УДК 621.391.192.5

ТЕНИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ *

Л. А. Заде

Тень нечеткого множества определяется как результат проектирования этого множества на некоторую гиперплоскость. Показано, что при таком проектировании свойства выпуклости и вогнутости множеств сохраняются, а степень разделимости двух нечетких множеств не увеличивается.

Вводится понятие граней нечеткого множества, которые оказываются полезными при оценке множества по его теням.

В теории информации, как и во многих других областях науки, неточность и неопределенность обычно вводятся с помощью понятий и методов теории вероятностей. Подчеркивание роли теории вероятностей при изучении этих вопросов затемняет то, что во многих ситуациях источником неточности является вовсе не наличие каких-то случайных величин, а появление в рассматриваемой задаче какого-то класса или классов, не имеющих строго определенных границ. В качестве примера класса такого рода можно привести «класс» всех действительных чисел, намного превосходящих число 10, который, очевидно, не является точно заданным множеством. То же самое можно сказать о «классе» рукописных изображений буквы А, «классе» умных людей, «классе» систем приблизительно эквивалентных некоторой заданной системе и т. д. На самом деле, тщательный анализ показывает, что большинство классов объектов, с которыми приходится сталкиваться в реальном мире, являются классами именно такого нечеткого типа, т. е. классами, которые определены неточно. В этих случаях элемент может принадлежать или не принадлежать к классу, но, кроме того, возможными являются также и промежуточные градации принадлежности; поэтому для описания степени принадлежности элемента к классу здесь необходимо использовать многозначную логику — возможно даже с континуальным множеством значений истинности.

В недавно вышедшей статье [1] были намечены основные понятия, необходимые для работы с классами, в которых могут иметь место степени принадлежности, промежуточные между полной принадлежностью и полной непринадлежностью. Центральным здесь является понятие нечеткого множества — «класса» с множеством различных степеней принадлежности к нему, которое может быть непрерывным бесконечным множеством.

Точнее говоря, пусть X — совокупность объектов (точек) x, т. е. $X = \{x\}$. Тогда *нечеткое множество* A на X задается функцией принадлежности $\mu_A(x)$ (или просто μ_A), которая сопоставляет каждому x число из интервала $[0, 1]$, являющееся степенью принадлежности x к A. Чем ближе величина $\mu_A(x)$ к единице, тем выше степень принадлежности x к A, и, наоборот, чем меньше величина $\mu_A(x)$, тем ниже степень принадлежности x к A.

* Перевод с английского В. Л. Стефанюка.

Рассмотрим, например, нечеткое множество A, определенное на вещественной оси E^1 соотношением: $A = \{x | x \gg 10\}$. В этом случае A можно задать, разумеется субъективно, функцией принадлежности μ_A, принимающей типичные значения: $\mu_A(10) = 0$; $\mu_A(50) = 0{,}3$; $\mu_A(100) = 0{,}9$; $\mu_A(200) = 1$ и т. д.

Понятие нечеткого множества приводит к естественной формулировке проблемы абстрагирования — проблемы, играющей центральную роль при классификации образов, эвристическом программировании и во многих других областях [2]. Пусть задана конечная выборка из нечеткого множества A, например, N пар вида $(x_1, \mu_A(x_1)), \ldots, (x_N, \mu_A(x_N))$, где x_i — точка из X, а $\mu_A(x)$ — степень принадлежности этой точки к A. Тогда абстрагирование этой выборки состоит в оценке функции принадлежности $\mu_A(x)$ множества A по выборочным значениям $(x_1, \mu(x_1)), \ldots, (x_N, \mu(x_N))$. Это, конечно, еще не есть математически строгая постановка задачи, так как здесь ничего не сказано о критериях, позволяющих судить, какая оценка функции μ_A является хорошей, а какая нет. Чтобы сделать проблему абстрагирования математически содержательной, необходимо располагать какой-то априорной информацией о классе функции, к которому принадлежит μ_A, и указать способ сравнения μ_A с ее оценкой. При этом тот факт, что человеческий мозг способен очень эффективно осуществлять абстрагирование даже тогда, когда соответствующая задача не сформулирована математически корректно, может лишь привести в замешательство исследователя. Между тем именно наше недопонимание существа процессов абстрагирования и вытекающая отсюда неспособность научить машину осуществлять такое абстрагирование лежит в основе большого числа нерешенных проблем в области эвристического программирования, классификации образов и других родственных областях.

