

ВОЕННО-ТОПОГРАФИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ГЕНЕРАЛЬНОГО ШТАБА ВООРУЖЕННЫХ СИЛ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**«ПАРАМЕТРЫ ЗЕМЛИ 1990 ГОДА»
(ПЗ-90.11)**

Справочный документ

Москва – 2014 г.

Справочный документ «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11) содержит геометрические и физические числовые геодезические параметры, характеристики фундаментальных геодезических постоянных, общеземного эллипсоида, геоцентрической системы координат и гравитационного поля Земли, а также сведения о форме их представления и рекомендации по применению.

Представленные данные отвечают современным требованиям практики и предназначены для геодезистов, специалистов по орбитальным расчетам, для разработчиков и пользователей навигационных систем.

Справочный документ разработан в Научно-исследовательском центре топогеодезического и навигационного обеспечения «27 ЦНИИ» Минобороны России.

Содержание

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	4
ПРЕДИСЛОВИЕ	5
1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	6
2 ОСНОВНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ СИСТЕМЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМЛИ	7
3 СИСТЕМЫ КООРДИНАТ	9
3.1 Общеземные системы координат	9
3.2 Небесная система координат	10
3.3 Референсные геодезические системы координат	11
3.3.1 Система координат 1942 года	11
3.3.2 Система координат 1995 года	12
3.3.3 Геодезическая система координат ГСК-2011	12
3.4 Системы высот	12
3.5 Преобразования координат	13
4 ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ	18
4.1 Нормальное гравитационное поле Земли	19
4.2 Аномальное гравитационное поле Земли	23
4.2.1 Представление аномального гравитационного поля Земли рядом сферических функций	24
4.2.2 Представление аномального гравитационного поля Земли системой точечных масс	25
4.3 Цифровые модели трансформант аномального гравитационного поля Земли	27
Приложение 1 Преобразование пространственных прямоугольных координат в геодезические координаты	29
Приложение 2 Положение пунктов КГС, IGS, DORIS на территории России	31
Приложение 3 Формулы связи общеземной и инерциальной систем координат	32
Приложение 4 Элементы трансформирования геодезических систем координат ..	35
Приложение 5 Характеристики модели аномального гравитационного поля Земли в виде ряда сферических функций до 70-й степени (ПЗ–2002/70с)	39
Приложение 6 Характеристики модели аномального гравитационного поля Земли в виде ряда сферических функций до 360-й степени (ПЗ-2002/360)	41
Приложение 7 Модель аномального гравитационного поля Земли ТМ-60	46
Приложение 8 Локальная модель аномального гравитационного поля Земли в виде потенциала притяжения точечных масс	48
Приложение 9 Графический аналог цифровой модели аномалий силы тяжести	50
Приложение 10 Графический аналог цифровой модели высот квазигеоида	51
Приложение 11 Графический аналог цифровой модели уклонов отвесных линий	52

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

- АГПЗ - аномальное гравитационное поле Земли
- АСТ - аномалия силы тяжести
- ВКГ - высота квазигеоида
- ГЛОНАСС - глобальная навигационная спутниковая система
- ГПЗ - гравитационное поле Земли
- КА - космический аппарат
- КГК - космический геодезический комплекс
- КГС - космическая геодезическая сеть
- ЛМ АГПЗ - локальная модель АГПЗ
- ОЗЭ - общеземной эллипсоид
- ПЗ-90 - «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90)
- ПЗ-90.02 - «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.02)
- ПЗ-90.11 - «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11)
- РАН - Российская Академия наук
- СКП - средняя квадратическая погрешность
- ТМ - точечная масса
- ТС ВС РФ - Топографическая служба Вооруженных Сил Российской Федерации
- УОЛ - уклонение отвесной линии
- ЦМ - цифровая модель
- ВИН - Bureau International de l'Heure (Международное бюро времени)
- FK - Fundamental Katalog (Фундаментальный каталог)
- GPS - Global Positioning Systems (Глобальная система местоопределения)
- IERS - International Earth Rotation and Reference Systems Service (Международная служба вращения Земли и опорных систем координат)
- IGS - International GNSS Service (Международная служба глобальных навигационных спутниковых систем, Международная служба ГНСС)
- ITRF - International Terrestrial Reference Frames (Международная земная опорная сеть)
- ICRS - International Celestial Reference System (Международная небесная система координат)
- ICRF - International Celestial Reference Frames (Международная небесная система отсчета)
- ITRS - International Terrestrial Reference System (Международная земная опорная система)
- WGS - World Geodetic System (Всемирная геодезическая система)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2000 г. № 568 геоцентрической системе координат, входящей в систему «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90), придан статус государственной при решении навигационных задач и задач геодезического обеспечения орбитальных полетов. Постоянно растущие требования к точности навигационного обеспечения, широкое использование навигационной и геодезической аппаратуры потребителя ГЛОНАСС/GPS привели к необходимости регулярного повышения точности определения параметров, характеризующих форму, размеры Земли и ее гравитационное поле, модернизации всей системы геодезических параметров Земли.

Первая модернизация геоцентрической системы координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90) была выполнена в 2002 году (ПЗ-90.02) с использованием большого объема измерительной информации КГК ГЕО-ИК, полученной после 1990 года, не вошедшей в обработку при выводе ПЗ-90, и высокоточных измерений на пунктах КГС, полученных с использованием аппаратуры ГЛОНАСС/GPS. Достигнуто существенное повышение точности установления государственной геоцентрической системы координат по отношению к системе координат ПЗ-90, точности геодезической привязки измерительных средств наземного комплекса управления ГЛОНАСС, расчета эфемерид КА ГЛОНАСС.

Распоряжением Правительства Российской Федерации от 20 июня 2007 г. № 797-р уточненная версия государственной геоцентрической системы координат, входящая в систему «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.02), введена в действие в целях повышения тактико-технических характеристик глобальной навигационной спутниковой системы ГЛОНАСС, улучшения геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач.

Уточнение государственной геоцентрической системы координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.02) выполнено в 2011 году (ПЗ-90.11) с использованием большого объема высокоточных измерений ГЛОНАСС/GPS с пунктов КГС и ряда пунктов сети IGS. Постановлением Правительства Российской Федерации от 28 декабря 2012 г. № 1463 общеземная геоцентрическая система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11) установлена в качестве государственной системы координат для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач.

Геометрические и физические числовые геодезические параметры в отношении общеземной геоцентрической системы координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11) утверждены приказом Министра обороны Российской Федерации от 15 января 2014 г. № 11.

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

«Параметры Земли 1990 года» и их версия ПЗ-90.11 являются системой геодезических параметров, включающей фундаментальные геодезические постоянные, параметры общеземного эллипсоида, параметры гравитационного поля Земли, геоцентрическую систему координат и параметры ее связи с другими системами координат.

Значения геодезических параметров определялись из совместной обработки разнородных спутниковых и наземных данных. Методологической основой обработки измерений служил спутниковый динамический метод. Уравнительные вычисления выполнялись по обобщенному методу наименьших квадратов. Перечень и числовые характеристики параметров общеземного эллипсоида и моделей гравитационного поля Земли в ПЗ-90.11 не изменялись. Уточнению подлежала только геоцентрическая система координат, входящая в систему «Параметры Земли 1990 года».

При уточнении геоцентрической системы координат максимально использованы данные об установлении общеземных систем координат, полученные отечественными и международными научными организациями из многолетних наблюдений искусственных спутников Земли и космических объектов. В ПЗ-90.11 ориентировка координатных осей, линейный масштаб и положение начала системы координат обеспечили сходимость с аналогичными параметрами Международной земной опорной сети ITRF на сантиметровом уровне.

Для повышения точности взаимного положения пунктов КГС и точности согласования ее с ITRF использован представительный ряд наблюдений спутников GPS и ГЛОНАСС, накопленный после вывода ПЗ-90.02. Новым в технологии уточнения геоцентрического положения сети пунктов, закрепляющих систему координат ПЗ-90.11, было включение в обработку рядов измерительной и сопутствующей информации системы DORIS 2002, 2008 и 2010 г.г., полученных на совмещенных пунктах этой системы и сети IGS.

Дополнением к справочному документу являются параметры моделей ГПЗ, каталог координат пунктов КГС в системе ПЗ-90.11 и другая информация, включая координаты пунктов IGS в системе ПЗ-90.11. Эти данные могут быть получены установленным порядком.

2 ОСНОВНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ СИСТЕМЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМЛИ

Состав геодезических параметров, входящих в ПЗ-90.11, определен с учетом практических потребностей геодезии, геофизики, навигации и баллистики в знании фигуры, размеров Земли и ее гравитационного поля. Значения универсальных физических постоянных, использованных при выводе геодезических параметров, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Постоянная	Обозначение	Единица измерения	Значение
Скорость света в вакууме	c	м/с	299 792 458
Гравитационная постоянная	f	$\text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$	$6,672\ 59\cdot 10^{-11}$

Геодезическая отсчетная система базируется на теории уровенного эллипсоида вращения, которая однозначно определяет фигуру общеземного эллипсоида и нормальное гравитационное поле посредством четырех независимых параметров fM , ω , a и α – фундаментальных геодезических постоянных. Их значения приведены в таблице 2.

Таблица 2

Параметр	Обозначение	Единица измерения	Значение
Геоцентрическая гравитационная постоянная (с учетом атмосферы)	fM	$\text{м}^3/\text{с}^2$	$398\ 600,4418\cdot 10^{+9}$
Угловая скорость вращения Земли	ω	рад/с	$7,292\ 115\cdot 10^{-5}$
Большая полуось общеземного эллипсоида	a	м	6 378 136
Сжатие общеземного эллипсоида	α	–	1/298,257 84

Все остальные геодезические постоянные, характеризующие физические и геометрические особенности Земли, представленной в виде уровенного эллипсоида вращения (нормальной Земли), связаны с этими параметрами строгими математическими зависимостями.

Параметры a и α , определяющие форму общеземного эллипсоида, сохранены неизменными по отношению к ПЗ-90 и ПЗ-90.02. В некоторых приложениях используется значение геоцентрической гравитационной постоянной fM' , полученной без учета массы атмосферы Земли. Такое значение определяется из соотношения

$$fM' = fM - fM_a, \quad (2.1)$$

где fM_a - составляющая геоцентрической гравитационной постоянной, обусловленная наличием атмосферы,

$$fM_a = 0,3500 \cdot 10^{+9} \text{ м}^3/\text{с}^2.$$

В таблице 3 приведены геодезические постоянные, характеризующие геометрические и физические особенности Земли в целом, вычисленные с использованием значений фундаментальных геодезических постоянных, заданных в таблице 2.

Таблица 3

Постоянная	Обозначение	Единица измерения	Значение
Геометрические постоянные			
Малая полуось	b	м	6 356 751,3618
Квадрат эксцентриситета ОЗЭ	e^2	-	0,006 694 3662
Квадрат второго эксцентриситета ОЗЭ	e'^2	-	0,006 739 4828
Физические постоянные			
Нормальный потенциал на поверхности ОЗЭ	U_0	$\text{м}^2/\text{с}^2$	62 636 861,4
Ускорение нормальной силы тяжести на экваторе ОЗЭ	γ_a	мГал	978 032,84
Ускорение нормальной силы тяжести на полюсе ОЗЭ	γ_b	мГал	983 218,80
Коэффициенты в формуле ускорения нормальной силы тяжести	β		0,005 3024
	β_1		0,000 0058
Поправка в ускорение нормальной силы тяжести за притяжение атмосферы на уровне моря	$\delta\gamma_a$	мГал	- 0,87
Коэффициент второй зональной гармоники нормального потенциала	J_2^0	-	$1\,082,625\,75 \cdot 10^{-6}$
Коэффициент четвертой зональной гармоники нормального потенциала	J_4^0	-	$-2,370\,89 \cdot 10^{-6}$
Коэффициент шестой зональной гармоники нормального потенциала	J_6^0	-	$6,08 \cdot 10^{-9}$
Коэффициент восьмой зональной гармоники нормального потенциала	J_8^0	-	$-1,40 \cdot 10^{-11}$

3 СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В геодезических приложениях применяются общеземные (глобальные) и референсные (региональные) системы координат, а также небесная система координат. К референсным системам координат относятся национальные геодезические системы координат.

3.1 Общеземные системы координат

По определению общеземная система координат является геоцентрической пространственной системой координат с началом в центре масс Земли (рисунок 1). Ось Z направлена к условному земному полюсу (международному условному началу), как определено рекомендациями Международной службы вращения Земли (IERS), ось X – в точку пересечения плоскости экватора и начального меридиана, установленного IERS и Международным бюро времени (БИВ), ось Y дополняет систему до правой. Общеземная система координат вращается вместе с Землей.

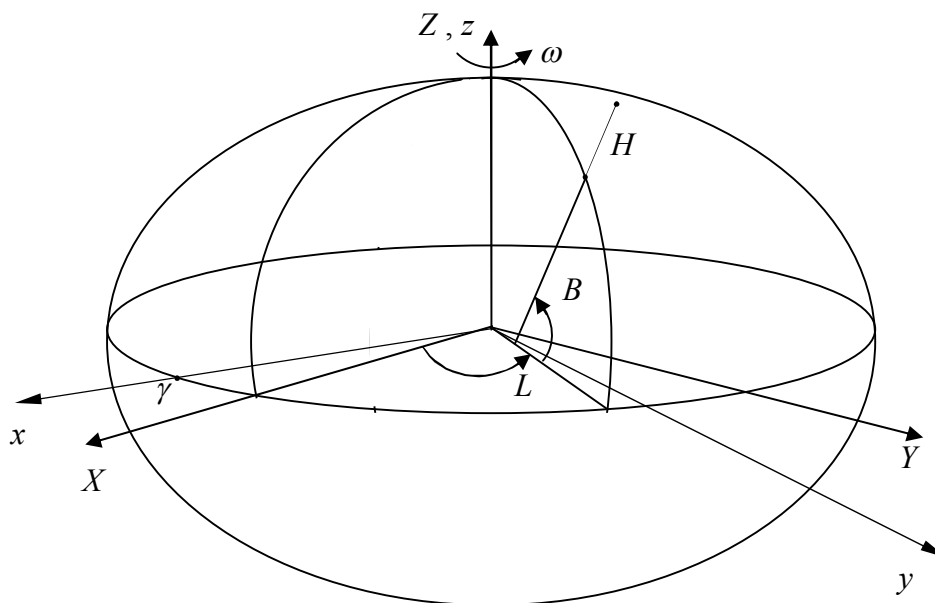


Рисунок 1

В геоцентрической системе координат положение точки в пространстве определяется значениями координат X, Y, Z . В геодезических приложениях для этой же цели используются геодезические координаты B, L, H , относящиеся к общеземному эллипсоиду – эллипсоиду вращения, геометрический центр которого совпадает с центром общеземной системы координат (рисунок 1). Ось Z является осью вращения эллипсоида.

Геодезическая широта B определяется как угол между нормалью к эллипсоиду, проходящей через заданную точку, и плоскостью экватора; геодезическая долгота L – двугранный угол между плоскостью начального меридиана и плоскостью меридиана, проходящего через заданную точку

(положительное направление счета долгот от начального меридиана к востоку, от 0° до 360°); геодезическая высота H – отрезок нормали к общеземному эллипсоиду от его поверхности до заданной точки. Математическая связь геодезических и пространственных прямоугольных координат устанавливается соотношениями, приведенными в приложении 1.

