся в точке $x=0$ в момент времени $t=0$, движется со скоростью a в положительном направлении оси x. Введем систему координат (x', t'), связанную с наблюдателем. Для этого положим

$$x'=x-at, \qquad t'=t.$$

В системе координат (x', t') функция $u(x, t)=f(x-at)$ определяется формулой $u=f(x')$, т. е. наблюдатель все время видит тот же профиль, что и в начальный момент. Следовательно, функция $u(x, t)=f(x-at)$ представляет собой неизменный профиль $f(x)$, который перемещается вправо (в положительном направлении оси x) со скоростью a. Иными словами, функция $u(x, t)=f(x-at)$ представляет собой бегущую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x со скоростью a. Для краткости мы будем называть ее правой бегущей волной. Аналогично функция $u(x, t)=f(x+at)$ представляет собой бегущую волну, распространяющуюся со скоростью a в отрицательном направлении оси x, т. е. левую бегущую волну.

Таким образом, общее решение (7.6) задачи Коши для бесконечной струны (7.3), (7.4) есть суперпозиция двух бегущих волн: правой волны

$$f_1(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\Psi(x-at)$$

и левой волны

$$f_2(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\Psi(x+at),$$

где функция Ψ имеет вид

$$\Psi(\zeta)=\frac{1}{2a}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)\,dz, \tag{7.15}$$

а ζ_0 — некоторая постоянная.

Для выяснения характера решения (7.6) задачи К... эт- (7.3), (7.4) удобно пользоваться плоскостью состояния (x, t) или фазовой плоскостью. Как было отмечено в п. 2, прямые $x-at=C_1$, $x+at=C_2$, где C_1 и C_2 — некоторые постоянные, являются характеристиками уравнения (7.3). Функция $u=f(x-at)$ вдоль характеристики $x-at=C_1$ сохраняет постоянное значение $f(C_1)$, функция $u=f(x+at)$ постоянна вдоль характеристики $x+at=C_2$ и равна $f(C_2)$.

Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля в интервале (x_1, x_2) и равна нулю вне этого интервала. Проведем на фазовой плоскости через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ соответственно характеристики $x-at=x_1$ и $x-at=x_2$. Эти характеристики разбивают верхнюю полуплоскость $t>0$ фазовой плоскости на три области (рис. 7.1). Функция

$$u(x, t)=f(x-at)$$

отлична от нуля только в области II, где выполняются неравенства $x_1<x-at<x_2$.

В областях I и III выполняются соответственно неравенства $x-at>x_2$ и $x-at<x_1$ и функция $u(x, t)=f(x-at)$ равна нулю. Характеристика $x-at=x_2$ представляет собой передний фронт правой бегущей волны $u=f(x-at)$, а характеристика $x-at=x_1$ — ее задний фронт. Аналогичным образом можно дать интерпретацию левой бегущей волны на фазовой плоскости (x, t).

Выберем на фазовой плоскости некоторую фиксированную точку $M(x_0, t_0)$ и проведем через нее характеристики $x-at=x_0-at_0$ и $x+at=x_0+at_0$. Эти характеристики пересекут ось x соответственно в точках $P(x_0-at_0, 0)$ и $Q(x_0+at_0, 0)$ (рис. 7.2). Значение функции (7.6) в точке $M(x_0, t_0)$ равно

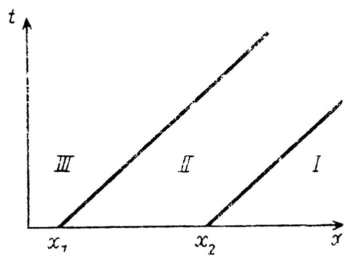


Рис. 7.1

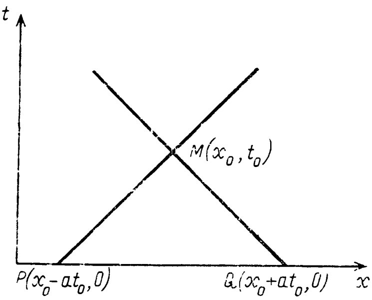


Рис. 7.2

$$u(x_0, t_0)=f_1(x_0-at_0)+f_2(x_0+at_0).$$

...им образом, значение функции $u(x, t)$ в точке $M(x_0, t_0)$ ...еляется значениями функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точках ... $-at_0, 0)$ и $Q(x_0+at_0, 0)$ соответственно, являющихся вер...ми треугольника MPQ, образованного отрезками двух ха...ристик и отрезком оси x (см. рис. 7.2). Этот треугольник ...вается характеристическим треугольником точки $M(x_0, t_0)$. ... формулы Даламбера (7.10) видно, что отклонение $u(x_0, t_0)$ ...чки x_0 струны в момент времени t_0 зависит только от значений начального отклонения в вершинах $P(x_0-at_0, 0)$ и $Q(x_0+at_0, 0)$ характеристического треугольника MPQ и от значений начальной скорости на стороне PQ. Поэтому формулу (7.10) удобно переписать так:

$$u(M)=\frac{\varphi(P)+\varphi(Q)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{PQ}\psi(z)\,dz. \tag{7.14}$$

Начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заданные вне отрезка PQ, не оказывают влияния на значения функции $u(x, t)$ в точке $M(x_0, t_0)$. Физически это связано с конечной скоростью распространения возмущения вдоль колеблющейся струны.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть начальные скорости равны нулю: $\psi(x)=0$, а начальное отклонение струны является локальным, т. е. отличным от нуля на отрезке $[0, \pi]$ и равным нулю вне этого отрезка. Пусть, например, функция $\varphi(x)$ имеет следующий вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0, \pi],\\ 0, & x\notin[0, \pi].\end{cases}$$

Обратимся снова к фазовой плоскости. Проведем через точки $P(0, 0)$ и $Q(\pi, 0)$ правые и левые характеристики. Эти характеристики разобьют верхнюю полуплоскость фазовой плоскости на шесть областей (рис. 7.3). Рассмотрим, чему будет равно отклонение $u(x, t)$ струны в каждой из этих областей.

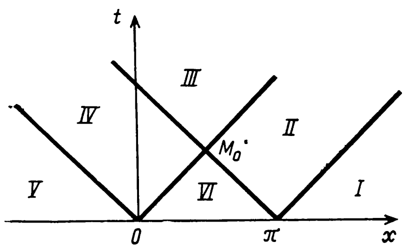


Рис. 7.3

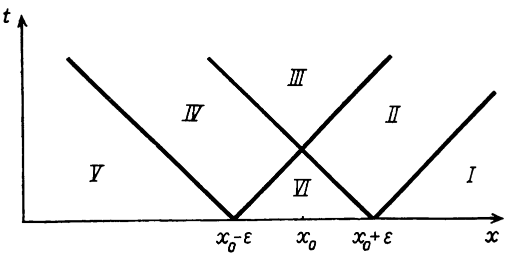


Рис. 7.4

Так как начальная скорость равна нулю ($\psi(x)\equiv 0$), из формулы Даламбера (7.10) следует, что отклонение струны в каждой из областей есть сумма левой и правой бегущих волн:

$$u(x, t)=\frac{1}{2}\{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\}. \tag{7.15}$$

Из формулы (7.14) следует, что в областях I, III и V отклонение равно нулю.

В самом деле, если взять в любой из этих областей точку $M(x_0, t_0)$ и построить для нее характеристический треугольник, то вершины при основании этого треугольника на оси $t=0$ лежат вне отрезка $[0, \pi]$, на котором функция начальных условий отлична от нуля. Из аналогичных построений вытекает, что в области II будет существовать только правая волна $u(x,\ t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)$, а в области IV — левая волна $u(x,\ t)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)$. Если, наконец, построить характеристический треугольник для любой точки $M(x_0,\ t_0)$ области VI, то обе вершины при основании этого треугольника будут находиться в пределах отрезка $[0,\ \pi]$. Следовательно, в области VI отклонение будет представлять собой сумму правой и левой волн (7.15).

Итак, в различных областях отклонения будут иметь следующий вид:

$$u(x.\ t)=0 \text{ в области I, III и V};$$

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\sin(x-at) \text{ в области II};$$

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\sin(x+at) \text{ в области IV};$$

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}[\sin(x-at)+\sin(x+at)]=\sin x\cos at \text{ в области VI},$$

т. е. в этой области суперпозиция правой и левой бегущих волн дает стоячую волну.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим случай, когда начальное отклонение тождественно равно нулю $\varphi(x)\equiv 0$, а начальная скорость отлична от нуля и равна постоянной ψ_0 только в ε-окрестности точки x_0:

$$\psi(x)=\begin{cases} 0, & x\notin(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon), \\ \psi_0, & x\in(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon). \end{cases} \tag{7.16}$$

В этом случае из формулы Даламбера (7.10) следует, что возмущение струны можно записать следующим образом:

$$u_\varepsilon(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz. \tag{7.17}$$

Снова рассмотрим фазовую плоскость $(x,\ t)$ и проведем через точки $P(x_0-\varepsilon,\ 0)$ и $Q(x_0+\varepsilon,\ 0)$ характеристики, которые разобьют верхнюю полуплоскость на шесть областей (рис. 7.4).

В области I выполнены неравенства $x+at>x-at>x_0+\varepsilon$. Поэтому согласно формуле (7.16) подынтегральная функция в интеграле (7.17) равна нулю и $u_\varepsilon(x,\ t)=0$.

В области II выполнены неравенства $x_0-\varepsilon<x-at<x_0+\varepsilon<$ $<x+at$, и согласно формулам (7.16) и (7.17) будем иметь

$$u_\varepsilon(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x_0+\varepsilon}\psi(z)\,dz=\frac{\psi_0}{2a}(x_0+\varepsilon-(x-at)),$$

т. е. правую бегущую волну, профиль которой при фиксированном $t > t_0 = \frac{\varepsilon}{a}$ линейно изменяется от $\frac{\varepsilon}{a}\psi_0$ до 0 при $x_0 - \varepsilon < x - at < x_0 + \varepsilon$.

В области III выполнены неравенства $x - at < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < x + at$, откуда

$$u_\varepsilon(x,\ t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \psi(z)\,dz = \frac{\varepsilon}{a}\psi_0. \tag{7.18}$$

Тем самым в области III смещение точек струны не зависит ни от x, ни от t.

В области IV имеем неравенства $x - at < x_0 - \varepsilon < x + at < x_0 + \varepsilon$ и

$$u_\varepsilon(x,\ t) = \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x+at} \psi(z)\,dz = \frac{\psi_0}{2a}(x + at - (x_0 - \varepsilon)),$$

т. е. в области IV существует левая бегущая волна.

В области V выполнены неравенства $x - at < x + at < x_0 - \varepsilon$, поэтому согласно (7.16) подынтегральная функция в интеграле (7.17) равна нулю и $u_\varepsilon(x,\ t) = 0$.

Наконец, в области VI имеем неравенства $x_0 - \varepsilon < x - at < x + at < x_0 + \varepsilon$, откуда

$$u_\varepsilon(x,\ t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz = t\psi_0.$$

Таким образом, смещение всех точек x струны, попавших в эту область, линейно растет во времени, достигая в точке x_0 в момент времени $t_0 = \frac{\varepsilon}{a}$ (точка $M_0(x_0,\ t_0)$ фазовой плоскости принадлежит областям II, III, IV и VI одновременно) значения $\frac{\varepsilon}{a}\psi_0$, т. е. значения постоянного смещения точек струны в области III фазовой плоскости. Отметим, что эффект постоянного смещения точек струны в области III фазовой плоскости при локальном возбуждении начальной скоростью очевиден, поскольку пределы интегрирования в формуле (7.18) не зависят ни от x, ни от t.

Если начальная скорость удовлетворяет условию $\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \psi(z)\,dz = 0$, то эффекта последействия нет, в противном случае точки струны получают постоянное смещение, расплывающееся по струне в обе стороны со скоростью a вдоль характеристик $x - at = x_0 - \varepsilon$ и $x + at = x_0 + \varepsilon$.

Замечание. В рассмотренных примерах начальные данные не удовлетворяют условиям гладкости, которые были сформулированы в теореме существования классического решения задачи Коши. Однако в силу доказанной выше теоремы устойчивости проведенное рассмотрение вполне правомерно, поскольку оно дает качественную картину поведения классического решения с гладкими начальными условиями, сколь угодно точно аппроксимирующими рассмотренные разрывные начальные функции в формуле Даламбера (см. замечание к п. 3).

5. Колебания струны под действием мгновенного сосредоточенного импульса

Предположим, что в начальный момент $t=0$ точкам однородной струны $x\in[x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon]$ сообщают постоянную скорость ψ_0, например, ударяя по струне молоточком. Тем самым к этому участку струны прикладывается импульс I_0, равный измерению количества движения при $t=0$: $I_0=2\varepsilon\rho\psi_0$, где ρ — постоянная линейная плотность струны. Таким образом, нужно решить задачу о колебаниях бесконечной струны с нулевым начальным отклонением $\varphi(x)\equiv 0$ и начальной скоростью, равной постоянной $\psi_0=I_0/2\varepsilon\rho$ на интервале $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ и нулю вне этого интервала. Решение этой задачи проанализировано в примере 2 п. 4. Если теперь совершить предельный переход при $\varepsilon\to 0$, увеличивая одновременно начальную скорость ψ_0 так, чтобы суммарный начальный импульс I_0, сообщенный струне, оставался постоянным, то в пределе из шести областей верхней полуплоскости остаются только три: первая, третья и пятая (рис. 7.5). При этом в областях I и V решение

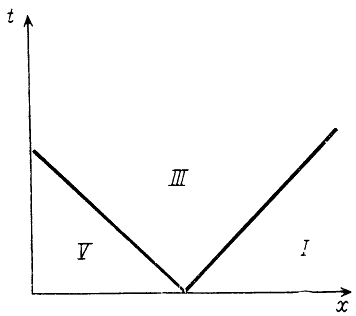


Рис. 7.5

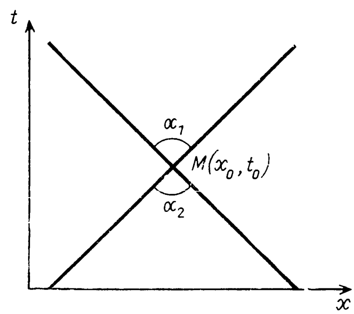


Рис 7.6

равно нулю, а в области III равно предельному значению при $\varepsilon\to 0$ решения примера 2 п. 4:

$$u(x,\ t)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(x,\ t)=\frac{I_0}{2a\rho}.$$

Можно условно говорить, что эти отклонения вызываются мгновенным точечным импульсом I_0.

Рассмотрим на фазовой плоскости две характеристики, проходящие через точку $M(x_0,\ t_0)$ (рис. 7.6):

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0.$$

Эти характеристики определяют два угла α_1 и α_2, называемых соответственно верхним и нижним характеристическими углами точки $M(x_0, t_0)$. Действие мгновенного точечного импульса $I_0 = \rho$ в точке $M(x_0, t_0)$ вызывает отклонение, равное $u_0(x, t) = 1/2a$ внутри верхнего характеристического угла точки $M(x_0, t_0)$ и нулю вне его.

Эту функцию $u_0(x, t)$ естественно называть функцией мгновенного сосредоточенного импульса, приложенного к точке x_0 струны в момент времени t_0.

С другой стороны, из этих рассуждений следует, что отклонение в произвольной точке x струны в момент времени t, вызываемое мгновенным импульсом I_0 в точке x_0 в момент времени t_0, зависит от того, находится ли точка фазовой плоскости $M(x, t)$ внутри верхнего характеристического угла точки $M(x_0, t_0)$ или нет. Если точка $M(x, t)$ расположена внутри верхнего характеристического угла точки $M(x_0, t_0)$, то $u(x, t) = I_0/2a\rho$, если нет, то $u(x, t) \equiv 0$.

Предположим теперь, что в момент времени $t = \tau$ струне сообщается распределенный импульс с плотностью распределения $\rho f(x, \tau)$. Отклонение, вызываемое таким импульсом, на основании принципа суперпозиции равно при $t > \tau$

$$u_\tau(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x - a(t-\tau)}^{x + a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi$$

и нулю при $t < \tau$.

Если внешняя сила, распределенная непрерывно в пространстве и во времени, начинает действовать в момент времени $t = 0$, причем начальные смещения и скорости точек струны нулевые, то в силу принципа суперпозиции отклонение равно

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x - a(t-\tau)}^{x + a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi d\tau. \qquad (7.19)$$

Отметим, что из формулы (7.19) следует, что отклонение точек струны под действием распределенной с плотностью $f(x, t)$ силы определяется лишь значениями функции $f(x, t)$ внутри нижнего характеристического угла точки (x, t) на фазовой плоскости и не зависит от распределения этой силы вне данного характеристического угла. В этом проявляется эффект конечной скорости распространения внешних воздействий на точки струны.

Формула (7.19) получена на физическом уровне строгости. Получим теперь строго математически более общую формулу, из которой будет следовать формула (7.19).

Напомним известные из курса математического анализа формулы Грина*), которые сформулируем в удобном для нас виде. Пусть функция $F(x, t)$ непрерывно дифференцируема в области D и непрерывна в области $\bar{D}$: $F(x, t) \in C^{(1)}(D) \cap C(\bar{D})$, где $\bar{D} = D \cup \Gamma$ — двумерная область с границей Γ в плоскости (x, t). Тогда имеют место следующие формулы:

$$\int\limits_D \frac{\partial F(x, t)}{\partial t}\, dxdt = -\oint\limits_\Gamma F(x, t)\, dx. \qquad (7.20)$$

$$\int\limits_D \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}\, dxdt = \oint\limits_\Gamma F(x, t)\, dt,$$

где контур Γ проходится в положительном направлении (чтобы область D находилась слева от направления движения).

Предположим, что классическое решение задачи (7.1), (7.2) для неоднородного уравнения колебаний с неоднородными начальными условиями существует.

Возьмем на фазовой плоскости точку M и построим характеристический треугольник ABM (рис. 7.7). Проинтегрируем уравнение (7.1) колебаний по этому треугольнику, предварительно умножив его на $1/2a$. В результате получим

$$\frac{1}{2a} \int\limits_{\Delta ABM} (u_{tt} - a^2 u_{xx})\, dxdt = \frac{1}{2a} \int\limits_{\Delta ABM} f(x, t)\, dxdt. \quad (7.21)$$

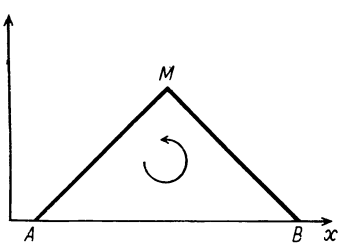


Рис. 7.7

Применим к интегралам в левой части формулы Грина (7.20):

$$\int\limits_{\Delta ABM} u_{tt} dxdt = -\int\limits_A^B u_t dx - \int\limits_B^M u_t dx - \int\limits_M^A u_t dx,$$

$$\int\limits_{\Delta ABM} u_{xx} dxdt = \int\limits_A^B u_x dt + \int\limits_B^M u_x dt + \int\limits_M^A u_x dt. \qquad (7.22)$$

Поскольку на отрезке AB $dt = 0$, а на отрезках характеристик BM и MA имеют место соотношения $dx = -adt$ и $dx = adt$ из формул (7.22) имеем

$$\int\limits_{\Delta ABM} (u_{tt} - a^2 u_{xx})\, dxdt = -\int\limits_A^B u_t dx + a \int\limits_B^M (u_t dt + u_x dx) -$$

*) См.: Ильин В. А. Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М: Наука, 1980.

$$-a\int_M^A (u_t dt+u_x dx)=-\int_A^B u_t dx+a\left[u(M)-u(B)-u(A)+u(M)\right]. \tag{7.23}$$

Из (7.21) и (7.23) следует формула

$$u(M)=\frac{u(A)+u(B)}{2}+\frac{1}{2a}\int_A^B u_t dx+\frac{1}{2a}\int\limits_{\Delta ABM} f(x,\ t)\,dxdt.$$

Учитывая, что точки M, A, B имеют соответственно координаты $(x,\ t)$, $(x-at,\ 0)$, $(x+at,\ 0)$, и используя начальные условия (7.2), окончательно получаем формулу для решения задачи (7.1), (7.2):

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi d\tau. \tag{7.24}$$

Заметим, что формула (7.24) представляет решение задачи (7.1), (7.2) в виде суммы решения двух задач. Если положить в (7.24) $f(x,\ t)\equiv 0$, то формула (7.24) дает решение задачи для однородного уравнения колебаний и неоднородных начальных условий и совпадает с полученной в п. 2 § 7 формулой Даламбера (7.10). При $\varphi(x)\equiv 0$ и $\psi(x)\equiv 0$ формула (7.24) представляет решение задачи для неоднородного уравнения колебаний с однородными начальными условиями. В этом случае она совпадает с формулой (7.19), полученной из физических соображений.