Заметим еще, что с точки зрения теории нечетких множеств, когда говорится, например, что «Евгений — высокий мужчина», тем самым задается пара (Евгений, μ_A), где A — нечеткое множество высоких мужчин, а μ_A — функция принадлежности к этому множеству. Обычно $\mu_A(x)$ бывает известно лишь для конечной группы мужчин, так что в общем случае для оценки μ_A требуется абстрагирование.

В качестве первого шага к созданию систематических методов осуществления абстрагирования на основе конечной выборки из нечеткого множества необходимо разработать математический аппарат для оперирования с нечеткими множествами и изучения их свойств. В настоящей статье мы ограничимся лишь одним аспектом теории нечетких множеств, а именно, понятием тени нечеткого множества и некоторыми свойствами, связанными с понятиями выпуклости и вогнутости. Хотя теория нечетких множеств, по-видимому, тесно связана с задачами классификации образов, оптимизации при нечетких ограничивающих связях и передачи информации, мы здесь не будем касаться этих и других приложений.

Чтобы сделать последующее обсуждение более доступным, начнем с того, что перечислим некоторые основные определения, относящиеся к нечетким множествам.

1. Два нечетких множества A и B *равны* (обозначается $A = B$) тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ для всех x. В дальнейшем это равенство будем записывать в виде $\mu_A = \mu_B$, имея в виду во всех случаях, что отсутствие аргумента указывает на справедливость соответствующего соотношения при всех x.

2. *Дополнением* нечеткого множества A является нечеткое множество A', функция принадлежности к которому равна

$$\mu_{A'} = 1 - \mu_A. \tag{1}$$

3. Нечеткое множество A *содержится* в нечетком множестве B (обозначается $A \subset B$) тогда и только тогда, когда

$$\mu_A \leqslant \mu_B. \tag{2}$$

4. *Объединение* двух множеств A и B (обозначается $A \cup B$) определяется как наименьшее нечеткое множество, содержащее как A, так и B. Функция принадлежности к $A \cup B$ задается выражением

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)]. \tag{3}$$

5. Аналогично этому *пересечение* двух нечетких множеств A и B (обозначается $A \cap B$) определяется как наибольшее нечеткое множество, содержащееся как в A, так и в B. Функция принадлежности к $A \cap B$ задается выражением

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min [\mu_A(x),\ \mu_B(x)]. \tag{4}$$

6. Объединение и пересечение A и B представляют собой частные случаи *выпуклой комбинации* множеств A, B и некоторого третьего нечеткого множества Λ (обозначаемой $(A, B; \Lambda)$). По определению функции принадлежности к выпуклой комбинации $(A, B; \Lambda)$ нечетких множеств A, B и Λ задается выражением

$$\mu_{(A,\ B;\ \Lambda)}(x) = \mu_\Lambda(x)\mu_A(x) + (1 - \mu_\Lambda(x))\mu_B(x). \tag{5}$$

В дальнейшем будем предполагать для определенности, что X — это n-мерное евклидово пространство E^n. В этом пространстве нечеткое множество A считается *выпуклым* тогда и только тогда, когда множества $\Gamma_\alpha = \{x \,|\, \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$ выпуклы при всех $\alpha > 0$. Иначе говоря, A выпукло тогда и только тогда, когда неравенство

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geqslant \min [\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2)] \tag{6}$$

выполняется при всех x_1, x_2 из E^n и всех λ из интервала $[0, 1]$.