Геоцентрическая система координат, входящая в состав ПЗ-90.11, является практической реализацией общеземной системы координат на эпоху 2010.0. Она закреплена глобально распределенными пунктами КГС, координаты и скорости движения которых определены из обработки спутниковых измерений. Точность установления геоцентрической системы координат ПЗ-90.11 по отношению к центру масс Земли характеризуется средней квадратической погрешностью на уровне 0,05 м, а для направления осей системы координат – на уровне 0,001". СКП взаимного положения пунктов составляет 0,005 – 0,01 м. Точность определения масштаба системы координат соответствует современному уровню знаний о значениях скорости света, геоцентрической гравитационной постоянной, а также точности лазерных измерений, которая характеризуется СКП 0,001 – 0,005 м.

Система координат ПЗ-90.11 распространена на ряд пунктов сети IGS. Положение пунктов КГС и IGS, расположенных на территории России, в системе координат ПЗ-90.11 на эпоху 2010.0 приведено в приложении 2.

Аналогами геоцентрической системы координат ПЗ-90 служат Всемирная геодезическая система WGS-84 (США) и Международная земная опорная система ITRS, поддерживаемая и регулярно обновляемая Международной службой вращения Земли IERS. Практическим воплощением ITRS является Международная земная опорная сеть ITRF.

При установлении систем координат ПЗ-90, WGS-84 и ITRS использовались одни и те же теоретические положения. Однако при практической реализации этих положений между указанными системами координат обнаруживаются небольшие расхождения, которые могут быть объяснены различием в составе и объеме использованной измерительной информации и методическими различиями. Для оценки величины этих расхождений используется формула (3.2).

3.2 Небесная система координат

Небесная (инерциальная) система координат закрепляется координатами опорных звезд. Согласно решениям Международного астрономического союза (МАС) в качестве опорной небесной системы (ICRS) приняты каталоги экваториальных координат внегалактических радиоисточников. ICRS – это эквивалент инерциальной системы координат ньютоновской астрометрии. Практической реализацией ICRS является Международная небесная система отсчета (ICRF). В настоящее время для вычисления эфемерид звезд используются фундаментальные каталоги FK6 и HIPPARCOS, привязанные к системе ICRS, в которой положения опорных звезд заданы в средней небесной

системе координат на стандартную эпоху 2000.0 (JD2000.0). Связь общеземной и небесной систем координат устанавливается соотношениями, приведенными в приложении 3.

Начало небесной системы координат совпадает с центром общеземной системы координат (рисунок 1), ось z направлена в северный полюс мира, ось x расположена в плоскости экватора и направлена в точку весеннего равноденствия γ , ось y дополняет систему до правой. Полюс мира и точка весеннего равноденствия не сохраняют неизменными свое положение в пространстве с течением времени, поэтому для фиксирования инерциальной системы координат принимают стандартную эпоху 2000.0.

Небесная система координат используется при орбитальных и баллистических расчетах. Для перехода к общеземной системе координат используется формула (ПЗ.1).

3.3 Референционные геодезические системы координат

Отсчетной поверхностью в геодезических референчных системах координат, так же как и в общеземной системе координат, является эллипсоид вращения. Отличие заключается в том, что положение начала счета координат в этих системах и ориентировка их осей могут не совпадать.

При пересчете геодезических координат B, L, H в пространственные прямоугольные X, Y, Z в референчной системе используются те же соотношения, что и в общеземной геодезической системе координат (приложение 1). Связь пространственных прямоугольных координат X, Y, Z в референчной и общеземной системах координат устанавливается с использованием формулы (3.2).

С 1946 года в России действует референчная система координат 1942 года (СК-42). Постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2000 г. № 568 с 1 июля 2002 г. введена геодезическая референчная система координат 1995 года (СК-95). Референчные системы координат СК-42 и СК-95 закреплены пунктами государственной геодезической сети. Постановлением Правительства Российской Федерации от 28 декабря 2012 г. № 1463 установлена геодезическая система координат ГСК-2011 в качестве государственной для использования при осуществлении геодезических и картографических работ.

3.3.1 Система координат 1942 года

За отсчетную поверхность в системе координат 1942 года принят эллипсоид Красовского с большой полуосью $a_{кр} = 6378\,245$ м и сжатием $\alpha_{кр} = 1/298,3$. Центр эллипсоида Красовского совпадает с центром референчной системы координат. На эпоху создания СК-42 это обеспечивалось

реализацией двух условий: параллельность оси Z референционной системы координат средней оси вращения Земли и параллельность плоскостей начальных астрономического и геодезического меридианов.

Из-за погрешностей измерений и ограниченных возможностей по их обработке (уравниванию) эти условия в то время не могли быть надежно проконтролированы, что привело к развороту осей референционной системы координат, который был впервые достоверно оценен в начале 80-х годов с использованием спутниковых данных.

3.3.2 Система координат 1995 года

Отсчетной поверхностью в системе координат 1995 года, так же как и в СК-42, является эллипсоид Красовского. Оси системы координат СК-95 установлены под условием параллельности осям общеземной системы координат ПЗ-90.

3.3.3 Геодезическая система координат ГСК-2011

Геодезическая система координат ГСК-2011 является практической реализацией земной пространственной системой координат с началом в центре масс Земли. Ось Z направлена к Условному земному полюсу, как определено рекомендациями Международной службы вращения Земли IERS, ось X – в точку пересечения плоскости экватора и начального меридиана, установленного IERS и ВИН, ось Y дополняет систему до правой. Начало системы координат служит в качестве геометрического центра общеземного эллипсоида с параметрами $a = 6378\,136,5$ м и $\alpha = 1/298,256\,4151$. Система координат ГСК-2011 закреплена пунктами ФАГС (порядка 50 пунктов) на эпоху 2011.0.

3.4 Системы высот

При установлении системы высот определяющим является выбор поверхности относимости и исходного пункта, высота которого принимается равной нулю. Поверхностями относимости являются геоид и квазигеоид. От поверхности геоида отсчитываются ортометрические высоты, от поверхности квазигеоида – нормальные высоты. На практике используются также геодезические высоты, которые отсчитываются от поверхности эллипсоида (общеземного или референцного).

Геоид – фигура Земли, образованная уровенной (эквипотенциальной) поверхностью потенциала силы тяжести, совпадающей с поверхностью Мирового океана в состоянии полного покоя и равновесия и продолженной под материками. Точное определение положения геоида относительно выбранного эллипсоида из наземных измерений невозможно. Математически строго по наземным гравиметрическим данным может быть определен квазигеоид -

поверхность, близкая к геоиду. Несовпадение между геоидом и квазигеоидом составляет в среднем 2 – 5 см в равнинной местности и может достигать 2 м в высокогорных районах.

В Российской Федерации принята Балтийская система нормальных высот. В этой системе нормальные высоты передаются от исходной точки (нуль-пункт Кронштадтского футштока) на пункты высотной (нивелирной) сети методом геометрического нивелирования. В настоящее время действует Балтийская система высот 1977 года. Связь между геодезической H и нормальной H^{γ} высотами устанавливается соотношением:

$$H = H^{\gamma} + \zeta, \quad (3.1)$$

где ζ - высота квазигеоида над принятым эллипсоидом.

Нормальные высоты не зависят от выбора эллипсоида относимости. Геодезические высоты и высоты квазигеоида зависят от выбора эллипсоида относимости. Нормальные высоты отображаются на топографических картах и приводятся в каталогах координат геодезических пунктов.

3.5 Преобразования координат

Преобразование пространственных прямоугольных координат.

Переход из системы А в систему Б на практике выполняется по формуле

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B = (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & +\omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & +\omega_x \\ +\omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_A + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ - линейные элементы трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б, м;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - угловые элементы трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б, рад;

m - масштабный элемент трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б.

При обратном преобразовании пространственных прямоугольных координат элементы трансформирования имеют те же значения, но с обратным знаком. Значения элементов трансформирования для наиболее распространенных систем координат приведены в приложении 4.

Преобразование геодезических координат.

Переход из системы А в систему Б выполняется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} B_B &= B_A + \Delta B \\ L_B &= L_A + \Delta L \\ H_B &= H_A + \Delta H \end{aligned} \right\}, \quad (3.3)$$

где B, L, H - геодезические широта, долгота и высота точки;
 $\Delta B, \Delta L, \Delta H$ - поправки к геодезическим координатам точки.

Поправки к геодезическим координатам определяют по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= \frac{\rho''}{(M+H)} \left[\frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \Delta a + \left(\frac{N^2}{a^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - \right. \\ &\quad \left. - (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \sin B + \Delta Z \cos B \right] - \\ &\quad - \omega_x \sin L (1 + e^2 \cos 2B) + \omega_y \cos L (1 + e^2 \cos 2B) - \rho'' m e^2 \sin B \cos B \\ \Delta L &= \frac{\rho''}{(N+H) \cos B} (-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L) + \operatorname{tg} B (1 - e^2) (\omega_x \cos L + \\ &\quad + \omega_y \sin L) - \omega_z \\ \Delta H &= -\frac{a}{N} \Delta a + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} + (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \cos B + \Delta Z \sin B - \\ &\quad - N e^2 \sin B \cos B \left(\frac{\omega_x}{\rho''} \sin L - \frac{\omega_y}{\rho''} \cos L \right) + \left(\frac{a^2}{N} + H \right) m \end{aligned} \right\}, \quad (3.4)$$

где $\Delta B, \Delta L, \Delta H$ - поправки к геодезической широте, геодезической долготе, угл. с и к высоте, м;

B, L, H - геодезические широта, долгота, рад и высота, м;

$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ - линейные элементы трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б, м;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - угловые элементы трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б, угл. с;

m - масштабный элемент трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б;

M - радиус кривизны меридиана $M = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}$;

N - радиус кривизны первого вертикала $N = a(1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}}$;

$\rho'' = 206\,264,80625$ угл. с.

В формулах (3.4) значения a и e^2 принимаются равными

$$a = \frac{a_A + a_B}{2}, \quad e^2 = \frac{e_A^2 + e_B^2}{2},$$

а Δa и Δe^2 - равными

$$\Delta a = a_B - a_A, \quad \Delta e^2 = e_B^2 - e_A^2,$$

где a_A, a_B - большие полуоси эллипсоидов в системах координат A и B соответственно;
 e_A^2, e_B^2 - квадраты эксцентриситетов эллипсоидов в системах координат A и B соответственно.

При обратном переходе из системы B в систему A в формуле (3.3) используют значения геодезических координат в системе B , а знак поправок $\Delta B, \Delta L, \Delta H$ меняют на противоположный.

Формулы (3.4) обеспечивают вычисление поправок к геодезическим координатам с погрешностью, не превышающей 0,3 м (в линейной мере), а для достижения погрешности не более 0,001 м выполняют вторую итерацию, то есть учитывают значения поправок к геодезическим координатам по формулам (3.3) и повторно выполняют вычисления по формулам (3.4). Во второй итерации используют значения:

$$B = \frac{B_A + (B_A + \Delta B)}{2},$$

$$L = \frac{L_A + (L_A + \Delta L)}{2},$$

$$H = \frac{H_A + (H_A + \Delta H)}{2}.$$

Формулы (3.3), (3.4) и характеристики точности преобразований справедливы до широт $\pm 89^\circ$.

Преобразование геодезических координат в плоские прямоугольные координаты.

Наряду с пространственными прямоугольными и геодезическими координатами положение точек местности может быть задано плоскими прямоугольными координатами x, y и геодезическими высотами H . При вычислении плоских прямоугольных координат в референцных системах координат СК-42 и СК-95 используется проекция Гаусса-Крюгера с параметрами эллипсоида Красовского.

Плоские прямоугольные координаты вычисляют по формулам:

$$x = 6\,367\,558,4968 B - \sin 2B (16\,002,8900 + 66,9607 \sin^2 B + 0,3515 \sin^4 B - l^2(1\,594\,561,25 + 5\,336,535 \sin^2 B + 26,790 \sin^4 B + 0,149 \sin^6 B + l^2(672\,483,4 - 811\,219,9 \sin^2 B + 5\,420,0 \sin^4 B - 10,6 \sin^6 B + l^2(278\,194 - 830\,174 \sin^2 B + 572\,434 \sin^4 B - 16\,010 \sin^6 B + l^2(109\,500 - 574\,700 \sin^2 B + 863\,700 \sin^4 B - 398\,600 \sin^6 B))))), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
y = & (5 + 10n) 10^5 + l \cos B (6\,378\,245 + 21\,346,1415 \sin^2 B + \\
& + 107,1590 \sin^4 B + 0,5977 \sin^6 B + l^2(1\,070\,204,16 - \\
& - 2\,136\,826,66 \sin^2 B + 17,98 \sin^4 B - 11,99 \sin^6 B + \\
& + l^2(270\,806 - 1\,523\,417 \sin^2 B + 1\,327\,645 \sin^4 B - \\
& - 21\,701 \sin^6 B + l^2(79\,690 - 866\,190 \sin^2 B + 1\,730\,360 \sin^4 B - \\
& - 945\,460 \sin^6 B))),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где x, y - плоские прямоугольные координаты (абсцисса и ордината) заданной точки в проекции Гаусса-Крюгера, м;
 B - геодезическая широта заданной точки, рад;
 l - расстояние от заданной точки до осевого меридиана зоны, вычисляемое по формуле $l = \{L - [3 + 6(n - 1)]\} / 57,295\,77951$, рад;
 L - геодезическая долгота заданной точки, град.;
 n - номер шестиградусной зоны в проекции Гаусса-Крюгера, вычисляемый по формуле $n = E[(6 + L)/6]$;
 $E[...]$ - целая часть выражения, заключенного в квадратные скобки.

Преобразование плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера в геодезические координаты на эллипсоиде Красовского осуществляются по формулам:

$$\begin{aligned}
B &= B_0 + \Delta B; \\
L &= 6(n - 0,5) / 57,295\,77951 + l,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где B, L - геодезические широта и долгота заданной точки, рад;
 B_0 - геодезическая широта точки, абсцисса которой равна абсциссе заданной точки, а ордината равна нулю, рад;
 n - номер шестиградусной зоны в проекции Гаусса-Крюгера, вычисляемый по формуле $n = E[y \cdot 10^{-6}]$;

Значения $B_0, \Delta B$ и l вычисляются по следующим формулам:

$$B_0 = \beta + \sin 2\beta (0,002\,52588685 - 0,000\,01491860 \sin^2 \beta + 0,000\,00011904 \sin^4 \beta), \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\Delta B = & -z_0^2 \sin 2B_0 (0,251\,684631 - 0,003\,369263 \sin^2 B_0 + 0,000\,011276 \sin^4 B_0 - \\
& - z_0^2 (0,105\,00614 - 0,045\,59916 \sin^2 B_0 + 0,002\,28901 \sin^4 B_0 - \\
& - 0,000\,02987 \sin^6 B_0 - z_0^2 (0,042\,858 - 0,025\,318 \sin^2 B_0 + 0,014\,346 \sin^4 B_0 - \\
& - 0,001\,264 \sin^6 B_0 - z_0^2 (0,01672 - 0,00630 \cdot \sin^2 B_0 + 0,01188 \sin^4 B_0 - \\
& - 0,00328 \sin^6 B_0))),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
l = z_0(1 - 0,003\,3467108 \sin^2 B_0 - 0,000\,0056002 \sin^4 B_0 - \\
- 0,000\,0000187 \sin^6 B_0 - z_0^2(0,167\,78975 + 0,162\,73586 \sin^2 B_0 - \\
- 0,000\,52490 \sin^4 B_0 - 0,000\,00846 \sin^6 B_0 - z_0^2(0,042\,0025 + \\
+ 0,148\,7407 \sin^2 B_0 + 0,005\,9420 \sin^4 B_0 - 0,000\,0150 \sin^6 B_0 - \\
- z_0^2(0,01225 + 0,09477 \sin^2 B_0 + 0,03282 \sin^4 B_0 - 0,00034 \sin^6 B_0 - \\
- z_0^2(0,0038 + 0,0524 \sin^2 B_0 + 0,0482 \sin^4 B_0 + 0,0032 \sin^6 B_0))))),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где β - вспомогательная величина, вычисляемая по формуле
 $\beta = x/6367558,4968$;

z_0 - вспомогательная величина, вычисляемая по формуле
 $z_0 = (y - (10n + 5)10^5)/(6\,378\,245 \cos B_0)$;

x, y - абсцисса и ордината заданной точки в проекции Гаусса-Крюгера, м.