6. Существование и единственность решения

Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного уравнения колебаний с однородными начальными условиями на бесконечной прямой:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\ (x,\ t)\in\Omega=\mathbf{R}^1\times[0,\ \infty), \tag{7.25}$$

$$u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=0,\ x\in\mathbf{R}^1. \tag{7.26}$$

Решение задачи (7.25), (7.26) представляется формулой (7.24), в которой нужно положить $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi d\tau. \tag{7.27}$$

Теорема 7.6. *Пусть функция $f(x,\ t)$ непрерывно дифференцируема в области Ω: $f(x,\ t)\in C^{(1)}(\Omega)$. Тогда классическое решение задачи (7.25), (7.26) существует, единственно и определяется формулой (7.27).*

Доказательство. Дифференцируя интеграл в правой части формулы (7.27) по x и по t, получим

$$u_x(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_0^t \{f(x+a(t-\tau),\ \tau)-f(x-a(t-\tau),\ \tau)\}\,d\tau,$$

$$u_{xx}=\frac{1}{2a}\int_a^t \{f'(x+a(t-\tau),\ \tau)-f'(x-a(t-\tau),\ \tau)\}\,d\tau,$$

$$u_t=\frac{1}{2a}\left\{\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\right\}_{\tau=t}+\frac{1}{2a}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\right\}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t \{af(x+a(t-\tau),\ \tau)+af(x-a(t-\tau),\ \tau)\}\,d\tau, \qquad (7.28)$$

$$u_{tt}=\frac{1}{2}(f(x,\ t)+f(x,\ t))+$$

$$+\frac{a}{2}\int_0^t \{f'(x+a(t-\tau),\ \tau)-f'(x-a(t-\tau),\ \tau)\}\,d\tau,$$

причем штрих обозначает производную функции $f(x,\ t)$ по первому аргументу.

Подставляя формулы (7.28) в уравнение (7.25) и начальные условия (7.26), получим, что функция $u(x,\ t)$, определяемая формулой (7.27), где функция $f(x, t)$ удовлетворяет сформулированным в теореме условиям, является классическим решением задачи (7.25), (7.26). Из представления решения формулой (7.27) следует и его единственность. ■

§ 8. ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПРЯМОЙ

1. Задачи для однородного уравнения с однородными граничными условиями первого и второго рода

Рассмотрим применение формулы Даламбера к решению задачи на полуограниченной прямой в случае граничных условий первого и второго рода. Докажем следующую лемму.

Лемма 7.1. *Если в задаче Коши (7.3), (7.4) начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетны, то функция $u(x,\ t)$, представимая формулой Даламбера (7.10), обращается в нуль при $x=0$; если же функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четны, то производная по x от функции $u(x,\ t)$ обращается в нуль при $x=0$.*

Доказательство. Положив в формуле Даламбера $x=0$, получим

$$u(0,\ t)=\frac{\varphi(-at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(z)\,dz=0.$$

Продифференцировав формулу Даламбера по x и положив $x=0$, получим

$$u_x(0,\ t)=\frac{\varphi'(-at)+\varphi'(at)}{2}+\frac{1}{2a}\{\psi(at)-\psi(-at)\}=0,$$

поскольку производная четной функции есть функция нечетная. ■

Замечание. Подчеркнем, что утверждение леммы справедливо для любых функций $u(x,\ t)$, представимых формулой Даламбера, а не только для классических решений задачи Коши (7.3), (7.4).

Рассмотрим на полупрямой $\bar{\mathbf{R}}^{+}=[0,\ \infty)$ начально-краевую задачу для однородного уравнения колебаний с однородными граничными условиями Дирихле:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ (x,\ t)\in\Omega_{+}=\mathbf{R}^{+}\times(0,\ \infty), \tag{8.1}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ u_t(x,\ 0)=\psi(x),\ x\in\bar{\mathbf{R}}^{+}, \tag{8.2}$$

$$u(0,\ t)=0,\ t\in[0,\ \infty). \tag{8.3}$$

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом на всю бесконечную прямую:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0,\\ -\varphi(-x), & x<0,\end{cases}\quad \psi_1(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0,\\ -\psi(-x), & x<0.\end{cases} \tag{8.4}$$

Тогда функция

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi_1(z)\,dz \tag{8.5}$$

при $x\geqslant0$ является решением задачи (8.1)—(8.3).

В самом деле, функция (8.5), очевидно, удовлетворяет однородному волновому уравнению, краевому условию она удовлетворяет в силу доказанной леммы. Выполнение начальных условий проверяется непосредственно.

Перепишем формулу (8.5), выражая функции φ_1 и ψ_1 через функции φ и ψ по формуле (8.4). Если выполнены неравенства $x+at>x-at>0$, то $\varphi_1(x\pm at)=\varphi(x\pm at)$ и $\psi_1(x\pm at)=\psi(x\pm at)$. Если $x-at<0$, то $\varphi_1(x-at)=-\varphi(at-x)$ и $\psi_1(x-at)=-\psi(at-x)$. Поэтому формула (8.5) принимает вид

$$u(x,\ t)=$$

$$
=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz, & \text{при } 0<t\leqslant\dfrac{x}{a},\ x>0, \\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(z)\,dz, & \text{при } t\geqslant\dfrac{x}{a},\ x>0. \end{cases} \tag{8.6}
$$

Замечание 1. Отметим, что при $0<t\leqslant\frac{x}{a}$ возмущение, вышедшее из точки x в момент $t=0$, не успевает достичь границы, влияние граничного условия не сказывается на характере решения и формула (8.6) совпадает с формулой Даламбера. При $t\geqslant\frac{x}{a}$ возникает отраженная от границы волна, которая, интерферируя с определенными начальными условиями бегущими волнами, формирует решение.

Замечание 2. В зависимости от гладкости начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функция $u(x, t)$, определяемая формулой (8.6), может представлять как классическое, так и менее гладкое решение. В случае, если функция $u(x, t)$ представляет классическое решение, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ кроме условий гладкости $\varphi\in C^{(2)}(\overline{\mathbf{R}}^{+})$, $\psi\in C^{(1)}(\overline{\mathbf{R}}^{+})$ должны также удовлетворять условию согласования начальных и граничного условий $\varphi(0)=\psi(0)=0$. Соответственно нужно доопределить нулем при $x=0$ и функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ в формулах (8.4).

Рассмотрим теперь на полупрямой $\overline{\mathbf{R}}^{+}$ начально-краевую задачу для однородного уравнения колебаний с однородными граничными условиями Неймана:

$$
u_{tt}=a^2u_{xx},\ (x,\ t)\in\Omega_{+}, \tag{8.7}
$$

$$
u(x,\ 0)=\varphi(x),\ u_t(x,\ 0)=\psi(x),\ x\in\overline{\mathbf{R}}^{+}, \tag{8.8}
$$

$$
u_x(0,\ t)=0,\ t\in[0,\ \infty). \tag{8.9}
$$

Продолжая начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четным образом:

$$
\varphi_2(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0,\\ \varphi(-x), & x<0,\end{cases}\quad \psi_2(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0,\\ \psi(-x), & x<0,\end{cases} \tag{8.10}
$$

запишем решение задачи (8.7)—(8.9) через функции $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$ с помощью формулы Даламбера при $x>0$:

$$
u(x,\ t)=\frac{\varphi_2(x+at)+\varphi_2(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_2(z)\,dz. \tag{8.11}
$$

Используя (8.10), формулу (8.11) можно переписать в терминах функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следующим образом:

$$u(x, t) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz, \quad 0 < t \leqslant \dfrac{x}{a}, \quad x > 0, \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int_0^{x+at}\psi(z)\,dz + \int_0^{at-x}\psi(z)\,dz\right\}, \\ \qquad\qquad t \geqslant \dfrac{x}{a}, \quad x > 0. \end{cases} \tag{8.12}$$

При этом граничное условие (8.9) удовлетворяется в силу доказанной леммы.

Отметим, что для решения $u(x, t)$ задачи (8.7)—(8.9) остаются в силе замечания 1 и 2, сделанные по поводу решения задачи (8.1)—(8.3).

2. Распространение краевого режима

Рассмотрим начально-краевую задачу на полупрямой $\mathbf{R}^+$ для однородного уравнения колебаний с однородными начальными и неоднородным граничным условиями:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega_+, \tag{8.13}$$

$$u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}^+, \tag{8.14}$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{8.15}$$

где a — вещественный постоянный коэффициент.

Поскольку в силу однородности уравнения (8.13) и начальных условий (8.14) единственной причиной возмущения является определяемый функцией $\mu(t)$ краевой режим, то решение будем искать в виде правой бегущей волны

$$u(x, t) = f(x - at),$$

где f — некоторая достаточно гладкая функция. Для определения вида функции f воспользуемся начальными (8.14) и граничными (8.15) условиями. Из первого начального условия получим

$$u(x, 0) = f(x) = 0 \text{ при } x \in \mathbf{R}^+.$$

Тогда второе начальное условие также выполняется:

$$u_t(x, 0) = -af'(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbf{R}^+.$$

Граничное условие (8.15) позволяет доопределить функцию $f(x)$ на отрицательной полуоси:

$$u(0, t) = f(-at) = \mu(t).$$

Следовательно, обозначая аргумент функции f через ζ, получим

$$f(\zeta)=\begin{cases} 0\quad, & \zeta>0, \\ \mu\left(-\dfrac{\zeta}{a}\right), & \zeta<0 \end{cases}$$

и, подставляя $\zeta=x-at$, окончательно имеем

$$u(x,\ t)=\begin{cases} 0, & 0<t<\dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a}. \end{cases} \tag{8.16}$$

Замечание 1. При $0<t<\dfrac{x}{a}$ влияние граничного условия не сказывается, и возмущение равно нулю. При $t>\dfrac{x}{a}$ возмущение формируется граничным режимом.

Замечание 2. В зависимости от гладкости граничной функции $\mu(t)$ формула (8.16) представляет классическое или менее гладкое решение задачи (8.13)—(8.15). В случае, если формула (8.16) представляет собой классическое решение, функция $\mu(t)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируема на $\overline{\mathbf{R}}^+$ и удовлетворять условию согласования начального и граничного условий $\mu(0)=0$, $\mu'(0)=0$.

Аналогичным образом легко показать, что если решение третьей краевой задачи

$$u_x(x,\ t)-hu(x,\ t)\,|_{x=0}=\nu(t)$$

с нулевыми начальными условиями искать в виде правой бегущей волны $u=f(x-at)$, то для функции $f(\zeta)$ при $\zeta<0$ получается задача Коши

$$f'(\zeta)-hf(\zeta)=\nu\left(-\frac{\zeta}{a}\right),\quad f(0)=0.$$

Решив эту задачу, получим для $u(x,\ t)$ при $x\geqslant0$, $t\geqslant0$ выражение

$$u(x,\ t)=\begin{cases} 0, & 0<t<\dfrac{x}{a}, \\ -ae^{-ha\left(t-\frac{x}{a}\right)}\displaystyle\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} e^{ha\zeta}\nu(\zeta)\,d\zeta, & t>\dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

справедливое и при $h=0$, т. е. в случае второй краевой задачи.

§ 9. КОЛЕБАНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом параграфе изучается задача для уравнения колебаний в неограниченном пространстве $\mathbf{R}^3$ в случае трех независимых переменных:

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f(M,\ t),\quad (M,\ t)\in\Omega_3=\mathbf{R}^3\times(0,\ T],\tag{9.1}$$

$$u(M,\ 0)=\varphi(M),\ u_t(M,\ 0)=\psi(M),\quad M\in\mathbf{R}^3.\tag{9.2}$$

Определение. Классическим решением задачи (9.1), (9.2) называется функция $u(M,\ t)$, непрерывная и непрерывно дифференцируемая по t в замкнутой области $\overline{\Omega}_3=\mathbf{R}^3\times[0,\ \infty)$, дважды непрерывно дифференцируемая по t и по M в открытой области $\Omega_3=\mathbf{R}^3\times(0,\ \infty)$, удовлетворяющая в Ω_3 уравнению (9.1), а при $t\to 0$ начальным условиям (9.2).

Ниже будут указаны условия, при которых существует классическое решение задачи (9.1), (9.2). Будем считать, что данные задачи удовлетворяют достаточным условиям гладкости, при которых существует классическое решение.

Эта задача является естественным обобщением одномерного случая, рассмотренного в предыдущем параграфе. Чтобы получить некоторые общие представления о решении задачи (9.1), (9.2), начнем с частного случая.

1. Сферически-симметричный случай

Введем сферическую систему координат с началом в точке M_0.

Пусть входные данные задачи (9.1), (9.2) являются радиально симметричными функциями в этой системе, т. е. $\varphi=\varphi(r)$, $\psi=\psi(r)$. Очевидно, решение также симметричная функция относительно точки M_0. Поэтому получим следующую задачу для функции $u(r,\ t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+f(r,\ t),\qquad (r,\ t)\in\Omega_+=\mathbf{R}^+\times(0,\ \infty),\tag{9.3}$$

$$u(r,\ 0)=\varphi(r),\ u_t(r,\ 0)=\psi(r),\quad r\in\mathbf{R}^+,\tag{9.4}$$

$$|u(0,\ t)|<\infty,\quad t\in[0,\ \infty).\tag{9.5}$$

Задача (9.3)—(9.5) с помощью замены $v(r,\ t)=ru(r,\ t)$ сводится к уже изученной задаче, описывающей одномерные колебания на полупрямой:

$$v_{tt}=a^2 v_{rr}+rf(r,\ t),\quad (r,\ t)\in\Omega_+,\tag{9.6}$$

$$v(r,\ 0)=r\varphi(r),\ v_t(r,\ 0)=r\psi(r),\quad r\in\overline{\mathbf{R}}^-,\tag{9.7}$$

$$v(0,\ t)=0,\quad t\in[0,\ \infty).\tag{9.8}$$

Заметим, что граничное условие (9.8) является следствием естественного условия ограниченности (9.5). Решение задачи (9.6)—(9.8), как показано в § 8, представляется в виде суперпозиции правых и левых бегущих волн, распространяющихся со скоростью a от начальных возмущений и приложенных внешних сил. Тем самым и решение задачи (9.6)—(9.8) представляется в виде суперпозиции распространяющихся в радиальном направлении сферических волн, амплитуда которых убывает при удалении от центра (точки M_0). Такие колебания называются расходящимися и сходящимися бегущими сферическими волнами в зависимости от направления распространения от точки M_0 или к этой точке.

2. Формула Кирхгофа

В этом пункте получим интегральное соотношение, аналогичное третьей формуле Грина для уравнения эллиптического типа и связывающее значения решения уравнения (9.1) в произвольной точке M_0 в момент времени t_0 со значениями этого решения и его производных на замкнутой поверхности S, охватывающей точку M_0, в предыдущие моменты времени. Запаздывание во времени влияния данных на поверхности S связано с тем, что уравнение колебаний описывает процессы с конечной скоростью распространения сигналов (явление близкодействия): возмущение, возникшее в точке M в момент времени t, сказывается в точке M_0 не мгновенно, а через промежуток времени $\Delta t = \frac{R_{M_0M}}{a}$. В одномерном случае при рассмотрении явлений на фазовой плоскости областью влияния является характеристический треугольник, образованный характеристиками $x-at=C$ и $x+at=C$, проходящими через точку M_0. Аналогично в трехмерном и двумерном случаях областью влияния является характеристический конус с вершиной в точке (M_0, t_0). На рис. 7.8 для наглядности приведем чертеж для двумерного случая.

Множество точек (M, t), определяемое условиями

$$\frac{R_{M_0M}}{a} = t_0 - t, \quad t < t_0,$$

называется нижним характеристическим конусом точки (M_0, t_0) и определяет те точки M, из которых возмущение, вышедшее в момент времени t, предшествующий t_0, в момент t_0 доходит до точки M_0.

Множество точек (M, t), определяемых условиями

$$\frac{R_{M_0M}}{a} = t - t_0, \quad t > t_0,$$

составляет верхний характеристический конус точки (M_0, t_0).

Возмущение (сигнал), вышедшее из точки M_0 в момент t_0, доходит до точки M верхнего характеристического конуса в момент времени t.

Для вывода интегрального соотношения сделаем замену независимых переменных, вводя локальное (местное) время точки (M_0, t_0) по формуле

$$t' = t - \left(t_0 - \frac{R_{M_0M}}{a}\right) = t - t_0 + \frac{R_{M_0M}}{a}. \tag{9.9}$$

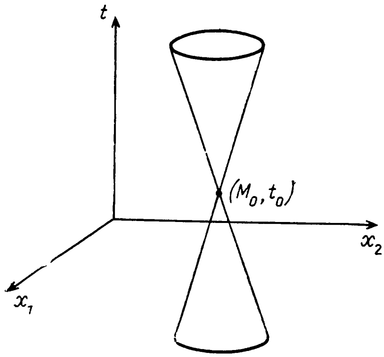


Рис. 78

Очевидно, для точки (M_0, t_0) $t'=0$. Введем сферическую систему координат (r, ϑ, φ) с центром в точке M_0. Тогда в переменных r, ϑ, φ, t для функции $u(r, \vartheta, \varphi, t)$ имеет место задача (9.1), (9.2), где Δ — оператор Лапласа в сферической системе координат с началом в точке M_0.

Перейдем в уравнении (9.1) к новым переменным $r'=r$, $\vartheta'=\vartheta$, $\varphi'=\varphi$ и t', определяемому по формуле (9.9), сохраняя для пространственных переменных прежние нештрихованные обозначения. Обозначим

$$u(r, \vartheta, \varphi, t) = u\left(r, \vartheta, \varphi, t' + \left(t_0 - \frac{r}{a}\right)\right) = U(r, \vartheta, \varphi, t')$$

и пересчитаем производные

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{a}\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial t'} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}, \tag{9.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t'}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}.$$

Подставляя формулы (9.10) в уравнение (9.1), получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} + a^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 2a\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial t'} + \frac{2a^2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} +$$
$$+ \frac{2a}{r}\frac{\partial U}{\partial t'} + \frac{a^2}{r^2}\Delta_{\vartheta\varphi}U + F(M, t'), \tag{9.11}$$

где

$$F(M, t') = F(r, \vartheta, \varphi, t') = f\left(r, \vartheta, \varphi, t' + \left(t_0 - \frac{r}{a}\right)\right) = f(r, \vartheta, \varphi, t),$$

а

$$\Delta_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

— угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат.

Формулу (9.11) запишем следующим образом:

$$\Delta U = -\frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right) - \frac{1}{a^2}F(M, t'). \tag{9.12}$$

Предполагая существование решения уравнения (9.1), формулу (9.12) можно рассматривать как уравнение Пуассона, правая часть которого является функцией параметра t'. Используя третью формулу Грина (см. формулу (1.7) гл. V), выразим решение уравнения (9.12) в точке $(M_0, 0)$ через значения решения и его нормальной производной на произвольной гладкой замкнутой поверхности S, содержащей точку M_0 внутри, и значения правой части уравнения (9.12) в области D, ограниченной поверхностью S:

$$U(M_0, 0) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right\}_{t'=0} dS +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_D \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)\Big|_{t'=0} dV + \frac{1}{4\pi a^2}\int_D \frac{F(M, 0)}{r}dV, \tag{9.13}$$

где $\overline{D} = D \cup S$, $\dfrac{\partial}{\partial a}$ — производная по внешней нормали.

Объемный интеграл, стоящий в правой части формулы (9.13), является несобственным интегралом второго рода:

$$\int_D \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)dV = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D/K_\varepsilon}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)dV,$$

где K_ε — шар радиуса ε с центром в точке M_0. Преобразуем этот интеграл. Так как

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right) = -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\operatorname{grad}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right),$$

то, используя первую формулу Грина, получаем

$$\int_{D/K_\varepsilon}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)dV = \int_{D/K_\varepsilon} r\frac{\partial U}{\partial t'}\Delta\left(\frac{1}{r}\right)dV -$$

$$-\oint_S r\frac{\partial U}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}ds - \oint_{S_\varepsilon} r\frac{\partial U}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}ds, \tag{9.14}$$

где S_ε — сфера радиуса ε с центром в точке M_0. В области D/K_ε: $\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$. На поверхности S_ε

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oint_{S_\varepsilon} r \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds = 0.$$

Поэтому, переходя в (9.14) к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\int_D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial t'} \right) dV = \oint_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial n} ds. \qquad (9.15)$$

Подставляя (9.15) в (9.13), получим

$$U(M_0, 0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{2}{ar} \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial n} \right\}_{t'=0} ds +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_D \frac{F(M, 0)}{r} dV. \qquad (9.16)$$

Вернемся в формуле (9.16) к первоначальным переменным, учитывая, что при $t' = 0$ $t = t_0 - \frac{r}{a}$. Поскольку

$$U(P, 0) = u\left(P, t_0 - \frac{R_{M_0P}}{a}\right), \text{ где } P \in S,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}, \qquad (9.17)$$

откуда

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{t'=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{a} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0-\frac{r}{a}},$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t'}\right|_{t'=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0-\frac{r}{a}},$$

то, подставляя (9.17) в (9.16), окончательно получим

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P} \left(P, t_0 - \frac{R}{a}\right) - \right.$$

$$\left. - u\left(P, t_0 - \frac{R}{a}\right) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R} + \frac{1}{aR} \frac{\partial u}{\partial t} \left(P, t_0 - \frac{R}{a}\right) \frac{\partial R}{\partial n_P} \right\} ds_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_D \frac{f\left(M, t_0 - \frac{R_{M_0M}}{a}\right)}{R_{M_0M}} dV_M, \quad R = R_{M_0P}. \qquad (9.18)$$

Формула (9.18) является искомым интегральным соотношением. Она называется формулой Кирхгофа.

