ВОПРОСЫ АНАЛИЗА И ПРОЦЕДУРЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

СБОРНИК ПЕРЕВОДОВ

Под редакцией
канд. физ.-мат. наук
И. Ф. Шахнова

С предисловием
чл.-корр. АН СССР
Г. С. Поспелова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1976

7. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В РАСПЛЫВЧАТЫХ УСЛОВИЯХ [1])

Р. Беллман и Л. Заде

1. ВВЕДЕНИЕ

На практике во многих случаях принятие решений происходит в таких условиях, когда цели, ограничения и последствия возможных действий точно не известны. Для обращения с неточно известными величинами обычно применяется аппарат теории вероятностей, а также методы теории принятия решений, теории управления и теории информации. Таким образом, интуитивно принимается допущение, что неточность (imprecision) независимо от ее природы может быть отождествлена со случайностью (randomness). Это, как нам представляется, является спорным предположением.

По нашему убеждению, необходимо различать *случайность* (randomness) и *расплывчатость* (fuzziness), причем последняя является основным источником неточности во многих процессах принятия решений. Под расплывчатостью подразумевается тот тип неточности, который связан с *расплывчатыми множествами* [2]) [20, 21], т. е. с классами, в которых нельзя указать резкую границу, отделяющую элементы, принадлежащие к данному классу, и элементы, не принадлежащие к не-

[1]) Bellman R. E., Zadeh L. A., Decision-Making in Fuzzy Environment, *Management Science*, 17, № 4, 141—164 (1970).

[2]) Термин «fuzzy sets», введенный в научный обиход Л. Заде, в отечественной литературе переводится по-разному — как «размытые», «нечеткие», «нечетко определенные», «расплывчатые» и т. д. множества. Мы сочли целесообразным остановиться на последнем термине, как наиболее близко передающем смысл, который вкладывается в это понятие в современной литературе. — *Прим. ред.*

му. Например, класс *зеленых предметов* есть расплывчатое множество. Расплывчатыми являются также классы объектов, характеризуемых такими часто используемыми прилагательными, как «большой», «маленький», «существенный», «значительный», «важный», «серьезный», «простой», «точный», «приближенный» и т. п. Фактически большинство классов в реальном мире, в противоположность понятию класса или множества в математике, не имеют четких границ, которые отделяли бы входящие в класс объекты от объектов, не входящих в него. В связи с этим важно отметить, что в разговоре между людьми расплывчатые утверждения, такие, как: «Джон на *несколько* дюймов выше Джима», «*x значительно больше y*», «У корпорации *X прекрасные перспективы*», «На фондовой бирже наблюдается *резкий спад*», все же несут значительную информацию, несмотря на неточность выделенных курсивом слов. Более того, на наш взгляд одно из основных различий между человеческим интеллектом и «искусственным интеллектом» ЭВМ заключается в том, что в отличие от современных компьютеров люди обладают способностью оперировать расплывчатыми понятиями и выполнять расплывчатые инструкции.

В чем состоит различие между случайностью и расплывчатостью? По сути дела, случайность связана с неопределенностью, касающейся принадлежности или непринадлежности некоторого объекта к нерасплывчатому множеству. Понятие же расплывчатости относится к классам, в которых могут иметься различные градации степени принадлежности, промежуточные между полной принадлежностью и непринадлежностью объектов к данному классу.

Например, расплывчатое утверждение «Корпорация X придерживается прогрессивных взглядов» является неточным вследствие расплывчатости выражения «прогрессивные взгляды». В то же время утверждение «Вероятность того, что корпорация X работает в убыток, равна 0,8» содержит информацию о мере неопределенности относительно принадлежности корпорации X к нерасплывчатому классу корпораций, работающих в убыток. Аналогично утверждение «Степень принадлежности Джона к классу высоких мужчин равна 0,7» является «невероятностным» утверждением относительно принадлежности Джона к расплывчатому классу высоких мужчин, а утверждение «Вероятность того, что Джон женится в течение года, равна 0,7»—«вероятностное» утверждение, характеризующее неопределенность наступления нерасплывчатого события (женитьбы).

Это различие приводит к тому, что математические методы теории расплывчатых множеств совершенно не похожи на методы теории вероятностей. Они во многих отношениях проще вследствие того, что понятию вероятностной меры в теории вероятностей соответствует более простое понятие функции принадлежности в теории расплывчатых множеств. Кроме того, вместо обычных операций $a+b$ и ab, где a и b — действительные числа, используются более простые операции $\mathrm{Max}(a, b)$ и $\mathrm{Min}(a, b)$. По этой причине даже в тех случаях, когда расплывчатость в процессе принятия решений может быть представлена вероятностной моделью, обычно удобнее оперировать с ней методами теории расплывчатых множеств без привлечения аппарата теории вероятностей.

Процессы принятия решений, в которых тем или иным образом присутствует расплывчатость, могут изучаться с различных точек зрения [22, 9, 14]. В настоящей статье основное внимание уделяется введению трех фундаментальных понятий — расплывчатой цели, расплывчатого ограничения и расплывчатого решения, а также исследованию их применения к многошаговым процессам принятия решений, в которых цели или ограничения могут быть расплывчатыми, а управляемая система может быть либо детерминированной, либо стохастической, но не расплывчатой. Это, однако, не накладывает существенных ограничений на применимость концепций и методов, описанных в последующих разделах.

Вообще говоря, под расплывчатой целью подразумевается цель, которую можно описать как расплывчатое множество в соответствующем пространстве. Так, простым примером расплывчатой цели, связанной с вещественной переменной x, может служить цель: «x должно быть *существенно* больше 100». Со своей стороны, ограничение «x должно находиться *приблизительно* в интервале 20—25» является простейшим примером расплывчатого ограничения. Источниками расплывчатости в этих утверждениях являются слова, выделенные курсивом.

Менее тривиальным примером может служить детерминированная система, работающая в дискретном времени и описываемая уравнениями состояния

$$x_{n+1} = x_n + u_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где x_n и u_n обозначают соответственно переменную состояния и входную переменную в момент времени n и для простоты предполагаются вещественно-значными. Расплывчатое ограничение, наложенное на входную переменную, могло бы здесь иметь вид

$$-1 \underset{\sim}{\leqslant} u_n \underset{\sim}{\leqslant} 1,$$

где волнистая линия под символом означает «оператор размытия», который переводит нерасплывчатое множество в приблизительно равное ему расплывчатое множество. В этом случае выражение $u_n \underset{\sim}{\leqslant} 1$ читается следующим образом: «u_n должно быть *приблизительно* меньше или равно 1», и результатом действия оператора размытия будет перевод нерасплывчатого множества $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$ в расплывчатое множество $-1 \underset{\sim}{\leqslant} u_n \underset{\sim}{\leqslant} 1$. Способ, которым последнему множеству можно придать более точный смысл, будет рассмотрен в разд. 2.

Предположим, что расплывчатая цель состоит в том, чтобы сделать x_3 приблизительно равным 5, начиная с исходного состояния $x_0 = 1$. В этом случае задача заключается в нахождении такой последовательности входов u_0, u_1, u_2, которая будет как можно более близко реализовать установленную цель с учетом наложенных ограничений на входы u_0, u_1, u_2.

Ниже мы более подробно рассмотрим несколько характерных задач этого типа. Следует подчеркнуть, что в данной статье мы ставим перед собой ограниченную цель—привлечь внимание к задачам, включающим многошаговые процессы принятия решений в расплывчатых условиях, и предложить возможные пути их решения и отнюдь не претендуем на построение общей теории процессов принятия решений, в которых расплывчатость и случайность могут входить самыми разнообразными способами и в виде различных комбинаций. В частности, мы не будем заниматься вопросом о приложении к задаче принятия решений понятия расплывчатого алгоритма [22], которое может оказаться полезным в задачах, плохо поддающихся количественному анализу.

Для удобства читателя в следующем разделе дается краткий обзор основных свойств расплывчатых множеств.

2. КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ РАСПЛЫВЧАТЫХ МНОЖЕСТВ

Вообще говоря, расплывчатое множество есть класс объектов, в котором нет резкой границы между теми объектами, которые входят в этот класс, и теми, которые в него не входят. Более точное определение может быть сформулировано следующим образом.

Определение. Пусть $X=\{x\}$ — совокупность объектов (точек), обозначаемых через x. Тогда *расплывчатое множество* A в X есть совокупность упорядоченных пар

$$A=\{x,\ \mu_A(x)\},\quad x\in X, \tag{1}$$

где $\mu_A(x)$ представляет собой *степень принадлежности* x к A, а $\mu_A : X\to M$ — функция, отображающая X в пространство M, называемое *пространством принадлежности.* Когда M содержит только две точки 0 и 1, A является нерасплывчатым и его функция принадлежности совпадает с характеристической функцией нерасплывчатого множества.

В последующем мы будем предполагать, что M есть интервал [0, 1], причем 0 и 1 представляют соответственно низшую и высшую степени принадлежности. (В более общем случае M может быть частично упорядоченным множеством и, в частности, решеткой [15, 6].) Таким образом, наше основное предположение состоит в том, что расплывчатое множество A, несмотря на нечеткость его границ, может быть точно определено путем сопоставления каждому объекту x числа, лежащего между 0 и 1, которое представляет степень его принадлежности к A.

Пример. Пусть $X=\{0, 1, 2, \ldots\}$ — совокупность неотрицательных целых чисел. В этом пространстве расплывчатое множество A *«нескольких объектов»* может быть определено (субъективно), скажем, как набор упорядоченных пар

$$A=\{(3;\ 0{,}6),\ (4;\ 0{,}8),\ (5;\ 1{,}0),\ (6;\ 1{,}0),\ (7;\ 0{,}8),\ (8;\ 0{,}6)\}, \tag{2}$$

причем считается, что в (2) перечислены только те пары $(x,\ \mu_A(x))$, для которых $\mu_A(x)$ положительно.

Замечание. Следует заметить, что во многих практических ситуациях функция принадлежности μ_A должна быть оценена исходя из частичной информации о ней, скажем такой, как значения, принимаемые ею на конечном множестве опорных точек $x_1, \ldots, x_N$. Когда A определено таким образом неполностью — и, следовательно, лишь приблизительно, — мы будем говорить, что оно частично определено с помощью *«поясняющего примера»*. Задача оценки μ_A по известному множеству пар $((x_1, \mu_A(x_1)), \ldots, (x_N, \mu_A(x_N)))$ есть задача *абстрагирования* — задача, играющая центральную роль в распознавании образов [4, 18]. В настоящей статье мы не будем заниматься решением этой задачи, а всюду будем предполагать (если только не оговорено противное), что $\mu_A(x)$ задано для всех x в X.

Для рациональной записи удобно было бы иметь средство для указания того, что расплывчатое множество A получено из нерасплывчатого множества $\bar{A}$ за счет «размытия» границы множества $\bar{A}$. Для этой цели мы будем использовать волнистую черту под символом (или символами), определяющими $\tilde{A}$. Например, если $\tilde{A}$ есть множество действительных чисел между 2 и 5, т. е. $\tilde{A}=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$, то $A=\{x|2 \underset{\sim}{\leqslant} x \underset{\sim}{\leqslant} 5\}$ есть расплывчатое множество действительных чисел, которые заключены приблизительно между 2 и 5. Аналогично $A=\{x|x \underset{\sim}{=} 5\}$ или просто $\underset{\sim}{5}$ будет обозначать множество чисел, приблизительно равных 5. Символ $\sim\sim$ будет называться оператором размытия (fuzzifier). Перейдем теперь к определению нескольких основных понятий, которые понадобятся нам в следующих разделах.

Нормальность. Размытое множество A *нормально* тогда и только тогда, когда $\mathrm{Sup}_x \mu_A(x)=1$, т. е. супремум $\mu_A(x)$ на X равен единице. Расплывчатое множество *субнормально*, если оно не является нормальным. Непустое субнормальное расплывчатое множество может быть нормализовано делением каждого $\mu_A(x)$ на величину $\mathrm{Sup}_x \mu_A(x)$. (Расплывчатое множество *пусто* тогда и только тогда, когда $\mu_A(x)\equiv 0$.)

Носитель. *Носитель* расплывчатого множества A есть такое множество $S(A)$, что $x\in S(A) \Longleftrightarrow \mu_A(x)>0$. Если $\mu_A(x)=\mathrm{const}$ на $S(A)$, то A *нерасплывчато.* Отметим, что нерасплывчатое множество может быть субнормальным.

Равенство. Два расплывчатых множества *равны* (что записывается как $A=B$) тогда и только тогда, когда $\mu_A=\mu_B$, т. е. $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ для всех x в X. (В дальнейшем мы для упрощения записи будем опускать аргумент x, когда равенство или неравенство имеет место для всех значений x в X.)

Включение. Расплывчатое множество A *содержится* в расплывчатом множестве B, или является *подмножеством* B (записывается как $A\subset B$), тогда и только тогда, когда $\mu_A\leqslant\mu_B$. В этом смысле расплывчатое множество очень больших чисел есть подмножество расплывчатого множества больших чисел.

Дополнение. Говорят, что A' есть *дополнение* к A тогда и только тогда, когда $\mu_{A'}=1-\mu_A$. Например, расплывчатые множества $A=\{$Высокие люди$\}$ и $A'=\{$Невысокие люди$\}$ являются дополнениями друг к другу, если отрицание «НЕ» понимается как операция, заменяющая $\mu_A(x)$ на $1-\mu_A(x)$ для каждого x в X.

Пересечение. *Пересечение* A и B обозначается $A\cap B$ и определяется как наибольшее расплывчатое множество, содержащееся как в A, так и в B. Функция принадлежности для $A\cap B$ определяется следующим равенством:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mathrm{Min}(\mu_A(x),\ \mu_B(x)),\qquad x\in X, \tag{3}$$

где $\mathrm{Min}(a,b)=a$, если $a\leqslant b$, и $\mathrm{Min}(a,b)=b$, если $a>b$.

Если использовать вместо символа Min знак конъюнкции $\wedge$, можно переписать условие (3) в более простом виде:

$$\mu_{A\cap B}=\mu_A\wedge\mu_B. \tag{4}$$

Понятие пересечения имеет близкое отношение к понятию соединительного союза «И». Так, если A — класс высоких людей и B — класс полных людей, то $A\cap B$ — класс людей, которые одновременно высокие И полные.

Замечание. Следует заметить, что отождествление союза «И» с операцией (4) означает, что «И» понимается в «жестком» смысле, т. е. отсутствует возможность какой-либо «компенсации» имеющихся значений $\mu_A(x)$ какими-либо значениями μ_B и, наоборот, «компенсации» $\mu_B(x)$ за счет значений $\mu_A(x)$, поскольку мы имеем дело с ситуацией либо $\mu_A(x)>\mu_B(x)$, либо $\mu_B(x)>\mu_A(x)$. Например, если $\mu_A(x)=0{,}8$ и $\mu_B(x)=0{,}5$, то $\mu_{A\cap B}(x)=0{,}5$, поскольку $\mu_A(x)>0{,}5$. В некоторых случаях ближе к подразумеваемому смыслу союза «И» может оказаться более «мягкая» интерпретация союза «И», соответствующая образованию алгебраического произведения $\mu_A(x)\mu_B(x)$, а не пересечения $\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)$.

Как с математической, так и с практической точки зрения более предпочтительно отождествлять союз «И» с операцией пересечения $\wedge$, а не с операцией произведения, за исключением тех случаев, кода операция $\wedge$ совершенно не передает требуемого смысла «И». По этой причине в дальнейшем «И» будет пониматься в «жестком смысле», если только особо не оговорено противное.

Объединение. Понятие *объединения* множеств двойственно понятию пересечения. Объединение A и B обозначается $A \cup B$ и определяется как наименьшее расплывчатое множество, содержащее как A, так и B. Функция принадлежности для $A \cup B$ определяется соотношением

$$\mu_{A \cup B}(x) = \operatorname{Max}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \qquad x \in X, \tag{5}$$

где $\operatorname{Max}(a, b) = a$, если $a \geqslant b$, и $\operatorname{Max}(a, b) = b$, если $a < b$. Используя вместо символа Max знак дизъюнкции $\vee$, можно записать условие (5) в более простом виде:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A \vee \mu_B. \tag{6}$$

В отличие от пересечения, операция объединения имеет близкое отношение к соединительному союзу «ИЛИ». Так, если множества A и B имеют прежний смысл, то $A \cup B = \{$Высокие *или* Полные люди$\}$. Можно также различать «или» в «жестком» смысле, соответствующее операции (6), от «или» в «мягком» смысле, соответствующего *алгебраической сумме* A и B, обозначаемой как $A \oplus B$ и определяемой соотношением (9).

Несложно проверить следующее тождество, связывающее операции пересечения и объединения:

$$A \cup B = (A' \cap B')'. \tag{7}$$

Алгебраическое произведение. *Алгебраическое произведение* расплывчатых множеств A и B обозначается через AB и определяется равенством

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\, \mu_B(x), \qquad x \in X. \tag{8}$$

Алгебраическая сумма. *Алгебраическая сумма* A и B обозначается через $A \oplus B$ и определяется равенством

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\, \mu_B(x). \tag{9}$$

Легко проверить, что

$$A \oplus B = (A'B')'. \tag{10}$$

Замечание. Необходимо отметить, что операции $\vee$ и $\wedge$ ассоциативны и дистрибутивны по отношению друг к другу. В то же время операции $\cdot$ (произведения) и $\oplus$ (суммы) ассоциативны, но не дистрибутивны. Заметим также, что операция $\cdot$ (произведение) дистрибутивна по отношению к объединению $\vee$, но не наоборот. Вообще говоря, таким свойством обладает любая операция $*$, монотонно неубывающая по каждому из своих аргументов. В символической записи

если $b \geqslant b' \Rightarrow a * b \geqslant a * b'$ и $a \geqslant a' \Rightarrow a * b \geqslant a' * b$,

то

$$a * (b \vee c) = (a * b) \vee (a * c).$$

Большинство полученных ниже результатов остается справедливо при замене операции $\wedge$ на операцию $*$, которая является ассоциативной и дистрибутивной относительно операции $\vee$.

Выпуклость и вогнутость. Пусть A — расплывчатое множество в пространстве $X = R^n$. Тогда A является *выпуклым* расплывчатым множеством в том и только в том случае, если его функция принадлежности для каждой пары точек x, y из X удовлетворяет неравенству

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geqslant \operatorname{Min}(\mu_A(x), \mu_A(y)) \tag{11}$$

для всех $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Соответственно A является *вогнутым*, если его дополнение A' выпукло. Нетрудно показать, что если два расплывчатых множества A и B выпуклы, их пересечение $A \cap B$ также выпукло. С другой стороны, если A и B вогнуты, то вогнутым будет и их объединение $A \cup B$.

Отношение. *Расплывчатое отношение* R на прямом произведении пространств $X \times Y = \{(x, y), x \in X, y \in Y\}$ есть расплывчатое множество в $X \times Y$, характеризуемое функцией принадлежности μ_R, которая сопоставляет каждой упорядоченной паре (x, y) ее степень принадлежности $\mu_R(x, y)$ к R. В общем случае n-арное расплывчатое отношение на декартовом произведении $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ есть расплывчатое множество в X, описываемое зависящей от n переменных функцией принадлежности $\mu_R(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Пример. Пусть $X = Y = R'$, где R' — действительная прямая $(-\infty, \infty)$. Тогда условие $x \gg y$ задает расплывчатое отношение в R^2, функция принадлежности которого может иметь, например, такой вид:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant y, \\ \left(1 + (x - y)^{-2}\right)^{-1}, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Расплывчатые множества, порождаемые отображениями. Пусть $f: X \to Y$ — отображение из $X = \{x\}$ в $Y = \{y\}$, причем образ элемента x обозначается через $y = f(x)$, и пусть A — расплывчатое множество в пространстве X. Тогда отображение f порождает расплывчатое множество B в пространстве Y с функцией принадлежности, задаваемой соотношением

$$\mu_B(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), \tag{12}$$

причем супремум берется по всем точкам, составляющим прообраз $f^{-1}(y)$ в X точки y.

Условные расплывчатые множества. Расплывчатое множество $B(x)$ в пространстве $Y = \{y\}$ называется условным по x, если его функция принадлежности зависит от переменной x как от параметра. Эта зависимость выражается записью $\mu_B(y \mid x)$.

Предположим, что областью изменения параметра x является пространство X и при этом каждому x из X соответствует расплывчатое множество $B(x)$ в Y. Таким образом, мы имеем дело с отображением из X в пространство расплывчатых множеств в Y, характеризуемым функцией $\mu_B(y \mid x)$. Посредством этого отображения любое заданное расплывчатое множество A в X порождает расплывчатое множество B в Y, определяемое соотношением

$$\mu_B(y) = \operatorname*{Sup}_{x} \operatorname{Min}(\mu_A(x), \ \mu_B(y \mid x)), \tag{13}$$

где μ_A и μ_B — функции принадлежности множеств A и B соответственно. Используя операции $\wedge$ и $\vee$, можно переписать условие (13) в более простом виде:

$$\mu_B(y) = \vee_x (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y \mid x)). \tag{14}$$

Отметим, что это соотношение аналогично — однако не эквивалентно — выражению для маргинального распределения вероятностей совместного распределения двух случайных переменных, причем $\mu_B(y \mid x)$ играет роль, аналогичную условному распределению.

Разложимость. Пусть $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ и пусть C — расплывчатое множество в пространстве $Z = X \times Y$ с функцией принадлежности $\mu_C(x, y)$. Тогда C называется *разложимым по* X и Y в том и только в том случае, если C допускает представление $C = A \cap B$, или, что эквивалентно,

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y), \tag{15}$$

где A и B — расплывчатые множества с функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(y)$ соответственно. (Таким образом, A и B — цилиндрические расплывчатые множества в Z.) Это определение справедливо для расплывчатого множества, заданного в декартовом произведении любого конечного числа пространств.

Вероятность расплывчатых событий. Пусть P — вероятностная мера в R^n. *Расплывчатое событие* [23] A в R^n определяется как расплывчатое подмножество A пространства R^n, функция принадлежности которого, μ_A, измерима. *Вероятность* события A задается интегралом Лебега — Стилтьеса:

$$P(A) = \int_{R^n} \mu_A(x) \, dP. \tag{16}$$

Иначе говоря, $P(A) = E\mu_A$, где E — оператор математического ожидания. В случае нормального нерасплывчатого множества (16) сводится к общепринятому определению вероятности случайного события.

Этим завершается краткое введение в основные понятия теории расплывчатых множеств. В следующих разделах эти понятия будут использованы в качестве основы для важных определений цели, ограничения и решения в условиях «расплывчатости».

3. РАСПЛЫВЧАТЫЕ ЦЕЛИ, ОГРАНИЧЕНИЯ И РЕШЕНИЯ

В общепринятом подходе главными элементами процесса принятия решения являются: а) множество альтернатив, б) множество ограничений, которые необходимо учитывать при выборе между различными альтернативами, и в) функция предпочтительности, ставящая каждой альтернативе в соответствие выигрыш (или проигрыш), который будет получен в результате выбора этой альтернативы.

При рассмотрении этого процесса с более общих позиций принятия решений в расплывчатых условиях естественной представляется другая логическая схема, важнейшей чертой которой является симметрия по отношению к целям и ограничениям. Эта симметрия устраняет различия между целями и ограничениями и позволяет довольно просто сформировать на их основе решение.

Действительно, пусть $X \triangleq \{x\}$ — заданное множество альтернатив. Тогда *расплывчатая цель*, или просто *цель*, G будет отождествляться с фиксированным расплывчатым множеством G в X. Например, если $X = R^1$ (действительная прямая), а расплывчатая цель формулируется как «x должно быть значительно больше 10», то ее можно представить как расплывчатое множество в R^1 с функцией принадлежности, имеющей, скажем, такой вид:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & x < 10, \\ \left(1 + (x - 10)^{-2}\right)^{-1}, & x \geqslant 10. \end{cases} \tag{17}$$

Аналогично цели «x должно быть в окрестности 15» может быть поставлено в соответствие расплывчатое множество с функцией принадлежности

$$\mu_G(x) = (1 + (x - 15)^4)^{-1}. \tag{18}$$

Отметим, что оба эти множества выпуклы в смысле (11).

При обычном подходе функция предпочтительности, используемая в процессе принятия решения, служит для установления линейной упорядоченности на множестве альтернатив. Очевидно, что функция принадлежности $\mu_G(x)$ расплывчатой цели выполняет ту же задачу[1]) и, конечно, может быть получена из функции предпочтительности с помощью нормализации, сохраняющей установленную линейную упорядоченность. В сущности, такая нормализация приводит к общему знаменателю различные цели и ограничения и позволяет, таким образом, обращаться с ними одинаковым образом. Как мы увидим, это является важным аргументом в пользу того, чтобы в качестве одного из основных компонентов в логической схеме принятия решений в расплывчатых условиях пользоваться понятием цели, а не функции предпочтительности.

Подобным же образом *расплывчатое ограничение*, или просто *ограничение*, C в пространстве X определяется как некоторое расплывчатое множество в X. Например, в случае $X = R^1$ ограничение «x должно находиться приблизительно в диапазоне 2—10» может быть представлено расплывчатым множеством с функцией принадлежности, скажем, вида:

$$\mu_C(x) = (1 + a(x - 6)^m)^{-1},$$

где a — положительное число и m — четное положительное число, выбираемое так, чтобы передать смысл, в котором следует понимать «приближение» к интервалу [2, 10]. Если, в частности, положить $m = 4$ и $a = 5^{-4}$, то в точках $x = 2$ и $x = 10$ функция принадлежности равна $\mu_C(x) = 0{,}71$, в то время как при $x = 1$ и $x = 11$ $\mu_C(x) = 0{,}5$, а при $x = 0$ и $x = 12$ $\mu_C(x) = 0{,}32$.

[1]) Предполагается, конечно, что принимаемые функцией μ_G значения образуют линейно упорядоченное множество.

Важным аспектом приведенных выше определений является то, что и цель и ограничение рассматриваются как расплывчатые множества в пространстве альтернатив; это, как будет показано ниже, дает возможность не делать между ними различия при формировании решения. В противоположность этому при традиционном подходе к принятию решений множество ограничений считается нерасплывчатым множеством в пространстве альтернатив X, тогда как функция предпочтительности является функцией перехода из X в некоторое другое пространство. Но даже и в этом случае использование множителей Лагранжа и штрафных функций делает очевидным существование некоторого внутреннего сходства между функциями предпочтительности и ограничениями (см. [17], гл. 15). Это сходство — а на самом деле тождественность — становится совершенно естественным при нашей формулировке.

Действительно, предположим, например, что расплывчатая цель G и расплывчатое ограничение C заданы следующим образом:

G: x должно быть значительно больше 10 и

C: x должно быть в окрестности 15.

[$\mu_G(x)$ и $\mu_C(x)$ задаются соответственно формулами (17) и (18).] Заметим, что цель G и ограничение C соединены между собой союзом «И», причем, как было указано в разд. 2, «И» соответствует пересечению расплывчатых множеств. Это означает, что в рассматриваемом примере совокупное влияние расплывчатой цели G и расплывчатого ограничения C на выбор альтернатив может быть представлено пересечением $G \cap C$. Функция принадлежности для пересечения задается соотношением

$$\mu_{G \cap C}(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x)$$

или, в развернутой форме,

$$\mu_{G \cap C}(x) = \begin{cases} \operatorname{Min}\left(\left(1+(x-10)^{-2}\right)^{-1},\ \left(1+(x-15)^4\right)^{-1}\right) & \text{для } x \geqslant 10, \\ 0 & \text{для } x < 10. \end{cases}$$

Отметим, что в силу выпуклости расплывчатых множеств G и C множество $G \cap C$ также является выпуклым.

Обратимся теперь к понятию *решения*. Интуитивно ясно, что *решение* — это по существу выбор одной или нескольких из имеющихся альтернатив. Предыдущий пример наводит на мысль, что *расплывчатое решение*, или просто *решение*, следует определить как расплывчатое множество в пространстве альтернатив, получающееся в результате пересечения заданных целей и ограничений. Следующее определение уточняет эту мысль.

Определение. Пусть в пространстве альтернатив X заданы расплывчатая цель G и расплывчатое ограничение C. Тогда расплывчатое множество D, образуемое пересечением G и C, называется *решением*. В символической форме

$$D = G \cap C \tag{19}$$

и соответственно $\mu_D = \mu_G \wedge \mu_C$. Взаимосвязь между G и C показана на фиг. 1.

В более общем случае, если имеется n целей и m ограничений, то результирующее решение определяется пересечением всех заданных целей и ограничений, т. е.

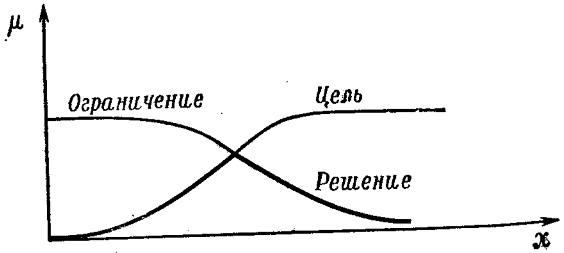
$$D = G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n \cap C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_m \tag{20}$$

и соответственно

$$\mu_D = \mu_{G_1} \wedge \mu_{G_2} \wedge \ldots \wedge \mu_{G_n} \wedge \mu_{C_1} \wedge \mu_{C_2} \wedge \ldots \wedge \mu_{C_m}. \tag{21}$$

Заметим, что в приведенном определении расплывчатого решения цели и ограничения входят в выражение для D совершенно одинаковым образом, что и доказывает утверждение о тождественности целей и ограничений в сформулированной нами логической схеме процессов принятия решений в расплывчатых условиях.

Замечание. Определение решения как пересечения целей и ограничений соответствует пониманию союза «И» в «жестком» смысле формулы (4). Если вопрос об интерпретации союза «И» остается открытым, мы будем говорить, что решение — понимаемое как расплывчатое множество — является *слиянием* целей и ограничений. Таким образом, «слияние» приобретает смысл «пересечения» или «алгебраического произведения» в зависимости от интерпретации союза «И» в смысле (4) или (8); кроме того, ему может быть приписано какое-либо другое конкретное значение, если возникает необходимость в специальной



Фиг. 1.

интерпретации союза «И» [см. замечание после формулы (10)]. Коротко обобщенное определение решения можно сформулировать следующим образом:

Решение = Слияние целей и ограничений.

В качестве иллюстрации к соотношению (21) рассмотрим простой пример, в котором $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, а G_1, G_2, C_1 и C_2 определяются табл. 1. Образуя конъюнкцию μ_{G_1}, μ_{G_2}, μ_{C_1} и μ_{C_2}, получим таблицу значений для $\mu_D(x)$ (табл. 2).

Решение в этом случае есть расплывчатое множество

$$D = \{(2;\ 0{,}1),\ (3;\ 0{,}4),\ (4;\ 0{,}7),\ (5;\ 0{,}8),\ (6;\ 0{,}6),\ (7;\ 0{,}4),\ (8;\ 0{,}2)\}.$$

Заметим, что ни одно x из X не принадлежит решению D полностью (т. е. со степенью принадлежности, равной 1). Это, конечно, является следствием того, что заданные цели и ограничения вступают в конфликт друг с другом, исключая тем самым возмож-

Таблица 1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_{G_1}	0	0,1	0,4	0,8	1,0	0,7	0,4	0,2	0	0
μ_{G_2}	0,1	0,6	1,0	0,9	0,8	0,6	0,5	0,3	0	0
μ_{C_1}	0,3	0,6	0,9	1,0	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1
μ_{C_2}	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2

Таблица 2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_D	0	0,1	0,4	0,7	0,8	0,6	0,4	0,2	0	0

ность существования альтернативы, которая бы полностью им всем удовлетворяла.

Понятие решения как расплывчатого множества в пространстве альтернатив может поначалу показаться несколько искусственным. На самом деле оно совершенно естественно, поскольку расплывчатое решение может рассматриваться как некоторая «инструкция», расплывчатость которой является следствием неточности формулировки поставленных целей и ограничений. Так, в приведенном примере G_1, G_2, C_1 и C_2 могли бы быть выражены следующими фразами: «x следует взять близким к 5», «x следует взять близким к 3», «x следует взять близким к 4», «x следует взять близким к 6». Тогда решение состоит в том, что «следует взять» «x, близкое к 5». При этом точное значение слова «близко» определяется в каждом случае значением соответствующей функции принадлежности.

Как следует выполнять расплывчатые инструкции типа «x следует взять близким к 5»? Хотя на вопросы такого типа не представляется возможным дать универсальный ответ [1]), во многих случаях все же разумно выбрать те альтернативы, которые имеют максимальную степень принадлежности к D. В нашем примере этому соответствует $x = 5$.

В общем случае примем, что D — расплывчатое решение с функцией принадлежности μ_D. Пусть K — множество тех точек в X, в которых функция μ_D достигает максимума (если он существует). Тогда нерасплывчатое, но, вообще говоря, субнормальное подмножество D^M из D, определяемое условиями

$$\mu_{D^M}(x) = \begin{cases} \operatorname{Max} \mu_D(x) & \text{для } x \in K, \\ 0 \text{ для остальных } x, \end{cases}$$

будет называться *оптимальным решением*, а каждое x из носителя множества D^M — *максимиризующим решением*. Другими словами, максимизирующее решение — это любая альтернатива в пространстве X, которая максимизирует функцию $\mu_D(x)$ (скажем, как $x = 5$ в предыдущем примере). Отметим, что в R^n достаточным условием единственности максимизирующего решения является сильная выпуклость расплывчатого множества D, т. е. выпуклость D и наличие у него унимодальной функции принадлежности.

В определении расплывчатого решения D как пересечения или, в более общем смысле, как слияния целей и ограничений подразумевается, что все входящие в D цели и ограничения имеют в некотором смысле одинаковую важность. Однако встречаются ситуации, в которых некоторые цели и, возможно, некоторые ограничения являются более важными, чем остальные. В таких случаях решение D может быть выражено выпуклой комбинацией целей и ограничений с весовыми коэффициентами, характеризующими относительную важность составляющих элементов. Таким образом, $\mu_D(x)$ может быть записано в виде

$$\mu_D(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x) \mu_{C_j}(x), \qquad (22)$$

[1]) По поводу использования «расплывчатых инструкций» см. [22].

где α_i и β_j — функции принадлежности, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x) \equiv 1.$$

С учетом этого ограничения функции $\alpha_i(x)$ и $\beta_j(x)$ могут быть подобраны так, чтобы передавать относительную важность целей $G_1, G_2, \ldots, G_n$ и ограничений $C_1, C_2, \ldots, C_m$. В частности, если $m = n = 1$, нетрудно проверить, что из выражения (22) можно получить любое расплывчатое множество, содержащееся в $G \cup C$ и включающее $G \cap C$. Отметим, что формула (22) напоминает известный способ сведе́ния векторного критерия к скалярному с помощью образования линейной комбинации компонент векторной функции цели.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением ситуаций, в которых цели и ограничения являются расплывчатыми множествами в пространстве альтернатив X. Практический интерес представляет более общий случай, когда цели и ограничения — расплывчатые множества в разных пространствах. Пусть f — отображение из $X = \{x\}$ в $Y = \{y\}$, причем переменной x обозначено входное воздействие (причина), а переменной y — соответствующий выход (следствие).

Предположим, что цели заданы как расплывчатые множества $G_1, G_2, \ldots, G_n$ в Y, в то время как ограничения — расплывчатые множества $C_1, C_2, \ldots, C_m$ в пространстве X. Имея расплывчатое множество G_i в Y, можно найти расплывчатое множество $\bar{G}_i$ в X, которое индуцирует G_i в Y. Функция принадлежности $\bar{G}_i$ задается равенством

$$\mu_{\bar{G}_i}(x) = \mu_{G_i}(f(x)), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (23)$$

После этого решение D может быть выражено пересечением множеств $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \ldots, \bar{G}_n$ и $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Используя соотношение (23), можно записать $\mu_D(x)$ в развернутом виде:

$$\mu_D(x) = \mu_{G_1}(f(x)) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \mu_{G_n}(f(x)) \wedge \mu_{C_1}(x) \wedge \ldots \wedge \mu_{C_m}(x), \qquad (24)$$

где $f: X \to Y$. Таким образом, случай, когда цели и ограничения задаются как расплывчатые множества в разных пространствах, может быть сведен к случаю, когда они задаются в одном и том же пространстве. Соотношение (24) является весьма полезным при анализе многошаговых процессов принятия решений.

4. МНОГОШАГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В качестве приложения введенных в предыдущих разделах понятий мы рассмотрим несколько основных типов задач, связанных с многошаговым принятием решений в расплывчатых условиях. Необходимо, однако, подчеркнуть, что основная задача последующего изложения — иллюстрация понятий расплывчатых целей, ограничений и решений на ряде примеров, а не развитие общей теории многошаговых процессов принятия решений, в которые тем или иным образом входит расплывчатость.

Для простоты будем предполагать, что управляемая система A является инвариантной по времени детерминированной системой с конечным числом состояний. Именно, каждое состояние x_t, в котором система A находится в момент времени t, $t = 0, 1, 2, \ldots$, принадлежит заданному конечному множеству возможных состояний $X = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$; при этом имеющий место в момент t входной сигнал $u(t)$ является элементом множества $U = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Эволюция системы во времени описывается уравнением состояния

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

в котором f — заданная функция, отображающая $X \times U$ в X. Таким образом, $f(x_t, u_t)$ представляет собой *последующее состояние* для x_t при входном сигнале u_t. Если f является случайной функцией, то A — *стохастическая* система, состояние которой в момент $t+1$ характеризуется распределением вероятностей $P(x_{t+1} | x_t, u_t)$ на X, условным по x_t и u_t. Аналогично если f — расплывчатая функция, то A является *расплывчатой* системой [21], состояние которой в момент $t+1$ есть условное по x_t и u_t расплывчатое множество, характеризуемое функцией принадлежности вида $\mu(x_{t+1} | x_t, u_t)$[1]. Так как подобные системы в последующих разделах рассматриваться не будут, то функция f будет считаться нерасплывчатой, если только особо не оговорено противное.

Предполагается, что в каждый момент времени t на входную переменную наложено расплывчатое ограничение C^t, являющееся расплывчатым множеством в U с функцией принадлежности $\mu_t(u_t)$. Кроме того, считается, что цель — расплывчатое множество G^N в X, определяемое функцией принадлежности $\mu_{G^N}(x_N)$, где N — время окончания процесса. Эти предположения являются общими для большинства рассматриваемых ниже задач.

ЗАДАЧА 1. Предполагается, что система описывается уравнением (25), в котором f — заданная неслучайная функция. Считается также, что заданы начальное состояние x_0 и фиксированное время окончания процесса N. Задача заключается в нахождении максимизирующего решения.

Применяя уравнение (20), можно записать решение, рассматриваемое как разложимое расплывчатое множество в $U \times U \times \ldots \times U$, в виде

$$R = C^0 \cap C^1 \cap \ldots \cap C^{N-1} \cap \bar{G}^N, \tag{26}$$

где $\bar{G}_N$ — расплывчатое множество в $U \times U \times \ldots \times U$, индуцирующее G^N в X. Для функций принадлежности имеем

$$\mu_D(u_0, \ldots, u_{N-1}) = \\ = \mu_0(u_0) \wedge \ldots \wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{G^N}(x_N), \tag{27}$$

где x_N может быть выражено как функция от $u_1, \ldots, u_{N-1}$ и x_0 путем последовательного применения соотношения (25).

[1] Следует отметить, что, говоря о *расплывчатых условиях*, мы имеем в виду, что расплывчатыми являются цели и (или) ограничения; однако это не означает, что управляемая система обязательно является расплывчатой.

Задача сводится к нахождению последовательности входных воздействий $u_0, \ldots, u_{N-1}$, максимизирующей μ_D в формуле (27). Как обычно в многошаговых процессах, целесообразно представить решение в виде

$$u_t = \pi_t(x_t) \qquad t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

где π_t — принятая «стратегия», т. е. принятое правило выбора входного воздействия u_t в зависимости от реализовавшегося x_t. После этого для получения как π_t, так и максимизирующего (оптимального) решения $u_0^M, \ldots, u_{N-1}^M$ можно применить метод динамического программирования. Действительно, используя (26) и (25), имеем

$$\mu_D(u_0^M, \ldots, u_{N-1}^M) = \operatorname*{Max}_{u_0, \ldots, u_{N-2}} \operatorname*{Max}_{u_{N-1}} (\mu_0(u_0) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{G^N}(f(x_{N-1}, u_{N-1}))). \qquad (28)$$

Если γ — константа, а g — произвольная функция аргумента u_{N-1}, то справедливо тождество

$$\operatorname*{Max}_{u_{N-1}} (\gamma \wedge g(u_{N-1})) = \gamma \wedge \operatorname*{Max}_{u_{N-1}} g(u_{N-1}).$$

Следовательно, (28) можно переписать в виде

$$\mu_D(u_0^M, \ldots, u_{N-1}^M) = \operatorname*{Max}_{u_0, \ldots, u_{N-2}} (\mu_0(u_0) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \mu_{N-2}(u_{N-2}) \wedge \mu_{G^{N-1}}(x_{N-1})), \qquad (29)$$

где

$$\mu_{G^{N-1}}(x_{N-1}) =$$
$$= \operatorname*{Max}_{u_{N-1}} (\mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{G^N}(f(x_{N-1}, u_{N-1}))) \qquad (30)$$

может рассматриваться как функция принадлежности расплывчатой цели в момент $t = N-1$, индуцированной заданной целью G^N в момент $t = N$.

Повторяя процесс обратных итераций, получаем систему рекуррентных уравнений

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}) =$$
$$= \operatorname*{Max}_{u_{N-\nu}} (\mu_{N-\nu}(u_{N-\nu}) \wedge \mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1})), \qquad (31)$$
$$x_{N-\nu+1} = f(x_{N-\nu}, u_{N-\nu}), \qquad \nu = 1, \ldots, N,$$

которая дает решение задачи. Таким образом, максимизирующее решение получается последовательной максимизацией величин $u_{N-\nu}$ в (31), причем $u_{N-\nu}^M$ определяется как функция от $x_{N-\nu}$, $\nu = 1, \ldots, N$.

Пример. В качестве простой иллюстрации рассмотрим систему с тремя состояниями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и двумя входными сигналами α_1 и α_2. Пусть для простоты $N = 2$ и расплывчатая цель в момент $t = 2$ определяется функцией принадлежности μ_{G^2}, принимающей значения

$$\mu_{G^2}(\sigma_1) = 0{,}3; \quad \mu_{G^2}(\sigma_2) = 1; \quad \mu_{G^2}(\sigma_3) = 0{,}8.$$

Пусть, далее, расплывчатые ограничения в моменты $t = 0$ и $t = 1$ задаются функциями

$$\mu_0(\alpha_1) = 0{,}7; \quad \mu_0(\alpha_2) = 1; \quad \mu_1(\alpha_1) = 1; \quad \mu_1(\alpha_2) = 0{,}6.$$

Предположим, что таблица изменения состояний, задающая функцию f в формуле (25), соответствует табл. 3. Используя (30), находим функцию принадлежности расплывчатой цели в момент $t = 1$:

$$\mu_{G^1}(\sigma_1) = 0{,}6; \quad \mu_{G^1}(\sigma_2) = 0{,}8; \quad \mu_{G^1}(\sigma_3) = 0{,}6,$$

Таблица 3

u_t \ x_t	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	σ_1	σ_3	σ_1
α_2	σ_2	σ_1	σ_3

и соответствующее максимизирующее решение имеет вид

$$\pi_1(\sigma_1)=\alpha_2;\quad \pi_1(\sigma_2)=\alpha_1;\quad \pi_1(\sigma_3)=\alpha_2.$$

Аналогично для $t=0$ имеем

$$\mu_{G^0}(\sigma_1)=0{,}8;\quad \mu_{G^0}(\sigma_2)=0{,}6;\quad \mu_{G^0}(\sigma_3)=0{,}6$$

и

$$\pi_0(\sigma_1)=\alpha_2;\quad \pi_0(\sigma_2)=\alpha_1 \text{ или } \alpha_2;\quad \pi_0(\sigma_3)=\alpha_1 \text{ или } \alpha_2.$$

Итак, если начальное состояние (в момент времени $t=0$) есть σ_1, то максимизирующим решением будет α_2, α_1, причем соответствующее значение функции принадлежности μ_{G^2} равно 0,8.

Обратимся теперь к более общему случаю многошагового процесса принятия решений, в котором управляемая система является стохастической, а цель и ограничения — расплывчатыми.

5. СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В РАСПЛЫВЧАТЫХ УСЛОВИЯХ

Как и в предыдущей задаче, предположим, что время окончания процесса N зафиксировано и задано начальное состояние x_0. Предполагается также, что система характеризуется условным распределением вероятностей $p(x_{t+1}|x_t,\ u_t)$. Задача заключается в максимизации вероятности достижения расплывчатой цели в момент N при условии, что должны быть выполнены расплывчатые ограничения $C^0, \ldots, C^{N-1}$.

Если расплывчатая цель G^N рассматривается как расплывчатое событие [23] в пространстве X, то условная вероятность этого события при фиксированных x_{N-1} и u_{N-1} выражается формулой

$$\operatorname{Prob}(G_N|x_{N-1},\ u_{N-1})=\mathrm{E}\mu_{G^N}(x_N)=$$
$$=\sum_{x_N} p(x_N|x_{N-1},\ u_{N-1})\,\mu_{G^N}(x_N), \qquad (32)$$

где E — оператор условного математического ожидания, а μ_{G^N} — функция принадлежности расплывчатой цели.

В формуле (32) условная вероятность $\operatorname{Prob} G_N(x_{N-1},\ u_{N-1})$ [или $\mathrm{E}\mu_{G^N}(x_N)$] выражена в виде функции переменных x_{N-1} и u_{N-1}, точно так же как в предыдущей задаче $\mu_{G^N}(x_N)$ было представлено в виде функции от x_{N-1} и u_{N-1} посредством соотношения (25). Это означает, что проделанные в детерминированном случае выкладки для $\mu_{G^N}(x_N)$ справедливы и для $\mathrm{E}\mu_{G^N}(x_N)$, т. е. рассматриваемая задача сводится к предыдущей.

Рекуррентные соотношения (31) заменяются следующими:

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu})=$$
$$=\operatorname*{Max}_{u_{N-\nu}}\left(\mu_{N-\nu}(u_{N-\nu}),\ \mathrm{E}\mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1})\right),$$
$$\mathrm{E}\mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1})= \qquad (33)$$
$$=\sum_{x_{N-\nu+1}} p(x_{N-\nu+1}|x_{N-\nu},\ u_{N-\nu})\,\mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1}),$$

где $\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu})$ по-прежнему обозначает функцию принадлежности расплывчатой цели в момент $t=N-\nu$, индуцированной расплывчатой целью в момент $t=N-\nu+1$, $\nu=1, \ldots, N$. Эти уравнения позволяют получить искомое решение задачи, что иллюстрируется приведенным ниже примером.

Пример. Как и в предыдущем примере, считается, что система имеет три состояния σ_1, σ_2, σ_3 и два входных сигнала α_1, α_2. Время N принимается равным 2, а распределение вероятностей $p(x_{t+1}|x_t,\ u_t)$ задается табл. 4 и 5 для $u_t=\alpha_1$ и $u_t=\alpha_2$. В таблицах

Таблица 4

$u_t=\alpha_1$

x_t \ x_{t+1}	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	0,8	0,1	0,1
σ_2	0	0,1	0,9
σ_3	0,8	0,1	0,1

Таблица 5

$u_t = \alpha_2$

x_t \ x_{t+1}	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	0,1	0,9	0
σ_2	0,8	0,1	0,1
σ_3	0,1	0	0,9

представлены величины $p(x_{t+1}|x_t, u_t)$. Например, число 0,1 в положении (σ_1, σ_2) в табл. 4 означает, что если в момент времени t система находится в состоянии σ_1 и на вход поступает сигнал α_1, то в момент $t+1$ система с вероятностью 0,1 будет находиться в состоянии σ_2.

Пусть по-прежнему расплывчатая цель в момент $t=2$ определяется функцией

$$\mu_{G^2}(\sigma_1)=0{,}3;\quad \mu_{G^2}(\sigma_2)=1;\quad \mu_{G^2}(\sigma_3)=0{,}8$$

и ограничения остаются теми же:

$$\mu_0(\alpha_1)=0{,}7;\quad \mu_0(\alpha_2)=1;\quad \mu_1(\alpha_1)=1;\quad \mu_1(\alpha_2)=0{,}6.$$

Применяя (33), получим $E\mu_{G^2}(x_2)$ как функцию от x_1 и u_1, см. табл. 6. Далее, используя (33) при $\nu=1$ и вычисляя $\mu_{G^1}(x_1)$, находим

$$\mu_{G^1}(\sigma_1)=0{,}6;\quad \mu_{G^1}(\sigma_2)=0{,}82;\quad \mu_{G^1}(\sigma_3)=0{,}6.$$

Соответствующая оптимальная стратегия имеет вид

$$\pi_1(\sigma_1)=\alpha_2;\quad \pi_1(\sigma_2)=\alpha_1;\quad \pi_1(\sigma_3)=\alpha_2. \qquad (33а)$$

Результаты последней итерации для $\nu=2$ приведены в табл. 7. Имеем также

$$\mu_{G^0}(\sigma_1)=0{,}8,\quad \mu_{G^0}(\sigma_2)=0{,}62,\quad \mu_{G^0}(\sigma_3)=0{,}62, \qquad (33б)$$

$$\pi_0(\sigma_1)=\alpha_2,\quad \pi_0(\sigma_2)=\alpha_1 \text{ или } \alpha_2,\quad \pi_0(\sigma_3)=\alpha_1. \qquad (33в)$$

Значения функции μ_{G^0} в (33б) представляют собой вероятности достижения поставленной цели в момент

$t=2$ в предположении, что процесс начинается с состояний σ_1, σ_2 и σ_3 соответственно и что входные сигналы выбираются в соответствии с оптимальной

Таблица 6

u_1 \ x_1	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	0,42	0,82	0,42
α_2	0,93	0,42	0,75

Таблица 7

μ_0 \ x_1	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	0,62	0,62	0,62
α_2	0,80	0,62	0,60

стратегией π_t, которая задается соотношениями (33а) и (33в), т. е.

$$u_t=\pi_t(x_t),\quad (t=0,1;\quad x_t=\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3;\quad u_t=\alpha_1,\ \alpha_2).$$

Замечание. Необходимо отметить, что в тех случаях, когда расплывчатая цель в момент N задана таким образом, что вероятность ее достижения мала для всех значений x_{N-1} и u_{N-1}, может возникнуть необходимость в нормализации расплывчатой цели, индуцированной в момент $N-1$, прежде чем отыскивать ее пересечение с C_{N-1}; в противном случае ограничения могут перестать влиять на решение. Вообще говоря, подобная нормализация может потребоваться на каждой стадии процесса принятия решений. Хотя в данной статье мы не будем больше касаться этого аспекта задачи, следует подчеркнуть, что вопрос этот вовсе не является тривиальным и требует более тщательного анализа.

6. СИСТЕМЫ С НЕЯВНО ОПРЕДЕЛЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОКОНЧАНИЯ ПРОЦЕССА

В рассмотренных задачах предполагалось, что время окончания процесса управления N фиксировано заранее. В этом разделе мы обратимся к более общему случаю, в котором время окончания определено неявным образом, посредством дополнительного условия вида $x_N \in T$, где T — заданное нерасплывчатое подмножество пространства X, называемое *финальным множеством*[1]. Таким образом, процесс прекращается, как только управляемая система в первый раз перейдет в состояние, принадлежащее заданному подмножеству пространства состояний. В этом случае цель определяется как расплывчатое множество G в T, а не во всем пространстве X.

Итак, пусть управляемая система A является детерминированной системой, характеризуемой уравнением состояния вида

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

где x_t принадлежит множеству $X = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_l, \sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_n\}$, а $T = \{\sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_n\}$ — финальное множество. Как и прежде, f считается заданной функцией, осуществляющей отображение из $X \times U$ в X, где $U = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ — область изменения u_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Отметим, что если σ_i является *поглощающим* состоянием, т. е. состоянием из множества T, то можно записать $f(\sigma_i, \alpha_j) = \sigma_i$ для всех α_j в U.

Предположим, что расплывчатая цель есть подмножество множества T, определяемое функцией принадлежности $\mu_G(x_N)$, где N — тот момент времени, для которого имеет место $x_t \in T$; тогда при $t < N$ имеем $x_t \notin T$. Что касается ограничений, накладываемых на входную переменную, то для простоты будем считать, что они не зависят от времени, но могут зависеть от состояния. Таким образом, если система A в момент t находится в состоянии σ_i, то расплывчатое ограничение на u_t задается расплывчатым множеством $C(\sigma_i)$ [или $C(x_t)$] в U, условным по σ_i. Функция принадлежности этого множества будет обозначатся как $\mu_C(u_t | x_t)$.

Пусть x_0 — начальное состояние $x_0 \in T'$, где $T' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_l\}$ — дополнение T до X. Каждому такому начальному состоянию будет соответствовать решение $D(x_0)$, определяемое формулой

$$D(x_0) = C(x_0) \cap C(x_1) \cap \ldots \cap C(x_{N-1}) \cap G, \tag{35}$$

в которой последовательные состояния $x_1, \ldots, x_N$ могут быть выражены в виде функций от x_0 и $u_0, \ldots, u_{N-1}$ в результате последовательного применения уравнения состояния (34). Итак,

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0, u_0), \\ x_2 &= f(x_1, u_1) = f(f(x_0, u_0), u_1), \\ x_3 &= f(f(f(x_0, u_0), u_1), u_2). \end{aligned} \tag{36}$$

Отметим, что так же, как и в уравнении (26), множества C в (35) следует рассматривать как расплывчатые множества в декартовом произведении пространств $U \times U \times \ldots \times U \times T$. Кроме того, нужно отметить, что соотношением (35) $D(x_0)$ определяется однозначно для каждого x_0, причем считается, что $D(x_0)$ пусто, если не существует конечной последовательности входных сигналов $u_0, \ldots, u_{N-1}$, переводящей систему из начального состояния x_0 в состояние из T. В этом случае мы будем говорить, что T *недостижимо* из начального состояния.

Из (35) несложно получить более простое неявное уравнение, которому удовлетворяет $D(x_0)$. Действительно, вследствие инвариантности по времени системы A и независимости от времени цели и ограничений из (35) вытекает

$$D(x_t) = C(x_t) \cap C(x_{t+1}) \cap \ldots \cap C(x_{t+N-1}) \cap G \tag{37}$$

для $t = 0, 1, 2, \ldots$. В частности,

$$D(x_{t+1}) = C(x_{t+1}) \cap \ldots \cap C(x_{t+N-1}) \cap G, \tag{38}$$

[1] Эта задача в такой традиционной постановке (когда «расплывчатость» полностью отсутствует) играет важную роль в теории оптимального управления и марковских процессах принятия решений (см. литературу в конце статьи).

и, следовательно, (37) можно записать как

$$D(x_t) = C(x_t) \cap D(x_{t+1}), \tag{39}$$

или, используя (34), в виде

$$D(x_t) = C(x_t) \cap D(f(x_t, u_t)), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

что и является искомым неявным уравнением. Для функций принадлежности рассматриваемых множеств уравнение (40) приобретает вид (для $t = 0$)

$$\mu_D(u_0, \ldots, u_{N-1} | x_0) = \\ = \mu_C(u_0 | x_0) \wedge \mu_D(u_1, \ldots, u_{N-1} | f(x_0, u_0)), \tag{41}$$

где время окончания N также является функцией от $x_0, u_0, u_1, u_2, \ldots$ и определяется с помощью уравнения состояния и дополнительного условия $x_N \in T$ при $x_0 \notin T, \ldots, x_{N-1} \notin T$.

Предположим теперь, что последовательные входные сигналы $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$ выбираются на основе принятой стационарной (не зависящей от времени) стратегии π, π: $T' \to U$, т. е. правила, сопоставляющего с каждым состоянием x_t в T' входной сигнал u_t, который нужно подать в систему A, когда она находится в состоянии x_t. Таким образом,

$$u_t = \pi(x_t), \quad t = 0, \ldots, N-1, \quad x_t \in T'. \tag{42}$$

Поскольку $u_0, \ldots, u_{N-1}$ определяются по x_0 и π с помощью (42) и уравнения состояния (34), то функцию принадлежности для $D(x_0)$ можно записать как $\mu_D(x_0|\pi)$. Аналогично $\mu_C(u_0|x_0)$ можно представить как $\mu_C(\pi(x_0)|x_0)$, а $\mu_D(u_1, \ldots, u_{N-1}|f(x_0, u_0))$ — как $\mu_D(f(x_0, \pi(x_0))|\pi)$. В этих обозначениях (41) приобретает более компактный вид:

$$\mu_D(x_0|\pi) = \mu_C(\pi(x_0)|x_0) \wedge \\ \wedge \mu_D(f(x_0, \pi(x_0))|\pi), \quad x_0 \in T', \tag{43}$$

что по существу является системой l уравнений (по одному для каждого значения x_0) относительно μ_D. Эта система уравнений определяет μ_D как функцию от x_0 для каждой стратегии π, причем считается, что $\mu_D = 0$, если при стратегии π процесс не заканчивается, т. е. не существует конечного числа N, такого, что $x_N \in T$. Кроме того, считается, что $\mu_D = \mu_G$ для состояний из T.

Легко показать, что (43) имеет единственное решение. Действительно, если разложить множество состояний $T' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_l\}$ на непересекающиеся подмножества $T'_1, \ldots, T'_k$, где T'_λ — совокупность состояний, из которых T достижимо за λ шагов, то, как легко видеть, уравнения (43), соответствующие тем x_0, которые принадлежат T'_1, дают однозначно значения μ_D. С учетом этого обстоятельства уравнения в системе (43), соответствующие состояниям $x_0 \in T'_2$, однозначно определяют величины μ_D для x_0 из T'_2. Действуя аналогичным образом, можно однозначно определить все функции μ_D, последовательно решая подсистемы уравнений из (43) для блоков переменных из $T'_1, \ldots, T'_k$.

Для решения задачи удобно представить стратегию π в виде *вектора стратегии*

$$\pi = (\pi(\sigma_1), \ldots, \pi(\sigma_l)), \tag{44}$$

i-й компонентой которого, $i = 1, \ldots, l$, является входной сигнал, который должен быть подан, если A находится в состоянии σ_i. Отметим, что областью изменения $\pi(\sigma_i)$ является множество $U = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ и, следовательно, существует m^l различных стратегий.

Имея в виду систему уравнений (43), введем n-мерный вектор

$$\mu_D(\pi) = (\mu_D(\sigma_1|\pi), \ldots, \mu_D(\sigma_n|\pi)), \tag{45}$$

называемый *вектором достижения цели*, компонентами которого являются значения функции принадлежности расплывчатого множества D в точках $\sigma_i \ldots \ldots, \sigma_n$ (при стратегии π). Естественно установить предварительную упорядоченность на множестве стратегий посредством условия

$$\pi' \geqslant \pi'' \Leftrightarrow \mu_D(\pi') \geqslant \mu_D(\pi''), \tag{46}$$

которое означает, что стратегия π' не хуже стратегии π'' в том и только в том случае, если $\mu_D(\sigma_i|\pi') \geqslant$

$\geqslant \mu_D(\sigma_i|\pi'')$ для $i=1, \ldots, n$. Стратегия π будет называться *оптимальной* тогда и только тогда, когда она не хуже любой другой стратегии из рассматриваемого множества стратегий.

Существует ли оптимальная стратегия для рассматриваемой задачи? Ответ на этот вопрос является положительным. Это утверждение может быть строго доказано [12], однако для наших целей достаточно считать его следствием принципа «чередования» [13] — весьма общего принципа, справедливость которого в каждом конкретном случае может быть непосредственно доказана.

Действительно, пусть π' и π'' — два произвольных вектора стратегии, причем $\mu_D(\pi')$ и $\mu_D(\pi'')$ являются соответствующими векторами достижения цели. Построим с помощью π' и π'' вектор стратегии π согласно правилу

$$\pi_i = \begin{cases} \pi_i', & \text{если} \quad \mu_D(\sigma_i|\pi') \geqslant \mu_D(\sigma_i|\pi''), \\ \pi_i'', & \text{если} \quad \mu_D(\sigma_i|\pi') < \mu_D(\sigma_i|\pi'') \end{cases} \tag{47}$$

для каждой компоненты π_i вектора π, $i=1, \ldots, l$. Тогда в соответствии с принципом чередования $\pi \geqslant \pi'$ и $\pi \geqslant \pi''$, т. е. стратегия π не хуже как π', так и π''. Из этого факта и из конечности множества стратегий следует существование оптимальной стратегии.

Пользуясь соотношением (43), нетрудно получить функциональное уравнение, которому удовлетворяет вектор достижения цели, соответствующий оптимальной стратегии. Пусть

$$\mu_D^M = \operatorname*{Max}_{\pi} \mu_D(\pi) \tag{48}$$

и пусть $P(\pi)$ — матрица размером $n \times n$, состоящая из нулей и единиц, (i, j)-й элемент которой равен единице в том и только том случае, если $\sigma_j = f(\sigma_i, \pi(\sigma_i))$, т. е. состояние σ_j непосредственно следует за σ_i, когда принята стратегия π.

Пусть, далее, через $\mu_C(\pi)$ обозначен вектор, i-й компонентой которого является $\mu_C(\pi(\sigma_i)|\sigma_i)$. Взяв максимум от обеих частей равенства (43), получим

$$\mu_D^M = \operatorname*{Max}_{\pi} (\mu_C(\pi) \wedge P(\pi)\mu_D^M). \tag{49}$$

Данное выражение и является искомым функциональным уравнением относительно μ_D^M. Уравнение (49), отличаясь в деталях, имеет тот же общий вид, что и функциональные уравнения, возникающие в теории марковских процессов принятия решений [17]. Однако его решение может быть получено значительно проще вследствие дистрибутивности операций Max и $\wedge$.

Действительно, пусть $\pi^1, \ldots, \pi^r$, где $r = m^l$, обозначают m^l различных векторов стратегии. Тогда, заменяя в (49) Max на $\vee$, получаем

$$\mu_D^M = (\mu_C(\pi^1) \wedge P(\pi^1)\mu_D^M) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (\mu(\pi^r) \wedge P(\pi^r)\mu_D^M). \tag{50}$$

Воспользовавшись дистрибутивностью $\vee$ и $\wedge$ и приводя подобные члены, можно представить уравнение (50) в гораздо более простой форме — в виде системы уравнений относительно компонент μ_D^M:

$$\mu_D^M(\sigma_i) = \vee_j (\mu_C(\alpha_j|\sigma_i) \wedge \mu_D^M(f(\sigma_i, \alpha_j))), \tag{51}$$
$$i=1, \ldots, n, \quad j=1, \ldots, m,$$

где $\alpha_j = \pi(\sigma_i)$ — входной сигнал при стратегии π в состоянии σ_i; $\mu_D^M(\sigma_i)$ — i-я компонента оптимального вектора достижения цели; $f(\sigma_i, \alpha_j)$ — последующее состояние для σ_i при входном сигнале α_j[1]), причем $f(\sigma_i\ \alpha_j) = \sigma_i$ для $i = l+1, \ldots, n$ (т. е. для σ_i из финального множества T); $\mu_C(\alpha_j|\sigma_i)$ — значение функции принадлежности ограничения C в состоянии σ_i для входного сигнала α_j, причем $\mu_C(\alpha_j|\sigma_i) = 1$ для $i = l+1, \ldots, n$; и, наконец, $\mu_D^M(\sigma_i) = \mu_G(\sigma_i)$ — значение функции принадлежности заданной цели G в состоянии σ_i, $i = l+1, \ldots, n$. Таким образом, неизвестными

[1]) Заметим, что последующие состояния, фигурирующие в (49), определяются с помощью матрицы $P(\pi)$.

в уравнении (51) являются $\mu_D^M(\sigma_i)$, $i=1, \dots, l$, в то время как $\mu_D^M(\sigma_i)$, $i=l+1, \dots, n$ и $\mu_C(\alpha_j|\sigma_i)$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$ — заданные константы.

Чтобы облегчить поиск решений уравнений (51), полезно упростить обозначения, введя новые неизвестные $\omega_i=\mu_D^M(\sigma_i)$, $i=1, \dots, l$. Заменим также символы $\wedge$ и $\vee$ знаками произведения и суммы. Тогда в матричной записи уравнение (51) примет следующий весьма компактный вид:

$$\omega = B\omega + \gamma, \tag{52}$$

где $\omega=(\omega_1, \dots, \omega_l)$, $\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$, $B=(b_{ik})$, причем

$b_{ik}=0$, если σ_k не следует непосредственно за σ_i;

$b_{ik}=\vee_{\alpha_p}\mu_C(\alpha_p|\sigma_i)$, где α_p — входные сигналы, переводящие σ_i в σ_k; и

$$\gamma_i = \vee_j(\mu_C(\alpha_j|\sigma_i) \wedge \mu_G(f(\sigma_i, \alpha_j))); \tag{53}$$

при этом считается, что $\mu_G(\sigma_i)=0$ для состояний, не входящих в финальное множество T.

Представив (51) в виде линейного уравнения (52), легко показать, что решение (53), а следовательно и (51), может быть найдено с помощью итеративного процесса. Действительно, пусть $\omega^0 = (0, \dots, 0)$ и

$$\omega^{s+1} = B\omega^s + \gamma, \quad s=0, 1, 2, \dots . \tag{54}$$

Тогда методом индукции можно доказать, что последовательность $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots$ является монотонно неубывающей. Действительно, допустим, что для некоторого k $\omega^{k+1} \geqslant \omega^k$; тогда, согласно (54), имеем

$$\omega^{k+2} = B\omega^{k+1} + \gamma \geqslant B\omega^k + \gamma = \omega^{k+1}, \tag{55}$$

а поскольку $\omega^1 \geqslant \omega^0 = 0$, то, следовательно, $\omega^{s+1} \geqslant \omega^s$ для $s=0, 1, 2, \dots$.

Поскольку последовательность $\omega^0, \omega^1, \dots$ монотонно не убывает и ограничена сверху величиной $\omega=(1, \dots, 1)$, она сходится к решению (52), т. е. к первым l компонентам оптимального вектора достижения цели μ_D^M [1]). Более подробный анализ показывает, что процесс (54) дает решение уравнения (52) не более чем за l итераций. Этот факт является непосредственным следствием следующей леммы.

ЛЕММА. *Пусть $B=[b_{ij}]$ — квадратная матрица порядка l, состоящая из вещественных элементов. Пусть также B^s — s-я степень матрицы B, причем знаки суммы и произведения везде обозначают операции $\vee$ и $\wedge$ соответственно. Тогда для всех целых $s \geqslant l$*

$$B + B^2 + \dots + B^s = B + B^2 + \dots + B^l \tag{56}$$

и

$$I + B + B^2 + \dots + B^s = I + B + B^2 + \dots + B^{l-1}, \quad s \geqslant l-1, \tag{57}$$

где I — матрица тождественного преобразования.

Доказательство. Справедливость леммы становится довольно очевидной, если интерпретировать (56) в рамках теории графов. Именно, пусть $G(B)$ обозначает граф с l вершинами, причем b_{ij}, $i, j=1, 2, \dots$ представляет «прочность» дуги между вершинами i и j. Пусть через $\gamma_{i,j,\mu}^s$ обозначена цепь из s дуг в графе $G(B)$:

$$\gamma_{i,j,\mu}^s = (b_{j\lambda_1}, b_{\lambda_1\lambda_2}, \dots, b_{\lambda_{s+1}, j}),$$

начинающаяся в вершине i и оканчивающаяся в вершине j. Индекс μ служит меткой рассматриваемой цепи и изменяется в пределах от 1 до M, где M — число различных цепей длины s, соединяющих вершины i и j.

Определим *прочность* $\sigma(\gamma_{i,j,\mu}^s)$ цепи $\gamma_{i,j,\mu}^s$ как прочность самого слабого ее звена, т. е.

$$\sigma(\gamma_{i,j,\mu}^s) = b_{i\lambda_1} \wedge b_{\lambda_1\lambda_2} \wedge \dots \wedge b_{\lambda_{s+1}, j}. \tag{58}$$

Из определения произведения матриц (с заменой суммы и произведения на операции $\vee$ и $\wedge$ соответ-

[1]) Остальные $n-l$ компонент μ_D^M определяются через соответствующие компоненты μ_G.

ственно) ясно, что (i, j)-й элемент b_{ij}^s матрицы B^s, $s \geqslant 1$, может быть представлен в виде

$$b_{ij}^s = \sigma(\gamma_{i,j,1}^s) \vee \sigma(\gamma_{i,j,2}^s) \vee \ldots \vee \sigma(\gamma_{i,j,M}^s), \quad (59)$$

или, в более компактной форме,

$$b_{ij}^s = \vee_\mu \sigma(\gamma_{i,j,\mu}^s), \quad (60)$$

где $\vee_\mu$ обозначает супремум по всем цепям длины s, соединяющим вершины i и j. Иными словами, величина b_{ij}^s представляет собой прочность самой прочной цепи среди всех цепей длины s, соединяющих вершины i и j.

Согласно данной интерпретации элементов матрицы B^s, каждый (i, j)-й элемент $B + B^2 + \ldots + B^s$ можно рассматривать как прочность самой прочной цепи среди всех цепей длиной не более s, соединяющих вершины i и j.

Таким образом, утверждение леммы эквивалентно следующему:

Если B — матрица порядка l и $s \geqslant l$, то прочность самой прочной из всех цепей с длиной s, соединяющих вершины i и j, равняется прочности самой прочной цепи среди всех цепей с длиной, меньшей или равной l, соединяющих вершины i и j.

Лемму, сформулированную в таком виде, легко доказать. Во-первых, очевидно, что для $s \geqslant l$

$$B + \ldots + B^s \geqslant B + \ldots + B^l. \quad (61)$$

Следовательно, для окончания доказательства достаточно установить справедливость противоположного неравенства $B + \ldots + B^s \leqslant B + \ldots + B^l$.

Пусть $\gamma_{i,j}^s$ — цепь из i в j длины $s > l$. Очевидно, что в каждой такой цепи по крайней мере одна вершина должна встречаться более одного раза, т. е. каждая цепь длины $s > l$ должна иметь один или несколько контуров. В результате отбрасывания этих контуров получается цепь $\gamma_{i,j}^r$ длины $r \leqslant l$. Тогда

из определения прочности цепи (58) имеем

$$\sigma(\gamma_{i,j}^s) \leqslant \sigma(\gamma_{i,j}^r) \quad (62)$$

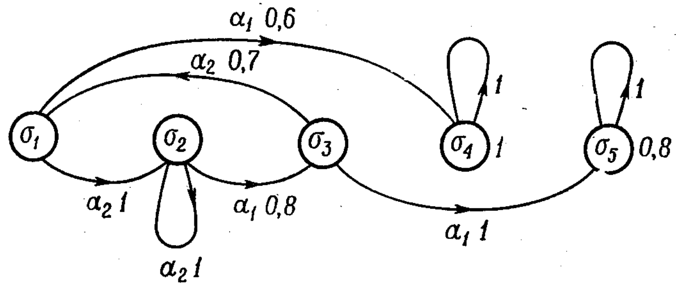
и, следовательно, супремум от $\sigma(\gamma_{i,j}^s)$ по всем цепям длины $s (s > l)$ не превышает супремума от $\sigma(\gamma_{i,j}^r)$ по цепям длины $\leqslant l$. Таким образом,

$$B^s \leqslant B + B^2 + \ldots + B^l, \quad s \geqslant l, \quad (63)$$

откуда

$$B + B^2 + \ldots + B^s \leqslant B + B^2 + \ldots + B^l, \quad s \geqslant l, \quad (64)$$

что вместе с (61) доказывает соотношение (56).



Фиг. 2.

Что касается равенства (57), то заметим, что при $i \neq j$ (62) справедливо для $s \geqslant l - 1$ и $r \leqslant l - 1$. Без ограничения $i \neq j$ (62) имеет место для $s \geqslant l - 1$ и $r \leqslant l - 1$, если $b_{ii} \geqslant b_{ij}$ для $i, j = 1, \ldots, l$. Последнее условие удовлетворяется при замене B на $I + B$. Это означает, что показатель l в (56) может быть заменен на $l - 1$ при замене B на $I + B$. В результате получается формула (57).

Возвращаясь к решению уравнения (52), заметим, что s-я итерация имеет вид

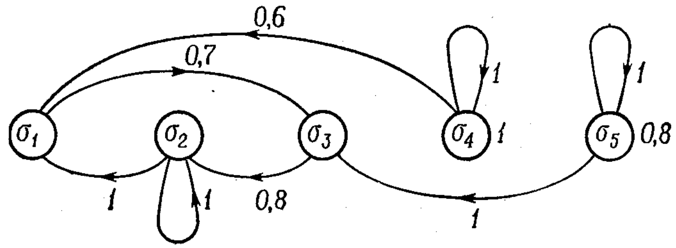
$$W^s = (B^{s-1} + \ldots + B + I)\gamma. \quad (65)$$

Применяя лемму, получим

$$W^s = W^l, \quad s > l, \quad (66)$$

откуда следует, что процесс (54) дает решение уравнения (52) не более чем за l итераций.

Для большей наглядности описанного способа решения уравнения (52) полезно представить переход от (49) к (51) с помощью диаграммы состояний системы A. Предположим для определенности, что система A имеет пять состояний и переходы между состояниями под воздействием различных входных сигналов соответствуют фиг. 2. На этой диаграмме



Фиг. 3.

числа, которыми помечены дуги, ведущие из σ_i в следующее за ним состояние при входном сигнале α_j, соответствуют значениям $\mu_C(\alpha_j|\sigma_i)$. Состояния σ_4 и σ_5 составляют финальное множество, соответствующие значения $\mu_G(\sigma_i)$ указаны рядом с ними. Приведенные значения функции $\mu_C(\alpha_i|\sigma_i)$ соответствуют следующим ограничениям:

$$C(\sigma_1) = \{(\alpha_1,\ 0{,}6),\ (\alpha_2,\ 1)\},$$
$$C(\sigma_2) = \{(\alpha_1,\ 0{,}8),\ (\alpha_2,\ 1)\},$$
$$C(\sigma_3) = \{(\alpha_1,\ 1),\ (\alpha_2,\ 0{,}7)\}.$$

Для рассматриваемой системы функция перехода $f(\sigma_i, \alpha_j)$ в новые состояния представлена табл. 8. С помощью этой таблицы нетрудно построить матрицу $P(\pi)$ для любой выбранной стратегии. Например, для $\pi = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$ имеем

$$P(\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений (51) получается при изменении направления перехода по каждой дуге на обратное (фиг. 3), причем состояния σ_4 и σ_5 из T рассматриваются как источники, а состояния σ_1, σ_2 и σ_3 из T' — как приемники (стоки). Пользуясь диаграммой, представленной на фиг. 3, можно сразу написать уравнения системы (51):

$$\begin{aligned} \mu_D^M(\sigma_1) &= (0{,}6 \wedge \mu_D^M(\sigma_4)) \vee (1 \wedge \mu_D^M(\sigma_2)), \\ \mu_D^M(\sigma_2) &= (0{,}8 \wedge \mu_D^M(\sigma_3)) \vee (1 \wedge \mu_D^M(\sigma_2)), \\ \mu_D^M(\sigma_3) &= (1 \wedge \mu_D^M(\sigma_5)) \vee (0{,}7 \wedge \mu_D^M(\sigma_1)), \\ \mu_D^M(\sigma_4) &= \mu_G(\sigma_4) = 1, \\ \mu_D^M(\sigma_5) &= \mu_G(\sigma_5) = 0{,}8. \end{aligned} \qquad (67)$$

Таблица 8

α_j \ σ_i	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
α_1	σ_4	σ_3	σ_5	σ_4	σ_5
α_2	σ_2	σ_2	σ_1	σ_4	σ_5

Применяя систему упрощенных обозначений, в которой операции $\wedge$ и $\vee$ заменены произведением и суммой, и полагая $\omega_i = \mu_D^M(\sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$, можно привести систему уравнений (67) к виду

$$\omega = B\omega + \gamma, \qquad (68)$$

где

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

Полагая $\omega^0 = (0, 0, 0)$, получаем первое приближение $\omega^1 = (0{,}6,\ 0,\ 0{,}8)$. Последующие итерации дают

$$\omega^2 = (0{,}6,\ 0{,}8,\ 0{,}8), \quad \omega^3 = (0{,}8,\ 0{,}8,\ 0{,}8),$$
$$\omega^4 = (0{,}8,\ 0{,}8,\ 0{,}8).$$

Следовательно, $\omega^3 = (0{,}8,\ 0{,}8,\ 0{,}8)$ есть решение уравнения (68).

Чтобы наглядно представить процесс итераций, предположим, что каждый из источников на фиг. 3 (являющихся поглощающими состояниями на фиг. 2) порождает шарики различных диаметров, причем для источника σ_i, $i = l+1, \ldots, n$, диаметры шариков меняются в пределах от 0 до $\mu_G(\sigma_i)$. Представим себе далее, что дуга на фиг. 2, соответствующая переходу из состояния σ_i при входном сигнале α_j, является трубой диаметром $\mu_C(\alpha_j|\sigma_i)$, которая в обратном направлении, т. е. в направлении, показанном на фиг. 3, может пропускать шарики диаметром не более $\mu_C(\alpha_j|\sigma_i)$. Следовательно, диаграмму на фиг. 3 можно интерпретировать как сеть труб указанных диаметров, которые могут пропускать шарики меньшего или такого же диаметра в указанных направлениях. Состояния σ_4 и σ_5, принадлежащие финальному множеству, играют роль источников шариков диаметров не более $\mu_G(\sigma_4)$ и $\mu_G(\sigma_5)$ соответственно, а остальные состояния (σ_1, σ_2 и σ_3) являются приемниками. Поскольку поглощающие состояния действуют как источники, описанный метод решения будет называться *методом обратного потока.*

Предположим теперь, что на переход шарика из одной вершины сети на фиг. 3 в другую затрачивается одна единица времени. Если в момент времени $t=0$ шариков в вершинах σ_1, σ_2 и σ_3 нет, то в момент $t=1$ максимальные диаметры шариков в σ_1, σ_2 и σ_3 будут соответственно равны ω_1^1, ω_2^1 и ω_3^1, где $\omega^1 = (\omega_1^1,\ \omega_2^1,\ \omega_3^1)$ — первая итерация, получаемая с помощью уравнения (68). В момент $t=2$ максимальные диаметры шариков будут задаваться величиной ω^2, а в момент $t=3$ — величиной ω^3. Так как для перехода любого шарика из порождающего его источника в любую вершину сети требуется не более трех единиц времени, то при новых итерациях не будет происходить дальнейшего увеличения размеров шариков в каждом источнике. Таким образом, величина ω^3 определяет максимальный диаметр шариков в каждом стоке и, следовательно, является искомым решением (68).

Переходя к иллюстрации уравнений (43) и принципа чередования, рассмотрим вектор стратегии $\pi = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1)$. Для этого вектора система (43) принимает вид

$$\begin{aligned} \mu_D(\sigma_1|\pi) &= 0{,}6 \wedge \mu_D(\sigma_4|\pi), \\ \mu_D(\sigma_2|\pi) &= 0{,}8 \wedge \mu_D(\sigma_3|\pi), \\ \mu_D(\sigma_3|\pi) &= 1 \wedge \mu_D(\sigma_5|\pi). \end{aligned} \tag{69}$$

В этом случае состояния σ_1 и σ_3 принадлежат к T_l', а σ_2 — к T_2'. Замечая, что $\mu_D(\sigma_4|\pi) = \mu_G(\sigma_4) = 1$ и $\mu_D(\sigma_5|\pi) = \mu_G(\sigma_5) = 0{,}8$, сразу находим искомое решение: $\mu_D(\sigma_1|\pi) = 0{,}6$; $\mu_D(\sigma_2|\pi) = 0{,}8$; $\mu_D(\sigma_3|\pi) = 0{,}8$.

Результаты, полученные с помощью аналогичных вычислений для других возможных стратегий, приведены в табл. 9.

Таблица 9

π \ σ	σ_1	σ_2	σ_3
$(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1)$	0,6	0,8	0,8
$(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$	0,6	0,6	0,6
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1)$	0,6	0	0,8
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)$	0,6	0	0,6
$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_1)$	0,8	0,8	0,8
$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$	0	0	0
$(\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1)$	0	0	0,8
$(\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2)$	0	0	0

Для проверки принципа чередования возьмем $\pi' = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$ и $\pi'' = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1)$. Применение правила (47) дает $\pi = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1)$. Отметим, что $\pi \geqslant \pi'$ и $\pi \geqslant \pi''$. Согласно данным табл. 9, оптимальной стратегией будет $(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_1)$, что совпадает с результатом итераций.

Описанный в настоящем разделе подход к решению задач с неявно определенным временем окончания может быть распространен на более общие процессы принятия решений в расплывчатых условиях. В частности, метод решения функционального уравнения (49) может быть легко обобщен на случай расплывчатых систем в расплывчатых условиях. Кроме того, по аналогии с разд. 4 уравнения (43) и (49) можно обобщить на случай стохастических систем с конечным числом состояний.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Создание общей теории принятия решений в расплывчатых условиях является чрезвычайно сложной и трудной задачей. Приведенные в настоящей статье результаты следует рассматривать лишь как первую попытку построения логической схемы такой теории.

Многие аспекты теории принятия решений в расплывчатых условиях требуют более тщательного анализа. К ним относятся такие вопросы, как осуществление расплывчатых решений, способ объединения целей и ограничений в случае их неодинаковой важности или взаимозависимости, управление расплывчатыми системами и реализация расплывчатых алгоритмов, понятие расплывчатой обратной связи и ее влияние на принятие решений, управление системами в расплывчатых условиях, частично определенных с помощью «поясняющего примера», и, наконец, принятие решений в смешанных условиях, в которых неточность является следствием как случайности, так и расплывчатости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Athans M., Falb P., Optimal Control, Mc Graw-Hill, New York, 1966.
2. Bellman R. E., Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957; русский перевод: Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
3. Bellman R. E., A Marcoffian Decision Process, *J. Math. a. Mech.*, **6**, 679—684 (1957).
4. Bellman R. E., Kalaba R., Zadeh L. A., Abstrcation and Pattern Classification, *J. Math. Anal. a. Appl.*, **13**, 1—7 (1966).
5. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., К теории оптимальных процессов, *Изв. АН СССР*, **24**, 3—42 (1960).

6. Brown J. G., Fuzzy Sets on Boolean Lattices, Rep. № 1957, Ballistic Res. Labs., Aberdeen, Maryland, Jan. 1969.
7. Bryson A. E., Jr, Ho Y. C., Applied Optimal Control, Blaisdell Co., Waltham, Mass., 1969.
8. Chang C. L., Fuzzy Topological Spaces, *J. Math. Anal. a. Appl.*, **24**, 182—190 (1968).
9. Chang S. S. L., Fuzzy Dynamic Programming and the Decision Making Process, Proc. 3d Princeton Conf. on Information Sciences and Systems, 1969, pp. 200—203.
10. Derman C., Marcoffian Sequential Control Processes — Denumerable State Space, *J. Math. Anal. a. Appl.*, **10**, 295—302 (1965).
11. Derman C., Klein M., Some Remarks on Finite Horizon Marcoffian Decision Models, *Operat. Res.*, **13**, 272—278 (1965).
12. Eaton J. H., Zadeh L. A., Optimal Pursuit Strategies in Discrete-State Probabillistic Systems, *J. Basic Eng.* (ASME), **84**, Ser. D, 23—29 (1962).
13. Eaton J. H., Zadeh L. A., An Alternation Principle for Optimal Control, *Automation a. Remote Control*, **24**, 328—330 (1963).
14. Fu K. S., Li T. J., On the Behavior of Learning Automata and its Applications, Tech. Rep. TR-EE 68-20, Purdue Univ., Lafayette, Indiana, Aug. 1968.
15. Goguen J., L-fuzzy Sets, *J. Math. Anal. a. Appl.*, **18**, 145—174 (1967).
16. Howard R. A., Dynamic Programming and Marcoff Processes, M. I. T. Press a. Wiley, Cambridge, Mass. a. New York, 1960.
17. Wagner H. M., Principles of Operations Research, Prentice-Hall, 1969; русский первод: Вагнер Г., Основы исследования операций, т. I, 1972, тт. II и III, 1973.
18. Wee W. G., On Generalisation of Adaptive Algorithms and Application of the Fuzzy Set Concept to Pattern Classification, Tech. Rep. TR-EE 67-7, Purdue Univ., Lafayette, Indiana, July 1967.
19. Wolfe P., Danzig G. B., Linear Programming in a Marcoff Chain, *Operat. Res.*, **10**, 702—710 (1962).
20. Zadeh L. A., Fuzzy Sets, *Inform. a. Control*, **8**, 338—353 (1965).
21. Zadeh L. A., Toward a Theory of Fuzzy Systems, ERL Rep. № 69-2, Electronics Res. Labs., Univ. California, Berkeley, June 1969.
22. Zadeh L. A., Fuzzy Algorithms, *Inform. a. Control*, **12**, 99—102 (1968).
23. Zadeh L. A., Probability Measures of Fuzzy Events, *J. Math. Anal. a. Appl.*, **23**, № 2, 421—427 (1968).