Погрешность преобразования координат по формулам (3.5) – (3.10) составляет не более 0,001 м.

Преобразование приращений пространственных прямоугольных координат.

Преобразование приращений пространственных прямоугольных координат из системы координат А в систему Б осуществляется по формуле

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_B = (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & +\omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & +\omega_x \\ +\omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_A. \tag{3.11}$$

При обратном преобразовании приращений пространственных прямоугольных координат элементы трансформирования имеют те же значения, но с обратным знаком.

4 ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Гравитационное поле Земли, представляемое потенциалом силы тяжести W , разделяют на две составляющие – нормальную и аномальную

$$W = U + T, \quad (4.1)$$

где U – нормальный потенциал, определяемый как потенциал силы тяжести общеземного эллипсоида;

T – возмущающий потенциал (потенциал притяжения), представляющий аномальное гравитационное поле Земли.

Нормальный потенциал представляет собой сумму потенциала силы притяжения общеземного эллипсоида V_0 (нормального потенциала силы притяжения) и потенциала центробежной силы Q

$$U = V_0 + Q. \quad (4.2)$$

Потенциал W может быть представлен также в виде суммы потенциала силы притяжения V и потенциала центробежной силы Q

$$W = V + Q, \quad (4.3)$$

где
$$V = V_0 + T. \quad (4.4)$$

Для учета влияния гравитационного поля Земли в орбитальных и баллистических расчетах, при решении геодезических и геофизических задач используются численно-аналитические модели ГПЗ, представляющие потенциал силы притяжения V , и цифровые модели трансформант возмущающего потенциала T , описывающие детальные особенности аномального гравитационного поля Земли.

При описании планетарных особенностей ГПЗ удобно использовать единую форму представления для обоих слагаемых (V_0 и T) потенциала силы притяжения V в виде разложения в ряд по сферическим функциям

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{fM}{\rho} \left[1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (4.5)$$

где ρ, φ, λ – сферические геоцентрические координаты точки;

a – большая полуось общеземного эллипсоида;

fM – геоцентрическая гравитационная постоянная с учетом атмосферы;

N – максимальная степень ряда;

$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ – полностью нормированные коэффициенты степени n и порядка m разложения потенциала силы притяжения в ряд по сферическим функциям;

$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ – полностью нормированные полиномы Лежандра степени n и порядка m , рассчитываемые по формуле (4.28);

Нормальный потенциал силы притяжения V_0 описывается рядом, в котором присутствуют только зональные гармоники \bar{C}_{n0}^0 четных степеней:

$$V_0(\rho, \varphi) = \frac{fM}{\rho} \left[1 + \sum_n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \bar{C}_{n0}^0 \bar{P}_n(\sin \varphi) \right] \text{ для } n = 2, 4, 6 \text{ и } 8. \quad (4.6)$$

где $\bar{P}_n(\sin \varphi)$ - полностью нормированные полиномы Лежандра степени n и порядка $m = 0$.

Возмущающий потенциал T представляется полным набором гармоник, начиная с $n = 2$

$$T(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (4.7)$$

где $\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm}$, за исключением коэффициентов зональных гармоник четных степеней $n = 2, 4, 6$ и 8 , используемых для описания потенциала V_0 . Для них $\Delta \bar{C}_{n0} = \bar{C}_{n0} - \bar{C}_{n0}^0$.

В общем случае, коэффициенты $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ планетарной модели ГПЗ уточняются по спутниковым данным совместно с фундаментальными геодезическими постоянными и параметрами, задающими геоцентрическую систему координат. Перечень и параметры моделей гравитационного поля Земли в последней версии ПЗ-90.11 не уточнялись и соответствуют версии ПЗ-90.02. Наряду с параметрами модели ГПЗ в виде коэффициентов $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ в данное издание включены планетарная модель ГПЗ в виде потенциала притяжения точечных масс, а также образцы цифровых моделей трансформант возмущающего потенциала, описывающих региональные и локальные особенности аномального гравитационного поля Земли. Модели ГПЗ заданы свободными от приливных влияний.

4.1 Нормальное гравитационное поле Земли

Нормальное гравитационное поле Земли представляется нормальным потенциалом силы тяжести U . Потенциал U нормального ГПЗ имеет самостоятельное значение как форма приближенного представления фигуры и гравитационного поля Земли (Нормальной Земли), а также вспомогательное значение как система отсчета при практическом решении краевых задач теории потенциала. Потенциал U описывается соотношением (4.2), в котором нормальный потенциал силы притяжения V_0 представляется в виде (4.6), а потенциал центробежной силы описывается соотношением

$$Q(\rho, \varphi) = \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \cos^2 \varphi. \quad (4.8)$$

В практических приложениях, наряду с представлением нормального потенциала силы притяжения V_0 в форме (4.6), используют другую форму его записи

$$V_0(\rho, \varphi) = \frac{fM}{\rho} \left[1 - \sum_{n=2} \left(\frac{a}{\rho} \right)^n J_n^0 P_n(\sin \varphi) \right] \text{ для } n = 2, 4, 6 \text{ и } 8. \quad (4.9)$$

Коэффициенты J_n^0 и \bar{C}_{n0}^0 различаются между собой знаком и нормирующим множителем

$$\begin{aligned} J_n^0 &= -\sqrt{2n+1} \bar{C}_{n0}^0, \\ J_2^0 &= -\sqrt{5} \bar{C}_{20}^0, & J_4^0 &= -3 \bar{C}_{40}^0, \\ J_6^0 &= -\sqrt{13} \bar{C}_{60}^0, & J_8^0 &= -\sqrt{17} \bar{C}_{80}^0. \end{aligned}$$

Гармонические коэффициенты J_n^0 вычисляются по значениям фундаментальных геодезических постоянных fM , ω , a и α :

$$\begin{aligned} J_2^0 &= \frac{e^2}{3} - \frac{2}{45} \frac{\bar{m} e^3}{q_0}; \\ e^2 &= 2\alpha - \alpha^2; \\ \frac{\bar{m}}{m} &= \frac{\omega^2 a^3}{fM}; \\ q_0 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{e^2} \right) \operatorname{arctg} e' - \frac{3}{e} \right]; \\ e'^2 &= \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2}; \\ b &= \frac{a}{\sqrt{1+e'^2}}, \end{aligned}$$

а J_4^0, J_6^0 и J_8^0 - по формуле:

$$J_n^0 = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{3e^{n-2}}{2(n+1)(n+3)} \left[\frac{5n}{2} J_2^0 - (n-2)e^2 \right].$$

Значения параметров J_n^0 , e^2 и e'^2 приведены в таблице 3.

На поверхности общеземного эллипсоида нормальный потенциал - величина постоянная

$$U_0 = \frac{fM}{a} \left[1 - \sum_n J_n^0 P_n(0) \right] + \frac{\omega^2 a^2}{2} = \text{const}, \text{ для } n = 2, 4, 6 \text{ и } 8, \quad (4.10)$$

где $P_n(0)$ - полиномы Лежандра степени n и порядка $m = 0$ для $\varphi = 0$.

Значение U_0 приведено в таблице 3.

Ускорение нормальной силы тяжести (мГал) на поверхности ОЗЭ ($H = 0$) вычисляется по формуле:

$$\gamma(B, H_{=0}) = \frac{a\gamma_a \cos^2 B + b\gamma_b \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad (4.11)$$

где B - геодезическая широта;

H - геодезическая высота;

γ_a, γ_b - ускорения нормальной силы тяжести на экваторе и полюсе ОЗЭ;

$$\gamma_a = \frac{fM}{a^2} \left[1 - \sum_n (2n+1) J_n^0 P_n(0) \right] - \omega^2 a \quad (4.12)$$

$$\gamma_b = \frac{fM}{b^2} \left[1 - \sum_n (2n+1) \left(\frac{a}{b} \right)^n J_n^0 \right] \quad \text{для } n = 2, 4, 6 \text{ и } 8. \quad (4.13)$$

Вместо (4.12) можно использовать формулу:

$$\gamma_a = \frac{fM}{a^2} \left[1 + \sum_n (2n+1) \bar{C}_{n0}^0 \bar{P}_n(0) \right] - \omega^2 a \quad \text{для } n = 2, 4, 6 \text{ и } 8.$$

В упрощенной записи выражение (4.11) для ускорения нормальной силы тяжести на поверхности ОЗЭ имеет вид:

$$\gamma(B, H_{=0}) \cong \gamma_a (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \quad (4.14)$$

где

$$\beta = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{8}.$$

Значения коэффициентов β и β_1 для ОЗЭ приведены в таблице 3.

Зависимость ускорения нормальной силы тяжести от высоты имеет вид:

$$\gamma(B, H) \cong \gamma(B, H_{=0}) (1 + f_1 H + f_2 H \sin^2 B + f_3 H^2), \quad (4.15)$$

где

$$f_1 = -\frac{2}{a} (1 + \alpha + m), \quad f_2 = \frac{4}{a} \alpha,$$

$$f_3 = \frac{3}{a^2}, \quad m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_a}.$$

Для приближенных расчетов изменение ускорения нормальной силы тяжести с высотой вычисляется по формуле:

$$\gamma(B, H) - \gamma(B, H_{=0}) \cong -0,3086H. \quad (4.16)$$

В формулах (4.15) и (4.16) γ выражено в мГал, а высота H - в метрах.

Ускорения нормальной силы тяжести γ_a, γ_b соответствуют фундаментальным постоянным Земли, а в фундаментальной постоянной fM учтена масса всей атмосферы. Это оправдано при обработке наблюдений ИСЗ и других космических объектов. При решении краевых задач теории потенциала следует учитывать влияние только слоев атмосферы, расположенных ниже точки наблюдения. Поэтому в рассчитанное по формуле (4.15) значение ускорения нормальной силы тяжести следует ввести поправку за влияние слоев атмосферы, расположенных выше точки наблюдения. Тогда вместо (4.15)

следует использовать:

$$\gamma(B, H) \cong \gamma(B, H_{=0})(1 + f_1 H + f_2 H \sin^2 B + f_3 H^2) + \delta\gamma_a. \quad (4.17)$$

С достаточной для практики точностью значение поправки вычисляется по формуле

$$\delta\gamma_a = -0,87 \exp^{-0,116H^{1,047}} \quad (4.18)$$

На поверхности ОЗЭ поправка $\delta\gamma_a = -0,87$ мГал. С высотой она изменяется по экспоненциальному закону и практически равна нулю на высоте ~ 35 км.

Формулы для расчета значений составляющих вектора ускорения нормальной силы тяжести основаны на соотношениях (4.8), (4.9) и имеют вид: в сферической геоцентрической системе координат

$$\left. \begin{aligned} \gamma_\rho &= -\frac{fM}{\rho^2} - \frac{fM}{\rho^2}(n+1) \sum_n \left(\frac{a}{\rho}\right)^n \bar{C}_{n0}^0 \bar{P}_n(\sin \varphi) + \rho \omega^2 \cos \varphi, \\ \gamma_\varphi &= \frac{fM}{\rho^2} \left[\sum_n \left(\frac{a}{\rho}\right)^n \bar{C}_{n0}^0 \bar{P}'_n(\sin \varphi) \right] - \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \sin 2\varphi, \\ \gamma_\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ для } n = 2, 4, 6 \text{ и } 8; \quad (4.19)$$

в прямоугольной геоцентрической системе координат

$$\begin{bmatrix} \gamma_X \\ \gamma_Y \\ \gamma_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X}{\rho} & -\frac{XZ}{\rho r} & -\frac{Y}{r} \\ \frac{Y}{\rho} & -\frac{YZ}{\rho r} & \frac{X}{r} \\ \frac{Z}{\rho} & \frac{r}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_\rho \\ \gamma_\varphi \\ \gamma_\lambda \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

где $\bar{P}'_n(\sin \varphi)$ - производная от полностью нормированного полинома Лежандра по сферической широте, вычисляемая по формуле (4.29) для $m = 0$;

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad (4.21)$$

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} X = \rho \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = \rho \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (4.23)$$

4.2 Аномальное гравитационное поле Земли

Аномальная составляющая ГПЗ в ПЗ-90.11 представлена тремя планетарными моделями в виде полностью нормированных коэффициентов разложения потенциала силы притяжения в ряд по сферическим функциям до 70-й степени (ПЗ-2002/70с и ПЗ-2002/70) и до 360-й степени (ПЗ-2002/360). В приложениях 5 и 6 приведены их основные характеристики. Модель гравитационного поля Земли ПЗ-2002/70с получена динамическим методом космической геодезии в процессе совместного уточнения параметров априорной модели ГПЗ и геоцентрических координат пунктов, с которых выполнялись траекторные измерения. Эта модель рекомендуется для орбитальных и траекторных расчетов. Модели АГПЗ ПЗ-2002/70 и ПЗ-2002/360 получены из совместной обработки модели ПЗ-2002/70с и глобального каталога средних аномалий силы тяжести по трапециям 30' x 30'.

В ряде практических приложений удобно использовать модели в виде потенциала притяжения точечных масс. В приложении 7 приведена планетарная модель аномального ГПЗ в виде потенциала притяжения 60 точечных масс (ТМ-60), полученная аппроксимацией возмущающего потенциала, соответствующего модели ПЗ-2002/70с до 36-й степени.

Численно-аналитические модели АГПЗ (ПЗ-2002/70с, ПЗ-2002/70, ПЗ-2002/360 и ТМ-60) позволяют рассчитывать любые трансформанты возмущающего потенциала на поверхности Земли и во внешнем пространстве. Аномальное ГПЗ на поверхности Земли в пределах ограниченной области более детально представляется цифровыми моделями его трансформант: аномалий силы тяжести, высот квазигеоида и уклонений отвесных линий. Цифровые модели согласованы с параметрами нормального гравитационного поля Земли.

Представление аномального гравитационного поля Земли потенциалом притяжения точечных масс может использоваться не только для описания планетарных особенностей, но и для моделирования тонкой структуры АГПЗ на поверхности Земли и во внешнем пространстве. Для этой цели создаются локальные модели АГПЗ, представляющие аномальное гравитационное поле Земли в целом с дополнительной детализацией в локальной области. Область действия и детальность представления АГПЗ для таких моделей определяются индивидуально с учетом требований к необходимой точности расчета трансформант возмущающего потенциала. В приложении 8 приведен образец локальной модели АГПЗ в виде потенциала притяжения точечных масс, созданной на основе планетарной модели ТМ-60.