3. Формула Пуассона

Формула Кирхгофа (9.18) позволяет получить явное аналитическое представление решения начальной задачи (9.1), (9.2). Пусть выполнены условия гладкости входных данных задачи, обеспечивающие существование решения и применимость формулы (9.18). Выберем теперь в качестве поверхности S сферу $\Sigma_{at_0}^{M_0}$ радиуса at_0 с центром в точке M_0. Тогда будем иметь, учитывая начальные условия (9.2):

$$u\left(P,\ t_0-\frac{R_{M_0P}}{a}\right)=u(P,\ 0)=\varphi(P),\quad P\in\Sigma_{at_0}^{M_0},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(P,\ t_0-\frac{R_{M_0P}}{a}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}(P,\ 0)=\psi(P),\quad P\in\Sigma_{at_0}^{M_0},$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(P,\ t_0-\frac{R_{M_0P}}{a}\right)=\frac{\partial u}{\partial r}(P,\ 0)=\frac{\partial\varphi}{\partial r}(P),\ P\in\Sigma_{at_0}^{M_0},$$

причем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi). \tag{9.19}$$

Рассмотрим сначала случай однородного уравнения колебаний. Полагая в формуле Кирхгофа (9.18) $f\equiv 0$, получим формулу, выражающую решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний в пространстве:

$$u(M_0,\ t_0)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma_{at_0}^{M_0}}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)+\frac{1}{ar}\psi\right\}_{r=at_0}r^2\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)+\frac{1}{a}r\psi\right\}_{r=at_0}d\omega,$$

где Ω — единичная сфера. Очевидно,

$$\oint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)\,|_{r=at_0}\,d\omega=\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_{\Omega}(r\varphi)\,|_{r=at_0}\,d\omega=\frac{1}{a}\,\frac{\partial}{\partial t_0}\int\limits_{\Omega}(r\varphi)\,|_{r=at_0}\,d\omega,$$

откуда для решения задачи Коши для уравнения колебаний окончательно получим

$$u(M_0,\ t_0)=\frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t_0}\int\limits_{\Omega}(r\varphi)\,|_{r=at_0}\,d\omega+\int\limits_{\Omega}(r\psi)\,|_{r=at_0}\,d\omega\right\}=$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t_0}\oint\limits_{\Sigma_{at_0}^{M_0}}\frac{\varphi(P)}{r}\Bigg|_{r=at_0}ds+\oint\limits_{\Sigma_{at_0}^{M_0}}\frac{\psi(P)}{r}\Bigg|_{r=at_0}ds\right\}. \tag{9.20}$$

Формула (9.20) носит название формулы Пуассона. В общем случае неоднородного уравнения формула, выражающая решение задачи (9.1), (9.2) в явном аналитическом виде через входные данные задачи, имеет вид (нулевой индекс у t и M опущен)

$$u(M,\ t)=\frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(P)}{r}\bigg|_{r=at}ds+\int\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(P)}{r}\bigg|_{r=at}ds\right\}+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{K_{at}^M}\frac{f\left(Q,\ t-\dfrac{R_{MQ}}{a}\right)}{R_{MQ}}\,dV_Q. \qquad (9.21)$$

Сделаем ряд замечаний.

Замечание 1. Из формулы (9.21) следует теорема единственности решения задачи (9.1), (9.2) аналогично тому, как в одномерном случае единственность решения следует из формулы (7.24).

Замечание 2. Из формулы (9.21) следует устойчивость решения задачи (9.1), (9.2) по входным данным: малому изменению функций φ, ψ и f отвечают малые изменения решения $u(M,\ t)$. При этом возмущения входных данных можно задавать в норме L_2, а возмущение решения оценивать в равномерной норме.

Замечание 3. Существование классического решения задачи (9.1), (9.2) можно доказать, непосредственно проверив, что при достаточных условиях гладкости входных данных функция (9.21) удовлетворяет всем условиям задачи. При этом достаточно потребовать, чтобы функция $\varphi(M)$ была трижды непрерывно дифференцируемой, а функции $\psi(M)$, $f(M,\ t)$ были дважды непрерывно дифференцируемы в своих областях определения.

4. Метод спуска

Формула Пуассона (9.21) получена для общего трехмерного случая. Однако с ее помощью можно решать задачу для уравнения колебаний и на плоскости и на прямой.

Рассмотрим сначала двумерный случай. Пусть входные данные задачи Коши не зависят от z: $\varphi=\varphi(x,\ y)$, $\psi=\psi(x,\ y)$, $f=f(x,\ y,\ t)$. Тогда в формуле Пуассона (9.21) функция u также не зависит от z: $u=u(x, y, t)$ — и от интегрирования по поверхности сферы можно перейти к интегрированию по ее проекции на плоскость $z=0$, т. е. по кругу радиуса at. При этом следует учесть, что верхняя и нижняя полусферы проектируются на один и тот же круг (рис. 7.9). Очевидно, элемент ds поверхности сферы связан с ее проекцией $d\sigma$ на плоскость $z=$ $=0$ соотношением

$$ds=\frac{d\sigma}{\cos\gamma}=\frac{d\xi\,d\eta}{\cos\gamma},$$

где γ — угол между внешней нормалью к сфере и осью z и

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - R_{MP}^2}}{at} = \frac{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}. \qquad (9.22)$$

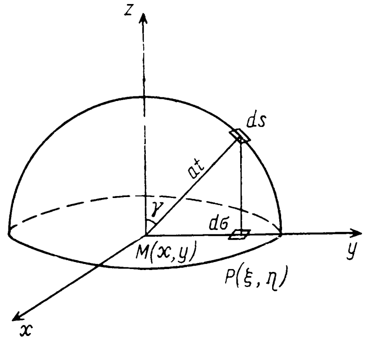


Рис. 7.9

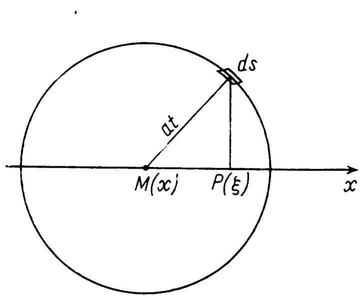


Рис. 7.10

Поскольку $ds = r^2 d\omega = (at)^2 d\omega$, то с учетом (9.22) получим на сфере радиуса $r = at$

$$\frac{ds}{r} = at\, d\omega = \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}. \qquad (9.23)$$

Интеграл в формуле Пуассона (9.21) по шару K_{at}^M с центром в точке M и радиусом at предварительно преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{K_{at}^M} \frac{f\left(Q,\ t - \frac{R_{MQ}}{a}\right)}{R_{MQ}}\, dV = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^a d(a\tau) \int\limits_{\Sigma_{a\tau}^M} \frac{f\left(Q,\ t - \frac{R_{MQ}}{a}\right)}{R_{MQ}}\, ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Sigma_{a\tau}^M} f(Q,\ t-\tau)\, R_{MQ}\, d\omega. \qquad (9.24)$$

Подставляя (9.23) и (9.24) в (9.21), получим двумерный аналог формулы Пуассона

$$u(x,\ y,\ t) = \frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{U_{at}^M} \frac{\varphi(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{U_{at}^M} \frac{\psi(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{U_{a\tau}^M} \frac{f(\xi,\ \eta,\ t-\tau)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(a\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}, \qquad (9.25)$$

где U_{at}^M — круг радиуса at с центром в точке M.

Рассмотрим теперь одномерный случай. Будем снова исходить из формулы Пуассона (9.21). Пусть входные данные задачи (9.1), (9.2) зависят от одного пространственного переменного x: $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(x)$, $f=f(x, t)$. Введем сферическую систему координат с центром в точке $M(x)$, ось которой направим по оси x. Очевидно (рис. 7.10),

$$ds = r^2\, d\omega = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Из рисунка следует, что

$$\xi = x + r\cos\vartheta, \quad d\xi = -r\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

поэтому

$$r\, d\omega = r\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = -d\xi\, d\varphi.$$

Из формулы Пуассона (9.21) получим

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Sigma_{at}^M} r\varphi\, d\omega + \int\limits_{\Sigma_{at}^M} r\psi\, d\omega\right\} +$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Sigma_{a\tau}^M} f\left(Q, t-\frac{r}{a}\right) r\, d\omega = \frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{x+at}^{x-at} \varphi(\xi)(-d\xi) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{x+at}^{x-at} \psi(\xi)(-d\xi)\right\} + \frac{1}{4\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi\right\} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\xi, t-\tau)\, d\xi. \tag{9.26}$$

Продифференцируем первый интеграл в правой части формулы (9.26) по t и сделаем в последнем интеграле замену $t-\tau$ на τ. В результате получим хорошо нам известную формулу (7.24):

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi$$

и, в частности, при $f \equiv 0$ формулу Даламбера (7.10).

Отметим, что уравнения колебаний с тремя, двумя и одним пространственным аргументом часто называют уравнениями сферических, цилиндрических и плоских волн.

Метод, заключающийся в получении из формулы решения с большим числом пространственных переменных формулы решения с меньшим числом пространственных переменных, носит название метода спуска Адамара. Этот метод применим не только к уравнению колебаний, но и к другим типам уравнений.

5. Локальные начальные условия

Пусть в задаче (9.1), (9.2) функция $f(M, t)$ тождественно равна нулю. Рассмотрим случай локального начального возмущения, когда функции $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ отличны от нуля только в некоторой ограниченной области D_0. Будем изучать изменение состояния $u(M_0, t)$ в точке $M_0=\{x_0, y_0, z_0\}$ трехмерной области, лежащей вне области D_0. Формула Пуассона (9.21) при $f(M, t)\equiv 0$ имеет вид

$$u(M_0, t)=\frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Sigma_{at}^{M_0}}\frac{\varphi}{r}\,ds+\int\limits_{\Sigma_{at}^{M_0}}\frac{\psi}{r}\,ds\right\}. \qquad (9.27)$$

Функция $u(M_0, t)$ отлична от нуля только в том случае, если сфера $\Sigma_{at}^{M_0}$ пересекает область начальных значений D_0. Пусть d_1 и d_2 — расстояния от точки M_0 до ближайшей и наиболее удаленной точек области D_0:

$$d_1=\min_{M\in D_0}\rho(M_0, M),\quad d_2=\max_{M\in D_0}\rho(M_0, M),$$

где $\rho(M_0, M)$ — расстояние между точками M_0 и M (рис. 7.11).

Если $t<t_1=\dfrac{d_1}{a}$, то $\Sigma_{at}^{M_0}\cap D_0=\varnothing$ и $u(M_0, t)=0$, т. е. возмущение до точки M_0 еще не успело дойти. Если $t_1=\dfrac{d_1}{a}<t<t_2=\dfrac{d_2}{a}$, то $\Sigma_{at}^{M_0}\cap D_0\neq\varnothing$ и, вообще говоря, $u(M_0, t)\neq 0$ — точка M_0 находится в возмущенном состоянии.

Если $t>t_2=\dfrac{d_2}{a}$, то $\Sigma_{at}^{M_0}\cap D_0=\varnothing$ и $u(M_0, t)=0$ — возмущение прошло точку M_0. Таким образом, при распространении локального возмущения в трехмерном пространстве отсутствует явление последействия.

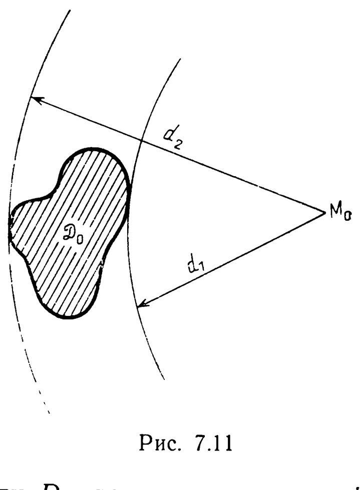


Рис. 7.11

Если точка M_0 принадлежит области D_0, то возмущение в ней отлично от нуля вплоть до момента времени $t=\dfrac{d}{a}$, где $d=\max\limits_{P\in S}\rho(M_0, P)$ — максимальное расстояние от точки M_0 до границы области D_0.

Рассмотрим теперь мгновенную пространственную картину возмущения $u(M, t_0)$ в некоторый момент времени t_0. Точки M, находящиеся в возбужденном состоянии, характеризуются тем, что сферы $\Sigma_{at_0}^{M}$ пересекают область начальных возмущений D_0. Таким образом, множество точек W, в которых возмущение отлично от нуля, состоит из точек M, находящихся на сферах $\Sigma_{at_0}^{M'}$ радиуса at_0 с центрами в точках M' области D_0:

$$W = \bigcup_{M' \in D_0} \Sigma_{at_0}^{M'}.$$

Огибающие семейства сфер $\Sigma_{at_0}^{M'}$, $M' \in D_0$, являются границами области W. Внешняя огибающая называется передним фронтом, внутренняя — задним фронтом распространяющейся волны.

Следовательно, в трехмерном случае начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке M_0 пространства действие, локализованное во времени. При этом имеет место распространение волны с резко очерченными передним и задним фронтами — выполняется принцип Гюйгенса.

Перейдем к случаю двух пространственных переменных Пусть локальное возмущение задано в двумерной области D_0 на плоскости (x, y). Рассмотрим изменение состояния $u(M_0, t)$ в точке M_0, лежащей вне D_0. Возмущение $u(M_0, t) = u(x_0, y_0, t)$ в точке M_0 в момент t определяется согласно формуле (9.25) выражением

$$u(x_0, y_0, t) = \frac{1}{2\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{U_{at}^{M_0}} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x_0 - \xi)^2 - (y_0 - \eta)^2}} + \int\limits_{U_{at}^{M_0}} \frac{\psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x_0 - \xi)^2 - (y_0 - \eta)^2}} \right\}, \tag{9.28}$$

т. е. начальными значениями в точках $P(\xi, \eta)$, принадлежащих кругу $U_{at}^{M_0}$ радиуса at с центром в точке M_0.

Пусть d_1 — расстояние от точки M_0 до ближайшей точки области D_0.

Если $t < t_1 = \dfrac{d_1}{a}$, то $U_{at}^{M_0} \cap D_0 = \varnothing$ и $u(M_0, t) = 0$ — возмущение еще не дошло до точки M_0.

Если $t > t_1$, то $U_{at}^{M_0} \cap D_0 \neq \varnothing$ и $u(M_0, t) \neq 0$. Начиная с момента $t = t_1$, в точке M_0 возникает возмущение, которое сначала возрастает, а затем, начиная с некоторого момента из-за наличия величины $(at)^2$ в знаменателе подынтегральных выражений, постепенно убывает до нуля при $t \to \infty$.

В этом явлении последствия и заключается отличие плоского случая от пространственного. Мгновенная картина возмущений на плоскости имеет резко очерченный передний фронт, но не имеет заднего фронта. Влияние начальных возмущений, локализованных на плоскости, не локализовано во времени и характеризуется длительно продолжающимся последействием. Принцип Гюйгенса не выполняется.

Наличие последействия в двумерном случае, в отличие от трехмерного, когда последействие отсутствует, легко объяснить. Двумерный случай является частным случаем трехмерного, когда начальные условия заданы в бесконечном цилиндре, который пересекает сфера любого сколь угодно большого радиуса с центром в точке M_0.

6. Установившиеся колебания

Рассмотрим в заключение задачу (9.1), (9.2) с нулевыми начальными условиями и правой частью, являющейся периодической функцией времени:

$$f(M,\ t)=\tilde{f}(M)e^{-i\omega t}, \tag{9.29}$$

где $\tilde{f}(M)$ — финитная функция с локальным носителем в области D:

$$\operatorname{supp}\tilde{f}\subset D\ ^{*)}.$$

Формула Пуассона (9.21) дает

$$u(M,\ t)=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi a^2}\int\limits_{K_{at}^M}\frac{\tilde{f}(Q)\,e^{i\frac{\omega}{a}R_{MQ}}}{R_{MQ}}\,dV. \tag{9.30}$$

Обозначим через d_1 и d_2 соответственно минимальное и максимальное расстояния от точки M, не принадлежащей носителю функции $\tilde{f}$, до носителя:

$$d_1=\min_{Q\in\operatorname{supp}\tilde{f}}\rho(M,\ Q),\quad d_2=\max_{Q\in\operatorname{supp}\tilde{f}}\rho(M,\ Q).$$

Тогда, учитывая формулу (9.30), получим

$$u(M,\ t)=\begin{cases} 0, & 0<t<\dfrac{d_1}{a},\\[2mm] \dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi a^2}\displaystyle\int\limits_{K_{at}^M\cap D}\frac{\tilde{f}(Q)\,e^{i\frac{\omega}{a}R_{MQ}}}{R_{MQ}}\,dV, & \dfrac{d_1}{a}<t<\dfrac{d_2}{a},\\[2mm] e^{-i\omega t}V(M), & t>\dfrac{d_2}{a},\end{cases} \tag{9.31}$$

---

*) См.: Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М: Наука, 1988.

где функция $V(M)$ имеет вид

$$V(M)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_D \frac{\tilde{f}(Q)\,e^{i\frac{\omega}{a}R_{MQ}}}{R_{MQ}}\,dV, \tag{9.32}$$

Интеграл в средней строчке формулы (9.31) зависит от t, поскольку от t зависит область интегрирования, в то время как функция $V(M)$ от времени не зависит. Следовательно, в каждой точке M, начиная с момента времени $t_2(M)=\frac{d_2(M)}{a}$, под действием локального периодического возбуждения устанавливаются периодические колебания с той же частотой. Амплитуда этих колебаний определяется формулой (9.32). Средняя строчка формулы (9.31) определяет процесс перехода к установившимся периодическим колебаниям.

§ 10. ЗАДАЧА С ДАННЫМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ (ЗАДАЧА ГУРСА)

В § 7 явное аналитическое выражение решения задачи с начальными условиями для уравнения колебаний на бесконечной прямой было получено методом интегрирования по фазовой плоскости. Этот метод оказывается удобным и в ряде других задач, в частности для решения простейших задач с дополнительными данными, заданными на характеристиках.

Начнем с решения простейшей задачи, заключающейся в определении для $x>0$ и $y>0$ решения неоднородного уравнения

$$u_{xy}=f(x,\ y),\quad x>0,\ y>0 \tag{10.1}$$

с заданной правой частью и дополнительными условиями:

$$u(x,\ 0)=\varphi_1(x),\quad u(0,\ y)=\varphi_2(y), \tag{10.2}$$

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=u(0,\ 0). \tag{10.3}$$

Так как прямые $x=\mathrm{const}$ и $y=\mathrm{const}$ являются характеристиками уравнения (10.1), то задача (10.1)—(10.3) называется задачей с данными на характеристиках, или задачей Гурса. Существование и единственность решения задачи (10.1)—(10.3) будет следовать из дальнейших рассмотрений

Пусть решение задачи (10.1)—(10.3) существует. Получим его явное представление через входные данные.

Для определения решения задачи (10.1)—(10.3) в произвольной точке $(x,\ y)$ проинтегрируем (10.1) по прямоугольнику $D=\{0<\xi<x,\ 0<\eta<y\}$. Интеграл от левой части уравнения (10.1) с учетом дополнительных условий (10.2) дает

$$\int_D u_{xy}\,ds=\int_0^x\int_0^y u_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta=u(x,\ y)-u(x,\ 0)-u(0,\ y)+u(0,\ 0)=$$
$$=u(x,\ y)-\varphi_1(x)-\varphi_2(y)+\varphi_1(0),$$

откуда и получается явное аналитическое выражение для решения задачи (10.1)—(10.3) через входные данные — функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $f(x, y)$:

$$u(x, y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0)+\int_0^x\int_0^y f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \qquad (10.4)$$

В предположении существования решения задачи (10.1)—(10.3) формула (10.4), так же как и формула Даламбера (6.10), доказывает единственность решения этой задачи.

Для доказательства существования решения можно воспользоваться прямой проверкой, из которой следует, что при условии дифференцируемости функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$, условии согласования входных данных $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$ и непрерывности функции $f(x, y)$ формула (10.4) определяет функцию, удовлетворяющую всем условиям задачи.

Итак, простейшая задача с данными на характеристиках решается достаточно просто.

Значительно сложнее обстоит дело в случае уравнения более общего вида. Даже для линейного уравнения

$$u_{xy}+a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u=f(x, y),$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — гладкие функции x, y, в общем случае не удается получить явного аналитического представления решения, и при решении практических задач необходимо использовать различные методы построения приближенных решений.

Рассмотрим общую задачу:

$$u_{xy}+a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u=f(x, y),$$

$$x>0, \quad y>0, \qquad (10.5)$$

$$u(x, 0)=\varphi_1(x), \quad u(0, y)=\varphi_2(y), \qquad (10.6)$$

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=u(0, 0). \qquad (10.7)$$

Перенеся все члены уравнения (10.5), кроме первого, в правую часть и обозначив

$$F(x, y, u, u_x, u_y)=f-au_x-bu_y-cu,$$

можно формально рассматривать полученное уравнение, так же как и уравнение (10.1), и записать его формальное решение в следующем виде:

$$u(x, y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0)+\iint_D F\,d\xi\,d\eta=\int_0^x\int_0^y F\,d\xi\,d\eta+\Phi(x, y), \qquad (10.8)$$

где

$$\Phi(x, y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0).$$

Если ввести интегродифференциальный оператор A по формуле

$$A[u]=\int_0^x\int_0^y F\,d\xi\,d\eta,$$

то уравнение (10.8) можно записать так:

$$u=A[u]+\Phi. \qquad (10.9)$$

Уравнение (10.9) является интегродифференциальным уравнением Вольтерра.

