# Однородные координаты

Автор: Алексей Игнатенко ignatenko@graphics.cs.msu.su

*Однородные координаты - мощный математический инструмент, находящий свое применения в различных разделах компьютерной графики - геометрическом моделировании, визуализации, машинном зрении и т.д. Однородные координаты явно или неявно используются в любом графическом пакете на этапах преобразования и затенения геометрии. Например, в OpenGL[4,1] или DirectX. В данной статье дается определение и некоторые интересные свойства однородных координат.*



## 1 Введение

Однородные координаты - это математический механизм, связанный с определением положения точек в пространстве. Привычный аппарат декартовых координат, не подходит для решения некоторых важных задач в силу следующих соображений:

- В декартовых координатах невозможно описать бесконечно удаленную точку. А многие математические и геометрические концепции значительно упрощаются, если в них используется понятие бесконечности. Например, "бесконечно удаленный источник света".

- С точки зрения алгебраических операций, декартовы координаты не позволяют провести различия межу точками и векторами в пространстве. Действительно, (1,–2,5) - это направление или точка?

- Невозможно использовать унифицированный механизм работы с матрицами для выражения преобразований точек. С помощью матриц 3x3 можно описать вращение и масштабирование, однако описать смещение ($x'=x+a$) нельзя.

- Аналогично, декартовы координаты не позволяют использовать матричную запись для задания перспективного преобразования (проекции) точек.

Для решения этих проблем используются однородные координаты.

## 2 Однородные координаты

Существуют различные способы определения однородных координат. Мы будем исходить из задачи унифицированного представления координат точек в пространстве, включающего бесконечно удаленные точки.
Пусть заданы действительных числа, a и w. Рассмотрим их отношение a/w. Зафиксируем значение a, и будем варьировать значение w. При уменьшении w, значение a/w будет увеличиваться. Заметим, что если w стремится к нулю, то a/w стремится к бесконечности. Таким образом, чтобы включить в рассмотрение понятие бесконечности, для представления значения v используется пара чисел (a,w), таких, что v=a/w. Если $w \neq 0$, значение v в точности равно a/w. В противном случае v=a/0, т.е. равно бесконечности.
Таким образом, координаты трехмерной точки v=(x,y) можно представить через координаты (wx,wy,w). При w=1 эти координаты описывают точку с конечными координатами (x,y), а при w=0 - точку, бесконечно

удаленную в направлении (x,y). Как было сказано выше, обычным представлением через декартовы кодинаты (x,y) это сделать невозможно.
Рассмотрим двумерную плоскость, некоторую точку (x,y) на ней и заданную функцию f(x,y). Если заменить x и y на x/w и y/w, то выражение f(x,y)=0 заменится на f(x/w,y/w)=0. Если f(x,y) – многочлен, то его умножение на $w^n$ (n – степень многочлена) уберет все знаменатели.
Например, пусть имеется прямая

$$Ax + By + C = 0$$

Замена x и y на x/w и y/w дает A(x/w) + B(y/w) + C = 0. Умножая на w, получаем

$$Ax + By + Cw = 0 \qquad (1)$$

Другой пример. Пусть задан многочлен 2-го порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Ey + F = 0$$

После замены x и y на x/w и y/w, соответственно, и умножения на $w^2$, получаем

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxw + 2Eyw + Fw^2 = 0 \qquad (2)$$

Если внимательно посмотреть на многочлены (1) и (2), можно заметить, что степени при всех членах равны. В случае многочлена 1-го порядка, это степень 1, тогда как для многочлена 2-й степени, все члены (т.е. $x^2$, xy, $y^2$, xw, yw и $w^2$) имеют степень 2. Следовательно, для данного многочлена n-го порядка, после введения координаты w все члены будут иметь степень n. Такие многочлены называются однородными, а координаты (x,y,w) называются *однородными координатами* (homogenous coordinates).
Приведенные рассуждения остаются верными и в случае трехмерного пространства. Координаты (x,y,z) заменяются на (x/w, y/w, z/w) и после умножения на w в соответствующей степени n дают однородный многочлен.
Однородные координаты требуют три компоненты для представления точки на плоскости (и четыре компоненты для точки в пространстве). Какие же однородные координаты соответствуют точке с координатами (x,y)? Легко видеть, что это будет (x,y,1), т.е. w полагается равной 1.
В общем случае, это преобразование не однозначно. Однородные координаты точки (x,y) равны (xw, yw,w) для любого ненулевого w. Аналогично в трехмерном пространстве: точке (x,y,z) соответствуют координаты (xw, yw,zw, w). В то же время, преобразование из однородных координат в евклидовы однозначно: точке (x,y,w) соответствует точка (x/w, y/w).
Приведем более формальное определение.