4.2.1 Представление аномального гравитационного поля Земли рядом сферических функций

Возмущающий потенциал T для точек на поверхности Земли и во внешнем пространстве вычисляется по формуле (4.7)

$$T(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi).$$

Формулы для вычисления трансформант возмущающего потенциала имеют вид:

- для смешанных аномалий силы тяжести

$$\Delta g(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{fM}{\rho^2} \sum_{n=2}^N (n-1) \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi); \quad (4.24)$$

- для высот квазигеоида

$$\zeta(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{fM}{\rho \gamma} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi); \quad (4.25)$$

- для составляющих уклонений отвесных линий

$$\xi(\rho, \varphi, \lambda) = -\rho'' \frac{fM}{\gamma \rho^2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}'_{nm}(\sin \varphi), \quad (4.26)$$

$$\eta(\rho, \varphi, \lambda) = \rho'' \frac{fM}{\gamma \rho^2 \cos \varphi} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n m (\Delta \bar{C}_{nm} \sin m\lambda - \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi),$$

где $\rho'' = 206\,264,806\,25$ угл. с.

- для составляющих вектора аномального гравитационного ускорения

$$\delta g_\rho = -\frac{fM}{\rho^2} \sum_{n=2}^N (n+1) \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi),$$

$$\delta g_\varphi = \frac{fM}{\rho^2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}'_{nm}(\sin \varphi), \quad (4.27)$$

$$\delta g_\lambda = \frac{fM}{\rho^2 \cos \varphi} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n m (-\Delta \bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi).$$

Полностью нормированные полиномы Лежандра $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ и их производные по широте $\bar{P}'_{nm}(\sin \varphi)$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi) = \begin{cases} \bar{P}_{n-1,m-1}(\sin \varphi) \cos \varphi \sqrt{\frac{2n+1}{2n} \frac{1}{\delta_{m-1}}} & \text{при } n = m \neq 0, \\ \bar{P}_{n-1,m}(\sin \varphi) \sin \varphi \sqrt{\frac{4n^2-1}{n^2-m^2}} - \bar{P}_{n-2,m}(\sin \varphi) \times \\ \times \sqrt{\frac{[(n-1)^2-m^2](2n+1)}{(n^2-m^2)(2n-3)}} & \text{при } n > m, \\ 0 & \text{при } n < m, \\ 1 & \text{при } n = m = 0, \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\bar{P}'_{nm}(\sin \varphi) = -mtg\varphi \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) + \sqrt{\delta_m(n-m)(n+m+1)} \bar{P}_{n,m+1}(\sin \varphi), \quad (4.29)$$

В формулах (4.28), (4.29) символы δ_{m-1} и δ_m представим в общем виде

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } k = 0 \\ 1 & \text{при } k \neq 0 \end{cases}.$$

4.2.2 Представление аномального гравитационного поля Земли системой точечных масс

Возмущающий потенциал T аппроксимируется потенциалом притяжения системы точечных масс, характеризующихся величиной массы m и ее положением в теле Земли. Значение возмущающего потенциала на поверхности Земли и в любой точке внешнего пространства вычисляется по формуле:

$$T = fM \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i}{r_i}, \quad (4.30)$$

где N - количество точечных масс;

ε_i - величина точечной массы, выраженная в единицах массы Земли M

$$(\varepsilon_i = \frac{m_i}{M});$$

r_i - расстояние между i -й точечной массой и заданной точкой.

Смешанная аномалия силы тяжести Δg , высота квазигеоида ζ над общеземным эллипсоидом и составляющие уклонения отвесной линии ξ , η на поверхности Земли вычисляются по формулам в сферическом приближении

$$\Delta g(\rho, \varphi, \lambda) \cong fM \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{R^2 - \rho_i^2 - 3r_i^2}{2Rr_i^3}, \quad (4.31)$$

$$\zeta(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{fM}{\gamma} \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i}{r_i},$$

$$\xi(\rho, \varphi, \lambda) = -\rho \frac{fM}{\gamma} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{\rho_i}{r_i^3} [\sin \varphi_i \cos \varphi - \sin \varphi_i \cos \varphi \cos(\lambda_i - \lambda)],$$

$$\eta(\rho, \varphi, \lambda) = -\rho \frac{fM}{\gamma} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{\rho_i}{r_i^3} \cos \varphi_i \sin(\lambda_i - \lambda),$$

где ρ, φ, λ - сферические геоцентрические координаты заданной точки;
 $\rho_i, \varphi_i, \lambda_i$ - сферические геоцентрические координаты i -й точечной массы;
 R - средний радиус Земли ($R = 6371\ 000$ м);
 r_i - расстояние от i -й точечной массы до заданной точки с координатами ρ, φ, λ ,

$$r_i = \sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho \rho_i \cos \psi}, \quad (4.32)$$

$$\cos \psi = \sin \varphi_i \sin \varphi + \cos \varphi_i \cos \varphi \cos(\lambda_i - \lambda).$$

Составляющие вектора аномального гравитационного ускорения по осям геоцентрической прямоугольной системы координат вычисляются по формулам:

$$\delta g_X = -fM \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{X - X_i}{r_i^3},$$

$$\delta g_Y = -fM \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{Y - Y_i}{r_i^3}, \quad (4.33)$$

$$\delta g_Z = -fM \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{Z - Z_i}{r_i^3}.$$

Для перехода от сферических к прямоугольным геоцентрическим координатам используются соотношения (4.23). Значение r_i вычисляется по формуле:

$$r_i = \sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2}. \quad (4.34)$$

Пересчет параметров точечных масс в коэффициенты ряда сферических функций выполняется по формулам:

$$\bar{C}_{nm} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \left(\frac{\rho_i}{a} \right)^n \cos m\lambda_i \bar{P}_{nm}(\sin \varphi_i),$$

$$\bar{S}_{nm} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \left(\frac{\rho_i}{a} \right)^n \sin m\lambda_i \bar{P}_{nm}(\sin \varphi_i). \quad (4.35)$$

4.3 Цифровые модели трансформант аномального гравитационного поля Земли

Цифровые модели АГПЗ создаются в виде упорядоченной совокупности значений отдельных трансформант возмущающего потенциала (характеристик АГПЗ), вычисленных в узлах равномерной сетки, образованной меридианами и параллелями. Значения характеристик АГПЗ в промежуточных точках могут быть получены с использованием алгоритмов интерполяции. В большинстве практических приложений ЦМ АГПЗ достаточным является использование алгоритма билинейной интерполяции.

Исходной информацией для создания цифровых моделей и их графических аналогов служат гравиметрические карты, содержащие информацию об аномалиях силы тяжести, и высоты квазигеоида, полученные из обработки данных спутниковой альтиметрии и ГЛОНАСС/GPS-измерений на нивелирных пунктах. На основе этой информации ТС ВС РФ создаются цифровые модели (и их графические аналоги) аномалий силы тяжести (приложение 9), высот квазигеоида (приложение 10) и составляющих уклонений отвесных линий (приложение 11). Значения аномалий силы тяжести в этих моделях соответствуют принятой в Российской Федерации гравиметрической системе 1971 года, а высоты квазигеоида и УОЛ - системе Параметров Земли (ПЗ-90.11). Приведение значений трансформант возмущающего потенциала к другой системе параметров выполняется по следующим алгоритмам.

Аномалии силы тяжести. Аномалии силы тяжести, заданные в гравиметрической системе 1971 года, соответствуют нормальной формуле Гельмерта с добавлением поправки (–14 мГал). При приведении их к нормальному полю ПЗ-90.11 учитывается поправка за разность коэффициентов формулы (4.14) ускорения нормальной силы тяжести на поверхности ОЗЭ:

$$\Delta g_{\text{ПЗ-90.11}} = \Delta g_{1971} - 15,9 - 0,40 \sin^2 \varphi - 1,17 \sin^2 2\varphi. \quad (4.36)$$

Высоты квазигеоида. При пересчете высот квазигеоида из общеземной системы координат А в референцную систему координат Б используются формулы преобразования для геодезических высот H

$$\zeta_B = \zeta_A + \Delta\zeta, \quad \Delta\zeta = (H_B - H^y) - (H_A - H^x) = -\Delta H, \quad (4.37)$$

$$\Delta H = -\frac{a}{N} \Delta a + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} + (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \cos B + \Delta Z \sin B - \\ - N e^2 \sin B \cos B \left(\frac{\omega_X}{\rho} \sin L - \frac{\omega_Y}{\rho} \cos L \right) + \left(\frac{a^2}{N} + H \right) m. \quad (4.38)$$

Уклонения отвесных линий. При пересчете значений УОЛ из общеземной системы координат А в референцную систему координат Б используются следующие формулы:

$$\xi_B = \xi_A + \Delta\xi, \quad \eta_B = \eta_A + \Delta\eta, \quad (4.39)$$

$$\Delta\xi = \frac{\rho''}{M+H} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{Ne^2}{a} \Delta a + N \left(\frac{N^2}{a^2} + 1 \right) \frac{\Delta e^2}{4} \right] \sin 2B - (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \sin B + \Delta Z \cos B \right\} - (\omega_x \sin L - \omega_y \cos L) e^2 \cos 2B, \quad (4.40)$$

$$\Delta\eta = \frac{\rho''}{N+H} (-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L) + e^2 (\omega_x \cos L + \omega_y \sin L) \sin B, \quad (4.41)$$

$$a = \frac{a_A + a_B}{2}, \quad e^2 = \frac{e_A^2 + e_B^2}{2}, \quad \Delta a = a_B - a_A, \quad \Delta e^2 = e_B^2 - e_A^2.$$

В формулах (4.37) – (4.41) приняты те же обозначения, что и в формуле (3.4).

Значения аномалий силы тяжести и уклонений отвесных линий, содержащиеся в ЦМ УОЛ и ЦМ АСТ, рассчитываются для точек физической поверхности Земли. Цифровые модели аномалий силы тяжести используются, как правило, в сочетании с цифровыми моделями рельефа местности, в которых нормальные высоты определены в узлах той же сетки, что и у ЦМ АСТ.

Наряду с цифровыми моделями аномалий силы тяжести и высот квазигеоида для детального представления АГПЗ в регионах больших размеров могут создаваться каталоги (списки) средних значений аномалий силы тяжести и высот квазигеоида для стандартных трапеций (5' x 7,5', 10' x 15', 15' x 15', 20' x 30', 30' x 30' и 1° x 1°). Для значений характеристик АГПЗ, содержащихся в этих списках, применяются те же преобразования, что и для цифровых моделей АГПЗ.

**Преобразование пространственных прямоугольных координат
в геодезические координаты**

В основе преобразований лежат уравнения связи между этими координатами

$$\begin{cases} X = (N + H) \cos B \cos L \\ Y = (N + H) \cos B \sin L \\ Z = [(1 - e^2)N + H] \sin B \end{cases}, \quad (\text{П1.1})$$

где X, Y, Z - пространственные прямоугольные координаты точки;
 B, L, H - геодезические координаты точки;
 N - радиус кривизны первого вертикала;
 e - эксцентриситет эллипсоида.

Радиус кривизны первого вертикала и квадрат эксцентриситета эллипсоида вычисляются по формулам

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (\text{П1.2})$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2, \quad (\text{П1.3})$$

где a - большая полуось эллипсоида;
 α - сжатие эллипсоида.

Преобразование пространственных прямоугольных координат в геодезические требует выполнения итераций при вычислении геодезической широты и геодезической высоты. Для этого используют следующий алгоритм:

1) вычисляют значение вспомогательной величины r по формуле

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad (\text{П1.4})$$

2) анализируют значение r :

а) если $r = 0$, то

$$B = \frac{\pi Z}{2|Z|}, \quad (\text{П1.5})$$

$$L = 0, \quad (\text{П1.6})$$

$$H = Z \sin B - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}; \quad (\text{П1.7})$$

б) если $r > 0$, то

$$L_a = \left| \arcsin \left(\frac{Y}{r} \right) \right|, \quad (\text{П1.8})$$

при этом

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } Y < 0, X > 0, \text{ то } L = 2\pi - L_a \\ \text{если } Y < 0, X < 0, \text{ то } L = \pi + L_a \\ \text{если } Y > 0, X < 0, \text{ то } L = \pi - L_a \\ \text{если } Y > 0, X > 0, \text{ то } L = L_a \end{array} \right\}; \quad (\text{П1.9})$$

3) анализируют значение Z :

а) если $Z = 0$, то

$$B = 0, \quad H = r - a;$$

б) во всех других случаях вычисления выполняют следующим образом:

- находят вспомогательные величины ρ , c , p по формулам:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (\text{П1.10})$$

$$c = \arcsin\left(\frac{Z}{\rho}\right), \quad (\text{П1.11})$$

$$p = \frac{e^2 a}{2\rho}, \quad (\text{П1.12})$$

- реализуют итеративный процесс:

$$s_1 = 0, \quad (\text{П1.13})$$

$$b = c + s_1, \quad (\text{П1.14})$$

$$s_2 = \arcsin\left(\frac{p \sin(2b)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 b}}\right), \quad (\text{П1.15})$$

$$d = |s_2 - s_1|. \quad (\text{П1.16})$$

Если величина d , определяемая по формуле (П1.16), меньше установленного значения допуска, то

$$B = b, \quad (\text{П1.17})$$

$$H = r \cos B + Z \sin B - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \quad (\text{П1.18})$$

Если величина d равна или больше установленного значения допуска, то

$$s_1 = s_2 \quad (\text{П1.19})$$

и вычисления повторяют, начиная с формулы (П1.14).

При преобразованиях координат в качестве допуска прекращения итеративного процесса принимают значение $d = 0,0001''$. В этом случае погрешность вычисления геодезической высоты не превышает 0,003 м.

Положение пунктов КГС, IGS, DORIS на территории России



Рисунок П2.1 – Схема расположения пунктов КГС(▲), IGS(●) и DORIS(■) на территории России

Информация по пунктам наблюдения (координаты и скорости их изменения), определенным в системе ПЗ-90.11 на эпоху 2010.0, приведены в Дополнении к третьему изданию.

Для перехода к другой (заданной) эпохе необходимо учитывать скорости $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ изменения координат пунктов в соответствии с формулой

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{t_2} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{t_1} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}_{t_1}, \quad (\text{П2.1})$$

где t_1, t_2 - исходная и заданная эпохи.

Практический пример применения формулы (П2.1) приведен в приложении 4.