Одним из способов приближенного построения решения уравнения (10.9) является метод последовательных приближений, когда каждое последующее приближение строится по предыдущему согласно формуле

$$\begin{aligned} &u_n=A[u_{n-1}]+\Phi,\\ &u_0\text{—задано, } n=1,\ 2,\ \ldots \end{aligned} \qquad (10.10)$$

Выберем в качестве нулевого приближения функцию $u_0(x,\ y)=$ $=0$. Тогда, реализуя схему (10.10), получим

$$u_1=\int_0^x\int_0^y f(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta+\Phi(x,\ y),$$

$$u_n=u_1-\int_0^x\int_0^y\left\{a\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\xi}+b\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\eta}+cu_{n-1}\right\}d\xi\,d\eta. \qquad (10.11)$$

Заметим, что из формул (10.11) вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x}&=\frac{\partial u_1}{\partial x}-\int_0^y\left\{a(x,\ \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b(x,\ \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\eta}+c(x,\ \eta)\,u_{n-1}\right\}d\eta,\\ \frac{\partial u_n}{\partial y}&=\frac{\partial u_1}{\partial y}-\int_0^x\left\{a(\xi,\ y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\xi}+b(\xi,\ y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+c(\xi,\ y)\,u_{n-1}\right\}d\xi. \end{aligned} \qquad (10.12)$$

Покажем, что последовательности

$$\{u_n(x,\ y)\},\quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,\ y)\right\},\quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,\ y)\right\}$$

сходятся равномерно.

Рассмотрим разность двух последовательных итераций $z_n=$ $=u_{n+1}-u_n$. Из формул (10.11), (10.12) следует, что

$$z_n(x,\ y)=-\int_0^x\int_0^y\left\{a(\xi,\ \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial\xi}+b(\xi,\ \eta)\,\frac{\partial z_{n-1}}{\partial\eta}+c(\xi,\ \eta)\,z_{n-1}\right\}d\xi\,d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial x}(x, y) = -\int_0^y \left\{ a(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) z_{n-1} \right\} d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial y}(x, y) = -\int_0^x \left\{ a(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) z_{n-1} \right\} d\xi. \tag{10.13}$$

Предположим, что в некотором квадрате $x \in (0, L)$, $y \in (0, L)$ выполнены неравенства

$$|a(x, y)| \leqslant M, \quad |b(x, y)| \leqslant M, \quad |c(x, y)| \leqslant M,$$
$$|z_0| \leqslant H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| \leqslant H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| \leqslant H, \tag{10.14}$$

где $M > 0$ и $H > 0$ — некоторые постоянные. Очевидно, при соответствующих условиях на входные данные $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ и $f(x, y)$ условия (10.14) на z_0 будут выполнены.

Из формул (10.13) и (10.14) следуют мажорантные оценки:

$$|z_1| \leqslant 3HMxy \leqslant 3HM \frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| \leqslant 3HMy \leqslant 3HM(x+y),$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| \leqslant 3HMx \leqslant 3HM(x+y).$$

По индукции легко доказать, что для любого $n \geqslant 1$ имеют место следующие оценки:

$$|z_n| \leqslant 3HM^nK^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \leqslant 3HM^nK^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| \leqslant 3HM^nK^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

где $K = L + 2$. Учитывая, что точки (x, y) лежат внутри квадрата со стороной L, из последних неравенств вытекают окончательные неравенства:

$$|z_n| \leqslant \frac{3H}{K^2M} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \leqslant \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^n}{n!},$$
$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| \leqslant \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^n}{n!}. \tag{10.15}$$

В правых частях неравенств (10.15) с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения экспоненты $\exp(2KLM)$. Следовательно, последовательности функций

$$u_n = u_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

равномерно сходятся к предельным функциям, которые обозначим через $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$:

$$u(x, y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, y), \quad v(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y),$$

$$w(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y).$$

Перейдем в формулах (10.11) и (10.12) к пределу при $n \to \infty$. В результате будем иметь

$$u(x, y) = u_1(x, y) - \int_0^x \int_0^y \{a(\xi, \eta) v + b(\xi, \eta) w + c(\xi, \eta) u\} \, d\xi \, d\eta, \quad (10.16)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) - \int_0^y \{a(x, \eta) v + b(x, \eta) w + c(x, \eta) u\} \, d\eta,$$

$$w(x, y) = \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) - \int_0^x \{a(\xi, y) v + b(\xi, y) w + c(\xi, y) u\} \, d\xi,$$

откуда следует, что $v = u_x$, $w = u_y$ и функция $u(x, y)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению Вольтерра (10.9). Непосредственным дифференцированием уравнения (10.9) по x и y устанавливается, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению (10.5). Удовлетворение условиям (10.6) следует из формул (10.7), (10.11) и вида функции $\Phi(x, y)$.

Докажем теперь единственность решения задачи (10.5)—(10.7). Пусть существуют два различных решения задачи (10.5)—(10.7) $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Рассмотрим их разность $U = u_1 - u_2$. Функция $U(x, y)$ удовлетворяет однородному интегродифференциальному уравнению Вольтерра

$$U(x, y) = \int_0^x \int_0^y \{aU_\xi + bU_\eta + cU\} \, d\xi \, d\eta.$$

На основании оценок (10.14) легко показать справедливость оценки:

$$|U| \leqslant H_1, \quad |U_x| \leqslant H_1, \quad |U_y| \leqslant H_1,$$

где $H_1>0$ — некоторая постоянная. Тогда, аналогично тому, как были получены оценки для $z_n(x, y)$, для любого n можно построить следующую оценку при $x\in(0, L)$, $y\in(0, L)$:

$$|U|\leqslant\frac{3H_1}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{10.17}$$

Из формулы (10.17) следует, что

$$U(x, y)\equiv 0 \text{ или } u_1(x, y)\equiv u_2(x, y),$$

что и доказывает единственность решения задачи (10.5) — (10.7).

§ 11. ОБЩАЯ ЗАДАЧА КОШИ. ФУНКЦИЯ РИМАНА

В этом параграфе будет дано обобщение задачи Коши, рассмотренной в § 7. Пусть на плоскости (x, y) задана бесконечно гладкая кривая C, удовлетворяющая следующим условиям:

а) кривая C не является характеристикой уравнения

$$u_{xy}=f(x, y); \tag{11.1}$$

б) любая характеристика уравнения (11.1) пересекает кривую C только один раз.

Кривая C делит плоскость (x, y) на две криволинейные полуплоскости D^+ и D^-.

Рассмотрим задачу:

$$u_{xy}=f(x, y), \quad (x, y)\in D^+, \tag{11.2}$$

$$u(x, y)=\varphi(x, y), \quad (x, y)\in C, \tag{11.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y)=\psi(x, y), \quad (x, y)\in C, \tag{11.4}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к кривой C, направленной внутрь области D^+. Дополнительные условия (11.3) и (11.4) задаются на кривой C.

Построим формулу, выражающую решение задачи (11.2) — (11.4) в любой точке M области D^+. Проведем через точку M характеристики уравнения (11.1), пересекающие кривую C в точках A и B, и обозначим через D область, ограниченную участком AB кривой C и отрезками MA и MB характеристик (рис. 7.12).

Рассмотрим следующее выражение:

$$vu_{xy}-uv_{xy}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}\right\}, \tag{11.5}$$

где

$$\mathcal{P}[u, v]=v_xu-vu_x,$$

$$Q[u, v]=vu_y-v_yu.$$

Проинтегрируем выражение (11.5) по области D, границу которой обозначим через $\Gamma : \bar{D}=D\cup\Gamma$, используя формулу Грина *)

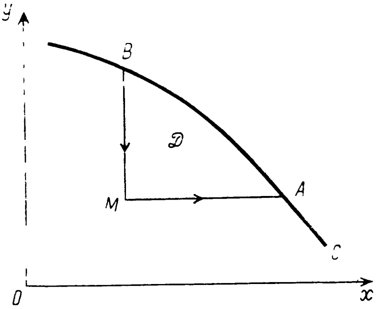


Рис. 7.12

$$\int\limits_D (vu_{xy}-uv_{xy})\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_D\left(\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y}\right)dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_D(\mathcal{P}\,dx+Q\,dy). \quad (11.6)$$

Рассмотрим интегралы вдоль отрезков характеристик AM и BM. Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_M^A \mathcal{P}\,dx=\int\limits_M^A (uv_x-u_xv)\,dx=u(M)v(M)-u(A)v(A)+2\int\limits_M^A uv_x\,dx, \quad (11.7)$$

$$\int\limits_B^M Q\,dy=\int\limits_B^M (u_yv-uv_y)\,dy=u(M)v(M)-u(B)v(B)-2\int\limits_B^M uv_y\,dy. \quad (11.8)$$

Из соотношений (11.6)—(11.8) вытекает формула

$$\int\limits_D (vu_{xy}-uv_{xy})\,dx\,dy=u(M)v(M)-\frac{1}{2}\{u(A)v(A)+u(B)v(B)\}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{AB}\mathcal{P}\,dx+Q\,dy+\int\limits_M^A uv_x\,dx-\int\limits_B^M uv_y\,dy. \quad (11.9)$$

Формула (11.9) является тождеством для любых достаточно гладких функций u и v.

Пусть теперь функция $u(x, y)$ является решением задач (11.2)—(11.4), а функция $v(x, y)$ — решением следующей зада чи с данными на характеристиках (задачи Гурса), рассмотре ной в § 10:

$$\begin{aligned} &v_{xy}=0, \quad (x,\ y)\in D,\\ &v_x|_{AM}=0,\\ &v_y|_{BM}=0,\\ &v(M)=1. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Легко видеть, что функция $v\equiv 1$ в области D удовлетворяет всем условиям задачи (11.10). Функция v, удовлетворяющая условиям (11.10), представляет собой частный случай функции Римана.

---

*) См.: Ильин В. А. Позняк Э. Г. Основы математического анализа Ч. 2. М.: Наука, 1980

Если подставить функцию Римана $v(x, y) \equiv 1$, являющуюся решением задачи (11.10), в формулу (11.9), то получим

$$\int_D u_{xy}\, dx\, dy = u(M) - \frac{1}{2}\{u(A) + u(B)\} + \frac{1}{2}\int_A^B (-u_x\, dx + u_y\, dy),$$

или, учитывая, что функция $u(x, y)$ является решением задачи (11.2)—(11.4),

$$u(M) = \frac{1}{2}\{\varphi(A) + \varphi(B)\} + \frac{1}{2}\int_{AB} u_x\, dx - u_y\, dy + \int_D f(x, y)\, dx\, dy. \quad (11.11)$$

Формула (11.11) дает решение задачи (11.2)—(11.4) через входные данные, поскольку на дуге AB выражения

$$u_x = u_\tau \cos(\tau, \widehat{\ } x) + u_n \cos(n \widehat{\ }, x)$$

$$u_y = u_\tau \sin(\tau, \widehat{\ } x) + u_n \sin(n \widehat{\ }, x)$$

известны.

Замечание. Из формулы (11.11) следуют:

1) теорема единственности решения задачи (11.2)—(11.4),
2) теорема устойчивости решения задачи (11.2)—(11.4),
3) теорема существования решения задачи (11.2)—(11.4) при выполнении условия гладкости входных данных.

Рассмотрим теперь более сложную задачу:

$$L[u] \equiv u_{xy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y), \quad (x, y) \in D^+ \quad (11.12)$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in C, \quad (11.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in C, \quad (11.14)$$

де контур C выбирается так же, как и для задачи (11.12)—11.14).

Определение. Два дифференциальных оператора L и называются сопряженными, если разность

$$vLu - uKv$$

вляется разностью первых частных производных по x и y от некоторых выражений $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$:

$$vLu - uKv = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathscr{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial y}\right), \quad (11.15)$$

причем $\mathscr{P}$ не содержит производной u_y, а $\mathscr{Q}$ не содержит производной u_x.

Сопряженным к оператору L будет оператор K следующего вида:

$$Kv \equiv v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv. \quad (11.16)$$

Непосредственной проверкой легко устанавливается, что для операторов L и K выполняется равенство (11.15), где

$$\mathcal{P}[u, v[= uv_x - u_x v - 2buv,$$
$$Q[u, v] = vu_y - v_y u + 2auv.$$

Проинтегрируем равенство (11.15) по области D, воспользовавшись формулой Грина:

$$\int_D \{vLu - uKv\}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma \mathcal{P}\,dx + Q\,dy = \frac{1}{2}\int_M^A \mathcal{P}\,dx + \frac{1}{2}\int_{AB} \mathcal{P}\,dx + Q\,dy + \frac{1}{2}\int_B^M Q\,dy. \tag{11.17}$$

Интегралы по отрезкам характеристик AM и BM проинтегрируем по частям. В результате получим

$$\begin{aligned} \int_M^A \mathcal{P}\,dx &= u(M)v(M) - u(A)v(A) + 2\int_M^A \widehat{\mathcal{P}}[v]\,u\,dx, \\ \int_B^M Q\,dy &= u(M)v(M) - u(B)v(B) - 2\int_B^M \widehat{Q}[v]\,u\,dx, \end{aligned} \tag{11.18}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}}[v] &= v_x - bv, \\ \widehat{Q}[v] &= v_y - av. \end{aligned} \tag{11.19}$$

Рассмотрим теперь следующую задачу с данными на характеристиках (задачу Гурса):

$$\begin{aligned} &Kv = 0, \quad (x, y) \in D, \\ &\widehat{\mathcal{P}}[v]|_{AM} = 0, \\ &\breve{Q}[v]|_{MB} = 0, \\ &v(M) = 1. \end{aligned} \tag{11.20}$$

Задача (11.20) является обобщением рассмотренной в § 10 общей задачи с данными на характеристиках (10.5)—(10.7), и поэтому, повторяя с необходимыми уточнениями приведенные при исследовании этой задачи рассуждения, можно показать, что решение задачи (11.20) всегда существует. Оно называется функцией Римана.

Зная функцию Римана, легко построить решение задачи (11.12)—(11.14). Из формул (11.17)—(11.20) с учетом (11.12) получается

$$u(M)=\frac{\varphi(A)\,v(A)+\varphi(B)\,v(B)}{2}+\int_D v(x,\ y)\,f(x,\ y)\,dx\,dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{AB}\mathcal{P}\,dx+Q\,dy, \qquad (11.21)$$

причем последний интеграл в формуле (11.21) легко вычисляется, поскольку функции v, φ и ψ известны.

Замечание. В начале этого параграфа мы отметили, что любая характеристика уравнения (11.12) должна пересекать кривую C не более одного раза. Действительно, если характеристика пересекает кривую C в двух точках A и M_1, то значение $u(M_1)$ не может быть задано произвольно, а определяется по формуле

$$u(M_1)=\frac{u(A)\,v(A)+u(B_1)\,v(B_1)}{2}+$$

$$+\int_D vf\,dx\,dy-\frac{1}{2}\int_A^{B_1}\mathcal{P}\,dx+Q\,dy$$

с начальным значением, заданным на дуге AB_1 и функцией $f(x,\ y)$, заданной в области D_1, — криволинейном треугольнике M_1B_1A (рис. 7.13).

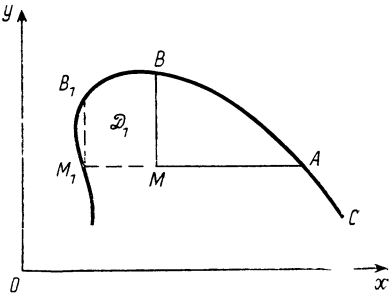


Рис. 7.13

§ 12. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ *)

1. Простейшие уравнения и метод характеристик

Рассматривая простейшие уравнения колебаний с постоянным коэффициентом a на бесконечной прямой:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad x\in\mathbf{R}^1,\ t>0, \qquad (12.1)$$

мы установили, что его общее решение представляется в виде суперпозиции прямой и обратной бегущих волн:

$$u(x,\ t)=f_1(x-at)+f_2(x+at), \qquad (12.2)$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Как легко проверить, прямая $u^{(1)}=f_1(x-at)$ и обратная $u^{(2)}=f_2(x+at)$ волны удовлетворяют следующим уравнениям в частных производных первого порядка:

*) Этот параграф написан профессором С. А. Габовым Более подробно о рассматриваемых уравнениях см.: Габов С. А. Введение в теорию нелинейных волн Изд-во МГУ, 1988.

$$u_t^{(1)} + a u_x^{(1)} = 0 \tag{12.3}$$

и

$$u_t^{(2)} - a u_x^{(2)} = 0. \tag{12.4}$$

Уравнения (12.3) и (12.4) часто называются уравнениями переноса, поскольку их решения (функции $f_1(x-at)$ и $f_2(x+at)$) переносят соответственно начальный профиль $f_1(x)$ или $f_2(x)$ вдоль оси x с постоянной скоростью a в прямом или обратном направлении. Легко показать, что если решение уравнения переноса является дважды непрерывно дифференцируемой функцией своего аргумента, то оно удовлетворяет и уравнению колебаний. При этом не происходит искажения профиля волны во времени, т. е. отсутствует эффект дисперсии волны, что связано с постоянством скорости распространения, в свою очередь определяющимся постоянством параметров среды. Однако во многих физических задачах приходится учитывать изменение свойств среды под действием распространяющихся в ней волн. Это приводит к зависимости скорости распространения от решения, что связано с необходимостью рассматривать квазилинейное уравнение переноса вида

$$u_t + \mathcal{F}(u) u_x = 0. \tag{12.5}$$

В этом параграфе мы рассмотрим свойства решения простейшего квазилинейного уравнения переноса вида

$$u_t + u u_x = 0, \quad x \in \mathbf{R}^1, \; t > 0. \tag{12.6}$$

Поставим для него задачу Коши, задав начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{12.7}$$

По аналогии с линейным уравнением переноса с постоянным коэффициентом будем искать решение уравнения (12.6) в виде

$$u(x, t) = f(x - u(x, t)t) \tag{12.8}$$

и попытаемся найти функцию f такую, чтобы удовлетворялись как уравнение (12.6), так и начальное условие (12.7).

Вычисляя частные производные u_x и u_t, получим

$$u_x = (1 - u_x t) f'(\xi),$$
$$u_t = (-u - u_t t) f'(\xi), \quad \xi = x - ut.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (12.6) дает

$$(-u - u_t t) f'(\xi) + (u - u u_x t) f'(\xi) = 0$$

или

$$-t(u_t + u u_x) f'(\xi) = 0.$$

Так как $u(x, t)$ — решение уравнения (12.6), то данное соотношение удовлетворяется при любой дифференцируемой функции $f(\xi)$. Отсюда следует, что решение исходной задачи Коши (12.6), (12.7) определяется из неявного уравнения

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t)t). \tag{12.9}$$

Мы не будем заниматься анализом соотношения (12.9), а попытаемся получить необходимые в дальнейшем результаты другим способом — методом характеристик.

Рассмотрим на плоскости (x, t) кривую, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u(x,\ t)}, \tag{12.10}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = u(x,\ t),$$

и называемую характеристикой уравнения (12.6).

Пусть $x = x(t)$ — решение уравнения (12.10), тогда

$$\frac{d}{dt} u(x(t),\ t) = u_t + u_x \frac{ax}{dt} = u_t + uu_x|_{x=x(t)} = 0,$$

т. е. $u(x(t), t)$ есть константа на кривой $x = x(t)$ и, следовательно, как вытекает из (12.10), $x = x(t)$ представляет собой прямую линию на плоскости (x, t) с наклоном

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x(0)),$$

определяемым начальной функцией $u_0(\xi)$, $\xi = x(0)$. Для этой прямой можно записать уравнение

$$\frac{t}{1} = \frac{x-\xi}{u_0(\xi)}. \tag{12.11}$$

Таким образом, мы получаем однопараметрическое семейство прямых, зависящих от параметра ξ и обладающих тем свойством, что решение $u(x, t)$ уравнения (12.6) на этих прямых оказывается постоянным. Это позволяет по начальной функции $u_0(\xi)$ определить функцию $u(x, t)$ в любой момент времени t. Покажем, как это можно сделать практически.

Пусть начальная функция u_0 имеет вид, изображенный на рис. 7.14, и равна нулю вне интервала (a, b). Выберем некоторую точку $\xi_k \in [a, b]$ и построим соответствующую ей характеристику $\Gamma_{\xi_k}: x = \xi_k + tu_0(\xi_k)$ с углом наклона $\operatorname{tg}\varphi = 1/u_0(\xi_k)$ на рис. 7.15. Всюду на этой характеристике $u|_{\Gamma_{\xi_k}} = u_0(\xi_k)$.

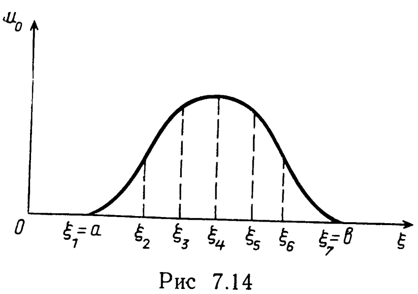


Рис 7.14

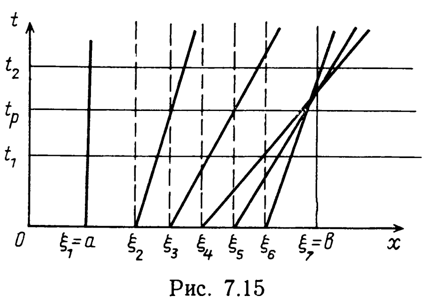


Рис. 7.15

Проведем на рисунке горизонтальную прямую $t = t_1$ и определим точку пересечения этой прямой с характеристикой Γ_{ξ_k}. Пусть эта точка имеет координаты (x_k, t_1). Изобразим теперь на плоскости (x, u) точку с координатами $(x_k, u_0(\xi_k))$. Проведем аналогичные построения для различных точек $\xi_k \in [a, b]$, получим совокупность точек $(x_k, u_0(\xi_k))$, образующую некоторую линию на плоскости (x, u), представляющую график решения $u(x, t)$ уравнения (12.6) для момента времени $t=t_1$ (рис. 7.16). С помощью этой процедуры мы можем вычислить функцию $u(x, t)$ для любых моментов времени.