**Определение 1** *Однородными координатами точки $P=(x_1,..,x_n), P \in R^n$ называются координаты $P_{hom}=(wx_1,wx_2,..,wx_n,w), P_{hom} \in R^{n+1}$, причем хотя бы один элемент должен быть отличен от нуля.*

На самом деле, множество векторов $P_{hom}$ при определенных дополнительных операциях образуют так называемое *проективное пространство*, которое имеет важнейшее значение в машинном зрении. Мы на этом останавливаться не будем. Важнее запомнить следующее: *преобразование из однородных координат в евклидовы однозначно; преобразование из евклидовых координат в однородные – нет.*

## 3 Геометрическая интерпретация

Можно дать простую геометрическую интерпретацию однородных координат на плоскости.
Пусть даны однородные координаты (x,y,w) точки на плоскости Oxy, поставим ей в соответствие точку в трехмерном евклидовом пространстве с координатами x, y и w по осям X, Y и W соответственно. Прямая, соединяющая эту точку с началом координат, пересекает плоскость w=1 в точке (x/w, y/w, 1) (см. Рис. 1).

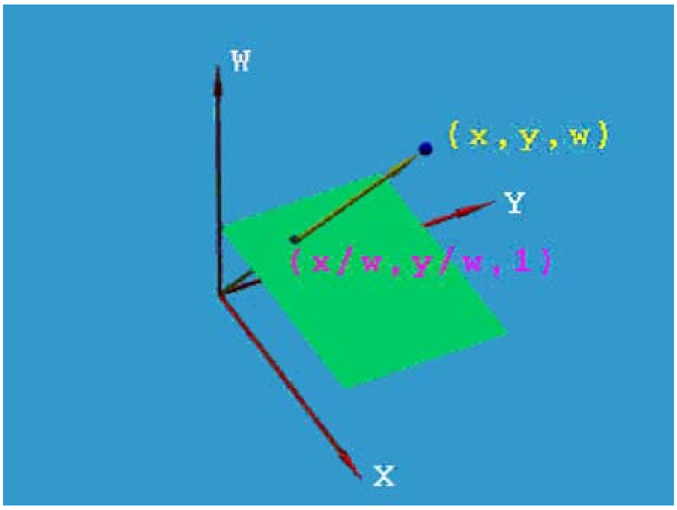

Figure 1: Геометрическая интерпретация однородных координат

Таким образом, преобразование из однородных координат в евклидовы эквивалентно проекции точки на плоскость w=1 вдоль линии, соединяющей точку с началом координат.
Из рисунка также видно, что если преобразование из однородных координат в евклидовы однозначно, то обратное преобразование – нет, потому что все точки на линии, соединяющей точку (x,y,w) и начало координат будут проецироваться в точку (x/w, y/w).

## 4 Свойства

### *4.1 Точка в бесконечности*

Как было сказано выше, с помощью однородных координат можно легко описывать бесконечность. Рассмотрим точку с однородными координатами (x,y,w). Ей соответствует точка с евклидовыми координатами (x/w, y/w). Зафиксируем x и y и устремим w к нулю. Точка (x/w, y/w) будет удаляться все дальше и дальше в бесконечность в направлении (x,y). Когда w станет нулем, (x/w, y/w) уходит в бесконечность. Следовательно, однородные координаты (x,y,0) – *идеальная точка* (ideal point) или, по-другому, *точка в бесконечности* (point at infinity) по направлению (x,y). Аналогично для трехмерного пространства: точка (x,y,z,0) – точка в бесконечности по направлению (x,y,z).
Например, в OpenGL для определения положения источника света используются однородные координаты. С их помощью определить как точечный источник света (w=1), так и параллельный источник света (w=0).

### *4.2 Различие между точками и векторами*

Пусть имеется система координат [3] (O,[ $\bar{i}$],[ $\bar{j}$],[ $\bar{k}$]). Чтобы представить данный вектор v, необходимо найти три числа ($v_1$,$v_2$,$v_3$), причем такие, что выполняется соотношение:

$$v = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j} + v_3 \bar{k}$$

Это значит, что вектор v задает направление относительно векторов базиса [ $\bar{i}$],[ $\bar{j}$],[ $\bar{k}$].
С другой стороны, чтобы представить точку P, можно рассматривать ее местоположение как смещение на определенный вектор ($p_1$, $p_2$, $p_3$) относительно начала координат. Следовательно, положение точки P можно записать следующим образом:

$$P = O + p_1 \bar{i} + p_2 \bar{j} + p_3 \bar{k}$$

Таким образом, для описания положения точки трех параметров недостаточно.

Используя однородные координаты, эти выражения можно записать как $v = (v_1, v_2, v_3, 0)$ и $P=(p_1,p_2,p_3,1)$. В данном случае 1 или 0 показывают, принимает ли начало координат участие в вычислениях. Действительно, это согласуется с представлением о том, что вектор - это точка, бесконечно удаленная в некотором направлении (т.е. с w=0 в однородных координатах).
Заметим, что покоординатные операции с векторами сохраняют однородную форму записи координат:

- Разность двух точек (x, y, z, 1) и (d,e,f,1) равна (x–d, y–e,z–f,0), т.е. как и ожидалось, является вектором.
- Сумма точки (x, y, z, 1) и вектора (d,e,f,0) равна другой точке (x+d, y+e, z+f, 1).
- Два вектора можно складывать, в результате получается вектор (d, e,f, 0) + (m, n, r, 0) = (d + m, e + n, f + r, 0)
- Имеет смысл масштабирование вектора 3(d, e, f, 0) = (3f, 3f, 3f, 0)
- Имеет смысл создание любой линейной комбинации векторов.

### *4.3 Унифицированная запись аффинных преобразований*

Аффинное преобразования на плоскости для точки (x,y) записывается следующим образом:

$$x' = \alpha x + \beta y + \lambda$$
$$y' = \gamma y + \delta y + \mu$$

Известно, что любое подобное преобразование можно представить как суперпозицию простейших преобразований: поворота, масштабирования, отражения и переноса
В компьютерной графике используется матричная запись этих преобразований. Для первых трех преобразований матричная форма находится тривиально (см., например, [2]). А преобразование переноса представить через матрицы 2-го порядка не удается.
Для устранения этого недостатка используются однородные координаты: вместо матриц 2x2 используются матрицы 3x3 и векторы (x,y,1). Для преобразования переноса строится следующая матрица:

$$T_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, перенос точки v=(x,y,1) на вектор $(\lambda,\mu)$ считается следующим образом:

$$T_{\lambda\mu}v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda \\ y+\mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

Произвольное аффинное преобразование можно описать так:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \lambda \\ \gamma & \delta & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогичные рассуждения проводятся и для трехмерного случая. Заметим, что аффинные преобразования не позволяют преобразовать точку к вектору и наоборот.

### *4.4 Проективные преобразования*

Проективные преобразования широко используются в трехмерной компьютерной графике для нахождения проекций трехмерных точек на двухмерную плоскость экрана. Рассмотрим частный случай проективного преобразования - перспективную проекцию. Известно, что перспективное преобразование

не описывается через матрицы (так как связано с делением). Эта проблема решается путем введения однородных координат.
Простейшая матрица центральной перспективной проекции вдоль оси z записывается следующим образом (c - центр проекции):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/c & 1 \end{pmatrix}$$

После применения матрицы проекции P к точке (x,y,z,1), получим точку (x,y,z,0, 1–z/c). Это точка с однородными координатами, которые еще нужно преобразовать в декартовы путем деления на четвертую компоненту.
Таким образом, использование однородных координат позволяет использовать аппарат матриц четвертого порядка для проективных преобразований, что заметно упрощает решение задач геометрического моделирования.
Обратите внимание, в отличие от матриц аффинного преобразования, матрица перспективной проекции может преобразовывать вектор в точку. Т.е. для бесконечно удаленной точки (x,y,z,0) существует ее проекция на экран, что согласуется с интутивными представлениями о перспективе.
Например, используя однородные координаты, в OpenGL можно задать треугольник, у которого две вершины будут лежать в бесконечности. Это свойство используется в некоторых графических алгоритмах (например, визуализация теневых объемов)

## 5 Заключение

Приведем основные характеристики однородных координат:

- Используя однородные координаты, можно описывать бесконечно удаленные точки, которые невозможно описать, используя евклидовы координаты.
- Однородные координаты позволяют провести различия между точками и векторами.
- Представление точек и векторов в однородных координатах позволяет унифицировать матричную запись аффинных преобразований.
- На аппарате однородных координат построены проективные преобразования.

## References


[1]
Ю.М. Баяковский, А.В.Игнатенко, and А.А. Фролов. *Графическая библиотека OpenGL*. Москва, 2003.

[2]
Е.В. Шикин and А.В. Боресков. *Компьютерная графика. Полигональные модели*. Диалог-МИФИ, Москва, 2001.

[3]
Эдвард Эйнджел. *Интерактивная компьютерная графика. Вводный курс на базе OpenGL*. Вильямс, Москва, 2 edition, 2001.

[4]
http://www.opengl.org.