Институт проблем информатики
Академии наук Республики Татарстан

Казанский государственный технологический
университет

И.З. Батыршин

# ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Казань
Отечество
2001

ББК 22.12
УДК 510
Б28

Печатается по постановлению
Ученого совета Института проблем информатики
Академии наук Республики Татарстан
и по решению Ученого Совета
Казанского государственного технологического университета

Рецензент:
*д.ф.м.н., проф. В.Д. Соловьев*

**И.З. Батыршин. Основные операции нечеткой логики и их обобщения.** – Казань: Отечество, 2001. – 100 с., ил.

В книге рассматриваются свойства операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания нечеткой логики и определяемых ими операций пересечения, объединения и дополнения нечетких множеств. В первой главе рассматриваются классические операции нечеткой логики, введенные Заде, и исследуются свойства алгебры Клини. Во второй главе изучаются инволютивные и неинволютивные операции отрицания и методы их генерации. В третьей главе даются основные сведения о *t*-нормах и *t*-конормах, обсуждаются методы генерации параметрических классов неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции и примеры применения этих операций в задачах нечеткого моделирования.

Предназначено для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области мягких вычислений и разработки интеллектуальных информационных систем.

Издание работы осуществлено при финансовой поддержке Фонда НИОКР и Академии наук Республики Татарстан в рамках Программы развития приоритетных направлений науки в РТ.

ISBN 5-9222-0034-8

## ВВЕДЕНИЕ

Термин “нечеткая логика” используется обычно в двух различных смыслах. В узком смысле, нечеткая логика это логическое исчисление, являющееся расширением многозначной логики. В ее широком смысле, который сегодня является преобладающим в использовании, нечеткая логика равнозначна теории нечетких множеств. С этой точки зрения нечеткая логика в ее узком смысле является разделом нечеткой логики в ее широком смысле [26].

В работе обсуждаются различные подходы к определению основных операций нечеткой логики, под которыми понимаются операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, определенные на множестве значений принадлежности, истинности, правдоподобности, а также определяемые ими операции пересечения, объединения и дополнения нечетких множеств. В нечеткой логике терминологическое отличие между операциями над значениями принадлежности и операциями над нечеткими множествами в определенной мере стирается, поскольку операции над нечеткими множествами определяются поэлементно с помощью операций над степенями принадлежности, а лингвистические связки могут интерпретироваться и как операции над значениями принадлежности и как операции над нечеткими множествами. Например, в нечетких моделях в правилах типа *«Если ТЕМПЕРАТУРА МАЛАЯ и ДАВЛЕНИЕ ВЫСОКОЕ то ПЛОТНОСТЬ СРЕДНЯЯ»* лингвистическая связка *«и»* может интерпретироваться как конъюнкция значений истинности нечетких предикатов *МАЛАЯ(t)* и *ВЫСОКОЕ(d)* при определенных значениях термов $t$ и $d$. Эта связка может также интерпретироваться и как операция пересечения нечетких (цилиндрических) отношений, определяемых нечеткими множествами *МАЛАЯ* и *ВЫСОКОЕ* в декартовом произведении множеств значений температур и давлений. Более обще, связка *«и»* может интерпретироваться в задачах нечеткого моделирования как некоторая функция над значениями принадлежности *МАЛАЯ(t)* и *ВЫСОКОЕ(d)* конкретных числовых значений температуры и давления нечетким множествам *МАЛАЯ* и *ВЫСОКОЕ*. Естественно, что в каждом случае определение конкретных операций должно быть четко определено.

Рассматриваемые в работе операции являются основными операциями нечеткой логики в том смысле, что все конструкции нечеткой логики основываются на операциях конъюнкции, дизъюнкции и отрицания или на определяемых ими операциях над нечеткими множествами. В настоящее время в нечеткой логике в качестве операций конъюнкции и дизъюнкции широко используются $t$-нормы и $t$-конормы, пришедшие в нечеткую логику из теории вероятностных метрических пространств. Эти операции достаточно хорошо изучены и лежат в основе многих формальных построений нечеткой логики. В то же время расширение области приложений нечеткой логики и возможностей нечеткого моделирования вызывает необходимость обобщения этих операций. Одно направление связано с ослаблением аксиоматики этих операций с целью расширения инструментария нечеткого моделирования. Например, решение задач идентификации нечетких моделей и их оптимизации по параметрам операций вызывает необходимость рассмотрения неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции с целью построения простых параметрических классов этих операций. Другое направление обобщения операций конъюнкции и дизъюнкции нечеткой логики связано с заменой множества значений принадлежности, правдоподобности [0,1] на линейное или частично упорядоченное множество лингвистических оценок правдоподобности или на списки таких оценок правдоподобности. Это направление обобщения основных операций нечеткой логики, с одной стороны, вызывается необходимостью разработки экспертных систем, в которых значения истинности, правдоподобности фактов и правил оцениваются экспертом или пользователем непосредственно в лингвистической шкале и носят качественный характер. С другой стороны, это обобщение основных операций нечеткой логики вызывается смещением направления активного развития нечеткой логики от моделирования количественных процессов, поддающихся измерению, к моделированию человеческих процессов восприятия и принятия решений на основе гранулирования информации и вычисления словами [124 - 127].

Естественным обобщением инволютивных операций отрицания нечеткой логики являются неинволютивные отрицания. Подобные отрицания представляют самостоятельный интерес и рассматриваются в нечеткой и неклассических логиках. Необходимость исследования подобных операций отрицания вызывается также введением в рассмотрение обобщенных операций конъюнкции и дизъюнкции, связанных друг с другом с помощью операции отрицания.

В первой главе книги рассматриваются основные операции нечеткой логики, введенные Заде. Соответствующая алгебра нечетких множеств является алгеброй Клини, занимая промежуточное положение между алгебрами Де Моргана и булевыми алгебрами. Алгебры Клини характеризуются в классе алгебр Де Моргана, исследуются подклассы алгебр Клини, метрические алгебры Клини и меры нечеткости на алгебрах Клини. В заключение приводится аксиоматика для операций Заде.

Во второй главе исследуются свойства отрицаний. Рассматриваются инволютивные отрицания и методы их генерации. Исследуются неинволютивные отрицания, среди которых основное внимание уделяется до настоящего времени слабо изученным сжимающим и разжимающим отрицаниям. Рассматриваются методы генерации сжимающих и разжимающих отрицаний и изучаются свойства биективных неинволютивных отрицаний.

В третьей главе рассматриваются обобщения операций конъюнкции и дизъюнкции, введенных Заде. Рассматривается аксиоматика *t*-норм и *t*-конорм, традиционно применяемых в нечеткой логике в качестве операций конъюнкции и дизъюнкции, приводятся методы их генерации и примеры параметрических операций этого типа. *t*-нормы и *t*-конормы в настоящее время достаточно хорошо изучены, поэтому основное внимание в третьей главе уделено обобщениям этих операций. Рассматривается несколько классов неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции и даются методы генерации этих операций. Приводятся примеры параметрических конъюнкций и дизъюнкций нового типа, имеющие более простой вид, чем параметрические *t*-нормы и *t*-конормы, и по этой причине более удобные для их использования в задачах оптимизации нечетких моделей по параметрам операций. Приводятся примеры использования параметрических конъюнкций в задачах нечеткого моделирования.

Тематика книги определяется научными интересами автора и в основном содержит результаты, полученные при участии автора, либо содержит смежные результаты других авторов и в основном опубликованные на английском языке. Ввиду ограниченности объема в книгу не удалось включить первоначально планировавшиеся результаты автора по строго монотонным операциям на порядковых шкалах (по алгебре лексикографических оценок правдоподобности) и их приложениям в экспертных системах [7, 8, 27, 55]. Операции импликации, лежащие в основе многих формальных построений нечеткой логики и широко используемые в системах нечеткого логического вывода в данной работе не рассматриваются [37, 40, 64, 72, 74, 75, 86, 100, 116]. В работе не рассматриваются также операции агрегирования, обобщающие статистические средние, по которым в настоящее время проводятся активные исследования [22, 65, 75, 85, 90, 120]. В книге не рассматриваются юнинормы и *OWA*-операторы, объединяющие операции конъюнкции, дизъюнкции и агрегирования, операторы дефаззификации, используемые в нечетком моделировании, нечеткие реляционные операторы и многое другое [1, 22, 23, 32, 82, 84, 88, 90, 94, 95, 100, 120, 121]. В конце глав приводятся краткие библиографические ссылки как на результаты, обсуждаемые в тексте книги, так и на работы по смежной тематике. По этой причине библиографические ссылки в самом тексте работы минимальны.

Формулы нумеруются отдельно по главам. Определения и теоремы имеют сплошную нумерацию внутри одного раздела.

Автор выражает признательность своим друзьям и коллегам доктору М. Вагенкнехту из Университета прикладных наук Циттау/Горлитц, Германия, профессору О. Кайнаку из Босфорского университета г.

Стамбул, Турция и профессору И. Рудашу из Политехнического института г. Будапешт, Венгрия, плодотворное сотрудничество с которыми явилось причиной появления многих результатов этой работы. Особую признательность автор хотел бы выразить своим учителям проф. В. Вагину и проф. Д. Поспелову, которые стимулировали в течение многих лет исследования автора в области нечеткой логики и интеллектуальных систем. Автор хотел бы также с благодарностью отметить ту поддержку, которую он неизменно встречал у проф. Ю. Кожевникова как в первые годы своих научных исследований в области нечеткой логики, так и особенно в последние годы научного сотрудничества в области интеллектуальных информационных систем. Автор также признателен проф. В.В. Скворцову, благодаря которому он прочел первую статью по теории нечетких множеств, определившую его основное направление научных исследований.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда НИОКР и Академии наук Республики Татарстан.

# ГЛАВА 1. ОПЕРАЦИИ ЗАДЕ И АЛГЕБРЫ КЛИНИ

## 1. Операции Заде

Обычному подмножеству *A* универсального множества *X* можно поставить в соответствие его характеристическую функцию

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in A \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Операциям пересечения, объединения и дополнения множеств взаимно однозначным образом ставятся в соответствие операции над их характеристическими функциями, определяемые поэлементно (для всех $x \in X$):

$$(\chi_A \cap \chi_B)(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x),$$
$$(\chi_A \cup \chi_B)(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x),$$
$$(\chi_{\urcorner A})(x) = \neg \chi_A(x),$$

где $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ - булевы функции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания такие, что

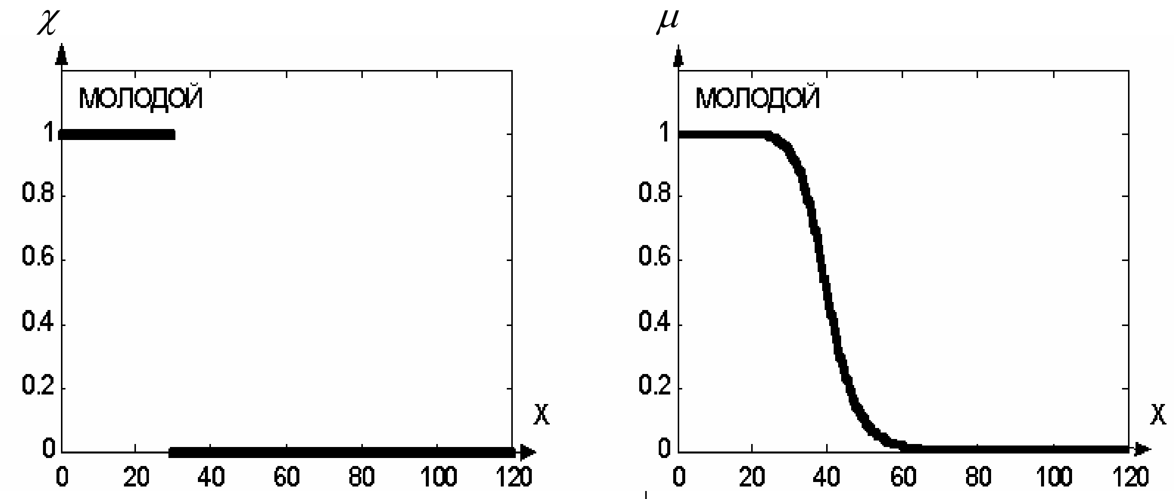
$$0\wedge 0 = 0; \quad 0\wedge 1 = 0; \quad 1\wedge 0 = 0, \quad 1\wedge 1 = 1;$$
$$0\vee 0 = 0; \quad 0\vee 1 = 1; \quad 1\vee 0 = 1; \quad 1\vee 1 = 1;$$
$$\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0.$$

Для отношения включения множеств выполняется: $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $\chi_A(x) \le \chi_B(x)$ для всех $x \in X$.

Таким образом, понятие множества можно заменить понятием характеристической функции, вместо булевой алгебры множеств рассматривать булеву алгебру характеристических функций и т.д.

Понятие нечеткого множества введено как обобщение понятия характеристической функции множества. Нечеткое подмножество *A* универсального множества *X* задается функцией принадлежности $\mu_A: X \to L$, где $L = [0,1]$. Для каждого $x \in X$ величина $\mu_A(x)$ интерпретируется как степень принадлежности элемента *x* нечеткому множеству *A*. Существуют и другие интерпретации функции принадлежности. Нечеткое множество обычно имеет некоторую лингвистическую метку, соответствующую содержательной интерпретации самого нечеткого множества. Например, если $X = [0,120]$ – множество числовых значений возраста, то на *X* могут быть определены нечеткие множества с лингвистическими метками

МОЛОДОЙ, СТАРЫЙ, ОЧЕНЬ СТАРЫЙ и т.д. На Рис. 1. показаны возможные способы представления понятия МОЛОДОЙ с помощью характеристической функции множества и функции принадлежности нечеткого множества.




а) | б)

Рис. 1. а) Характеристическая функция обычного множества
б) Функция принадлежности нечеткого множества

В отличие от обычного множества нечеткое множество позволяет учитывать степени принадлежности понятиям-классам, не имеющим четких границ, которые характерны для человеческого мышления. Вопросы интерпретации и задания функций принадлежности исследуются во многих работах и здесь не рассматриваются. Заметим лишь, что при нечетком моделировании систем, задаваемых набором экспериментальных данных, функции принадлежности могут изначально определяться достаточно произвольно в виде треугольных, трапециевидных, гауссовских и др. типа параметрических функций принадлежности, которые в дальнейшем могут настраиваться для уменьшения ошибки рассогласования между нечеткой моделью и моделируемой системой.

При исследовании алгебраических свойств нечетких множеств удобно отождествлять их с функциями принадлежности, поэтому там, где это не будет вызывать недоразумений, под нечетким множеством $A$ будет пониматься сама функция принадлежности $A{:}X \to L$, и величина $A(x)$ будет интерпретироваться как степень принадлежности элемента $x$ нечеткому множеству $A$.

Операции над нечеткими множествами задаются аналогично операциям над характеристическими функциями поэлементно:

$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x),$$
$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x),$$

$$(\rceil A)(x) = \neg A(x).$$

В качестве операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания на [0,1] Заде предложил следующее обобщение булевых функций:

$$x \wedge y = \min(x,y),$$
$$x \vee y = \max(x,y),$$
$$\neg x = 1 - x.$$

В общем случае операции и отношения на множестве нечетких множеств определяются также поэлементно с помощью операций и отношений на элементах из $X$. В частности имеем

$A = B$ тогда и только тогда, когда $A(x) = B(x)$ для всех $x \in X$,
$A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A(x) \le B(x)$ для всех $x \in X$.

Как обычно, пишут $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и $A \ne B$. Очевидно, что отношение включения нечетких множеств является отношением частичного порядка, т.е. удовлетворяет условиям:

| | |
|---|---|
| $A \subseteq A$ | (рефлексивность), |
| из $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ следует $A = B$ | (антисимметричность), |
| из $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ следует $A \subseteq C$ | (транзитивность). |

Пусть $F(X)$ – множество всех нечетких подмножеств множества $X$. Обозначим $\varnothing$ и $U$ следующие нечеткие множества: $\varnothing(x) = 0$ и $U(x) = 1$ для всех $x \in X$. $\varnothing$ и $U$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами по отношению частичного порядка $\subseteq$.

Нетрудно убедиться, что введенные операции удовлетворяют на $F(X)$ следующим тождествам:

| | | |
|---|---|---|
| $A \cap A = A,$ | $A \cup A = A$ | (идемпотентность), |
| $A \cap B = B \cap A,$ | $A \cup B = B \cup A$ | (коммутативность), |
| $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$ | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | (ассоциативность), |
| $A \cap (A \cup B) = A,$ | $A \cup (A \cap B) = A$ | (поглощение), |
| $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ | | |
| $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | | (дистрибутивность), |
| $\rceil(\rceil A) = A$ | | (инволютивность), |
| $\rceil(A \cap B) = \rceil A \cup \rceil B,$ | $\rceil(A \cup B) = \rceil A \cap \rceil B$ | (законы Де Моргана), |
| $A \cap \varnothing = \varnothing,$ $A \cup \varnothing = \varnothing,$ | $A \cup U = U,$ $A \cap U = A$ | (граничные условия). |

Первые четыре тождества определяют решетку. Дистрибутивная решетка с инволютивной операцией дополнения, на которой выполняются законы Де Моргана называется решеткой Де Моргана. Решетка Де Моргана с наименьшим $\varnothing$ и наибольшим $U$ элементами называется алгеброй Де Моргана.

Отношение частичного упорядочения $\subseteq$ элементов решетки связано с решеточными операциями $\cap$ и $\cup$ следующим образом:

$$A \subseteq B \text{ тогда и только тогда, когда } A \cap B = A,\ A \cup B = B. \qquad (1)$$

Отметим также следующие свойства решеток, которые будут в дальнейшем использоваться в доказательствах:

$$\text{из } A \subseteq B,\ A \subseteq C \text{ следует } A \subseteq B \cap C,$$
$$\text{из } A \subseteq C,\ B \subseteq C \text{ следует } A \cup B \subseteq C.$$

В алгебре Де Моргана выполняется:

$$\rceil\varnothing = U, \qquad \rceil U = \varnothing;$$
$$\text{из } A \subseteq B \text{ следует } \rceil B \subseteq \rceil A. \qquad (2)$$

Как известно, алгебра обычных множеств является булевой алгеброй, операции которой кроме перечисленных тождеств алгебры Де Моргана удовлетворяют тождествам

$$A \cap \rceil A = \varnothing, \qquad A \cup \rceil A = U. \qquad (3)$$

Для алгебры нечетких множеств выполняется в общем случае лишь следующее более слабое условие

$$(A \cap \rceil A) \cap (B \cup \rceil B) = A \cap \rceil A \qquad \text{(условие нормальности)}.$$

Это тождество часто записывают в виде:

$$A \cap \rceil A \subseteq B \cup \rceil B \qquad \text{(условие Клини)}.$$

Нормальная алгебра Де Моргана $<F; \cap, \cup, \rceil, \varnothing, U>$ называется алгеброй Клини. Алгебры Де Моргана и алгебры Клини играют важную роль при изучении неклассических логик.

Элемент $A$ алгебры Де Моргана $F$, удовлетворяющий условиям (3), будет называться булевым.

В алгебрах Клини выполняются следующие соотношения [83]:

$$(A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)\subseteq(A\cap\rceil B)\cup(\rceil A\cap B)=(A\cup B)\cap(\rceil A\cup\rceil B)\subseteq(A\cup\rceil A)\cap(B\cup\rceil B),$$
$$(A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)\subseteq(A\cap B)\cup(\rceil A\cap\rceil B)=(A\cup\rceil B)\cap(\rceil A\cup B)\subseteq(A\cup\rceil A)\cap(B\cup\rceil B).$$

## 2. Фокальные алгебры Клини

Пусть $<F;\cap,\cup,\rceil,\varnothing,U>$ - алгебра Де Моргана, и $Z$ является подалгеброй $F$ по операциям $\cap$, $\cup$, $\rceil$, т.е. из $A,B\in Z$ следует $A\cap B\in Z$ и $A\cup B\in Z$, и из $A\in Z$ следует $\rceil A\in Z$. Подалгебра $Z$ будет называться интервальной подалгеброй $F$, если $Z$ является интервалом $Z = [C,D]$, где $C$ и $D$ – некоторые элементы из $F$ такие, что $C\subseteq D$, и $Z$ состоит из всех элементов $A\in F$ таких, что $C\subseteq A\subseteq D$.

*Теорема* 2.1. Алгебра Де Моргана $F$ является алгеброй Клини тогда и только тогда, когда пересечение любых ее двух интервальных подалгебр не пусто, и $F$ является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда она содержит лишь одну непустую интервальную подалгебру (совпадающую с $F$).

Для доказательства теоремы докажем ряд вспомогательных утверждений.

*Лемма* 2.2. Для любого элемента $C\in F$ интервал $[C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]$ является интервальной подалгеброй $F$, и любая интервальная подалгебра $Z$ алгебры Де Моргана $F$ представима в виде $Z = [C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]$ для некоторого $C\in F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Z = [C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]$ для некоторого $C\in F$. Поскольку любой интервал решетки $F$ является ее подалгеброй по операциям $\cap$ и $\cup$, достаточно показать, что $Z$ замкнуто относительно операции дополнения $\rceil$. Из $A\in Z$ следует $C\cap\rceil C\subseteq A\subseteq C\cup\rceil C$, из (2) получаем $\rceil(C\cup\rceil C)\subseteq\rceil A\subseteq\rceil(C\cap\rceil C)$, откуда следует $C\cap\rceil C\subseteq\rceil A\subseteq C\cup\rceil C$, т.е. $\rceil A\in Z$.

Пусть $Z = [C,D]$ - интервальная подалгебра $F$. Тогда $\rceil C, \rceil D\in Z$, что дает $C\subseteq\rceil D$, $\rceil C\subseteq D$, и из (2) получим $\rceil(\rceil D)=D\subseteq\rceil C$, что приводит к $\rceil C= D$. Из $C\subseteq D=\rceil C$ и (1) следует $C=C\cap\rceil C$, $C\cup\rceil C=D$ и $Z = [C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]$.

Лемма доказана.

Интервальная подалгебра $Z = [C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]$ алгебры Де Моргана $F$ будет обозначаться $Z(C)$ и называться интервальной подалгеброй $F$, порожденной элементом $C\in F$, а элемент $C$ - элементом, порождающим интервальную подалгебру $Z(C)$. Ясно, что $Z$ является подмножеством любой интервальной подалгебры, содержащей $C$.

На множестве $F$ можно задать отношение эквивалентности $\approx$ такое, что $A\approx B$, если $A$ и $B$ порождают одну и ту же интервальную подалгебру.

*Лемма* 2.3. Каждый класс эквивалентности $E$ отношения $\approx$ в алгебре Де Моргана $F$ образует булеву алгебру с операциями $\cap, \cup, \rceil$ из $F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $E$ - произвольный класс эквивалентности отношения $\approx$ в алгебре Де Моргана $F$, и $A$, $B$ - произвольные элементы из $E$. Тогда $A$ и $B$ порождают одну и ту же интервальную подалгебру $Z= [A\cap\rceil A,\ A\cup\rceil A] = [B\cap\rceil B,\ B\cup\rceil B]$, причем из $A,B\in Z$ следует, что $E\subseteq Z$. Из инволютивности $\rceil$ следует, что $\rceil A, \rceil B\in E$. Покажем, что $A\cap B$ принадлежит $E$. Обозначим $C = A\cap B$. Тогда, учитывая (1) и $A\cap\rceil A \subseteq B$, $B\cap\rceil B \subseteq A$, $A\cap\rceil A = B\cap\rceil B$, получим: $C\cap\rceil C = (A\cap B)\cap\rceil(A\cap B) = A\cap B\cap(\rceil A\cup\rceil B) = (A\cap B\cap\rceil A)\cup(A\cap B\cap\rceil B) = (A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B) = (A\cap\rceil A)$, далее имеем $C\cup\rceil C = \rceil(C\cap\rceil C) = \rceil(A\cap\rceil A) = A\cup\rceil A$, что дает $Z= [C\cap\rceil C,\ C\cup\rceil C]= Z(C)$, откуда следует $C\in E$ и $A\cap B\in E$. Аналогично показывается, что $A\cup B\in E$. Таким образом, $E$ является подалгеброй алгебры Де Моргана $F$. Учитывая, что для произвольного $A\in E$ элементы $A\cap\rceil A$ и $A\cup\rceil A$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами в $E$, получаем, что $E$ образует булеву алгебру.

*Лемма* 2.4. Для произвольных элементов $A,B$ алгебры Де Моргана $F$ выполняется $Z(A)\cap Z(B) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда выполняется

$$(A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)\subseteq (A\cup\rceil A)\cap(B\cup\rceil B) \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что пересечение интервальных подалгебр алгебры Де Моргана $F$, если оно не пусто, является интервальной подалгеброй $F$, так как пересечение подалгебр является подалгеброй, а пересечение интервалов является интервалом. Пусть $Z(A)\cap Z(B) \neq \varnothing$, тогда $Z(A)\cap Z(B) = \{C\in F \mid A\cap\rceil A\subseteq C\subseteq A\cup\rceil A$ и $B\cap\rceil B\subseteq C\subseteq B\cup\rceil B\} \neq \varnothing$, откуда следует $Z(A)\cap Z(B) = \{C\in F \mid (A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)\subseteq C\subseteq (A\cup\rceil A)\cap(B\cup\rceil B)\} \neq \varnothing$, что приводит к (4). Обратным путем показывается, что если существуют $A,B\in F$, для которых выполняется (4), то $Z(A)\cap Z(B)\neq \varnothing$.

*Лемма* 2.5. В алгебре Де Моргана условие Клини, условие (4) и условие

$$\text{из } A\subseteq \rceil A,\ B\subseteq \rceil B \text{ следует } A\cup B \subseteq \rceil A\cap\rceil B \tag{5}$$

попарно эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (5) $\Rightarrow$ (4). Из свойств операций $\cap$ и $\cup$ и законов Де Моргана следует: $A\cap\rceil A\subseteq A\cup\rceil A = \rceil(A\cap\rceil A)$, $B\cap\rceil B\subseteq B\cup\rceil B = \rceil(B\cap\rceil B)$, что совместно с (5) приводит к (4).

(4) $\Rightarrow$ (условие Клини). $A\cap\rceil A\subseteq (A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)\subseteq (A\cup\rceil A)\cap(B\cup\rceil B)\subseteq B\cup\rceil B$.

(Условие Клини) $\Rightarrow$ (5). Пусть выполняется $A\subseteq \rceil A$, $B\subseteq \rceil B$, тогда $A=A\cap\rceil A\subseteq B\cup\rceil B = \rceil B$, и $B=B\cap\rceil B\subseteq A\cup\rceil A = \rceil A$. Из $A\subseteq \rceil A$, $B\subseteq \rceil B$ и из $A\subseteq \rceil B$, $B\subseteq \rceil A$ следует $A\subseteq\rceil A\cap\rceil B$ и $B\subseteq\rceil A\cap\rceil B$, что дает $A\cup B \subseteq \rceil A\cap\rceil B$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1.

1) Если пересечение любых двух интервальных подалгебр $F$ не пусто, то из лемм 2.4 и 2.5 следует, что $F$ - нормальна.

2) Пусть $F$ – алгебра Клини, и $Z_1$, $Z_2$ – произвольные ее интервальные подалгебры. Из леммы 2.2 следует, что существуют некоторые $A,B\in F$, порождающие эти интервальные подалгебры, а из лемм 2.5 и 2.4 следует, что пересечение интервальных подалгебр $Z_1$, $Z_2$ не пусто.

3) Пусть $F$ - булева алгебра. Тогда для всех $A\in F$ выполняется $A\cap\rceil A = \varnothing$, $A\cup\rceil A = U$ и $Z(A) = [\varnothing,U] = F$.

4) Пусть $F$ содержит лишь одну интервальную подалгебру. Тогда отношение $\approx$ содержит лишь один класс эквивалентности, совпадающий с $F$, который в соответствии с леммой 2.3 является булевой алгеброй.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что алгебра Де Моргана, не являющаяся алгеброй Клини, содержит по крайней мере две интервальные подалгебры, пересечение которых пусто. Простейшим примером такой алгебры является множество из четырех элементов $F=\{\varnothing, A, B, U\}$, с диаграммой Хассе, представленой на рис. 2, и с операцией отрицания: $\rceil A = A$, $\rceil B = B$, $\rceil\varnothing = U$, $\rceil U = \varnothing$. Тогда $Z(A)=\{A\}$, $Z(B)=\{B\}$, $Z(\varnothing)= Z(U)= F$, и $Z(A)\cap Z(B)=\varnothing$.

*Определение* 2.6. Интервальная подалгебра, содержащаяся во всех других интервальных подалгебрах алгебры Клини $F$, называется центральной подалгеброй $F$ или фокусом $F$, а алгебра Клини, содержащая фокус, называется фокальной алгеброй Клини.

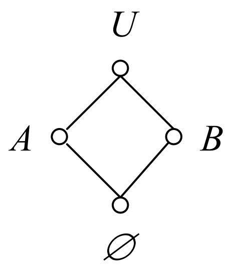



Рис. 2. Диаграмма Хассе четырехэлементного множества

Из теоремы 2.1 следует следующий результат.

*Следствие* 2.7. Фокус алгебры Клини, если он существует, является булевой алгеброй.

*Теорема* 2.8. В полных алгебрах Клини фокус всегда существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F$ - полная алгебра Клини. Из полноты $F$ следует существование в $F$ элементов

$$G = \sup_{A \in F} \{A \cap \rceil A\}, \qquad H = \inf_{B \in F} \{B \cup \rceil B\}. \tag{6}$$

Из условия Клини и определения *sup* и *inf* следует $G \subseteq B \cup \rceil B$ для всех $B \in F$ и $G \subseteq H$. Из леммы 2.2 следует, что произвольная интервальная подалгебра представима в виде $[C \cap \rceil C,\ C \cup \rceil C]$ для некоторого $C \in F,$ и из (6) и $G \subseteq H$ следует $C \cap \rceil C \subseteq G \subseteq H \subseteq C \cup \rceil C$, т.е. интервал $[G,H]$ содержится в любой интервальной подалгебре алгебры Клини $F$.

Из $A \cap \rceil A \subseteq G$ для всех $A \in F$ и из (2) следует $\rceil G \subseteq A \cup \rceil A$ для всех $A \in F$, и из (6) и определения *inf* получим $\rceil G \subseteq H$. Двойственно получаем $G \subseteq \rceil H$, и из (2) и инволютивности отрицания следует $H \subseteq \rceil G$. Сравнивая $\rceil G \subseteq H$ и $H \subseteq \rceil G$, получим $\rceil G = H$. Таким образом, имеем $[G,H] = [G, \rceil G] = [G \cap \rceil G,\ G \cup \rceil G]$, т.е. $[G,H]$ есть интервальная подалгебра $F$.

Теорема доказана.

Из теоремы 2.8 в частности следует, что полная алгебра Клини является фокальной алгеброй Клини.

*Теорема* 2.9. Алгебра Де Моргана $F$ является фокальной алгеброй Клини тогда и только тогда, когда в $F$ существует элемент $W$ такой, что на $F$ выполняется тождество:

$$(A \cap \rceil A) \cup (W \cap \rceil W) = W. \tag{7}$$

Докажем предварительно следующую лемму.

*Лемма* 2.10. Пусть $W$ - некоторый элемент алгебры Де Моргана $F$. Тогда на $F$ выполняется (7) тогда и только тогда, когда выполняется

$$W \cap \rceil W = W, \tag{8}$$

$$(A \cap \rceil A) \cup W = W. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (7), подставляя $W$ вместо $A$ и применяя идемпотентность, получим (8). Подставляя (8) в (7), получим (9).

Подставляя $W \cap \rceil W$ из (8) в левую часть (9) вместо $W$, получим (7).

Лемма 2.10 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы 2.9. Пусть в алгебре Де Моргана $F$ существует элемент $W$ такой, что (7) выполняется для всех элементов $A$ из $F$, тогда на $F$ выполняется (8), (9), что совместно с (1) дает:

$$W \subseteq \rceil W, \tag{10}$$
$$A \cap \rceil A \subseteq W. \tag{11}$$

Из (11) и (2), получим: $\rceil W \subseteq A \cup \rceil A$, что совместно с (11) и (10) дает: $A \cap \rceil A \subseteq W \subseteq \rceil W \subseteq A \cup \rceil A$, т.е. $[W, \rceil W] = [W \cap \rceil W, W \cup \rceil W]$, есть интервальная подалгебра, которая содержится в любой интервальной подалгебре $[A \cap \rceil A, A \cup \rceil A]$, и из теоремы 2.1 и определения 2.6 следует, что $F$ - фокальная алгебра Клини.

Пусть $F$ - фокальная алгебра Клини с фокусом $Z = [C \cap \rceil C, C \cup \rceil C]$. Обозначим $W = C \cap \rceil C$, тогда $\rceil W = C \cup \rceil C$, $Z = [W, \rceil W]$ и выполняется (10). Для каждого $A \in F$ фокус $Z$ содержится в интервальной подалгебре $Z(A) = [A \cap \rceil A, A \cup \rceil A]$ и выполняется $A \cap \rceil A \subseteq W \subseteq \rceil W \subseteq A \cup \rceil A$, откуда следует (11). Из (10) и (11) следует (8), (9) и (7).

Теорема доказана.

Как следует из теоремы 2.9, тождество (7) совместно с тождествами алгебры Де Моргана определяет многообразие фокальных алгебр Клини $<F; \cap, \cup, \rceil, \varnothing, U, W>$ с фокусом $[W, \rceil W]$. Очевидно, что любая булева алгебра с выделенным элементом $W = \varnothing$ также является фокальной алгеброй Клини.