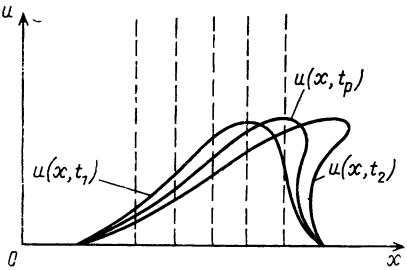


Рис. 7.16

Отметим, что поскольку скорость переноса начального значения $u_0(\xi_k)$ вдоль соответствующей характеристики зависит от этого решения, то начальный профиль $u_0(x)$ с течением времени искажается — имеет место явление дисперсии бегущей волны.

Обратимся вновь к рис. 7.15 и заметим, что, начиная с некоторого момента времени $t=t_p$, т. е. при всех $t>t_p$, характеристики, отвечающие различным ξ_k, начинают пересекаться, что приводит к тому, что при $t>t_p$ профиль решения $u(x, t)$ оказывается неоднозначным, т. е. одному значению x могут отвечать два и более значения функции $u(x, t)$ (см. рис. 7.16). Таким образом, здесь мы сталкиваемся с явлением, носящим название *опрокидывания волн*. Понять причину этого опрокидывания легко, если обратиться к представлению решения (12.6), (12.7) в виде (12.9). Из этого представления следует, что чем выше амплитуда точки, тем с большей скоростью она распространяется. Поэтому точки вершины волны обгоняют в своем движении точки подошвы волны.

Заметим теперь, что возникновение неоднозначного профиля решения оказывается, как правило, противоречащим сути физической модели, описываемой уравнением (12.6), согласно которому $u(x, t)$ — однозначная функция. Например, если мы рассматриваем волны в сплошных средах: в одной точке физические параметры не могут иметь различные значения. Выходом из сложившейся ситуации является расширение понятия решения задачи (12.6), (12.7).

2. Обобщенное решение. Условия на разрыве

Для того чтобы исключить неоднозначные решения, оказывается необходимым расширить понятие решения уравнения (12.6) и вместо непрерывно дифференцируемых решений рассматривать разрывные. При этом, разумеется, необходимо придать новый смысл выражению «функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (12.6)». Естественным здесь является введение обобщенных решений так, как они вводятся в теории обобщенных функций.

Напомним определение. Будем говорить, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (12.6) в обобщенном смысле, если для любого прямоугольника $\Pi_{xt} = \{(x, t): x_1 < x < x_2, 0 < t_1 < t < t_2\}$ и любой бесконечно дифференцируемой и финитной в Π_{xt} функции $\psi(x, t)$ справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{\Pi_{xt}} \left\{u\psi_t + \frac{1}{2} u^2\psi_x\right\} dx\, dt = 0. \tag{12.12}$$

Из (12.12) следует, что если обобщенное решение (12.6) непрерывно дифференцируемо, то оно удовлетворяет (12.6) в обычном смысле, поскольку, интегрируя (12.12) по частям, получим

$$\int\limits_{\Pi_{xt}} \{u_t + uu_x\}\, \psi\, dx\, dt = 0.$$

Отсюда в силу произвольности Π_{xt} и функции $\psi(x, t)$ будем иметь (12.6). Тем самым данное выше определение обобщенного решения действительно является расширенным понятием классического решения.

Применим введенное понятие обобщенного решения для установления простейших свойств разрывных решений уравнения (12.6). Пусть $u(x, t)$ — разрывное решение, имеющее единственный разрыв на кривой, описываемой уравнением $x = s(t)$ и представляющей собой на плоскости (x, t) линию $S = \{(x, t): x = s(t)\}$. Рассмотрим произвольный прямоугольник Π_{xt}, содержащий линию S. Предположим также, что в частях $\Pi_{xt}^{(1)}$ и $\Pi_{xt}^{(2)}$, на которые линия S делит прямоугольник Π_{xt}, решение $u(x, t)$ непрерывно дифференцируемо, т. е. удовлетворяет (12.6) в обычном классическом смысле (рис. 7.17).

Преобразуем формулу (12.12) отдельно в частях $\Pi_{xt}^{(1)}$ и $\Pi_{xt}^{(2)}$. Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_{\Pi_{xt}^{(1)}} \left\{u\psi_t + \frac{1}{2} u^2\psi_x\right\} dx\, dt = \int\limits_{S} \left\{\psi \cos(n^\frown t)\, u^{(-)} + \psi \cos(n^\frown x) \frac{(u^-)^2}{2}\right\} ds,$$

$$\int\limits_{\Pi_{xt}^{(2)}} \left\{u\psi_t + \frac{1}{2} u^2\psi_x\right\} dx\, dt = -\int\limits_{S} \left\{\psi \cos(n^\frown t)\, u^{(+)} + \psi \cos(n^\frown x) \frac{(u^+)^2}{2}\right\} ds.$$

Здесь учтено, что функция $u(x, t)$ в $\Pi_{xt}^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ удовлетворяет уравнению (12.6), и приняты следующие обозначения: $\cos(n^\frown t)$ и $\cos(n^\frown x)$ — направляющие косинусы вектора нормали $\mathbf{n}=\{\cos(n^\frown t), \cos(n^\frown x)\}$, изображенного на рис. 7.17; индексы «+» и «—» обозначают предельные значения функции $u(x, t)$ на кривой S при стремлении к ней «справа» и «слева» от кривой.

Складывая полученные формулы, имеем

$$\int_S \psi \left\{\cos(n^\frown t)[u]+\cos(n^\frown x)\left[\frac{u^2}{2}\right]\right\} ds=0, \tag{12.13}$$

где $[u]=u^+-u^-$. Учитывая произвольность функции $\psi(x, t)$, из равенства (12.13) легко выводим, что

$$\cos(n^\frown t)[u]+\cos(n^\frown x)\left[\frac{u^2}{2}\right]\Big|_S=0. \tag{12.14}$$

Поскольку $\cos(n^\frown t)=\dfrac{-\dot{s}(t)}{\sqrt{1+\dot{s}^2(t)}}$, а $\cos(n^\frown x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dot{s}^2(t)}}$, то из (12.14) после сокращения на $u^+-u^-|_S$ *) получим

$$\dot{s}(t)=\frac{u^+ + u^-}{2}. \tag{12.15}$$

Формула (12.15) связывает скорость $v_p=\dot{s}(t)$ распространения разрыва и значения решения u^+ и u^- слева и справа от разрыва. Она называется *формулой Гюгонио—Ренкина,* или *формулой условий на разрыве.*

Знание этой формулы позволяет определить скорость распространения разрыва по значениям $u^\pm$ решения на разрыве, но, однако, не дает ответа на вопрос о положении разрыва $x=s(t)$. Мы не будем останавливаться на детальном решении этого вопроса, а укажем (без обоснования) лишь способ построения разрыва. Основная идея, на которой основано это построение, опирается на следующий факт. Уравнение (12.6), записанное в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}u+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=0, \tag{12.16}$$

имеет вид одномерного уравнения неразрывности или закона сохранения. Интегрируя (12.16) по переменной x, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u\,dx=0, \quad I=\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\,dx$$

при естественном предположении $u\to 0$ при $x\to\pm\infty$.

Из этих формул следует, что площадь I под кривой $u=u(x, t)$ оказывается инвариантной во времени, т. е. является интегралом движения. Разумеется, этот вывод справедлив лишь для однозначных решений $u(x, t)$.

---

*) $u^+-u^-|_S\neq 0$ в силу разрывности решения.

Основная идея при проведении разрыва состоит в том, чтобы при построении разрыва сохранить этот интеграл движения и для случая разрывного решения. Это приводит к следующему правилу построения разрывов. Разрыв $x=s(t)$ необходимо построить таким образом, чтобы $I(u)$, отвечающий разрывному решению, был равен $I(u_0)$ для начальной функции u_0. Практически при наличии неоднозначного профиля, изображенного на рис. 7.18, это делается так. Разрыв $x=s(t)$ проводят таким

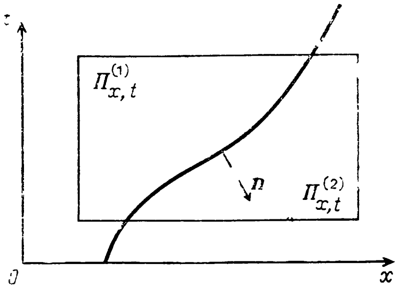


Рис. 7.17

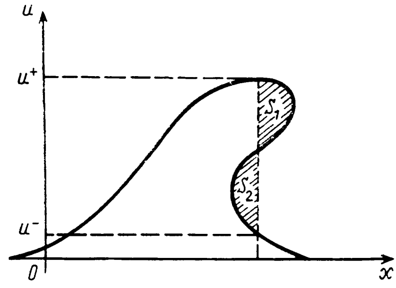


Рис. 7.18

образом, чтобы заштрихованные площади S_1 и S_2 были равны между собой. В результате мы получим из непрерывного неоднозначного решения разрывное, но уже однозначное решение, являющееся обобщенным решением уравнения (12.6). Условие на разрыве выполняется при этом автоматически.

3. Уравнение Кортевега—де Фриза и законы сохранения

Функция $\eta(x, t)$, описывающая процесс распространения длинных волн на поверхности воды, приближенно удовлетворяет уравнению

$$\eta_t + c_0\left(1 + \frac{3}{2h_0}\eta\right)\eta_x + \frac{h_0^2}{6}c_0\eta_{xxx} = 0, \qquad (12.17)$$

где h_0 — глубина жидкости, $c_0=\sqrt{gh_0}$ — скорость длинных волн на мелкой воде, g — ускорение силы тяжести. Уравнение (12.17) носит название уравнения Кортевега—де Фриза

С помощью линейной замены переменных уравнение (12 17) можно привести к виду

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad (12.18)$$

который мы будем называть каноническим видом уравнения Кортевега—де Фриза.

Уравнение Кортевега—де Фриза (12.18) обладает рядом замечательных свойств, одним из которых является наличие у этого уравнения бесконечного числа законов сохранения, т. е. интегралов движения. Первые нетривиальные из них имеют вид

$$I_0=\int_{-\infty}^{\infty} u(x,\ t)\,dx,\quad I_2=\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,\ t)\,dx,$$

$$I_4=\int_{-\infty}^{\infty}\left[u^3+\frac{1}{2}u_x^2\right]dx \text{ и т. д.}$$

Наличие у уравнения Кортевега—де Фриза (12.18) бесконечного числа законов сохранения означает, что это уравнение обладает глубокой внутренней симметрией, которая и выделяет это уравнение среди других нелинейных уравнений, и позволяет построить чрезвычайно изящный метод точного решения, основанный на обратной задаче рассеяния для одномерного стационарного уравнения Шредингера.

4. Схема метода обратной задачи

1) Прямая и обратная задачи рассеяния

Одним из методов интегрирования уравнения Кортевега—де Фриза является метод обратной задачи *). В этом методе для интегрирования нелинейного уравнения необходимо последовательно решить две линейные задачи. При этом оказалось, что с уравнением (12.17) тесно связано дифференциальное уравнение

$$\psi_{xx}+(\lambda-u(x,\ t))\psi=0, \tag{12.19}$$

которое в физической литературе часто называется стационарным уравнением Шредингера с потенциалом $u(x,t)$. Функция $u(x,t)$ зависит от t как от параметра, λ в (12.19) — числовой параметр.

Приведем некоторые необходимые сведения об уравнении (12.19).

Определение. Функцию $f(x,t)$ будем называть *быстроубывающей*, если

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|f(x,\ t)|\,dx<\infty. \tag{12.20}$$

Ниже будем предполагать, что потенциал $u(x,t)$ является быстроубывающим.

Для уравнения (12.19) рассмотрим две задачи. Первая из них состоит в нахождении таких значений λ, при которых уравнение (12.19) имеет нетривиальные решения $\psi(x,t)\in L_2(\mathbf{R}^1)$.

---

*) См.: Захаров В. Е, Манаков С В., Новиков С. П., Питаевский Л. П Теория солитонов Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980

Вторая — в нахождении при $\lambda \geqslant 0$ ограниченных решений уравнения (12.19) с заданным характером асимптотического поведения при $x \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &\sim e^{-ikx} + b(k, t) e^{ikx} \text{ при } x \to +\infty, \\ \psi(x, t) &\sim a(k, t) e^{-ikx} \text{ при } x \to -\infty, \end{aligned} \tag{12.21}$$

Здесь $k^2 = \lambda$ и функции $a(k, t)$ и $b(k, t)$ подлежат определению. С физической точки зрения рассмотренные задачи можно трактовать следующим образом. Первую задачу — как задачу о нахождении собственных значений (квантовомеханических уровней энергии) так называемых связанных состояний, определяемых нормируемыми на единицу в $L_2(\mathbf{R}^1)$ волновыми функциями $\psi(x, t)$. Вторую — как задачу рассеяния плоской волны единичной амплитуды на потенциале $u(x, t)$. Коэффициенты $b(k, t)$ и $a(k, t)$ трактуются при этом как коэффициенты отражения и прохождения соответственно, причем

$$|b(k, t)|^2 + |a(k, t)|^2 = 1.$$

Первая задача для (12.19) может иметь решение лишь при $\lambda < 0$, при этом эти решения имеют при $x \to +\infty$ асимптотику следующего вида:

$$\psi_m(x, t) \sim C_m(t) e^{-\varkappa_m x},$$

где $\lambda_m = -\varkappa^2_m$ — собственное значение. Таким образом, для нормированных на единицу в $L_2(\mathbf{R}^1)$ собственных функций $\psi_m(x, t)$, отвечающих собственным значениям $\lambda_m = -\varkappa^2_m$, величины $C_m(t)$ определяются из равенства

$$C_m(t) = \lim_{x \to \infty} \psi_m(x, t) e^{\varkappa_m(t) x}. \tag{12.22}$$

Предположим теперь, что обе задачи для уравнения (12.19) решены и определены совокупности $\{\varkappa_m, C_m\}$ и $\{a(k, t), b(k, t)\}$. Эти совокупности принято называть *данными рассеяния*. Отыскание их для заданного потенциала $u(x, t)$ составляет *прямую задачу рассеяния.*

Пусть нам известны данные рассеяния для некоторого потенциала $u(x, t)$. Поставим теперь задачу об отыскании по заданным данным рассеяния соответствующего потенциала. Эта задача носит название *обратной задачи рассеяния.*

Оказывается, что данных рассеяния вполне достаточно для однозначного определения потенциала. Конструктивно процедура его нахождения выглядит следующим образом.

По данным рассеяния строится функция

$$B(x; t) = \sum_{m=1}^{n} C_m^2(t) e^{-\varkappa_m x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, t) e^{ikx} dk, \tag{12.23}$$

называемая ядром уравнения Гельфанда—Левитана, а затем ищется решение $\mathcal{K}(x, y; t)$ следующего линейного интегрального уравнения:

$$\mathcal{K}(x, y; t)+B(x+y; t)+\int_x^\infty B(y+z; t)\mathcal{K}(x, z; t)\,dz=0. \quad (12.24)$$

Решив уравнение Гельфанда—Левитана (12.24), по формуле

$$u(x; t)=-2\frac{d}{dx}\mathcal{K}(x, x; t) \quad (12.25)$$

определяем функцию $u(x, t)$, которая и является искомым потенциалом и тем самым решением обратной задачи рассеяния.

2) Схема метода

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (12.17):

$$\begin{cases} u_t-6uu_x+u_{xxx}=0, & t>0, \ -\infty<x<\infty, \\ u(x, 0)=u_0(x). \end{cases} \quad (12.26)$$

Решение задачи Коши (12.26) назовем быстроубывающим, если функция $u(x, t)$ и все ее производные по x до третьего порядка включительно являются быстроубывающими функциями.

Возможность использования обратной задачи рассеяния для построения быстроубывающих решений (12.26) основана на следующих теоремах.

Теорема 7.7. *Если потенциал $u(x, t)$ в (12.19) является быстроубывающим решением уравнения Кортевега—де Фриза, то собственные значения $\lambda_m=-\varkappa_m$ не зависят от времени t.*

Теорема 7.8. *Если потенциал $u(x, t)$ в (12.19) является быстроубывающим решением уравнения Кортевега—де Фриза, то данные рассеяния $C_m(t)$, $b(k, t)$ и $a(k, t)$ зависят от времени следующим образом:*

$$C_m(t)=C_m(0)\exp\{4\varkappa_m^3 t\}, \quad \varkappa_m^2=-\lambda_m, \quad (12.27)$$

$$b(k, t)=b(k, 0)\exp\{8ik^3t\}, \quad k^2=\lambda>0,$$

$$a(k, t)=a(k, 0).$$

Пусть $u(x, t)$ — быстроубывающее решение задачи (12.26), отвечающее быстроубывающей функции $u_0(x)$. Тогда данные рассеяния для этой функции $u(x, t)$, рассматриваемой как потенциал в (12.19), связаны с данными рассеяния для потенциала $u_0(x)$ $(\equiv u(x, 0))$ формулами (12.27). Следовательно, зная данные рассеяния для $u_0(x)$, можно по формулам (12.27) найти данные рассеяния для $u(x, t)$ и затем, построив и решив уравнения Гельфанда—Левитана, определить функцию $u(x, t)$.

Таким образом, мы приходим к следующей схеме отыскания быстроубывающих решений (12.26).

Рассматривая уравнение

$$\psi_{xx}+(\lambda-u_0(x))\psi=0,$$

определяем данные рассеяния $\{\varkappa_m, C_m(0)\}$ и $\{a(k,0),\ b(k,0)\}$ начального условия $u_0(x)$. Затем по формулам (12.27) определяем $C_m(t)$ и $b(k,t)$ и с помощью этих функций строим ядро уравнения Гельфанда—Левитана

$$B(x;\ t) = \sum_{m=1}^{n} C_m^2(0) \exp\{8\varkappa_m^3 t - \varkappa_m x\} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k,\ 0) \exp\{i8k^3t + ikx\}\, dk. \tag{12.28}$$

Решив далее уравнение Гельфанда—Левитана (12.24) с ядром (12.28), по формуле (12.25) определяем решение $u(x,t)$ задачи Коши (12.26) для уравнения Кортевега—де Фриза.

Итак, интегрирование уравнения Кортевега—де Фриза с начальным условием $u(x,0)=u_0(x)$ в классе быстроубывающих функций сводится к последовательному решению двух линейных задач: прямой задачи рассеяния для потенциала $u_0(x)$ и уравнения Гельфанда—Левитана (12.24) с ядром (12.28).

5. Солитонные решения

Рассмотрим простейший пример построения решения задачи Коши (12.26) для уравнения Кортевега—де Фриза на основе метода обратной задачи.

Пусть $u_0(x) = -\dfrac{2}{\operatorname{ch}^2 x}$. Рассмотрим уравнение

$$\psi_{xx} + \left(\lambda + \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}\right)\psi = 0$$

и найдем данные рассеяния для этого потенциала $u_0(x)$. Оказывается, что коэффициент отражения $b(k,0)=0$ и существует лишь одно собственное значение $\lambda_1=-1=-\varkappa_1^2$, причем $C_1(0)=\sqrt{2}$. Ядро уравнения Гельфанда—Левитана (12.23) для таких данных имеет вид

$$B(x;\ t) = 2e^{8t-x}. \tag{12.29}$$

Рассмотрим уравнение Гельфанда—Левитана с этим ядром:

$$\mathcal{K}(x,\ y;\ t) + 2e^{8t-x-y} + 2e^{\,t-y} \int_{x}^{\infty} \mathcal{K}(x,\ z;\ t)\, e^{-z}\, dz = 0. \tag{12.30}$$

Разыскивая решение уравнения (12.30) в виде $\mathcal{K}(x,\ y;\ t) = \mathcal{L}(x;\ t)\, e^{-y}$, найдем

$$\mathcal{L}(x;\ t) = -\frac{2e^x}{1 + e^{2x-8t}} \tag{12.31}$$

и тем самым

$$\mathcal{K}(x,\ y;\ t) = -\frac{2e^{x-y}}{1+e^{2x-8t}}. \tag{12.32}$$

Отсюда согласно формуле (12.25) получим

$$u(x,\ t) = -2\frac{d}{dx}\left[-\frac{2}{1+e^{2x-8t}}\right] = \frac{-2}{\mathrm{ch}^2\,(x-4t)} \tag{12.33}$$

— решение задачи Коши (12.26) с начальной функцией $u_0 = -\dfrac{2}{\mathrm{ch}^2\,x}$.

Полученное решение (12.33) является частным случаем более общего решения уравнения Кортевега—де Фриза, имеющего вид

$$u(x,\ t) = -\frac{1}{2}\alpha\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left[\dfrac{1}{2}\alpha\,(x-x_0) - \dfrac{\alpha^3}{2}t\right]}. \tag{12.34}$$

Решение (12.33) получим из (12.34), тогда параметры α и x_0 равны: $\alpha=2$, $x_0=0$.