Формулы связи общеземной и небесной систем координат

Связь общеземной и небесной (инерциальной) систем координат описывается соотношением:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_t \bar{\mathbf{S}}_t \mathbf{N}_t \mathbf{Pr}_{t-T_0} \mathbf{B}_{T_0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{T_0}, \quad (\text{ПЗ.1})$$

- где \mathbf{B}_{T_0} - матрица сдвига среднего полюса JD2000.0 относительно ICRS с учетом членов второго порядка малости;
- \mathbf{Pr}_{t-T_0} - матрица перехода от небесной системы на стандартную эпоху T_0 (JD2000.0) к небесной системе на эпоху t (средняя небесная система координат) или матрица учета прецессии за промежуток времени $t-T_0$;
- \mathbf{N}_t - матрица перехода от средней к истинной небесной системе координат на эпоху t или матрица учета нутации;
- $\bar{\mathbf{S}}_t$ - матрица перехода от истинной небесной системы координат к мгновенной земной системе координат или матрица учета истинного звездного времени;
- \mathbf{P}_t - матрица перехода от мгновенной земной системы координат к общеземной системе или матрица учета координат полюса;

Матрицы преобразования \mathbf{B} , \mathbf{P} , $\bar{\mathbf{S}}$, \mathbf{N} и \mathbf{Pr} имеют следующие структуры.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} +0,999\ 999\ 999\ 999\ 9942 & -0,000\ 000\ 070\ 782\ 7974 & +0,000\ 000\ 080\ 562\ 17151 \\ +0,000\ 000\ 070\ 782\ 7948 & +0,999\ 999\ 999\ 999\ 9969 & +0,000\ 000\ 033\ 060\ 4145 \\ -0,000\ 000\ 080\ 562\ 1738 & -0,000\ 000\ 033\ 060\ 4088 & +0,999\ 999\ 999\ 999\ 9962 \end{pmatrix}. \quad (\text{ПЗ.2})$$

Матрица сдвига среднего полюса J2000.0 относительно ICRS относится к классической концепции системы отсчета, связанной с равноденствием.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{ПЗ.3})$$

где x_p , y_p - координаты полюса (в радианной мере), публикуемые в бюллетенях «Всемирное время и координаты полюса».

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{П3.4})$$

где S - истинное звездное время гринвичского меридиана, вычисляемое по формулам, приводимым в «Астрономическом ежегоднике» РАН.

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{П3.5})$$

где $N_{11} = \cos B$,
 $N_{12} = \sin B \cos C$,
 $N_{13} = \sin B \sin C$,
 $N_{21} = -\sin B \cos A$,
 $N_{22} = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin C$,
 $N_{23} = \cos A \cos B \sin C + \sin A \cos C$,
 $N_{31} = \sin A \sin B$,
 $N_{32} = -\sin A \cos B \cos C - \cos A \sin C$,
 $N_{33} = -\sin A \cos B \sin C + \cos A \cos C$;
 A, B, C - редуционные величины,
 $A = -\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon - d\varepsilon$,
 $B = -\Delta\psi - d\psi$,
 $C = \varepsilon_0$;

ε_0 - средний наклон эклиптики к экватору;

$\Delta\varepsilon, d\varepsilon$ - долго- и короткопериодические части нутации в наклоне;

$\Delta\psi, d\psi$ - долго- и короткопериодические части нутации в долготе.

$$\mathbf{Pr} = \begin{pmatrix} Pr_{11} & Pr_{12} & Pr_{13} \\ Pr_{21} & Pr_{22} & Pr_{23} \\ Pr_{31} & Pr_{32} & Pr_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{П3.6})$$

где $Pr_{11} = \cos \zeta_0 \cos Z \cos \Theta - \sin \zeta_0 \sin Z$,
 $Pr_{12} = -\sin \zeta_0 \cos Z \cos \Theta - \cos \zeta_0 \sin Z$,
 $Pr_{13} = -\cos Z \sin \Theta$,
 $Pr_{21} = \cos \zeta_0 \sin Z \cos \Theta + \sin \zeta_0 \cos Z$,
 $Pr_{22} = -\sin \zeta_0 \sin Z \cos \Theta + \cos \zeta_0 \cos Z$,
 $Pr_{23} = -\sin Z \sin \Theta$,
 $Pr_{31} = \cos \zeta_0 \sin \Theta$,
 $Pr_{32} = -\sin \zeta_0 \sin \Theta$,
 $Pr_{33} = \cos \Theta$.

В соответствии с резолюцией В1 (Прага, 2006) используются следующие соотношения для прецессионных параметров ζ , Z , Θ

$$\zeta = (2,650\,545 + (2306,083\,227 + (0,298\,8499 + (0,018\,01828 - (0,000\,005\,791 + 0,000\,000\,3173 \times T) \times T) \times T) \times T) \times T) / 206\,264,806\,247\,097$$

$$Z = (-2,650\,545 + (2306,077\,181 + (1,092\,7348 + (0,018\,2683 - (0,000\,028\,596 + 0,000\,000\,2904 \times T) \times T) \times T) \times T) \times T) / 206\,264,806\,247\,097$$

$$\Theta = (2004,191\,903 - (0,429\,4934 + (0,041\,82264 + (0,000\,007\,089 + 0,000\,000\,1274 \times T) \times T) \times T) \times T) \times T / 206\,264,806\,247\,097,$$

где $T = (\text{JD}(t) - 2451\,545,0) / 36525$ в шкале земного времени, реализуемом наземными эталонами времени и частоты.

Элементы трансформирования геодезических систем координат

Преобразование пространственных прямоугольных координат из системы А в систему Б выполняется по формуле

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B = (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & +\omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & +\omega_X \\ +\omega_Y & -\omega_X & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_A + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}. \quad (\text{П4.1})$$

В этой формуле приняты следующие обозначения элементов трансформирования:

- $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ - линейные элементы трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б, м;
- $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ - угловые элементы трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б, рад;
- m - масштабный элемент трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б.

При обратном преобразовании пространственных прямоугольных координат элементы трансформирования имеют те же значения, но с обратным знаком.

Значения элементов трансформирования систем координат получены по разностям координат одноименных пунктов, определенных в обеих системах. В таблице П4.1 приведены значения элементов трансформирования и их средние квадратические погрешности (обозначены в традиционном виде \pm), для всех систем координат, указанных в разделе 3.

Погрешности элементов трансформирования СК-42 – ПЗ-90 относятся к глобальной модели элементов трансформирования. Элементы трансформирования для систем координат СК-95 – ПЗ-90 установлены директивно (назначены), поэтому для них значения средних квадратических погрешностей не приводятся.

Элементы трансформирования для систем координат ПЗ-90.02 – ITRF-2000 определены на эпоху 2002.0 и совпадают с элементами трансформирования ПЗ-90.02 – WGS-84 (G1150), где G1150 - номер GPS-недели.

Таблица П4.1 – Элементы трансформирования систем координат и их средние квадратические погрешности

№ п/п	Из системы А	В систему Б	ΔX , м	ΔY , м	ΔZ , м	ω_x , 10^{-3} угл.с	ω_y , 10^{-3} угл.с	ω_z , 10^{-3} угл.с	m , 10^{-6}	Эпоха ЭТ
1	СК-42	ПЗ-90	+25 ± 2	-141 ± 2	-80 ± 3	0 ± 100	-350 ± 100	-660 ± 100	0 $\pm 0,250$	
2	СК-95	ПЗ-90	+25,90	-130,94	-81,76	0	0	0	0	
3	ПЗ-90	ПЗ-90.02	-1,07 $\pm 0,1$	-0,03 $\pm 0,1$	+0,02 $\pm 0,1$	0	0	-130 ± 10	-0,220 $\pm 0,020$	2002.0
4	WGS-84 (G1150)	ПЗ-90.02	+0,36 $\pm 0,1$	-0,08 $\pm 0,1$	-0,18 $\pm 0,1$	0	0	0	0	2002.0
5	ПЗ-90.02	ПЗ-90.11	-0,373 $\pm 0,027$	+0,186 $\pm 0,056$	+0,202 $\pm 0,033$	-2,30 $\pm 2,11$	+3,54 $\pm 0,87$	-4,21 $\pm 0,82$	-0,008 $\pm 0,004$	2010.0
6	ГСК-2011	ПЗ-90.11	0,000 $\pm 0,008$	+0,014 $\pm 0,018$	-0,008 $\pm 0,011$	-0,562 $\pm 0,698$	-0,019 $\pm 0,259$	+0,053 $\pm 0,227$	-0,0006 $\pm 0,0010$	2011.0
7	ПЗ-90.11	ITRF-2008	-0,003 $\pm 0,002$	-0,001 $\pm 0,002$	0,000 $\pm 0,002$	+0,019 $\pm 0,072$	-0,042 $\pm 0,073$	+0,002 $\pm 0,090$	-0,000 $\pm 0,0003$	2010.0

В таблице П4.2 приведены элементы трансформирования при переходе в систему ПЗ-90.11. При этом элементы трансформирования для ряда систем получены путем комбинирования (алгебраического сложения) данных из таблицы П4.1.

Таблица П4.2 – Элементы трансформирования при переходе в систему координат ПЗ-90.11 (система Б)

№ п/п	Из системы А	ΔX , м	ΔY , м	ΔZ , м	ω_x , 10^{-3} угл.с	ω_y , 10^{-3} угл.с	ω_z , 10^{-3} угл.с	m , 10^{-6}
1	СК-42	+23,557	-140,844	-79,778	-2,30	-346,46	-794,21	-0,228
2	СК-95	+24,457	-130,784	-81,538	-2,30	+3,54	-134,21	-0,228
3	ПЗ-90	-1,443	+0,156	+0,222	-2,30	+3,54	-134,21	-0,228
4	WGS-84 (G1150)	-0,013	+0,106	+0,022	-2,30	+3,54	-4,21	-0,008
5	ПЗ-90.02	-0,373	+0,186	+0,202	-2,30	+3,54	-4,21	-0,008
6	ITRF-2008	+0,003	+0,001	0,000	-0,019	+0,042	-0,002	0,000

Системы координат ПЗ-90.02, ПЗ-90.11, WGS-84(G1150), ГСК-2011 и ITRF-2008 отличаются повышенной точностью. Поэтому перед применением формулы (П4.1) необходимо перевычислить координаты пунктов в каждой из систем А и Б по формуле (П2.1) на эпоху вывода ЭТ этих систем координат с использованием скоростей изменения координат пунктов.

Для примера приведены численные результаты преобразования координат пункта MDVJ (пункт сети IGS), заданного в системе ITRF-2008 на эпоху 2005.0, в систему ПЗ-90.11 на произвольную эпоху, например, 2013.9.

Координаты пункта MDVJ в системе ITRF-2008 на эпоху 2005.0 и скорости изменения координат пункта имеют значения:

$$\begin{aligned} X &= 2845\,456,0813 \text{ м}; & V_x &= -0,0212 \text{ м/год}; \\ Y &= 216\,0954,2453 \text{ м}; & V_Y &= +0,0124 \text{ м/год}; \\ Z &= 5265\,993,2296 \text{ м}; & V_Z &= +0,0072 \text{ м/год}. \end{aligned}$$

Процедура расчета включает 3 шага:

1. Перевычисление по формуле (П2.1) координат пункта MDVJ в системе ITRF-2008 с эпохи 2005.0 на эпоху 2010.0, поскольку ЭТ систем ITRF-2008 и ПЗ-90.11 (таблица П4.2) получены на эпоху 2010.0:

$$\begin{aligned} X &= 2845\,456,0813 + (-0,0212) \times (2010,0 - 2005,0) = 2845\,455,9753; \\ Y &= 216\,0954,2453 + (+0,0124) \times (2010,0 - 2005,0) = 216\,0954,3073; \\ Z &= 5265\,993,2296 + (+0,0072) \times (2010,0 - 2005,0) = 5265\,993,2656. \end{aligned}$$

2. Перевычисление по формуле (П4.1) координат пункта из системы ITRF-2008 в систему ПЗ-90.11 на эпоху 2010.0 (на эпоху вывода ЭТ) с использованием ЭТ из таблицы П4.2:

$$\begin{aligned} X &= 2845\,455,9772; \\ Y &= 216\,0954,3078; \\ Z &= 5265\,993,2664. \end{aligned}$$

3. Перевычисление по формуле (П2.1) координат пункта MDVJ в системе ПЗ-90.11 на эпоху 2013.9:

$$\begin{aligned} X &= 2845\,455,9772 + (-0,0212) \times (2013,9 - 2010,0) = 2845\,455,8945; \\ Y &= 216\,0954,3078 + (+0,0124) \times (2013,9 - 2010,0) = 216\,0954,3562; \\ Z &= 5265\,993,2652 + (+0,0072) \times (2013,9 - 2010,0) = 5265\,993,2945. \end{aligned}$$

Соотношения для преобразований координат из перечисленных в таблице П4.2 систем в систему ПЗ-90.11 (после приведения координат на эпоху вывода ЭТ) представлены ниже. В качестве примера также приведено соотношение для обратного преобразования координат из системы ПЗ-90.11 в систему ПЗ-90.02.

1. Преобразование координат из референцной системы СК-42 в систему ПЗ-90.11

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90.11}} = (1 - 0,228 \cdot 10^{-6}) \begin{pmatrix} 1 & -3,85044 \cdot 10^{-6} & +1,67968 \cdot 10^{-6} \\ +3,85044 \cdot 10^{-6} & 1 & -0,01115 \cdot 10^{-6} \\ -1,67968 \cdot 10^{-6} & +0,01115 \cdot 10^{-6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{СК-42}} + \begin{pmatrix} +23,557 \\ -140,844 \\ -79,778 \end{pmatrix}.$$

2. Преобразование координат из референционной системы СК-95 в систему ПЗ-90.11

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90.11}} = (1 - 0,228 \cdot 10^{-6}) \begin{pmatrix} 1 & -0,65067 \cdot 10^{-6} & -0,01716 \cdot 10^{-6} \\ +0,65067 \cdot 10^{-6} & 1 & -0,01115 \cdot 10^{-6} \\ +0,01716 \cdot 10^{-6} & +0,01115 \cdot 10^{-6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{СК-95}} + \begin{pmatrix} +24,457 \\ -130,784 \\ -81,538 \end{pmatrix}.$$

3. Преобразование координат из системы координат ПЗ-90 в систему ПЗ-90.11

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90.11}} = (1 - 0,228 \cdot 10^{-6}) \begin{pmatrix} 1 & +0,65067 \cdot 10^{-6} & -0,01716 \cdot 10^{-6} \\ -0,65067 \cdot 10^{-6} & 1 & -0,01115 \cdot 10^{-6} \\ +0,01716 \cdot 10^{-6} & +0,01115 \cdot 10^{-6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90}} + \begin{pmatrix} -1,443 \\ +0,156 \\ +0,222 \end{pmatrix}.$$

4. Преобразование координат из системы координат WGS-84 (G1150) в систему ПЗ-90.11

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90.11}} = (1 - 0,008 \cdot 10^{-6}) \begin{pmatrix} 1 & -0,02041 \cdot 10^{-6} & -0,01716 \cdot 10^{-6} \\ +0,02041 \cdot 10^{-6} & 1 & -0,01115 \cdot 10^{-6} \\ +0,01716 \cdot 10^{-6} & +0,01115 \cdot 10^{-6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{WGS-84 (G1150)}} + \begin{pmatrix} -0,013 \\ +0,106 \\ +0,022 \end{pmatrix}.$$

5. Преобразование координат из системы координат ПЗ-90.02 в систему ПЗ-90.11

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90.11}} = (1 - 0,008 \cdot 10^{-6}) \begin{pmatrix} 1 & -0,02041 \cdot 10^{-6} & -0,01716 \cdot 10^{-6} \\ +0,02041 \cdot 10^{-6} & 1 & -0,01115 \cdot 10^{-6} \\ +0,01716 \cdot 10^{-6} & +0,01115 \cdot 10^{-6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90.02}} + \begin{pmatrix} -0,373 \\ +0,186 \\ +0,202 \end{pmatrix}.$$

6. Преобразование координат из системы координат ITRF-2008 в систему ПЗ-90.11

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90.11}} = \begin{pmatrix} 1 & -0,00001 \cdot 10^{-6} & -0,00020 \cdot 10^{-6} \\ +0,00001 \cdot 10^{-6} & 1 & -0,00009 \cdot 10^{-6} \\ +0,00020 \cdot 10^{-6} & +0,00009 \cdot 10^{-6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ITRF-2008}} + \begin{pmatrix} +0,003 \\ +0,001 \\ -0,000 \end{pmatrix}.$$

7. В качестве примера приведено соотношение для обратного преобразования координат из системы ПЗ-90.11 в систему ПЗ-90.02

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90.02}} = (1 + 0,008 \cdot 10^{-6}) \begin{pmatrix} 1 & +0,02041 \cdot 10^{-6} & +0,01716 \cdot 10^{-6} \\ -0,02041 \cdot 10^{-6} & 1 & +0,01115 \cdot 10^{-6} \\ -0,01716 \cdot 10^{-6} & -0,01115 \cdot 10^{-6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90.11}} + \begin{pmatrix} +0,373 \\ -0,186 \\ -0,202 \end{pmatrix}.$$

Характеристики модели аномального гравитационного поля Земли в виде ряда сферических функций до 70-й степени (ПЗ–2002/70с)

Исходные данные: результаты спутниковых наблюдений

Исходные параметры:

большая полуось a	6 378 136,0 м
коэффициент \bar{C}_{20}	$- 484,165 3863 \cdot 10^{-6}$
скорость вращения Земли ω	$0,729 2115 \cdot 10^{-4}$ рад/с
значение fM	$398 600,4418$ км ³ /с ²

В таблице П5.1 представлены характеристики модели АГПЗ в виде степенных дисперсий и их погрешностей для коэффициентов $\Delta\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ разложения возмущающего потенциала в ряд по сферическим функциям, аномалий силы тяжести и высот квазигеоида.