Нечеткое множество A *вогнуто*, если A есть дополнение некоторого выпуклого множества. Это означает, что для вогнутого множества неравенство (6) заменяется двойственным неравенством

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leqslant \max [\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2)]. \tag{7}$$

Легко показать [1], что выпуклость сохраняется при переходе к пересечениям множеств, точно так же двойственное утверждение — вогнутость — сохраняется при переходе к объединениям множеств.

Выпуклая оболочка множества A обозначается *conv* A и определяется как наименьшее выпуклое нечеткое множество, содержащее A. Аналогично, *вогнутое ядро* множества обозначается *conc* A и определяется как наибольшее вогнутое нечеткое множество, содержащееся в A.

Теперь можно определить понятие тени нечеткого множества и обсудить некоторые ее основные свойства.

Пусть p_0 и H — соответственно точка и гиперплоскость в E^n. Тогда *центральная тень* A на H есть нечеткое множество элементов H, функция принадлежности к которому $\mu_{S(A)}(x)$ определяется следующим образом. Пусть L — прямая, проходящая через p_0 и пересекающая гиперплоскость H в точке h. Тогда

$$\mu_{S(A)}(h) = \sup_{x \in L} \mu_A(x), \qquad h \in H,$$
$$\mu_{S(A)}(x) = 0, \qquad x \notin H. \tag{8}$$

Заметим, что мы использовали суггестивный термин — центральная тень — для этого множества, потому что оно напоминает тень, отбрасываемую облаком A на плоскость H, причем p_0 здесь играет роль точечного источника света.

Понятие, двойственное центральной тени, это — *дополнительная центральная тень* $C(A)$, которая определяется как дополнение на H множества $S(A')$, где A' — дополнение A. Точнее говоря,

$$\mu_{C(A)}(h) = \inf_{x \in L} \mu_A(x), \quad h \in H, \tag{9}$$

$$\mu_{C(A)}(x) = 0, \quad x \notin H.$$

Преобразование S, переводящее A в $S(A)$, будем называть *центральной проекцией* A *на* H *из центра* p_0. В частном случае, когда точка p_0 бесконечно удалена и прямые L ортогональны H, будем называть $S(A)$ *ортогональной тенью*, а S — *ортогональной проекцией*. Например, если H — координатная плоскость $H = \{x \mid x_1 = 0\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то ортогональная тень A на H задается следующей функцией принадлежности

$$\mu_{S(A)}(x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \sup \mu_A(x_1, \ldots, x_n), & x \in H, \\ 0, & x \notin H. \end{cases} \tag{10}$$

В дальнейшем, в тех случаях, когда из контекста ясно, в каком смысле следует понимать используемый термин, мы часто будем употреблять термины «тень» и «проекция» без прилагательных «точечная» или «ортогональная».

Установим теперь некоторые основные свойства теней и дополнительных теней нечетких множеств. Большинство этих свойств непосредственно вытекает из определений (8) и (9).

Однородность. Обозначим через kA нечеткое множество, функция принадлежности к которому имеет вид

$$\mu_{kA}(x) = k\mu_A(x), \tag{11}$$

где k — константа, $0 \leqslant k \leqslant 1$. Тогда очевидно

$$S(kA) = kS(A). \tag{12}$$

Монотонность. Это свойство выражается соотношением

$$A \subset B \Rightarrow S(A) \subset S(B). \tag{13}$$

Оно непосредственно следует из того, что

$$A_x[\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)] \Rightarrow \sup_{x \in L} \mu_A(x) \leqslant \sup_{x \in L} \mu_B(x). \tag{14}$$

Дистрибутивность. Для любых двух нечетких множеств A и B

$$S(A \cup B) = S(A) \cup S(B), \tag{15}$$

так что преобразование S дистрибутивно по отношению к операции $\cup$. Формула (15) сразу следует из тождества

$$\sup_{x \in L} \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \max[\sup_{x \in L} \mu_A(x), \sup_{x \in L} \mu_B(x)]. \tag{16}$$

В связи с (15) возникает естественный вопрос, дистрибутивно ли S по отношению к операции $\cap$, т .е. выполняется ли соотношение

$$S(A \cap B) = S(A) \cap S(B). \tag{17}$$

Если это так, то в терминах функций принадлежности будем иметь

$$\sup_{x\in L}\min[\mu_A(x),\mu_B(x)]=\min[\sup_{x\in L}\mu_A(x),\ \sup_{x\in L}\mu_B(x)]. \tag{18}$$

Последнее равенство не выполняется при произвольных μ_A, μ_B. Однако, наложив на $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ подходящие ограничения, типа используемых в минимаксной теореме [3], можно добиться его выполнения.