Решения уравнения Кортевега—де Фриза вида (12.34) получили название *солитонов*. Они описывают бегущие волны неизменной формы, имеющие скорость, прямо пропорциональную амплитуде решения. Специфика этих решений проявляется в характере их взаимодействия, которое мы сейчас опишем на качественном уровне.

Пусть мы имеем два решения $u_j(x, t; \alpha_j, x_{0j})$, $j=1, 2$, вида (12.34), находящихся на далеком расстоянии друг от друга (т. е. $x_{02}-x_{01}$ положительна и велика), и пусть $\alpha_1>\alpha_2$. Тогда эти солитоны практически не взаимодействуют и распространяются независимо друг от друга. Однако со временем солитон u_1, имеющий большую скорость распространения α_1^2, настигнет солитон u_2, и произойдет их нелинейное взаимодействие. Замечательным оказывается то, что после взаимодействия солитоны u_1 и u_2 разойдутся, не изменив своей формы, причем теперь солитон u_1 будет двигаться впереди солитона u_2. Единственным результатом взаимодействия оказывается то, что солитоны приобретают «скачки фаз», т. е. величины x_{0j} получают приращения Δx_{0j}, причем $\Delta x_{01}>0$, а $\Delta x_{02}<0$. Тем самым солитон u_1 «прыгает» вперед (вправо) на Δx_{01}, а солитон u_2 получает «отдачу» назад на величину Δx_{02}.

Эти частицеподобные свойства, проявляющиеся во взаимодействии, обусловили название солитонов и тот огромный интерес, который проявляется к их изучению.

В связи со сказанным попытаемся дать определение солитонов как решений нелинейных уравнений.

Будем называть солитонами такие решения нелинейных уравнений, которые имеют вид бегущих уединенных волн, взаимодействующих таким образом, что после взаимодействия они сохраняют неизменной свою форму, получая лишь приращение в фазах.

Глава VIII

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В этой главе мы продолжим изучение уравнений эллиптического типа. Будут изучены вопросы, связанные с уравнением $\Delta u+cu=0$. Начнем с исследования задачи Штурма—Лиувилля для оператора Лапласа, а затем рассмотрим внешние и внутренние задачи для уравнения $\Delta u+cu=0$, которое называется уравнением Гельмгольца.

§ 1. ЗАДАЧА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

В предыдущих главах было показано, что основная идея метода разделения переменных состоит в представлении решения краевой задачи в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля, образующим полную систему функций в соответствующей пространственной области. Зная собственные значения и собственные функции соответствующего оператора, можно построить решения начально-краевых задач как для уравнения теплопроводности, так и для уравнения колебаний в ограниченной области.

Перейдем к изучению задачи Штурма—Лиувилля. Мы не будем рассматривать эту задачу для общего самосопряженного эллиптического оператора Lu, а подробно исследуем задачу Штурма—Лиувилля для оператора Лапласа.

1. Приведение задачи Штурма—Лиувилля к интегральному уравнению Фредгольма

Рассмотрим простейшую задачу Штурма—Лиувилля для оператора Лапласа с граничным условием Дирихле. Прежде всего напомним постановку задачи и определение собственных значений и собственных функций.

Определение. Значения параметра λ, при которых существует нетривиальное решение однородного уравнения

$$\Delta u+\lambda\rho u=0 \text{ в } D, \tag{1.1}$$

удовлетворяющее однородному граничному условию

$$u|_S=0, \tag{1.2}$$

называются собственными значениями оператора Лапласа для задачи Дирихле, а соответствующие им ненулевые решения — собственными функциями.

Будем предполагать, что S — поверхность Ляпунова, а функция $\rho(M)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция в $\bar{D}$.

Сведем задачу (1.1), (1.2) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Обозначим через $G(M, Q)$ функцию Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа. Как было показано ранее, для замкнутой поверхности Ляпунова она всегда существует. Пусть $u(M)\not\equiv 0$ есть решение задачи (1.1), (1.2). Подставляя u в (1.1), (1.2), получим тождества

$$\begin{aligned} &\Delta u \equiv -\lambda\rho u \quad \text{в} \quad D, \\ &u|_S \equiv 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Рассматривая (1.3) как краевую задачу для уравнения Пуассона, выпишем ее решение через функцию Грина

$$u(M) = \lambda \int\limits_D G(M, Q)\,\rho(Q)\,u(Q)\,dV_Q. \tag{1.4}$$

Соотношение (1.4) есть однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции u. По построению (1.4) любое решение задачи (1.1), (1.2) является решением уравнения (1.4).

Покажем, что справедливо и обратное утверждение: любое решение уравнения (1.4) есть решение задачи (1.1), (1.2). Действительно, пусть $u(M)$ — решение уравнения (1.4). Учитывая свойства объемного потенциала (см. § 6 гл. V), естественно считать, что функция $u(M)$ непрерывно дифференцируема в $\bar{D}$. Тогда, опять используя свойства объемного потенциала, получим, что $u(M)$ есть решение уравнения

$$\Delta u = -\lambda\rho u$$

и, учитывая свойства функции Грина,

$$u|_S = 0.$$

Следовательно, $u(M)$ есть решение задачи (1.1), (1.2). Таким образом, задача Штурма—Лиувилля (1.1), (1.2) эквивалентна интегральному уравнению (1.4).

Чтобы в дальнейшем воспользоваться результатами теории интегральных уравнений Фредгольма с симметричным ядром, приведем уравнение (1.4) к уравнению с симметричным ядром Для этого домножим (1.4) на $\sqrt{\rho(M)}$ и запишем его в виде

$$\sqrt{\rho(M)}\,u(M) = \lambda \int\limits_D \sqrt{\rho(M)}\,G(M, Q)\sqrt{\rho(Q)}\sqrt{\rho(Q)}\,u(Q)\,dV.$$

Введем обозначения:

$$K(M,\ Q)=\sqrt{\rho(M)}\,G(M,\ Q)\sqrt{\rho(Q)},\quad v(M)=\sqrt{\rho}\,u.$$

Тогда интегральное уравнение принимает вид

$$v(M)=\lambda\int\limits_D K(M,\ Q)\,v(Q)\,dV. \tag{1.5}$$

Получено интегральное уравнение с симметричным слабо-полярным ядром, для которого справедлива теория Фредгольма.

2. Свойства собственных значений и собственных функций

Согласно теории интегральных уравнений вещественное симметричное слабо-полярное ядро $K(M, Q)$ имеет хотя бы одно собственное значение. Это означает, что задача Штурма—Лиувилля имеет решение, т. е. существуют собственные значения и собственные функции оператора Лапласа для задачи Дирихле.

Рассмотрим свойства собственных значений и собственных функций, сформулированные в § 4 гл. III.

1. Существует бесконечное счетное множество собственных значений

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant\ldots \tag{1.6}$$

Поскольку собственные значения уравнения (1.5) и задачи (1.1), (1.2) совпадают, то существование счетного множества собственных значений следует из теории интегральных уравнений. Остается показать, что множество собственных значений бесконечно. Предположим противное, т. е. что число собственных значений конечно:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_N.$$

Тогда, как известно, ядро $K(M, Q)$ будет вырожденным, и оно представимо в виде

$$K(M,\ Q)=\sum_{n=1}^{N}\frac{v_n(M)\,v_n(Q)}{\lambda_n}, \tag{1.7}$$

где $\{v_n(M)\}$ — множество собственных функций ядра K, причем в этой сумме каждое собственное значение повторяется столько раз, каков его ранг. Напомним, что для рассматриваемых ядер $K(M, Q)$ ранг собственного значения конечен. Поскольку каждая собственная функция v_n непрерывна, то конечная сумма, стоящая в правой части (1.7), есть функция непрерывная, в то время как ядро $K(M, Q)$, стоящее в левой части (1.7), слабо-полярно, т. е. неограничено при $M=Q$. Это противоречие показывает, что число собственных значений бесконечно и согласно теории интегральных уравнений не имеет конечных точек сгущения.

2. Все собственные значения положительны: $\lambda_n > 0$. Обозначим через $\{u_n(M)\}$ множество собственных функций задачи (1.1), (1.2):

$$v_n(M) = \sqrt{\rho(M)}\, u_n(M).$$

Воспользуемся первой формулой Грина

$$\int_D u_n \Delta u_n dV = \oint_S u_n \frac{\partial u_n}{\partial n} dS - \int_D (\nabla u_n)^2 dV.$$

Поскольку $\Delta u_n = -\lambda_n \rho u_n$, $u_n|_S = 0$, то

$$\lambda_n \int_D \rho u_n^2 dV = \int_D (\nabla u_n)^2 dV. \tag{1.8}$$

Отсюда сразу следует, что $\lambda_n > 0$ при всех n. Это также означает, что функция Грина является определенно положительным ядром, разложение которого в ряд по собственным функциям получено в § 4 гл. V:

$$G(M, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(M)\, u_n(Q)}{\lambda_n}.$$

Заметим, что для задачи Штурма—Лиувилля с граничным условием Неймана $\left(\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0\right)$ из (1.8) следует, что она имеет наименьшее нулевое собственное значение. С этим обстоятельством связана неединственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Наконец, заметим, что в случае задачи Штурма—Лиувилля с третьим граничным условием $\left(\left.\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right|_S = 0\right)$ при отрицательной функции $h(P) < 0$ задача может иметь конечное число отрицательных собственных значений λ_n.

3. Собственные функции ортогональны в области D с весом $\rho(M)$:

$$\int_D u_n u_m \rho dV = 0 \text{ при } n \neq m.$$

Для доказательства применим вторую формулу Грина к функциям u_n и u_m:

$$\int_D \{u_n \Delta u_m - u_m \Delta u_n\}\, dV = \oint_S \left\{u_n \frac{\partial u_m}{\partial n} - u_m \frac{\partial u_n}{\partial n}\right\} dS.$$

Учитывая уравнение (1.1) и граничное условие (1.2), отсюда получаем

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_D u_n u_m \rho dV = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_D u_n u_m \rho dV = 0 \text{ при } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

Поскольку ранг собственных значений конечен, то, проведя дополнительную ортогонализацию линейно независимых собственных функций, соответствующих одному собственному значению, получим ортогональную систему всех собственных функций. В дальнейшем будем считать, что она ортонормирована:

$$\int\limits_D u_n u_m \rho dV = \delta_{nm} \text{ при всех } n \text{ и } m.$$

4. Теорема 8.1. **(Теорема Стеклова).** *Произвольная дважды непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $\bar{D}$ функция $f(M)$, удовлетворяющая граничному условию*

$$f|_S = 0,$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи Дирихле.

Доказательство. Эта теорема является следствием теоремы Гильберта—Шмидта. Действительно, подействуем на функцию f оператором Лапласа и обозначим $h(M) = -\Delta f$. Можно считать, что $f(M)$ есть классическое решение задачи:

$$\Delta f = -h, \quad f|_S = 0,$$

которое записывается через функцию Грина

$$f(M) = \int\limits_D G(M, Q) h(Q) \, dV.$$

Пусть

$$F(M) = f(M) \sqrt{\rho(M)}, \quad h_1(Q) = \frac{h(Q)}{\sqrt{\rho(Q)}}.$$

Тогда

$$F(M) = \int\limits_D K(M, Q) h_1(Q) \, dV.$$

Функция $F(M)$ истокообразно представима при помощи ядра $K(M, Q)$. По теореме Гильберта—Шмидта она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям этого ядра. Следовательно,

$$F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M), \quad F_n = \int\limits_D F(M) v_n(M) \, dV,$$

или

$$f(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(M), \quad F_n = \int\limits_D f u_n \rho dV = f_n.$$

Замечание. Из теоремы Стеклова вытекают полнота и замкнутость в $L_2(D)$ системы собственных функций. Действительно, произвольная функция $f \in L_2$ может быть приближена в среднем (по норме $L_2(D)$) достаточно гладкой функцией f_1, удовлетворяющей граничному условию $f_1|_S=0$:

$$\|f-f_1\|_{L_2(D)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция f_1 удовлетворяет теореме Стеклова и может быть приближена равномерно и, следовательно, в среднем частичной суммой ряда

$$\left\| f_1 - \sum_{n=1}^{N} f_n u_n (M) \right\|_{L_2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\left\| f(M) - \sum_{n=1}^{N} f_n u_n (M) \right\| \leqslant \|f-f_1\| + \left\| f_1 - \sum_{n=1}^{N} f_n u_n (M) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, система собственных функций $\{u_n(M)\}_1^\infty$ полна и замкнута в пространстве $L_2(D)$.

В заключение отметим, что установленные свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля для оператора Лапласа имеют место и в случае более общего эллиптического оператора дивергентного типа:

$$Lu = \operatorname{div} (k(M) \operatorname{grad} u) - q(M) u$$

при достаточно гладких в $\bar{D}$ положительных функциях $k(M)$ и $q(M)$.

Не проводя подробных доказательств, кратко остановимся на задаче Штурма—Лиувилля для самосопряженного эллиптического оператора

$$Lu + \lambda \rho u = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u) - qu + \lambda \rho u = 0, \quad M \in D$$

$$u|_S = 0.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$Lu = -f(M), \quad M \in D, \tag{1.9}$$

$$u|_S = 0. \tag{1.10}$$

С помощью формул Грина легко доказать теорему единственности задачи (1.9), (1.10) для достаточно гладких функций $k(M) > 0$, $q(M) \geqslant 0$.

Записав уравнение (1.9) в виде

$$\Delta u = -\nabla (\ln k) \nabla u + \tilde{q} u - \tilde{f}, \quad \tilde{q} = \frac{q}{k}, \quad \tilde{f} = \frac{f}{k},$$

для решения задачи (1.9)—(1.10), если оно существует, получим представление

$$u(M)=\int\limits_D G(M,\ Q)\nabla \ln k(Q)\nabla u(Q)\,dV-$$

$$-\int\limits_D G(M,\ Q)\tilde{q}(Q)u(Q)\,dV+F(M),$$

где

$$F(M)=\int\limits_D G(M,\ Q)\tilde{f}(Q)\,dV,$$

а $G(M, Q)$ — функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$\Delta G(M,\ M_0)=-\delta(M,\ M_0),$$

$$G|_S=0,$$

существование которой для достаточно гладкой поверхности S было доказано выше.

Используя тождество

$$\nabla(uG\nabla\ln k)=G\nabla\ln k\nabla u+u\nabla(G\nabla\ln k),$$

теорему Остроградского и условие (1.10), полученное для решения задачи (1.9)—(1.10), представление можно переписать в виде

$$u(M)+\int\limits_D \nabla_Q(G(M,\ Q)\nabla\ln k(Q))u(Q)\,dV+$$

$$+\int\limits_D G(M,\ Q)\tilde{q}(Q)u(Q)\,dV=F(M). \qquad (1.11)$$

Данное представление есть не что иное, как интегральное уравнение Фредгольма второго рода с полярным ядром. Аналогично предыдущему доказывается эквивалентность краевой задачи (1.9), (1.10) и интегрального уравнения (1.11). Причем в силу теоремы единственности для задачи (1.9), (1.10) однородное интегральное уравнение (1.11) имеет только тривиальное решение. Последнее справедливо и для уравнения с повторными ядрами. Отсюда следует, что краевая задача (1.9), (1.10) однозначно разрешима. Рассматривая последовательность краевых задач:

$$Lu_\varepsilon=-f_\varepsilon(M,\ M_0),$$

$$u_\varepsilon|_S=0,$$

где положительная функция $f_\varepsilon(M, M_0)$ отлична от нуля лишь внутри шара K_ε радиуса ε с центром в точке M_0, а

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\varepsilon} f_\varepsilon(M, M_0)\,dV = 1,$$

и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, можно показать, что существует регулярная обобщенная функция $G(M, M_0)$, являющаяся решением краевой задачи:

$$LG(M, M_0) = -\delta(M, M_0),$$
$$G|_S = 0.$$

Легко доказать, что функция $G(M, M_0)$ — симметричная функция своих аргументов. Функцию $G(M, M_0)$ естественно назвать функцией Грина задачи Дирихле для оператора Lu в области D. Через эту функцию Грина решение задачи (1.9), (1.10) выражается в виде

$$u(M) = \int_D G(M, Q) f(Q)\,dV.$$

Вернемся теперь к исходной задаче Штурма—Лиувилля. Из проведенных рассмотрений аналогично случаю оператора Лапласа следует, что эта задача эквивалентна однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметризуемым ядром:

$$u(M) = \lambda \int_D G(M, Q)\,\rho(Q)\,u(Q)\,dV,$$

откуда и следуют основные свойства собственных значений и собственных функций этой задачи.

§ 2. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В гл. V были подробно рассмотрены свойства гармонических функций, т. е. решений уравнения Лапласа. Сейчас будем исследовать свойства решений уравнения $\Delta u + cu = 0$, где c — некоторая постоянная.

1. Фундаментальные решения уравнения Гельмгольца

При изучении свойств гармонических функций важную роль играло фундаментальное решение уравнения Лапласа. Построим фундаментальное решение уравнения $\Delta u + cu = 0$.

Рассмотрим сначала трехмерный случай. Будем действовать по той же схеме, что и при построении фундаментального решения уравнения Лапласа. Пусть M_0 — некоторая фиксированная точка. Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с центром в точке M_0. Найдем решение уравнения $\Delta u+cu=0$, зависящее только от r (радиально-симметричное решение). Расписывая оператор Лапласа в сферической системе координат и учитывая, что u зависит только от r, получим

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+cu=0. \tag{2.1}$$

Поскольку

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru),$$

то, сделав замену

$$v=ru,$$

уравнение (2.1) запишем в виде

$$\frac{d^2v}{dr^2}+cv=0. \tag{2.2}$$

Рассмотрим отдельно случаи $c>0$ и $c<0$. Пусть $c=k^2>0$ k — действительно, $k>0$). Уравнение (2.2) принимает вид

$$\frac{d^2v}{dr^2}+k^2v=0.$$

Решение его можно записать в виде

$$v=C_1e^{ikr}+C_2e^{-ikr}$$

или, используя вещественные линейно независимые решения, в виде

$$v=A_1\cos kr+A_2\sin kr.$$

При $c=-\varkappa^2$ ($\varkappa$ — действительно, $\varkappa>0$) решение уравнения (2.2) имеет вид

$$v=C_1e^{\varkappa r}+C_2e^{-\varkappa r}.$$

Таким образом, найдены следующие радиально-симметричные относительно точки M_0 решения уравнения $\Delta u+cu=0$:

$$u=\frac{e^{\pm ikr}}{r}\quad\text{при } c=k^2>0,$$

$$u=\frac{e^{\pm\varkappa r}}{r}\quad\text{при } c=-\varkappa^2<0,$$

$$r=R_{MM_0}.$$

Отметим, что все эти решения при $M\to M_0$ имеют одинаковую особенность, совпадающую с особенностью фундаментального решения уравнения Лапласа.

Рассмотрим поведение этих решений при $r\to\infty$. В случае $c=-\varkappa^2$ одно решение $\frac{1}{r}\exp(-\varkappa r)$ экспоненциально убывает на бесконечности, второе $-\frac{1}{r}\exp(\varkappa r)-$ неограниченно возрастает на бесконечности и физического смысла не имеет. Фундаментальным решением при $c=-\varkappa^2$ называется решение

$$\frac{e^{-\varkappa R_{MM_0}}}{R_{MM_0}}.$$

При $c=k^2>0$ ситуация более сложная, поскольку оба решения

$$\frac{e^{ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}} \text{ и } \frac{e^{-ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}, \tag{2.3}$$

а также действительное решение

$$\frac{\cos kR_{MM_0}}{R_{MM_0}} \tag{2.4}$$

при $R\equiv R_{MM_0}\to\infty$ убывают по одному и тому же закону. Еще одно действительное решение $\frac{\sin kR}{R}$ мы не рассматриваем, так как оно ограничено во всем пространстве.

При изучении уравнения $\Delta u+k^2u=0$ в ограниченной области решения (2.3), (2.4) эквивалентны и каждое из них является фундаментальным решением этого уравнения.

Рассмотрим физическую интерпретацию этих решений в неограниченном пространстве и выясним, чем они отличаются друг от друга. Ранее мы установили (гл. VII), что волновое уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\Delta U \tag{2.5}$$

описывает распространение волн в однородном пространстве (a — скорость распространения волн). Если рассматривать установившиеся гармонические волны, зависящие от времени по закону

$$U(M, t)=e^{-i\omega t}u(M),$$

то для амплитуды волны $u(M)$ получаем интересующее нас уравнение

$$\Delta u+k^2u=0, \quad k^2=\frac{\omega^2}{a^2}.$$

Таким образом, сферически-симметричные относительно точки M_0 решения уравнения (2.5), построенные на основе (2.3) — (2.4), имеют вид

$$\frac{e^{-i\omega t+ikR}}{R}, \quad \frac{e^{-i\omega t-ikR}}{R}, \quad e^{-i\omega t}\frac{\cos kR}{R}.$$

Решение $\frac{1}{R}e^{-i\omega t+ikR}$ представляет собой сферическую волну, расходящуюся от точки M_0 (волну, уходящую на бесконечность); решение $\frac{1}{R}e^{-i\omega t-ikR}$ представляет собой волну, сходящуюся к точке M_0 (приходящую из бесконечности); решение $e^{-i\omega t}\frac{\cos kR}{R}$ — стоячая волна с особенностью в точке M_0 (содержащая волну, приходящую из бесконечности). Если мы считаем, что все источники волн расположены в конечной области пространства, то два последних решения, содержащие приходящие из бесконечности волны, не имеют физического смысла. Решением, имеющим физический смысл, является решение

$$\frac{1}{R_{MM_0}}e^{-i\omega t+ikR_{MM_0}}.$$

Решения $\frac{1}{R}\exp(\pm ikR)$ представляют собой амплитуды распространяющихся сферических волн. Они называются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца в неограниченной области. Для выделения одного из них следует на бесконечности поставить дополнительное условие, которое будет рассмотрено позже.