Элемент $W$ алгебры Де Моргана, удовлетворяющий условию

$$\rceil W = W, \tag{12}$$

будет называться центральным элементом, а алгебры $<F; \cap, \cup, \rceil, \varnothing, U, W>$, определяемые системой тождеств алгебр Клини и тождеством (12) будут называться алгебрами Клини с центральным элементом (иногда алгебрами Клини называются именно такие алгебры).

Алгебра Клини с центральным элементом является фокальной алгеброй Клини с фокусом, состоящим из единственного элемента $W$: условие Клини и (12) приводят к $A \cap \rceil A \subseteq W \cup \rceil W = W$, к (9), (8) и (7).

В алгебрах Де Моргана с центральным элементом $W$ условие Клини эквивалентно условию

$$A \cap \rceil A \subseteq W. \tag{13}$$

В самом деле, из условия Клини и (12) следует (13): $A \cap \rceil A \subseteq W \cup \rceil W = W$. Из (13) и (12) получаем, учитывая (2): $W = \rceil W \subseteq \rceil (B \cap \rceil B) = B \cup \rceil B$ для всех $B$ из $F$, что совместно с (13) приводит к условию Клини.

*Теорема* 2.11. Алгебра Де Моргана $F$ с центральным элементом $W$ нормальна (является алгеброй Клини), тогда и только тогда, когда $W$ является единственным центральным элементом в $F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $F$ является алгеброй Клини с центральным элементом, то из того, что центральный элемент является интервальной подалгеброй, и из теоремы 2.1. следует его единственность.

Пусть $W$ единственный центральный элемент в алгебре Де Моргана $F$. Покажем, что $F$ нормальна. Предположим, что это не так, тогда в $F$ существует элемент $A$, для которого не выполняется (13). Обозначим $T= A\cup\rceil A$, $P=A\cap\rceil A$, $B=(W\cap T)\cup P$. Из законов Де Моргана и инволютивности отрицания имеем $\rceil T= P$ и $\rceil P=T$, что совместно с (12) и дистрибутивностью дает: $\rceil B=\rceil[(W\cap T)\cup P] = \rceil(W\cap T)\cap\rceil P = (\rceil W\cup\rceil T)\cap T =.(W\cup P)\cap T = (W\cap T)\cup(P\cap T)= (W\cap T)\cup P= B$. Таким образом, $B$ – центральный элемент. Имеем $A\cap\rceil A = P \subseteq (W\cap T)\cup P = B$, т.е. $A\cap\rceil A \subseteq B$. Поскольку в силу предположения для $W$ (13) не выполняется, получаем $B \neq W$, и $F$ имеет более одного центрального элемента, что противоречит тому, что $W$ – единственный центральный элемент в $F$.

Теорема доказана.

### 3. Метрические алгебры Клини и меры нечеткости

Мерой нечеткости (мерой энтропии) на алгебре Клини $<F;\cap,\cup,\rceil,\varnothing,U>$ называется вещественная функция на $F$ такая, что:

$Q1$. $d(\varnothing) = 0$;
$Q2$. $d(A) = d(\rceil A)$;
$Q3$. из $A\cap\rceil A \subset B\cap\rceil B$ следует $d(A)<d(B)$;
$Q4$. $d(A\cup B) + d(A\cap B) = d(A) + d(B)$.

Первоначально мера нечеткости была введена Де Люка и Термини [63] как аналог меры энтропии, как мера неопределенности, связанной с частичной принадлежностью элементов нечеткому множеству, как мера отличия нечеткого множества от обычного множества. В дальнейшем эта мера была обобщена на алгебры Клини и было показано, что она характеризует алгебры Клини и булевы алгебры в классе метрических алгебр Де Моргана.

Из $Q1$, $Q3$, граничных условий и из (12) следует неотрицательность меры нечеткости. Условие $Q2$ требует, чтобы мера нечеткости принимала одинаковые значения для нечеткого множества и его дополнения. Условие $Q3$ фактически оценивает близость нечетких множеств к обычным множествам, для которых выполняется $A\cap\rceil A=\varnothing$. Условие $Q4$

характеризует аддитивность меры нечеткости. В частности, при $A \cap B = \varnothing$ оно приводит к $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.

Вещественная функция $v$ на решетке $F$ такая, что

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) = v(A) + v(B), \tag{14}$$
$$\text{из } A \subset B \text{ следует } v(A) < v(B),$$

называется положительной оценкой на $F$. Из теории решеток известно, что положительная оценка $v$ определяет метрическую решетку $F$ с метрикой:

$$\rho(A,B) = v(A \cup B) - v(A \cap B).$$

Например, на алгебре $F(X)$ нечетких множеств, определенных на конечном универсуме $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, мощность нечеткого множества $v(A) = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)$ является положительной оценкой, а определяемой ею метрикой является функция $\rho(A,B) = \sum_{k=1}^{n} |A(x_k) - B(x_k)|$. Заметим, что в практических приложениях теории нечетких множеств, как правило, рассматриваются нечеткие множества, определенные на конечном универсуме $X$.

*Теорема* 3.1. Метрическая алгебра Де Моргана $\langle F; \cap, \cup, \rceil, \varnothing, U \rangle$ является алгеброй Клини тогда и только тогда, когда на $F$ может быть задана мера нечеткости $d$, причем, эта алгебра является булевой тогда и только тогда, когда $d$ всюду на $F$ равна нулю.

Для доказательства теоремы установим предварительно ряд свойств мер нечеткости на $F$.

*Предложение* 3.2.

$$d(A) = d(\rceil A) = d(A \cap \rceil A) = d(A \cup \rceil A), \tag{15}$$
$$d(A) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } A \text{ - булев элемент в } F. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (15) следует из $Q2$, инволютивности, законов Де Моргана и из $Q4$.

(16) следует из (15), (3), $Q1$ и из $Q3$, (3), (15), $Q1$.

*Предложение* 3.3. Функции

$$d(A) = v(A \cap \rceil A) - v(\varnothing), \tag{17}$$
$$d(A) = 0.5(\rho(\varnothing, U) - \rho(A, \rceil A)). \tag{18}$$
$$d(A) = v(U) - v(A \cup \rceil A), \tag{19}$$

являются мерами нечеткости на метрической алгебре Клини $F$ с положительной оценкой $v$ и определяемой ею метрикой $\rho$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение $Q1$ - $Q3$ для функции (17) очевидно. Покажем, что (17) удовлетворяет условию Q4. Из законов Де Моргана, (14) и свойств дистрибутивных решеток следует:

$d(A\cup B) + d(A\cap B) = v[(A\cup B)\cap\rceil(A\cup B)] - v(\varnothing)+v[(A\cap B)\cap\rceil(A\cap B)] - v(\varnothing)=$
$v[(A\cup B)\cap(\rceil A\cap\rceil B)] + v[(A\cap B)\cap(\rceil A\cup\rceil B)] - 2v(\varnothing)=$
$v[(A\cup B)\cap(\rceil A\cap\rceil B)\cup(A\cap B)\cap(\rceil A\cup\rceil B)]+v[(A\cup B)\cap(\rceil A\cap\rceil B)\cap(A\cap B)\cap(\rceil A\cup\rceil B)]-$
$2v(\varnothing)= v[(A\cap\rceil A\cap\rceil B)\cup(B\cap\rceil A\cap\rceil B)\cup(A\cap B\cap\rceil A)\cup(A\cap B\cap\rceil B)] +$
$v(\rceil A\cap\rceil B\cap A\cap B) - 2v(\varnothing)=$
$v[(A\cap\rceil A\cap B)\cup(A\cap\rceil A\cap\rceil B)\cup(B\cap\rceil B\cap A)\cup(B\cap\rceil B\cap\rceil A)] +v[(A\cap\rceil A)\cap(B\cap\rceil B)] -$
$2v(\varnothing)= v[(A\cap\rceil A)\cap(B\cup\rceil B)\cup(B\cap\rceil B)\cap(A\cup\rceil A)] +v[(A\cap\rceil A)\cap(B\cap\rceil B)] - 2v(\varnothing).$

Применяя условие нормальности к первому слагаемому и используя (14), получим:

$$d(A\cup B) + d(A\cap B) = v[(A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)] + v[(A\cap\rceil A)\cap(B\cap\rceil B)] - 2v(\varnothing) = v(A\cap\rceil A) + v(B\cap\rceil B) - 2v(\varnothing)= d(A) + d(B).$$

Выполнение $Q1$ – $Q4$ для функции (19) проверяется аналогично.

Функция (18) является полусуммой (17) и (19). Как это нетрудно увидеть, сумма мер нечеткости, взятых с положительными коэффициентами, также будет мерой нечеткости. Поэтому функция (18) также будет мерой нечеткости.

(18) дает естественную интерпретацию меры нечеткости как функции от расстояния между нечетким множеством и его дополнением.

Простейшая мера нечеткости вида (17) определяется мощностью нечеткого множества: $d(A)=\sum_{k=1}^{n}\min(A(x_k),(1-A(x_k)))$.

*Лемма* 3.4. Если алгебра Де Моргана $F$ не является нормальной, то не существует вещественной функции $d$ на $F$, удовлетворяющей условиям $Q1$– $Q4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $F$ не нормальна, и на ней определена функция $d$, удовлетворяющая условиям $Q1$ – $Q4$. Тогда существуют $A,B\in F$, для которых условие нормальности не выполняется, и из выполнения $(A\cap\rceil A)\cap(B\cup\rceil B)\subseteq A\cap\rceil A$ для всех $A$, $B$ следует строгое неравенство $(A\cap\rceil A)\cap(B\cup\rceil B)\subset A\cap\rceil A$. Обозначим $(A\cap\rceil A)\cap(B\cup\rceil B)$ через $C$, тогда получаем: $C\subset A\cap\rceil A\subseteq A\cup\rceil A\subseteq(A\cup\rceil A)\cup(B\cap\rceil B) = \rceil C$, откуда следует $C\cap\rceil C = C\subset A\cap\rceil A$, и из $Q3$ имеем $d(C) < d(A)$. Учитывая (15), получаем $d(\rceil C) = d(C) < d(A\cap\rceil A) = d(A\cup\rceil A)$, откуда следует

$$d(C) + d(\rceil C) = d[(A\cap\rceil A)\cap(B\cup\rceil B)]+d[(A\cup\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)] < d(A\cap\rceil A)+d(A\cup\rceil A). \qquad (20)$$

Так как для $A$ и $B$ условие Клини не выполняется, то из (2), инволютивности и законов Де Моргана следует, что не выполняется и двойственное соотношение $B\cap\rceil B \subseteq A\cup\rceil A$, откуда аналогично предыдущему получаем

$$d[(B\cap\rceil B)\cap(A\cup\rceil A)]+d[(B\cup\rceil B)\cup(A\cap\rceil A)] < d(B\cap\rceil B)+d(B\cup\rceil B).$$

Складывая последнее неравенство с (20), получаем противоречие с равенством: $d(A\cap\rceil A)+ d(A\cup\rceil A)+ d(B\cap\rceil B)+ d(B\cup\rceil B)= d[(A\cap\rceil A)\cap(B\cup\rceil B)]+ d[(A\cap\rceil A)\cup(B\cup\rceil B)] + d[(A\cup\rceil A)\cap(B\cap\rceil B)] + d[(A\cup\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)]$, которое следует из $Q4$, что доказывает лемму.

Теорема 3.1. следует из предложений 3.2, 3.3 и леммы 3.4.

Из свойств меры нечеткости (15) и свойств фокуса следует, что в метрических фокальных алгебрах Клини все элементы фокуса имеют максимальное значение нечеткости. Например, в алгебре $F(X)$ нечетких множеств, определенных на конечном универсуме $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ со значениями в $L = [0,1]$, центральным элементом является нечеткое множество $W$ с функцией принадлежности $W(x) = 0.5$ для всех $x\in X$, которое и имеет максимальную нечеткость. Если в качестве $L$ взять $L= \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$, определив операции на $L$ так же, как и на [0,1], то $F(X)$ будет фокальной алгеброй Клини с фокусом $[W,\rceil W]$, где $W(x) = 0.4$ и $\rceil W(x)= 0.6$ для всех $x\in X$. Все нечеткие множества из этого интервала имеют одинаковое максимальное значение меры нечеткости.

Метрика, удовлетворяющая на алгебре Де Моргана $F$ условию

$$\rho(A,B)= \rho(\rceil A,\rceil B),$$

называется симметричной. Можно показать, что метрика симметрична тогда и только тогда, когда определяющая ее оценка является симметричной, т.е. удовлетворяет на $F$ условию

$$v(A) + v(\rceil A) = v(\varnothing) + v(U).$$

Если оценка $v$ симметрична, и $\rho$ - определяемая ею метрика, то выражения (17) – (19) определяют одну и ту же меру нечеткости. На алгебре Клини $F$ с центральным элементом $W$ и симметричной метрикой мера нечеткости на $F$ может быть задана как расстояние от центрального элемента:

$$d(A) = 0.5\rho(\varnothing,U) - \rho(A,W).$$

Оценка $v$ называется нормализованной, если $v(\varnothing) = 0$. Если на алгебре Клини $F$ с центральным элементом $W$ задана мера нечеткости $d$, то с ее помощью можно задать на $F$ нормализованную симметричную оценку:

$$v(A) = 2d(A \cap W) - d(A),$$

и соответствующую ей симметричную метрику.

С помощью последнего соотношения можно вводить на алгебре Клини с центральным элементом положительные оценки и метрики, соответствующие логарифмической энтропии и другим мерам нечеткости, рассматриваемым на множестве нечетких множеств.

Можно показать справедливость следующего утверждения [41].

*Теорема* 3.5. В алгебре Клини с центральным элементом устанавливается взаимно однозначное соответствие между мерами нечеткости и нормализованными симметричными положительными оценками, между мерами нечеткости и симметричными метриками.

**4. Система аксиом для операций Заде**

Введенные Заде операции конъюнкции $x \wedge y = min(x,y)$ и дизъюнкции $x \vee y = max(x,y)$ однозначно определяются следующими аксиомами [38, 111]:

P1. Дистрибутивность.

P2. Монотонность (неубывание):

$$x \wedge y \le z \wedge u \quad \text{и} \quad x \vee y \le z \vee u, \qquad \text{если} \quad x \le z,\ y \le u.$$

P3. Граничные условия:

$$x \wedge 1 = 1 \wedge x = x, \ \ x \vee 0 = 0 \vee x = x.$$

Из монотонности и граничных условий следует выполнение условий:

$$0 \wedge x = 0, \qquad 1 \vee x = 1.$$

Далее выводится условие идемпотентности дизъюнкции:

$$x = x \wedge 1 = x \wedge (1 \vee 1) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge 1) = x \vee x,$$

и из $max(x,y) = max(x,y) \vee max(x,y) \ge x \vee y \ge max(x \vee 0, 0 \vee y) = max(x,y)$ следует $x \vee y = max(x,y)$. Аналогично выводится $x \wedge y = min(x,y)$.

Операция отрицания Заде может быть определена как функция $n{:}L\to L$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

$$N1.\ n(0) = 1, \qquad n(1) = 0,$$
$$N2.\ x - y = n(y) - n(x), \text{ для всех } x,y \in L.$$

Первая аксиома обобщает соответствующее свойство булева отрицания. Вторая означает, что приращение значений принадлежности и их отрицаний равны по величине и противоположны по знаку. Из этих аксиом следует $x + n(x) = 1$ для всех $x \in L$, что приводит к $n(x) = 1- x$.

Однако, в нечеткой логике исследуется более широкий класс отрицаний, определяемых аксиомой $N1$ и аксиомой невозрастания:

$$N3.\ n(y) \le n(x), \quad \text{если } x \le y.$$

Особый интерес представляют отрицания, удовлетворяющие также аксиоме инволютивности. Такие отрицания называются сильными отрицаниями. Кроме отрицания Заде $n(x) = 1 - x$ этим условиям удовлетворяет, например, отрицание: $n(x)=(1-x^2)^{1/2}$. Более подробно нечеткие отрицания будут рассматриваться в следующей главе.

Приведем без доказательства следующий результат [38, 111].

*Теорема* 4.1. Если непрерывные, неубывающие, ассоциативные и удовлетворяющие граничным условиям функции $\wedge$ и $\vee$ удовлетворяют законам Де Моргана для всех сильных отрицаний, то $x\wedge y = min(x,y)$ и $x\vee y= max(x,y)$.

## Библиографические комментарии к главе 1

Понятие нечеткого множества было введено Заде в 1965 году [123], где он ввел основные операции над нечеткими множествами. Там же он предложил также более «мягкие» алгебраические операции конъюнкции и дизъюнкции $x\wedge y= xy$ и $x\vee y = x+y-xy$, называемые в нечеткой логике также вероятностными конъюнкцией и дизъюнкцией соответственно. В 1966 году вышла статья Заде по нечетким множествам на русском языке [23].

Интерпретация функций принадлежности и методы их получения могут быть найдены в работах [1, 7, 10, 14, 18, 22 - 27, 31-33, 55, 66, 75-78, 80, 84, 88, 90, 105, 109, 124-127]. Параметрические функции принадлежности можно найти, например, в работах [1, 82, 90].

Использование нечетких множеств для описания лингвистических понятий и восприятий обсуждается в работах [1, 17, 18, 22, 24, 25, 80, 124-127]. Практические приложения нечетких множеств в задачах моделирования обсуждается в [1 – 3, 15, 17 - 19, 22, 27, 30 – 33, 35, 36, 55, 57, 77, 82, 84, 86, 88, 90, 100, 107, 108, 122, 127]. Обобщение понятия нечеткого множества на случай частично упорядоченного множества значений принадлежности $L$ было предложено в работе [78] и рассматривалось в работе [62].

Связь алгебры нечетких множеств с алгебрами Клини впервые по-видимому обсуждалась в работе [105]. Алгебры Де Моргана и алгебры Клини в связи с неклассическими и нечеткими логиками обсуждались в работах [5, 6, 12, 29, 41, 42, 59, 64, 67, 68, 70, 83, 93, 102, 111]. Общие свойства решеток обсуждаются в работах [16, 21].

Материал раздела 2 основан на работе [42]. Теорема 2.11 является модификацией результата изложенного в [83].

Понятие меры нечеткости нечетких множеств как аналога меры энтропии вероятностных распределений было введено в [63]. Различные аксиоматики и свойства показателей нечеткости обсуждаются в работах [1, 4 – 6, 12, 29, 40 - 42, 63, 89, 90, 118]. Обобщение меры нечеткости на алгебры Де Моргана использует аксиоматику работы [4]. Материал раздела 3 основан на работах [6, 41]. В этих работах можно найти также свойства метрик и мер нечеткости на алгебрах Клини.

В работах [40, 64, 118] исследуются также меры нечеткости на алгебрах Де Моргана $F$ со значениями в $F$, например, определяемые как $d(A) = A \cap \rceil A$. Двойственная мера $k(A) = A \cup \rceil A$ может служить для оценки “четкости” элемента $A$.

Впервые аксиомы для операций Заде исследовались в [56], где было показано, что введенные Заде операции конъюнкции и дизъюнкции и определяемые ими операции пересечения и объединения однозначно определяются системой аксиом, в число которых входят коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, непрерывность, монотонность, и т.д. Общие вопросы определения нечетких связок исследовались также в работах [65, 72, 88, 119]. В работах [38, 111] исследуются вопросы характеризации основных операций нечеткой логики, введенных Заде, в частности, аксиомы P1 - P3 и теорема 4.1 основаны на этих работах. Вывод операций *min* и *max* из аксиом дистрибутивности и идемпотентности рассматривался также в работах [113, 116]. Свойства обобщенных дистрибутивных и идемпотентных операторов изучаются также в [60, 94, 95].

Операции отрицания подробно рассматриваются в следующей главе.

# ГЛАВА 2. ОПЕРАЦИИ ОТРИЦАНИЯ

## 1. Операции отрицания на линейно упорядоченном множестве

### 1.1. Основные понятия

Пусть $L$ – множество значений принадлежности (правдоподобности, уверенности, возможности, истинности), упорядоченное отношением линейного порядка $\leq$, с наименьшим 0 и наибольшим $I$ элементами. Будем предполагать, если не оговорено противное, что |L| >2. Таким образом, кроме условий рефлексивности, антисимметричности и транзитивности для всех $x,y \in L$ выполняется: $x \leq y$ или $y \leq x$ (линейность) и $0 \leq x, y \leq I$. Отношение $\leq$ определяет на $L$ операции $\wedge = min$ и $\vee = max$ обычным образом: $x \wedge y = x$ и $x \vee y = y$, если $x \leq y$; $x \wedge y = y$ и $x \vee y = x$, если $y \leq x$. $x < y$ означает, что $x \leq y$ и $x \neq y$.

Примером $L$ может служить интервал вещественных чисел [0,1], шкала лингвистических оценок правдоподобности $L$ = {неправдоподобно, мало правдоподобно, средняя правдоподобность, большая правдоподобность, наверняка}, шкала балльных оценок $L = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ и др.

*Определение* 1.1. Операцией отрицания на $L$ называется функция $n: L \to L$, удовлетворяющая на $L$ условиям:

$$n(0) = I, \qquad n(I) = 0, \tag{1}$$
$$n(y) \leq n(x), \quad \text{если } x \leq y. \tag{2}$$

В зависимости от выполнения на $L$ дополнительных условий рассматривают следующие типы отрицаний:

| | |
|---|---|
| $n(y) < n(x)$, если $x < y$ | (строгое отрицание), |
| если $x < y$ и $n(y) = n(x)$, то $n(x), n(y) \in \{0, I\}$ | (квазистрогое отрицание), |
| $n(n(x)) = x$ | (инволюция), |
| $n(n(x)) \leq x$ | (обычное отрицание), |
| $x \leq n(n(x))$ | (слабое отрицание). |

Слабое отрицание называется также интуиционистским отрицанием. Элемент $x$ из $L$ будет называться инволютивным элементом, если $n(n(x)) = x$, в противном случае он будет называться неинволютивным. Отрицание будет называться неинволютивным, если $L$ содержит неинволютивные по этому отрицанию элементы.

Нетрудно увидеть, что если $n$ обычное или слабое отрицание, то $n$ удовлетворяет на $L$ соотношению:

$$n(n(n(x))) = n(x).$$

Элемент $s \in L$, удовлетворяющий условию

$$n(s) = s, \tag{3}$$

называется фиксированной точкой. Этот элемент будет центральным элементом (фокусом) $L$. Очевидно, что если фиксированная точка существует, то она единственна и $0 < s < I$.

Пусть $T,S: L \times L \to L$ – операции, удовлетворяющие на $L$ условиям:

$$T(x,y) = T(y,x), \qquad S(x,y) = S(y,x), \tag{4}$$
$$T(x,y) \le x, \qquad x \le S(x,y). \tag{5}$$

В качестве операций $T$ и $S$ могут рассматриваться операции конъюнкции и дизъюнкции, соответственно, в частности операции $\wedge = min$ и $\vee = max$.

*Предложение* 1.2. Операция отрицания $n$ удовлетворяет на $L$ неравенству Клини:

$$T(x,n(x)) \le S(y,n(y)). \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x \le y$, то $T(x,n(x)) \le x \le y \le S(y,n(y))$. Если $y \le x$, то $n(x) \le n(y)$ и $T(x,n(x)) \le n(x) \le n(y) \le S(y,n(y))$.

*Предложение* 1.3. Если $n$ – инволюция, то один из законов Де Моргана

$$n(S(x,y)) = T(n(x),n(y)), \tag{7}$$
$$n(T(x,y)) = S(n(x),n(y)). \tag{8}$$

выполняется на $L$ тогда и только тогда, когда выполняется второй закон. Если $T = min$ и $S = max$, то законы Де Моргана выполняются для любого отрицания $n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n$ – инволюция. Подставив в одно из соотношений (7), (8) вместо $x$ и $y$ соответственно $n(x)$ и $n(y)$ и взяв отрицание от обеих частей полученного равенства из выполнения $n(n(x)) = x$ на $L$ получим второе соотношение. Если $T = min$ и $S = max$, то выполнение законов Де Моргана следует из линейной упорядоченности $L$. Пусть, например, $x \le y$, тогда $n(y) \le n(x)$ и обе части (7) совпадают: $n(S(x,y)) = n(y)$ и $T(n(x),n(y)) = n(y)$. Аналогично совпадение получим для (8).

## 1.2. Сжимающие и разжимающие отрицания

*Теорема* 1.4. Для любого отрицания $n$ и для любого $x \in L$ выполняется по крайней мере одно из соотношений

$$x \wedge n(x) \le n(n(x)) \le x \vee n(x)\,, \tag{9}$$
$$n(x) \wedge n(n(x)) \le x \le n(x) \vee n(n(x)). \tag{10}$$

Оба соотношения выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $x$ – инволютивный элемент.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \le n(x)$, тогда из (2) получим $n(n(x)) \le n(x)$, откуда следует либо $x \le n(n(x)) \le n(x)$, либо $n(n(x)) \le x \le n(x)$, что приводит к (9) и (10), соответственно. Двойственно, $n(x) \le x$ также приводит к (9) и (10).

Если $x$ – инволютивно, то (9) и (10) очевидно совпадают. Пусть (9) и (10) выполняются одновременно. Тогда из $x \le n(x)$ следует $n(n(x)) \le n(x)$, и из (9), (10) получаем $x \le n(n(x))$ и $n(n(x)) \le x$, откуда следует инволютивность $x$. Двойственно, из $n(x) \le x$ также следует $n(n(x)) = x$.

*Определение* 1.5. Отрицание $n$ называется сжимающим (разжимающим) в точке $x \in L$, если выполняется неравенство (9) (соответственно (10)), и сжимающим (разжимающим) (на $L$), если соответствующее неравенство выполняется на $L$.

*Следствие* 1.6. Отрицание $n$ является инволюцией тогда и только тогда, когда оно сжимающее и разжимающее одновременно.

Классическим примером инволютивного отрицания на [0,1] является отрицание $n(x) = 1 - x$ с фиксированной точкой $s$ =0.5.

Обозначим $n^0(x) = x$, $n^1(x) = n(x), \ldots$, $n^{k+1}(x) = n\left(n^k(x)\right)$ для $k = 1, 2, \ldots$

Структура множества элементов $n^k(x)$, ($k$= 0,1,…), порождаемых некоторым элементом $x$ из $L$ с помощью отрицания $n$ на $L$, характеризуется следующим образом.

*Предложение* 1.7. Отрицание $n$ является сжимающим в $x$ тогда и только тогда, когда для всех целых $0 \le k \le j$ выполняется:

$$n^{2k}(x) \le n^{2j}(x) \le n^{2j+1}(x) \le n^{2k+1}(x), \text{ если } x \le n(x), \tag{11}$$
$$n^{2k+1}(x) \le n^{2j+1}(x) \le n^{2j}(x) \le n^{2k}(x), \text{ если } n(x) < x\,. \tag{12}$$

Отрицание $n$ является разжимающим в $x$ тогда и только тогда, когда (11), (12) выполняются для всех целых $0 \le j \le k$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1.4 и (2).

*Следствие* 1.8. Если для некоторого $k \ge 0$ элемент $n^k(x)$ является фиксированной точкой отрицания $n$, то $n$ является сжимающим в $x$.

Заметим, что разжимающее отрицание также может иметь фиксированную точку.

*Предложение* 1.9. Отрицание $n$ является сжимающим тогда и только тогда, когда на $L$ из

$$x \wedge n(x) \le y \le x \vee n(x) \tag{13}$$

следует:

$$x \wedge n(x) \le n(y) \le x \vee n(x), \tag{14}$$

и $n$ является разжимающим тогда и только тогда, когда из (13) следует:

$$n(x) \wedge n(n(x)) \le y \le n(x) \vee n(n(x)). \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если из (13) следует (14), то из выполнения (13) для $y = n(x)$ следует (9), т.е. $n$ – сжимающее отрицание. Пусть $n$ – сжимающее отрицание и (13) выполнено для некоторых $x$ и $y$. Тогда выполняется $x \le y \le n(x)$ или $n(x) \le y \le x$, откуда, применяя (2), получим соответственно $n(n(x)) \le n(y) \le n(x)$ или $n(x) \le n(y) \le n(n(x))$ и из выполнения (9) для $n$ получим соответственно $x \le n(n(x)) \le n(y) \le n(x)$ или $n(x) \le n(y) \le n(n(x)) \le x$, откуда следует (14).

Аналогично доказывается вторая часть предложения для разжимающего отрицания.

*Следствие* 1.10. Из выполнения (13) следует для всех $k > 0$:

$$x \wedge n(x) \le n^k(y) \le x \vee n(x), \qquad \text{если } n \text{ сжимающее на } L \text{ и}$$
$$n^k(x) \wedge n^{k+1}(x) \le y \le n^k(x) \vee n^{k+1}(x), \qquad \text{если } n \text{ разжимающее на } L.$$

Таким образом, если $y$ находится "между" $x$ и $n(x)$, и $n$ - сжимающее отрицание, то и все элементы $n^k(y)$, порождаемые элементом $y$, также будут находиться "между" $x$ и $n(x)$; а если $x$ и $n(x)$ находятся "по разные стороны" от $y$, и $n$ - разжимающее отрицание, то и все элементы $n^k(x)$ и $n^{k+1}(x)$, порождаемые из $x$, также будут "по разные стороны" от $y$.

*Определение* 1.11. Пусть $n$ – отрицание на $L$ и $x \in L$. Множество $G(x) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ n^k(x) \right\}$ называется множеством элементов, порождаемым элементом $x$. Мощность этого множества $R = |G(x)|$ будет называться рангом элемента $x$. Если $G(x)$ содержит бесконечное число элементов, то будем писать $R(x) = \infty$. Ранг отрицания $n$ определяется как $R(n) = \sup_{x \in L} R(x)$.

Отметим следующие очевидные свойства отрицаний.

*Следствие* 1.12.

1) $R(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x$ – фиксированная точка отрицания $n$, т.е. $x = s$.

2) $R(n) = 2$, если $n$ – инволюция.

3) $R(n) \le 3$, если $n$ – обычное или слабое отрицание.

Далее, если для $n$ существует обратное отрицание $n^{-1}$, то для введенных выше понятий будем использовать соответственно обозначения $n^{-k}(x)$, $G^{-1}(x)$, $R^{-1}(x)$ и $R^{-1}(n)$.

*Предложение* 1.13. Пусть $n$ - отрицание на $L$ и $x \in L$. Если $R(x)= k$, где $1< k < \infty$, то $G(x) =\{x, n(x),..., n^{k-1}(x)\}$, и либо выполняется $n^j(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \ge k$ и $n$ – сжимающее в $x$ с фиксированной точкой $s =n^{k-1}(x)$, либо $n^{k+2j}(x)=n^{k-2}(x)$ и $n^{k+2j+1}(x)=n^{k-1}(x)$ для всех $j \ge 0$. Если $R(x) = \infty$, то $n^k(x) \ne n^j(x)$ для всех $k \ne j$, $k, j \ge 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $R(x)= k$ следует $n^j(x)\ne n^i(x)$ для всех $i< j<k$ и $G(x) =\{x, n(x),..., n^{k-1}(x)\}$, так как в противном случае $n^j(x)=n^i(x)$, $n^{j+1}(x)= n^{i+1}(x),..., n^{2j-i}(x)= n^j(x)= n^i(x)$ и т.д., т.е. все $n^{j+p}(x)$, $(p\ge 0)$, принадлежат множеству $\{n^i(x), n^{i+1}(x), ..., n^{j-1}(x)\}$, откуда следует $R(x) \le j < k$, что противоречит тому, что $R(x)= k$.

Из $R(n)=k$ и $G(x) =\{x, n(x),..., n^{k-1}(x)\}$ следует, что $n^k(x) = n^i(x)$ для некоторого $i < k$. Если $n^k(x) = n^{k-1}(x)$, то $n^{k+j}(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \ge 0$, $n^{k-1}(x)$ является фиксированной точкой, и по следствию 1.8. отрицание $n$ является сжимающим в $x$.

Если $n$ сжимающее в $x$, то из предложения 1.7 следует, что $n^k(x)$ находится «между» элементами $\{n^{k-1}(x), n^{k-2}(x)\}$, которые в свою очередь находятся «между» $\{n^{k-3}(x), n^{k-4}(x)\}$ и т.д. Таким образом, равенство $n^k(x) = n^i(x)$ для некоторого $i < k$, возможно лишь если $i = k - 1$ или $i = k - 2$. Случай $n^k(x) = n^{k-1}(x)$ рассмотрен выше. Из $n^k(x) = n^{k-2}(x)$, последовательно применяя к обеим частям отрицание, получим $n^{k+2j}(x) = n^{k-2}(x)$ и $n^{k+2j+1}(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \ge 0$.

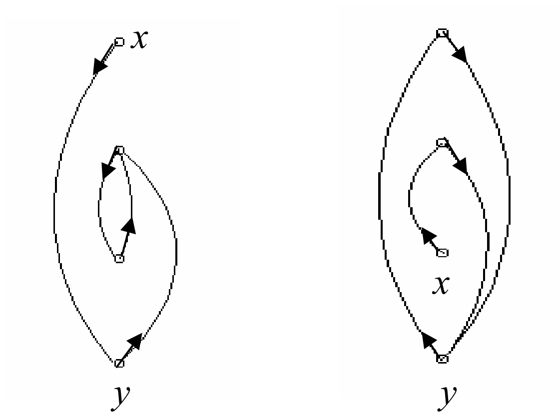
Если $n$ разжимающее в $x$, то из предложения 1.7 следует, что все элементы из $R(x)$ находятся «между» элементами $\{n^{k-2}(x), n^{k-1}(x)\}$, которые в свою очередь находятся «между» $\{n^k(x), n^{k+1}(x)\}$ и т.д., Таким образом, равенство $n^k(x) = n^i(x)$ для некоторого $i < k$, возможно для разжимающего отрицания лишь если $i = k - 2$. Из $n^k(x) = n^{k-2}(x)$, получаем $n^{k+2j}(x) = n^{k-2}(x)$ и $n^{k+2j+1}(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \ge 0$.