Для произвольных же μ_A и μ_B можно лишь утверждать, что

$$S(A\cap B)\subset S(A)\cap S(B), \tag{19}$$

так как (см. (43) и далее)

$$\sup_{x\in L}\min[\mu_A(x),\mu_B(x)]\leqslant\min[\sup_{x\in L}\mu_A(x),\ \sup_{x\in L}\mu_B(x)]. \tag{20}$$

Заметим, что, комбинируя (11) и (15), получаем для произвольных констант k_1, k_2 из интервала $[0, 1]$

$$S(k_1A\cup k_2B)=k_1S(A)\cup k_2S(B). \tag{21}$$

Это тождество показывает, что преобразование S — линейное при условии, что k_1, $k_2\in[0, 1]$. Заметим также, что S идемпотентно, т. е. $S^2(A)=S(S(A))=S(A)$.

Инвариантность свойств выпуклости и вогнутости относительно проектирования. *Пусть A — выпуклое нечеткое множество в E^n, а $S(A)$ — ортогональная тень A на гиперплоскость H. Тогда $S(A)$ — выпуклое нечеткое множество на H. Двойственно этому, если A вогнуто, то $C(A)$ (дополнительная тень A) также вогнуто.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение, относящееся к выпуклости. Пусть h_1 и h_2 — две произвольные точки из H, а h — третья точка, определенная равенством

$$h=\lambda h_1+(1-\lambda)h_2, \tag{22}$$

где $\lambda\in[0, 1]$. Пусть L_1, L_2 и L — прямые ортогональные к H и проходящие через точки h_1, h_2 и h соответственно. По определению символа sup для каждого $\varepsilon>0$ найдутся по крайней мере две точки x_1 и x_2 на L_1 и L_2 такие, что

$$\sup_{x\in L_1}\mu_A(x)-\mu_A(x_1)\leqslant\varepsilon, \tag{23}$$

$$\sup_{x\in L_2}\mu_A(x)-\mu_A(x_2)\leqslant\varepsilon. \tag{24}$$

Далее, поскольку A — выпуклое нечеткое множество, имеем

$$\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\min[\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)], \tag{25}$$

откуда ввиду (23) и (24) вытекает, что

$$\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\min[\sup_{x\in L_1}\mu_A(x),\sup_{x\in L_2}\mu_A(x)]-\varepsilon. \tag{26}$$

Замечая, что

$$\mu_{S(A)}(h)=\sup_{x\in L}\mu_A(x)\geqslant\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2), \tag{27}$$

$$\mu_{S(A)}(h_1)=\sup_{x\in L_1}\mu_A(x), \tag{28}$$

$$\mu_{S(A)}(h_2)=\sup_{x\in L_2}\mu_A(x), \tag{29}$$

можем заключить из (26), что

$$\mu_{S(A)}(h) \geqslant \min\left[\mu_{S(A)}(h_1), \mu_{S(A)}(h_2)\right] - \varepsilon \tag{30}$$

для всех $\varepsilon > 0$. Отсюда

$$\mu_{S(A)}(h) \geqslant \min\left[\mu_{S(A)}(h_1), \mu_{S(A)}(h_2)\right], \tag{31}$$

что и доказывает, что $S(A)$ — выпуклое нечеткое множество.

Грани множеств в терминах теней и дополнительных теней. Тени и дополнительные тени A на некотором множестве гиперплоскостей дают очевидную возможность определить верхнюю и нижнюю грани A. Такие грани оказываются полезными при оценке A по известным теням — случай, часто встречающийся в задачах оптимизации при нечетких ограничениях.

Пусть A — нечеткое множество в E^n с функцией принадлежности $\mu_A(x_1, \ldots, x_n)$ и пусть H_i — это i-я координатная гиперплоскость $H_i = \{x \mid x_i = 0\}$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через S_i и C_i соответственно тень и дополнительную тень A на H_i, функции принадлежности к которым определяются равенствами

$$\mu_{S_i}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x_i} \mu_A(x_1, \ldots, x_n), & x \in H_i, \\ 0, & x \notin H_i, \end{cases} \tag{32}$$

$$\mu_{C_i}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x_i} \mu_A(x_1, \ldots, x_n), & x \in H_i, \\ 0 & x \notin H_i. \end{cases} \tag{33}$$

Рассмотрим теперь цилиндрические нечеткие множества $\bar{S}_i$ и $\bar{C}_i$, порожденные S_i и C_i, с функциями принадлежности

$$\mu_{\bar{S}_i}(x) = \sup_{i} \mu_A(x_1, \ldots, x_n), \tag{34}$$

$$\mu_{\bar{C}_i}(x) = \inf_{x_i} \mu_A(x_1, \ldots, x_n). \tag{35}$$

Используя эти цилиндрические нечеткие множества, A можно ограничить сверху и снизу пересечением всех $\bar{S}_i$ и объединением всех $\bar{C}_i$ $i = 1, \ldots, n$. Таким образом,

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bar{C}_i \subset A \subset \bigcap_{i=1}^{n} \bar{S}_i. \tag{36}$$

Это соотношение является прямым следствием неравенств

$$\inf_{x_i} \mu_A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \mu_A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \sup_{x_i} \mu_A(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{37}$$

Если A — выпуклое или вогнутое нечеткое множество и H_i — множество всех гиперплоскостей в E^n, неравенства в (36) могут быть заменены равенствами. Более конкретно, утверждаем следующее: *если A и B — выпуклые множества и $S(A) = S(B)$ для всех p_0 (и фиксированной плоскости H), то $A = B$. (Двойственное утверждение имеет место для вогнутых множеств и дополнительных теней.)*

Доказательство. Достаточно показать, что если $A \neq B$, то существует точка p_0 такая, что $S(A) \neq S(B)$. Предположим, что $A \neq B$ и пусть x_0 — точка, в которой $\mu_A(x_0) \neq \mu_B(x_0)$; например, пусть $\mu_A(x_0) = \alpha > \mu_B(x_0) = \beta$. Так как B — выпуклое множество, то множество

$\Gamma_\beta = \{x | \mu_B(x) > \beta\}$ выпукло и, следовательно, существует гиперплоскость F, проходящая через точку x_0 и опорная для множества Γ_β. Тогда для всех x, лежащих на F и находящихся по ту сторону этой гиперплоскости, где нет точек Γ_β, будет выполняться неравенство $\mu_B(x) \leqslant \beta$.

Пусть теперь p_0 — произвольно выбранная точка на F и пусть L — прямая, проходящая через p_0 и x_0. Для точки пересечения h этой прямой с H (эта точка может оказаться бесконечно удаленной) выполняется неравенство

$$\mu_{S(B)}(h) \leqslant \beta.$$

Но, с другой стороны, $\mu_{S(A)}(h) \geqslant \alpha$, так как $\mu_A(x_0) = \alpha$. Следовательно, $\mu_{S(A)}(h) \neq \mu_{S(B)}(h)$, что и завершает доказательство.

В случае ортогональных теней обсуждаемое свойство приобретает следующую форму: *если A и B — выпуклые множества и $S(A) = S(B)$ для всех H, то $A = B$.* В более общем случае, когда A и B необязательно выпуклые, заключение, что $A = B$ следует заменить более слабым соотношением $conv\, A = conv\, B$, где $conv\, A$ и $conv\, B$ — выпуклые оболочки множеств A и B.

Степень разделимости. Классическая теорема о разделимости выпуклых множеств была обобщена в [1] на случай нечетких множеств следующим образом. *Пусть A и B — два выпуклых нечетких множества в E^n и пусть M — максимальная степень принадлежности к пересечению A и B*, т. е.

$$M = \sup_x \min [\mu_A(x), \mu_B(x)]. \tag{38}$$

Тогда (a) существует гиперплоскость H такая, что $\mu_A(x) \leqslant M$ для всех x с одной стороны H и $\mu_B(x) \leqslant M$ для всех x с другой стороны H; и (b) не существует числа $M^1 < M$, для которого справедливо (a). По этой причине число $D = 1 - M$ называется степенью разделимости A и B.

В связи с приложениями к проблеме классификации образов интересно выяснить, можно ли с помощью проектирования A и B на некоторую гиперплоскость увеличить их степень разделимости. Нетрудно показать, что ответ на этот вопрос отрицателен.

В самом деле, примем для простоты, что $n = 2$ и рассмотрим тени двух нечетких выпуклых множеств A и B на гиперплоскости $\{x | x_2 = 0\}$. Согласно (10) функции принадлежности к этим двум выпуклым теням на гиперплоскости $\{x | x_2 = 0\}$ даются выражениями

$$\mu_{S(A)}(x_1) = \sup_{x_2} \mu_A(x_1, x_2), \tag{39}$$

$$\mu_{S(B)}(x_1) = \sup_{x_2} \mu_B(x_1, x_2). \tag{40}$$

Далее, степень разделимости A и B может быть записана в виде

$$D = 1 - \sup_{x_1} \sup_{x_2} \min [\mu_A(x_1, x_2), \mu_B(x_1, x_2)], \tag{41}$$

тогда как степень разделимости $S(A)$ и $S(B)$ задается выражением

$$D_S = 1 - \sup_{x_1} \min [\sup_{x_2} \mu_A(x_1, x_2), \sup_{x_2} \mu_B(x_1, x_2)]. \tag{42}$$

Таким образом, чтобы показать, что $D_S \leqslant D$, достаточно убедиться в том, что при всех x_1

$$\sup_{x_2} \min [\mu_A(x_1, x_2), \mu_B(x_1, x_2)] \leqslant \min [\sup_{x_2} \mu_A(x_1, x_2), \sup_{x_2} \mu_B(x_1, x_2)]. \tag{43}$$

Последнее неравенство становится очевидным, если заметить, что из неравенств

$$\sup_{x_2} \mu_A(x_1, x_2) \geqslant \mu_A(x_1, x_2) \text{ при всех } x_1 \tag{44}$$

и

$$\sup_{x_2} \mu_B(x_1, x_2) \geqslant \mu_B(x_1, x_2) \text{ при всех } x_1 \tag{45}$$

следует, что при всех x_1

$$\min[\sup_{x_2} \mu_A(x_1, x_2), \sup_{x_2} \mu_B(x_1, x_2)] \geqslant \min[\mu_A(x_1, x_2), \mu_B(x_1, x_2)], \tag{46}$$

а это неравенство обеспечивает выполнение (43).

Заключительные замечания. Понятие тени играет в теории нечетких множеств по существу ту же роль, какую играет понятие частного (маргинального) распределения в математической статистике и теории вероятностей. В настоящей статье мы рассмотрели лишь наиболее элементарные свойства теней нечетких множеств и совсем не касались приложений. Хотя работа над приложениями этой теории находится пока в начальной стадии, уже ясно, что понятие тени и другие рассмотренные выше понятия могут быть с успехом использованы в различных областях и, в первую очередь, при изучении классификации образов и оптимизации при нечетких ограничениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zadeh L. A. Fuzzy Sets. Information and Control, 1965, 8, *3*, 338—353.
2. Bellman R., Kalaba R., Zadeh L. A. Abstraction and Pattern Classification, 1964, October, RAND Memorandum RM-4307 — PR.
3. Karlin S. Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics. Addison — Wesley Publishing Co., Reading Mass., p. 28 et seq. (Рус. пер.: Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964).

Поступила в редакцию
25 августа 1965 г.