Еще раз подчеркнем, что в ограниченной области решения (2.3), (2.4) эквивалентны.

Рассмотрим теперь плоский случай. Введем полярную систему координат (r, φ) с началом в точке M_0. Решение u, зависящее только от r, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)+cu=0,$$

или

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+cu=0. \tag{2.6}$$

При $c=k^2>0$ — это уравнение Бесселя нулевого порядка. Следовательно, его общее решение имеет вид

$$u=C_1H_0^{(1)}(kr)+C_2H_0^{(2)}(kr)$$

или

$$u=A_1J_0(kr)+A_2N_0(kr).$$

При $c=-\varkappa^2<0$ (2.6) есть уравнение для функций Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого порядка, и его общее решение можно записать в виде

$$u=C_1I_0(\varkappa r)+C_2K_0(\varkappa r).$$

При $c=-\varkappa^2<0$ фундаментальным решением уравнения $\Delta u-\varkappa^2u=0$ называется функция

$$K_0(\varkappa R_{MM_0}),$$

экспоненциально убывающая на бесконечности и при $M \to M_0$ имеющая особенность вида

$$K(\varkappa R_{MM_0}) \sim \ln \frac{1}{\varkappa R_{MM_0}}.$$

При $c=k^2>0$ ситуация аналогична трехмерному случаю. В ограниченной области решения

$$H_0^{(1)}(kR_{MM_0}),\ H_0^{(2)}(kR_{MM_0}),\ N_0(kR_{MM_0})$$

эквивалентны и являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$. Напомним, что эти функции при $M \to M_0$ имеют логарифмическую особенность, поскольку

$$H_0^{(1,2)}(x) \approx \mp \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x},\quad N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x} \text{ при } x \to +0.$$

В неограниченной области фундаментальным решением уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ при $k^2>0$ является одна из функций $H_0^{(1,2)}(kR_{MM_0})$ в зависимости от того, какое дополнительное условие поставлено на бесконечность. Напомним также поведение этих функций на бесконечности:

$$H_0^{(1,2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{\pm i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \text{ при } x \to +\infty.$$

Отметим, что все фундаментальные решения уравнения $\Delta u + cu = 0$ на плоскости имеют такую же логарифмическую особенность, как и фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости.

2. Формулы Грина

В гл. III получены первая и вторая формулы Грина для общего эллиптического самосопряженного оператора. Естественно, что они справедливы и для оператора $Lu = \Delta u + cu$. При выводе третьей формулы Грина использовалось фундаментальное решение уравнения Лапласа. Мы только что установили, что особенности фундаментальных решений уравнения Лапласа и уравнения Гельмгольца совпадают. Поэтому для вывода третьей формулы Грина для оператора $\Delta u + cu$ нужно повторить все те же рассуждения, которые проведены в § 1 гл. V. Мы этого делать не будем, а приведем в качестве примера окончательную формулу для случая $c=k^2$. Она имеет вид

$$\oint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - u \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{e^{ikR}}{R} \right\} dS_P -$$

$$-\int\limits_D (\Delta u + k^2 u) \frac{e^{ikR}}{R} dV = \begin{cases} 4\pi u(M), & M \in D, \\ 2\pi u(M), & M \in S, \\ 0, & M \in D_e \ (M \notin \bar{D}). \end{cases} \tag{2.7}$$

В формуле (2.7), как и прежде, $u(M)$ — дважды непрерывно дифференцируемая в D функция, непрерывная вместе с первыми производными в $D \cup S$, S — поверхность Ляпунова, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S (внешняя по отношению к области D), $R = R_{MP}$. В формуле (2.7) можно использовать и другое фундаментальное решение. Аналогичная формула имеет место и при $c = -\varkappa^2$.

Из (2.7) сразу получается интегральное представление решения уравнения $\Delta u + k^2 u = -f$:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} - u \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} \right\} dS_P + \\ + \frac{1}{4\pi} \int\limits_D f(P) \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dV_P \tag{2.8}$$

в любой внутренней точке области D.

Отсюда, так же как и для гармонических функций, получаем, что любое решение уравнения Гельмгольца в любой внутренней точке области D имеет производные всех порядков.

3. Потенциалы уравнения Гельмгольца

Из соотношения (2.8) видно, что произвольная достаточно гладкая функция u может быть представлена в виде трех слагаемых, называемых потенциалами: объемного потенциала, потенциала простого слоя и потенциала двойного слоя. Потенциалами Гельмгольца называются следующие потенциалы:

$$v(M) = \int\limits_D \rho(Q) \frac{e^{ikR_{MQ}}}{R_{MQ}} dV_Q \text{ — объемный потенциал,}$$

$$V(M) = \int\limits_S \mu(P) \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P \text{ — потенциал простого слоя,}$$

$$W(M) = -\int\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P \text{ — потенциал двойного слоя.}$$

Поскольку ядра этих потенциалов имеют ту же особенность при совпадении точек M и P, что и потенциалы для уравнения Лапласа, то они обладают теми же свойствами, за исключением того, что они удовлетворяют другим уравнениям.

Перечислим эти свойства.

Объемный потенциал $v(M)$ с непрерывно дифференцируемой плотностью $\rho(Q)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta v+k^2 v=-4\pi\rho(M).$$

При $M\notin S$ потенциалы простого слоя $V(M)$ и двойного слоя $W(M)$ удовлетворяют однородному уравнению

$$\Delta V+k^2V=0,\ \Delta W+k^2W=0.$$

Потенциал простого слоя $V(M)$ с непрерывной плотностью $\mu(P)$, заданной на поверхности Ляпунова, является непрерывной функцией во всем пространстве, а его нормальная производная имеет разрыв при переходе через поверхность S, величина которого определяется формулами

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P)\right)_i=\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P)\right)^0+2\pi\mu(P),$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P)\right)_e=\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}(P)\right)^0-2\pi\mu(P),\ P\in S.$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в § 6 гл. V.

Потенциал двойного слоя $W(M)$ с непрерывной плотностью $\nu(P)$, заданной на поверхности Ляпунова, претерпевает разрыв при переходе через поверхность S, величина которого определяется соотношениями

$$W_i(P)=\overset{\circ}{W}(P)+2\pi\nu(P),$$

$$W_e(P)=\overset{\circ}{W}(P)-2\pi\nu(P),\ P\in S.$$

Аналогичным образом вводятся потенциалы при $c=-\varkappa^2<0$ и для плоского случая.

4. Принцип максимума для уравнения $\Delta u-\varkappa^2u=0$

Для уравнения Лапласа справедлив принцип максимума. Для уравнения $\Delta u+cu=0$ принцип максимума имеет место только при $c<0$. При $c>0$ принцип максимума несправедлив, в чем легко убедиться на конкретном примере. Действительно, в круге $0\leqslant r<a$ решением уравнения $\Delta u+k^2u=0$ является функция $J_0(kr)$, имеющая абсолютный максимум при $r=0$ (в центре круга).

Итак, рассмотрим уравнение $\Delta u-\varkappa^2u=0$.

Теорема 8.2. *Решение уравнения $\Delta u-\varkappa^2u=0$, определенное и непрерывное в замкнутой области $D\cup S$, не может достигать во внутренних точках области D положительных максимальных и отрицательных минимальных значений.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть в некоторой внутренней точке M_0 области D решение $u(M)$ уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ достигает своего положительного максимального значения:

$$u(M_0) = \max_{\overline{D}} u(M) > 0. \tag{2.9}$$

Следовательно, в этой точке

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0) \leqslant 0 \text{ (или } \Delta u(M_0) \leqslant 0). \tag{2.10}$$

Рассматривая уравнение $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ во внутренней точке M_0 и учитывая (2.9) и (2.10), убеждаемся, что оно в точке M_0 выполняться не может. Это противоречие показывает, что исходное предположение неверно. ■

Замечание. Аналогичным образом доказывается невозможность достижения во внутренних точках отрицательного минимального значения.

Принцип максимума удобно записать в следующем виде: всюду в $\overline{D}$ справедливы неравенства

$$u(M) \leqslant \max\{\max u|_S,\ 0\}, \tag{2.11}$$

$$u(M) \geqslant \min\{\min u|_S,\ 0\}. \tag{2.12}$$

Заметим, что принцип максимума справедлив и для общего эллиптического уравнения дивергентного вида:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = 0$$

при $k > 0$, $q > 0$, $k \in C^{(1)}(D)$. Доказательство его проводится так же, как в предыдущей теореме.

§ 3. ВНУТРЕННИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Перейдем к изучению внутренних краевых задач для уравнения $\Delta u + cu = 0$. При этом будем отдельно рассматривать случаи $c < 0$ и $c > 0$.

1. Внутренняя задача Дирихле для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$

Сначала исследуем случай $c < 0$. Начнем с задачи Дирихле

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0 \text{ в } D, \tag{3.1}$$

$$u|_S = f. \tag{3.2}$$

Напомним, что классическим решением задачи (3.1), (3.2) называется функция u, дважды непрерывно дифференцируемая в области D и удовлетворяющая в ней уравнению (3.1), непрерывная в замкнутой области $D \cup S$ и удовлетворяющая условию (3.2) на S.

Теорема 8.3. *Задача* (3.1), (3.2) *не может иметь более одного классического решения.*

Доказательство. В силу линейности достаточно показать, что однородная задача

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0 \text{ в } D, \ u|_S = 0$$

имеет только тривиальное решение. Воспользуемся принципом максимума. Функция u не может внутри D достигать положительного максимума. Следовательно, в силу граничных условий $u \leqslant 0$ в D. Она не может также внутри D достигать и отрицательного минимума. Следовательно, $u \geqslant 0$ в D. Объединяя эти два неравенства, получаем $u \equiv 0$ в D, т. е. однородная задача имеет только тривиальное решение. ■

Из принципа максимума сразу вытекает устойчивость решения задачи Дирихле по граничным условиям.

Теорема 8.4. *Пусть* u_α $(\alpha = 1, 2)$ — *классические решения задач*

$$\Delta u_\alpha - \varkappa^2 u_\alpha = 0 \text{ в } D,$$

$$u_\alpha|_S = f_\alpha, \ \alpha = 1, \ 2.$$

Если $|f_1 - f_2| \leqslant \varepsilon$ *всюду на* S, *то* $|u_1(M) - u_2(M)| \leqslant \varepsilon$ *всюду в* $\overline{D}$.

Доказательство. Пусть $v = u_1 - u_2$. Согласно (2.11) всюду в $\overline{D}$ $v(M) \leqslant \max\{\max v|_S, \ 0\} \leqslant \max\{\varepsilon, \ 0\} = \varepsilon$. Согласно (2.12)

$$v(M) \geqslant \min\{\min v|_S, \ 0\} \geqslant \min\{-\varepsilon, \ 0\} = -\varepsilon.$$

Следовательно, всюду в $\overline{D}$

$$-\varepsilon \leqslant v \leqslant \varepsilon,$$

т. е. $|u_1 - u_2| \leqslant \varepsilon$ в $\bar{D}$. Следовательно, решение задачи Дирихле устойчиво в равномерной норме. ■

2. Вторая и третья краевые задачи для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$

Исследование единственности решения второй и третьей краевых задач будем проводить одновременно, используя энергетический метод.

Рассмотрим третью краевую задачу:

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0 \text{ в } D, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = f. \tag{3.4}$$

Классическим решением задачи (3.3), (3.4) называется дважды непрерывно дифференцируемая в D функция $u(M)$, удовлетворяющая в D уравнению (3.3), имеющая непрерывные первые производные в замкнутой области $D \cup S$ и удовлетворяющая граничному условию (3.4) на S.

Теорема 8.5. *При $h(P) \geqslant 0$ на S краевая задача* (3.3), (3.4) *не может иметь более одного классического решения.*

Доказательство. Покажем, что однородная задача

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0 \text{ в } D, \ \frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = 0, \ h \geqslant 0$$

имеет только тривиальное решение.

Применим к решению однородной задачи первую формулу Грина:

$$\int_D u \Delta u dV = \oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_D (\nabla u)^2 dV.$$

Учитывая, что $\Delta u \equiv \varkappa^2 u$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = -hu|_S$, получаем

$$\varkappa^2 \int_D u^2 dV + \oint_S hu^2 dS + \int_D (\nabla u)^2 dV \equiv 0.$$

Следовательно, $u \equiv 0$ в $\bar{D}$. ■

Заметим, что условие на функцию $h(P)$ физически означает, что поток вектора $\operatorname{grad} u$ направлен из области D наружу.

Отметим, что, как и для уравнения Лапласа, условие на знак функции $h(P)$ существенно для справедливости теоремы. При $h<0$ на S решение может быть неединственным. В этом можно убедиться на конкретном примере. Легко проверить, что однородная краевая задача в шаре K_a радиуса a

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0 \text{ в } K_a, \ \frac{\partial u}{\partial n} + h_0 u|_{r=a} = 0$$

при $h_0 = -\varkappa \operatorname{cth} \varkappa a + \frac{1}{a} < 0$ имеет нетривиальное решение

$$u = C \frac{\operatorname{sh} \varkappa r}{r},$$

где C — произвольная постоянная.

В отличие от уравнения Лапласа внутренняя задача Неймана для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ также имеет единственное решение. Доказательство следует из приведенного рассуждения, поскольку оно справедливо и при $h \equiv 0$ на S.

3. Краевые задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$

Внутренние краевые задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ ($c = k^2 > 0$) могут иметь неединственное решение. Это связано с тем, что собственные значения оператора Лапласа неотрицательны (для третьей краевой задачи — при $h>0$). Поэтому значение k^2 может совпадать с собственным значением соответствующей краевой задачи.

Рассмотрим для примера задачу Дирихле

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } D, \qquad u|_S = 0. \tag{3.5}$$

Если k^2 не совпадает ни с одним собственным значением оператора Лапласа для задачи Дирихле в области D, то задача (3.5) имеет только тривиальное решение. Это означает, что соответствующая задача с неоднородным граничным условием не может иметь более одного решения, т. е. классическое решение единственно. В этом случае область D часто называют «нерезонансной для данного значения k^2».

Если же k^2 совпадает с каким-либо собственным значением оператора Лапласа для задачи Дирихле ($k^2=\lambda_{n_0}$), то задача (3.5) имеет ненулевое решение. Этим решением будут собственные функции

$$v_{n_0}^{(1)}(M), \ldots, v_{n_0}^{(p)}(M), \quad p = \operatorname{rang} \lambda_{n_0}$$

соответствующей задачи Штурма—Лиувилля. Поэтому при $k^2=\lambda_{n_0}$ неоднородная задача имеет решение не всегда, а если имеет решение, то оно неединственно.

§ 4. ФУНКЦИЯ ГРИНА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Функция Грина для оператора $\Delta u + cu$ вводится так же, как и для оператора Лапласа. На примере задачи Дирихле кратко напомним, как это можно сделать, и отметим некоторые особенности.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\Delta u + k^2 u = -F \text{ в } D, \qquad u|_S = f. \tag{4.1}$$

Согласно третьей формуле Грина (2.7) решение задачи во внутренних точках области D можно представить в виде

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} \right\} dS_P + \frac{1}{4\pi} \int\limits_D F \frac{e^{ikR}}{R} dV. \tag{4.2}$$

Пусть $v(M)$ — регулярное в D решение однородного уравнения $\Delta v + k^2 v = 0$. Применяя к u и v вторую формулу Грина, получим

$$0=\oint\limits_S\left\{\frac{\partial u}{\partial n}v-u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right\}dS+\int\limits_D FvdV. \tag{4.3}$$

Складывая (4.2) и (4.3) и вводя обозначение

$$G(M,\ Q)=\frac{e^{ikR_{MQ}}}{4\pi R_{MQ}}+v,$$

получим

$$u(M)=\oint\limits_S\left\{\frac{\partial u}{\partial n}G(M,\ P)-u\frac{\partial G}{\partial n_P}(M,\ P)\right\}dS_P+$$

$$+\int\limits_D F(Q)\,G(M,\ Q)\,dV. \tag{4.4}$$

Выберем функцию v так, чтобы $G|_{P\in S}=0$. Тогда решение задачи (4.1) можно представить в виде

$$u(M)=-\oint\limits_S f(P)\frac{\partial G}{\partial n_P}(M,\ P)\,dS+\int\limits_D FGdV. \tag{4.5}$$

Определение. Функция $G(M, Q)$ называется функцией Грина оператора $\Delta u+k^2 u$ для внутренней задачи Дирихле в области D, если она удовлетворяет условиям:

1) $G(M,\ Q)=\dfrac{1}{4\pi R_{MQ}}\exp\{ikR\}+v,$

где v — решение уравнения $\Delta v+k^2v=0$ всюду в D;

2) $G(M,\ P)|_{P\in S}=0.$

Вопрос о построении функции Грина сводится к решению однородного уравнения

$$\Delta v+k^2v=0 \text{ в } D$$

со специальным граничным условием на S:

$$v|_S=-\left.\frac{e^{ikR_{MP}}}{4\pi R_{MP}}\right|_{P\in S}.$$

где

на ние ско ıалогичным образом вводится функция Грина для второй ı тьей краевых задач.

ıметим (без доказательства), что функция Грина краевой ıи для оператора $\Delta u+k^2u$ в области D существует только ıом случае, когда k^2 не совпадает ни с одним собственным ıначением соответствующей задачи Штурма—Лиувилля в области D, т. е. область D, для которой строится функция Грина, является нерезонансной для данного значения k^2.

Функция Грина для оператора $\Delta u—\varkappa^2u$ определяется аналогично. Но для этого оператора функция Грина существует при всех $\varkappa$ для любой поверхности Ляпунова. Это связано с тем, что оператор Лапласа для первой, второй и третьей краевых задач (третьей — при $h>0$) отрицательных собственных значений не имеет.

§ 5. ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Перейдем к изучению задач для уравнения $\Delta u + cu = -f$ в неограниченной области. Для выделения единственного решения необходимо поставить дополнительные условия на бесконечности. При этом условия на бесконечности ставятся по-разному при $c = -\varkappa^2 < 0$ и при $c = k^2 > 0$.

Рассмотрим сначала случай $c = -\varkappa^2 < 0$. Будем считать, что функция f локальна. В этом случае дополнительным условием, выделяющим единственное решение, является требование равномерного стремления решения к нулю на бесконечности.

Теорема 8.6. *Уравнение $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$ в неограниченном пространстве не может иметь более одного решения, равномерно стремящегося к нулю на бесконечности.*

Доказательство. Пусть существуют два решения u_1 и u_2, равномерно стремящиеся к нулю на бесконечности. Тогда функция $v = u_1 - u_2$ является решением однородного уравнения $\Delta v - \varkappa^2 v = 0$ во всем пространстве и $v \rightrightarrows 0$ на бесконечности.

Пусть существует точка M_0 такая, что $v(M_0) \neq 0$. Для определенности будем считать, что $v(M_0) = A > 0$. Так как $v \rightrightarrows 0$ на бесконечности, то существует такое R, что при всех $r \geqslant R$ $v(M) < \frac{A}{2}$. Тогда точка M_0 будет лежать внутри шара радиуса R с центром в начале координат, и, следовательно, функция $v(M)$ достигает во внутренней точке этого шара положительного максимального значения. Это противоречит принципу максимума. Следовательно, $v \equiv 0$ во всем пространстве, т. е. $u_1 \equiv u_2$. ■

На основании отмеченных выше свойств потенциалов Гельмгольца легко установить, что в случае локальной непрерывно дифференцируемой в D_0 функции $f(M)$ ($D_0 = \operatorname{supp} f$) решение уравнения

$$\Delta u - \varkappa^2 u = -f(M)$$

существует и выражается формулой

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{D_0} \frac{e^{-\varkappa R_{MQ}}}{R_{MQ}} f(Q)\, dV_Q.$$

Аналогичным образом может быть доказана единственность решения внешней краевой задачи

$$\Delta u - \varkappa^2 u = -F \text{ в } D_e,$$

$$u|_S = f,$$

равномерно стремящегося к нулю на бесконечности.

Можно показать, что для решения уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$, равномерно стремящегося к нулю на бесконечности, в неограниченной области справедлива третья формула Грина

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{-\varkappa R}}{R} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-\varkappa R}}{R} \right\} dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{D_0} f \frac{e^{-\varkappa R}}{R} dV, \ M \in D_e, \qquad (5.1)$$

где D_0 — носитель функции $f(M)$, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S, направленная внутрь области D. Из формулы (5.1) следует оценка убывания функции $u(M)$ на бесконечности:

$$u(M) = O(e^{-\varkappa r}) \text{ при } r \to \infty.$$

§ 6. ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta u + k^2 u = -f$ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

При изучении уравнения $\Delta u + k^2 u = -f$ в неограниченной области ситуация более сложная. Решения (2.3), (2.4), полученные в § 2, на бесконечности убывают одинаково. Требования равномерного стремления к нулю на бесконечности явно недостаточно для выделения единственного решения. Нужны более тонкие условия. В этом параграфе будут сформулированы сначала физические условия, а затем и математические условия на бесконечности, и доказана соответствующая теорема единственности.