Таблица П5.1

Степень n	Характеристика					
	c_n	m_{c_n}	Δg_n , мГал	$m_{\Delta g_n}$, мГал	ζ_n , м	m_{ζ_n} , м
1	2	3	4	5	6	7
2	0,281 265E-05	0,100 826E-09	2,75	0,0001	17,93	0,0006
3	0,296 999E-05	0,292 918E-09	5,82	0,0006	18,94	0,001
4	0,151 337E-05	0,411 659E-09	4,44	0,001	9,65	0,002
5	0,116 896E-05	0,598 152E-09	4,58	0,002	7,45	0,003
6	0,905 458E-06	0,738 650E-09	4,43	0,004	5,77	0,004
7	0,753 147E-06	0,970 655E-09	4,42	0,006	4,80	0,006
8	0,487 644E-06	0,114 753E-08	3,34	0,008	3,11	0,007
9	0,426 644E-06	0,140 826E-08	3,34	0,01	2,72	0,008
10	0,355 045E-06	0,161 139E-08	3,13	0,01	2,26	0,01
11	0,262 531E-06	0,189 590E-08	2,57	0,01	1,67	0,01
12	0,151 398E-06	0,206 915E-08	1,63	0,02	0,96	0,01
13	0,239 996E-06	0,235 061E-08	2,82	0,02	1,53	0,01
14	0,146 748E-06	0,263 123E-08	1,86	0,03	0,93	0,01
15	0,140 885E-06	0,296 830E-08	1,93	0,04	0,89	0,01
16	0,137 230E-06	0,333 901E-08	2,01	0,04	0,87	0,02
17	0,113 641E-06	0,366 910E-08	1,78	0,05	0,72	0,02
18	0,117 559E-06	0,405 278E-08	1,95	0,06	0,74	0,02
19	0,100 039E-06	0,440 281E-08	1,76	0,07	0,63	0,02
20	0,934 784E-07	0,478 448E-08	1,74	0,08	0,59	0,03
21	0,977 608E-07	0,515 717E-08	1,91	0,10	0,62	0,03
22	0,904 674E-07	0,554 179E-08	1,86	0,11	0,57	0,03
23	0,806 259E-07	0,592 484E-08	1,73	0,12	0,51	0,03
24	0,676 026E-07	0,629 790E-08	1,52	0,14	0,43	0,04
25	0,765 550E-07	0,667 096E-08	1,80	0,15	0,48	0,04
26	0,624 120E-07	0,706 333E-08	1,52	0,17	0,39	0,04
27	0,536 845E-07	0,753 045E-08	1,36	0,19	0,34	0,04
28	0,650 545E-07	0,795 718E-08	1,72	0,21	0,41	0,05
29	0,594 330E-07	0,840 042E-08	1,63	0,23	0,37	0,05
30	0,604 324E-07	0,884 043E-08	1,71	0,25	0,38	0,05

1	2	3	4	5	6	7
31	0,568 533E-07	0,929 183E-08	1,67	0,27	0,36	0,05
32	0,548 741E-07	0,974 403E-08	1,66	0,29	0,34	0,06
33	0,546 498E-07	0,102 052E-07	1,71	0,31	0,34	0,06
34	0,608 397E-07	0,106 712E-07	1,96	0,34	0,38	0,06
35	0,584 932E-07	0,111 444E-07	1,94	0,37	0,37	0,07
36	0,505 784E-07	0,116 234E-07	1,73	0,39	0,32	0,07
37	0,518 073E-07	0,121 087E-07	1,82	0,42	0,33	0,07
38	0,453 287E-07	0,125 973E-07	1,64	0,45	0,28	0,08
39	0,483 193E-07	0,130 983E-07	1,79	0,48	0,30	0,08
40	0,400 794E-07	0,136 051E-07	1,53	0,51	0,25	0,08
41	0,438 596E-07	0,141 172E-07	1,71	0,55	0,27	0,09
42	0,433 150E-07	0,146 346E-07	1,74	0,58	0,27	0,09
43	0,404 610E-07	0,151 588E-07	1,66	0,62	0,25	0,09
44	0,396 641E-07	0,156 888E-07	1,67	0,66	0,25	0,10
45	0,396 143E-07	0,162 248E-07	1,70	0,69	0,25	0,10
46	0,427 009E-07	0,167 666E-07	1,88	0,73	0,27	0,10
47	0,417 365E-07	0,173 144E-07	1,88	0,78	0,26	0,11
48	0,373 048E-07	0,178 680E-07	1,71	0,82	0,23	0,11
49	0,324 528E-07	0,184 274E-07	1,52	0,86	0,20	0,11
50	0,377 305E-07	0,189 924E-07	1,81	0,91	0,24	0,12
51	0,358 821E-07	0,195 631E-07	1,75	0,95	0,22	0,12
52	0,338 484E-07	0,201 394E-07	1,69	1,00	0,21	0,12
53	0,378 241E-07	0,207 214E-07	1,92	1,05	0,24	0,13
54	0,343 982E-07	0,213 087E-07	1,78	1,10	0,21	0,13
55	0,319 094E-07	0,219 016E-07	1,68	1,15	0,20	0,13
56	0,345 203E-07	0,224 998E-07	1,86	1,21	0,22	0,14
57	0,345 580E-07	0,231 033E-07	1,89	1,26	0,22	0,14
58	0,301 858E-07	0,237 122E-07	1,68	1,32	0,19	0,15
59	0,334 572E-07	0,243 263E-07	1,90	1,38	0,21	0,15
60	0,302 668E-07	0,249 456E-07	1,74	1,44	0,19	0,15
61	0,293 159E-07	0,255 701E-07	1,72	1,50	0,18	0,16
62	0,285 973E-07	0,261 997E-07	1,70	1,56	0,18	0,16
63	0,276 423E-07	0,268 332E-07	1,67	1,63	0,17	0,17
64	0,269 906E-07	0,274 735E-07	1,66	1,69	0,17	0,17
65	0,240 269E-07	0,281 126E-07	1,50	1,76	0,15	0,17
66	0,272 278E-07	0,287 647E-07	1,73	1,83	0,17	0,18
67	0,267 866E-07	0,293 906E-07	1,73	1,90	0,17	0,18
68	0,251 156E-07	0,300 568E-07	1,64	1,97	0,16	0,19
69	0,283 859E-07	0,306 393E-07	1,89	2,04	0,18	0,19
70	0,229 427E-07	0,313 086E-07	1,55	2,11	0,14	0,20
Σ(2 - 70)	0,476 359E-05	0,133 327E-06	18,59	7,39	30,20	0,85

$$c_n = \left(\sum_{m=0}^n (\overline{\Delta C_{nm}}^2 + \overline{S_{nm}}^2) \right)^{1/2},$$

$$m_{c_n} = \left(\sum_{m=0}^n (m_{C_{nm}}^2 + m_{S_{nm}}^2) \right)^{1/2},$$

$$\Delta g_n = \left(\frac{fM}{a^2} \right) (n-1) c_n,$$

$$m_{\Delta g_n} = \left(\frac{fM}{a^2} \right) (n-1) m_{c_n},$$

$$\zeta_n = R c_n,$$

$$m_{\zeta_n} = R m_{c_n},$$

где R – средний радиус Земли ($R = 6\,371\,000$ м).

В последней строке таблицы выделены суммарные величины характеристик спутниковой модели АГПЗ и их погрешностей.

Характеристики модели аномального гравитационного поля Земли в виде ряда сферических функций до 360-й степени (ПЗ-2002/360)

Исходные данные:

спутниковая модель АГПЗ ПЗ-2002/70с (Приложение 5)

каталог средних аномалий силы тяжести с дискретностью 30'x30'

Характеристика исходного каталога АСТ, мГал: 259 200 значений АСТ

минимальное значение – 300,3

максимальное значение 366,7

среднее значение – 0,58

среднеквадратическое значение 28,68

осредненное значение среднеквадратической погрешности 6,80

В таблице Пб.1 представлены величины степенных дисперсий значений АСТ, ВКГ и их погрешностей, вычисленных по модели.

Таблица Пб.1

Степень <i>n</i>	Характеристика			
	Δg_n , мГал	$m_{\Delta g_n}$, мГал	ζ_n , м	m_{ζ_n} , м
1	2	3	4	5
2	2,75	0,0001	17,93	0,0006
3	5,82	0,0006	18,94	0,002
4	4,44	0,001	9,65	0,003
5	4,58	0,002	7,45	0,004
6	4,43	0,003	5,77	0,005
7	4,42	0,005	4,80	0,006
8	3,34	0,008	3,11	0,007
9	3,34	0,01	2,72	0,008
10	3,13	0,01	2,26	0,010
11	2,56	0,01	1,66	0,012
12	1,65	0,02	0,98	0,013
13	2,83	0,02	1,53	0,014
14	1,92	0,03	0,96	0,016
15	1,92	0,03	0,89	0,018
16	2,02	0,04	0,87	0,020
17	1,85	0,05	0,75	0,022
18	2,00	0,06	0,76	0,024
19	1,77	0,07	0,64	0,025
20	1,82	0,08	0,62	0,027
21	2,02	0,08	0,65	0,029
22	1,94	0,09	0,60	0,030
23	1,78	0,10	0,52	0,032
24	1,60	0,11	0,45	0,033
25	1,84	0,12	0,50	0,034
26	1,62	0,13	0,42	0,035
27	1,32	0,14	0,33	0,036
28	1,81	0,15	0,43	0,037
29	1,64	0,16	0,38	0,038
30	1,72	0,17	0,38	0,038

31	1,71	0,18	0,37	0,039
32	1,67	0,18	0,35	0,039
33	1,80	0,19	0,36	0,040
34	2,04	0,20	0,40	0,040
35	2,01	0,21	0,38	0,040
36	1,79	0,21	0,33	0,040
37	1,92	0,22	0,34	0,040
38	1,73	0,23	0,30	0,040
39	1,84	0,23	0,31	0,040
40	1,68	0,24	0,28	0,040
41	1,83	0,25	0,29	0,040
42	1,88	0,25	0,29	0,040
43	1,77	0,26	0,27	0,040
44	1,77	0,26	0,26	0,040
45	1,87	0,27	0,27	0,040
46	1,99	0,27	0,28	0,039
47	1,96	0,28	0,27	0,039
48	1,80	0,28	0,24	0,039
49	1,65	0,28	0,22	0,039
50	1,88	0,29	0,25	0,039
51	1,73	0,29	0,22	0,038
52	1,79	0,30	0,22	0,038
53	2,02	0,30	0,25	0,038
54	1,92	0,31	0,23	0,038
55	1,78	0,31	0,21	0,037
56	1,99	0,31	0,23	0,037
57	1,96	0,32	0,22	0,037
58	1,73	0,32	0,19	0,037
59	1,92	0,32	0,21	0,036
60	1,80	0,33	0,19	0,036
61	1,78	0,33	0,19	0,036
62	1,81	0,33	0,19	0,036
63	1,82	0,34	0,19	0,035
64	1,69	0,34	0,17	0,035

1	2	3	4	5
65	1,66	0,34	0,16	0,035
66	1,79	0,35	0,17	0,035
67	1,82	0,35	0,17	0,034
68	1,81	0,35	0,17	0,034
69	1,84	0,35	0,17	0,034
70	1,59	0,36	0,15	0,034
Σ(2 - 70)	18,83	1,89	30,38	0,273
71	1,61	0,37	0,15	0,034
72	1,86	0,37	0,17	0,034
73	1,68	0,37	0,15	0,034
74	1,90	0,37	0,17	0,033
75	1,71	0,38	0,15	0,033
76	1,65	0,38	0,14	0,033
77	1,70	0,38	0,14	0,033
78	1,69	0,38	0,14	0,032
79	1,73	0,39	0,14	0,032
80	1,68	0,39	0,13	0,032
81	1,87	0,39	0,15	0,032
82	1,99	0,39	0,16	0,032
83	1,92	0,40	0,15	0,031
84	1,74	0,40	0,13	0,031
85	1,69	0,40	0,13	0,031
86	1,84	0,40	0,14	0,031
87	1,74	0,41	0,13	0,031
88	1,71	0,41	0,12	0,030
89	1,68	0,41	0,12	0,030
90	1,57	0,41	0,11	0,030
91	1,77	0,42	0,12	0,030
92	1,70	0,42	0,12	0,030
93	1,73	0,42	0,12	0,030
94	1,78	0,42	0,12	0,029
95	1,73	0,42	0,12	0,029
96	1,56	0,43	0,10	0,029
97	1,70	0,43	0,11	0,029
98	1,80	0,43	0,12	0,029
99	1,63	0,43	0,10	0,029
100	1,67	0,44	0,11	0,028
101	1,44	0,44	0,09	0,028
102	1,71	0,44	0,11	0,028
103	1,89	0,44	0,12	0,028
104	1,67	0,44	0,10	0,028
105	1,54	0,45	0,09	0,028
106	1,67	0,45	0,10	0,028
107	1,65	0,45	0,10	0,027
108	1,72	0,45	0,10	0,027
109	1,65	0,45	0,09	0,027
110	1,80	0,46	0,10	0,027
111	1,70	0,46	0,10	0,027
112	1,58	0,46	0,09	0,027
113	1,63	0,46	0,09	0,027

114	1,73	0,47	0,10	0,027
115	1,74	0,47	0,09	0,027
116	1,62	0,47	0,09	0,026
117	1,63	0,47	0,09	0,026
118	1,66	0,47	0,09	0,026
119	1,66	0,48	0,09	0,026
120	1,66	0,48	0,09	0,026
121	1,59	0,48	0,08	0,026
122	1,48	0,48	0,07	0,026
123	1,65	0,49	0,08	0,026
124	1,57	0,49	0,08	0,026
125	1,66	0,49	0,08	0,025
126	1,66	0,49	0,08	0,025
127	1,72	0,50	0,08	0,025
128	1,47	0,49	0,07	0,025
129	1,53	0,50	0,07	0,025
130	1,49	0,50	0,07	0,025
131	1,49	0,50	0,07	0,025
132	1,46	0,50	0,07	0,025
133	1,56	0,51	0,07	0,025
134	1,51	0,51	0,07	0,025
135	1,50	0,51	0,07	0,025
136	1,53	0,51	0,07	0,024
137	1,50	0,51	0,07	0,024
138	1,60	0,52	0,07	0,024
139	1,43	0,52	0,06	0,024
140	1,54	0,52	0,07	0,024
141	1,48	0,52	0,06	0,024
142	1,34	0,52	0,06	0,024
143	1,43	0,53	0,06	0,024
144	1,49	0,53	0,06	0,024
145	1,42	0,53	0,06	0,024
146	1,41	0,53	0,06	0,024
147	1,42	0,53	0,06	0,024
148	1,41	0,54	0,06	0,023
149	1,41	0,54	0,06	0,023
150	1,37	0,54	0,06	0,023
151	1,52	0,55	0,06	0,023
152	1,36	0,54	0,05	0,023
153	1,41	0,55	0,06	0,023
154	1,27	0,55	0,05	0,023
155	1,45	0,55	0,06	0,023
156	1,39	0,55	0,05	0,023
157	1,37	0,56	0,05	0,023
158	1,29	0,56	0,05	0,023
159	1,40	0,56	0,05	0,023
160	1,28	0,56	0,05	0,023
161	1,33	0,56	0,05	0,023
162	1,38	0,57	0,05	0,023
163	1,41	0,57	0,05	0,023

1	2	3	4	5
164	1,38	0,57	0,05	0,023
165	1,43	0,57	0,05	0,023
166	1,37	0,58	0,05	0,022
167	1,41	0,58	0,05	0,022
168	1,44	0,58	0,05	0,022
169	1,32	0,58	0,05	0,022
170	1,35	0,58	0,05	0,022
171	1,37	0,59	0,05	0,022
172	1,25	0,59	0,04	0,022
173	1,30	0,59	0,04	0,022
174	1,41	0,60	0,05	0,022
175	1,29	0,59	0,04	0,022
176	1,20	0,59	0,04	0,022
177	1,28	0,60	0,04	0,022
178	1,22	0,60	0,04	0,022
179	1,34	0,60	0,04	0,022
180	1,29	0,60	0,04	0,022
181	1,20	0,60	0,04	0,022
182	1,26	0,61	0,04	0,022
183	1,20	0,61	0,04	0,021
184	1,25	0,61	0,04	0,021
185	1,18	0,61	0,04	0,021
186	1,20	0,61	0,04	0,021
187	1,22	0,61	0,04	0,021
188	1,22	0,62	0,04	0,021
189	1,14	0,61	0,03	0,021
190	1,13	0,62	0,03	0,021
191	1,17	0,62	0,04	0,021
192	1,22	0,62	0,04	0,021
193	1,18	0,62	0,04	0,021
194	1,10	0,62	0,03	0,021
195	1,14	0,62	0,03	0,021
196	1,11	0,62	0,03	0,021
197	1,11	0,63	0,03	0,020
198	1,15	0,63	0,03	0,020
199	1,11	0,63	0,03	0,020
200	1,09	0,63	0,03	0,020
201	1,12	0,63	0,03	0,020
202	1,08	0,63	0,03	0,020
203	1,06	0,63	0,03	0,020
204	1,09	0,64	0,03	0,020
205	1,01	0,63	0,03	0,020
206	1,07	0,64	0,03	0,020
207	1,07	0,64	0,03	0,020
208	1,06	0,64	0,03	0,020
209	1,05	0,64	0,03	0,020
210	1,15	0,65	0,03	0,020
211	1,09	0,65	0,03	0,020
212	1,06	0,65	0,03	0,020
213	1,02	0,65	0,03	0,019

214	1,10	0,65	0,03	0,020
215	1,02	0,65	0,03	0,019
216	1,00	0,65	0,03	0,019
217	1,03	0,65	0,03	0,019
218	1,01	0,65	0,03	0,019
219	1,09	0,66	0,03	0,019
220	1,01	0,66	0,03	0,019
221	0,99	0,66	0,02	0,019
222	0,99	0,66	0,02	0,019
223	0,98	0,66	0,02	0,019
224	0,97	0,66	0,02	0,019
225	0,97	0,66	0,02	0,019
226	0,98	0,66	0,02	0,019
227	0,91	0,66	0,02	0,019
228	0,92	0,66	0,02	0,019
229	0,98	0,67	0,02	0,019
230	0,94	0,67	0,02	0,019
231	0,98	0,67	0,02	0,019
232	1,01	0,67	0,02	0,019
233	0,96	0,67	0,02	0,018
234	0,95	0,67	0,02	0,018
235	0,93	0,67	0,02	0,018
236	0,92	0,67	0,02	0,018
237	0,92	0,67	0,02	0,018
238	0,91	0,67	0,02	0,018
239	0,90	0,67	0,02	0,018
240	0,90	0,68	0,02	0,018
241	0,90	0,68	0,02	0,018
242	0,89	0,68	0,02	0,018
243	0,87	0,68	0,02	0,018
244	0,83	0,68	0,02	0,018
245	0,88	0,68	0,02	0,018
246	0,87	0,68	0,02	0,018
247	0,84	0,68	0,02	0,018
248	0,80	0,68	0,02	0,018
249	0,82	0,68	0,02	0,017
250	0,88	0,69	0,02	0,018
251	0,83	0,68	0,02	0,017
252	0,87	0,69	0,02	0,017
253	0,86	0,69	0,02	0,017
254	0,80	0,68	0,02	0,017
255	0,81	0,69	0,02	0,017
256	0,79	0,69	0,02	0,017
257	0,79	0,69	0,02	0,017
258	0,76	0,69	0,01	0,017
259	0,79	0,69	0,01	0,017
260	0,78	0,69	0,01	0,017
261	0,79	0,69	0,01	0,017
262	0,74	0,69	0,01	0,017
263	0,78	0,69	0,01	0,017
264	0,73	0,69	0,01	0,017

1	2	3	4	5
265	0,73	0,69	0,01	0,017
266	0,77	0,69	0,01	0,017
267	0,77	0,70	0,01	0,017
268	0,74	0,69	0,01	0,017
269	0,74	0,70	0,01	0,017
270	0,71	0,69	0,01	0,016
271	0,77	0,70	0,01	0,017
272	0,75	0,70	0,01	0,016
273	0,69	0,69	0,01	0,016
274	0,75	0,70	0,01	0,016
275	0,70	0,70	0,01	0,016
276	0,73	0,70	0,01	0,016
277	0,69	0,70	0,01	0,016
278	0,75	0,71	0,01	0,016
279	0,73	0,70	0,01	0,016
280	0,71	0,70	0,01	0,016
281	0,74	0,71	0,01	0,016
282	0,72	0,71	0,01	0,016
283	0,69	0,70	0,01	0,016
284	0,67	0,70	0,01	0,016
285	0,66	0,70	0,01	0,016
286	0,70	0,71	0,01	0,016
287	0,65	0,70	0,01	0,016
288	0,68	0,71	0,01	0,016
289	0,65	0,71	0,01	0,016
290	0,68	0,71	0,01	0,016
291	0,67	0,71	0,01	0,016
292	0,68	0,71	0,01	0,016
293	0,68	0,71	0,01	0,015
294	0,68	0,71	0,01	0,015
295	0,71	0,72	0,01	0,015
296	0,67	0,71	0,01	0,015
297	0,65	0,71	0,01	0,015
298	0,63	0,71	0,01	0,015
299	0,63	0,71	0,01	0,015
300	0,64	0,71	0,01	0,015
301	0,65	0,71	0,01	0,015
302	0,61	0,71	0,01	0,015
303	0,65	0,72	0,01	0,015
304	0,63	0,71	0,01	0,015
305	0,63	0,72	0,01	0,015
306	0,63	0,72	0,01	0,015
307	0,61	0,71	0,01	0,015
308	0,63	0,72	0,01	0,015
309	0,67	0,72	0,01	0,015
310	0,61	0,72	0,01	0,015
311	0,61	0,72	0,01	0,015
312	0,60	0,72	0,01	0,015
313	0,60	0,72	0,01	0,015

314	0,57	0,71	0,01	0,014
315	0,60	0,72	0,01	0,015
316	0,57	0,72	0,01	0,014
317	0,62	0,72	0,01	0,014
318	0,65	0,73	0,01	0,015
319	0,60	0,72	0,01	0,014
320	0,63	0,73	0,01	0,014
321	0,62	0,73	0,01	0,014
322	0,62	0,73	0,01	0,014
323	0,61	0,73	0,01	0,014
324	0,58	0,72	0,01	0,014
325	0,57	0,72	0,01	0,014
326	0,59	0,72	0,01	0,014
327	0,56	0,72	0,01	0,014
328	0,59	0,73	0,01	0,014
329	0,56	0,72	0,01	0,014
330	0,54	0,72	0,01	0,014
331	0,57	0,72	0,01	0,014
332	0,54	0,72	0,01	0,014
333	0,56	0,72	0,01	0,014
334	0,55	0,72	0,01	0,014
335	0,56	0,72	0,01	0,014
336	0,57	0,73	0,01	0,014
337	0,55	0,72	0,01	0,014
338	0,56	0,73	0,01	0,014
339	0,54	0,72	0,01	0,014
340	0,56	0,73	0,01	0,014
341	0,57	0,73	0,01	0,014
342	0,54	0,73	0,01	0,013
343	0,55	0,73	0,01	0,013
344	0,54	0,73	0,01	0,013
345	0,53	0,73	0,01	0,013
346	0,51	0,72	0,009	0,013
347	0,55	0,73	0,01	0,013
348	0,52	0,73	0,008	0,013
349	0,51	0,72	0,008	0,013
350	0,51	0,72	0,009	0,013
351	0,54	0,73	0,01	0,013
352	0,53	0,73	0,009	0,013
353	0,53	0,73	0,008	0,013
354	0,51	0,73	0,008	0,013
355	0,52	0,73	0,007	0,013
356	0,51	0,73	0,006	0,013
357	0,52	0,73	0,008	0,013
358	0,53	0,73	0,005	0,013
359	0,51	0,73	0,009	0,013
360	0,52	0,73	0,007	0,013
Σ(2 - 360)	27,37	10,72	30,40	0,45

В таблице выделены суммарные величины степенных дисперсий значений АСТ, ВКГ и их погрешностей, вычисленных по модели:

- для степеней n от 2 по 70, соответствующих комбинированной модели АГПЗ до 70-й степени (ПЗ-2002/70);

- для степеней n от 2 по 360, соответствующих высокостепенной модели АГПЗ до 360-й степени (ПЗ-2002/360).

Модель аномального гравитационного поля Земли ТМ-60

Таблица П7.1

№ п/п	Масса ($\varepsilon \cdot 10^{10}$)	Прямоугольные геоцентрические координаты точечных масс		
		X, км	Y, км	Z, км
1	2	3	4	5
1	-1 917 861,343	-1 597,53455	3 389,08854	-1 206,07844
2	-7 649,811	5 243,88105	2 173,09105	31,67769
3	-23 204 717,367	-694,74764	-2 543,95209	3 010,82934
4	-8 601 525,203	597,26083	4 124,29275	3 032,72188
5	-39 262 968,108	1 472,01984	2 496,13550	2 305,68074
6	-37 656 928,613	-1 395,72710	522,57926	1 219,80230
7	55 417,233	-4 729,43278	241,06220	-1 386,75430
8	-1 122 388,574	1 613,74542	-1 389,46971	-4 742,37198
9	11 553 321,883	-737,33302	4 223,69658	-89,84823
10	-3 212 166,768	-3 498,93844	2 123,53095	-2 780,28445
11	-127 570,128	2 443,27977	-2 075,43783	-3 115,11405
12	537 718,408	1 399,38281	-2 714,24422	-1 999,26660
13	159 431,526	-1 807,95598	4 038,16007	-1 984,43463
14	-9 621 707,493	500,99426	2 417,51767	2 081,23547
15	14 954 047,019	564,56372	4 169,62120	3 107,28151
16	-1 454 978,047	-3 606,22095	2 202,63232	2 555,27655
17	12 173,463	3 494,94521	-2 225,41218	3 504,56634
18	6 235 318,028	2 819,10268	1 215,19399	3 031,84264
19	-4 022 993,036	830,78873	1 187,36734	2 665,51499
20	-13 233 537,348	-2 407,50792	-987,75326	1 168,97751
21	-837 955,460	2 745,40696	3 312,38455	561,61201
22	66 944,487	474,28039	1 205,35801	-4 546,03756
23	9 533 469,996	-1 675,28817	-797,14875	-3 048,67319
24	13 126,101	1 951,39223	-5 027,13641	-1 609,06073
25	133 490 487,677	-1 131,17750	-625,93077	614,81653
26	11 202,018	4 552,11518	1 485,42650	-1 997,43144
27	-8 306 318,912	32,85983	1 869,79667	-2 877,64543
28	1 563 860,673	-3 588,59466	2 192,00472	2 532,32304
29	-4 110 249,075	-1 688,88208	-2 509,59158	997,39780
30	-708 432,828	142,71007	-2 365,17339	3 559,90481
31	115 758,347	-2 583,62219	3 876,78111	-1 530,49081
32	47 117,768	-4 410,11412	-1 491,17613	1 951,16572
33	3 060 709,563	-3 512,99151	2 136,54197	-2 789,00902
34	125 694,630	2 887,19498	-1 520,35002	-2 929,00588
35	-19 909 835,138	-1 221,99104	-1 430,21334	2 886,63494
36	-25 600 026,158	-795,89525	4 094,06397	-148,43103
37	8 998 492,144	-859,93100	-2 675,58249	3 049,08749
38	6 460 340,213	134,47321	-3 777,76920	-737,29613
39	22 635 646,931	2 030,13210	2 786,99103	1 094,12609
40	14 963 823,854	-894,96828	3 946,71389	-241,43049
41	104 200 607,824	1 424,84214	2 420,76271	1 954,22532
42	-29 025,051	3 640,95418	2 890,38428	-1 299,38754
43	-25 923 827,511	-1 666,65137	-1 236,38163	-177,16683

1	2	3	4	5
44	4 710,121	-2 926,62377	1 305,39588	4 683,40996
45	-72 296 468,140	1 704,30580	2 570,01705	1 437,94150
46	11 488 188,566	-1 329,71266	-1 480,67585	3 122,43463
47	30 871,376	2 993,13075	-3 221,87772	2 310,62018
48	-6 821 341,595	539,11732	4 204,18554	3 168,98432
49	4 053 215,384	520,10547	-3 574,66707	-271,75382
50	2 364 380,549	-1 696,20051	1 611,26783	2 166,50206
51	-5 107 799,845	-2 806,42940	90,03200	-437,20618
52	1 152 914,935	1 613,29970	-1 398,25374	-4 728,63714
53	14 079 228,613	1 331,61419	-1 428,22398	234,32978
54	24 148,390	2 240,63930	2 260,34015	-3 797,81205
55	14 981 240,134	-523,57471	-2 437,64320	3 040,87357
56	-7 746 811,230	2 751,33446	1 231,49383	2 975,90618
57	-52 402 113,809	490,27870	-1 222,02040	299,60165
58	-9 702 053,744	214,47365	-3 717,91494	-621,72796
59	6 998 066,913	43,26692	1 953,11104	-2 943,24995
60	-11 022 424,436	-1 649,80829	-755,81754	-2 992,38699

Локальная модель аномального гравитационного поля Земли в виде потенциала притяжения точечных масс
(образец исполнения)

Локальная модель АГПЗ представляет аномальное ГПЗ в целом с дополнительной детализацией в локальной области. Каждая точечная масса описывается четырьмя параметрами - координатами X, Y, Z , задающими ее пространственное положение, и характеристикой массы ε .

ЛМ АГПЗ состоит из планетарной, региональной и нескольких локальных подсистем. В качестве планетарной подсистемы принята модель ТМ-60 (Приложение 7), полученная путем аппроксимации возмущающего потенциала, представленного спутниковой моделью ПЗ-2002/70с до $n \sim 14$. Региональная и локальные подсистемы детализируют представление ГПЗ в ограниченных областях. Область действия и характеристики ЛМ АГПЗ, включающей 260 ТМ, приведены в таблицах П8.1 и П8.2, а структура и параметры этой модели - в таблице П8.3.

Таблица П8.1 – Границы области действия локальной модели АГПЗ

Широта, градусы		Долгота восточная, градусы	
Север	Юг	Запад	Восток
80	68	68	98

Таблица П8.2 – Общие характеристики локальной модели АГПЗ

Название	Число ТМ	Детальность исходных данных
Планетарная подсистема	60	12° x 12°
Региональная подсистема	25	5° x 5°
Локальная подсистема 1	49	60' x 90'
Локальная подсистема 2	50	30' x 60'
Локальная подсистема 3	76	15' x 30'

Таблица П8.3 – Параметры локальной модели АГПЗ

№ ТМ	Масса ($\varepsilon \cdot 10^{10}$)	X , км	Y , км	Z , км
1	2	3	4	5
1	-1 917 861,343	-1 597,53455	3 389,08854	-1 206,07844
2	-7 649,811	5 243,88105	2 173,09105	31,67769
3	-23 204 717,367	-694,74764	-2 543,95209	3 010,82934
...
61	-7 403,655	1 042,131	2 631,301	4 664,285
62	1 958,729	858,888	-877,295	5 701,957
63	-3 978,285	1 224,054	-361,399	5 531,942

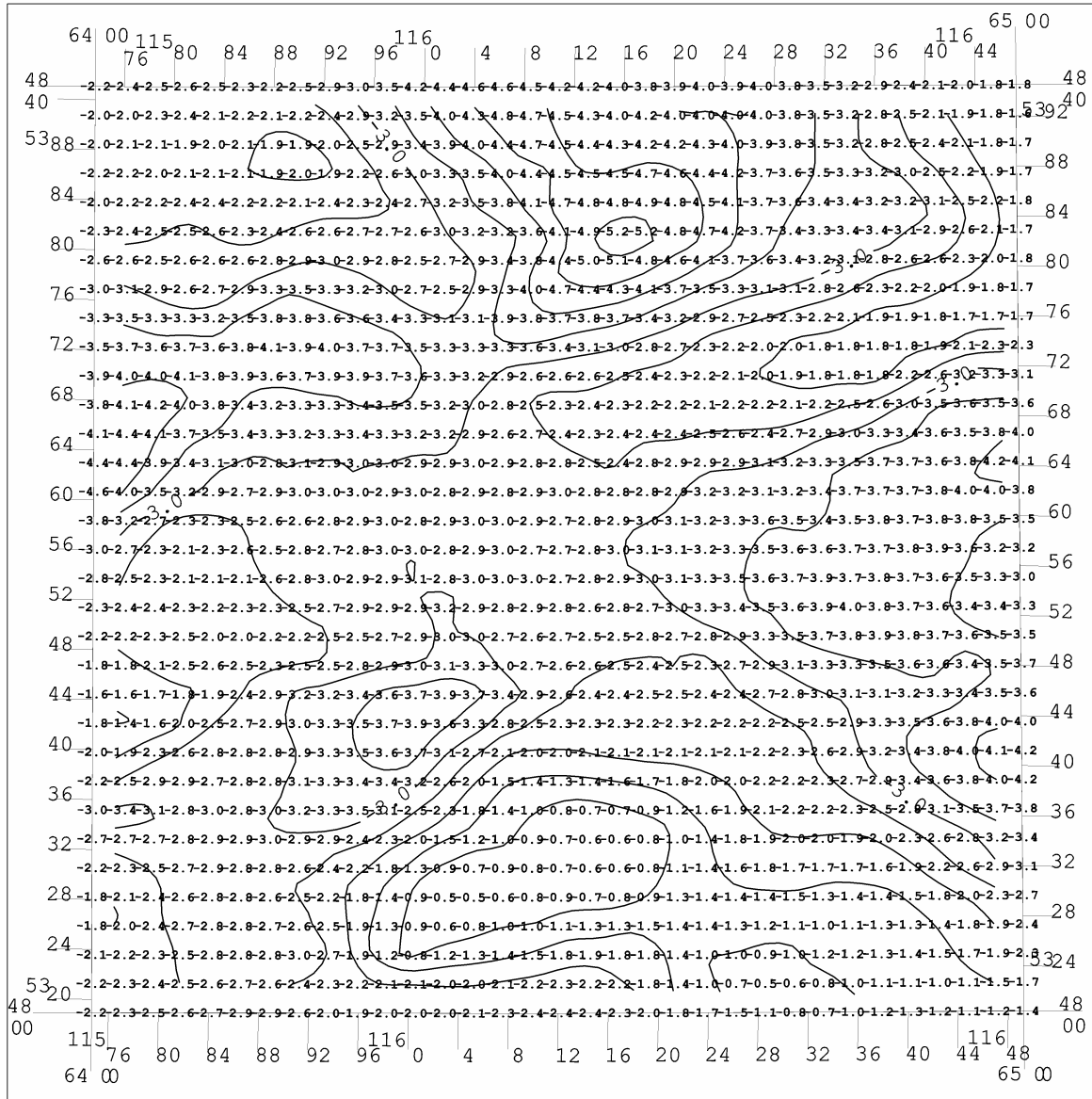
1	2	3	4	5
...
86	-161,253	2 660,226	1 021,165	5 554,288
87	131,050	1 038,208	1 510,602	5 954,431
88	576,454	611,501	611,501	6 110,897
...
135	39,202	1 779,268	1 688,463	5 810,007
136	-60,782	1 516,884	1 776,043	5 814,581
137	-76,032	1 901,081	1 075,580	5 880,511
...
185	-21,849	2 057,484	1 578,763	5 751,765
186	13,226	1 460,070	1 080,395	6 042,025
187	-19,403	1 619,154	934,819	6 027,000
...
260	-8,296	1 575,183	1 275,558	5 973,493

**Графический аналог цифровой модели аномалий силы тяжести
(образец исполнения)**

**КАРТА АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ
Редукция Буге ($\sigma = 2,3 \text{ г/см}^3$)
М-41-III**

Нормальная формула Гельмерта 1901 - 1909 гг.

Гравиметрическая система 1971 г.

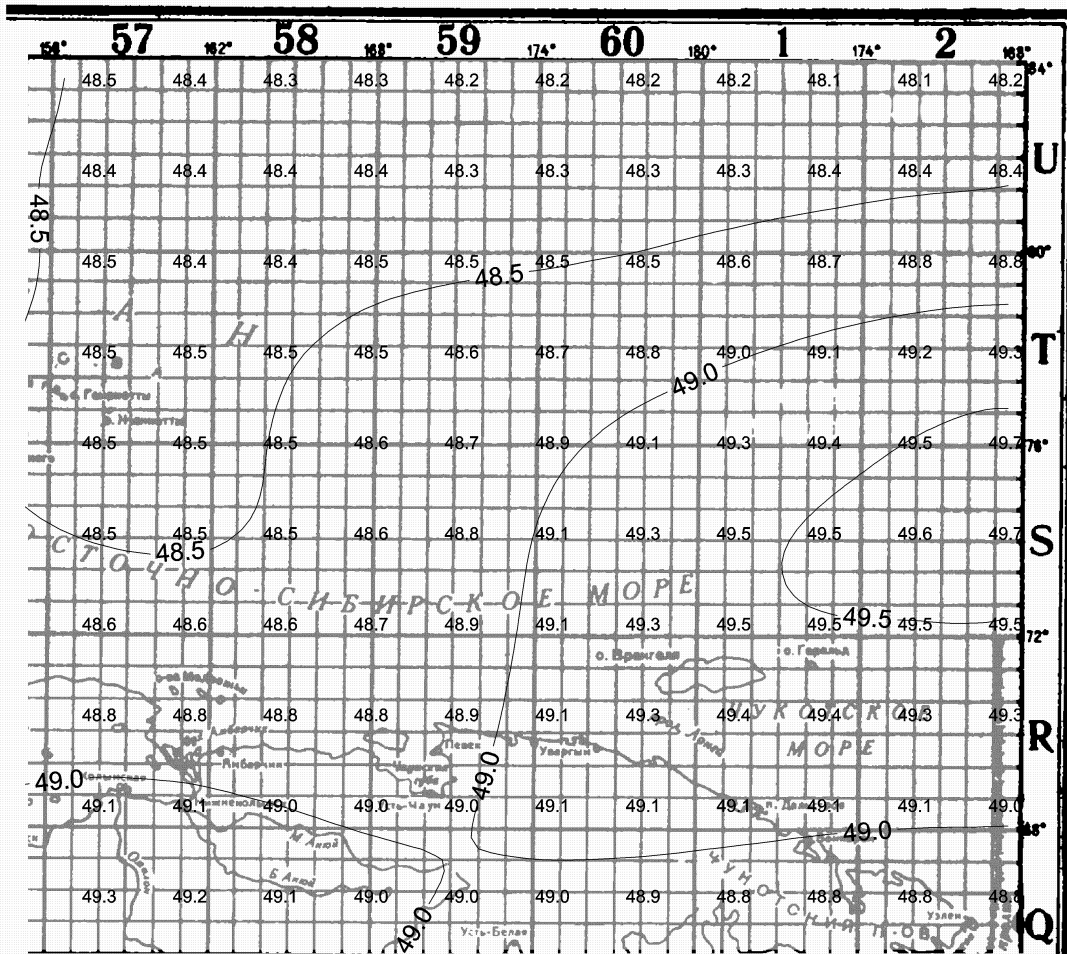


Карта составлена в 2002 году

Средняя квадратическая ошибка определения АСТ ± 1 мГал
Изоаномалы проведены через 0,5 мГал
Примечание -
Шаг подписанных значений:
- по широте - 1,25'
- по долготе - 1,875'

**Графический аналог цифровой модели высот квазигеоида
(образец исполнения)**

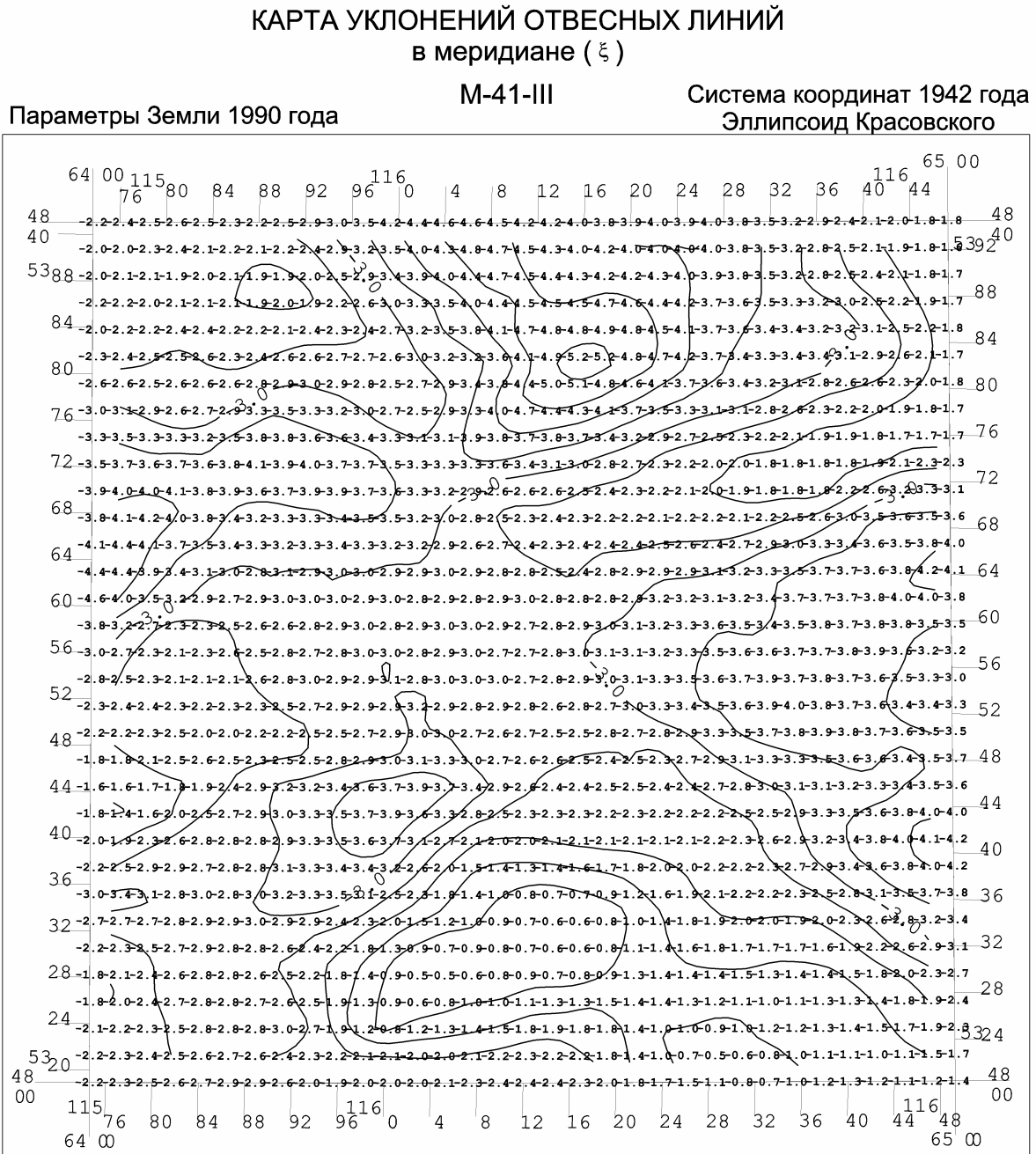
**КАРТА ВЫСОТ КВАЗИГЕОИДА
над общеземным эллипсоидом
(Параметры Земли 1990 г.)**



Карта составлена в 1995 году

Средняя квадратическая ошибка определения ВКГ ± 1 м
Сплошные линии равных высот проведены через 0,5 м

**Графический аналог цифровой модели уклонений отвесных линий
(образец исполнения)**



Карта составлена в 2002 году

Средняя квадратическая ошибка определения:

- составляющей $\xi = \pm 0,5''$

- поправки $\Delta A = \pm 0,5''$

Сплошные линии равных значений ξ проведены
через $0,5''$

Примечание -

Шаг подписанных значений ξ :

- по широте - $1,25'$

- по долготе - $1,875'$