Если $R(x) = \infty$, то $n^k \ne n^j$ для всех $k \ne j$; $k, j \ge 0$, поскольку из $n^k(x)= n^j(x)$ для некоторых $k \ne j$ следует $R(x) \le max\{ j, k \}$.

Предложение 1.13 доказано.

Предыдущие утверждения формализуют представление об элементах, порождаемых сжимающими и разжимающими отрицаниями в точках, как о спиралях, соответственно «закручиваемых внутрь» или «раскручиваемых наружу», причем эти спирали либо бесконечные, либо в конечном случае имеют петлю на конце, состоящую из двух элементов, которые для сжимающих отрицаний могут совпадать, образуя неподвижную точку отрицания. Спирали, порождаемые разными элементами, либо вложены друг в друга, либо совпадают, начиная с некоторого элемента.

На рис. 3 представлены примеры сжимающего и разжимающего в точке $x$ отрицаний. Элементы $L$ представлены вершинами соответствующего графа и упорядочены снизу вверх, в частности, $y < x$. Для обоих примеров отрицаний $R(x) = 4$. Элементы $y$ порождаются элементами $x$ так, что $y = n(x)$ для рис. 3а) и $y = n^2(x)$ для рис. 3б).




а) б)

Рис. 3. а) Отрицание $n$ – сжимающее в точке $x$.
б) Отрицание $n$ – разжимающее в точке $x$.

Если ввести индекс нечеткости $d(x)$ элементов из $L$ как $d(x)= x \wedge n(x)$, то несложно увидеть, что имеет место $d(x) \leq d(n(x))$ для сжимающих отрицаний и $d(x) \geq d(n(x))$ для разжимающих отрицаний. Для инволюций нечеткость элемента и его отрицания совпадают. Следовательно, если из контекста ясно, что операция отрицания изменяет нечеткость формулы (высказывания), то тогда, в зависимости от характера этого изменения, нужно использовать сжимающие или разжимающие отрицания.

## 1.3. Примеры

Рассмотрим простейшие примеры отрицаний, иллюстрирующие введенные понятия. Во всех примерах, если не оговорено противное, предполагается, что $L$ содержит элементы, отличные от 0 и $I$.

Пусть $n$ – отрицание на $L$, $L_2 = \{0,I\}$, $L_3 = \{0, c, I\}$, где $0 \le c \le I$, и $n_2$, $n_3$ – отрицания на $L_2$ и $L_3$, соответственно, причем $c$ – фиксированная точка отрицания $n_3$, т.е. $n_3(c)= c$. Связь между простейшими отрицаниями $n$ на $L$ и отрицаниями $n_2$, $n_3$ на $L_2$ и $L_3$ может быть задана с помощью морфизмов $\phi_k\colon L\to L_k$ таких, что $\phi_k(n(x))=n_k(\phi_k(x))$, $(k=2,3)$. При интерпретации 0, $I$ и $c$ как “ложь”, “истина” и “неопределенность”, соответствующие морфизмы определяют интерпретацию элементов из $L$.

*Пример* 1.14. Пусть $L$ линейно, и $c$ – некоторый элемент из $L$.

$$n(x)=\begin{cases} I, & \textit{если } x=0 \\ c, & \textit{если } x\notin\{0,I\} \\ 0, & \textit{если } x=I \end{cases}.$$

При $c\notin\{0, I\}$ это отрицание является сжимающим, ни обычным, ни слабым, с фиксированной точкой $s = c$, $R(n) =2$. $\phi_3(0)=0$, $\phi_3(I)=I$, $\phi_3(x)=c$, если $x\notin\{0, I\}$. Интерпретация: «Все, что не истина и не ложь является неопределенностью»

*Пример* 1.15. При $c = I$, отрицание из примера 1.14 станет таким:

$$n(x)=\begin{cases} I, & \textit{если } x\ne I \\ 0, & \textit{если } x=I \end{cases}.$$

Это отрицание является обычным, разжимающим, квазистрогим, без фиксированной точки, $R(n) =3$, на $L$ выполняется: $x \vee n(x)= I$. $\phi_2(I)=I$, $\phi_2(x)=0$, если $x < I$. “Все, что не истина, есть ложь”.

*Пример* 1.16. При $c = 0$, из отрицания примера 1.14 получим:

$$n(x)=\begin{cases} I, & \textit{если } x=0 \\ 0, & \textit{если } x\ne 0 \end{cases}.$$

Это отрицание является слабым, разжимающим, квазистрогим, без фиксированной точки, $R(n) =3$. На $L$ выполняется: $x \wedge n(x) = 0$. $\phi_2(0)=0$, $\phi_2(x)=I$, если $x > 0$. “Все, что не ложь, есть истина”.

*Пример* 1.17. Примером разжимающего отрицания, которое не является ни обычным, ни слабым является отрицание

$$n(x)=\begin{cases} I, & \textit{если } x< c \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases},$$

где $c \notin \{0, I\}$. Фиксированная точка отсутствует, $R(n)$ =3. $\phi_2(x)$=0, если $x < c$, $\phi_2(x)=I$, если $c \le x$. “Все или истина, или ложь”. Некоторые подходы к формализации нечеткой логики, основанные на подобной интерпретации, сводят ее к двузначной, используя $c$ = 0.5.

*Пример* 1.18. Примером разжимающего отрицания с фиксированной точкой является отрицание

$$n(x)=\begin{cases} I, & \textit{если } x < c \\ c, & \textit{если } x = c \\ 0, & \textit{если } c < x \end{cases},$$

где $c \notin \{0, I\}$. Элемент $x = c$ является фиксированной точкой, отрицание не является ни обычным, ни слабым, $R(n)$ =3.

*Пример* 1.19. $L=\{a_1, a_2,\ldots, a_m\}$, $a_k < a_{k+1}$, ($k$= 1,…, $m$-1). Здесь $0 = a_1$, $I= a_m$. Элементами шкалы L могут быть, например, лингвистические оценки правдоподобности, истинности, принадлежности. Отрицание $n(a_k)=a_{m-k+1}$, ($k$= 1,…, $m$-1) является инволютивным. При нечетном $m = 2p+1$ фиксированной точкой отрицания (центральным элементом $L$) является элемент $s= a_{p+1}$. Мера нечеткости на этом элементе принимает максимальное значение. При четном $m = 2p$ фиксированная точка отрицания отсутствует. Фокус $L$ состоит из элементов $\{a_p, a_{p+1}\}$, имеющих максимальную нечеткость.

## 2. Отрицания на [0,1]

### 2.1. Инволютивные отрицания

Отрицания на $L$= [0,1] являются частным случаем отрицаний на линейно упорядоченном множестве, рассмотренных в предыдущем разделе, поэтому все свойства отрицаний, определяемые линейным упорядочением элементов из $L$, имеют место и для отрицаний на [0,1]. В этом и следующих разделах исследуются свойства отрицаний как вещественных функций. В дальнейшем, отрицание Заде будет обозначаться заглавной буквой:

$$N(x) = 1-x.$$

*Определение* 2.1. Отрицание $n$:[0,1]→[0,1] называется биективным, если функция $n$ биективная.

Из определения биективной функции как взаимно-однозначной функции и из условия невозрастания отрицания $n(y) \le n(x)$, если $x \le y$, следует, что биективное отрицание является строго убывающей непрерывной функцией.

Строго убывающие непрерывные отрицания на [0,1] называют также строгими отрицаниями, а инволютивные отрицания на [0,1] называют сильными отрицаниями.

У биективного отрицания существует обратная функция $n^{-1}$, которая также будет биективным отрицанием.

Биективное отрицание имеет фиксированную точку, для нее выполняется $n(s) = s = n^{-1}(s)$. Очевидно, что точка $(s,s)$ является точкой пересечения графиков функций $y(x)= n(x)$ и $y(x)= x$.

Инволютивное отрицание является биективным. Для инволютивного отрицания из $n(n(x) = x$ следует $n^{-1}(x)= n(x)$ для всех $x\in[0,1]$. Таким образом, график инволютивного отрицания симметричен относительно прямой линии $y(x) = x$.

*Определение* 2.2. Непрерывная строго возрастающая функция $f$:[0,1]→[0,1] такая, что $f(0)= 0$, $f(1)= 1$ называется автоморфизмом интервала [0,1].

*Теорема* 2.3. Функция $n$:[0,1]→[0,1] является инволюцией тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $f$ интервала [0,1] такой, что

$$n(x) = f^{-1}(1 - f(x)). \qquad (16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что (16) удовлетворяет условиям (1), (2) и условию инволютивности $n(n(x))=f^{-1}(1- f(f^{-1}(1-f(x))))= x$.

Доказательство того, что любая инволюция представима в виде (16), основано на следующей лемме.

*Лемма* 2.4. Пусть $n_1$ и $n_2$ – две инволюции на [0,1]. Тогда существует автоморфизм $f$ интервала [0,1] такой, что

$$n_1(x) = f^{-1}(n_2(f(x))). \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s_1$ и $s_2$ - фиксированные точки отрицаний $n_1$ и $n_2$, соответственно, и пусть $g$:$[0,s_1]\to[0,s_2]$ – возрастающая биективная функция, тогда функция

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & \text{если } x \le s_1 \\ n_2(g(n_1(x))), & \text{если } s_1 < x \end{cases}$$

является биективной возрастающей функцией, отображающей [0,1] на [0,1] так, что $f(s_1) = s_2$. Покажем, что для нее выполняется (17). Из определения $f$ следует, что $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$ при $x \le s_2$ и $f^{-1}(x) = n_1(g^{-1}(n_2(x)))$ при $s_2 < x$. Тогда при $x< s_1$ получим $f(x)= g(x)< s_2$, $n_2(f(x))= n_2(g(x))> s_2$ и $f^{-1}(n_2(f(x)))= n_1(g^{-1}(n_2(n_2(g(x))))) = n_1(x)$. Аналогично показывается, что $f^{-1}(n_2(f(x))) = n_1(x)$ при $s_1 < x$.

Полагая в условиях леммы $n_2(x) = N(x) = 1 - x$, получим (16).

Теорема доказана.

Функция $f(x)$ в условиях теоремы 2.3. называется аддитивным генератором инволютивного отрицания. Нетрудно увидеть, для фиксированной точки инволютивного отрицания, генерируемого аддитивным генератором $f$, выполняется:

$$f(s) = 0.5, \qquad s = f^{-1}(0.5).$$

Таким образом, любое инволютивное отрицание $n$ является сопряженным отрицанию Заде, т.е. существует автоморфизм $f$ интервала [0,1] такой, что $n = f^{-1}\circ N\circ f$. Более обще, пусть, $M$ – группа композиций всех монотонных биективных функций из [0,1] на [0,1], $S$ – множество инволюций на [0,1] и $(N)$ – класс функций из $M$, сопряженных $N$.

*Теорема* 2.5. $S = (N)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что из $h\in(N)$ следует $h\in S$. Из $h\in(N)$ следует существование функции $g\in M$ такой, что $h= g^{-1}\circ N\circ g$, откуда следует, что $h$ - строго убывающая функция, $h(h(x))= g^{-1}(1- g(h(x)))= g^{-1}(1- g(h(x)))= x$, и из $\{g(0),g(1)\}=\{0,1\}$ следует $h(1) = 0$, $h(0) = 1$, т.е. $h\in S$.

*Предложение* 2.6. Пусть $n$ – инволюция. Тогда

$$n(x) = f^{-1}(1 - f(x)) = g^{-1}(1 - g(x))$$

где $f$ и $g$ - автоморфизмы интервала [0,1], тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $h$ интервала [-0.5,0.5] такой, что

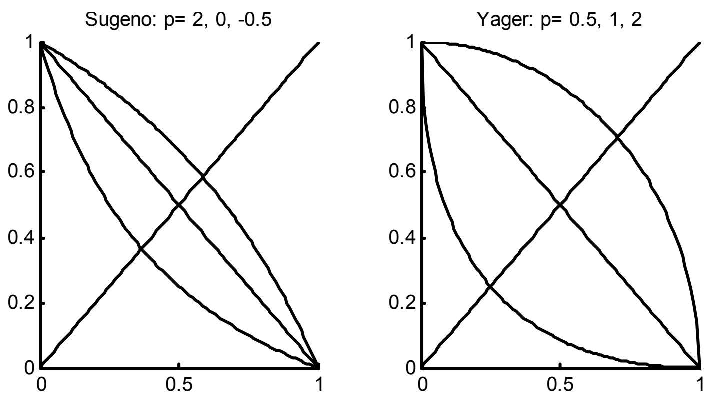
$$g(x) = 0.5 + h(f(x) – 0.5).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $f^{-1}(1 - f(x)) = g^{-1}(1 - g(x))$. Обозначая $y= f(x)$, получим, что это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $g(f^{-1}(1- y)) = 1- g(f^{-1}(y))$. Определим функцию $h$: $[-0.5,0.5] \to [-0.5,0.5]$ так, что $h(z) = g(f^{-1}(z+0.5)) - 0.5$. Ясно, что эта функция является автоморфизмом [-0.5,0.5] и для нее выполняется $g(f^{-1}(y))= 0.5 + h(y - 0.5)$, откуда следует $g(x) = 0.5 + h(f(x) – 0.5)$.

Примером параметрического класса инволюций, построенных по правилу (16), является отрицание Сугено:

$$n(x) =(1-x)/(1+px), \qquad (p > -1),$$

генерируемое генератором $f(x) = log(1+px)/log(1+p)$. Это отрицание является единственным рациональным отрицанием вида $(ax+b)/(cx+d)$. Фиксированная точка отрицания Сугено равна $s= ((1+p)^{1/2}-1)/p$.




а) б)

Рис. 4. Графики отрицаний Сугено и Ягера:
а) отрицание Сугено, $p$ = 2, 0, -0.5; б) отрицание Ягера, $p$ = 0.5, 1, 2.

Другим примером построенного таким образом отрицания является отрицание Ягера:

$$n(x) = \sqrt[p]{1 - x^p}, \qquad p \in (0,\infty),$$

генерируемое генератором $f(x) = x^p$. Фиксированная точка отрицания Ягера равна $s = \sqrt[p]{0.5}$.

Графики отрицаний Сугено и Ягера для разных значений параметра $p$ приведены на рис. 4, где приведен также график функции $y = x$.

Рассматриваемые ниже методы генерации инволютивных отрицаний используют свойство инволюций $n(x) = n^{-1}(x)$, которое определяет симметрию графика инволютивного отрицания относительно прямой $y = x$. Эти методы будут в следующем разделе использоваться при характеризации сжимающих и разжимающих отрицаний на [0,1]. Эти методы представляют также самостоятельный интерес при построении инволютивных отрицаний в задачах нечеткого моделирования.

Пусть $f$ – произвольное монотонное биективное отображение [0,1] на [0,1]. Введем обозначения

$$f_{[-]}(x) = min\{f(x), f^{-1}(x)\},$$
$$f_{[+]}(x) = max\{f(x), f^{-1}(x)\}.$$

Отметим следующие свойства введенных функций.

1) Если $f$ – автоморфизм интервала [0,1], то $f_{[-]}$ и $f_{[+]}$ также являются автоморфизмами интервала [0,1], причем, $f_{[-]}^{-1} = f_{[+]}$, $f_{[+]}^{-1} = f_{[-]}$ и для всех $x \in [0,1]$ выполняется

$$f_{[-]}(x) \le x \le f_{[+]}\,.$$

2) Если $n$ – инволюция, то

$$n_{[-]} = n_{[+]} = n\,.$$

*Предложение* 2.7. Если $n$ - биективное отрицание, то функции $n_{[-]}$ и $n_{[+]}$ являются инволюциями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения $n_{[-]}$ и $n_{[+]}$ следует, что они являются биективными отрицаниями. Имеем

$$n_{[-]}(x) = \begin{cases} n(x), & \text{если } n(x) \le n^{-1}(x) \\ n^{-1}(x), & \text{если } n^{-1}(x) < n(x) \end{cases},$$
$$n_{[+]}(x) = \begin{cases} n^{-1}(x), & \text{если } n(x) \le n^{-1}(x) \\ n(x), & \text{если } n^{-1}(x) < n(x) \end{cases}. \qquad (18)$$

Покажем, что $n_{[-]}$ является инволюцией. Если $n(x) \le n^{-1}(x)$, то $n_{[-]}(x) = n(x)$. Обозначим $y = n(x)$. Тогда $n(y) = n(n(x)) \ge n(n^{-1}(x)) = x = n^{-1}(n(x)) = n^{-1}(y)$.

Из $n(y) \geq n^{-1}(y)$ следует $n_{[-]}(y) = n^{-1}(y)$ и $n_{[-]}(n_{[-]}(x)) = n_{[-]}(n(x)) = n_{[-]}(y) = n^{-1}(y) = n^{-1}(n(x)) = x$. Аналогично, из $n^{-1}(x) \leq n(x)$, выводится $n_{[-]}(n_{[-]}(x)) = x$.

Доказательство инволютивности $n_{[+]}$ проводится аналогично.

*Теорема* 2.8. Функции $n_1, n_2$:[0,1]→[0,1] являются инволюциями тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $f$ интервала [0,1] такой, что

$$n_1(x) = (1 - f)_{[-]}(x), \tag{19}$$

$$n_2(x) = (1 - f)_{[+]}(x). \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n$ - инволюция. Тогда $f(x) = 1 - n(x)$ является автоморфизмом интервала [0,1] таким, что $(1 - f)_{[-]}(x) = n_{[-]}(x) = n(x)$ и $(1 - f)_{[+]}(x) = n_{[+]}(x) = n(x)$.

Пусть $f$ – автоморфизм интервала [0,1]. Тогда $n(x) = 1 - f(x)$ является биективным отрицанием и из предложения 2.7 следует справедливость теоремы.

Учитывая, что $(1 - f(x))^{-1} = f^{-1}(1 - x)$, представим (19), (20) также в виде:

$$n_1(x) = min\{1 - f(x), f^{-1}(1 - x)\},$$
$$n_2(x) = max\{1 - f(x), f^{-1}(1 - x)\}.$$

*Предложение* 2.9. Пусть $n$ - биективное отрицание, и $s$ – его фиксированная точка. Тогда функции

$$n_1(x) = \begin{cases} n(x), & если\ \ x \leq s \\ n^{-1}(x), & если\ s < x \end{cases}, \tag{21}$$

$$n_2(x) = \begin{cases} n^{-1}(x), & если\ \ x \leq s \\ n(x), & если\ s < x \end{cases}. \tag{22}$$

являются инволютивными отрицаниями.

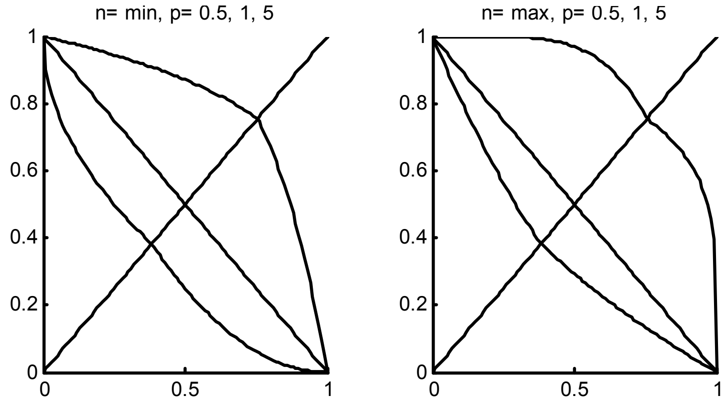
Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения $n_1$ и $n_2$ следует, что они являются биективными отрицаниями с фиксированной точкой $s$. Если $x < s$, то $n(x) > n(s) = s$ и $n_1(n_1(x)) = n_1(n(x)) = n^{-1}(n(x)) = x$. Если $x > s$, то $n^{-1}(x) < n^{-1}(s) = s$ и $n_1(n_1(x)) = n_1(n^{-1}(x)) = = n(n^{-1}(x)) = x$. Аналогично доказывается инволютивность $n_2$.

Заметим, что соотношения (18) и (21), (22) в общем случае определяют разные отрицания. Однако, если $n(x) \leq n^{-1}(x)$ для всех $x \leq s$, либо $n^{-1}(x) \leq n(x)$ для всех $x \leq s$, то определяемые (18) и (21), (22) пары отрицаний $\{n_1, n_2\}$ совпадают.

Примером отрицаний, построенных по правилам (19), (20) с генератором $f(x) = x^p$, являются отрицания:

$$n_1(x) = \min\left(1 - x^p, \sqrt[p]{1-x}\right)$$
$$n_2(x) = \max\left(1 - x^p, \sqrt[p]{1-x}\right)$$

Графики этих отрицаний для разных значений параметров *p* приводятся на рис. 5.




а) б)

Рис. 5. Графики инволютивных отрицаний с генератором $f(x) = x^p$:
а) формула (19), $p$= 0.5, 1, 5; б) формула (20), $p$= 0.5, 1, 5.

С практической точки зрения может возникнуть задача построения инволютивного отрицания с заданной фиксированной точкой $s$. Решение этой задачи может быть основано на следующей теореме.

*Теорема* 2.10. Функция $n$:[0,1]→[0,1] является инволюцией с фиксированной точкой $s\in(0,1)$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $f$ интервала [0,1] такой, что

$$n(x) = \begin{cases} 1-(1-s)f\left(\dfrac{x}{s}\right), & \textit{если } x \le s \\ sf^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1-s}\right), & \textit{если } s < x \end{cases} \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f$ – автоморфизм и $n$ определяется по (23). Монотонное убывание $n$ и выполнение условий $n(0) = 1$, $n(1) = 0$, $n(s)= s$, очевидно. Обозначим $g_1(x) = 1- (1- s)f(x/s)$, $g_2(x) = sf^{-1}(( 1-x)/(1-s))$, тогда $g_2(x) = g_1^{-1}(x)$. Доказательство инволютивности $n$ аналогично доказательству инволютивности отрицания в предложении 2.9.

Пусть $n$ – инволюция с фиксированной точкой $s$. Тогда функция $f(x)= (1-n(xs))/(1-s)$ биективная, строго возрастающая и $f(0)=0$, $f(1)=1$. $f^{-1}(x)= n(1- (1- s)x)/s$. Если $x \le s$, то (23) определяет $n(x)$: $1- (1- s)f(x/s) = 1- (1- s)($1-

$n(xs/s))/(1\text{-}s) = n(x)$. Если $s < x$, то также получаем $n(x)$: $sf^{-1}((1\text{-}x)/(1\text{-}s)) = sn(1\text{-}(1\text{-}s)(1\text{-}x)/(1\text{-}s))/s = n(x)$.

Примером отрицания, построенного по правилу (23) с генератором $f(x) = x^p$, является отрицание:

$$n(x) = \begin{cases} 1-(1-s)\left(\dfrac{x}{s}\right)^p, & \text{если } x \le s \\ s\sqrt[p]{\dfrac{1-x}{1-s}}, & \text{если } s < x \end{cases}. \tag{24}$$

Графики этого отрицания для $s = 0.3$ и различных значений параметра $p$ приведены на рис. 6. При $p = 1$ это отрицание задается двумя отрезками прямых, соединяющими точки (0,1) и (1,0) с точкой *(s,s),* лежащей на прямой $y = x$.

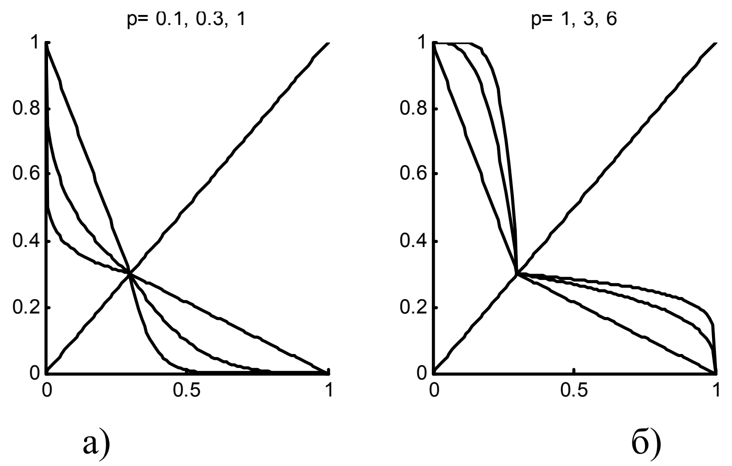



Рис. 6. Графики инволютивных отрицаний (24) с фиксированной точкой $s$=0.3 для значений параметра $p$: а) $p$= 0.1, 0.3 и 1; б) $p$= 1, 3 и 6.

*Предложение* 2.11. Если $n_1$ и $n_2$ – инволютивные отрицания с фиксированной точкой $s_1 = s_2 = s$, то $n_1(x) \le n_2(x)$ для всех $x \le s$ тогда и только тогда, когда $n_1(x) \le n_2(x)$ для всех $x \ge s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n_1(x) \le n_2(x)$ для всех $x \le s$ и пусть $y \ge s$. Обозначим $x = n_2(y)$, тогда $x \le s$ и $n_2(y) = x = n_1(n_1(x)) \ge n_1(n_2(x)) = n_1(n_2(n_2(y))) = n_1(y)$. Аналогично показывается, что из $n_1(x) \le n_2(x)$ для всех $x \ge s$ следует $n_1(y) \le n_2(y)$ для любого $y \le s$.

Указанное в предложении 2.11 свойство инволюций наглядно демонстрируется на приведенных выше графиках. В следующем разделе будет показано, что сжимающие и разжимающие отрицания обладают в определенном смысле противоположным свойством.

## 2.2. Сжимающие и разжимающие отрицания на [0,1]

Из определения сжимающих и разжимающих отрицаний следует, что $n$ является сжимающим в $x \in [0,1]$ (сжимающим на [0,1]) тогда и только тогда, когда в $x \in [0,1]$ (на [0,1]) выполняется одно из условий:

$$x \le n(n(x)) \le n(x), \tag{25}$$
$$n(x) \le n(n(x)) \le x. \tag{26}$$

Аналогично, $n$ является разжимающим в $x \in [0,1]$ (разжимающим на [0,1]) тогда и только тогда, когда в $x \in [0,1]$ (на [0,1]) выполняется одно из условий:

$$n(n(x)) \le x \le n(x), \tag{27}$$
$$n(x) \le x \le n(n(x)). \tag{28}$$

*Теорема* 2.12. Биективное отрицание $n$ является сжимающим в $x \in [0,1]$ (сжимающим на [0,1]) тогда и только тогда, когда $n^{-1}$ является разжимающим в $x \in [0,1]$ (разжимающим на [0,1]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что двукратное применение $n^{-1}$ к элементам неравенств (25), (26) преобразует их в (27), (28) для отрицания $n^{-1}$ и наоборот. Например, из (25), (26) получим:

$$n^{-1}(n^{-1}(x)) \le x \le n^{-1}(x),$$
$$n^{-1}(x) \le x \le n^{-1}(n^{-1}(x)).$$

Для биективных, а значит строго убывающих отрицаний на [0,1], следующее предложение устанавливает простой признак, характеризующий сжимающие и разжимающие отрицания.

*Предложение* 2.13. Биективное отрицание $n$ является сжимающим тогда и только тогда, когда для всех $x \in [0,1]$

$$\text{из } x \le n(x) \text{ следует } x \le n(n(x)), \tag{29}$$

и является разжимающим тогда и только тогда, когда для всех $x \in [0,1]$

$$\text{из } x \le n(x) \text{ следует } n(n(x)) \le x. \tag{30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что если $n$ – сжимающее, то на [0,1] выполняется (29). Пусть на [0,1] имеет место (29). Покажем, что $n$ сжимающее. Если $x \le n(x)$, то применяя отрицание, получим $n(n(x)) \le n(x)$, и из (29) следует (25). Покажем, что для всех $x$ таких, что $n(x) \le x$, выполняется (26). Предположим, что это не так, и для некоторого $x_1 \in [0,1]$ имеет место $n(x_1) \leq x_1$ и $x_1 < n(n(x_1))$. Обозначим $y = n(x_1)$, тогда $y < n(y)$ и из (29) следует $n(x_1) = y \leq n(n(y)) = n(n(n(x_1)))$. В то же время из $x_1 < n(n(x_1))$ и строгого убывания $n$ следует $n(n(n(x_1))) < n(x_1)$. Полученное противоречие доказывает выполнение (26). Таким образом, $n$ – сжимающее отрицание.

Аналогично доказывается предложение для разжимающих отрицаний.

Так как для инволютивных отрицаний выполняется $n(n(x)) = x$, а условия $x \leq n(x)$ и $n(x) \leq x$ эквивалентны для биективных отрицаний условиям $x \leq s$ и $s \leq x$, где $s$ – фиксированная точка отрицания, то указанные выше свойства сжимающих и разжимающих отрицаний дают основание для следующей характеризации этих отрицаний.

*Теорема* 2.14. Биективное отрицание $n$ с фиксированной точкой $s$ является сжимающим тогда и только тогда, когда существует инволюция $n_1$ такая, что для всех $x \in [0,1]$ выполняется

$$\begin{aligned} &n(x) \leq n_1(x), \text{ если } x < s, \\ &n_1(s) = n(s) = s, \\ &n_1(x) \leq n(x), \text{ если } x > s, \end{aligned} \tag{31}$$

и отрицание $n$ является разжимающим тогда и только тогда, когда существует инволюция $n_1$ такая, что для всех $x \in [0,1]$ выполняется

$$\begin{aligned} &n_1(x) \leq n(x), \text{ если } x < s, \\ &n_1(s) = n(s) = s, \\ &n(x) \leq n_1(x), \text{ если } x > s. \end{aligned} \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n_1$ – инволюция с фиксированной точкой $s$, и выполняется (31). Покажем, что $n$ – сжимающее. Пусть $x < s$, тогда $n(x) \leq n_1(x)$ и $n(x) > s$, что дает $n(n(x)) \geq n_1(n(x)) \geq n_1(n_1(x)) = x$, и из предложения 2.13 следует, что $n$ – сжимающее.

Пусть $n$ – сжимающее отрицание. Рассмотрим функцию:

$$n_1(x) = \begin{cases} n(x), & \text{если } x \leq s \\ n^{-1}(x), & \text{если } x > s \end{cases}.$$

Из предложения 2.9 следует, что эта функция является инволютивным отрицанием. Очевидно, что она удовлетворяет первым двум условиям из (31). Поскольку $n$ – сжимающее, то для него выполняется (26) и из $n(n(x)) \leq x$ для $x > s$ следует $n(x) \geq n^{-1}(x) = n_1(x)$, т.е. выполняется третье условие из (31).

Аналогично проводится доказательство для разжимающих отрицаний.

Теорема 2.14 дает способ построения сжимающих и разжимающих отрицаний на основе инволютивного отрицания и обобщает следующий способ построения сжимающих и разжимающих отрицаний из [54].

*Предложение* 2.15. Пусть $g$ и $h$ автоморфизмы интервала [0,1], и $s\in(0,1)$, тогда функция

$$n(x)=\begin{cases}1-(1-s)g\left(\dfrac{x}{s}\right), & \text{если } x\le s\\ s-s\cdot h\left(\dfrac{x-s}{1-s}\right), & \text{если } s<x\end{cases} \tag{33}$$

является сжимающим отрицанием, если $h(x) \le x \le g(x)$ на [0,1], и разжимающим отрицанием, если $g(x) \le x \le h(x)$ на [0,1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $n(0) = 1$, $n(1) = 0$, $n(s) = s$, и $n$ – биективное отрицание. Если $h(x) \le x \le g(x)$ на [0,1], то в соответствии с теоремой 2.14 отрицание $n$ – является сжимающим по отношению к инволютивному отрицанию

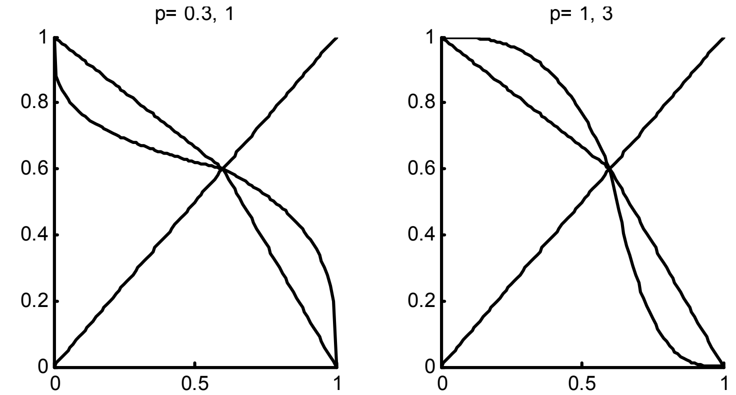
$$n_1(x)=\begin{cases}1-(1-s)\dfrac{x}{s}, & \text{если } x\le s\\ s-s\cdot\dfrac{x-s}{1-s}, & \text{если } s<x\end{cases}=\begin{cases}1-(1-s)\dfrac{x}{s}, & \text{если } x\le s\\ s\cdot\dfrac{1-s}{1-s}, & \text{если } s<x\end{cases}, \tag{34}$$

получаемому из (23) при $f(x) = x$. Аналогично, если $g(x) \le x \le h(x)$ на [0,1], то в соответствии с теоремой 2.14 отрицание $n$ – является разжимающим по отношению к инволютивному отрицанию $n_1$.

Поскольку из $x \le g(x)$ на [0,1] следует $g^{-1}(x) \le x$ на [0,1], то в условиях теоремы 2.15 вместо функции $h$ может использоваться функция $g^{-1}$ и наоборот. Если $f$ - произвольный автоморфизм интервала [0,1], то в условиях теоремы 2.15 вместо функций $g$ и $h$ могут использоваться соответственно функции $f_{[-]}$ и $f_{[+]}$.

Простым признаком сжимаемых и разжимаемых отрицаний, который следует из предложения 2.15 является следующий: если отрицание вогнуто слева от точки его пересечения с прямой $y = x$ и выпукло справа от этой точки, то оно сжимающее, и наоборот, если выполняются противоположные свойства, то оно разжимающее.

Примеры сжимающих и разжимающих отрицаний, построенных по правилу (33) с генераторами $g(x) = x^{p.}$, и $h(x) = x^{1/p.}$ приведены на рис. 7. Там же приведены также графики кусочно-линейной инволюции (34), получаемой при значении параметра $p = 1$.




а) б)

Рис. 7. Отрицания, построенные по правилу (33) с фиксированной точкой $s$ = 0.6 и генераторами $g=x^p$ и $h=g^{-1}=x^{1/p}$: а) сжимающие с $p$= 0.3 и 1; б) разжимающие с $p$= 1 и 3.

Модификацией формулы (33) построения сжимающих и разжимающих отрицаний является следующая:

$$n(x)=\begin{cases} 1-(1-s)g\left(\dfrac{x}{s}\right), & \text{если } x\le s \\ s\cdot g\left(\dfrac{1-x}{1-s}\right), & \text{если } s<x \end{cases}$$

определяющая сжимающее отрицание, если $g(x)\ge x$ для всех $x\in[0,1]$, и разжимающее отрицание, если $g(x)\le x$ для всех $x\in[0,1]$.

Следующие способы построения сжимающих отрицаний непосредственно основаны на теореме 2.14.

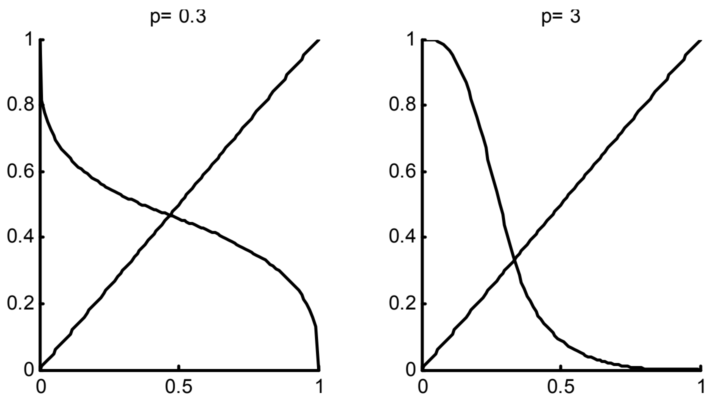
*Предложение* 2.16. Пусть $n_1$ – инволютивное отрицание с фиксированной точкой $s$, и $g$ – автоморфизм интервала [0,1], тогда функция

$$n(x)=\begin{cases} n_1\left(s\cdot g\left(\dfrac{x}{s}\right)\right), & \text{если } x\le s \\ n_1\left(1-(1-s)g\left(\dfrac{1-x}{1-s}\right)\right), & \text{если } s<x \end{cases} \tag{35}$$

является сжимающим отрицанием, если $g(x)\ge x$ на [0,1], и разжимающим отрицанием, если $g(x)\le x$ на [0,1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения следует, что $n$ является биективным отрицанием с фиксированной точкой $s$. Из $g(x) \geq x$ следует $sg(x/s) \geq x,$ и из убывания $n_1$ следует, что $n(x) \leq n_1(x),$ если $x \leq s$. Аналогично, из $g(x) \geq x$ следует $(1-(1-s)g((1-x)/(1-s))) \leq x,$ и $n(x) \geq n_1(x),$ если $s < x,$ и из теоремы 2.14 следует, что $n(x)$ - сжимающее отрицание. Двойственно, $n(x)$ - разжимающе отрицание, если $g(x) \leq x$ на [0,1].

Пример отрицаний, построенных по формуле (35) на основе отрицания Сугено с параметром $p$ и автоморфизмом $g(x) = x^p$ для значений параметра $p$: а) $p = 0.3$; б) $p$=3, приведен на рис. 8.




а) б)

Рис. 8. Сжимающие и разжимающие отрицания, построенные по формуле (35) на основе отрицания Сугено и автоморфизма $g(x)= x^p$ с параметрами: а) $p = 0.3$; б) $p$=3.

Другой способ построения сжимающих и разжимающих отрицаний дает формула

$$n(x) = \begin{cases} n_1\left(s \cdot g\left(\dfrac{x}{s}\right)\right), & \text{если } x \leq s \\ n_1\left(s + (1-s)h\left(\dfrac{x-s}{1-s}\right)\right), & \text{если } s < x \end{cases}$$

где $g$ и $h$ – автоморфизмы интервала [0,1]. Это отрицание является сжимающим, если $h(x) \leq x \leq g(x)$ для всех $x \in [0,1]$. Отрицание является разжимающим, если $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют противоположным неравенствам.

Если в предыдущих двух методах построения сжимающих и разжимающих отрицаний на основе теоремы 2.14 использовалась модификация аргумента инволютивного отрицания, то в следующих методах осуществляется модификация самих значений инволютивных отрицаний.

*Предложение* 2.17. Пусть $n_1$ – инволютивное отрицание с фиксированной точкой $s$, и $g$, $h$ – автоморфизмы интервала [0,1], тогда функция

$$n(x) = \begin{cases} s + (1-s)g\left(\dfrac{n_1(x)-s}{1-s}\right), & \text{если } x \le s \\ s \cdot h\left(\dfrac{n_1(x)}{s}\right), & \text{если } s < x \end{cases}$$

является сжимающим отрицанием, если $g(x) \le x \le h(x)$ для всех $x \in [0,1]$, и $n$ является разжимающим отрицанием, если имеют место противоположные неравенства.

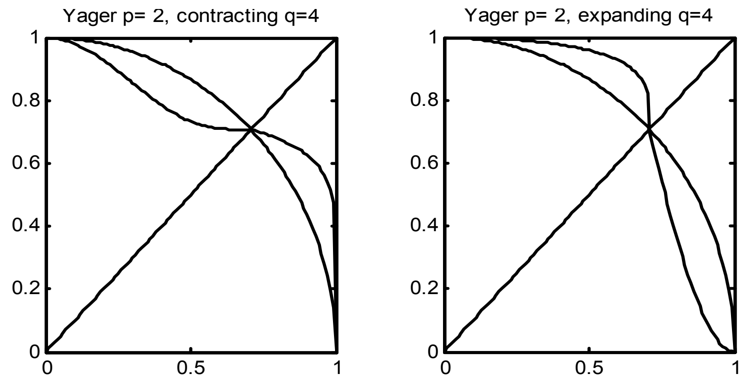
Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения следует, что $n(0) = 1$, $n(1) = 0$, $n(s) = s$. Если $h(x) = x = g(x)$ для всех $x \in [0,1]$, то очевидно, что $n = n_1$. При выполнении $g(x) \le x \le h(x)$ на [0,1] следует выполнение условий (31), т.е. $n$ является сжимающим отрицанием, и при выполнении $h(x) \le x \le g(x)$ на [0,1] следует выполнение условий (32), т.е. $n$ является разжимающим отрицанием.

Заметим, что в качестве автоморфизмов в последних формулах могут использоваться автоморфизмы $f_{[-]}$ и $f_{[+]}$, соответствующие автоморфизму $f$, порождающему инволютивное отрицание $n_1$. Таким образом, предложенные методы позволяют генерировать сжимающие и разжимающие отрицания с помощью произвольного автоморфизма $f$ интервала [0,1].

Приведем пример генерации сжимающих и разжимающих отрицаний на основе метода, рассмотренного в предложении 2.17. В качестве инволютивного отрицания возьмем отрицание Ягера с генератором $f = x^p$ и фиксированной точкой $s = (0.5)^{1/p}$. Положим $g = e_{[-]}$, $h = e_{[+]}$, где $e = x^q$. При $q \ge 1$ имеем $g = x^q$, $h = x^{1/q}$. Тогда получим такое сжимающее отрицание:

$$n(x) = \begin{cases} s + (1-s)\left(\dfrac{\sqrt[p]{1-x^p} - s}{1-s}\right)^q, & \text{если } x \le s \\ s \cdot \sqrt[q]{\left(\dfrac{\sqrt[p]{1-x^p}}{s}\right)}, & \text{если } s < x \end{cases}.$$

На рис 9а) приведен график этого отрицания с параметром $q$ = 4 вместе с графиком соответствующего отрицания Ягера с параметром $p$ = 2. Если в формуле предложения 2.17 $g$ и $h$ поменять местами, то получим разжимающее отрицание, приведенное на рис. 9б). Заметим, что если в этом случае в качестве генератора $e$ взять генератор $f$, используемый для построения отрицания Ягера, т.е. положить $q= p,$ то справа от фиксированной точки формула разжимающего отрицания будет иметь более простой вид.




а) б)

Рис. 9. Сжимающее и разжимающее отрицания, построенные из отрицания Ягера с параметром $p$= 2: а) сжимающее; б) разжимающее.

Ясно, что на основе теоремы 2.14 могут быть предложены и другие методы генерации сжимающих и разжимающих отрицаний.

## 2.3. Биективные отрицания на [0,1]

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

*Теорема* 2.18. Множество неинволютивных элементов биективного отрицания $n$ на [0,1] имеет единственное представление в виде объединения непересекающихся открытых интервалов, на каждом из которых $n$ является либо сжимающим, либо разжимающим, и в каждом таком интервале для любого его элемента $x$ последовательности $a_k= n^{2k}(x)$ и $a_k^{-1}= n^{-2k}(x)$ принадлежат этому интервалу, и имеют пределами инволютивные элементы, совпадающие с концами интервалов.

Отрицание называется сжимающим (разжимающим) на интервале, если оно сжимающее (разжимающее) в каждой точке интервала.

Докажем предварительно ряд вспомогательных утверждений.

*Лемма* 2.19. Неинволютивные элементы биективного отрицания имеют бесконечный ранг.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n$ биективно. Предположим, что в [0,1] существует неинволютивный элемент $x$ с конечным рангом $R(x) = k$. Если $k= 2$, то из предложения 1.13 получим $G(x) = \{x, n(x)\}$ и $n(n(x)) = x$ или $n(n(x)) = n(x)$, что противоречит либо неинволютивности $x,$ либо биективности $n$, так как $n(x) \neq x.$ Если $k \geq 3$, то из предложения 1.13 следует, что $G(x)$ содержит по крайней мере 3 различных элемента: $y = n^{k-1}(x)$, $z = n^{k-2}(x)$, и $v = n^{k-3}(x)$. Возможны два случая:

1) $n^k(x) = n^{k-1}(x)$, что дает $n(y) = n^{k-1}(x)= n(n^{k-2}(x)) = n(z)$, что противоречит биективности $n$, так как $y \neq z.$

2) $n^k(x) = n^{k-2}(x)$, что дает $n(y)= n^{k-2}(x)= n(n^{k-3}(x))= n(v)$, что также противоречит биективности $n$, так как $y \neq v.$

Полученные противоречия доказывают лемму.

*Следствие* 2.20. Биективное отрицание имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда оно является инволюцией.

Таким образом, неинволютивные отрицания конечного ранга должны быть либо нестрого убывающими, либо разрывными функциями. Слабые и обычные отрицания, отличные от инволюций, являются примерами таких отрицаний.

С учетом следствия 1.12 получаем также следующее

*Следствие* 2.21. Для биективного отрицания $n$ на [0,1] выполняется

$R(x) =R(n^k(x))$ для всех $x\in[0,1]$ и всех целых $k \geq 0$.

Из предложения 1.7 и следствия 2.21 следует

*Следствие* 2.22. Биективное отрицание $n$ является сжимающим, разжимающим или инволютивным в точках $n^k(x)\in[0,1]$ одновременно для всех целых $k \geq 0$.

*Предложение* 2.23. Для биективного отрицания $n$ для всех $x\in[0,1]$ и всех $j \geq k \geq 0$ возможны только следующие пары соотношений:

$$n^{-2j}(x) \le n^{-2k}(x) \le x \le n^{2k}(x) \le n^{2j}(x) \qquad (36)$$

и

$$n^{2j+1}(x) \le n^{2k+1}(x) \le n(x) \le n^{-2k-1}(x) \le n^{-2j-1}(x) \qquad (37)$$

или

$$n^{2j}(x) \le n^{2k}(x) \le x \le n^{-2k}(x) \le n^{-2j}(x) \qquad (38)$$

и

$$n^{-2j-1}(x) \le n^{-2k-1}(x) \le n(x) \le n^{2k+1}(x) \le n^{2j+1}(x) \qquad (39)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $n^{-1}$ является отрицанием, то для него выполняется

$$n^{-1}(y) \le n^{-1}(x), \text{ если } x \le y. \qquad (40)$$

Обозначим $y = n^2(x)$. Тогда $n^{-2}(y) = x$, $n^{-4}(y) = n^{-2}(x)$. Если $x \le n^2(x)$, то $n^{-2}(y) \le y$, и дважды применяя (40), получим, $n^{-4}(y) \le n^{-2}(y) \le y$, т.е. $n^{-2}(x) \le x \le n^2(x)$. Многократно применяя отрицания к обеим частям неравенств, получим (36) и (37). Аналогично, если $n^2(x) \le x$, получим (38) и (39).

*Предложение* 2.24. Пусть $n$ – биективное отрицание. Тогда для любого $x\in[0,1]$ последовательности $a_k = n^{2k}(x)$, $b_k = n^{2k+1}(x)$, $a_k^{-1} = n^{-2k}(x)$, $b_k^{-1}= n^{-2k-1}(x)$ имеют пределами некоторые инволютивные элементы $a$, $b$, $a^{-1}$ и $b^{-1}$, соответственно, такие, что $n(a) = b$ и $n^{-1}(a^{-1})=b^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 2.23 следует, что последовательности $a_k = n^{2k}(x)$, $b_k = n^{2k+1}(x)$ будут невозрастающими или неубывающими, и из их ограниченности следует существование $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ и $b= \lim\limits_{k\to\infty} b_k$. Из биективности и, следовательно, непрерывности $n$ получим $n(a)=n\left(\lim\limits_{k\to\infty} a_k\right)= \lim\limits_{k\to\infty} n(a_k)= \lim\limits_{k\to\infty} n^{2k+1}(x)=b$, и аналогично $n(n(a) = n(b) = a$. Аналогичный результат имеет место и для $n^{-1}$.

*Определение* 2.25. Пусть $n$ – некоторое биективное отрицание и $x\in[0,1]$. Обозначим $a^L(x) = min(a^{-1},a)$, $a^R(x) = max(a^{-1},a)$, $b^L(x) = min(b^{-1},b)$, $b^R(x) = max(b^{-1},b)$, где $a^{-1},a$, $b^{-1}$, $b$ определены выше. Интервалы $A(x) = [a^L(x), a^R(x)]$ и $B(x) = [b^L(x), b^R(x)]$ будут называться интервалами, порождаемыми элементом $x$. Для неинволютивных элементов $x$ $A^o(x)$ и $B^o(x)$ будут обозначать соответствующие открытые интервалы $(a^L(x),a^R(x))$ и $(b^L(x),b^R(x))$. Для инволютивных элементов $x$ обозначим $A^o(x)=\{x\}$, $B^o(x)=\{n(x)\}$.

Отметим следующие очевидные свойства этих интервалов.

*Предложение* 2.26. Для всех $x\in[0,1]$ выполняется:

1) $x\in A^o(x)$,

2) $B^o(x) = A^o(n(x))$,

3) $G(x)\cup G^{-1}(x)\subseteq A(x)\cup B(x)$.

*Предложение* 2.27. В $A(x)$ и $B(x)$ инволютивными элементами являются только концы этих интервалов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $y \in A(x)$ является инволютивным элементом отрицания $n$. Если $x \le y$, тогда, последовательно применяя отрицание, получим $n^2(x) \le n^2(y) = y$ и $n^{2k}(x) \le y$ для всех $k \ge 1$. Из инволютивности $y$ по отрицанию $n$ следует инволютивность $y$ по отрицанию $n^{-1}$, откуда также получаем $n^{-2k}(x) \le y$ для всех $k \ge 1$. Из обоих полученных неравенств, непрерывности $n$ и $n^{-1}$ и из предложения 2.24 получаем $a^R(x) \le y$, что дает $a^R(x) = y$. Если $y \le x$, аналогично получаем $a^L(x) = y$. Инволютивность $a^R(x)$ и $a^L(x)$ следует из предложения 2.24. Из предложения 2.26 следует аналогичный результат и для $B(x)$.

*Предложение* 2.28. Для любых $x,y \in [0,1]$ следующие соотношения эквивалентны:

1) $A^o(x) = A^o(y)$,
2) $B^o(x) = B^o(y)$,
3) $x \in A^o(y)$,
4) $y \in A^o(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из 1) следует $A(x) = A(y)$, и применяя отрицание $n$ к $a^L(x) = a^L(y)$, $a^R(x) = a^R(y)$, из предложения 2.24 получим $B(x) = B(y)$, откуда следует 2). Обратно, из 2) следует 1). Из 1) и предложения 2.25 следует 3) и 4).

Покажем, что из 3) следует 1). Если $A^o(y) = \{y\}$, тогда 1) очевидно. Предположим, что $A^o(y) \neq \{y\}$, т.е. $y$ неинволютивно. Тогда из предложения 2.26 следует, что все элементы $A^o(y)$ и, следовательно, $x$ неинволютивны. Из $x \in A^o(y)$ и $x \in A^o(x)$ следует, что интервалы $A(x)$ и $A(y)$ пересекаются, и это пересечение содержит только неинволютивные точки. Тогда из предложения 2.27 следует, что граничные точки обоих интервалов совпадают, что дает $A^o(x) = A^o(y)$. Аналогично, 1) следует из 4).

*Предложение* 2.29. Для каждого $x \in [0,1]$ биективное отрицание является сжимающим или разжимающим на $A^o(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для инволютивного $x$ заключение предложения очевидно. Пусть $x$ – неинволютивно и выполнено, например, (36) и $a^L(x) = \lim\limits_{k\to\infty} n^{-2k}(x)$, $a^R(x) = \lim\limits_{k\to\infty} n^{2k}(x)$. Для любого $y \in A^o(x)$ выполяется $a^L(x) < y < a^R(x)$, и из (36) следуют две возможности:

$$n^{2k}(x) \le y \le n^{2k+2}(x) \tag{41}$$

или

$$n^{-2k-2}(x) \le y \le n^{-2k}(x) \tag{42}$$

для некоторого $k \in \{0,1,2,...\}$. Если выполняется (41), то, применяя отрицание, получим

$$n^{2k+3}(x) \le n(y) \le n^{2k+1}(x), \tag{43}$$

что дает

$$n^{2k}(x) \le y \le n^{2k+2}(x) \le n^{2}(y) \le n^{2k+4}(y). \tag{44}$$

Если $n$ – сжимающее в $x$, то из (44) следует (11) и из (43), (44) следует сжимаемость $n$ в $x$. Если $n$ – разжимающее в $x$, тогда из (42) следует (12) и из (43) следует, что $n$ также разжимающее в $y$. Аналогично, если $y$ удовлетворяет (42), получим, что $n^{-1}$ одинаковое в $x$ и $y$ и из теоремы 2.12 следует, что $n$ также одинаковое в $x$ и $y$. Доказательство для случая $a^L(x)= \lim\limits_{k\to\infty} n^{2k}(x)$ и $a^R(x)= \lim\limits_{k\to\infty} n^{-2k}(x)$ аналогично.

Полученные результаты доказывают теорему 2.18.

## Библиографические комментарии к главе 2

Отрицания в формальной и многозначной логике исследовались в [20, 28]. Связь операции дополнения нечетких множеств с операцией отрицания исследовалась в [92] с позиций теории категорий. В [101] исследовались отрицания, минимизирующие отличия от булевых отрицаний. В [118] исследуются свойства отрицаний на решетках и их связь с мерой нечеткости элементов. Отрицания на упорядоченных лингвистических метках рассматриваются в [109]. В [104] исследуются свойства отрицаний в логическом программировании. Дуальные изоморфизмы, инволюции и интуиционистские отрицания на решетке нечетких множеств исследуются в [68]. Слабые и интуиционистские отрицания изучаются в [69]. В работах [96, 97] изучаются инволюции специального вида. В работах [114, 115] исследуются методы генерации отрицаний операторами компенсации и вопросы сходимости отрицаний к фиксированной точке.

Результаты раздела 1 основаны на работах [8, 43]. Там же впервые введено понятие сжимающих и разжимающих отрицаний. Общие свойства инволюций исследовались в работах [111, 116]. Биективные отрицания называют обычно строгими, а инволюции – сильными отрицаниями. Фиксированные точки называют также точкой симметрии, уровнем симметрии, равновесием, самоотрицающей точкой и т.д. Теорема 2.3, лемма 2.4 и теорема 2.5 основаны на работах [110, 111]. Предложение 2.6 основано на работе [75]. В работе [72] исследуется связь операции отрицания с операцией импликации. Там же дается представление биективных (строгих) отрицаний с помощью двух автоморфизмов. Первые методы генерации сжимающих и разжимающих отрицаний на [0,1] были предложены в работе [54]. Предложение 2.15 основано на этой работе. Остальные результаты раздела 2 (предложение 2.7 и далее) являются новыми [45]. Результаты раздела 2.3 основаны на работе [53].

# ГЛАВА 3. ОПЕРАЦИИ КОНЪЮНКЦИИ И ДИЗЪЮНКЦИИ

## 1. Предварительные замечания

Как было установлено в первой главе, операции конъюнкции $\wedge = min$ и $\vee = max$, введенные Заде, обладают почти всеми свойствами соответствующих булевых операций. Это позволяет легко обобщать на нечеткий случай многие понятия «четкой» логики и, более обще, «четкой» математики. Однако с многих точек зрения эти операции являются ограничительными. Возможность рассмотрения более «мягких» операций конъюнкции и дизъюнкции обсуждал Заде еще в своих первых работах.

Целесообразность применения тех или иных операций конъюнкции и дизъюнкции в нечеткой логике может рассматриваться с разных позиций в зависимости от области приложений нечеткой логики.

Во-первых, эти операции могут рассматриваться с точки зрения моделирования лингвистических связок «и» и «или», используемых человеком. С одной стороны, операции *min* и *max* являются адекватными в порядковых шкалах, в которых обычно измеряются лингвистические оценки. Это обуславливает их широкое применение в нечетких лингвистических моделях. Однако недостатком этих операций является то, что их результат равен значению одного операнда и не меняется при изменении значений второго операнда в определенном диапазоне величин. Например, $0.2\wedge y = 0.2$ для всех значений $y \geq 0.2$. Кроме этого, в ряде экспериментальных работ было установлено, что операции *min* и *max* не являются достаточно удовлетворительными с точки зрения моделирования лингвистических связок. Это привело к появлению работ по разработке строго монотонных операций в порядковых шкалах, по настраиваемым на эксперта табличным операциям, а также стимулировало исследования по поиску новых операций конъюнкции и дизъюнкции.

Во-вторых, расширение класса операций конъюнкции и дизъюнкции вызывалось необходимостью построения обладающих достаточной общностью математических моделей, которые могли бы с единых позиций рассматривать, например, вероятностные и многозначные логики, различные методы принятия решений, обработки данных и т.д. Такое расширение класса операций конъюнкции и дизъюнкции нечеткой логики произошло в результате введения в рассмотрение недистрибутивных операций конъюнкции и дизъюнкции, известных под названием $t$-норм и $t$-конорм. В первой главе было показано, что условие дистрибутивности совместно с условиями монотонности и граничными условиями однозначно определяет операции Заде. В ряде работ установлено, что именно условие дистрибутивности является наиболее жестким ограничением на возможную форму операций конъюнкции и дизъюнкции. Удаление этого свойства из множества аксиом устраняет единственность операций *min* и *max* и дает возможность построения широкого спектра нечетких связок. Свойство дистрибутивности очень важно в логике, так как оно дает возможность совершать эквивалентные преобразования логических форм из дизъюнктивной в конъюнктивную форму и обратно. Это свойство активно используется в процедурах минимизации логических функций, в процедурах логического вывода на основе принципа резолюций и т.д. Однако, во многих задачах такие преобразования логических форм не являются необходимыми, и поэтому оказалось, что свойство дистрибутивности может быть «довольно безболезненно» удалено из системы аксиом, определяющих нечеткие операции конъюнкции и дизъюнкции. Понятия $t$-норм и $t$-конорм пришли в теорию нечетких множеств из теорий функциональных уравнений и вероятностных метрических пространств. Аксиомы этих операций дают возможность построения бесконечного числа логических связок. Основной аксиомой этих операций является ассоциативность, и свойства этих операций во многом определяются общими свойствами ассоциативных функций и операций, активно изучавшимися в математике.

В-третьих, рассмотрение логических операций конъюнкции и дизъюнкции как вещественных функций, являющихся компонентами нечетких моделей процессов и систем, естественно вызывает необходимость рассмотрения широкого класса таких функций, увеличивающих гибкость моделирования. По этим причинам, в ряде приложений нечеткой логики некоторые аксиомы $t$-норм и $t$-конорм также оказались ограничительными. В частности, параметрические классы этих операций имеют достаточно сложный вид для их аппаратной реализации и оптимизации нечетких моделей по параметрам этих операций. Сложность параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций определяется способом генерации этих операций, который фактически определяется условием ассоциативности этих операций. С этой точки зрения свойство ассоциативности может рассматриваться как ограничительное. В то же время свойство коммутативности операций конъюнкции и дизъюнкции может рассматриваться как необязательное ограничение на эти операции, так как в общем случае в нечетких моделях операнды этих операций могут характеризовать переменные, по-разному влияющие на результат операции. Свойства ассоциативности и коммутативности являются важными, например, в нечетких моделях многокритериального принятия решений, поскольку одним из разумных требований, накладываемых на процедуры принятия решений, является их независимость от порядка рассмотрения альтернатив и критериев. Но для систем нечеткого вывода эти свойства не всегда являются необходимыми, особенно когда позиции переменных в нечетких правилах и процедуры обработки правил фиксированы, а также когда число входных переменных не превышает двух, что имеет место во многих реальных приложениях нечетких моделей. По этой причине из определения нечетких операций конъюнкции и дизъюнкции могут быть удалены свойства коммутативности и ассоциативности так же, как это было ранее сделано со свойством дистрибутивности.

Простейшие системы нечеткого логического вывода, имеющие широкие приложения, основаны на правилах вида:

$R_i$: *Если X есть* $A_i$ *и Y есть* $B_i$ *, то Z есть* $C_i$*,*
$R_i$: *Если X есть* $A_i$ *и Y есть* $B_i$ *, то* $z= f_i(x,y)$.

Здесь *X, Y, Z* – нечеткие переменные типа *ТЕМПЕРАТУРА, ДАВЛЕНИЕ, ПЛОТНОСТЬ,* $A_i$, $B_i$, $C_i$ означают нечеткие значения этих переменных, например, *ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ, НИЗКОЕ, БОЛЬШАЯ,* определенные как нечеткие подмножества соответствующих множеств численных значений переменных, и $f_i$ - некоторые вещественные функции. Нечеткие модели, основанные на правилах первого или второго типа, соответственно называются моделями Мамдани или Сугено. Для заданных вещественных значений $x$ и $y$ сила срабатывания правила $w_i$ вычисляется как $w_i = T_1(\mu_{Ai}(x),\mu_{Bi}(y))$, где $T_1$ - это некоторая операция конъюнкции, представляющая связку «*и*», и $\mu_{Ai}(x)$, $\mu_{Bi}(y)$ суть значения принадлежности $x$ и $y$ нечетким множествам $A_i$ и $B_i$. Заключение правил может быть вычислено как $\mu_{Ci}(z) =T_2(w_i,\mu_{Ci}(z))$, и $z_i=T_2(w_i,f_i(x,y))$, где $T_2$ это операция конъюнкции, используемая в операции импликации, и, возможно, отличная от $T_1$. Для агрегирования заключений, полученных по всем правилам, может использоваться некоторая операция дизъюнкции или агрегирования. Кроме того, в моделях Мамдани используется процедура преобразования нечеткого множества, полученного в результате логического вывода, в число, называемая процедурой дефаззификации. Построение оптимальных нечетких моделей традиционно основано как на тьюнинге (настройке) функций принадлежности нечетких множеств, используемых в правилах, так и на тьюнинге операций. Когда эти функции принадлежности и операции задаются параметрически, тогда этот тьюнинг может быть основан на оптимизации этих параметров.

Оптимизация моделей по параметрам операций может производиться вместо или дополнительно к оптимизации параметров нечетких множеств. Однако реализация этого подхода может оказаться достаточно трудоемкой ввиду сложного вида известных параметрических классов $t$-норм и $t$-конорм, используемых в качестве операций конъюнкции и дизъюнкции. Кроме этого, аппаратная реализация подобных операций также сложна. С этих точек зрения более простые параметрические классы операций конъюнкции и дизъюнкции имеют преимущества. Рассмотрение неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции позволяет строить простые параметрические классы этих операций.

Легко увидеть, что ассоциативность операции конъюнкции не требуется, когда посылки правил содержат только по 2 переменные и используются разные операции конъюнкции $T_1$ и $T_2$. В общем случае, когда позиции переменных в посылках правил и процедура вычисления силы срабатывания правил фиксированы, ни условия ассоциативности, ни условия коммутативности операции конъюнкции не являются необходимыми. В этом случае конъюнкция нескольких аргументов может вычисляться последовательно в соответствии с заданным порядком переменных. Более того, некоммутативность и неассоциативность операций может быть желательна в ряде случаев. Например, если $x$ и $y$ означают «ошибка» и «изменение ошибки» соответственно, как это и бывает в системах нечеткого управления, тогда некоммутативность и неассоциативность конъюнкции может использоваться для учета различного влияния этих переменных на управляемый процесс. Таким образом, если коммутативность конъюнкции подразумевает равенство прав обоих операндов, то некоммутативность конъюнкции с фиксированным положением операндов дает возможность построения контекстно-зависимых операций. Мы можем предположить также, что параметрические операции $T_1$ и $T_2$. могут быть «зависимы от правил», что дает возможность отдельной настройки параметров этих операций для правил, относящихся к разным частям управляемого процесса, например, к точкам с максимальной или нулевой ошибкой и т.д.

В этой главе основное внимание уделяется неассоциативным операциям конъюнкции и их приложениям к задачам нечеткого моделирования. Понятия *t*-норм и *t*-конорм в настоящее время достаточно хорошо изучены, и в следующем разделе приводятся лишь основные сведения о них. В последующих разделах дается определение некоммутативных и неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции и предлагаются различные способы генерации новых типов нечетких связок. Приводятся примеры параметрических операций конъюнкции, более простых, чем известные параметрические классы *t*-норм. В качестве примеров нечеткого моделирования рассматриваются задачи аппроксимации данных системами нечеткого вывода, основанные на оптимизации параметров неассоциативных операций конъюнкции.

## 2. *t*-нормы и *t*-конормы

*Определение* 2.1. Триангулярная норма (*t*-норма) $T$ и триангулярная конорма (*t*-конорма) $S$ определяются как функции $T,S:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ такие, что для всех $x, y, z\in[0,1]$ выполняются следующие аксиомы:

$T(x,y) = T(y,x)$, $S(x,y) = S(y,x)$ *(коммутативность),*
$T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$, $S(S(x,y),z) = S(x,S(y,z))$ *(ассоциативность).*
$T(x,y) \le T(x,z)$ и $S(x,y) \le S(x,z)$, если $y \le z$ *(монотонность),*
$T(x,1) = x$, $S(x,0) = x$ *(граничные условия).*

Из определения 2.1 непосредственно следуют следующие граничные свойства этих операций:

$$T(0,x) = T(x,0) = 0, \qquad S(1,x) = S(x,1) = 1, \tag{1}$$
$$T(1,x) = x, \qquad S(0,x) = x \tag{2}$$

*t*-норма и *t*-конорма в определенном смысле являются двойственными понятиями. Эти функции могут быть получены друг из друга, например, с помощью инволютивного отрицания $n$ и законов Де Моргана следующим образом:

$$S(x,y) = n(T(n(x),n(y))), \qquad T(x,y) = n(S(n(x),n(y))).$$

Простейшими примерами *t*-норм и *t*-конорм, взаимно связанных этими соотношениями для $n(x) = 1 - x$, являются следующие:

$T_M(x,y) = min\{x,y\}$ *(минимум),*
$S_M(x,y) = max\{x,y\}$ *(максимум),*

$T_P(x,y) = x\cdot y$ *(произведение),*
$S_P(x,y) = x + y - x\cdot y$ *(вероятностная сумма),*

$T_L(x,y) = max\{x+y-1, 0\}$ *(t-норма Лукасевича),*
$S_L(x,y) = min\{x+y, 1\}$ *(t-конорма Лукасевича, ограниченная сумма),*

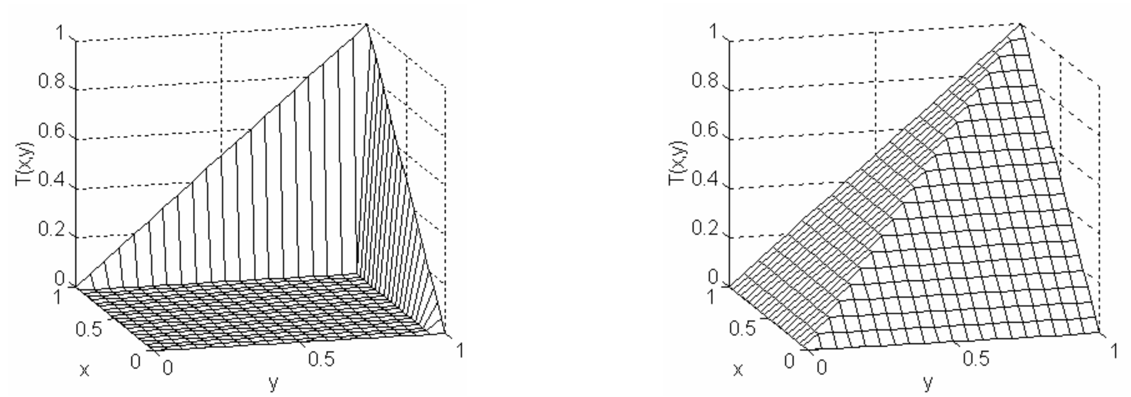
$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0, & \textit{если } (x,y)\in[0,1)\times[0,1) \\ \min(x,y), & \textit{в противном случае} \end{cases} \quad \textit{(сильное произведение),}$$

$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1, & \textit{если } (x,y)\in(0,1]\times(0,1] \\ \max(x,y), & \textit{в противном случае} \end{cases} \quad \textit{(сильная сумма).}$$

Эти простейшие функции будут в дальнейшем использованы для построения параметрических операций конъюнкции и дизъюнкции. Из приведенного определения для любых $t$-норм $T$ и $t$-конорм $S$ следует выполнение следующих неравенств:

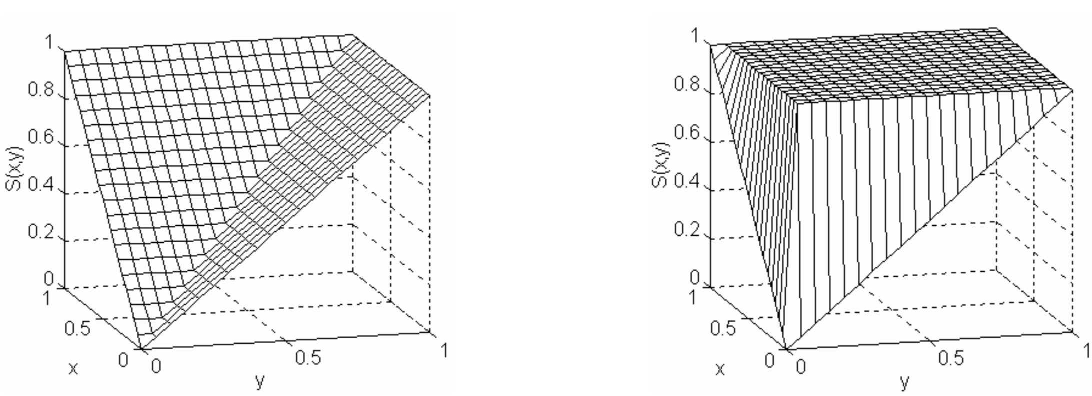
$$T_D(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y) \le S_M(x,y) \le S(x,y) \le S_D(x,y).$$

Таким образом, $t$-нормы $T_D$ и $T_M$ являются минимальной и максимальной границами для всех $t$-норм. Аналогично, $t$-конормы $S_M$ и $S_D$ являются минимальной и максимальной границами для всех $t$-конорм. Эти неравенства очень важны с практической точки зрения, так как они устанавливают границы возможного варьирования операций $T$ и $S$. На рис. 10 и рис. 11 представлены графики соответствующих $t$-норм и $t$-конорм.




а) б)

Рис. 10. а) $t$-норма $T_D$, б) $t$-норма $T_M$ .
Для всех $t$-норм $T$ выполняется: $T_D(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y)$




а) б)

Рис. 11. а) $t$-конорма $S_M$, б) $t$-конорма $S_D$ .
Для всех $t$-конорм $S$ выполняется: $S_M(x,y) \le S(x,y) \le S_D(x,y)$

*Определение* 2.2. $t$-норма $T$ и $t$-конорма $S$ называются непрерывными, если эти функции являются непрерывными на их области определения, и они называются архимедовыми, если для всех $x \in (0,1)$ удовлетворяют, соответственно, следующим условиям:

$$T(x,x) < x, \qquad\qquad x < S(x,x).$$

Минимум и максимум являются непрерывными, но не архимедовыми, сильные произведение и сумма являются архимедовыми, но не непрерывными. Произведение, вероятностная сумма и операции Лукасевича являются непрерывными и архимедовыми.

$t$-нормы и $t$-конормы как функции, удовлетворяющие свойству ассоциативности, могут быть построены различным способом. Приведем без доказательств ряд теорем представления $t$-норм и $t$-конорм.

*Теорема* 2.3. $t$-норма $T$ является непрерывной и архимедовой тогда и только тогда, когда существует строго убывающая и непрерывная функция $f{:}[0,1]\to[0,\infty]$, $f(1) = 0$, такая, что

$$T(x,y)= f^{(-1)}(f(x)+f(y)), \tag{3}$$

где $f^{(-1)}$ есть псевдообратная функция для $f$, определяемая как

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & \textit{если } x \le f(0) \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}.$$

Более того, представление (3) однозначно с точностью до положительной мультипликативной константы.

В условиях теоремы $f$ называется аддитивным генератором $t$-нормы $T$, о которой, в свою очередь, говорят, что она генерируется с помощью $f$. Аддитивным генератором $t$-нормы Лукасевича является функция $f(x) = 1- x$ с псевдообратной функцией $f^{(-1)}(x) = max\{1 - x, 0\}$. Генератором произведения является функция $f(x) = - log(x)$.

*Теорема* 2.4. $t$-конорма $S$ является непрерывной и архимедовой тогда и только тогда, когда существует строго возрастающая и непрерывная функция $g{:}[0,1]\to[0,\infty]$, $g(0) = 0$, такая, что

$$S(x,y)= g^{(-1)}(g(x)+g(y)), \tag{4}$$

где $g^{(-1)}$ есть псевдообратная функция для $g$, определяемая как

$$g^{(-1)}(x)=\begin{cases} g^{-1}(x), & \text{если } x \le g(1) \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Более того, представление (4) однозначно с точностью до положительной мультипликативной константы.

В условиях теоремы $g$ называется аддитивным генератором $t$-конормы $S$, о которой, в свою очередь, говорят, что она генерируется с помощью $g$. Аддитивным генератором $t$-конормы Лукасевича является функция $g(x)= x$ с псевдообратной функцией $g^{(-1)}(x) = min\{x,1\}$. Генератором вероятностной суммы является функция $f(x) = - log(1 - x)$.

*Определение* 2.5. $t$-норма $T$ имеет делители нуля, если существуют $x,y\in(0,1)$ такие, что $T(x,y) = 0$. $T$ называется положительной, если из $x,y > 0$ следует $T(x,y) > 0$. $t$-конорма $S$ называется нильпотентной, если существуют $x,y\in(0,1)$ такие, что $S(x,y) = 1$. $T$ и $S$ называются строгими, если они строго возрастающие по каждому аргументу на $(0,1)\times(0,1)$.

Очевидно, что минимум и произведение являются положительными $t$-нормами, в то время как сильное произведение и $t$-норма Лукасевича имеют делители нуля. Из этих $t$-норм единственной строгой $t$-нормой является произведение. Нетрудно увидеть, что непрерывная архимедова $t$-норма положительна тогда и только тогда, когда она строгая.

Аналогично, сильная сумма и $t$-конорма Лукасевича нильпотентны. Из рассмотренных выше примеров $t$-конорм только вероятностная сумма является строгой.

*Предложение* 2.6. Непрерывная архимедова $t$-норма $T$ с аддитивным генератором $f$ имеет делители нуля тогда и только тогда, когда $f(0) < +\infty$, и $T$ – строгая тогда и только тогда, когда $f(0)=lim_{x\to 0}f(x)= +\infty$.

*Предложение* 2.7. Непрерывная архимедова $t$-конорма $S$ с аддитивным генератором $g$ является нильпотентной тогда и только тогда, когда $g(1) < +\infty$, и $S$ – строгая тогда и только тогда, когда $g(1)=lim_{x\to 1}g(x)= +\infty$.

Далее биективные отрицания будут называться также строгими отрицаниями.

*Теорема* 2.8. Непрерывная $t$-норма $T$ удовлетворяет условию $T(x,n(x))= 0$ для всех $x\in[0,1]$, где $n$ – строгое отрицание на $[0,1]$, тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $\varphi$ интервала $[0,1]$ такой, что

$$T(x,y)= \varphi^{-1}(max\{\varphi(x)+\varphi(y)-1, 0\}),$$

и

$$n(x) \le \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

*Теорема* 2.9. Непрерывная $t$-конорма $S$ удовлетворяет условию $S(x,n(x))= 1$ для всех $x\in[0,1]$, где $n$ – строгое отрицание, тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $\varphi$ интервала [0,1] такой, что

$$S(x,y)= \varphi^{-1}(min\{\varphi(x)+\varphi(y), 1\}),$$

и

$$n(x) \geq \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

Таким образом, все непрерывные $t$-нормы, для которых выполняется закон противоречия $T(x,n(x))= 0$, и все непрерывные $t$-конормы, для которых выполняется закон исключенного третьего $S(x,n(x))= 1$, изоморфны, соответственно, $t$-норме и $t$-конорме Лукасевича:

$$T(x,y)= \varphi^{-1}(T_L(\varphi(x), \varphi(y))),$$

$$S(x,y)= \varphi^{-1}(S_L(\varphi(x),\varphi(y))),$$

Заметим, что закону противоречия удовлетворяют $t$-норма Лукасевича и сильное произведение, а закону исключенного третьего удовлетворяют $t$-конорма Лукасевича и сильная сумма.

*Теорема* 2.10. Непрерывная $t$-норма $T$ является строгой тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $\varphi$ интервала [0,1] такой, что

$$T(x,y)= \varphi^{-1}(\varphi(x)\cdot\varphi(y)). \quad (5)$$

$t$-норма $T$ в (5) представлена в мультипликативной форме. Более обще, мультипликативным генератором $t$-нормы $T$ называется строго возрастающая функция $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ такая, что $\varphi$ -непрерывна справа в 0, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(x)\cdot\varphi(y)\in Ran(\varphi)\cup[0,\varphi(0)]$, где $Ran(\varphi)$ – область значений $\varphi$, и выполняется

$$T(x,y)= \varphi^{(-1)}(\varphi(x)\cdot\varphi(y)).$$

*Теорема* 2.11. Непрерывная $t$-конорма $S$ является строгой тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $\varphi$ интервала [0,1] такой, что

$$S(x,y)= \varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y) - \varphi(x)\cdot\varphi(y)). \quad (6)$$

Соотношения (5) и (6) могут быть представлены в виде:

$$T(x,y)= \varphi^{-1}(T_P(\varphi(x), \varphi(y))),$$
$$S(x,y)= \varphi^{-1}(S_P(\varphi(x),\varphi(y))),$$

Таким образом, все непрерывные строгие $t$-нормы и $t$-конормы изоморфны, соответственно, произведению и вероятностной сумме.

Пусть $T$ - $t$-норма, $S$ - $t$-конорма, $n_1$ и $n_2$ – операции отрицания. Рассмотрим законы Де Моргана:

$$n_1(S(x,y))= T(n_1(x),n_1(y)), \tag{7}$$
$$n_2(T(x,y))= S(n_2(x),n_2(y)). \tag{8}$$

*Предложение* 2.12. Пусть $n$ – строгое отрицание.

а) Для любой $t$-нормы $T$ существует $t$-конорма $S$, определяемая соотношением

$$S(x,y)= n^{-1}(T(n(x),n(y))),$$

удовлетворяющая (7) с $n_1 = n$. Если $T$ – непрерывная $t$-норма, то $S$ – непрерывная $t$-конорма. Если $T$ – архимедова с аддитивным генератором $f$, то $S$ – архимедова с аддитивным генератором $g= f\circ n$ и $g(1) = f(0)$.

б) Для любой $t$-конормы $S$ существует $t$-норма $T$, определяемая соотношением

$$T(x,y)= n^{-1}(S(n(x),n(y))),$$

удовлетворяющая (8) с $n_2 = n$. Если $S$ – непрерывная $t$-конорма, то $T$ – непрерывная $t$-норма. Если $S$ – архимедова $t$-конорма с аддитивным генератором $g$, то $T$ – архимедова $t$-норма с аддитивным генератором $f = g\circ n$ и $f(0) = g(1)$.

*Определение* 2.13. Триплетом Де Моргана называется тройка $(T, S, n)$, где $T$ - $t$-норма, $S$ - $t$-конорма и $n$ – строгое отрицание, такие, что для всех $x\in[0,1]$ выполняется (7) с $n_1 = n$. Триплет Де Моргана называется непрерывным, если $T$ и $S$ – непрерывные функции.

Триплет Де Моргана $(T, S, n)$ называется сильным или типа Лукасевича, если существует автоморфизм $\varphi$ интервала [0,1] такой, что

$$T(x,y)= \varphi^{-1}(max\{\varphi(x)+\varphi(y)-1, 0\}),$$
$$S(x,y)= \varphi^{-1}(min\{\varphi(x)+\varphi(y), 1\}),$$
$$n(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

Триплет Де Моргана $(T, S, n)$ называется строгим или типа произведения, если существует автоморфизм $\varphi$ интервала [0,1] такой, что

$$T(x,y)= \varphi^{-1}(\varphi(x), \varphi(y)),$$
$$S(x,y)= \varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y) - \varphi(x)\cdot\varphi(y)),$$
$$n(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

*Предложение* 2.14. Если $\varphi$ – автоморфизм интервала [0,1], а $T_1$ и $S_1$ - $t$-норма и $t$-конорма соответственно, то следующие формулы

$$T(x,y) = \varphi^{-1}(T_1(\varphi(x), \varphi(y))),$$
$$S(x,y) = \varphi^{-1}(S_1(\varphi(x), \varphi(y))),$$

определяют $t$-норму $T$ и $t$-конорму $S$, соответственно.

## 3. Параметрические классы *t*-норм и *t*-конорм

Приведем примеры параметрических классов $t$-норм и $t$-норм.

***t*-нормы и *t*-конормы Домби ($\lambda \in [0, \infty]$):**

$$T(x,y) = \frac{1}{1 + \left( \left( \frac{1-x}{x} \right)^{\lambda} + \left( \frac{1-y}{y} \right)^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}}}, \qquad \text{если } \lambda \in (0, \infty),$$

$$T(x,y) = T_D(x,y), \qquad \text{если } \lambda = 0,$$
$$T(x,y) = T_M(x,y), \qquad \text{если } \lambda = \infty.$$

$$S(x,y) = 1 - \frac{1}{1 + \left( \left( \frac{x}{1-x} \right)^{\lambda} + \left( \frac{y}{1-y} \right)^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}}}, \qquad \text{если } \lambda \in (0, \infty),$$

$$S(x,y) = S_D(x,y), \qquad \text{если } \lambda = 0,$$
$$S(x,y) = S_M(x,y), \qquad \text{если } \lambda = \infty.$$

$t$-нормы Домби являются непрерывными, архимедовыми и строгими на $(0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами $t$-норм Домби на $(0,\infty)$ являются функции:

$$f(x) = \left( \frac{1-x}{x} \right)^{\lambda},$$

$$\varphi(x) = e^{-\left( \frac{1-x}{x} \right)^{\lambda}}.$$

***t*-нормы и *t*-конормы Франка ($\lambda \in [0, \infty]$):**

$$T(x,y) = \log_\lambda \left( 1 + \frac{(\lambda^x - 1)(\lambda^y - 1)}{\lambda - 1} \right), \quad \text{если } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty),$$

$T(x,y) = T_M(x,y)$, если $\lambda = 0$,
$T(x,y) = T_P(x,y)$, если $\lambda = 1$,
$T(x,y) = T_L(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

$$S(x,y) = 1 - \log_\lambda \left( 1 + \frac{(\lambda^{1-x} - 1)(\lambda^{1-y} - 1)}{\lambda - 1} \right), \quad \text{если } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty),$$

$S(x,y) = S_M(x,y)$, если $\lambda = 0$,
$S(x,y) = S_P(x,y)$, если $\lambda = 1$,
$S(x,y) = S_L(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

*t*-нормы Франка являются непрерывными, архимедовыми и строгими на $(0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами *t*-норм Франка являются функции:

$$f(x) = \begin{cases} -\log x, & \text{\textit{если} } \lambda = 1 \\ 1 - x, & \text{\textit{если} } \lambda = \infty \\ \log \dfrac{\lambda - 1}{\lambda^x - 1}, & \text{\textit{если} } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty) \end{cases},$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{\textit{если} } \lambda = 1 \\ e^{x-1}, & \text{\textit{если} } \lambda = \infty \\ \dfrac{\lambda^x - 1}{\lambda - 1}, & \text{\textit{если} } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty) \end{cases}.$$

***t*-нормы и *t*-конормы Хамахера ($\lambda \in [0, \infty]$):**

$$T(x,y) = \frac{xy}{\lambda + (1-\lambda)(x + y - xy)}, \quad \text{если } \lambda \in [0,\infty) \text{ и } (\lambda,x,y) \neq (0,0,0),$$

$T(x,y) = T_D(x,y)$, если $\lambda = \infty$,
$T(x,y) = 0$, если $\lambda = x = y = 0$.

$S(x,y) = \dfrac{x + y + (\lambda - 2)xy}{1 + (\lambda - 1)xy}$, если $\lambda \in (0,\infty)$ и $(\lambda, x, y) \neq (0,1,1)$,
$S(x,y) = S_D(x,y)$, если $\lambda = \infty$,
$S(x,y) = 1$, если $\lambda = 0$ и $x = y = 1$.

$t$-нормы Хамахера являются непрерывными, архимедовыми и строгими на $[0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами $t$-норм Хамахера являются функции:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x}, & \text{если } \lambda = 0 \\ \log\left(\dfrac{\lambda + (1-\lambda)x}{x}\right), & \text{если } \lambda \in (0,\infty) \end{cases},$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x}}, & \text{если } \lambda = 0 \\ \dfrac{x}{\lambda + (1-\lambda)x}, & \text{если } \lambda \in (0,\infty) \end{cases}.$$

**$t$-нормы и $t$-конормы Швайцера-Скляра ($\lambda \in [-\infty, \infty]$):**

$T(x,y) = \left(\max((x^{\lambda} + y^{\lambda} - 1), 0)\right)^{\frac{1}{\lambda}}$, если $\lambda \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$,
$T(x,y) = T_M(x,y)$, если $\lambda = -\infty$,
$T(x,y) = T_P(x,y)$, если $\lambda = 0$,
$T(x,y) = T_D(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

$S(x,y) = 1 - \left(\max(((1-x)^{\lambda} + (1-y)^{\lambda} - 1), 0)\right)^{\frac{1}{\lambda}}$, если $\lambda \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$,
$S(x,y) = S_M(x,y)$, если $\lambda = -\infty$,
$S(x,y) = S_P(x,y)$, если $\lambda = 0$,
$S(x,y) = S_D(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

$t$-нормы Швайцера-Скляра являются непрерывными и архимедовыми на $(-\infty,\infty)$, строгими на $(-\infty,0]$, нильпотентными на $(0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами $t$-норм Швайцера-Скляра являются функции:

$$f(x)=\begin{cases}-\log x, & \textit{если } \lambda=0\\ \dfrac{1-x^{\lambda}}{\lambda}, & \textit{если } \lambda\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)\end{cases},$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, & \textit{если } \lambda=0\\ e^{\frac{x^{\lambda}-1}{\lambda}}, & \textit{если } \lambda\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)\end{cases}.$$

***t*-нормы и *t*-конормы Ягера ($\lambda\in[0,\infty]$):**

$T(x,y)=\max(1-((1-x)^{\lambda}+(1-y)^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}},0)$, если $\lambda\in(0,\infty)$,
$T(x,y) = T_D(x,y)$, если $\lambda = 0$,
$T(x,y) = T_M(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

$S(x,y)=\min((x^{\lambda}+y^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}},1)$, если $\lambda\in(0,\infty)$,
$S(x,y) = S_D(x,y)$, если $\lambda = 0$,
$S(x,y) = S_M(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

*t*-нормы Ягера являются непрерывными и архимедовыми на $(0,\infty)$, нильпотентными на $(0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами *t*-норм Ягера являются функции:

$$f(x)=(1-x)^{\lambda}, \qquad \varphi(x)=e^{-(1-x)^{\lambda}}.$$

***t*-нормы и *t*-конормы Майора-Торренса ($\lambda\in[0,1]$):**

$$T(x,y)=\begin{cases}\max(x+y-\lambda,0), & \textit{если } \lambda\in(0,1] \textit{ и } (x,y)\in[0,\lambda]\times[0,\lambda]\\ \min(x,y), & \textit{если } \lambda=0 \textit{ или } x>\lambda \textit{ или } y>\lambda\end{cases}.$$

$$S(x,y)=\begin{cases}\min(x+y+\lambda-1,1), & \textit{если } \lambda\in(0,1] \textit{ и } (x,y)\in[1-\lambda,1]\times[1-\lambda,1]\\ \max(x,y), & \textit{если } \lambda=0 \textit{ или } x<1-\lambda \textit{ или } y<1-\lambda\end{cases}.$$

*t*-нормы Майора-Торренса являются непрерывными на [0,1], архимедовыми и нильпотентными при $\lambda = 1$. Аддитивным и мультипликативным генераторами *t*-норм Майора-Торренса являются функции:

$$f(x) = 1 - x, \qquad \varphi(x)=e^{x-1}.$$

## 4. Обобщенные операции конъюнкции и дизъюнкции

В первом разделе ставилась задача построения простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций, пригодных для оптимизации нечетких моделей по параметрам этих операций. Как это видно из предыдущего раздела, параметрические классы $t$-норм и $t$-конорм достаточно сложны для их использования в задачах оптимизации нечетких моделей. В этом и последующих разделах нас будут интересовать методы построения простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций, варьирующих в определенном диапазоне и удобных для их использования в задачах оптимизации нечетких моделей. Все методы генерации $t$-норм и $t$-конорм, рассмотренные в разделе 2, основаны на использовании (псевдо-) обратных функций от генераторов. Это и является причиной сложного вида генерируемых операций. В то же время, как это следует из теории ассоциативных функций, рассмотренные выше методы представления $t$-норм и $t$-конорм, как функций, генерируемых аддитивными или мультипликативными генераторами, являются общим свойством ассоциативных функций. Следовательно, для получения простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций необходимо рассматривать неассоциативные операции.

*Определение* 4.1. Операциями конъюнкции $T$ и дизъюнкции $S$ называются функции $T,S$:$[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ такие, что для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$T(x,1) = T(1,x) = x, \qquad S(x,0) = S(0,x) = x, \tag{9}$$

$$T(x,y) \le T(u,v) \text{ и } S(x,y) \le S(u,v), \text{ если } x \le u,\ y \le v. \tag{10}$$

Ясно, что любые $t$-норма и $t$-конорма соответственно являются конъюнкцией и дизъюнкцией. Очевидны следующие свойства введенных операций.

$$T(0,x) = T(x,0) = 0, \qquad S(1,x) = S(x,1) = 1, \tag{11}$$

$$T_D(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y) \le S_M(x,y) \le S(x,y) \le S_D(x,y). \tag{12}$$

Аналог предложения 2.12 также имеет место для определенных выше конъюнкций и дизъюнкций, а именно, если $n$ – строгое отрицание, а $T$, $S$ – конъюнкция и дизъюнкция, то с их помощью можно определить соответственно дизъюнкцию $S_T$ и конъюнкцию $T_S$:

$$S_T(x,y) = n^{-1}(T(n(x), n(y))), \tag{13}$$

$$T_S(x,y) = n^{-1}(S(n(x), n(y))). \tag{14}$$

Если $n$ инволютивное отрицание, то для любой конъюнкции $T$ и дизъюнкции $S = S_T$, (для любой $S$ и $T=T_S$ ) выполняются законы Де Моргана:

$$n(S(x,y)) = T(n(x), n(y)), \qquad n(T(x,y)) = S(n(x), n(y)).$$

Ниже вводятся две функции, которые будут использоваться для генерации конъюнкции и дизъюнкции.

*Определение* 4.2. Функции $t,s$:$[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ такие, что для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$t(0,x) = t(x,0) = 0, \qquad s(1,x) = s(x,1) = 1, \tag{15}$$

$$t(x,y) \le t(u,v) \quad \text{и} \quad s(x,y) \le s(u,v), \text{ если } x \le u,\ y \le v, \tag{16}$$

соответственно будут называться псевдоконъюнкцией и псевдодизъюнкцией.

Очевидно, что любая конъюнкция (дизъюнкция) будет псевдоконъюнкцией (псевдодизъюнкцией).

*Теорема* 4.3. Пусть $T_1$, $T_2$ – конъюнкции, $t$ – псевдоконъюнкция, $S_1$ и $S_2$ – дизъюнкции и $s$ – псевдодизъюнкция, тогда следующие функции

$$T_3(x,y) = T_2(T_1(x,y),s(x,y)), \qquad T_4(x,y) = T_2(s(x,y),T_1(x,y)), \tag{17}$$

$$S_3(x,y) = S_2(S_1(x,y), t(x,y)), \qquad S_4(x,y) = S_2(t(x,y), S_1(x,y)), \tag{18}$$

соответственно будут конъюнкцией и дизъюнкцией.

*Доказательство:* $T_3(x,1) = T_2(T_1(x,1),s(x,1)) = T_2(x,1) = x$; $T_3(1,y) = T_2(T_1(1,y),s(1,y)) = T_2(y,1) = y$. Монотонность $T_3$ следует из монотонности $T_1$, $T_2$ и $s$. Аналогично показывается, что $T_4$ – конъюнкция, а $S_3$, $S_4$ - дизъюнкции.

В общем случае, ввиду некоммутативности (псевдо-) конъюнкций и (псевдо-) дизъюнкций, левые и правые формулы в (17), (18) определяют разные функции. Однако ясно, что свойства «левосторонних» и «правосторонних» функций (17), (18) аналогичны, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться только один из вариантов возможных функций.

Конъюнкции (17) обладают следующими свойствами.

*Предложение* 4.4.

$T(T_D, s) = T_D$ для любых конъюнкций $T$ и псевдодизъюнкций $s$;

$T_D(T, s) = T_D$ для любых конъюнкций $T$ и псевдодизъюнкций $s$ таких, что $s(x,y) < 1$, если $x,y < 1$;

$T_M(T, S) = T$ для любых конъюнкций $T$ и дизъюнкций $S$;

$T(T_M, S_M) = T$ для любых коммутативных конъюнкций $T$;

$T_L(T, S) = T_L$ для всех пар $(T,S)$ операторов $(T_M, S_M)$, $(T_P, S_P)$, и $(T_L, S_L)$.

*Доказательство:* Из (15) и теоремы 4.3 следует, что достаточно рассмотреть случаи, когда $x,y < 1$.

$T(T_D(x,y),s(x,y)) = T(0,s(x,y)) = 0 = T_D(x,y)$.

$T_D(T(x,y),s(x,y)) = 0 = T_D(x,y)$, так как $T(x,y) \leq min(x,y) < 1$ и $s(x,y) < 1$ для $x,y < 1$.

Из (12) имеем $T_M(T(x,y), S(x,y)) = min(T(x,y),S(x,y)) = T(x,y)$.

Из коммутативности $T$ следует $T(T_M(x,y),S_M(x,y)) = T(min(x,y),max(x,y)) = T(x,y)$.

Покажем, что $T_L(T(x,y),S(x,y)) = max(0,T(x,y) + S(x,y) - 1) = T_L(x,y)$. Достаточно показать, что $T(x,y) + S(x,y) = x + y$ для всех рассматриваемых пар операторов $T$, $S$. $T_M(x,y) + S_M(x,y) = min(x,y) + max(x,y) = x + y$. $T_P(x,y) + S_P(x,y) = xy + x + y - xy = x + y$. $T_L(x,y) + S_L(x,y) = max(0, x + y - 1) + min(1, x+y) = x+y$ для обоих возможностей $x + y < 1$ и $x + y \geq 1$.

Аналогично доказываются следующие свойства дизъюнкций (18).

*Предложение* 4.5.

| | | |
|---|---|---|
| $S(t,S_D) = S_D$ | | для всех псевдоконъюнкций $t$ и дизъюнкций $S$; |
| $S_D(t,S) = S_D$ | | для всех дизъюнкций $S$ и всех псевдоконъюнкций $t$ таких, что $t(x,y) > 0$, если $x,y > 0$; |
| $S_M(T,S) = S$ | | для всех конъюнкций $T$ и дизъюнкций $S$; |
| $S(T_M,S_M) = S$ | | для всех коммутативных дизъюнкций $S$; |
| $S_L(T,S) = S_L$ | | для всех пар $(T,S)$ операторов $(T_M, S_M)$, $(T_P, S_P)$ и $(T_L, S_L)$. |

Как это следует из теоремы 4.3, операции конъюнкции и дизъюнкции могут строиться из хорошо известных $t$-норм и $t$-конорм используемых как (псевдо-) конъюнкции и (псевдо-) дизъюнкции. Но для получения новых операторов необходимо учитывать предложения 4.4 и 4.5. Например, из $T_M$, $T_P$, $S_M$, $S_P$ могут быть получены следующие коммутативные операции конъюнкции и дизъюнкции, связанные друг с другом законами Де Моргана с отрицанием Заде:

$$T(x,y) = (x+y - xy)min(x,y), \qquad S(x,y) = max(x,y)+xy - max(x,y)xy,$$
$$T(x,y) = max(x,y)xy, \qquad S(x,y)= min(x,y)+x+y - xy - min(x,y)(x+y - xy),$$
$$T(x,y) = xy(x+y - xy), \qquad S(x,y) = x+y - xy(x+y - xy).$$

Для получения более интересных параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций можно использовать в (17) и (18) псевдоконъюнкции и псевдодизъюнкции, отличные от $t$-норм и $t$-конорм.

*Предложение* 4.6. Если $n$ отрицание на [0,1], а $t$, $s$ – некоторые псевдоконъюнкция и псевдодизъюнкция, тогда следующие соотношения определяют, соответственно, псевдодизъюнкцию и псевдоконъюнкцию:

$$s_t(x,y) = n(t(n(x), n(y))), \qquad t_s(x,y) = n(s(n(x), n(y))).$$

*Доказательство:* $s_t(x,1) = n(t(n(x),n(1))) = n(t(n(x),0)) = n(0) = 1$. Аналогично получим $s_t(1,x) = 1$. Так как $t$ монотонно возрастает по обоим аргументам, и $n$ монотонно убывающая функция, мы получаем свойство монотонности для $s_t$. Доказательство для $t_s$ аналогично.

Заметим, что если в (11) отрицание $n$ инволюция, то псевдосвязки $t$ и $s = s_t$ , $s$ и $t = t_s$ будут взаимно связаны законом Де Моргана. Мы будем рассматривать следующие пары псевдосвязок, взаимно связанных отрицанием $n(x) = 1 - x$ :

$$t_B(x,y) = 0 \quad \text{для всех } x,y \in [0,1], \qquad s_B(x,y) = 1 \text{ для всех } x,y \in [0,1].$$

$$t_D(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y) \in (0,1] \times (0,1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

$$s_D(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

$$t_X(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y = 0 \\ x, & \text{если} \quad y \neq 0 \end{cases}, \qquad s_X(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y = 1 \\ y, & \text{если} \quad y \neq 1 \end{cases}.$$

$$t_Y(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0 \\ y, & \text{если} \quad x \neq 0 \end{cases}, \qquad s_Y(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 1 \\ y, & \text{если} \quad x \neq 1 \end{cases}.$$

Пусть $t$ - псевдоконъюнкция, а $s$ - псевдодизъюнкция. Легко показать, что для всех $x,y \in [0,1]$ выполняется:

$$t_B(x,y) \le t(x,y) \le t_D(x,y), \qquad s_D(x,y) \le s(x,y) \le s_B(x,y).$$

Любая псевдоконъюнкция $t$ отличается от любой псевдодизъюнкции $s$ по крайней мере в двух точках (0,1) и (1,0), так как:

$$t(0,1) = t(1,0) = 0, \qquad s(0,1) = s(1,0) = 1.$$

*Предложение* 4.7. Пусть $s$ - некоторая параметрическая псевдодизъюнкция, варьирующая от $s_D$ до $s_B$, и $T_1$ – произвольная конъюнкция, тогда с помощью любой конъюнкции $T_2$, применяя (17), можно построить конъюнкции, варьирующие от $T_D$ до $T_1$.

*Доказательство:* Из (17) имеем: $T_2(T_1(x,y),s_B(x,y)) = T_2(T_1(x,y),1) = T_1(x,y)$. Обозначим $T(x,y) = T_2(T_1(x,y),s_D(x,y))$. Если $x = 1$, тогда $T(1,y) = T_2(T_1(1,y),s_D(1,y)) = T_2(y,1) = y$. Если $y = 1$, то аналогично получим $T(x,1) =$

$x$. Если $x \neq 1$ и $y \neq 1$, то $T(x,y) = T_2(T_1(x,y),s_D(x,y)) = T_2(T_1(x,y),0) = 0$. Следовательно, $T = T_D$. Таким образом, из $s = s_B$ и $s = s_D$ с помощью (17) получим $T_1$ и $T_D$, соответственно. Предположим, варьируя параметр в $s$, можно построить псевдодизъюнкции $s_a$ и $s_b$ такие, что $s_a \leq s_b$ . Обозначим конъюнкции, полученные по (17) на основе $s_a$ и $s_b$, как $T_a$ и $T_b$, соответственно. Тогда имеем $s_D \leq s_a \leq s_b \leq s_B$, и из монотонности всех функций в (17) следует $T_D \leq T_a \leq T_b \leq T_1$.

Как следует из предложения, если построить параметрический класс псевдодизъюнкций $s$, варьирующих от $s_D$ до $s_B$, то, применяя $s$ и $T_1 = T_M$ в (17), можно варьировать конъюнкции во всем диапозоне от $T_D$ до $T_M$. Конечно, типы конъюнкций, генерируемых между $T_D$ и $T_M$, будут зависеть от формы $s$ и $T_2$.

Двойственно можно сформулировать следующее предложение.

*Предложение* 4.8. Пусть $t$ - параметрическая псевдоконъюнкция, варьирующая от $t_B$ до $t_D$, и $S_1$ произвольная дизъюнкция, тогда с помощью любой дизъюнкции $S_2$, применяя (18), можно построить дизъюнкции, варьирующие от $S_1$ до $S_D$.

Из этих предложений следует, что для генерации параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций достаточно генерировать подходящий класс псевдоопераций. Этот вопрос рассматривается в следующем разделе.

*Предложение* 4.9. Пусть $t_1$ и $t_2$ - псевдоконъюнкции, $s_1$ и $s_2$ - псевдодизъюнкции, $f_1$, $f_2$, $g_1$, $g_2$, $h$:[0,1]→[0,1] суть неубывающие функции такие, что $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $g_1(1)= g_2(1)= 1$, тогда следующие функции

$$t_3(x,y) = t_1(f_1(x), f_2(y)), \qquad s_3(x,y) = s_1(g_1(x), g_2(y)), \tag{19}$$
$$t_4(x,y) = f_1(t_1(x,y)), \qquad s_4(x,y) = g_1(s_1(x,y)), \tag{20}$$
$$t_5(x,y) = t_2(t_1(x,y), h(y)), \qquad s_5(x,y) = s_2(s_1(x,y), h(y)), \tag{21}$$
$$t_6(x,y) = t_2(h(x), t_1(x,y)), \qquad s_6(x,y) = s_2(h(x), s_1(x,y)), \tag{22}$$

будут псевдоконъюнкциями и псевдодизъюнкциями соответственно.

*Доказательство:* Из $f_1(0) = f_2(0) = 0$, и из выполнения (15) для $t_1$ и $t_2$ получим выполнение (15) для функций $t$ в (19) - (20). Монотонность функций $t$ следует из монотонности $t_1$, $t_2$ , $f_1$, $f_2$ и $h$. Доказательство для псевдодизъюнкций аналогично.

Заметим, что из-за возможной некоммутативности функций $f_1$, $f_2$, $g_1$, $g_2$ функции (21) и (22) могут быть различными.

Многократное рекурсивное применение (19) - (22) дает возможность строить различные псевдоконъюнкции и псевдодизъюнкции и затем с помощью теоремы 4.3 и предложения 4.6 - различные конъюнкции и дизъюнкции.

Функции $f$ и $g$, определенные в предложении 4.9, будут называться $f$- и $g$-генераторами, соответственно. Легко увидеть, что посредством любого отрицания $n$ можно получить из $f$-генератора некоторый $g$-генератор и, наоборот:

$$g(x) = n(f(n(x))), \qquad f(x) = n(g(n(x))).$$

Например, применяя (17) и (19), можно получить конъюнкцию:

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y),s(g_1(x,p_1), g_2(y,p_2))),$$

где $T_2, T_1$ - некоторые конъюнкции, $s$ - псевдодизъюнкция и $g_1(x,p_1)$, $g_2(y,p_2)$ - некоторые генераторы, зависящие от параметров $p_1$, $p_2$. Для получения более или менее простых параметрических классов конъюнкций мы можем выбрать $T_2$, $T_1$ среди $t$-норм $T_M$, $T_P$, $T_D$, $T_L$, выбрать $s$ среди $t$-конорм $S_M$, $S_P$, $S_D$, $S_L$ и использовать простые функции $g_1$ и $g_2$.

Далее в основном рассматриваются операции конъюнкции. Соответствующие операции дизъюнкции могут быть получены двойственно или из операции конъюнкции с помощью операции отрицания.

Рассмотрим следующие генераторы:

$$f_B(x) = 0 \quad \text{для всех } x\in[0,1], \qquad g_B(x) = 1 \quad \text{для всех } x\in[0,1].$$

$$f_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0 \\ 1, & \text{если} \quad x \neq 0 \end{cases}, \qquad g_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 1 \\ 0, & \text{если} \quad x \neq 1 \end{cases}.$$

Очевидно, что для любых $f$- и $g$-генераторов выполняется:

$$f_B(x) \le f(x) \le f_D(x), \qquad g_D(x) \le g(x) \le g_B(x).$$

Принимая во внимание, что следующие функции

$$f_x(x) = x, \qquad g_x(x) = x,$$

также являются генераторами, в (19) - (22) можно заменить генераторы и функции $h$ их аргументами.

Легко видеть, что подставляя $t_1 = T$ и $s_1 = S$ в (19), получим для произвольной конъюнкции $T$, дизъюнкции $S$ и для любых генераторов $f$ и $g$ следующие соотношения:

$$\begin{array}{ll}
T(f_B(x), f(y)) = T(f(x),f_B(y)) = t_B(x,y), & S(g_B(x),g(y)) = S(g(x),g_B(y)) = s_B(x,y), \\
T(f_D(x), f_D(y)) = t_D(x,y), & S(g_D(x),g_D(y)) = s_D(x,y), \\
T(f_D(x),y) = t_y(x,y), & S(g_D(x),y) = s_y(x,y), \\
T(x, f_D(y)) = t_x(x,y), & S(x,g_D(y)) = s_x(x,y).
\end{array}$$

Принимая эти соотношения во внимание, из предложения 4.7 получим следующий способ построения конъюнкций.

*Теорема* 4.10. Пусть $T_1$ и $T_2$ - конъюнкции, $S$ - дизъюнкция, $g_1$ и $g_2$ - параметрические классы $g$-генераторов такие, что один из них варьирует от $g_D$ до $g_B$, а другой от $g_D$ до некоторого $g^*$, тогда с помощью соотношения

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y),S(g_1(x),g_2(y))) \qquad (23)$$

мы сможем сгенерировать конъюнкции, варьирующие от $T_D$ до $T_1$.

## 5. Примеры параметрических классов обобщенных конъюнкций

*Пример* 5.1. Рассмотрим следующие параметрические классы генераторов, зависящих от порога $p\in[0,1]$:

$$f(x,p)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le p\\ 1, & \text{если} \quad p<x\end{cases}, \qquad g(x,p)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<p\\ 1, & \text{если} \quad p\le x\end{cases},$$

со следующими свойствами:

$$f_B(x) = f(x,1) \le f(x,p) \le f(x,0) = f_D(x),$$
$$g_D(x) = g(x,1) \le g(x,p) \le g(x,0) = g_B(x).$$

Для любого $T$ и $S$ выполняется:

$$T(f(x,p),f(y,q))=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le p \text{ или } y\le q\\ 1, & \text{в противном случае}\end{cases},$$

$$S(g(x,p),g(y,q))=\begin{cases}1, & \text{если} \quad p\le x \text{ или } q\le y\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}.$$

Применяя в (23) $T_1= T_M$ и генераторы $g(x,p)$ и $g(y,q)$, для произвольных $T_2$ и $S$ получим следующую операцию конъюнкции:

$$T(x,y)=\begin{cases}\min(x,y), & \text{если} \quad p\le x \text{ или } q\le y\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases},$$

и, в частности, $T = T_D$ при $p = 1$, $q = 1$, и $T = T_M$ при $p = 0$ или $q = 0$. График этой конъюнкции для $p = 0.4$, $q = 0.8$ показан на рис. 12.

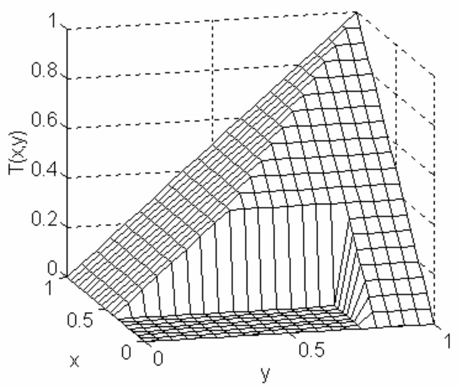



Рис. 12. Конъюнкция для $p$ = 0.4, $q$ = 0.8 из примера 5.1

*Пример* 5.2. Рассмотрим параметрические классы линейных генераторов ($p \geq 0$):

$$f(x,p) = min(px,1), \qquad g(x,p) = max(1\text{-}p(1\text{-}x), 0),$$

Для этих генераторов выполняется:

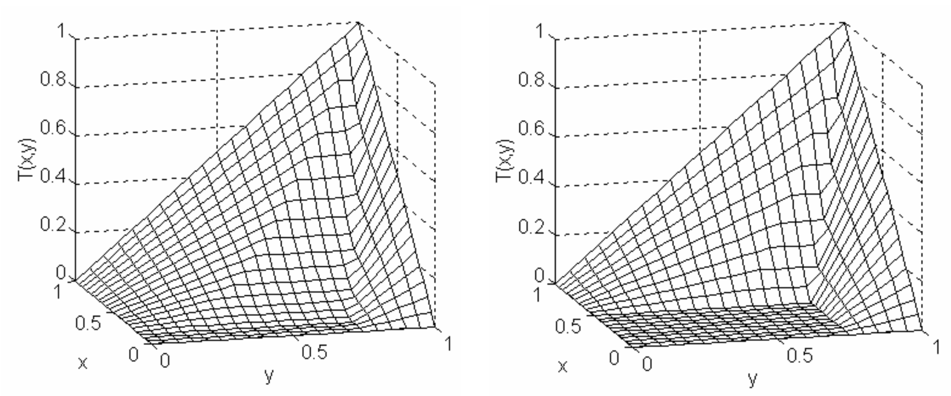
$$f_B(x) = f(x,0) \leq f(x,p) \leq f(x,\infty) = f_D(x),$$
$$g_D(x) = g(x,\infty) \leq g(x,p) \leq g(x,0) = g_B(x),$$

где $f(x,\infty) = lim_{p\to\infty} f(x,p)$, и $g(x,\infty) = lim_{p\to\infty} g(x,p)$.

Применяя в (23) $T_1 = T_M$, $T_2 = T_P$ и $S = S_M$, получим конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot max\{1\text{-}\ p(1 - x), 1 - q(1 - y), 0\},$$

причем, $T = T_M$ при $p = 0$, и $T \to T_D$ когда $p$, $q \to\infty$. Графики этой конъюнкции для $p$ = 1.2, $q$= 4 и для $p$ = 2 и $q$ = 4 показаны на рис. 13.




а) б)

Рис. 13. Конъюнкция из примера 5.2:
а) для $p$ = 1.2, $q$ = 4; б) для $p$ = 2, $q$ = 4

*Пример* 5.3. Рассмотрим параметрические классы степенных генераторов ($p \geq 0$):

$$f(x,p) = x^p, \qquad g(x,p) = x^p,$$

где предполагается, что $0^p = 0$ для всех $p > 0$, $f(0,0) = 0$, $f(1,\infty) = 0$, но $g(0,0)=1$, $g(1,\infty)= 1$. Тогда имеем

$$f_B(x) = f(x,\infty) \leq f(x,p) \leq f(x,0) = f_D(x),$$
$$g_D(x) = g(x,\infty) \leq g(x,p) \leq g(x,0) = g_B(x).$$

С помощью этих генераторов можно получить много конъюнкций с интересными свойствами. Например, из теоремы 4.10 следует, что применяя эти генераторы в (23) с $T_1 = T_M$ мы получим параметрические классы конъюнкций, варьирующих от $T_M$ (при $p,q \to 0$) до $T_D$ (когда $p,q \to \infty$). Рассмотрим примеры конъюнкций, основанных на степенных генераторах.

*Пример* 5.3.1. Для $T_2 = T_M$ и $S = S_M$ получим следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min\{min(x,y),\ max(x^p,y^q)\}.$$

При $p,\ q \leq 1$ имеем $T = T_M$. График этой конъюнкции для $p = 2$ и $q = 4$ приведен на рис. 14.

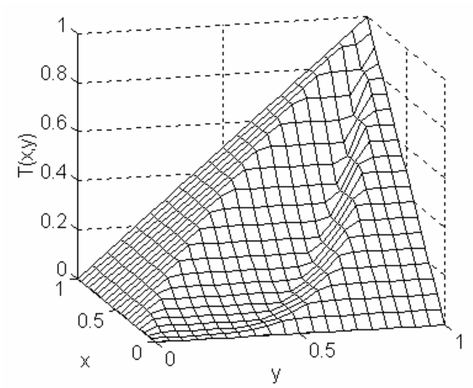



Рис. 14. Конъюнкция для $p = 2$, $q = 4$ из примера 5.3.1

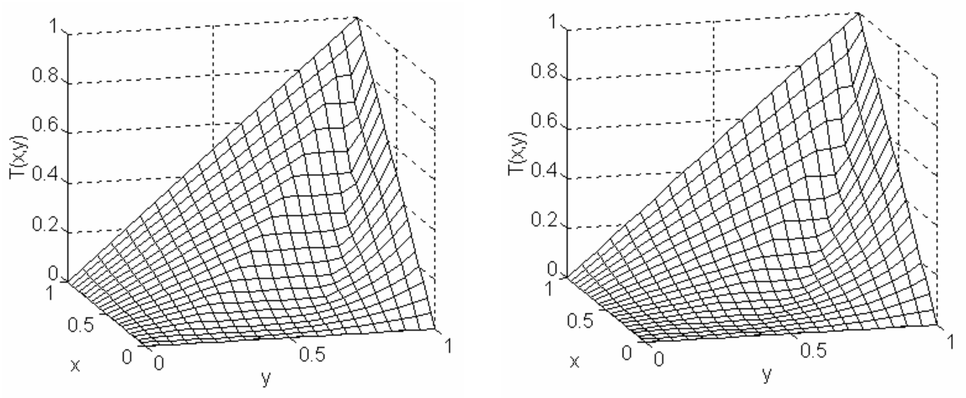
При $p = q$ эта конъюнкция имеет следующий вид:

$$T(x,y) = \begin{cases} \min(x^p, y), & \text{если} \quad y < x \\ \min(x, y^p), & \text{если} \quad x \leq y \end{cases}.$$

*Пример* 5.3.2: Для $T_2 = T_P$ и $S = S_M$ получим другую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y) \cdot max(x^p, y^q).$$

Графики этой конъюнкции для $p = 1.2$, $q = 4$ и для $p = 2$, $q = 4$ показаны на рис. 15.




а) б)

Рис. 15. Конъюнкция из примера 5.3.2:
а) для $p = 1.2$, $q = 4$; б) для $p = 2$, $q = 4$

При $p = q$ эта конъюнкция имеет следующий вид:

$$T(x,y) = \begin{cases} yx^p, & \text{если } y < x \\ xy^p, & \text{если } x \le y \end{cases}.$$

При $p = q = 1$ получим $T = T_P$ .
*Пример* 5.3.3: Для $T_2 = T_P$ и $S = S_P$ получим новую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y) \cdot (x^p + y^q - x^p y^q).$$

График этой конъюнкции для $p = 1.2$, $q = 4$ приведен на рис. 16.

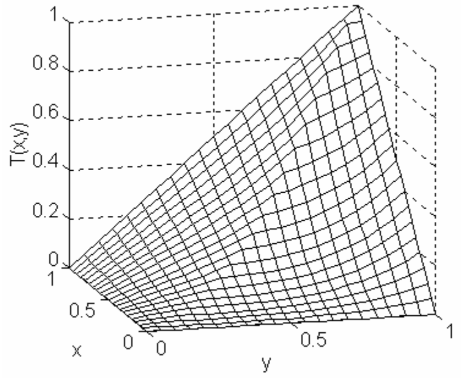



Рис. 16. Конъюнкция из примера 5.3.3 для $p = 1.2$, $q = 4$

*Пример* 5.3.4. Для $T_2 = T_P$ и $S = S_L$ получим следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y) \cdot min(1, x^p + y^q).$$

График этой конъюнкции для $p = 0.8$, $q = 4$ показан на рис. 17.

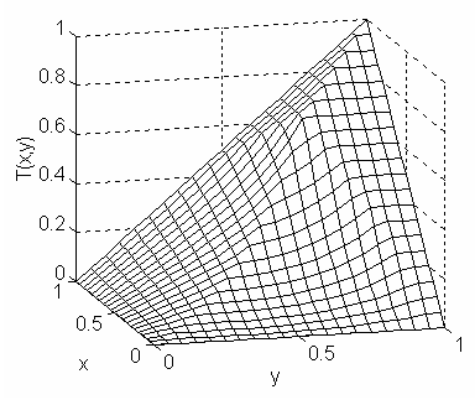



Рис. 17. Конъюнкция для $p = 0.8$, $q = 4$ из примера 5.3.4.

*Пример* 5.3.5. Для $T_2 = T_M$, $S = S_M$ и двух генераторов $g_D(x)$ и $y^q$ получим следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min\{min(x,y),\ max(g_D(x), y^q)\}.$$

Имеем $T(x,y) = T_M$ для $q \le 1$ и $T(x,y) \to T_D$ когда $q \to \infty$. Для $q \ge 1$ эта конъюнкция может быть представлена в виде:

$$T(x,y) = \begin{cases} y, & \text{если } x = 1 \\ \min(x, y^q), & \text{если } x \ne 1 \end{cases}.$$

График этой конъюнкции для $q = 2$ показан на рис. 18.

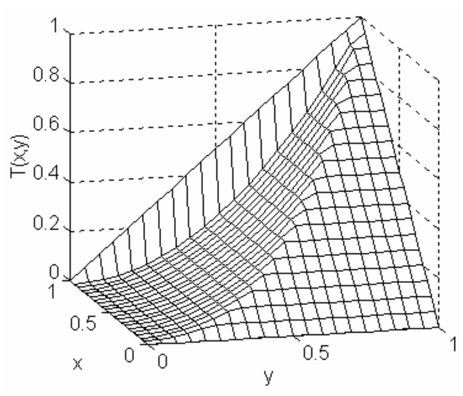



Рис. 18. Конъюнкция из примера 5.3.5 для $q = 2$.

*Пример* 5.4. До этого рассматривались конъюнкции, основанные на формулах (17) и (19). Другие типы конъюнкций могут быть основаны на формулах (17) и (20). Например, с помощью генератора $g(x,p) = x^p$ и $T$-норм $T_2 = T_P$ и $T_1 = T_M$ можно получить следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot(x + y - xy)^p,$$

варьирующую от $T_M$ (при $p = 0$) до $T_D$ (при $p \to \infty$).

*Пример* 5.5. Рассмотрим другой параметрический класс конъюнкций, основанный на представлениях (17) и (21) с $T_1 = T_M$, $T_2 = T_P$, $s_1 = s_D$, $h(y) = y^p$, $s_2 = S_M$:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot max(s_D(x,y),y^p) = \begin{cases} \min(x,y), & \textit{если } \max(x,y) = 1 \\ \min(x,y)\cdot y^p, & \textit{если } \max(x,y) < 1 \end{cases}.$$

Имеем $T = T_M$ при $p = 0$ и $T = T_D$ при $p \to \infty$. График этой конъюнкции для $q = 2$ показан на рис. 19.

Ниже приводятся конъюнкции, основанные на $T_1 = T_P$:

$$T(x,y) = (xy)\cdot max(x^p,y^q),$$
$$T(x,y) = xy(x^p + y^q - x^p y^q),$$
$$T(x,y) = (xy)\cdot min(1, x^p + y^q).$$

Эти конъюнкции варьируют от $T_P$ до $T_D$.

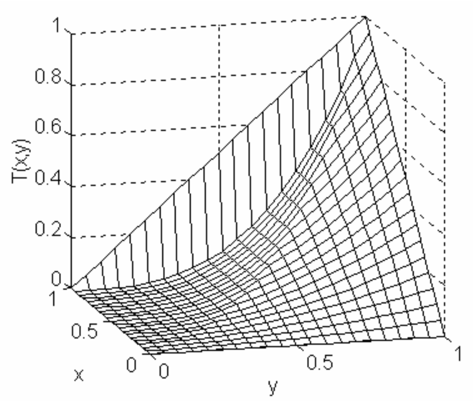



Рис. 19. Конъюнкция из примера 5.5 для $q = 2$

Следующая конъюнкция основана на представлениях (17) и (21) с $T_1 = T_M$, $T_2 = T_P$, $s_1 = s_2 = S_M$, $h(y) = p$, ($p \in [0,1]$) и варьирует от $T = T_M$ при $p = 1$ до $T = T_P$ при $p = 0$:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot max(x,y,p) = \begin{cases} p\cdot\min(x,y), & \textit{если} \quad x,y \le p \\ xy, & \textit{в противном случае} \end{cases}.$$

## 6. Пример нечеткого моделирования с обобщенными параметрическими операциями

Пусть $z = f(x,y)$ – вещественная функции, определенная на $[0,1]\times[0,1]$ и заданная нечеткой моделью Сугено первого порядка с двумя входами и одним выходом. Каждая входная переменная в модели Сугено имеет 2 терма: *S (SMALL)* и *L (LARGE),* заданных в виде нечетких множеств с трапециевидными функциями принадлежности (рис. 20).

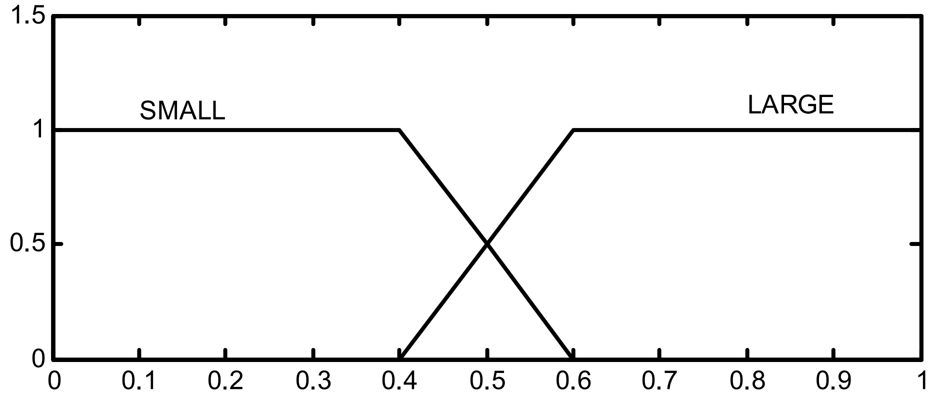



Рис. 20. Функции принадлежности нечетких множеств исходной нечеткой модели Сугено

Модель Сугено состоит из следующих 4 правил:

$R_1$: *IF x is S AND y is S THEN* $z = x + 2y + 3$,
$R_2$: *IF x is S AND y is L THEN* $z = 4x + 10y + 20$,
$R_3$: *IF x is L AND y is S THEN* $z = 3x + 5y + 15$,
$R_4$: *IF x is L AND y is L THEN* $z = 4x + 8y + 6$,

Для каждой пары вещественных значений $x$ и $y$ значение функции $z = f(x,y)$ вычисляется как средневзвешенное значений функций $z_i = a_i x + b_i y + c_i$, получаемых по правилам $R_i$:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{4} w_i (a_i x + b_i y + c_i)}{\sum_{i=1}^{4} w_i}.$$

Здесь $a_i x + b_i y + c_i$ – выражение, стоящее в правой части правила $R_i$, $w_i$ - сила срабатывания правила: $w_i = T(\mu_{Ai}(x), \mu_{Bi}(y))$, $T$ - операция конъюнкции, представляющая связку *AND,* и $\mu_{Ai}(x)$, $\mu_{Bi}(y)$ суть значения принадлежности $x$ и $y$ соответствующим нечетким множествам $A_i$ и $B_i$ из левой части правил. В качестве операции конъюнкции *AND* применяется *t*-норма $T_M(u,v) = min(u,v)$. Поверхность функции $z = f(x,y)$, определенной этой моделью Сугено, показана на рис. 21.

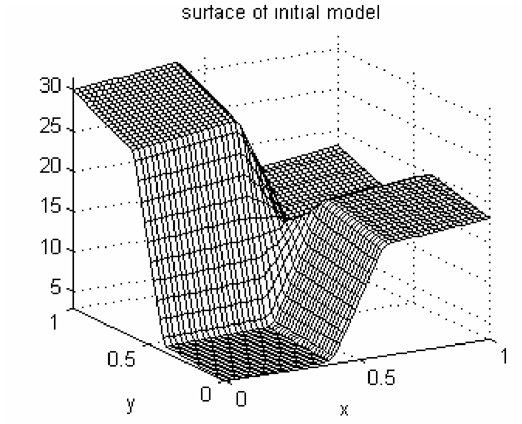



Рис. 21. Поверхность исходной модели

Эта функция аппроксимировалась такой же нечеткой моделью Сугено, в которой трапециевидные функции принадлежности были заменены треугольными функциями принадлежности (рис. 22), а операция *min* заменена параметрической операцией $T(u,v) = min(u,v) \cdot (u^p + v^q - u^p \cdot v^q)$.

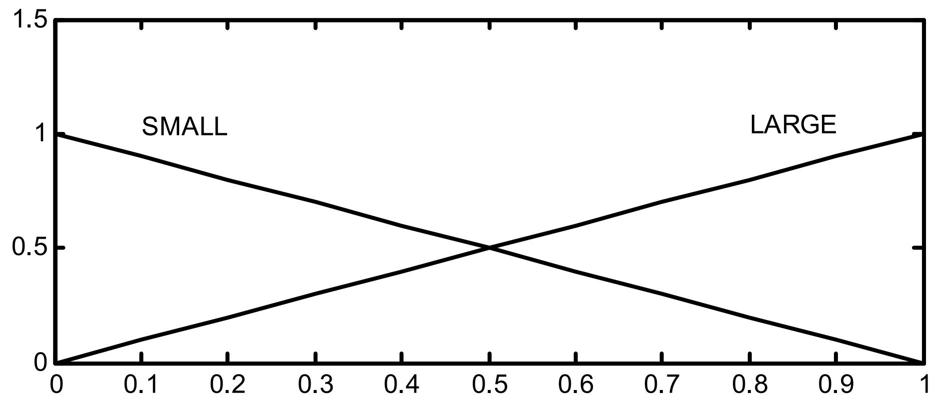



Рис. 22. Функции принадлежности нечетких множеств аппроксимирующей нечеткой модели Сугено

Оптимизация проводилась по четырем параметрам $p_S$, $p_L$, $q_S$, $q_L$, применявшимся для модификации значений принадлежности *x* к нечетким множествам *S* и *L*, и *y* к нечетким множествам *S* и *L* соответственно. Например, сила срабатывания второго правила вычислялась так:

$$w = T(\mu_S(x), \mu_L(y)) =$$
$$min(\mu_S(x), \mu_L(y)) \cdot (\mu_S(x)^{p_S} + \mu_L(y)^{q_L} - \mu_S(x)^{p_S} \cdot \mu_L(y)^{q_L}).$$

Значения оптимальных параметров $p$ и $q$ были получены как результат минимизации среднеквадратичной ошибки между графиком исходной функции и графиком аппроксимирующей нечеткой модели. По каждой шкале использовалась сетка из 50 точек, в результате 2500 точек исходного графика использовались для аппроксимации. Были получены следующие оптимальные значения параметров: $p_S$ = 6.45, $p_L$ = 6.45, $q_S$ = 5.89, $q_L$ = 5.89. Поверхность полученной аппроксимирующей нечеткой модели показана на рис. 23.

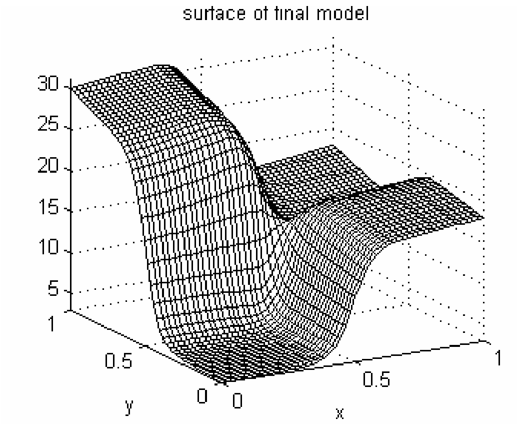



Рис. 23. Поверхность аппроксимирующей модели Сугено

Из сравнения рис. 21 и 23 видно, что полученная в результате оптимизации параметров операций нечеткая модель Сугено достаточно хорошо аппроксимирует исходную функцию. Оптимизация параметров операций нечетких моделей может использоваться при моделировании данных вместо или в дополнение к традиционно применяемой оптимизации параметров нечетких множеств, используемых в модели. В следующих разделах рассматриваются другие примеры оптимизации нечетких моделей по параметрам операций.

## 7. *G*-конъюнкции и *G*-дизъюнкции

*Определение* 7.1. Операциями *G*-конъюнкции $T$ и *G*-дизъюнкции $S$ называются функции $T,S$:$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ такие, что для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$T(0,0) = T(0,1) = T(1,0) = 0, \qquad T(1,1) = 1, \tag{24}$$
$$S(0,0) = 0, \qquad S(0,1) = S(1,0) = S(1,1) = 1, \tag{25}$$
$$T(x,y) \le T(u,v) \text{ и } S(x,y) \le S(u,v), \text{ если } x \le u,\ y \le v. \tag{26}$$

Нетрудно увидеть, что *G*-конъюнкция $T$ и *G*-дизъюнкция $S$ являются соответственно псевдоконъюнкцией и псевдодизъюнкцией, т.е. для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$T(x,0) = T(0,x) = 0, \qquad S(x,1) = S(1,x) = 1. \tag{27}$$

*Предложение* 7.2. Пусть $n$ - отрицание, $T$ - некоторая *G*-конъюнкция и $S$ – некоторая *G*-дизъюнкция, тогда соотношения

$$S_T(x,y) = n(T(n(x), n(y))), \qquad T_S(x,y) = n(S(n(x), n(y)))$$

определяют, соответственно, *G*-дизъюнкцию $S_T$ и *G*-конъюнкцию $T_S$.

Доказательство. $S_T(0,0) = n(T(n(0),n(0))) =n(T(1,1)) = n(1) = 0$. $S_T(x,1) = n(T(n(x), n(1))) = n(T(n(x),0)) =n(0) = 1$. Аналогично получим $S_T(1,x) =1$. Монотонность $S_T$ следует из монотонности $T$ и $N$.

Доказательство для $T_S$ проводится аналогично.

Если $n$ инволютивное отрицание, то для любой *G*-конъюнкции $T$ и дизъюнкции $S = S_T$ (для любой $S$ и $T =T_S$ ) выполняются законы Де Моргана:

$$n(S(x,y)) = T(n(x), n(y)), \qquad n(T(x,y)) = S(n(x), n(y)).$$

Для новых операций ограничения (12) уже не выполняются.

*Теорема* 7.3. Пусть $T$ есть *G*-конъюнкция*,* $S$ есть *G*-дизъюнкция и $f,g,h$:$[0,1]\to[0,1]$ - неубывающие функции, такие что $f(0) = g(0) = h(0) = 0$, $f(1)= g(1) = h(1) = 1$, тогда следующие выражения

$$T_1(x,y) = f(T(g(x),h(y))),$$
$$S_1(x,y) = f(S(g(x),h(y))),$$

определяют *G*-конъюнкцию и *G*-дизъюнкцию соответственно.

Доказательство. $T(0,y) = f(T_1(g(0),h(y))) = f(T_1(0,h(y))) = f(0) = 0$. Аналогично, $T(y,0) = 0$. $T(1,1) = f(T_1(g(1),h(1))) = f(T_1(1,1)) = f(1) = 1$.

Монотонность $T$ следует из монотонности $T_1$, $f$, $g$ и $h$. Доказательство для $S$ аналогично.

Очевидно, что вместо $T$ и $S$ можно использовать конъюнкции и дизъюнкции, рассмотренные выше. Результаты предыдущего раздела могут быть распространены на новые операции следующим образом.

*Теорема* 7.4. Пусть $T_1$, $T_2$ суть $G$-конъюнкции, $S_1$, $S_2$ суть псевдодизъюнкции, $g_1$, $g_2$:[0,1]→[0,1] суть неубывающие функции такие, что $g_1(1) = g_2(1) = 1$, тогда следующие выражения

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y), S_1(g_1(x),g_2(y))),$$
$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y), g_1(S_1(x,y))),$$
$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y), S_2(h(x),S_1(x,y))),$$

определяют $G$-конъюнкции:

Доказательство. Монотонность $T$ во всех выражениях следует из монотонности функций, используемых в правых частях выражений. Если $x$= 0 или $y$= 0, то $T_1(x,y) = 0$ и, следовательно, $T(x,y)$= 0. Если $x$= $y$= 1 то $T_1(1,1) = 1$, все $S_1$, $g_1$, $g_2$ равны 1, из (27) следует также, что $S_2$= 1 и, следовательно, во всех выражениях выполняется $T(x,y)= T_2(1,1)= 1$.

Новое определение конъюнкции и дизъюнкции дает возможность построения простейших параметрических классов этих операций, в частности, простейшими $G$-конъюнкциями являются следующие функции:

$$T(x,y) = min(x^p,y^q),$$
$$T(x,y) =x^p y^q,$$
$$T(x,y) =(xy)^p(x + y - xy)^q.$$

Поверхности этих функций для различных значений параметров $p$ и $q$ приведены на рис. 24 – 26.

С целью расширения класса функций, применяемых в нечетком моделировании, и, как следствие, увеличения гибкости нечетких моделей может быть использовано дальнейшее обобщение понятия конъюнкции. В частности, в простейшем параметрическом классе обобщенных нечетких конъюнкций $T(x,y) = x^p y^q$ вместо рассмотрения только положительных значений параметров $p$ и $q$ можно рассматривать любые вещественные значения. Так как параметры $p$ и $q$ могут сейчас быть и отрицательными, будем предполагать, что функции принадлежности, используемые в правилах нечеткой модели, имеют только положительные значения. Это свойство выполняется для функций принадлежности, представляемых колоколообразными и гауссовскими функциями принадлежности. Оно также выполняется для треугольных и трапециевидных функций принадлежности, которые принимают нулевые значения за пределами области определения входных переменных.

Для этой функции выполняется только одно свойство рассматриваемых выше операций конъюнкции: $T(1,1)= 1$. Более того, функция $T(x,y)= x^p y^q$, где $p,q$ - любые вещественные числа и $x,y\in(0,1]$, может принимать любые положительные значения, а не только значения из [0,1]. Для простоты будем называть эту функцию как *UG*-конъюнкцию. Конечно, эта функция вряд ли может с полным основанием рассматриваться как «естественное» обобщение операции конъюнкции, тем не менее, она может использоваться для обработки нечетких правил, рассматриваемых как функциональные модели специфического вида.

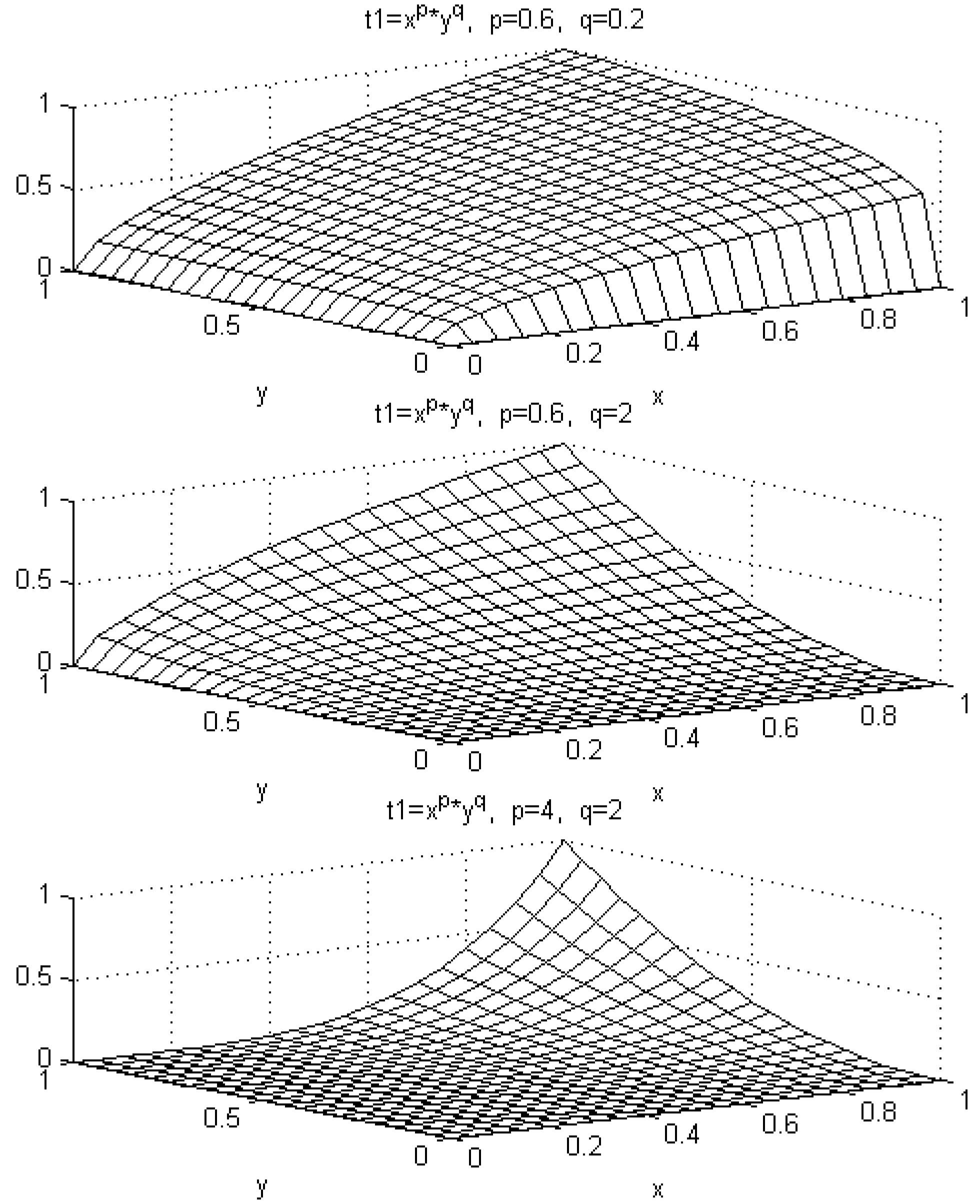



Рис. 24. Поверхность *G*-конъюнкции $T(x,y) = x^p y^q$
для различных значений параметров $p$ и $q$

Следует заметить, что несколько «неправильных» функций использовались успешно в нечетком моделировании. Например, функция *sinc(x)=sin(x)/x* с отрицательными значениями рассматривалась как функция принадлежности в [90], а суммирование функций принадлежности с итоговым результатом большим, чем 1, применялось в стандартной аддитивной модели [82, 90].

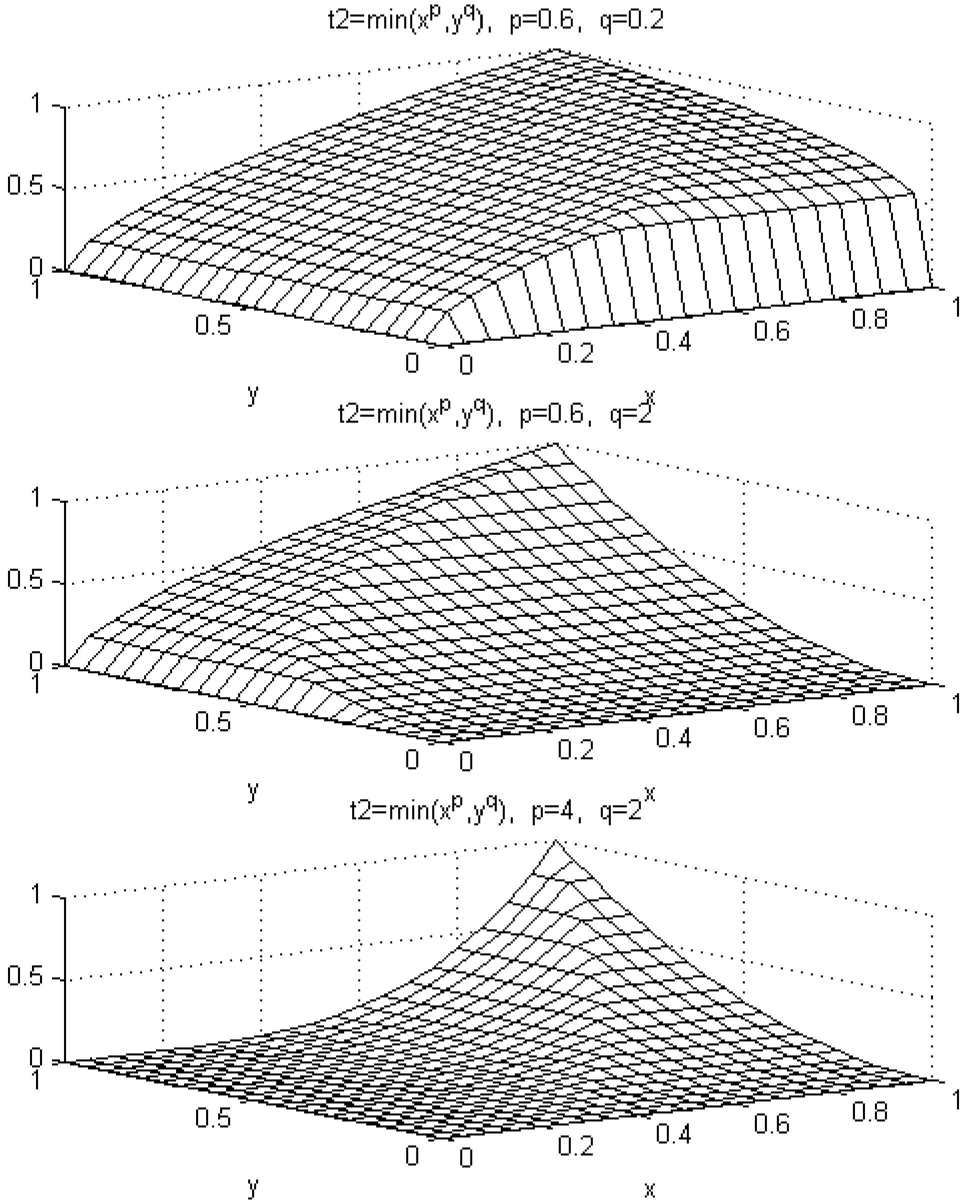



Рис. 25. Поверхность *G*-конъюнкции $T(x,y) = min(x^p, y^q)$
для различных значений параметров $p$ и $q$

Простейшие параметрические конъюнкции могут рассматриваться также как модификаторы нечетких множеств. В этом случае операцию $T(x,y)= x^p y^q$ можно рассматривать как композицию операции конъюнкции $T_P(x,y)= xy$ и модификаторов $g_{i1}(x) = x^p$, $g_{i2}(x) = x^q$, модифицирующих значение функции принадлежности. Такие модификаторы функций принадлежности рассматривались в теории нечетких множеств.

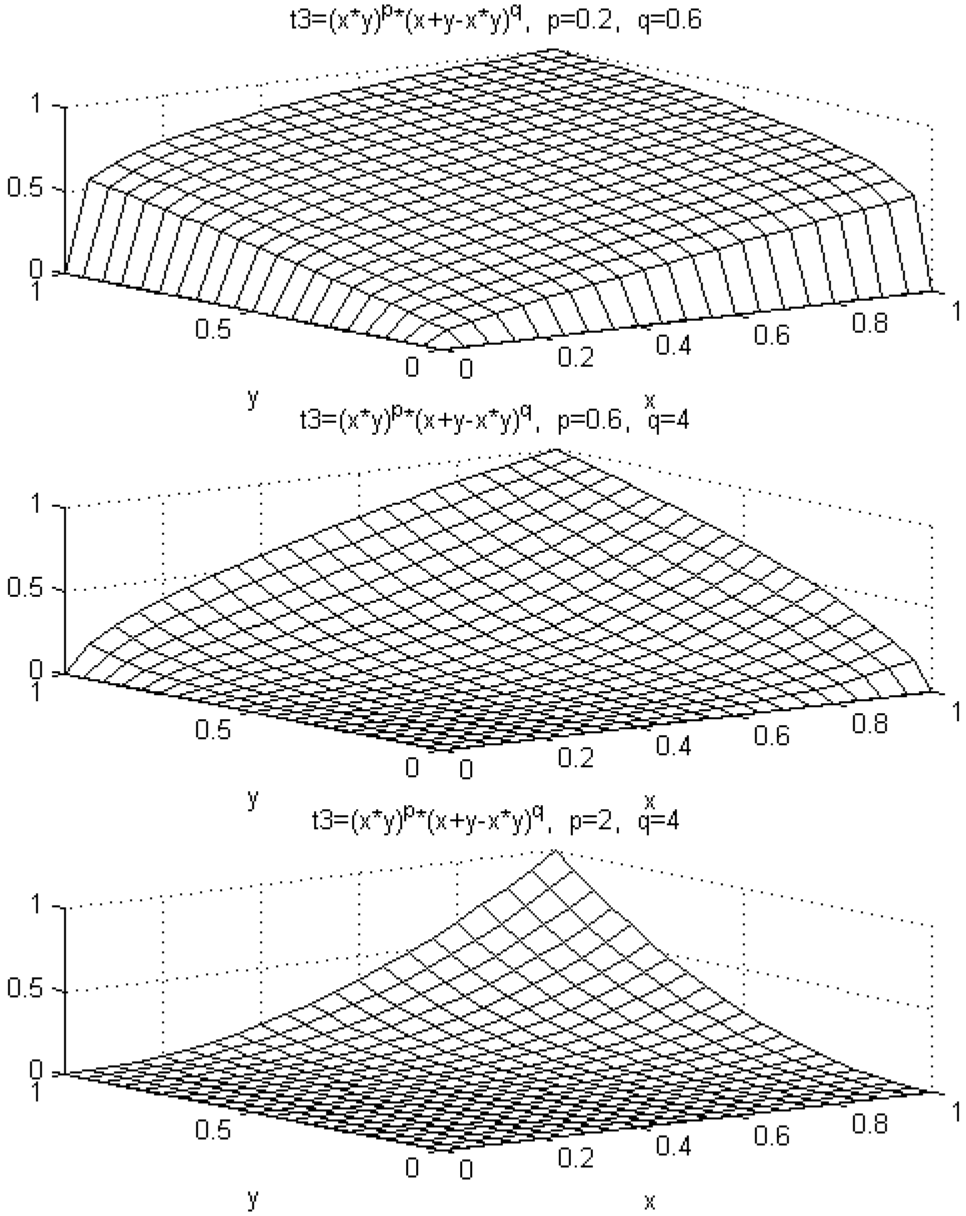



Рис. 26. Поверхность $G$-конъюнкции $T(x,y) = (xy)^p\,(x+y-xy)^q$
для различных значений параметров $p$ и $q$

## 8. Пример аппроксимации функции нечеткими моделями

Рассматривается задача аппроксимации функции

$$f(x,y,z)=\left(1+\sqrt{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{z^3}}\right)^2,$$

определенной на [1,6]×[1,6]×[1,6] нечеткой моделью Сугено с 8 правилами:

$R_1$*: If X is* $A_1$ *and Y is* $B_1$ *and Z is* $C_1$ *then* $u_1 = s_{11}x+ s_{12}y+ s_{13}z+t_1,$
$R_2$*: If X is* $A_1$ *and Y is* $B_1$ *and Z is* $C_2$ *then* $u_2 = s_{21}x+ s_{22}y+ s_{23}z+t_2,$
$R_3$*: If X is* $A_1$ *and Y is* $B_2$ *and Z is* $C_1$ *then* $u_3 = s_{31}x+ s_{32}y+ s_{33}z+t_3,$
**…**
$R_8$*: If X is* $A_2$ *and Y is* $B_2$ *and Z is* $C_2$ *then* $u_2 = s_{81}x+ s_{82}y+ s_{83}z+t_8$ .

Каждой нечеткой входной переменной $X$, $Y$ и $Z$ соответствуют два нечетких терма $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$ и $\{C_1, C_2\}$, которые задаются колоколообразной функцией принадлежности:

$$A(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x-c}{a}\right)^{2b}}.$$

В качестве связки *and* используется $G$-конъюнкция $T(x,y) =x^p y^q$.

Исходные значения параметров колоколообразных функций принадлежности равны $a$=2.5, $b$=2.5, $c$=1 для $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $a$=2.5, $b$=2.5, $c$=6 для $A_2$, $B_2$, $C_2$. Начальные значения параметров операций и правых частей правил равны 1. Сила срабатывания правил $R_i$ вычисляется так:

$$w_i = A_i(x)^{p(i)}\cdot B_i(y)^{q(i)}\cdot C_i(z)^{r(i)}, \quad (i=1,\dots,8),$$

где каждая $A_i$, $B_i$, $C_i$ принимает одно из двух возможных значений $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ соответственно.

Для настройки параметров использовались 216 обучающих данных и 125 контрольных данных, равномерно выбранных из входных диапазонов [1,6]×[1,6]×[1,6] и [1.5,5.5]×[1.5,5.5]×[1.5,5.5] соответственно. Применялся следующий показатель качества аппроксимации:

$$\text{APE}=\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\frac{T(i)-O(i)}{|T(i)|}\cdot 100\%,$$

где $P$ число пар данных, а $T(i)$ и $O(i)$ это $i$-й желаемый и предсказанный выход, соответственно.

На рис. 27 приводятся кривые ошибок для нечетких моделей, полученных после оптимизации следующих параметров:

A) параметры функций принадлежности и правых частей правил (100 шагов итерационной процедуры, использовалась конъюнкция $T(x,y)=xy$);

C) параметры варианта A (30 шагов), а затем параметры операций $T(x,y)= x^p y^q$, $(p,q> 0)$ и правых частей правил (70 шагов);

D) параметры операций $T(x,y)= x^p y^q$, ($p,q$ – любые вещественные числа) и правых частей правил (100 шагов);

E) вариант A (30 шагов), а затем вариант D (70 шагов).

Во всех случаях использовалась оптимизация параметров в течение 100 шагов по 10*$m$ итераций, где $m$ – общее число оптимизируемых в конкретном варианте параметров.

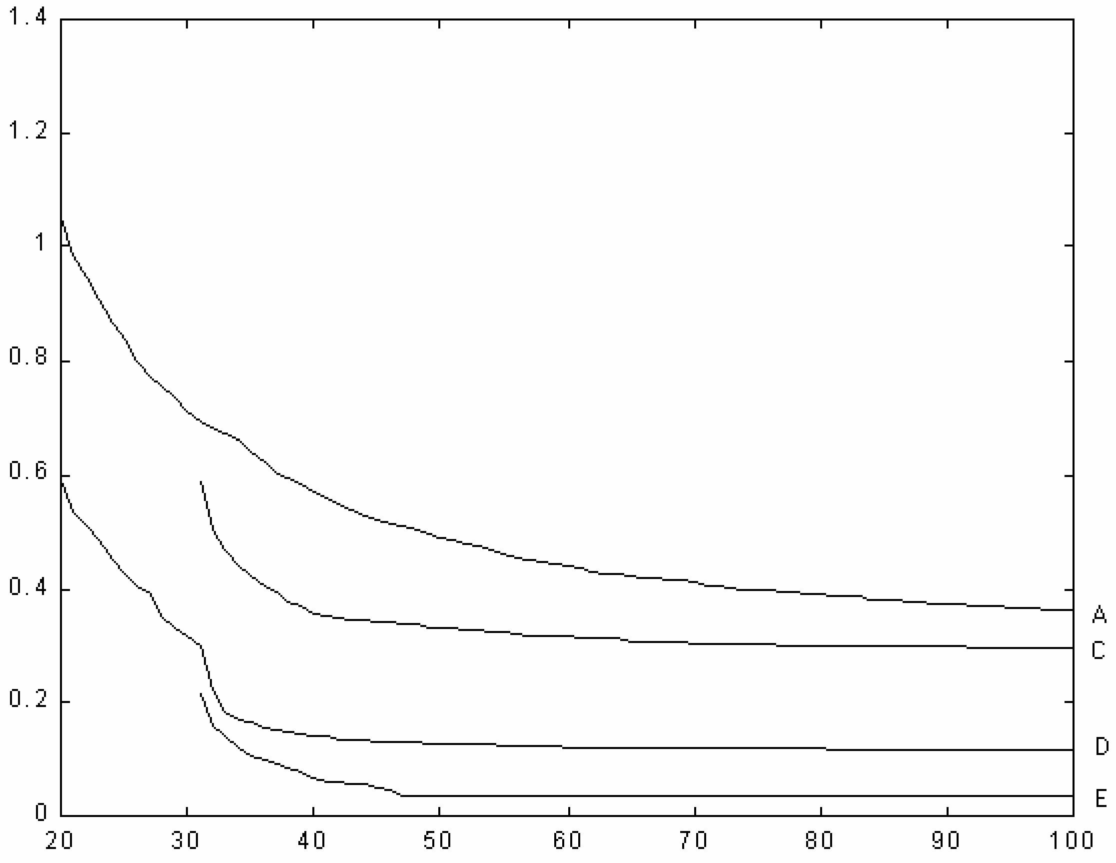



Рис. 27. Ошибки аппроксимации функции $f(x,y,z)= (1+ x^{0.5}+y^{-1}+ z^{-1.5})^2$ моделью Сугено, при оптимизации по различным группам параметров

Как видно из приведенных результатов, характеристики нечеткой модели в случае D), когда оптимизируются только операции *UG*-конъюнкции, даже лучше, чем характеристики нечеткой модели в случае C), когда использовалась оптимизация функций принадлежности вместе с операциями *G*-конъюнкции. Оптимизация *UG*-конъюнкций вместе с функциями принадлежности (случай E)) показывает лучшие результаты на обучающих данных, чем результаты, полученные адаптивной нейро-нечеткой системой вывода ANFIS [82]. Результаты, полученные ANFIS, основаны, как и в случае A), только на оптимизации колоколообразных функций принадлежности. Мы здесь не обсуждаем применяемые методы оптимизации, поскольку все из них дают некоторый локальный оптимум, определяемый не только применяемым методом, но и заданным показателем качества аппроксимации. В общем случае, оптимизация функций принадлежности, по-видимому, должна давать меньшую ошибку аппроксимации, так как основана на сдвиге функции принадлежности и ее модификации, в то время как оптимизация по параметрам операций состоит в модификации значений принадлежности и в их определенном сочетании. В то же время, как говорилось в начале главы, если нечеткие множества, используемые в модели, отражают экспертные знания о моделируемом объекте, то оптимизация только по параметрам операций позволяет сохранять неизменными эти знания.

## 9. Идентификация нечетких моделей динамических систем

Для идентификации систем используются как нечеткие модели Мамдани так и нечеткие модели Сугено. Традиционно применяется оптимизация этих моделей по параметрам нечетких множеств. Рассмотрим пример оптимизации нечетких моделей Сугено по параметрам операций на задаче идентификации нечеткой модели динамической системы. В качестве примера была взята задача идентификации динамической системы с нелинейной подсистемой, задаваемой разностным уравнением, используемая для тестирования различных подходов к идентификации нечетких систем. Моделируемая система задается следующим разностным уравнением:

$$y(k+1)=0.3y(k)+0.6y(k-1)+f(u(k)),$$

где $y(k)$ - выход, а $u(k)$ - вход системы в момент времени $k$. Неизвестная функция $f$ описывается следующим уравнением:

$$f(u) = 0.6sin(\pi u)+0.3sin(3\pi u)+0.1sin(5\pi u),$$

где входная переменная $u$ принимает значения в интервале [-1,1].

Ставилась задача моделирования этой неизвестной функции нечеткой моделью Сугено в он-лайн режиме по мере поступления информации о значениях этой функции с изменением момена времени $k$. Таким образом, модель системы задавалась разностным уравнением

$$Y(k+1)=0.3Y(k)+0.6Y(k-1)+F(u(k)),$$

где $F$ – функция, определяемая нечеткой моделью Сугено. Эта модель состояла из семи правил вида:

$$R_i\text{: } If\ U\ is\ A_i\ then\ F_i = r_i u+s_i, \qquad (i=1,2,\dots,7),$$

где $A_i$ это нечеткие множества, определенные на множестве значений входной переменной $u$, $U$ – нечеткая переменная со значениями $A_i$ , $r_i$ и $s_i$ - параметры заключений. В качестве функций принадлежности нечетких множеств были выбраны обобщенные колоколообразные функции принадлежности, задаваемые уравнениями

$$\mu_{A_i}(u) = \frac{1}{1+\left|\frac{u-c_i}{a}\right|^{2b}},$$

так, чтобы они равномерно покрывали область определения входной переменной $u$. Графики функций принадлежности нечетких множеств, применявшихся в нечеткой модели, приведены на рис. 28. Эти функции принадлежности определялись следующими значениями параметров: $a$=0.1667, $b$ =2 для всех функций принадлежности; параметры $c_i$ принимали значения: -1, -0.67, -0.33, 0, 0.33, 0.67, 1 для $i$ = 1,…,7 соответственно.

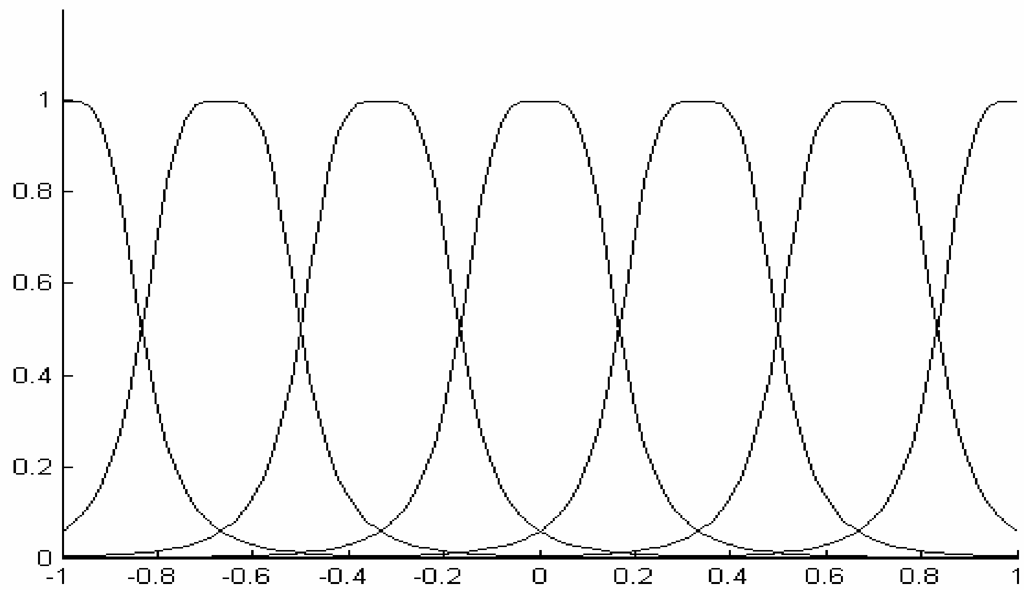



Рис. 28. Функции принадлежности нечетких множеств в задаче идентификации динамической системы

В процессе логического вывода применялись операции импликации, использующие следующие параметрические обобщенные операции конъюнкции: $T(w,F)=w^pF^q$, где $w=\mu_{A_i}(u)$ и $F=F_i$ ($i$=1,…,7). Значение, получаемое на выходе нечеткой модели, вычисляется как среднее взвешенное значений, полученных по правилам:

$$F=\frac{\sum_{i=1}^{7} w_i^{p_i} F_i^{q_i}}{\sum_{i=1}^{7} w_i^{p_i}}.$$

Суммарное число оптимизируемых параметров модели $p_i$, $q_i$, $r_i$ и $s_i$, использовавшихся при идентификации системы, равно 28.

В процессе обучения в течение $k$=250 моментов времени на вход системы и модели подавался следующий сигнал:

$$u(k)=sin(2\pi k/250).$$

Начальные 20 значений $u(k)$ использовались для определения стартовых значений параметров нечеткой модели, после чего на каждом шаге применялась адаптация параметров модели до окончания процесса обучения на шаге $k$=250. Результаты моделирования приведены на рис. 29, из которого видно, что графики функций, описывающих поведение системы и модели практически неразличимы, причем совпадение графиков наблюдается и после того, как по окончании адаптации нечеткой модели закон изменения входного воздействия $u(k)$ был изменен на шаге $k$= 500 на следующий:

$$u(k)=0.5sin(2\pi k/250)+0.5sin(2\pi k/25).$$

В табл. 1 приведено сравнение числа параметров, используемых в предлагаемом подходе к оптимизации нечетких моделей по параметрам операций, с числом параметров, используемых в других подходах, описанных в литературе. Как видно из таблицы, предлагаемый подход использует наименьшее число параметров при удовлетворительном уровне решения задачи идентификации системы.

Табл. 1. Число параметров, используемых разными подходами в примере идентификации динамической системы

| Подход | Число параметров |
|---|---|
| Тьюнинг операций в модели Сугено | 28 |
| Тьюнинг функций принадлежности в модели Сугено [82] | 35 |
| Тьюнинг функций принадлежности в модели Мамдани [117] | 30 |
| Многослойный перцептрон [99] | 261 |

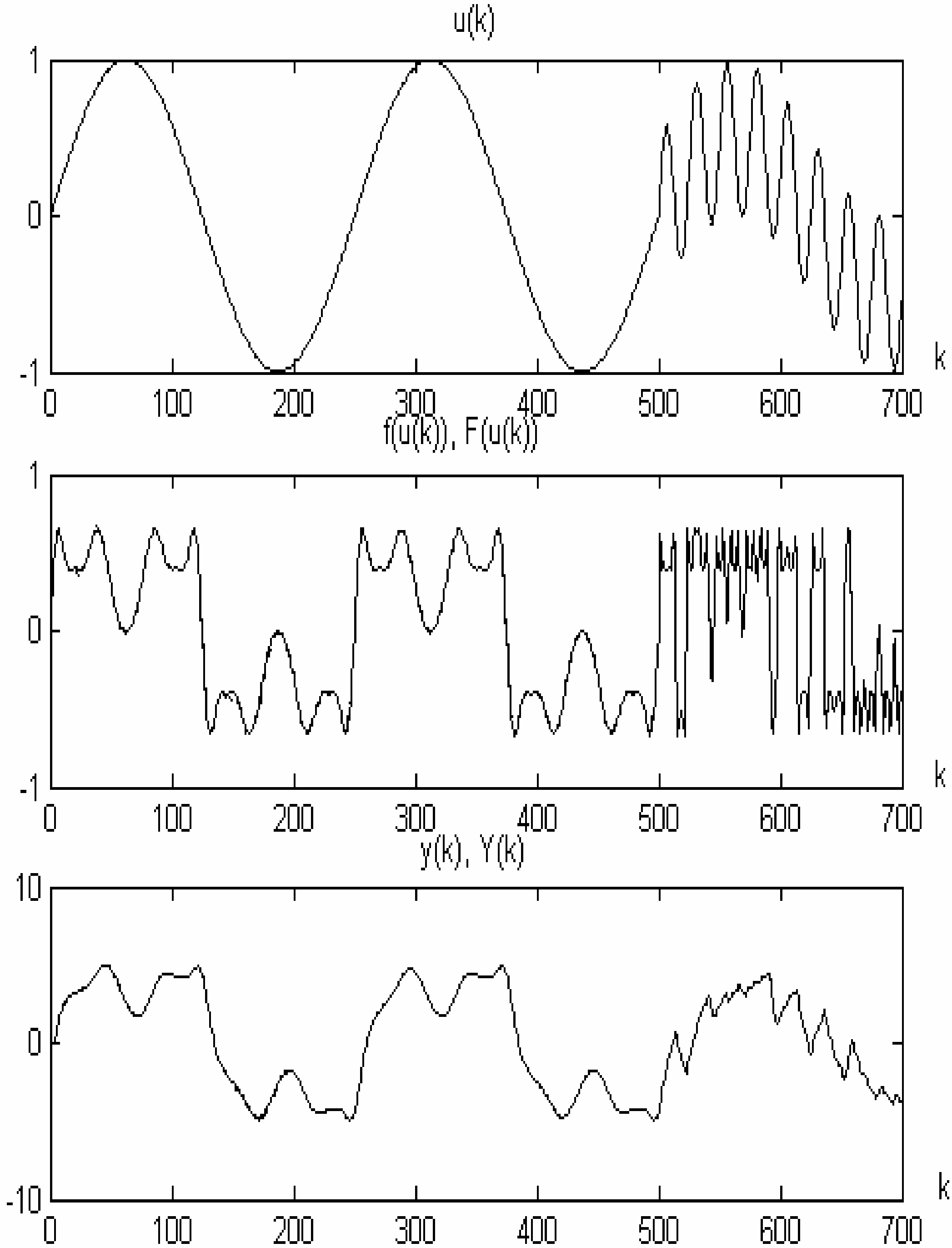



Рис. 29. Графики изменения входа *u(k)*, “неизвестной” функции *f(u(k))*, нечеткой модели *F(u(k))*, выхода системы *y(k)* и выхода модели *Y(k)* (почти совпадают)

## 10. Представление и оптимизация нечетких моделей Сугено нейронными сетями

Нечеткие системы могут быть представлены многослойными нейронными сетями. Это представление может быть использовано в нескольких целях. Во-первых, такое представление нечетких систем позволяет использовать для оптимизации нечетких систем методы оптимизации нейронных сетей, в частности, метод обратного распространениия волны. Во-вторых, подобное представление может использоваться для аппаратной реализации нечетких систем с помощью имеющихся технологий аппаратной реализации нейронных сетей.

Нечеткие системы, представленные с помощью нейронных сетей, обычно называют нейро-нечеткими системами. В настоящее время разработаны методологии представления и оптимизации нейро-нечетких систем по параметрам функций принадлежности. Здесь приводятся результаты проведенного моделирования по представлению и оптимизации нейро-нечетких систем Сугено по параметрам операций на задаче аппроксимации функции от двух переменных.

Рассматривались две архитектуры нейро-нечеткой системы. В первой, типа ANFIS, структура нейронной сети наглядно отображает структуру нечеткой системы, однако, оптимизируемые параметры находятся не на дугах сети, как это имеет место в стандартных многослойных нейроных сетях, а в узлах сети. В другой архитектуре нейро-нечеткой системы оптимизируемые параметры (в том числе и параметры операций) находятся на дугах сети, что позволяет применить стандартные методы оптимизации нейронных сетей для оптимизации нейро-нечеткой системы по параметрам операций. Далее на примере аппроксимации функции от двух переменных приводятся структуры нейронных сетей первого и второго типа.

Рассматривается пример аппроксимации функции $f = sinc(x,y) = sin(x)sin(y)/(xy)$ нечеткой моделью Сугено, состоящей из правил $R_i$ ($i$=1,…,$n$) со следующей структурой:

$$R_i\text{: } If\ X\ is\ A_i\ and\ Y\ is\ B_i\ then\ f_i = s_i x + t_i y + r_i,$$

Этот пример расматривался также в [82], где эта функция аппроксимировалась нейро-нечеткой системой ANFIS с 16 правилами по параметрам четырех функций принадлежности по каждой переменной и параметрам правых частей правил с операций конъюнкции *and*, определяемой как $T(x,y) = xy$.

В рассматриваемой ниже первом подходе использовалась модель Сугено с тремя фиксированными функциями принадлежности по каждой переменной и с параметрической операцией конъюнкции: $T(x,y) = x^p y^q$,

$(p,q>0)$. Суммарное число 45 параметров модели состояло из 18 параметров операций и 27 параметров правых частей 9 правил. На рис. 30 приведен для простоты аналог этой модели для 4 правил с двумя нечеткими множествами по каждой переменной.

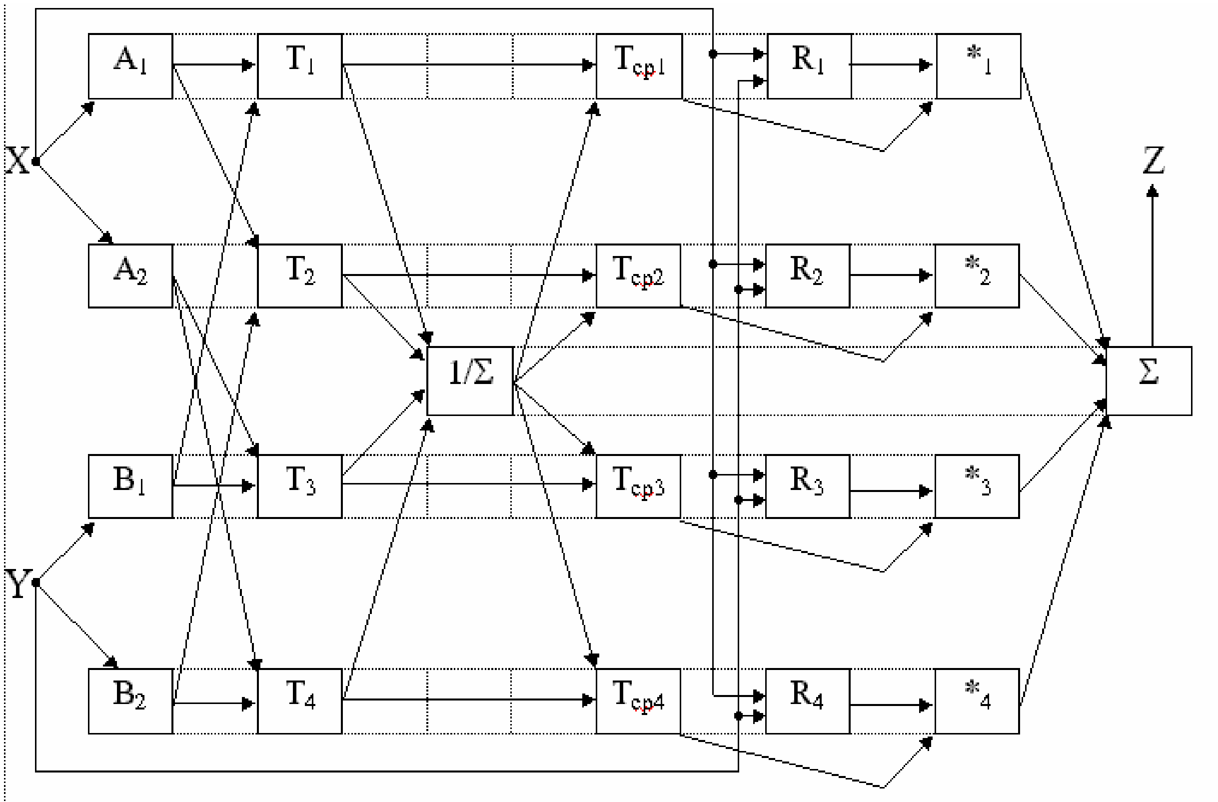



Рис. 30. Архитектура нейро-нечеткой системы типа ANFIS с 4 правилами

Приведем краткое описание слоев соответствующей нейро-нечеткой модели.

Слой 1. Входами являются вещественные значения $x$ и $y$. Выходами являются значения принадлежности $A_i(x)$, $B_j(y)$, в качестве которых были выбраны колоколообразные функции принадлежности.

Слой 2. Выходами являются величины срабатывания $w_i$ посылок правил: $w_i=A_i(x)^{pi}B_i(y)^{qi}$.

Слой 3. Выходами являются нормализованные величины срабатывания правил: $w_i^*=w_i/\sum_i(w_i)$.

Слой 4. Выходами являются взвешенные заключения правил: $f_iw_i^* = (s_ix+t_iy+r_i)w_i^*$.

Слой 5. Выходом является значение функции, определяемой моделью: $f=\sum_i(f_iw_i^*)$.

Слои 1, 3, 5 имеют фиксированные узлы, слои 2 и 4 имеют адаптивные узлы с параметрами операций $p_i$, $q_i$ и параметрами правых частей правил $s_i$, $t_i$, $r_i$ соответственно. В общем случае узлы слоя 1 также могут рассматриваться как адаптивные с параметрами функций принадлежности. В применяемой модели эти функции принадлежности были зафиксированы и равномерно распределены по области значений входных переменных [-10,10].

При оптимизации этой нейро-нечеткой системы применялся метод наименьших квадратов для идентификации параметров правых частей правил и метод обратного распространения ошибки для идентификации параметров операций. Среднеквадратичная ошибка аппроксимации значений функции *sinc*, вычисленных в 400 равномерно распределенных точках диапазона входных значений [-10,10]×[-10,10], составила 0.0248 после 300 эпох.

Как видно из рис. 30, нейронная сеть наглядно отображает структуру нечеткой системы, однако, применение стандартных методов оптимизации нейронных сетей к полученной сети затруднительно, поскольку оптимизируемые параметры не ассоциированы непосредственно с дугами сети. Кроме этого, условие, чтобы все выходы одного слоя были связаны со всеми входами другого слоя, требуемое в стандартной архитектуре многослойных нейронных сетей, в предложенной модели не выполняется. По этой причине была предложена архитектура нейро-нечеткой системы, к которой применимы стандартные методы оптимизации нейронных сетей. Структура этой системы для упрощенного аналога модели Сугено с 2 нечеткими множествами по каждой переменной и 4 правилами представлена на рис. 31.

Приведем описание этой сети.

| | |
|---|---|
| Слои 1-6. | Входами являются вещественные значения $x$ и $y$. Выходами являются функции принадлежности $A_i(x)$, $B_j(y)$ обобщенных гауссовских функций принадлежности. |
| Слои 7-15. | Выходами являются значения конъюнкций: $w_i=A_i(x)^{pi}B_i(y)^{qi}$. |
| Слой 16. | Выходом является величина $w^*=1/\sum_i(w_i)$. |
| Слои 17-25. | Выходами являются нормализованные значения срабатывания правил: $w_i^*=w_iw^*$. |
| Слои 26-34. | Выходами являются заключения правил: $f_i = s_ix+t_iy+r_i$. |
| Слои 35-43. | Выходами являются взвешенные заключения правил: $f_iw_i^*$. |
| Слой 44. | Выходом является значение функции, определяемое моделью: $f=\sum_i(f_iw_i^*)$. |

В этой нейронной сети обучались выходы слоев 7 - 15 и 26 - 34. Выходы остальных слоев использовались только для вычисления выхода системы.

Если в первой нейронной сети свойство “все узлы некоторого слоя связаны со всеми узлами некоторого другого слоя” не выполняется, то для второй сети это условие выполнено, что дает возможность применять для обучения нейронной сети стандартное программное обеспечение. В то же время количество слоев нейронной сети значительно увеличилось. Средняя квадратичная ошибка аппроксимации значений функции *sinc* по выбранным 400 точкам методом Левенберга-Маккарта составила 0.0283 после 49 эпох обучения.

В рамках предложенных архитектур нейро-нечетких систем сохраняется возможность также и оптимизации по параметрам нечетких множеств при параметрическом их задании.

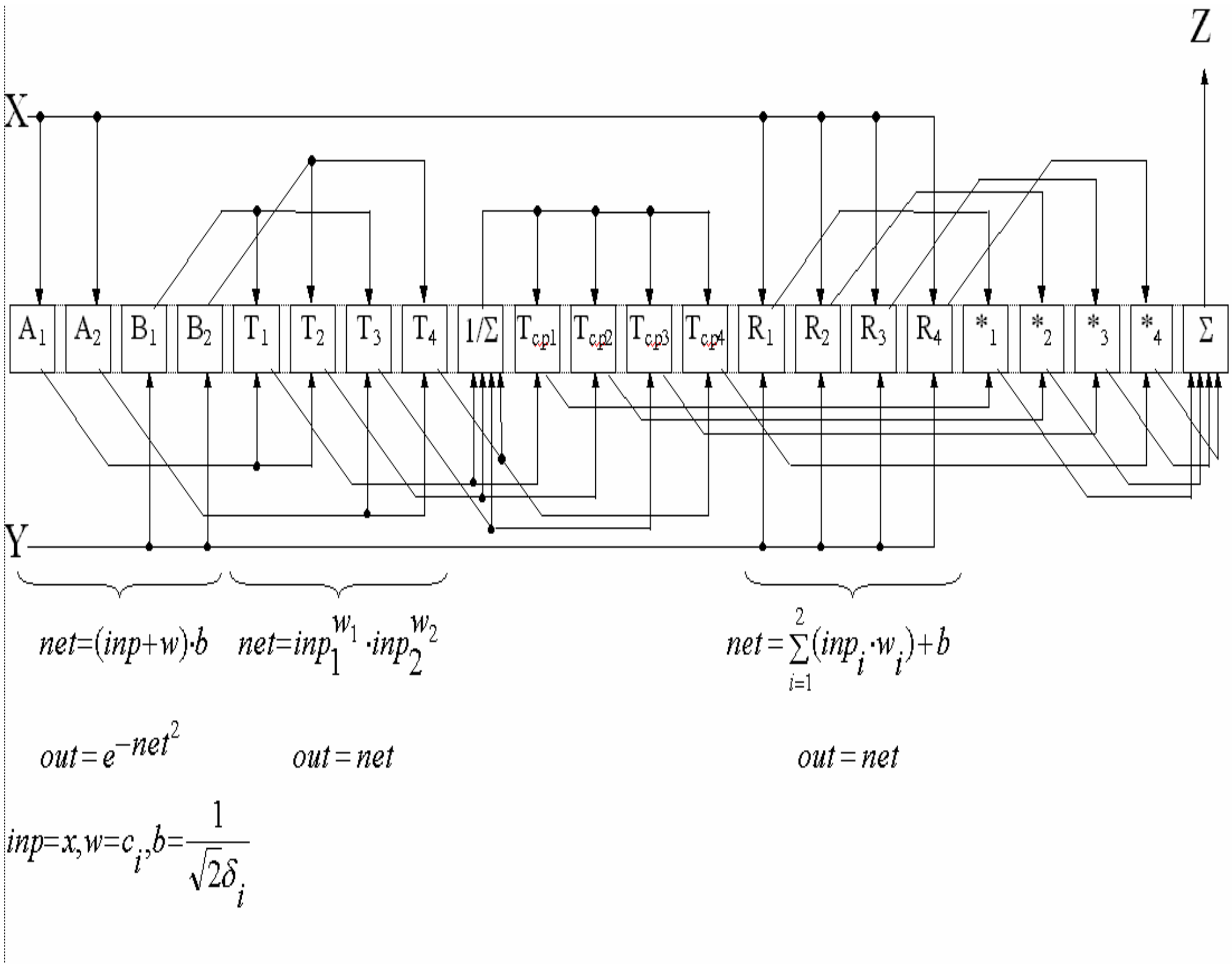



Рис. 31. Линеаризованная нейро-нечеткая система с 4 правилами

## Библиографические комментарии к главе 3

Общий взгляд на нечеткую логику с точки зрения нечеткой математики, технических приложений и моделирования человеческих рассуждений приводится в [9]. Строго монотонные операции конъюнкции и дизъюнкции на порядковых шкалах и их приложения в экспертных системах обсуждаются в [7, 8, 27, 55]. Операции на конечных шкалах рассматриваются также в [73, 80, 95, 109]. Настраиваемые на эксперта нечеткие логики исследуются в [2, 77]. Дистрибутивность нечетких связок рассматривается в [38, 60, 94, 116]. Преобразования логических форм обсуждается в [112]. $t$-нормы и $t$-конормы изучались в теории вероятностных метрических пространств [98, 106] и в настоящее время рассматриваются как основные операции нечеткой логики [38, 73, 75, 79, 87, 96, 103, 116, 119]. Операции, обобщающие $t$-нормы и $t$-конормы, рассматриваются в [94, 120, 121]. Свойства ассоциативных функций изучаются в [39]. Применение нечетких моделей Сугено и Мамдани в управлении и идентификации систем обсуждается в [81, 82, 90, 100, 107, 108, 117]. Аппаратная реализация нечетких операций обсуждается в [122]. Влияние нечетких операций на поведение нечетких систем и вопросы оптимизации нечетких моделей по параметрам операций обсуждались в [61, 85, 86, 100, 112]. Задача разработки простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций с целью их применения в задачах оптимизации нечетких моделей по параметрам операций впервые ставилась в [47, 48].

Разделы 2 и 3 основаны на работах [75, 87].

Разделы 4 - 6 основаны на работах [47, 48].

Раздел 7 основан на работах [44, 49, 51].

Обобщения операций конъюнкции и дизъюнкции в различных аксиоматиках под названием $t$-полунорм и $t$-полуконорм, слабых $t$-норм и др. рассматривались также в работах [28, 57, 62, 71 – 75, 88]. Аксиоматическое обоснование параметрической конъюнкции $(xy)^k$ и ее применение для построения нечеткого регулятора рассматривается в [57].

Свойства неассоциативных параметрических конъюнкций и дизъюнкций и их применение в задачах оптимизации нечетких моделей Мамдани и Сугено обсуждаются в работах [11, 13, 46, 50]. Часть результатов этих работ легла в основу разделов 8 и 9. В этих разделах приводятся примеры, которые обсуждались во многих работах и использовались для сравнения различных подходов к моделированию [82, 99, 117 и др.].

Раздел 10 основан на работах [34, 52, 58].

Вопросы применения нейронных сетей и нейро-нечетких моделей в задачах моделирования систем обсуждаются в [61, 81, 82, 85, 90, 91, 99, 117].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Более полная библиография по нечеткой логике находится на URL: http://fuzzy.kstu.ru/


1. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силов В.Б., Тарасов В.Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта /Под ред. Д.А. Поспелова. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
2. Аверкин А.Н., Нгуен Х. Использование нечеткого отношения моделирования для экспертных систем. - М.: ВЦ АН СССР, 1988.
3. Алиев Р.А., Абдикеев Н.М., Шахназаров М.М. Производственные системы с искусственным интеллектом. - М: Радио и связь. 1990.
4. Батыршин И.З. О мерах энтропии размытых множеств // Исследование операций и аналитическое проектирование в технике / Под ред. Ю.В. Кожевникова. - Казань: Казанск.авиац.ин-т, 1978, 40-45.
5. Батыршин И.З. О метрических свойствах алгебры Клини // XIX Всесоюзная алгебраическая конф. /Тез. докл.- Львов, 1987, ч. 2.- С. 19-20.
6. Батыршин И.З. Меры энтропии и метрические свойства алгебры нечетких множеств //Нечеткие системы: моделирование структуры и оптимизация/Под ред. А.В. Язенина. - Калинин:КГУ, 1987, 4 - 16.
7. Батыршин И.З. Лексикографические оценки правдоподобности с универсальными границами. I. - Техническая кибернетика. Известия академических наук. N 5.- 1994. - С. 28-45.
8. Батыршин И.З. Лексикографические оценки правдоподобности с универсальными границами. II. Операции отрицания. - Теория и системы управления. Известия РАН, 1995, 5, 133-151.
9. Батыршин И.З. Общий взгляд на основные черты и направления развития нечеткой логики Л. Заде. – Новости искусственного интеллекта, № 2 – 3, 2001, 25 - 27.
10. Батыршин И.З. Методы представления и обработки нечеткой информации в интеллектуальных системах. - Новости искусственного интеллекта, 1996, 2, 9 - 65.
11. Батыршин И.З.. Параметрические классы нечетких конъюнкций в задачах оптимизации нечетких моделей. - Исследования по информатике, вып. 2. ИПИАН РТ. - Казань: Отечество, 2000, 63-70.
12. Батыршин И.З., Вагин В.Н. Об алгебре размытых множеств и алгебрах Де Моргана//Управление при наличии расплывчатых категорий/ Тез. докл. 3-го научно-техн. семинара - Пермь, 1980.- С. 27-29.
13. Батыршин И.З., Мотыгуллин А.Э. Оптимизация нечетких моделей Мамдани по параметрам операций. - Исследования по информатике, вып. 2. ИПИАН РТ. - Казань: Отечество, 2000, 71-76.
14. Батыршин И.З., Скворцов В.В. О полезностной интерпретации функции принадлежностии//Модели выбора альтернатив в нечеткой среде/ Тез.докл. Межреспубликанск.научн.конф.- Рига, 1984.- С. 100-102.
15. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие модели принятия решений: дедукция, индукция, аналогия. Монография. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001.
16. Биркгоф Г. Теория решеток.- М.:Наука, 1984.
17. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В. и др. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений.- М: Радио и связь. 1989.
18. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования.- Рига:Зинатне, 1990.
19. Васильев В.И., Ильясов Б.Г. Интеллектуальные системы управления с использованием нечеткой логики. Учебное пособие. - Уфа: УГАТУ, 1995.

20. Гетманова А.Д. Отрицания в системах формальной логики. - М.: МГПИ, 1972.

21. Гретцер Г. Общая теория решеток.- М.:Мир, 1982.

22. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. - М: Радио и связь. 1990.

23. Заде Л.А. Тени нечетких множеств. - Проблемы передачи информации. - 1966, II, 1, 37 - 44.

24. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. - В кн.: Математика сегодня. - М.: Знание, 1974, 5-49.

25. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. - М.: Мир, 1976.-165 с.

26. Заде Л. Роль мягких вычислений и нечеткой логики в понимании, конструировании и развитии информационных / интеллектуальных систем. – Новости искусственного интеллекта, № 2 – 3, 2001, 7 - 11.

27. Закуанов Р.А., Батыршин И.З., Бикушев Г.С., Архиреев В.П. Представление нечетких понятий в гибридной экспертной системе СМОПЛЕКС. - Труды международного семинара "Мягкие вычисления - 96"/ Под ред. И.З. Батыршина, Д.А. Поспелова, Казань, 1996, 122 - 128. (URL: http://fuzzy.nm.ru/)

28. Зиновьев А.А. Очерк многозначной логики. - В кн.: Проблемы логики и теории познания. - М.: МГУ, 1968, с. 113 - 204.

29. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. - М.: Радио и связь, 1982.

30. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой.- М.: Наука, 1990.

31. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения /Под ред. Р.Р. Ягера.- М.: Радио и связь, 1986.

32. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика.- М. Наука, 1986.

33. Прикладные нечеткие системы /Асаи К., Ватада Д., Иваи С. и др. /Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено.- М.: Мир, 1993.

34. Салимов А.Х., Батыршин И.З. Оптимизация нейро-нечетких моделей Сугено по параметрам операций, в кн.: Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. - М. Наука, Физматлит, 2001, 95 - 100.

35. Тарасов В.Б., Желтов С.Ю., Степанов А.А. Нечеткие модели в обработке изображений: обзор зарубежных достижений. - Новости искусственного интеллекта, 3, 1993, с. 40 - 64.

36. Экспертные системы. Принципы работы и примеры/Под ред. Р. Форсайта.- М.: Радио и связь, 1987.- 224 с.

37. Aliev R n.A. Semantic analysis and experimental selection of appropriate fuzzy logics, in: Proccedings of First Internat. Conf. on Soft Computing and Computing with Words in System Analysis, Decision and Control. Antalya, Turkey. Verlag b- Quadrat Verlag, 2001, 29 - 42.

38. Alsina C., Trillas E., Valverde L. On some logical connectives for fuzzy sets theory. - J. Math. Anal. Appl., 93, 1983, 15 - 26.

39. Aczel J. Lectures on Functional Equations and Their Applications. New York: Academic Press, 1966.

40. Bandler W., Kohout L. Fuzzy power sets and fuzzy implication operators. - Fuzzy Sets and Systems, 4, 1980, 13-30.

41. Batyrshin I.Z. On fuzzinesstic measures of entropy on Kleene algebras.- Fuzzy Sets and Systems, 34, 1, 1990, 47-60.

42. Batyrshin I. Measures of fuzziness and interval subalgebras of Kleene algebras, in: Uncertainty measures. 13th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory.- Linz, Austria, 1991, 12-13.

43. Batyrshin I. Negation operations on a linearly ordered set of plausibility values. - 3d European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing, EUFIT'95. Aachen, Germany, 1995, vol.2, 241 - 244.

44. Batyrshin I. Generalized parametric conjunction operations in fuzzy modeling, in: R. Hampel, M. Wagenknecht, N. Chaker (Eds.). Fuzzy Control. Theory and Practice. Heilderberg; New York; Physica-Verlag, 2000. (Advances in Soft Computing), 88 - 97.

45. Batyrshin I.Z. On the structure of involutive, contracting and expanding negations. – Fuzzy Sets and Systems (Submitted for publication).

46. Batyrshin I., Bikbulatov A., Kaynak O., Rudas I. Functions approximation based on the tuning of generalized connectives, in: Proceedings of EUROFUSE - SIC '99, Budapest, Hungary, 1999, 556-561.

47. Batyrshin I., Kaynak O. Generation of generalized conjunction and disjunction operations, in: Proceedings of 7th Intern. Conf. Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems IPMU-98, Paris, La Sorbonne, 1998, 1762-1768.

48. Batyrshin I., Kaynak O. Parametric classes of generalized conjunction and disjunction operations for fuzzy modeling. - IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 7, 5, 1999, 586-596.

49. Batyrshin I., Kaynak O., Rudas I. Generalized conjunction and disjunction operations for fuzzy control, in: Proceeding of 6th European Congress on Intelligent Techniques & Soft Computing, EUFIT'98, Aachen, Germany, 1998, vol. 1, 52-57.

50. Batyrshin I., Kaynak O., Rudas I., Panova A. System identification based on tuning of operations in fuzzy model, in: INES 2001. Proc. 5th IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems. Helsinki, Finland. 2001, 53-56.

51. Batyrshin I., Kaynak O., Rudas I. Fuzzy modeling based on generalized conjunction operations. - IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002 (Submitted for publication).

52. Batyrshin I., Bikbulatov A., Salimov A. Optimization of neuro-fuzzy systems based on a tuning of operations. – Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Neural Networks for Instrumentation, Measurement, and Related Industrial Applications: Study Cases, NIMIA 2001 (Ed. by S. Ablameyko and V. Piuri), Crema, Italy, 120 – 122, 2001.

53. Batyrshin I., Wagenknecht M. Noninvolutive negations on [0,1]. - The Journal of Fuzzy Mathematics, 5, 4, 1997, 997 - 1010.

54. Batyrshin I., Wagenknecht M. Contracting and expanding negations on [0,1].- The Journal of Fuzzy Mathematics, 6, 1, 1998, 133- 140.

55. Batyrshin I., Zakuanov R., Bikushev G. Expert system based on algebra of uncertainties with memory in process optimization, in: Fuzzy Logic and Intelligent Technologies in Nuclear Science. Proceedings ot the 1st International FLINS Workshop, Mol, Belgium, 1994. (World Scientific, 1994), 156 - 159.

56. Bellman R.E., Giertz M. On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets. - Inform. Sci., 5, 1973, 149-156.

57. Berger M. A new parametric family of fuzzy connectives and their application to fuzzy control. - Fuzzy Sets Syst., 93, 1998, 1-16.

58. Bikbulatov A., Batyrshin I. Tuning of operations in fuzzy models by neural nets, in: Proceedings of 7th Zittau Fuzzy Colloquium, Zittau, Germany, 1999, 142 - 147.

59. Brignole D., Monteiro A. Caracterisation des algebres de Nelson par des egalites. – Proc. Japan. Acad., 43, 4, 1967, 279 – 285.

60. Calvo T. On some solutions of the distributivity equation. - Fuzzy Sets and Systems, 104, 1999, 85-96.

61. Cervinka O., Automatic tuning of parametric $T$-norms and $T$-conorms in fuzzy modeling, in: Proc. 7th IFSA World Congress. Prague: ACADEMIA, 1997, vol. 1, 416-421.

62. De Cooman G., Kerre E.E., Order norms on bounded partially ordered sets. - J. Fuzzy Mathematics, 2, 1994, 281-310.

63. De Luca A., Termini S. A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. - Information and Control, 20, 1972, 301 - 312.

64. Di Nola A., Ventre A.G.S. On fuzzy implication in De Morgan algebras. - Fuzzy Sets and Systems, 33, 1989, 155-164.

65. Dubois D., Prade H. A review of fuzzy set aggregation connectives. - Inform. Sci., 36, 1985, 85-121.

66. Dubois D., Prade H. The three semantics of fuzzy sets. - Fuzzy Sets and Systems, 90, 1997, 141 - 150.

67. Esteva F. Some representable De Morgan algebras. - J. Math. Anal. Appl., 100, 2, 1984, 463 - 469.

68. Esteva F. On Negations and Algebras in Fuzzy Set Theory. Report No. UCB/CSD 87/330, 1986, Berkeley, California.

69. Esteva F., Trillas E., Domingo X. Weak and strong negation functions for fuzzy set theory, in: Proc. 12th Int. Symp. on Multiple-Valued logic, Norman, 1981, 23-26.

70. Esteva F., Quintanilla R. On symmetric algebras of fuzzy sets. - Fuzzy Sets and Systems, 24, 1987, 87 - 92.

71. Fodor J.C. Strict preference relations based on weak t-norms. - Fuzzy Sets and Systems, 43, 1991, 327 - 336.

72. Fodor J.C. A new look at fuzzy connectives. - Fuzzy Sets and Systems, 57, 1993, 141 - 148.

73. Fodor J. Smooth associative operations on finite ordinal scales (to be published).

74. Fodor J., Keresztfalvi T. Non-standard conjunctions and implications in fuzzy logic. - Internat. J. Approx. Reason., 12, 1995, 69 - 84.

75. Fodor J., Roubens M., Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

76. Gaines B.R. Fuzzy and probability uncertainty logics. - Information and Control, 38, 1978, 154 - 169.

77. Godo L.L., Lopez de Mantaras R., Sierra C., Verdaguer A. Managing linguistically expressed uncertainty in MILORD application on medical diagnosis. - AICOM, V.1, 1, 1988, 14-31.

78. Goguen J.A. L-fuzzy sets.- J. Math. Anal. Appl., 18, 1967, 145-174.

79. Gupta M. M., Qi J. Theory of $T$-norms and fuzzy inference methods. - Fuzzy Sets Syst., 40, 1991, 431-450.

80. Herrera F., Herrera-Viedma E., Verdegay J.L. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. - Fuzzy Sets and Systems, 78, 1996, 73- 87.

81. Jang J.-S. Roger. ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System. - IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 23, 1993, 665-685.

82. Jang J.-S. Roger, Sun C. T., Mizutani E. Neuro-Fuzzy and Soft Computing. A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence. Prentice-Hall International, 1997.

83. Kalman J.A. Lattices with involution. - Trans. Amer. Math. Soc., 87, 1958, 485 - 491.

84. Kaufmann A., Gupta M.M. Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science. Amsterdam: North-Holland,, 1988.

85. Keller J.M., Krishnapuram R., Chen Z., Nasraoui O. Fuzzy additive hybrid operators for network-based decision making. - Int. J. Intelligent Syst., 9, 1994, 1001-1023.

86. Kiszka J.B., Kochanska M.E., Sliwinska D.S. The influence of some fuzzy implication operators on the accuracy of a fuzzy model. - Part I. – Fuzzy Sets and Systems, 15, 1985, 111 – 128.– Part II. – Fuzzy Sets and Systems, 15, 1985, 223 – 240.

87. Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular Norms. Dordrecht, Kluwer, 2000.

88. Klir G.J., Yuan B. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications. New York, Prentice-Hall, 1995.

89. Knopfmacher J. On measures of fuzziness. - Journal of Mathematical Analysis and Applications, 49, 1975, 529 - 534.

90. Kosko B. Fuzzy Engineering. New Jersey: Prentice-Hall, 1997.

91. Lin C. T. Neural Fuzzy Control Systems with Structure and Parameter Learning. Singapore: World Scientific, 1994.

92. Lowen R. On fuzzy complements. - Information Sciences, 14, 1978, 107 - 113.

93. Luo C., Ma X. On Stone theorem for De Morgan algebra. - The Journal of Fuzzy Mathematics, 5, 3, 1997, 543 - 551.

94. Mas M., Mayor G., Torrens J. The distributivity condition for uninorms and t-operators. – Fuzzy Sets and Systems (to be published).

95. Mas M., Torrens J., Calvo T., Carbonell M. Idempotent operators on a finite chain. – Mathware & Soft Computing, 6, 1999, 235 - 247.

96. Mayor G. Sugeno's negations and t-norms. - Mathware & Soft Computing, 1, 1994, 93 - 98.

97. Mayor G., Calvo T. Fractal negations. - Mathware & Soft Computing, 3, 1994, 277 - 283.

98. Menger K. Statistical metric spaces. – Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 28, 1942, 535 – 537.

99. Narendra K.S., Parthsarathy K. Identification and control of dynamical systems using neural networks - IEEE Transactions on Neural Networks, 1, 1990, 4 - 27.

100. Mizumoto M. Fuzzy controls under various fuzzy reasoning methods. - Inform. Sci., 45, 1988, 129-151.

101. Ovchinnikov S.V. General negations in fuzzy set theory. - J. Math. Anal. Appl., 92, 1983, 234 - 239.

102. Rasiowa H. An algebraic approach to non-classical logics. - Amsterdam: North-Holland, 1974.

103. Roychowdhury S. New triangular operator generators for fuzzy systems. - IEEE Trans. Fuzzy Syst., 5, 1997, 189-198.

104. Ruet P., Fages F. Combining explicit negation and negation by failure via Belnap's logic. – Theoretical Computer Science, 171, 1997, 61 – 75.

105. Skala H.J. On many-valued logics, fuzzy sets, fuzzy logics and their applications. - Fuzzy Sets and Systems, 1, 1978, 129 - 149.

106. Schweizer B., Sklar A. Probabilistic Metric Spaces. Amsterdam: North-Holland, 1983.

107. Sugeno M. An introductory survey of fuzzy control. - Inform. Sci., 36, 1985, 59-83.

108. Sugeno M., Kang G.T. - Structure identification of fuzzy model. - Fuzzy Sets and Systems, 28, 1988, 15-33.

109. Torra V. Negation functions based semantics for ordered linguistic labels. - Int. J. of Intelligent Systems, 11, 1996, 975 - 988.

110. Trillas E. Sobre funciones de negacion en la teoria de conjunctos diffusos. - Stochastica, 3, 1979, 47-59.

111. Trillas E., Alsina C., Valverde L. Do we need max, min and 1-*j* in fuzzy set theory?, in: Fuzzy Set and Possibility Theory/Ed. by R.R. Yager. New York: Pergamon Press,

1982, 275-297. (Русский перевод: Трильяс Э., Альсина К., Вальверде А. Нужны ли в теории нечетких множеств операции max, min и 1-*j*?, в кн.: Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения /Под ред. Р.Р. Ягера. - Радио и связь, 1986, 199-228.)

112. Turksen I.B. Intelligent fuzzy system modeling, in: Kaynak et al. (Eds), Computational Intelligence - Soft Computing and Fuzzy-Neuro Integration with applications, Springer-Verlag: 1998, 157 - 176.

113. Voxman W., Goetschell R. A note on the characterization of the max and min operators. - Inform. Sci., 30, 1983, 5-10.

114. Wagenknecht M., Batyrshin I. On negations generated by compensations. – The Journal of Fuzzy Mathematics, 6, 1, 1998, 141 - 150. (Версия статьи находится на URL: http://fuzzy.nm.ru/).

115. Wagenknecht M., Batyrshin I. Fixed point properties of fuzzy negations. – The Journal of Fuzzy Mathematics, 6, 4, 1998, 975-981.

116. Weber S. A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms.- Fuzzy Sets Syst., 11, 1983, 115-134.

117. Wang L.-X. A Course in Fuzzy Systems and Control. Prentice Hall PTR. Upper Saddle River, NJ, 1997.

118. Yager R.R. On the measure of fuzziness and negation. II. Littices. - Information and Control, 44, 1980, 236 - 260.

119. Yager R.R. On a general class of fuzzy connectives. - Fuzzy Sets Syst., vol. 4, 1980, 235-242.

120. Yager R.R., Rybalov A. Uninorm aggregation operators. - Fuzzy Sets and Systems, 80, 1996, 111 - 120.

121. Yager R.R. Uninorms in fuzzy systems modeling. - Fuzzy Sets and Systems, 122, 2001, 167 –175.

122. Yamakawa T., Miki T. The current mode fuzzy logic integrated circuits fabricated by the standard CMOS process. - IEEE Trans. Comput., vol. 35, 1986, 161-167.

123. Zadeh L.A. Fuzzy sets.- Information and Control, 8, 3, 1965, 338-353.

124. Zadeh L. A. Fuzzy logic = computing with words. - IEEE Trans. on Fuzzy Systems, v. 4, 2, 1996, 103 - 111.

125. Zadeh L.A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. - Fuzzy Sets and Systems, 90, 1997, 111 - 127.

126. Zadeh L.A. From computing with numbers to computing with words - from manipulation of measurements to manipulation of perceptions.- IEEE Trans. on Circuits and Systems - 1: Fundamental Theory and Applications, 45, 1, 1999, 105 - 119.

127. Zadeh L.A., Kacprzyk J. (Eds.). Computing with words in Information /Intelligent systems. 1. Foundations. Physica-Verlag. A Springer-Verlag Company, 1999.

# СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ISBN 5-9222-0034-8

9 785922 200349

Издательство “Отечество”
420107, Казань, ул.Свердлова, 12.
Лицензия на издательскую деятельность №0217 от 17.11.97 г.
выдана Министерством информации и печати Республики Татарстан

Лицензия на полиграфическую деятельность №0128 от 08.06.98г.
выдана Министерством информации и печати Республики Татарстан
Подписано в печать 20.12.2001 г.
Форм. бум. 60х84 1/16. Печ. л. 6 $^3/_8$. Тираж 230. Заказ 213.

Минитипография Института проблем информатики АН РТ
420012, Казань, ул.Чехова, 36.