1. Условия излучения

Рассмотрим в неограниченном пространстве уравнение

$$\Delta u + k^2 u = -f, \qquad (6.1)$$

где f — локальная функция. В § 2 было установлено, что решение уравнения (6.1) можно рассматривать как амплитуду установившихся гармонических колебаний (волн), создаваемых локальным источником с амплитудой $f(M)$. Поскольку функция $f(M)$ локальна, то источники волн расположены в конечной области пространства, и от этих источников на бесконечность уходят волны, которые вдали от источников ведут себя как уходящие сферические волны. Поэтому физическим условием, выделяющим единственное решение уравнения $\Delta u + k^2 u = -f$, является следующее требование: найти решение, соответствующее уходящим на бесконечность волнам. Теперь нужно оформить это требование математически, т. е. сформулировать такие математические условия, которые бы выделяли единственное решение уравнения (6.1) (соответствующее уходящим на бесконечность волнам).

Чтобы сформулировать эти условия, снова рассмотрим уравнение колебаний

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\Delta U.$$

В одномерном случае оно имеет вид

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

и допускает решение в виде плоских волн:

$$U_1(x,\ t)=f_1(x-at),$$

распространяющейся в положительном направлении оси x, и

$$U_2(x,\ t)=f_2(x+at),$$

распространяющейся в отрицательном направлении оси x. Легко проверить, что каждая из них удовлетворяет «своему» соотношению:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial U_1}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial U_2}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial U_2}{\partial t}=0$$

и не удовлетворяет «чужому». Если рассматривать установившиеся гармонические волны с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$:

$$U_{1,2}(x,\ t)=u_{1,2}(x)\,e^{-i\omega t},\quad k=\frac{\omega}{a},$$

то эти соотношения принимают вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}-iku_1=0$$

для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x;

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+iku_2=0$$

для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x.

В этих формулах для нас существенным является то, что знак в этих условиях выделяет волну определенного направления.

Отметим, что при выбранной временной зависимости в виде комплекснозначной функции амплитуда установившихся колебаний также, вообще говоря, оказывается комплекснозначной функцией. В этом случае для нее часто применяется термин «комплексная амплитуда».

Рассмотрим теперь сферические волны, т. е. сферически-симметричные решения уравнения колебаний в пространстве:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right).$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rU)=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU).$$

Следовательно, для функции $V=rU$ получается одномерное уравнение колебаний, общее решение которого имеет вид

$$V=f_1(r-at)+f_2(r+at).$$

Итак, сферические волны в пространстве имеют вид

$$U_1(r,\ t)=\frac{f_1(r-at)}{r}\ \text{ и }\ U_2(r,\ t)=\frac{f_2(r+at)}{r}.$$

Первая из них — $U_1(r, t)$ — представляет волну, уходящую на бесконечность (уходящая сферическая волна), вторая — $U_1(r, t)$ — волну, приходящую из бесконечности.

По аналогии с одномерным случаем рассмотрим дифференциальные выражения

$$\frac{\partial U}{\partial r}\pm\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Для волны $U_1(r,\ t)$

$$\frac{\partial U_1}{\partial r}+\frac{1}{a}\frac{\partial U_1}{\partial t}=-\frac{1}{r^2}f_1(r-at)+\frac{1}{r}f_1'(r-at)-$$
$$-\frac{1}{r}f_1'(r-at)=-\frac{1}{r^2}f_1(r-at).$$

Функции f_1 и f_2 естественно считать ограниченными. Поэтому

$$\frac{\partial U_1}{\partial r}+\frac{1}{a}\frac{\partial U_1}{\partial t}=o\left(\frac{1}{r}\right)\ \text{ при }\ r\to\infty.$$

Аналогично

$$\frac{\partial U_2}{\partial r}-\frac{1}{a}\frac{\partial U_2}{\partial t}=o\left(\frac{1}{r}\right)\ \text{ при }\ r\to\infty.$$

Опять рассмотрим установившиеся гармонические волны с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$:

$$U_{1,2}(r,\ t)=u_{1,2}(r)\,e^{-i\omega t}.$$

Тогда получаем соотношения для расходящихся волн:

$$\frac{\partial u_1}{\partial r}-iku_1=o\left(\frac{1}{r}\right),\quad r\to\infty,$$

и для сходящихся волн:

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} + iku_2 = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty.$$

Опять видно, что условия, которым удовлетворяют сходящиеся и расходящиеся сферические волны, различны.

Поскольку физически ясно, что волна, созданная источниками, расположенными в конечной области, вдали от источников подобна уходящей сферической волне, то естественно предположить, что математическими условиями, выделяющими уходящие (расходящиеся) волны, будут условия

$$u = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty,$$
$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty. \tag{6.2}$$

Условия (6.2) называются условиями излучения, или условиями Зоммерфельда. Первое из условий (6.2) означает, что $u(M)$ при $r \to \infty$ ведет себя как сферическая волна, второе — что эта волна, уходящая на бесконечность. Далее мы покажем, что условия излучения (6.2) действительно выделяют единственное решение уравнения (6.1).

Сначала покажем, что условия (6.2) из фундаментальных решений (2.3), (2.4) выделяют только одно.

Введем сферическую систему координат. Пусть точка M имеет координаты (r, θ, φ), точка Q — $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$. Тогда

$$R_{MQ} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\beta},$$

где $\cos\beta = \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi - \varphi_1)$. Следовательно, при $r \to \infty$ и фиксированном значении r_1

$$R_{MQ} \approx r + O(1),$$
$$\frac{\partial R_{MQ}}{\partial r} = \frac{r - r_1\cos\beta}{R_{MQ}} \approx 1 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Поэтому $(R \equiv R_{MQ})$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right)\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{\partial}{\partial R}\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial R}{\partial r} - ik\frac{e^{ikR}}{R} =$$
$$= \left(ik - \frac{1}{R}\right)\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial R}{\partial r} - ik\frac{e^{ikR}}{R} =$$
$$= \left(ik - \frac{1}{R}\right)\frac{e^{ikR}}{R}\left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) - ik\frac{e^{ikR}}{R} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

независимо от положения точки Q, находящейся на конечном расстоянии r_1 от начала координат.

Следовательно, решение $\frac{1}{R}\exp(ikR)$ при фиксированном положении точки Q и $M\to\infty$ удовлетворяет условиям излучения (6.2). Легко проверить, что два других решения (2.3), (2.4) условиям (6.2) не удовлетворяют. Таким образом, условия (6.2) выделяют единственное решение из (2.3), (2.4).

Теорема 8.7. *Уравнение $\Delta u+k^2u=-f$, где f — локальная функция, в неограниченном пространстве не может иметь более одного решения, удовлетворяющего на бесконечности условиям излучения*

$$u=O\left(\frac{1}{r}\right),\quad r\to\infty,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}-iku=o\left(\frac{1}{r}\right),\quad r\to\infty.$$

Доказательство. Пусть существуют два решения u_1 и u_2 поставленной задачи. Функция $v=u_1-u_2$ является решением однородного уравнения $\Delta v+k^2v=0$, удовлетворяющим условиям излучения на бесконечности.

Пусть S_ρ — сфера радиуса ρ с центром в начале координат. Внутри шара, ограниченного сферой S_ρ, справедлива третья формула Грина

$$v(M)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_\rho}\left\{\frac{\partial v}{\partial n}\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}-v\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\right\}dS.\qquad(6.3)$$

Заметим, что взята третья формула Грина с тем фундаментальным решением, которое удовлетворяет условиям излучения на бесконечности. Оценим подынтегральную функцию в (6.3) при $\rho\to\infty$. Используя условия на бесконечности, получим

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\frac{e^{ikR}}{R}-v\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikR}}{R}\right|_{S_\rho}=\left.\frac{\partial v}{\partial r}\frac{e^{ikR}}{R}-v\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikR}}{R}\right|_{S_\rho}=$$

$$=\left.\left\{ikv+o\left(\frac{1}{r}\right)\right\}\frac{e^{ikR}}{R}-v\left\{ik\frac{e^{ikR}}{R}+o\left(\frac{1}{r}\right)\right\}\right|_{r=\rho}=$$

$$=o\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\ \text{при}\ \rho\to\infty.$$

Эта оценка показывает, что при $\rho\to\infty$ интеграл по S_ρ в (6.3) стремится к нулю. Следовательно, $v(M)\equiv0$, т. е. $u_1\equiv u_2$. ■

Заметим, что условие $u=O\left(\frac{1}{r}\right)$ при $r\to\infty$ является следствием второго условия $\frac{\partial u}{\partial r}-iku=o\left(\frac{1}{r}\right)$. На доказательстве этого факта мы не останавливаемся. Это условие нами сохранено для упрощения доказательства теоремы единственности.

Рассуждениями, аналогичными тем, которые использовались при доказательстве этой теоремы, можно показать, что для функций, удовлетворяющих условиям излучения на бесконечности, справедливы формулы Грина во внешней неограниченной области.

Как мы установили, фундаментальное решение

$$\frac{e^{ikR}}{R}$$

удовлетворяет условиям излучения. Поэтому тем же условиям на бесконечности будет удовлетворять и объемный потенциал

$$\int_T f(Q) \frac{e^{ikR_{MQ}}}{R_{MQ}} dV_Q,$$

построенный на его основе. Отсюда сразу следует, что при соответствующих ограничениях на $f(Q)$ функция

$$u(M) = \int_T f(Q) \frac{e^{ikR_{MQ}}}{R_{MQ}} dV$$

является единственным решением уравнения $\Delta u + k^2 u = -f$, удовлетворяющим условиям излучения на бесконечности.

С помощью установленной формулы Грина для уравнения Гельмгольца во внешней неограниченной области могут быть доказаны и теоремы единственности решений внешних краевых задач для этого уравнения, удовлетворяющих условиям излучения на бесконечности. Однако эти доказательства требуют привлечения дополнительных аналитических свойств решений однородного уравнения Гельмгольца и ряда вспомогательных рассмотрений, которые здесь приводить не будем.

Сделаем еще одно важное замечание об условиях излучения. Условие

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty \tag{6.4}$$

согласовано с выбранной временной зависимостью $e^{-i\omega t}$ и выделяет уходящую волну только при этой временной зависимости. Если временная зависимость выбрана в виде $e^{i\omega t}$, то условие, выделяющее уходящую волну, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty. \tag{6.5}$$

Это означает, что если временная гармоническая зависимость известна заранее, то в соответствии с ней выбираются условия на бесконечности.

Если временная зависимость заранее не известна, то на бесконечности можно поставить как условие (6.4), так и условие (6.5). И то и другое условия будут выделять единственное решение уравнения $\Delta u+k^2u=-f$, но эти решения будут различны. А при физической интерпретации решения следует учитывать нужную временную зависимость, которая соответствует расходящимся волнам.

В двумерном случае условия излучения имеют вид

$$\begin{gathered} u=O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r\to\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial r}-iku=o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r\to\infty, \end{gathered} \tag{6.6}$$

при временной зависимости $e^{-i\omega t}$ или

$$\begin{gathered} u=O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r\to\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial r}+iku=o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r\to\infty, \end{gathered} \tag{6.7}$$

при временной зависимости $e^{i\omega t}$. Первое условие в (6.6) и (6.7) также является следствием второго. Доказательство теорем единственности проводится аналогично.

2. Принцип предельного поглощения

Условия излучения представляют собой аналитические условия, выделяющие единственное решение. Они удобны в том случае, когда уравнение решается в неограниченном пространстве либо когда граничная поверхность расположена в конечной области. Если граничная поверхность уходит на бесконечность, то может оказаться, что условия излучения в сформулированном виде неприменимы. В этом случае нужно либо сформулировать условия излучения в ином виде, применительно к конкретной задаче, либо пользоваться некоторыми другими принципами выделения единственного решения. Таких принципов несколько. Они состоят не в формулировке дополнительных условий, которому должно удовлетворять решение, а в указании алгоритма, который позволяет выделить нужное решение.

Рассмотрим принцип предельного поглощения. Физические основы принципа предельного поглощения очень наглядны. Ранее было установлено, что решение уравнения

$$\Delta u+k^2u=-f$$

можно рассматривать как амплитуду установившихся гармонических колебаний. Будем исходить из этой же модели, но считать, что колебания (или волны) распространяются в среде с поглощением. Распространение волн в среде с поглощением описывается уравнением

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial U}{\partial t}=\Delta U+F(M,\ t), \tag{6.8}$$

в котором коэффициент $\beta>0$ характеризует поглощение среды. Предполагая, что правая часть (6.8) имеет вид

$$F(M,\ t)=f(M)\,e^{-i\omega t},$$

будем искать решения (6.8) с той же гармонической зависимостью от времени:

$$U(M,\ t)=u(M)\,e^{-i\omega t}.$$

Тогда для комплексной амплитуды установившихся гармонических колебаний в среде с поглощением получим уравнение

$$\Delta u+(k^2+i\omega\beta)\,u=-f,\ \ k=\frac{\omega}{a}.$$

Обозначим $q^2=k^2+i\omega\beta$. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$\Delta u+q^2u=-f. \qquad (6.9)$$

Таким образом, амплитуда установившихся гармонических колебаний в среде с поглощением описывается уравнением Гельмгольца с комплексным коэффициентом q. Пусть $q=q_0+iq_1$. Тогда

$$q_0^2+2iq_0q_1-q_1^2=k^2+i\omega\beta.$$

Отсюда находим

$$q=q_0+iq_1=\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{k^4+\omega^2\beta^2}+k^2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{k^4+\omega^2\beta^2}-k^2}{2}}\right\}. \qquad (6.10)$$

Очевидно, что

$$\lim_{\beta\to 0} q_0=\pm k,\quad \lim_{\beta\to 0} q_1=0.$$

Уравнение (6.9) имеет два решения:

$$u_1=\int_T f\,\frac{e^{iq_0R-q_1R}}{4\pi R}\,dV \ \text{ и } \ u_2=\int_T f\,\frac{e^{-iq_0R+q_1R}}{4\pi R}\,dV,$$

причем при $\beta>0$ ($q_1\neq 0$) одно из них экспоненциально стремится к нулю на бесконечности, а другое — неограниченно возрастает. Знак в выражении (6.10) для q выберем так, что $q_1=\operatorname{Im} q>0$. Тогда решение $u_2(M)$ неограничено на бесконечности, а для ограниченного решения $u_1(M)$ имеем

$$\lim_{\beta\to 0} u_1(M)=\frac{1}{4\pi}\int_T f(Q)\,\frac{e^{ikR_{MQ}}}{R_{MQ}}\,dV_Q,$$

т. е. при $\beta\to 0$ получается решение уравнения $\Delta u+k^2u=-f$, соответствующее уходящей на бесконечность волне.

Таким образом, алгоритм выделения единственного решения уравнения $\Delta u+k^2u=-f$, соответствующего расходящимся волнам, можно сформулировать как требование, чтобы функция $u(M)$ являлась пределом ограниченного решения уравнения

(6.9) с комплексным коэффициентом q при стремлении к нулю поглощения β, при этом знак $\operatorname{Im} q$ должен быть согласован с выбранной временной зависимостью. Такая процедура построения решения носит название «принцип предельного поглощения». Принцип предельного поглощения основан на том физическом факте, что при отсутствии источников на бесконечности при наличии в среде даже малого поглощения могут существовать только уходящие волны.

Принцип предельного поглощения имеет более широкую область применимости, чем условия излучения в форме Зоммерфельда.

В двумерном случае этот принцип формулируется точно так же.

В заключение приведем доказательство теоремы единственности решения внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца при наличии поглощения во внешней среде.

Теорема 8.8. *Внешняя краевая задача*

$$\Delta u + q^2 u = -f \text{ в } D_e, \quad q^2 = k^2 + i\omega\beta, \quad \beta > 0,$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u |_S = \varphi(P), \quad P \in S,$$

при $\alpha \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \gamma \leqslant 0$, $\alpha + |\gamma| \neq 0$ *может иметь только одно решение, экспоненциально стремящееся к нулю на бесконечности.*

Доказательство. Достаточно доказать, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. Обозначим решение этой однородной задачи по-прежнему через $u(M)$. Очевидно, справедливо равенство

$$\int_{D_e} (\Delta u + q^2 u)\, u^*\, dV = 0,$$

которое в силу условий на бесконечности, используя формулу Грина и граничные условия, можно переписать в виде

$$\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} u^*\, dS - \int_{D_e} |\nabla u|^2\, dV + q^2 \int_{D_e} |u|^2\, dV = 0.$$

Беря мнимую часть полученного равенства, имеем

$$\operatorname{Im} \oint_S \frac{\partial u}{\partial n} u^*\, dS + \omega\beta \int_{D_e} |u|^2\, dV = 0. \tag{6.11}$$

В случае первой или второй краевых задач поверхностный интеграл равен нулю, а в случае третьей краевой задачи в силу граничного условия

$$\operatorname{Im} \oint_S \frac{\partial u}{\partial n} u^*\, dS = -\oint_S \frac{\operatorname{Im} \gamma(P)}{\alpha(P)} |u|^2\, dS \geqslant 0,$$

что вместе с (6.11) дает

$$u(M) \equiv 0 \text{ в } D_e.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
2. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962.
5. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.
6. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
7. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
8. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. II. М.: Наука, 1967.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. 1. М.: Наука, 1974.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. 2. М.: Наука, 1974.
11. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

ДОПОЛНЕНИЕ

I. РАЗЛИЧНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Пусть x, y, z — декартовы координаты некоторой точки, а x_1, x_2, x_3 — криволинейные ортогональные координаты этой точки. Квадрат элемента длины выражается формулой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

где

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

— метрические коэффициенты, или коэффициенты Ламе. Ортогональная координатная система полностью характеризуется тремя метрическими коэффициентами h_1, h_2, h_3.

Приведем общее выражение для операторов grad, div, rot и оператора Лапласа Δ в ортогональной криволинейной системе координат:

$$\operatorname{grad} u = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \mathbf{i}_j,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right\},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_2} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right\},$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — единичные базисные векторы, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ — произвольный вектор, u — скаляр, $A_s = A_s(x_1, x_2, x_3)$, $s = 1, 2, 3$, $u = u(x_1, x_2, x_3)$.

Прямоугольные координаты

$$x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ h_1=1,\ h_2=1,\ h_3=1,$$

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},\quad \operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — направляющие единичные векторы осей x, y, z.

Цилиндрические координаты

$$x_1=r,\ x_2=\varphi,\ x_3=z$$

связаны с прямоугольными координатами уравнениями

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z.$$

Координатные поверхности: $r=\text{const}$ — цилиндры, $\varphi=$ $=\text{const}$ — плоскости, $z=\text{const}$ — плоскости.

Метрические коэффициенты равны

$$h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=1,$$

так что

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{i}_1+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{i}_2+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{i}_3,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_1)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_2}{\partial \varphi}+\frac{\partial A_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}_1+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial r}\right)\mathbf{i}_2+$$

$$+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_2)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi}\right]\mathbf{i}_3,$$

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Сферические координаты

$$x_1=r,\ x_2=\theta,\ x_3=\varphi$$

связаны с прямоугольными координатами формулами

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta.$$

Координатные поверхности: $r=\text{const}$ — концентрические сферы, $\theta=\text{const}$ — конусы, $\varphi=\text{const}$ — плоскости.

Метрические коэффициенты равны

$$h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=r\sin\theta,$$

так что

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{i}_1+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\mathbf{i}_2+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathbf{i}_3,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_1)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3)-\frac{\partial A_2}{\partial\varphi}\right]\mathbf{i}_1+$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right]\mathbf{i}_2+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2)-\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]\mathbf{i}_3,$$

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}u,$$

где

$$\Delta_{\theta\varphi}u=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

— угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат.

II. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Обозначения: $\mathbf{a}$ — векторная функция, u — скалярная функция.

$$[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}]=(\mathbf{ac})\,\mathbf{b}-(\mathbf{bc})\,\mathbf{a},$$

$$[\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]]=\mathbf{b}\,(\mathbf{ac})-\mathbf{c}\,(\mathbf{ab}),$$

$$\operatorname{grad}(uv)=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u,$$

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a})=\mathbf{a}\operatorname{grad}u+u\operatorname{div}\mathbf{a},$$

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a})=[\mathbf{a}\operatorname{grad}u]+u\operatorname{rot}\mathbf{a},$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}]=\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}-\nabla^2\mathbf{a},$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{ab})=\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}+\mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}+[\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}]+[\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}],$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{ab}]=\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}-\mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}+(\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a}-(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b},$$

где

$$(\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a}=b_x\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}+b_y\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}+b_z\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}.$$

Учебное издание

СВЕШНИКОВ Алексей Георгиевич,
БОГОЛЮБОВ Александр Николаевич,
КРАВЦОВ Владимир Владимирович

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Зав. редакцией Л. А. Николова
Редактор Р. А. Бунатян
Художественный редактор Ю. М. Добрянская
Технические редакторы Т. А. Корнеева,
Г. Д. Колоскова
Корректоры И. А. Мушникова, В. В. Конкина

ИБ № 6210

ЛР 040414 от 27.03.92
Сдано в набор 18.11.92
Подписано в печать 30.08.93
Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2.
Гарнитура литературная. Высокая печать.
Усл. печ. л. 22,0 Уч.-изд. л. 21,38
Тираж 3000 экз. Заказ № 361. Изд. № 2426

Ордена «Знак Почета» издательство
Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы